

Calcul Scientifique et Apprentissage Automatique

Optimisation

Elana Courtines

Mardi 27 Septembre 2022

Sandrine Mouysset (CM3): sandrine.mouysset@irit.fr

Thomas Pellegrini : thomas.pellegrini@irit.fr

Exercice diapo 5 :

La courbe de niveau k d'une fonction f de 2 variables $(x, y) \rightarrow f(x, y)$ est l'ensemble des points du plan xy qui satisfont $f(x, y) = k$.

Calculer la courbe de niveau $k = 4$ de la fonction $f(x, y) = 3 - x - \frac{1}{2}y$:

$$\Leftrightarrow 4 = 3 - x - \frac{1}{2}y$$

$$\Leftrightarrow y = -2 * (4 - 3 + x)$$

$$\Leftrightarrow y = -2x - 2$$

Calculer la courbe de niveau $k = 100$ de la fonction $f(x, y) = x^2 + y^2$:

$$\Leftrightarrow 100 = x^2 + y^2$$

$$\Leftrightarrow x^2 + y^2 - 10^2 = 0$$

Il s'agit de l'équation d'un cercle de centre $(0, 0)$ et de rayon 10 :

$$\Leftrightarrow C((0, 0), 10)$$

Exercice diapo 7 :

Calculez les dérivées partielles et le gradient des fonctions suivantes :

Pour $f(x, y) = x^2y^2 + 3xy$:

- $\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = 2xy^2 + 3y$
- $\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = 2x^2y + 3x$

D'où :

$$\nabla f(x, y) = \begin{bmatrix} \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) \\ \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2xy^2 + 3y \\ 2x^2y + 3x \end{bmatrix}$$

Pour $g(x, y) = \sin(x)y^2$:

- $\frac{\partial g}{\partial x}(x, y) = \cos(x)y^2$
- $\frac{\partial g}{\partial y}(x, y) = 2\sin(x)y$

D'où :

$$\nabla f(x, y) = \begin{bmatrix} \frac{\partial g}{\partial x}(x, y) \\ \frac{\partial g}{\partial y}(x, y) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos(x)y^2 \\ 2\sin(x)y \end{bmatrix}$$

Exercice diapo 11 :

Calculez les matrices hessiennes fonctions suivantes :

Pour $f(x, y) = x^2y^2 + 3xy$:

- $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial x}(x, y) = \frac{\partial}{\partial x}(\frac{\partial f}{\partial x}(x, y)) = \frac{\partial}{\partial x}(2xy^2 + 3y) = 2y^2$
- $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x, y) = \frac{\partial}{\partial x}(\frac{\partial f}{\partial y}(x, y)) = \frac{\partial}{\partial x}(2x^2y + 3x) = 4xy + 3$
- $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x, y) = \frac{\partial}{\partial y}(\frac{\partial f}{\partial x}(x, y)) = \frac{\partial}{\partial y}(2xy^2 + 3y) = 4xy + 3$
- $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial y}(x, y) = \frac{\partial}{\partial y}(\frac{\partial f}{\partial y}(x, y)) = \frac{\partial}{\partial y}(2x^2y + 3x) = 2x^2$

D'où :

$$\nabla^2 f(x, y) = \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial x}(x, y) & \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x, y) \\ \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x, y) & \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial y}(x, y) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2y^2 & 4xy + 3 \\ 4xy + 3 & 2x^2 \end{bmatrix}$$

Pour $g(x, y) = \sin(x)y^2$:

- $\frac{\partial^2 g}{\partial x \partial x}(x, y) = \frac{\partial}{\partial x}(\frac{\partial g}{\partial x}(x, y)) = \frac{\partial}{\partial x}(\cos(x)y^2) = -\sin(x)y^2$
- $\frac{\partial^2 g}{\partial x \partial y}(x, y) = \frac{\partial}{\partial x}(\frac{\partial g}{\partial y}(x, y)) = \frac{\partial}{\partial x}(2\sin(x)y) = 2\cos(x)y$
- $\frac{\partial^2 g}{\partial y \partial x}(x, y) = \frac{\partial}{\partial y}(\frac{\partial g}{\partial x}(x, y)) = \frac{\partial}{\partial y}(\cos(x)y^2) = 2\cos(x)y$
- $\frac{\partial^2 g}{\partial y \partial y}(x, y) = \frac{\partial}{\partial y}(\frac{\partial g}{\partial y}(x, y)) = \frac{\partial}{\partial y}(2\sin(x)y) = 2\sin(x)$

D'où :

$$\nabla^2 g(x, y) = \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 g}{\partial x \partial x}(x, y) & \frac{\partial^2 g}{\partial x \partial y}(x, y) \\ \frac{\partial^2 g}{\partial y \partial x}(x, y) & \frac{\partial^2 g}{\partial y \partial y}(x, y) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\sin(x)y^2 & 2\cos(x)y \\ 2\cos(x)y & 2\sin(x) \end{bmatrix}$$

Méthode de résolution des points critiques (exemple en dimension 2) :

Étape 1 : CN 1^{er} ordre :

On cherche l'ensemble des points tels que : $\nabla f(x, y) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$

Cette équation permet d'obtenir un ensemble de points critiques notés C tel que :

$$C = \{(\bar{x}, \bar{y}) \in \mathbb{R}^2 \mid \nabla f(\bar{x}, \bar{y}) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}\}$$

Étape 2 : CS 2^e ordre :

On cherche : $\forall (\bar{x}, \bar{y}) \in C$, la matrice $\nabla^2 f(x, y)$

Cette matrice prend la forme $\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$, à partir de laquelle on détermine deux valeurs :

- $\det(\nabla^2 f(\bar{x}, \bar{y}))$
- $Tr(\nabla^2 f(\bar{x}, \bar{y}))$

Ces deux valeurs permettent de déterminer de quel type de point critique il s'agit, de la manière suivante :

- 1) Si $\det(\nabla^2 f(\bar{x}, \bar{y})) > 0$, alors :
 - a) Si $Tr(\nabla^2 f(\bar{x}, \bar{y})) < 0$, alors : (\bar{x}, \bar{y}) est un minimum local ;
 - b) Si $Tr(\nabla^2 f(\bar{x}, \bar{y})) > 0$, alors : (\bar{x}, \bar{y}) est un maximum local ;
- 2) Si $\det(\nabla^2 f(\bar{x}, \bar{y})) < 0$, alors (\bar{x}, \bar{y}) est un point-selle ;
- 3) Si $\det(\nabla^2 f(\bar{x}, \bar{y})) = 0$, alors on ne peut pas conclure sur la nature de (\bar{x}, \bar{y}) .

Exercice diapo 22 :

Calculez les points critiques et définissez la nature de ces points pour la fonction suivante :
 $f(x, y) = 2x^2 + 3xy + 8y^2 + 5$

Étape 1 : CN 1^{er} ordre :

On cherche l'ensemble des points tels que : $\nabla f(x, y) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$:

- $\frac{\partial f}{\partial x}(2x^2 + 3xy + 8y^2 + 5) = 4x + 3y$
- $\frac{\partial f}{\partial y}(2x^2 + 3xy + 8y^2 + 5) = 3x + 16y$

$$\text{d'où : } \begin{cases} 4x + 3y = 0 \\ 3x + 16y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -3y/4 \\ 3 * (-\frac{3y}{4}) + 16y = 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} y = 0 \\ x = 0 \end{cases}$$

D'où l'ensemble des points critique $C = \{(0, 0)\}$

Étape 2 : CS 2^e ordre :

$$\nabla^2 f(x, y) = \begin{bmatrix} 4 & 3 \\ 3 & 16 \end{bmatrix}$$

d'où :

- $\det(\nabla^2 f(x, y)) = 64 - 9 = 55 > 0$
- $Tr(\nabla^2 f(x, y)) = 4 + 16 = 20 > 0$

Donc le point critique (0,0) est un minimum local.