Geometrie

March 8, 2024

Chapter 1

Theorème des cercles qui font bisous-bisous

1.1 Figure

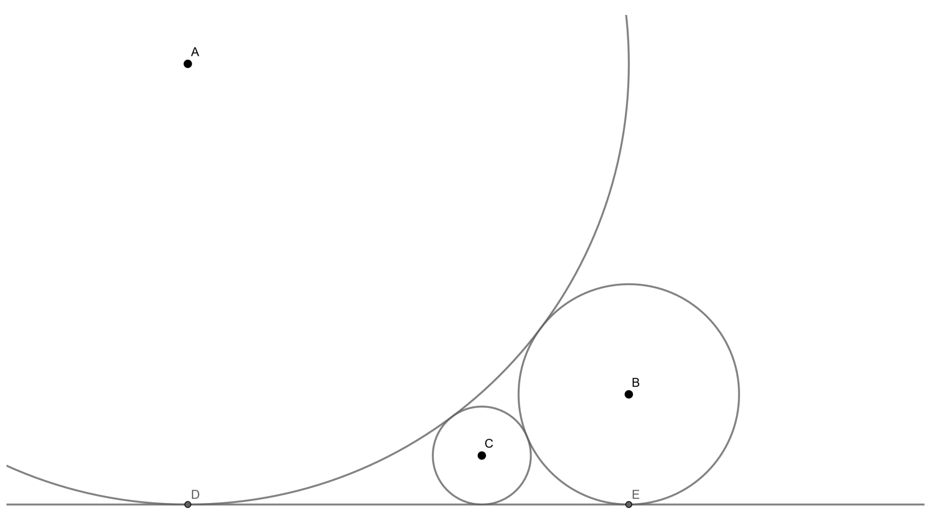

Figure 1.1: Schema de deux cercles qui font des bisous et leur enfant

1.2 Trouvons r_3 par rapport à r et r_1

Pour commencer, traçons les triangles rectangles dont on aurait besoin pour la résolution du problème.

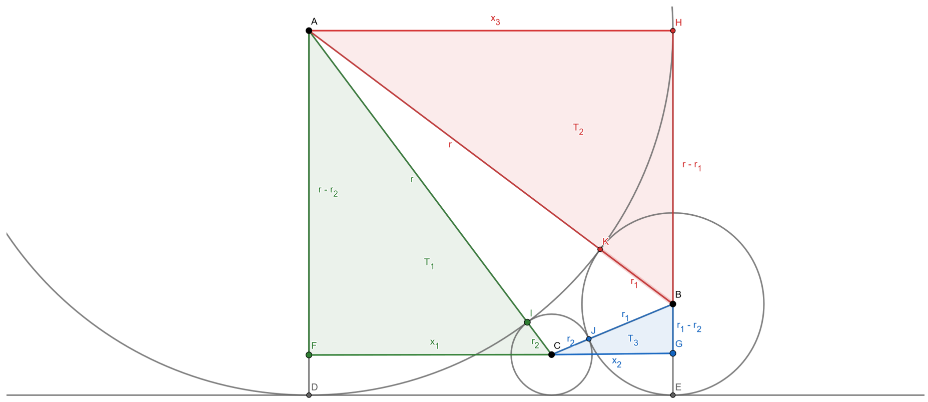

Figure 1.2: Rajout des trois triangles rectangles

De part la figure ci-dessus, nous pouvons en déduire la relation suivante

$$x_3 = x_1 + x_2$$

1. <u>Trouvons x_1</u>
   Pour trouver x_1, utilisons le théorème de Pythagore sur T_1 :

   $$AC^2 = AF^2 + FC^2$$

   Soit :

   $$(r + r_2)^2 = (r - r_2)^2 + x_1^2$$

   Dévéloppons :

   $$r^2 + 2rr_2 + r_2^2 = r^2 - 2rr_2 + r_2^2 + x_1^2$$

   Réarrangeons :

   $$\cancel{r^2} + 2rr_2 + \cancel{r_2^2} = \cancel{r^2} - 2rr_2 + \cancel{r_2^2} + x_1^2$$
   $$4rr_2 = x_1^2$$

   Donc :

   $$\boxed{x_1 = 2\sqrt{rr_2}}$$

2. <u>Trouvons x_2</u>
   A l'instar de x_1, nous avons :

   $$\boxed{x_2 = 2\sqrt{r_1 r_2}}$$

3. Trouvons x_3
   De même pour x_3, nous avons :

$$\boxed{x_3 = 2\sqrt{rr_1}}$$

Une fois que nous avons trouvé x_1, x_2 et x_3, nous pouvons maintenant chercher r_2.
Nous avons maintenant :

$$2\sqrt{rr_1} = 2\sqrt{rr_2} + 2\sqrt{r_1 r_2}$$

Divisons le tout par 2 :

$$\sqrt{rr_1} = \sqrt{rr_2} + \sqrt{r_1 r_2}$$

Sortant $\sqrt{r_2}$:

$$\sqrt{rr_1} = \sqrt{r_2}(\sqrt{r} + \sqrt{r_1})$$

Divisons le tout par $(\sqrt{r} + \sqrt{r_1})$:

$$\frac{\sqrt{rr_1}}{(\sqrt{r} + \sqrt{r_1})} = \sqrt{r_2}$$

(Je ne sais pas pourquoi mais cette formule ne donne pas la solution)
Inversion :

$$\frac{\sqrt{r} + \sqrt{r_1}}{\sqrt{rr_1}} = \frac{1}{\sqrt{r_2}}$$

Séparons les dividendes :

$$\frac{\sqrt{r}}{\sqrt{rr_1}} + \frac{\sqrt{r_1}}{\sqrt{rr_1}} = \frac{1}{\sqrt{r_2}}$$

Simplifions :

$$\frac{\cancel{\sqrt{r}}}{\cancel{\sqrt{r}}\sqrt{r_1}} + \frac{\cancel{\sqrt{r_1}}}{\sqrt{r}\cancel{\sqrt{r_1}}} = \frac{1}{\sqrt{r_2}}$$

Soit la relation suivante :

$$\boxed{\tfrac{1}{\sqrt{r_2}} = \tfrac{1}{\sqrt{r_1}} + \tfrac{1}{\sqrt{r}}}$$

1.3 Trouvons r_n en fonction de n

En utilisant la formule trouvée ci-dessus, remplaçons r_2 par r_n, r_1 par r_{n-1} et comme r représent le rayon du premier cercle, il est constant donc $r = 1$.

Soit :

$$\frac{1}{\sqrt{r_n}} = \frac{1}{\sqrt{r_{n-1}}} + 1$$

$$\frac{1}{\sqrt{r_n}} = \frac{1 + \sqrt{r_{n-1}}}{\sqrt{r_{n-1}}}$$

$$\sqrt{r_n} = \frac{1}{\frac{1+\sqrt{r_{n-1}}}{\sqrt{r_{n-1}}}}$$

La formule finale :

$$\boxed{r_n = \left(\frac{1}{\frac{1+\sqrt{r_{n-1}}}{\sqrt{r_{n-1}}}}\right)^2}$$

1.4 Trouvons le centre du cercle nouvellement créé

Comme $y_n = r_n$, nous n'avons plus à chercher y.
Il nous reste plus que x_n : Posons :

$$x_1 = FC \text{ et } x_2 = CG$$

Nous avons deux formule possible :

$$\boxed{x_n = x_A + FC}$$

ou

$$\boxed{x_n = x_{n-1} - CG}$$