

# Théorie des Langages

## Cours 3

### Grammaires $LR(k)$

Elana Courtines  
courtines.e@gmail.com  
<https://github.com/irinacake>

Séance 1 - 21 septembre 2022  
Séance 2 - 03 octobre 2022

Hugues Casse - [hcasse@irit.fr](mailto:hcasse@irit.fr)

*Ce document ne présente que les exercices faits en CM dont les corrigés ne sont pas publiquement disponibles.*

# 1 Bottom-up Approach

## Application :

Parse the word : "if ( id == int ) id = id ; \$" (see the Grammar page 5/69) :

| stack             | word                          | action     |
|-------------------|-------------------------------|------------|
| $\lambda$         | if ( id == int ) id = id ; \$ | shift      |
| if                | ( id == int ) id = id ; \$    | shift      |
| if (              | id == int ) id = id ; \$      | shift      |
| if ( id           | == int ) id = id ; \$         | reduce(8)  |
| if ( F            | == int ) id = id ; \$         | reduce(6)  |
| if ( T            | == int ) id = id ; \$         | reduce(4)  |
| if ( E            | == int ) id = id ; \$         | shift      |
| if ( E ==         | int ) id = id ; \$            | shift      |
| if ( E == int     | ) id = id ; \$                | reduce(9)  |
| if ( E == F       | ) id = id ; \$                | reduce(6)  |
| if ( E == T       | ) id = id ; \$                | reduce(4)  |
| if ( E == E       | ) id = id ; \$                | reduce(11) |
| if ( B            | ) id = id ; \$                | shift      |
| if ( B )          | id = id ; \$                  | shift      |
| if ( B ) id       | = id ; \$                     | shift      |
| if ( B ) id =     | id ; \$                       | shift      |
| if ( B ) id = id  | ; \$                          | reduce(8)  |
| if ( B ) id = F   | ; \$                          | reduce(6)  |
| if ( B ) id = T   | ; \$                          | reduce(4)  |
| if ( B ) id = E   | ; \$                          | shift      |
| if ( B ) id = E ; | \$                            | reduce(1)  |
| if ( B ) S        | \$                            | reduce(2)  |
| S                 | \$                            | shift      |
| S \$              | $\lambda$                     | reduce(0)  |
| S'                | $\lambda$                     | accept     |

## 2 LR Approach

### Application :

Parse the word : "abaac" (see the Grammar/Closures page 19+) :

| pile                                   | word         | next action      |
|--|--------------|------------------|
| $I_0$                                  | <i>abaac</i> | shift a( $I_2$ ) |
| $I_0 a I_2$                            | <i>baac</i>  | shift b( $I_6$ ) |
| $I_0 a I_2 b I_6$                      | <i>aac</i>   | shift a( $I_8$ ) |
| $I_0 a I_2 b I_6 a I_8$                | <i>ac</i>    | shift a( $I_8$ ) |
| $I_0 a I_2 b I_6 a I_8 a I_8$          | <i>c</i>     | shift c( $I_7$ ) |
| $I_0 a I_2 b I_6 a I_8 a I_8 c I_7$    | $\lambda$    | reduce(4)        |
| $I_0 a I_2 b I_6 a I_8 a I_8 A I_{12}$ | $\lambda$    | reduce(5)        |
| $I_0 a I_2 b I_6 a I_8 A I_{12}$       | $\lambda$    | reduce(5)        |
| $I_0 a I_2 b I_6 A I_{11}$             | $\lambda$    | reduce(3)        |
| $I_0 S I_1$                            | $\lambda$    | reduce(0)        |
| $I_0 S'$                               | $\lambda$    | accept           |

More detailed version with extra steps for *goto*'s :

| pile                                   | word         | next action   |
|--|--------------|---------------|
| $I_0$                                  | <i>abaac</i> | shift a       |
| $I_0 a$                                | <i>baac</i>  | goto $I_2$    |
| $I_0 a I_2$                            | <i>baac</i>  | shift b       |
| $I_0 a I_2 b$                          | <i>aac</i>   | goto $I_6$    |
| $I_0 a I_2 b I_6$                      | <i>aac</i>   | shift a       |
| $I_0 a I_2 b I_6 a$                    | <i>ac</i>    | goto $I_8$    |
| $I_0 a I_2 b I_6 a I_8$                | <i>ac</i>    | shift a       |
| $I_0 a I_2 b I_6 a I_8 a$              | <i>c</i>     | goto $I_8$    |
| $I_0 a I_2 b I_6 a I_8 a I_8$          | <i>c</i>     | shift c       |
| $I_0 a I_2 b I_6 a I_8 a I_8 c$        | $\lambda$    | goto $I_7$    |
| $I_0 a I_2 b I_6 a I_8 a I_8 c I_7$    | $\lambda$    | reduce(4)     |
| $I_0 a I_2 b I_6 a I_8 a I_8 A$        | $\lambda$    | goto $I_{12}$ |
| $I_0 a I_2 b I_6 a I_8 a I_8 A I_{12}$ | $\lambda$    | reduce(5)     |
| $I_0 a I_2 b I_6 a I_8 A$              | $\lambda$    | goto $I_{12}$ |
| $I_0 a I_2 b I_6 a I_8 A I_{12}$       | $\lambda$    | reduce(5)     |
| $I_0 a I_2 b I_6 A$                    | $\lambda$    | goto $I_{11}$ |
| $I_0 a I_2 b I_6 A I_{11}$             | $\lambda$    | reduce(3)     |
| $I_0 S$                                | $\lambda$    | goto $I_1$    |
| $I_0 S I_1$                            | $\lambda$    | reduce(0)     |
| $I_0 S'$                               | $\lambda$    | accept        |

### 3 Exercice

Soit la grammaire  $G$  (légèrement modifié par rapport au PDF pour rendre l'exercice plus intéressant) :

$$(0) S' \rightarrow S\$^k$$

$$(1) S \rightarrow SaR$$

$$(2) S \rightarrow R$$

$$(3) R \rightarrow b$$

$$(4) R \rightarrow Rb$$

- $I_0()$  :  
 $S' \rightarrow \cdot S$   
 $S \rightarrow \cdot SaR$   
 $S \rightarrow \cdot R$   
 $R \rightarrow \cdot b$   
 $R \rightarrow \cdot Rb$
- $I_1(S) : goto(I_0, S)$   
 $S' \rightarrow S \cdot$   
 $S' \rightarrow S \cdot aR$

Il y a d'ores et déjà un conflit. La grammaire n'est donc pas  $LR(0)$ .

Testons maintenant si elle est  $LR(1)$  :

- $I_0()$  :  
 $S' \rightarrow \cdot S, \$ \quad first_1(\$) = \$$   
 $S \rightarrow \cdot SaR, \$ \quad first_1(aR\$) = a$   
 $S \rightarrow \cdot SaR, a$   
 $S \rightarrow \cdot R, a \quad first_1(a) = a$   
 $R \rightarrow \cdot b, a$   
 $R \rightarrow \cdot Rb, a$   
 $S \rightarrow \cdot R, \$ \quad first_1(\$) = \$$   
 $R \rightarrow \cdot b, \$$   
 $R \rightarrow \cdot Rb, \$ \quad first_1(b\$) = b$   
 $R \rightarrow \cdot b, b$   
 $R \rightarrow \cdot Rb, b$
- $I_1(S) : goto(I_0, S)$   
 $S' \rightarrow S \cdot, \$ \quad reduce(0) - \text{accept sur } \$ \rightarrow first_1(\$) = \$$   
 $S \rightarrow S \cdot aR, \$ \quad shift a \rightarrow first_1(aR\$) = a$   
 $S \rightarrow S \cdot aR, a \quad shift a \rightarrow first_1(aRa) = a$

On teste l'intersection des reduces avec les shifts et on constate que  $first_1(\$) = \$$  n'est en intersection avec aucun des shifts.

- $I_2(R) : goto(I_0, R)$ 

|                               |   |
|-------------------------------|---|
| $S \rightarrow R \cdot , a$   | reduce(2) sur a $\rightarrow first_1(a) = a$    |
| $R \rightarrow R \cdot b, a$  | shift b $\rightarrow first_1(ba) = b$           |
| $S \rightarrow R \cdot , \$$  | reduce(2) sur \$ $\rightarrow first_1(\$) = \$$ |
| $R \rightarrow R \cdot b, \$$ | shift b $\rightarrow first_1(b\$) = b$          |
| $R \rightarrow R \cdot b, b$  | shift b $\rightarrow first_1(bb) = b$           |

- $I_3(b) : goto(I_0, b)$ 

|                              |   |
|------------------------------|---|
| $R \rightarrow b \cdot , a$  | reduce(3) sur a $\rightarrow first_1(a) = a$    |
| $R \rightarrow b \cdot , \$$ | reduce(3) sur \$ $\rightarrow first_1(\$) = \$$ |
| $R \rightarrow b \cdot , b$  | reduce(3) sur b $\rightarrow first_1(b) = b$    |

- $I_4(Sa) : goto(I_1, a)$ 

|                                |                                |
|--------------------------------|--------------------------------|
| $S \rightarrow Sa \cdot R, \$$ | $\rightarrow first_1(\$) = \$$ |
| $S \rightarrow Sa \cdot R, a$  | $\rightarrow first_1(a) = a$   |
| $R \rightarrow \cdot b, \$$    |                                |
| $R \rightarrow \cdot Rb, \$$   | $\rightarrow first_1(b\$) = b$ |
| $R \rightarrow \cdot b, a$     |                                |
| $R \rightarrow \cdot Rb, a$    | $\rightarrow first_1(ba) = b$  |
| $R \rightarrow \cdot b, b$     |                                |
| $R \rightarrow \cdot Rb, b$    | $\rightarrow first_1(bb) = b$  |

- $I_5(Rb) : goto(I_2, b) = I_3$ 

|                               |   |
|-------------------------------|---|
| $R \rightarrow Rb \cdot , a$  | reduce(4) sur a $\rightarrow first_1(a) = a$    |
| $R \rightarrow Rb \cdot , \$$ | reduce(4) sur \$ $\rightarrow first_1(\$) = \$$ |
| $R \rightarrow Rb \cdot , b$  | reduce(4) sur b $\rightarrow first_1(b) = b$    |

- $I_6(SaR) : goto(I_4, R) = I_3$ 

|                                |                  |
|--------------------------------|------------------|
| $S \rightarrow SaR \cdot , \$$ | reduce(1) sur \$ |
| $S \rightarrow SaR \cdot , a$  | reduce(1) sur \$ |
| $R \rightarrow R \cdot b, \$$  | shift b          |
| $R \rightarrow R \cdot b, a$   | shift b          |
| $R \rightarrow R \cdot b, b$   | shift b          |

- $/I_7/(Sab) : goto(I_4, b) = I_3$ 

|                              |   |
|------------------------------|---|
| $R \rightarrow b \cdot , a$  | reduce(3) sur a $\rightarrow first_1(a) = a$    |
| $R \rightarrow b \cdot , \$$ | reduce(3) sur \$ $\rightarrow first_1(\$) = \$$ |
| $R \rightarrow b \cdot , b$  | reduce(3) sur b $\rightarrow first_1(b) = b$    |

- $/I_7/(SaRb) : goto(I_6, b) = I_5$ 

|                               |   |
|-------------------------------|---|
| $R \rightarrow Rb \cdot , a$  | reduce(4) sur a $\rightarrow first_1(a) = a$    |
| $R \rightarrow Rb \cdot , \$$ | reduce(4) sur \$ $\rightarrow first_1(\$) = \$$ |
| $R \rightarrow Rb \cdot , b$  | reduce(4) sur b $\rightarrow first_1(b) = b$    |

D'où la table d'analyse suivante :

|       | a                       | b                       | \$          | S                         | R                         |
|-------|-------------------------|-------------------------|-------------|---------------------------|---------------------------|
| $I_0$ | <i>err</i>              | <i>sh I<sub>3</sub></i> | <i>err</i>  | <i>goto I<sub>1</sub></i> | <i>goto I<sub>2</sub></i> |
| $I_1$ | <i>sh I<sub>4</sub></i> | <i>err</i>              | accept      | <i>err</i>                | <i>err</i>                |
| $I_2$ | <i>re 2</i>             | <i>sh I<sub>5</sub></i> | <i>re 2</i> | <i>err</i>                | <i>err</i>                |
| $I_3$ | <i>re 3</i>             | <i>re 3</i>             | <i>re 3</i> | <i>err</i>                | <i>err</i>                |
| $I_4$ | <i>err</i>              | <i>sh I<sub>3</sub></i> | <i>err</i>  | <i>err</i>                | <i>goto I<sub>6</sub></i> |
| $I_5$ | <i>re 4</i>             | <i>re 4</i>             | <i>re 4</i> | <i>err</i>                | <i>err</i>                |
| $I_6$ | <i>re 1</i>             | <i>sh I<sub>5</sub></i> | <i>re 1</i> | <i>err</i>                | <i>err</i>                |