Calcul Scientifique et Apprentissage Automatique

TD
Algèbre Linéaire - Calcul Matriciel

Elana Courtines
courtines.e@gmail.com
https://github.com/irinacake

Séance 1 - 28 septembre 2022

Sandrine Mouysset - sandrine.mouysset@irit.fr

Exercice 1 : Drones

Question 1.1 :

Données :

$$\text{On a X} = \begin{array}{c} \begin{matrix} \text{S} & \text{T} & \text{A} \end{matrix} \\ \begin{bmatrix} 4 & 3 & 6 \\ 2 & 5 & 8 \\ 0 & 1 & 7 \end{bmatrix} \end{array}$$

D'où : $g = \{\bar{S}, \bar{T}, \bar{A}\} = \{2, 3, 7\}$

On en déduit $X_C = \begin{bmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 1 \\ -2 & -2 & 0 \end{bmatrix}$ et $X_C^T = \begin{bmatrix} 2 & 0 & -2 \\ 0 & 2 & -2 \\ -1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$

D'où :

$$\Sigma = \frac{1}{3} * \begin{bmatrix} 2 & 0 & -2 \\ 0 & 2 & -2 \\ -1 & 1 & 0 \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 1 \\ -2 & -2 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\Sigma = \frac{1}{3} * \begin{bmatrix} 8 & 4 & -2 \\ 4 & 8 & 2 \\ -2 & 2 & 2 \end{bmatrix}$$

Question 1.2 :

En partant de $\Sigma = \begin{bmatrix} Var(S) & Cov(S,T) & Cov(S,A) \\ Cov(T,S) & Var(T) & Cov(T,A) \\ Cov(A,S) & Cov(A,T) & Var(A) \end{bmatrix}$

On obtient rapidement :

- $Corr(S,T) = \dfrac{Cov(S,T)}{\sqrt{Var(S) * Var(T)}} = \dfrac{4/3}{\sqrt{8/3 * 8/3}} = 1/2$
- $Corr(S,A) = \dfrac{Cov(S,A)}{\sqrt{Var(S) * Var(A)}} = \dfrac{-2/3}{\sqrt{8/3 * 2/3}} = -1/2$
- $Corr(A,T) = \dfrac{Cov(A,T)}{\sqrt{Var(A) * Var(T)}} = \dfrac{2/3}{\sqrt{8/3 * 2/3}} = 1/2$

Exercice 2 : Cerveaux !!

Question 2.1 :

Données :

$$X = \begin{array}{c} \begin{array}{cc} C_1 & C_2 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 6 & 2 \\ 5 & 3 \\ 6 & 1 \\ 4 & 3 \\ 4 & 1 \end{bmatrix} \end{array}$$

D'où $g = \{5, 2\}$

$$X_c = \begin{array}{c} \begin{array}{cc} C_1 & C_2 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & -1 \\ -1 & 1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix} \end{array}$$

D'où :

$$\Sigma = \frac{1}{5} * \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & -1 \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & -1 \\ -1 & 1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix}$$

$$\Sigma = \frac{1}{5} * \begin{bmatrix} 4 & -1 \\ -1 & 4 \end{bmatrix}$$

$$Corr(\alpha, \beta) = \frac{Cov(\alpha, \beta)}{\sqrt{Var(\alpha) * Var(\beta)}} = \frac{-\ 1/5}{\sqrt{16/25}} = -1/4$$

Il existe donc une dépendance entre ces variables, mais celle-ci n'est pas linéaire.

Question 2.2 :

On a :

$$\chi_{5\Sigma}(\lambda) = det(5\Sigma - \lambda * I_n) = \begin{vmatrix} 4 - \lambda & 1 \\ 1 & 4 - \lambda \end{vmatrix}$$

$$= (4 - \lambda)^2 - 1$$

On résout trivialement le polynôme pour trouver :

$\lambda_1 = 5$, le plus grand vecteur propre, donc celui à prendre pour le 1^{er} axe principal ;

$\lambda_2 = 3$.

Premier axe principal ($\lambda_1 = 5$):

Soit $X = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$ le $\overrightarrow{vp}$ de 5Σ associé à λ_1.

On a alors :

$$\Leftrightarrow 5\Sigma X = \lambda_1 X$$

$$\Leftrightarrow \begin{bmatrix} 4 & 1 \\ 1 & 4 \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = 5 * \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 4x + y = 5x \\ x + 4y = 5y \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow x = y$$

D'où $\overrightarrow{vp}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$

Deuxième axe principal ($\lambda_2 = 3$):

Soit $X = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$ le $\overrightarrow{vp}$ de 5Σ associé à λ_2.

On a alors :

$$\Leftrightarrow 5\Sigma X = \lambda_2 X$$

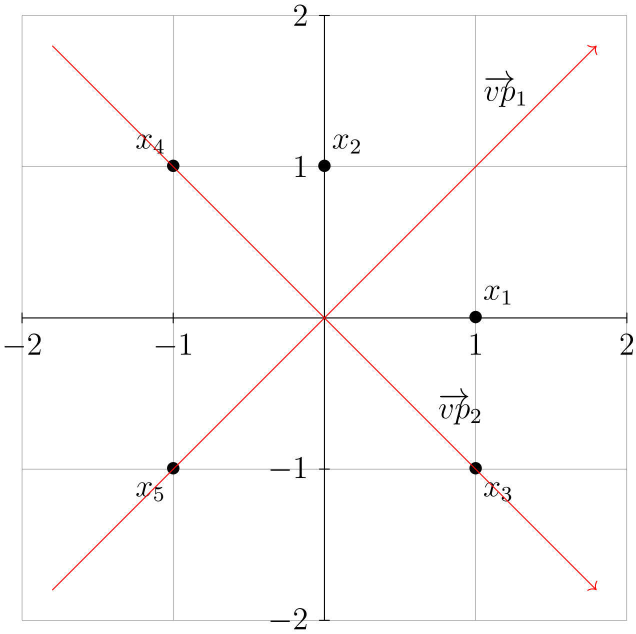
$$\Leftrightarrow \begin{bmatrix} 4 & 1 \\ 1 & 4 \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = 3 * \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 4x + y = 3x \\ x + 4y = 3y \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow x = -y$$

D'où $\overrightarrow{vp}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$

Question 2.3 :



Exercice 3 : un peu de cardio...

Question 3.1 :

Données :

$$X = \begin{array}{cc} \text{Age} & \text{FCM} \\ \end{array}$$
$$X = \begin{bmatrix} 26 & 178 \\ 28 & 176 \\ 30 & 182 \\ 32 & 180 \\ 34 & 184 \end{bmatrix}$$

D'où $g = \{30, 180\}$

$$\begin{array}{cc} \text{Age} & \text{FCM} \end{array}$$
$$X_c = \begin{bmatrix} -4 & -2 \\ -2 & -4 \\ 0 & 2 \\ 2 & 0 \\ 4 & 4 \end{bmatrix}$$

D'où :

$$\Sigma = \frac{1}{5} * \begin{bmatrix} -4 & -2 & 2 & 0 & 4 \\ -4 & -2 & 0 & 2 & 4 \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} -4 & -2 \\ -2 & -4 \\ 0 & 2 \\ 2 & 0 \\ 4 & 4 \end{bmatrix}$$

$$\Sigma = \frac{1}{5} * \begin{bmatrix} 40 & 32 \\ 32 & 40 \end{bmatrix}$$

$$Corr(Age, FCM) = \frac{Cov(Age, FCM)}{\sqrt{Var(Age) * Var(FCM)}} = \frac{32/5}{\sqrt{(40/5)^2}} = 0.8$$

Il y a donc 80% de colinéarité positive entre l'Âge et la FCM. On peut donc dire que plus l'Âge augmenter, plus la FCM augmenter.

Question 3.2 :

On a :

$$\chi_{5\Sigma}(\lambda) = det(\frac{5}{8}\Sigma - \lambda * I_n) = \begin{vmatrix} 5-\lambda & 4 \\ 4 & 5-\lambda \end{vmatrix} = (5-\lambda)^2 - 4^2 = \lambda^2 - 10\lambda + 9$$

On résout le polynôme pour trouver :

$\lambda_1 = 9$, le plus grand vecteur propre, donc celui à prendre pour le 1^{er} axe principal ;

$\lambda_2 = 1$.

Premier axe principal ($\lambda_1 = 9$):

Soit $X = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$ le $\overrightarrow{vp}$ de $\frac{5}{8}\Sigma$ associé à λ_1.

On a alors :

$$\Leftrightarrow \frac{5}{8}\Sigma X = \lambda_1 X$$

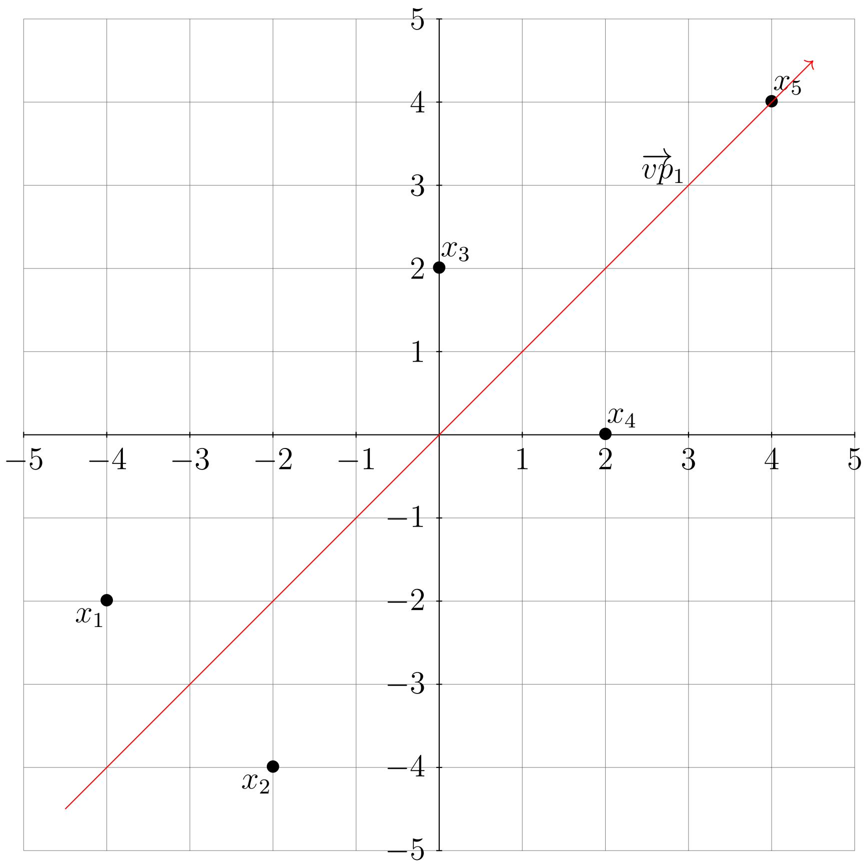
$$\Leftrightarrow \begin{bmatrix} 5 & 4 \\ 4 & 5 \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = 9 * \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 5x + 4y = 9x \\ 4x + 5y = 9y \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow x = y$$

D'où $\overrightarrow{vp}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$

Question 3.3 :



Question 3.4 :

Le rapport étant du 1:1, si pour 30 ans on a 180 de FCM, alors pour 38 ans on a 188 de FCM.

Exercice 4 :

Question 4.1 :

Données :

$$X = \begin{array}{cc} x & y \\ \end{array}$$
$$\begin{bmatrix} -4 & -2 \\ -3 & -1 \\ -1 & 0 \\ 2 & 0 \\ 2 & 1 \\ 4 & 2 \end{bmatrix}$$

D'où $g = \{0, 0\}$

$$X_c = X = \begin{array}{cc} x & y \\ \end{array}$$
$$\begin{bmatrix} -4 & -2 \\ -3 & -1 \\ -1 & 0 \\ 2 & 0 \\ 2 & 1 \\ 4 & 2 \end{bmatrix}$$

D'où :

$$\Sigma = \frac{1}{6} * \begin{bmatrix} -4 & -3 & -1 & 2 & 2 & 4 \\ -2 & -1 & 0 & 0 & 1 & 2 \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} -4 & -2 \\ -3 & -1 \\ -1 & 0 \\ 2 & 0 \\ 2 & 1 \\ 4 & 2 \end{bmatrix}$$

$$\Sigma = \frac{1}{6} * \begin{bmatrix} 50 & 21 \\ 21 & 10 \end{bmatrix}$$

Question 4.2 :

On a :

$$\chi_{6\Sigma}(\lambda) = det(6\Sigma - \lambda * I_n) = \begin{vmatrix} 50-\lambda & 21 \\ 21 & 10-\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - 60\lambda + 59$$

On résout le polynôme pour trouver :

$\lambda_1 = 59$, le plus grand vecteur propre, donc celui à prendre pour le 1^{er} axe principal ;

$\lambda_2 = 1$.

Premier axe principal ($\lambda_1 = 59$):

Soit $X = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$ le $\overrightarrow{vp}$ de 6Σ associé à λ_1.

On a alors :

$$\Leftrightarrow 6\Sigma X = \lambda_1 X$$

$$\Leftrightarrow \begin{bmatrix} 50 & 21 \\ 21 & 10 \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = 59 * \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 50x + 21y = 59x \\ 21x + 10y = 59y \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow 21x = 49y \ \Leftrightarrow \ y = \frac{3}{7}\, x \text{ (droite d'équation)}$$