Algorithmique Avancée

TD
SAT et classes de complexité

Elana Courtines
courtines.e@gmail.com
https://github.com/irinacake

Séance 1 - 14 novembre 2022
Séance 2 - 21 novembre 2022

Jerome Mengin - jerome.mengin@univ-tlse3.fr

1 SAT

Exercice 1

Rappel des règles, dans l'ordre de priorité à appliquer :

1. règle unitaire : si le littéral n'apparait qu'une seule fois, lui donner l'interprétation vrai ;
2. littéral pur : si un littéral apparait plusieurs fois mais jamais son contraire, lui donner l'interprétation vrai ;
3. deux branches : si aucune des deux règles précédente ne peut être appliquée, choisir arbitrairement un littéral pour former deux branches (préférablement en commançant par une valeur d'un littéral qui réduira le plus possible le nombre de clauses restantes).

Notation des résultats :

- $\{\}, \varnothing$ = succès ;
- $\{\square\}$ = échec.

<u>Question 1.1 :</u>

1.

$$\{p \vee q \vee r, p \vee \neg q, q \vee \neg r, r \vee \neg p, \neg p \vee \neg q \vee \neg r\}$$

- $p \leftarrow vrai$
  - $\{q \vee \neg r, r, \neg q \vee \neg r\}$
  - $r \leftarrow vrai$ (clause unitaire)
  - $\{q, \neg q\}$
    - $q \leftarrow vrai$ — $\{\square\}$ échec
    - $q \leftarrow faux$ — $\{\square\}$ échec
- $p \leftarrow faux$
  - $\{q \vee r, \neg q, q \vee \neg r\}$
  - $q \leftarrow faux$ (clause unitaire)
  - $\{r, \neg r, r\}$
    - $r \leftarrow vrai$ — $\{\square\}$ échec
    - $r \leftarrow faux$ — $\{\square\}$ échec

Cet ensemble de clauses est insatisfiable.

2.

$$\{\bar{p}qr, \bar{p}\bar{q}\bar{r}, p\bar{q}r, p\bar{q}\bar{r}, \bar{p}s, p\bar{s}\bar{t}\bar{u}, \bar{p}v\}$$

$t \leftarrow faux$ (pur)

$$\{\bar{p}qr, \bar{p}\bar{q}\bar{r}, p\bar{q}r, p\bar{q}\bar{r}, \bar{p}s, \bar{p}v\}$$

$v \leftarrow vrai$ (pur)

$$\{\bar{p}qr, \bar{p}\bar{q}\bar{r}, p\bar{q}r, p\bar{q}\bar{r}, \bar{p}s\}$$

$s \leftarrow vrai$ (pur)

$$\{\bar{p}qr, \bar{p}\bar{q}\bar{r}, p\bar{q}r, p\bar{q}\bar{r}\}$$

$p \leftarrow vrai$ arbitrairement

$$\{qr, \bar{q}\bar{r}\}$$

$q \leftarrow vrai$ arbitrairement

$$\{\bar{r}\}$$

$r \leftarrow faux$

$\{\}$ succès

D'où l'interprétation (partielle) :

- I(p) = vrai
- I(q) = vrai
- I(r) = faux
- I(s) = vrai
- I(t) = faux
- I(u) = indéterminé
- I(v) = vrai

3.

$$\{p\bar{r}t, ps, \bar{p}\bar{q}\bar{r}, \bar{p}\bar{q}s\bar{u}, \bar{p}\bar{s}, q\bar{u}, \bar{q}tu, rsu, \bar{r}\bar{s}\bar{t}\bar{u}, su\}$$

$|$

$u \leftarrow vrai$

$|$

$$\{p\bar{r}t, ps, \bar{p}\bar{q}\bar{r}, \bar{p}\bar{q}s, \bar{p}\bar{s}, q, \bar{r}\bar{s}\bar{t}\ \}$$

$|$

$q \leftarrow vrai$ (unitaire)

$|$

$$\{p\bar{r}t, ps, \bar{p}\bar{r}, \bar{p}s, \bar{p}\bar{s}, \bar{r}\bar{s}\bar{t}\ \}$$

$|$

$p \leftarrow faux$

$|$

$$\{\bar{r}t, s, \bar{r}\bar{s}\bar{t}\ \}$$

$|$

$s \leftarrow vrai$ (unitaire)

$|$

$$\{\bar{r}t, \bar{r}\bar{t}\ \}$$

$|$

$r \leftarrow faux$ (pur)

$|$

$\{\}$ succès

D'où l'interprétation (partielle) :

- I(p) = faux
- I(q) = vrai
- I(r) = faux
- I(s) = vrai
- I(t) = indéterminé
- I(u) = vrai

Question 1.2 :

$\mathcal{C} = \{pq\bar{r}, \bar{q}r, sq\bar{r}\}$

Par la règle du littéral pur, on doit attribuer à p et s l'interprétation vrai, ce qui donne :

$\{\bar{q}r\}$

Il reste alors un choix entre deux interprétations possibles :

- $q \leftarrow faux$ et r indéterminé ;
- $r \leftarrow vrai$ et q indéterminé.

(La combinaison "interdite" de q et r étant donc $q = vrai\ \wedge\ r = faux$)

Cette méthode a donc permis de trouver 3 interprétations différentes pour $\mathcal{C}$:

• I(p) = vrai	• I(p) = vrai	• I(p) = vrai
• I(q) = faux	• I(q) = faux	• I(q) = vrai
• I(r) = vrai	• I(r) = faux	• I(r) = vrai
• I(s) = vrai	• I(s) = vrai	• I(s) = vrai

Ce ne sont pourtant pas les seules interprétations possibles pour $\mathcal{C}$, en effet il existe par exemple les interprétations suivantes :

- I(p) = faux
- I(q) = vrai
- I(r) = vrai
- I(s) = faux

- I(p) = faux
- I(q) = faux
- I(r) = faux
- I(s) = faux

La règle du littéral pur ne garantit pas qu'il n'y a pas d'autres interprétations possibles si un succès est atteint. En revanche, si elle mène à un échec, alors on sait assurément que la clause est non satisfiable.

Exercice 2

Question 2.1 :

On va montrer que $\mathcal{C}$ est satisfiable ssi $\mathcal{C}'$ est satisfiable, où :

- $\mathcal{C}' = (\mathcal{C} - \{a \vee b\}) \cup \{a \vee x, \neg x \vee b\}$

$\Rightarrow$ Si $\mathcal{C}$ est satisfiable, alors il existe une interprétation I qui satisfait $\mathcal{C}$.

Donc $I \models a \vee b$, donc $I(a) = vrai$ **ou** $I(b) = vrai$:

- Si $I(a) = vrai$:

  On définit $I' = I$ sauf pour $I'(x) = faux$

  alors :

  $I' \models a \vee x$, car $I'(a) = vrai$

  $I' \models \neg x \vee b$, car $I'(x) = faux$

- Si $I(b) = vrai$:

  On définit $I' = I$ sauf pour $I'(x) = vrai$

  alors :

  $I' \models a \vee x$, car $I'(x) = vrai$

  $I' \models \neg x \vee b$, car $I'(b) = vrai$

Donc $I' \models \mathcal{C}'$

$\Leftarrow$ Si $\mathcal{C}'$ est satisfiable, alors il existe une interprétation I' qui satisfait $\mathcal{C}'$.

Donc $I' \models a \vee x$ et $I' \models \neg x \vee b$

- Si $I'(x) = vrai$:

  On définit $I = I'$ sauf pour $I(b) = vrai$

  alors :

  $I \models a \vee b$, car $I(b) = vrai$
- Si $I'(x) = faux$:

  On définit $I = I'$ sauf pour $I(a) = vrai$

  alors :

  $I \models a \vee b$, car $I(a) = vrai$

Donc $I \models \mathcal{C}$

□ CQFD

Question 2.2 :

Idée : on remplacer chaque clause de taille $p \geq 4$ par $p - 2$ clauses de taille 3.

Par exemple :

- $\{l_1\ l_2\ l_3\ l_4\} \rightarrow \{l_1\ l_2\ x\} \cup \{\bar{x}\ l_3\ l_4\}$
- $\{l_1\ l_2\ l_3\ l_4\ l_5\} \rightarrow \{l_1\ l_2\ x\} \cup \{\bar{x}\ l_3\ y\} \cup \{\bar{y}\ l_4\ l_5\}$

Question 2.3 :

On parcourt une fois l'ensemble de clauses, en comptant pour chaque clause le nombre de littéraux, et quand ce nombre atteint 4, on coupe la clause courant en 2.

Si n est le nombre de littéraux (pas "le nombre de littéraux uniques") de $\mathcal{C}$, on a pas plus de 3n littéraux dans $\mathcal{C}'$, d'où un calcul en $\Theta(n)$

D'où SAT $\prec$ 3SAT, c'est-à-dire 3SAT est au moins aussi difficile que SAT.

$$\left.\begin{array}{l} 3\textsc{sat} \in \mathrm{NP} \\ \textsc{sat} \text{ est } \textsc{np-complet} \\ \textsc{sat} \prec 3\textsc{sat} \end{array}\right\} \Rightarrow 3\textsc{sat} \text{ est } \textsc{np-complet}$$

2 La classe NP

Exercice 3

Question 3.1 :

Pour un ensemble $\{6, 4, 5, ...\}$ d'entiers positif, 2-PARTITION cherche à diviser cet ensemble en 2 partitions dont la somme est égale.

Pour un ensemble d'objets de taille $\{6, 4, 5, ...\}$ et une capacité C, DÉMÉNAGEURS cherche à produire un minimum de partitions de taille C pour ranger ces objets.

Afin de montrer que 2-PARTITION $\preceq$ DÉMÉNAGEURS, on peut utiliser la réduction suivante :

- Soit S l'ensemble d'entier positif ;
- On définit un objet pour chaque entier $x \in S$ dont la taille vaut x ;
- Et on définit la capicité $C = \sum_{x \in S} x/2$

Preuve de l'exactitude de cette réduction :

- Si le problème des DÉMÉNAGEURS possède une solution à 2 boîtes, alors la somme des tailles des objets de chaque boîte vaut $\sum_{x \in S} x/2$, d'où on obtient 2 partitions de même somme, donc il y a une solution au problème 2-PARTITION ;
- Si le problème des 2-PARTITION possède une solution avec 2 partitions de même somme dans S, alors nécessairement cette somme vaut $C = \sum_{x \in S} x/2$, d'où on peut former 2 boîtes, donc il y a une solution au problème des DÉMÉNAGEURS.

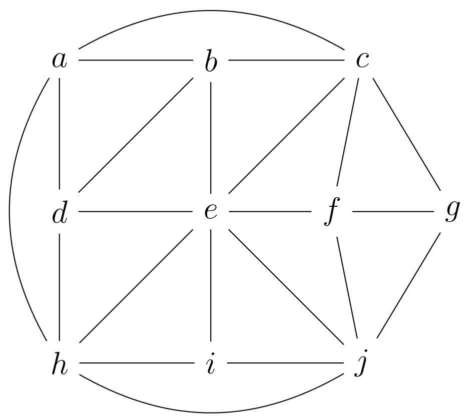
D'où 2-PARTITION $\preceq$ DÉMÉNAGEURS.

Question 3.2 :

La transformation n'a même pas besoin de faire de parcours, elle se fait en temps fixe.

$$\left.\begin{array}{l}\text{2-PARTITION est NP-COMPLET} \\ \text{2-PARTITION} \preceq \text{DÉMÉNAGEURS}\end{array}\right\} \Rightarrow \text{DÉMÉNAGEURS est NP-DIFFICILE}$$

Exercice 4



Question 4.1 & 4.2 :

Cliques :

- $\{a\}, \{b\}, \{c\}, ...$
- $\{a, b\}, \{a, c\}, \{a, d\}, ..$
- $\{a, b, c\}, ...$
- $\{e, h, i, j\}$

Ens. indépendants :

- $\varnothing, \{a\}, \{b\}, \{c\}, ...$
- $\{a, e\}, \{a, f\}, \{a, g\}, ...$
- $\{d, f, i\}, \{b, h, g\}$

Ens. couvrant toutes les arêtes :

- $V - \{a\}, V - \{b\}, ...$
- $V - \{a, e\}, ...$
- $V - \{d, f, i\} = \{a, b, c, e, g, h, j\}$

Question 4.3 :

Si S est un ensemble indépendant, alors V-S couvre toutes les arrêtes :

$$\forall \{x, y\} \in A, \begin{cases} x \notin S & x \in V - S \\ y \notin S & y \in V - S \end{cases}$$

Question 4.4 :

L'objectif est de montrer que :

Si S est un ensemble indépendant pour $G = (V, A)$,
Alors S est une clique de $\bar{G} = (V, \bar{A})$

Preuve :

Si S est un ensemble indépendant, alors

$$\forall \{x, y\} \in A, x \notin S, y \notin S$$

$$\text{d'où } \{x, y\} \subseteq S \ (x \neq y) \ \Rightarrow \ \{x, y\} \notin A \ \Rightarrow \ \{x, y\} \in \bar{A}$$

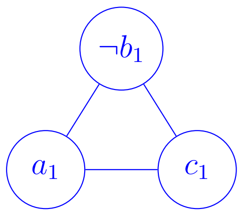
Donc S est une clique de $\bar{G}$

On va maintenant montrer que 3SAT $\prec$ Ensemble Indépendant

$$\begin{array}{ccc} \text{3SAT} & \mathcal{C} \longrightarrow & \text{v/f} \\ & \downarrow & \updownarrow \\ \text{ENS. IND.} & G, k \longrightarrow & \text{v/f} \end{array}$$

<u>Question 4.5 :</u>

$a \lor \neg b \lor c \quad \Longrightarrow$



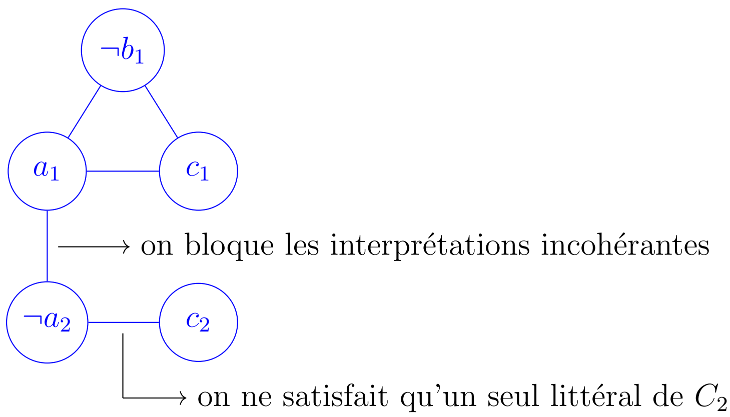
Si on construit un graphe complet (c'est-à-dire que tout nœud du graphe est rélié à tous les autres nœuds), alors les ensembles indépendants sont tous des singletons.

<u>Question 4.6 :</u>

$C = \{C_1, C_2\}$

$C_1 = a \lor \neg b \lor c \quad \Longrightarrow$

$C_2 = \neg a \lor c$



Exemple d'ensemble indépendant "max" contenant exactement 2 sommets :

- $\{\neg b_1, c_2\} \Rightarrow$ interprétation$I(b) = False, I(c) = True, I \vDash C_1, C_2$

Question 4.7 :

Soit $\mathcal{C}$ un ensemble de clauses à 3 littéraux. On construit G = (V,A).

Pour chaque clause $C_i = l_{i1} \vee l_{i2} \vee l_{i3}$, V contient un sommet pour chaque littéral, et on ajoute 3 arêtes pour que ces trois sommets forment une clique.

On ajoute les arêtes $\{l_{ik}, l_{jk}\}$ où l_{ik} et l_{jk} sont deux littéraux complémentaires.

On va montrer que $\mathcal{C}$ est satisfiable ssi G contient un ensemble indépendant de taille $|\mathcal{C}|$:

- $\Rightarrow$ Si S est un ensemble indépendant de G de taille $|\mathcal{C}|$,
  on peut définir une interprétation I telle que :
  - $\forall\ l_i \in S,\ I(l_i) = True$;
  - S contient $|\mathcal{C}|$ sommets, et ne peut pas contenir 2 sommets correspondant à une même clause, donc S contient exactement 1 "littéral" de chaque clause ;
  - S ne peut contenir deux sommets "contradictoires" ;

  Donc I est bien une interprétation (partielle) de $\mathcal{C}$ ($I \vDash \mathcal{C}$).
- $\Leftarrow$ Si $I \vDash \mathcal{C}$,
  on peut choisir, pour chaque clause C_i, un littéral tel que :
  - $I \vDash l_i$;
  - S est l'ensemble des sommets correspondant ;
  - S contient *1* littéral par clause ;
  - S ne contient pas 2 sommets/opposés ;

    $\rightarrow |S| = |\mathcal{C}|$ et S ne contient aucune arête, donc S est un ensemble indépendant.

□ CQFD

Question 4.8 :

On sait que 3SAT est NP-COMPLET. La transformation se faisant en temps linéaire, on peut affirmer que ENSEMBLE INDÉPENDANT est NP-DIFFICILE.