TDs : Programmation linéaire

Les exercices suivants pourront être résolus avec le solveur :
`http://www.zweigmedia.com/RealWorld/simplex.html`.

1 Résolution graphique : forme, minimisation et maximisation

Exercice 1. On considère les équations suivantes :

$$\begin{array}{l}
\min(z = 3x + 4y) \quad x, y \geq 0 \\
\begin{array}{ccccl}
x & + & y & \geq 9 & \quad x \geq 3 \\
x & - & y & \leq 9 & \quad y \leq 10 \\
x & + & 3y & \geq 18 &
\end{array}
\end{array}$$

Question 1.1. Est-ce un programme linéaire ? Si oui sous quelle forme est-il ?

Question 1.2. Résoudre graphiquement le problème de minimisation de z.

Question 1.3. Si on cherche à maximiser z, y a-t-il une solution ?

Exercice 2. Donnez la forme des trois programmes linéaires suivants et les résoudre graphiquement.

$$P1 : \max(z = 12x + 10y)$$
$$\begin{array}{ccccl}
x & & & \geq 5 \\
4x & + & y & \leq 4 \\
x & + & y & \leq 2
\end{array}$$
$$x, y \geq 0$$

$$P2 : \max(z = 12x + 10y)$$
$$\begin{array}{ccccl}
4x & + & y & \geq 4 \\
x & + & y & \geq 2
\end{array}$$
$$x, y \geq 0$$

$$P3 : \max(z = x + 2y) \quad x, y \geq 0$$
$$\begin{array}{ccccl}
4x & + & 2y & \leq 300 \\
5x & & & \leq 310 \\
2x & + & 4y & \leq 200 \\
 & & 3y & \leq 100
\end{array}$$

2 Modélisation simple, Primal, Dual : Le fleuriste et l'hôtelier

Exercice 3 (Le problème de maximisation du fleuriste (primal)).
Un fleuriste compose 3 types de bouquets à partir de 3 catégories de fleurs dont il dispose en stock. La composition des bouquets, leur prix de vente et les stocks disponibles de fleurs sont décrits dans le tableau suivant.

	Type1	Type2	Type3	Stock disponible
roses	2	3	2	90
oeillets	1	2	1	81
orchidées	4	3	1	120
prix d'un bouquet	8	5	6	

Question 3.1. Modéliser le problème qui permet de maximiser la recette du fleuriste.

Exercice 4 (Le problème de minimisation associé de l'hôtelier (dual)).
Un hôtelier veut acheter le stock de fleurs au prix le plus bas possible.

Question 4.1. On note t le prix d'une rose, u le prix d'un œillet et v le prix d'une orchidée.
Donner l'équation de la somme S que devra payer l'hôtelier pour acheter la totalité du stock de fleurs ?

Question 4.2. Le problème de l'hôtelier est de trouver des valeurs pour t, u et v de manière à minimiser S avec la contrainte que S soit acceptable pour le fleuriste : c'est-à-dire que ce dernier ne perde pas d'argent par rapport à une vente sous forme de bouquets.
Dans ces conditions, quelles contraintes impliquant les prix des bouquets et le prix unitaire des fleurs le fleuriste doit-il imposer ?

Question 4.3. A partir des réponses aux deux questions ci-dessus, écrire le problème dual.

Question 4.4. Ecrire le problème Primal sous forme standard et donner le premier tableau du simplex.

Question 4.5. *(Travail Personnel)* Résoudre le problème primal par la méthode du simplex (tableaux).

Question 4.6. Le dernier tableau du simplex est donné ci-dessous. En déduire la solution optimale du primal et la valeur des variables. En déduire également la solution optimale du dual et la valeur des variables.

$Tableau(P)$:

variables de base	x	y	z	e_1	e_2	e_3	B
z :	0	1	1	2/3	0	−1/3	20
e_2 :	0	1/2	0	−1/2	1	0	36
x :	1	1/2	0	−1/6	0	1/3	25
C, v :	0	−5	0	−8/3	0	−2/3	−320

3 Primal-Dual : existence de solutions

Exercice 5. Remplir le tableau suivant avec “possible” et “impossible” et expliquer les réponses. Vous pouvez vous appuyer sur les exercices déjà traités.

PRIMAL/DUAL	existe solution optimale	pb sans sol. réalisable	pb non borné
existe solution optimale			
pb sans sol. réalisable			
pb non borné			

4 Modélisation

Exercice 6 (La Raffinerie)**.** Une raffinerie mélange 5 types d’essence brute pour obtenir deux qualités de carburant : normal et super. Le nombre de barils disponibles par jour, le taux de performance ainsi que le prix par baril est donné pour chaque type d’essence brute dans le tableau suivant :

Type d’essence	Performance	Barils disponibles	Prix / baril ($)
1	70	2000	0.80
2	80	4000	0.90
3	85	4000	0.95
4	90	5000	1.15
5	99	5000	2.00

Le carburant *normal* doit avoir un taux de performance d’au moins 85 et le *super* d’au moins 95. Des contrats obligent la raffinerie à produire au moins 8000 barils de super par jour. Mais ils peuvent vendre toute leur production aux prix de 2.85 $ par baril de carburant *normal* et 3.75 $ par baril de *super*. Supposons que le taux de performance est proportionnel au mélange (par exemple un mélange moitié type 1 moitié type 2 donne un taux de performance de 75).

On introduit les notations suivantes :

- pe_i est la performance du type d’essence i
- c_i est le cout d’achat d’un baril de type d’essence i
- d_i est le nombre de barils disponibles du type d’essence i
- pr_j est le prix d’un baril de carburant j (avec $j = 1$ normal, et $j = 2$ super)
- $minprod_j$ est le nombre minimal de barils de carburant j à produire par jour
- $pemin_j$ est la performance minimale du carburant j
- nE nombre de type d’essences, nC nombre de type de carburants

Question 6.1. Quelles sont les variables pour ce problème rendu générique ?

Question 6.2. Donner une formulation sous forme de programme linéaire qui maximise le profit d’une raffinerie dans le cas générique.

Question 6.3. *(Travail Personnel)* Précisez votre modélisation dans le cas particulier de cette raffinerie et faîtes tourner un solveur pour maximiser le profit de la raffinerie.