

# Algorithmique Avancée

## TD2

### Programmation linéaire

Elana Courtines

courtines.e@gmail.com

<https://github.com/irinacake>

Séance 1 - 30 septembre 2022

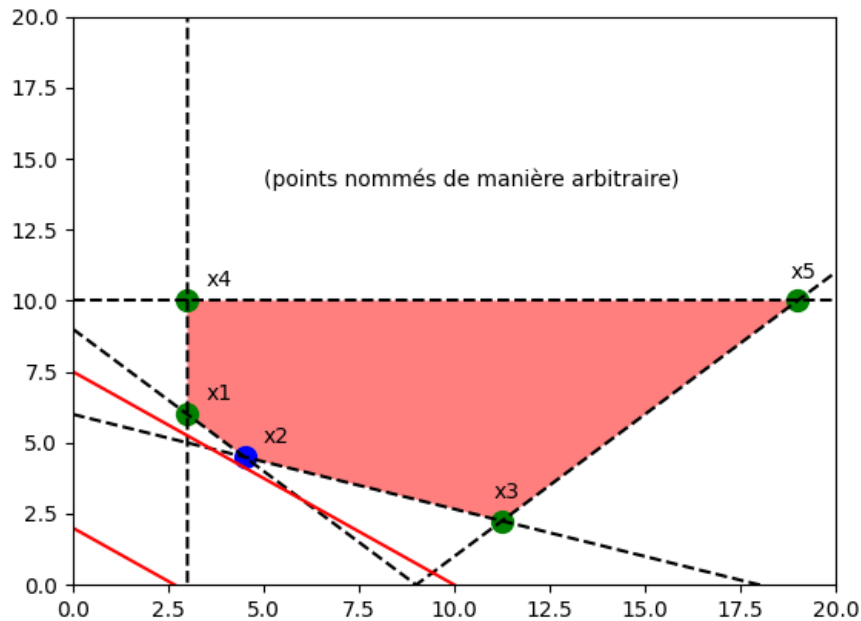
Séance 2 - 7 octobre 2022

Jerome Mengin - [jerome.mengin@univ-tlse3.fr](mailto:jerome.mengin@univ-tlse3.fr)

# 1 Résolution graphique : forme, minimisation et maximisation

## Exercice 1:

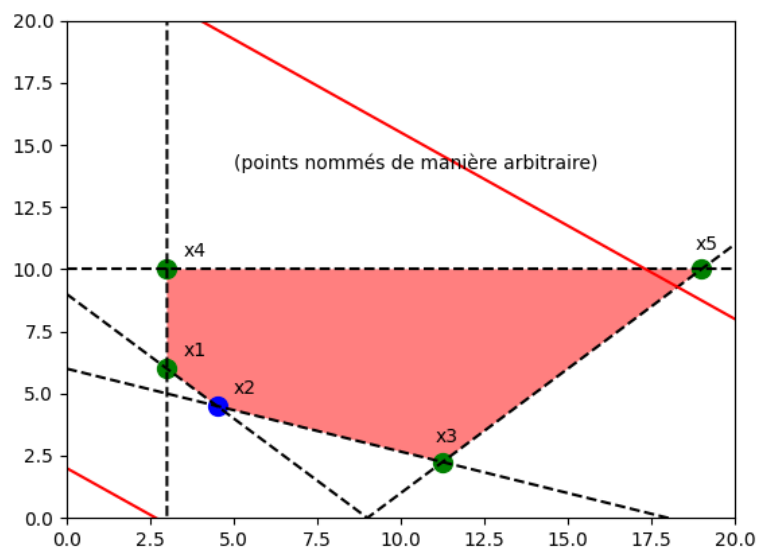
Il s'agit bien d'un programme linéaire (*min*), sous forme générale (il y a des  $\leq$  et des  $\geq$ )



Visuellement, on a envie de dire que l'optimum est  $x_2$ , cherchons alors ses coordonnées :

$$optimum = \begin{cases} x + 3y = 18 \\ x + y = 9 \end{cases} = \begin{cases} 2y = 9 \\ y = 4.5 = x \end{cases} \quad (1)$$

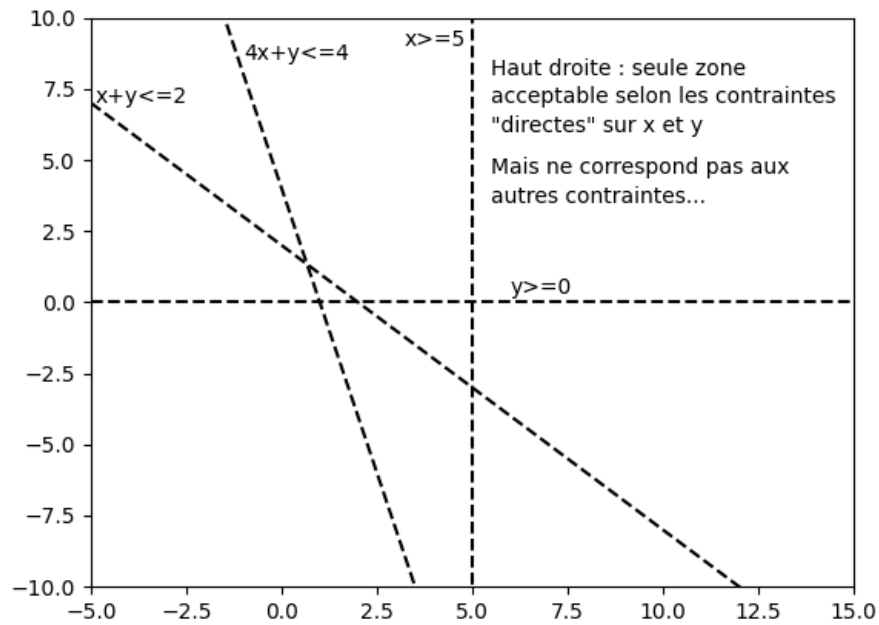
Si on cherchait à maximiser, on obtiendrait :



## Exercice 2:

Pour  $P1 : \max(z = 12x + 10y) :$

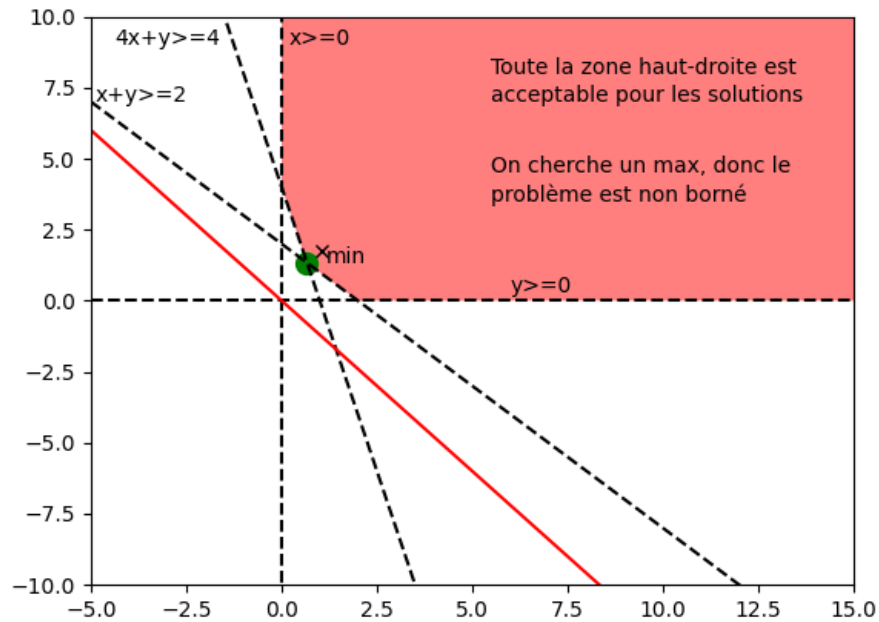
Il s'agit bien d'un programme linéaire ( $\max$ ), sous forme générale (il y a des  $\leq$  et des  $\geq$ )



Comme on peut le constater sur la résolution graphique, les contraintes  $x \geq 5$  et  $y \geq 0$  forcent les solutions à être dans le cadran haut-droite, mais il suffit de prendre  $x + y \leq 2$  pour ne plus avoir de solution.

Pour  $P2 : \max(z = 12x + 10y) :$

Il s'agit bien d'un programme linéaire ( $\max$ ), sous forme canonique (il n'y a que des  $\geq$ )

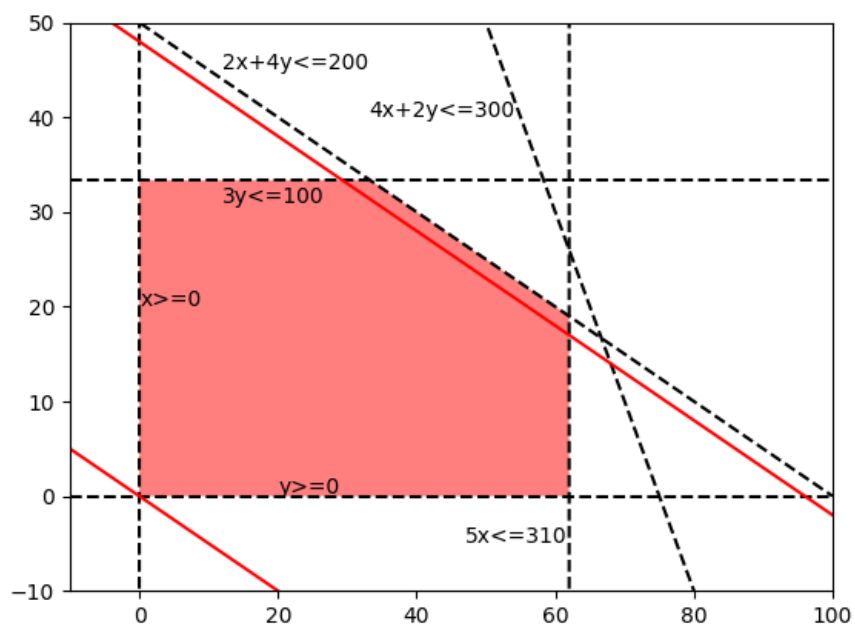


Comme on peut le constater sur la résolution graphique, tout le cadran haut-droite est solution du problème. Le problème est donc non borné, il n'y a pas d'optimum.

Note : si on voulait minimiser la solution plutôt que de le maximiser, on trouverai un optimum, noté  $x_{\min}$  sur le graphe.

Pour  $P3 : \max(z = x + 2y) :$

Il s'agit bien d'un programme linéaire ( $\max$ ), sous forme canonique (il n'y a que des  $\leq$ )



Comme on peut le constater sur la résolution graphique, l'optimum est atteint sur tout un segment de droite.

## 2 Modélisation simple, Primal, Dual : Le fleuriste et l'hôtelier

### Exercice 3 :

Variables :

- $x$  = nombre de bouquets de type 1 composés
- $y$  = nombre de bouquets de type 2 composés
- $z$  = nombre de bouquets de type 3 composés

But :  $\max(8x + 5y + 6z)$

Contraintes :

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \\ 4 & 3 & 1 \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \leq \begin{pmatrix} 90 \\ 81 \\ 120 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x + 3y + 2z & \leq 90 \\ x + 2y + z & \leq 81 \\ 4x + 3y + z & \leq 120 \end{cases}$$

### Exercice 4 :

Question 4.1 :

$$S = 90t + 81u + 120v$$

Ou plutôt :  $\min(90t + 81u + 120v)$  si on veut que l'hôtelier paie le moins possible.

Question 4.2/4.3 :

But ci-dessus.

Contraintes :

$$\begin{cases} t, u, v & \geq 0 \\ 2t + u + 4v & \geq 8 \\ 3t + 2u + 3v & \geq 5 \\ 2t + u + v & \geq 6 \end{cases}$$

Question 4.4:

$$\begin{cases} 2x + 3y + 2z + e_1 & = 90 \\ x + 2y + z + e_2 & = 81 \\ 4x + 3y + z + e_3 & = 120 \\ x, y, z, e_1, e_2, e_3 & \geq 0 \end{cases}$$

Premier tableau du simplex :

	$x$	$y$	$z$	$e_1$	$e_2$	$e_3$	
$e_1$	2	3	2	1	0	0	90
$e_2$	1	2	1	0	1	0	81
$e_3$	4	3	1	0	0	1	120
$obj$	8	5	6	0	0	0	

Second tableau du simplex :

	$x$	$y$	$z$	$e_1$	$e_2$	$e_3$	
$e_1$	0	3/2	3/2	1	0	-1/2	30
$e_2$	0	5/4	1/2	0	1	-1/4	51
$x$	1	3/4	1/4	0	0	1/4	30
$obj$	0	-1	4	0	0	-2	



## 4 Modélisation

### Exercice 6 :

#### Question 6.1 :

Variables de décision : les "recettes" des différents carburant qu'on doit produire.

$\forall i \in \{1, 2, 3, 4, 5\}, j \in \{1, 2\}, x_{ij}$  = nombre de barils d'essence de type  $i$  utilisés pour la production de carburant de type  $j$ .

Exemple :

Si  $x_{11} = 2, x_{21} = 1, x_{31} = x_{41} = x_{51} = 0$ ,

Alors on obtient le carburant de performance :  $\frac{2 * 70 + 1 * 80}{3}$

Autres variables possible :

$y_{ij}$  = proportion d'essence de type  $i$  dans le carburant de type  $j$ .

$y_{11} = \frac{2}{3}, y_{21} = \frac{1}{3}, y_{31} = y_{41} = y_{51} = 0$ ,

Mais alors il faut des variables indiquant le nombre de barils produits.

#### Question 6.2 :

But :  $max( profit = \sum_{j=1}^{nC} (pr_j * \sum_{i=1}^{nE} x_{ij}) - \sum_{i=1}^{nE} (c_i * \sum_{j=1}^{nC} x_{ij}) )$

$$= max( profit = \sum_{i=1}^{nE} \sum_{j=1}^{nC} (pr_j - c_i) * x_{ij} )$$

Contraintes :

$$\left\{ \begin{array}{ll} \forall i, j, x_{ij} \geq 0 & \\ prod_j \geq minprod_j & \forall j \in \{1, \dots, nC\}, (\sum_{i=1}^{nE} x_{ij}) > minprod_j \\ \text{disponibilité des essences} & \forall i \in \{1, \dots, nE\}, (\sum_{j=1}^{nC} x_{ij}) \leq d_i \\ \text{indice de performance} & \forall j \in \{1, \dots, nC\}, (\sum_{i=1}^{nE} (pe_i - pemin_j) * x_{ij}) \geq 0 \end{array} \right.$$