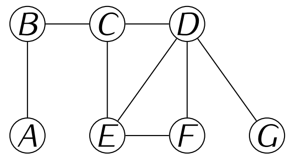
TDs : Programmation Linéaire en Nombres Entiers



Exercice 1 (Couverture par sommets)**.** Modéliser en PNLE le problème de COUVERTURE PAR SOMMETS d'un graphe :

> Etant donné un graphe à n sommets, donné par la liste de ses arêtes $\{i, j\}$, on veut trouver un sous-ensemble S de sommets tels que chaque arc a au moins une extrémité dans S. De plus, on veut minimiser le nombre de sommets contenus dans S.

Exercice 2 (Ordonnancement de tâches)**.** On dispose d'un ensemble de p machines $m_1, \ldots, m_p$ qui peuvent réaliser des tâches $t_1, \ldots, t_k$ de durées variables : chaque tâche i prend un temps différent d_{ij} (exprimé en heures) selon la machine j sur laquelle elle est faite. Chaque heure de travail a un coût différent c_i sur chacune des machines. Les machines fonctionnent en parallèle, mais chaque machine ne peut traiter qu'une tâche à la fois.

On doit répartir les k tâches sur les p machines, de manière à minimiser le coût total du projet – c'est-à-dire la réalisation de toutes les tâches – avec une durée maximale D fixée à ne pas dépasser sur chaque machine.

Question 2.1. Exprimer ce problème comme un problème de PNLE .

Question 2.2. Même question, mais le but est maintenant de minimiser le temps d'achèvement du projet (on veut que tout soit fini au plus tôt), sans tenir compte du coût.

Exercice 3 (Pandémie)**.** Une épidémie de maladie infectieuse a été observée dans un certain nombre n de sites. Un ensemble de m équipes de médecins doivent aller enquêter pour identifier la maladie, ce qui leur prend un certain temps t_{ij} qui dépend du site j et de l'équipe i. Chaque équipe peut enquêter au maximum sur 2 sites, et doit alors se déplacer du site j_1 au site j_2, ce qui prend un temps $d_{j_1 j_2}$.

Eq / Lieu	1	2	3	4
1	10	12	14	5
2	6	10	10	4
3	12	12	16	6

Lieu 1 / 2	1	2	3	4
1		6	6	8
2			7	8
3				5

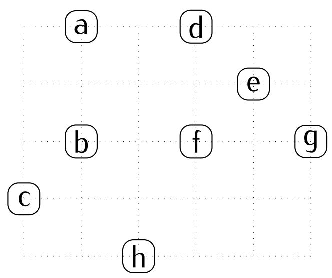
Question 3.1. Modélisez le problème de minimisation du coût total en PLNE, en supposant que le coût des missions est proportionnel à la durée totale de travail (= temps de réalisation des missions + temps de déplacement entre deux sites s'il y a lieu).

Indice : il faut introduire des variables pour représenter les déplacements entre deux lieux.

Question 3.2. Même question mais en cherchant à minimiser la date de fin de la mission.

Exercice 4 (Le voyageur de commerce)**.** *(Travail Personnel)*

tperso Un voyageur de commerce doit se déplacer dans un certain nombre de villes. Son objectif est de minimiser la distance totale parcourue. Pour modéliser cela, on considère n points (y compris le point de départ), et on suppose qu'on a une matrice des coûts c_{ij} de déplacement entre deux points distincts i et j. Il s'agit de déterminer une séquence de ces n points qui minimise la somme des c_{ij} tels que j est le successeur de i dans la séquence, en additionnant aussi le retour au point de départ.



c_{ij}	b	c	d	e	f	g	h
a	2	$\sqrt{10}$	2	$\sqrt{10}$	$2\sqrt{2}$	$2\sqrt{5}$	$\sqrt{17}$
b		$\sqrt{2}$	$\sqrt{4}$	$\sqrt{10}$	2	4	$\sqrt{5}$
c			$3\sqrt{2}$	$2\sqrt{5}$	$\sqrt{10}$	$\sqrt{26}$	$\sqrt{5}$
d				$\sqrt{2}$	2	$2\sqrt{2}$	$\sqrt{17}$
$\vdots$				$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$

Pour modéliser cela en PLNE, on choisit d'utiliser des variables binaires : $x_{ij} = 1$ si dans le tour optimal, j est le successeur de i.

Question 4.1. Quel est l'objectif ?

Question 4.2. Modélisez les contraintes suivantes :

1. chaque ville n'est le “début” que d'un seul déplacement choisi.
2. chaque ville n'est la “fin” que d'un seul déplacement choisi.

Question 4.3. Donner un exemple de solution possible de ces contraintes qui n'est pas une solution au voyageur de commerce.

Pour résoudre le problème vu à la question précédente, on introduit des variables u_i entières pour chaque ville i. On ajoute les contraintes suivantes pour chaque paire de villes i, j :

$$u_i - u_j + n \times x_{ij} \leq n - 1$$

On prendra arbitrairement la ville a comme point de départ : on exclut les paires (i, a) pour la contrainte ci-dessus.

Question 4.4. Montrez que ces contraintes mènent à une contradiction s'il existe un cycle de k villes ne passant pas par la ville a.

Question 4.5. Montrez que s'il existe un seul cycle passant par toutes les villes, on peut trouver des valeurs pour les u_i en leur donnant la valeur de l'ordre de passage dans le cycle à partir de la ville a. Donc $u_i = t$ si la ville i est la t-ième ville depuis la ville a.

Planification de services

Un problème qu'on rencontre dans de nombreuses organisations consiste à planifier, sur une période pouvant aller jusqu'à plusieurs mois, les plannings de personnels en fonction des de leurs contrats de travail et de nécessités de service. C'est un problème complexe lorsque les nécessités de services sont très variables suivant les jours et les heures, et lorsqu'il y a de nombreuses contraintes.

Dans un hôpital par exemple, il doit y avoir des infirmier-e-s tous les jours, et à toute heure de la journée, mais le nombre nécessaire varie suivant le jour et suivant l'heure ; il faut respecter un certains nombre de jours de repos entre deux périodes de travail pour chaque infirmièr-e – et ce nombre peut dépendre du contrat de travail. Comme il arrive qu'il n'y ait pas solution qui satisfasse parfaitement toutes les contraintes, certaines contraintes sont affectées de *pénalités*. Le problème devient alors un problème d'optimisation : il s'agit de trouver un planning qui satisfasse “au mieux” les contraintes, c'est-à-dire qui minimise les pénalités des contraintes violées.

Exercice 5. On considère d'abord une instance simple, où on doit planifier sur 7 jours, il y a un seul service par jour (“D”ay) de durée 100mn, et trois personnes :

$$H = \{0, \ldots, 6\} \qquad S = \{D\}, \text{ durée de } D = 100 \qquad P = \{A, B, C\}$$

Pour chaque personne, on trouve dans le tableau ci-dessous, des temps minimum et maximum de travail sur la période ; il y a aussi des nombres minimaux et maximaux de jours à respecter pour chaque période travaillée. Par exemple, on ne doit pas mobiliser A pour moins de 3 jours de travail consécutifs, et A ne peut pas travailler plus de 5 jours de suite. Il y aussi des jours de repos déjà décidés, par exemple C ne devra pas travailler lundi ni samedi de la semaine étudiée (jours 0 et 5). Enfin, pour chaque personne il y a une durée minimale des périodes de repos « *Min. Cons. Off* ».

	T Min.	T Max.	Min. Cons.	Max. Cons.	Off	Min. Cons. Off
A	200	500	3	5		2
B	200	500	2	3	5	2
C	200	400	2	4	0, 5	3

Remarque : on considère que les contraintes sur les nombres *minimaux* de jours consécutifs travaillés ou de repos ne s'appliquent pas en début et en fin de la période planifiée. Par exemple, C peut commencer par un jour de repos, puis 4 jours travaillés, et 2 jours de repos.

On va modéliser ce problème à l'aide de variables booléennes : $x_{ij} = 1$ si la personne i est de service le jour j, $x_{ij} = 0$ sinon.

Question 5.1. Exprimer sous formes de contraintes linéaires les différentes contraintes que le planning de A (les x_{Aj}) doit vérifier. Combien y a-t-il de contraintes linéaires en tout pour modéliser les contrats de A, B et C ?
Indice : pour exprimer que le nombre minimum de jours consécutifs travaillés est 3, il suffit d'interdire les séquences de la forme Off-On-Off, Off-On-On-Off.

En plus des contrats des personnels, la planification doit bien sûr tenir compte des nécessités de service. Le tableau ci-dessous donne le nombre de personnels qu'il faudrait avoir chaque jour.

jour	0	1	2	3	4	5	6
nb. pers.	2	2	2	2	2	1	1

Question 5.2. Donnez des contraintes linéaires correspondant à ce tableau.

Question 5.3. Parmis les affectations suivantes, laquelle ne satisfait pas les contraintes ?

Jour	0	1	2	3	4	5	6
Sol. 1	AB	BC	BC	AC	AC	A	B
Sol. 2	AB	AC	BC	AC	AC	A	A
Sol. 3	AB	BC	BC	AC	AC	A	A
Sol. 4	AB	AC	AC	BC	BC	A	A

Un mécanisme de *pénalités* permet aussi de prendre en compte certaines préférences de A, B et C. On donne les pénalités associées à certains jours où certaines personnes sont de service ou de repos :

Pénalités si repos : $\text{pen}[A, 0] = 5$, $\text{pen}[A, 4] = 2$, $\text{pen}[B, 3] = 5$, $\text{pen}[C, 2] = 5$
Pénalités si de service : $\text{pen}[A, 2] = 5$, $\text{pen}[C, 4] = 2$

Question 5.4. Parmi les affectations ci-dessus, laquelle n'est pas optimale ?

Question 5.5. Exprimer l'objectif permettant de déterminer, parmi les plannings qui vérifient toutes les contraintes précédentes, celui qui minimise, la somme des pénalités décrites dans ces tableaux.

Exercice 6. On reprend l'exercice précédent mais dans un cadre plus générique. On suppose maintenant qu'on a un ensemble fini P de personnes, un horizon h dont on déduit un ensemble de jours $H = \{0 \ldots (h-1)\}$, et qu'on dispose des tableaux de paramètres suivants :

- pour chaque personne p, $\text{TMin}[p]$, $\text{TMax}[p]$, $\text{MinCons}[p]$, $\text{MaxCons}[p]$, $\text{MinConsOff}[p]$;
- pour chaque $p \in P$ et chaque $j \in H$: $\text{Off}[p, j] = 1$ si p ne doit pas travailler le jour j ; $\text{Off}[p, j] = 0$ sinon ;
- pour chaque $p \in P$ et chaque $j \in H$: $\text{penOn}[p, j]$ et $\text{penOff}[p, j]$ donnent les valeurs des pénalités associées au fait que p et de service ou de repos le jour j ; ces pénalités valent 0 par défaut ;
- pour chaque $j \in H$, $\text{Requis}(j)$ indique le nombre de personnes requises ce jour-là.

Réexprimez dans ce cadre générique les contraintes et l'objectif vus dans l'exercice précédent.