

Algorithmique Avancée

TD

Problèmes de Satisfaction de Contraintes (CSP)

Elana Courtines

courtines.e@gmail.com

<https://github.com/irinacake>

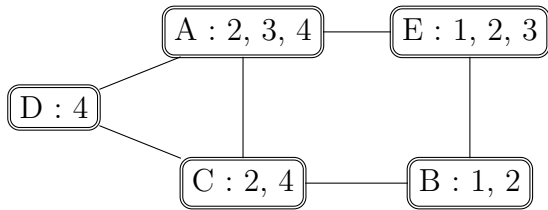
Séance 1 - 17 octobre 2022

Séance 2 - 06 novembre 2022

Jerome Mengin - jerome.mengin@univ-tlse3.fr

1 Algorithmiques de résolution

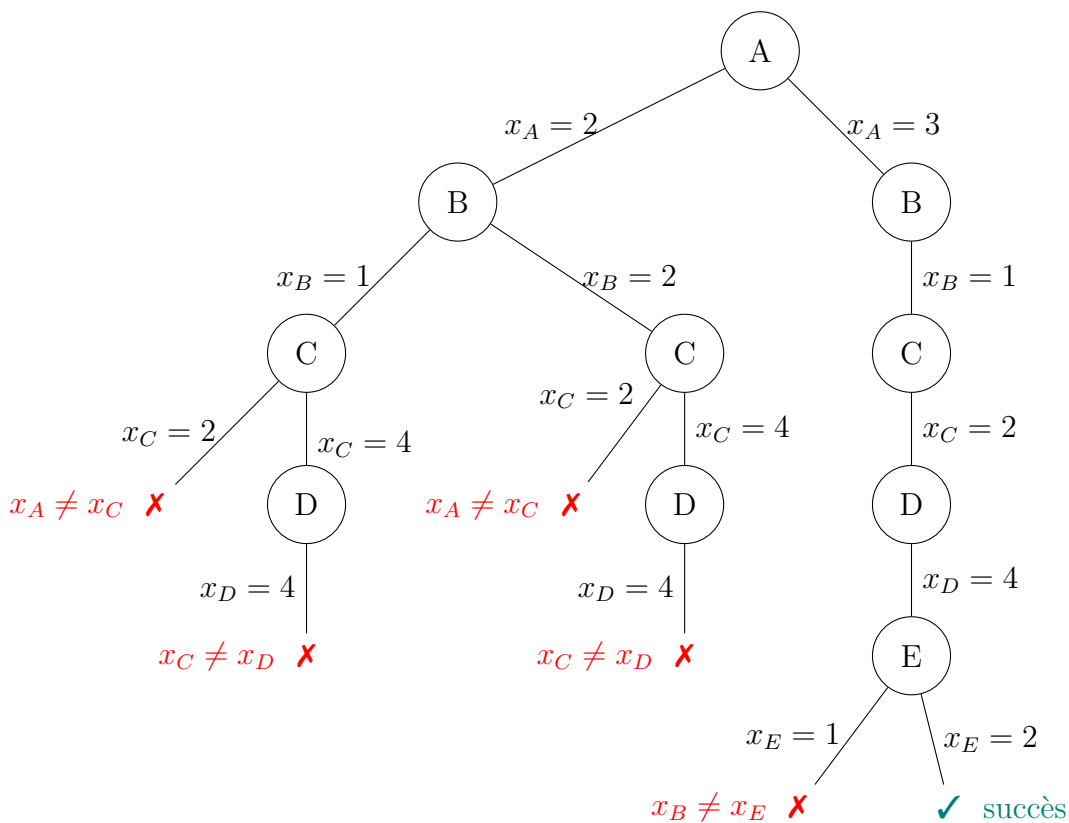
Exercice 1



Note 1 : les arbres de l'exercice 1 se lisent "de haut en bas", puis "de gauche à droite", pour indiquer dans quel ordre les assignations ont été tentées.

Note 2 : sauf indication contraire dans l'énoncé, on s'arrête au premier succès trouvé.

Question 1.1 :



Question 1.2 :

Règle sur le choix de l'ordonnancement des variables, du plus prioritaire ou moins prioritaire :

1. variable x tq. $|D_x| = 1$ (variable dont le domaine de définition vaut 1) ;
2. variable la plus contrainte (\Rightarrow celle qui a le plus de voisin) ;
3. variable qui a le domaine le plus petit.

Règle sur le choix de l'ordonnancement des valeurs des variables :

- prioriser celle qui bloque le moins de valeur dans les voisins.

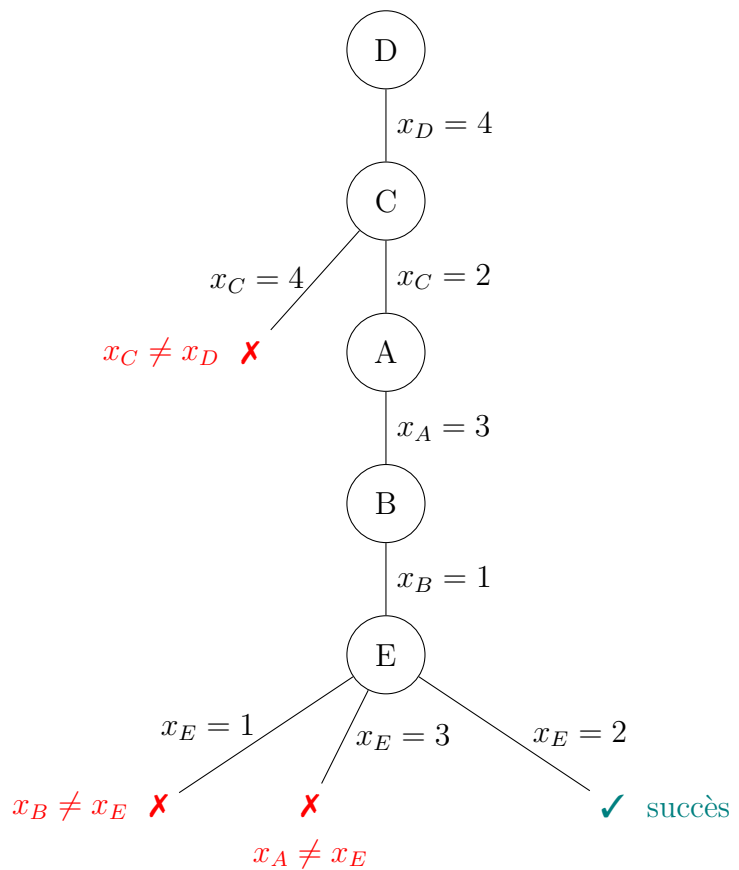
On définit donc l'ordre suivant :

$D \rightarrow C \rightarrow A \rightarrow B \rightarrow E$

Et pour chaque variable, l'ordre de valeurs suivant :

- D : 4
- C : 4 \rightarrow 2
- A : 3 \rightarrow 4 / 2
- B : 1 \rightarrow 2
- E : 1 / 3 \rightarrow 2

Ce qui donne le parcours ci-contre \rightarrow



Question 1.3 : Propagation de Contraintes

Construction du tableau de la propagation de contraintes et méthode d'itération :

- commencer par remplir la première ligne avec les domaines pour chaque variable, et remplir la file d'attente (Q) avec toutes les contraintes présentes (il doit y en avoir une pour chaque arête du graphe). Par exemple $\{A,C\}$ signifie que x_A ne peut pas valoir la même valeur que x_C ;
- à chaque itération, on prend la première contrainte de la file, et on vérifie si celle-ci engendre une réduction du domaine de l'une des variables. Par exemple :
 - pour $\{A,C\}$ (2^e ligne du tableau), aucun des domaines n'est réduit, donc on ne fait que retirer $\{A,C\}$ de la file ;
 - pour $\{A,D\}$ (3^e ligne du tableau), on remarque de A ne peut jamais valoir 4, donc on retire la valeur 4 au domaine et x_A , et on rajoute dans la file toutes les contraintes dans lesquelles A est impliqué : $\{A,C\}$, $\{A,D\}$ et $\{A,E\}$ (note : la contrainte $\{A,E\}$ étant déjà présente dans la file, on ne l'ajoute pas une deuxième fois) ;
- l'algorithmique se termine lorsque la file d'attente Q est vide.

À la fin de la propagation de contraintes, on n'a pas la garantie que tous les domaines seront réduits à une seule valeur. En fait il est même possible qu'aucun des domaines de soit réduit.

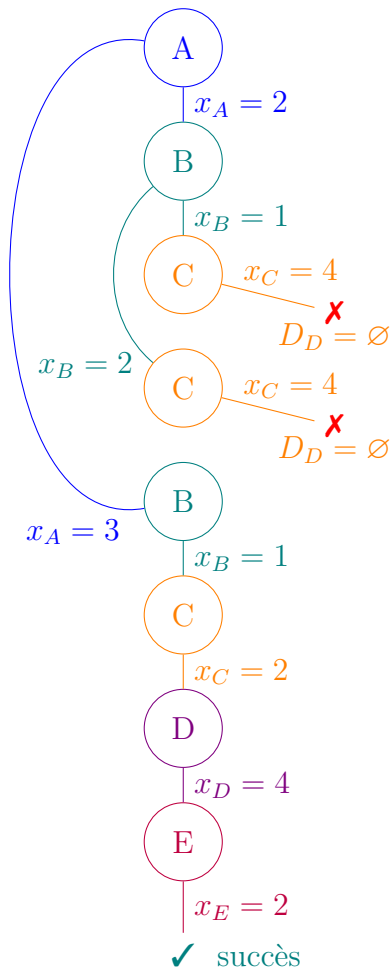
Note : les lignes n'ayant aucun impact sur les domaines ont été simplifiées, à l'exception des lignes 2 et 4 ($\{A,C\}$ et $\{A,E\}$ respectivement) qui servent surtout d'exemples.

Contrainte propagée	D_A	D_B	D_C	D_D	D_E	Q (file d'attente contraintes)
début	2,3,4	1,2	2,4	4	1,2,3	$\{A,C\}, \{A,D\}, \{A,E\}, \{B,C\}, \{B,E\}, \{C,D\}$
$\{A,C\}$ 	2,3,4	1,2	2,4	4	1,2,3	$\{A,D\}, \{A,E\}, \{B,C\}, \{B,E\}, \{C,D\}$
$\{A,D\}$ 	2,3	1,2	2,4	4	1,2,3	$\{A,E\}, \{B,C\}, \{B,E\}, \{C,D\}, \{A,C\}, \{A,D\}$
$\{A,E\}$ 	2,3	1,2	2,4	4	1,2,3	$\{B,C\}, \{B,E\}, \{C,D\}, \{A,C\}, \{A,D\}$
$\{B,C\}$	2,3	1,2	2,4	4	1,2,3	$\{B,E\}, \{C,D\}, \{A,C\}, \{A,D\}$
$\{B,E\}$	2,3	1,2	2,4	4	1,2,3	$\{C,D\}, \{A,C\}, \{A,D\}$
$\{C,D\}$ 	2,3	1,2	2	4	1,2,3	$\{A,C\}, \{A,D\}, \{B,C\}, \{C,D\}$
$\{A,C\}$ 	3	1,2	2	4	1,2,3	$\{A,D\}, \{B,C\}, \{C,D\}, \{A,C\}, \{A,E\}$
$\{A,D\}$	3	1,2	2	4	1,2,3	$\{B,C\}, \{C,D\}, \{A,C\}, \{A,E\}$
$\{B,C\}$ 	3	1	2	4	1,2,3	$\{C,D\}, \{A,C\}, \{A,E\}, \{B,C\}, \{B,E\}$
$\{C,D\}$	3	1	2	4	1,2,3	$\{A,C\}, \{A,E\}, \{B,C\}, \{B,E\}$
$\{A,C\}$	3	1	2	4	1,2,3	$\{A,E\}, \{B,C\}, \{B,E\}$
$\{A,E\}$ 	3	1	2	4	1,2	$\{B,C\}, \{B,E\}, \{A,E\}$
$\{B,C\}$	3	1	2	4	1,2	$\{B,E\}, \{A,E\}$
$\{B,E\}$ 	3	1	2	4	2	$\{A,E\}, \{B,E\}$
$\{A,E\}$	3	1	2	4	2	$\{B,E\}$
$\{B,E\}$	3	1	2	4	2	\emptyset

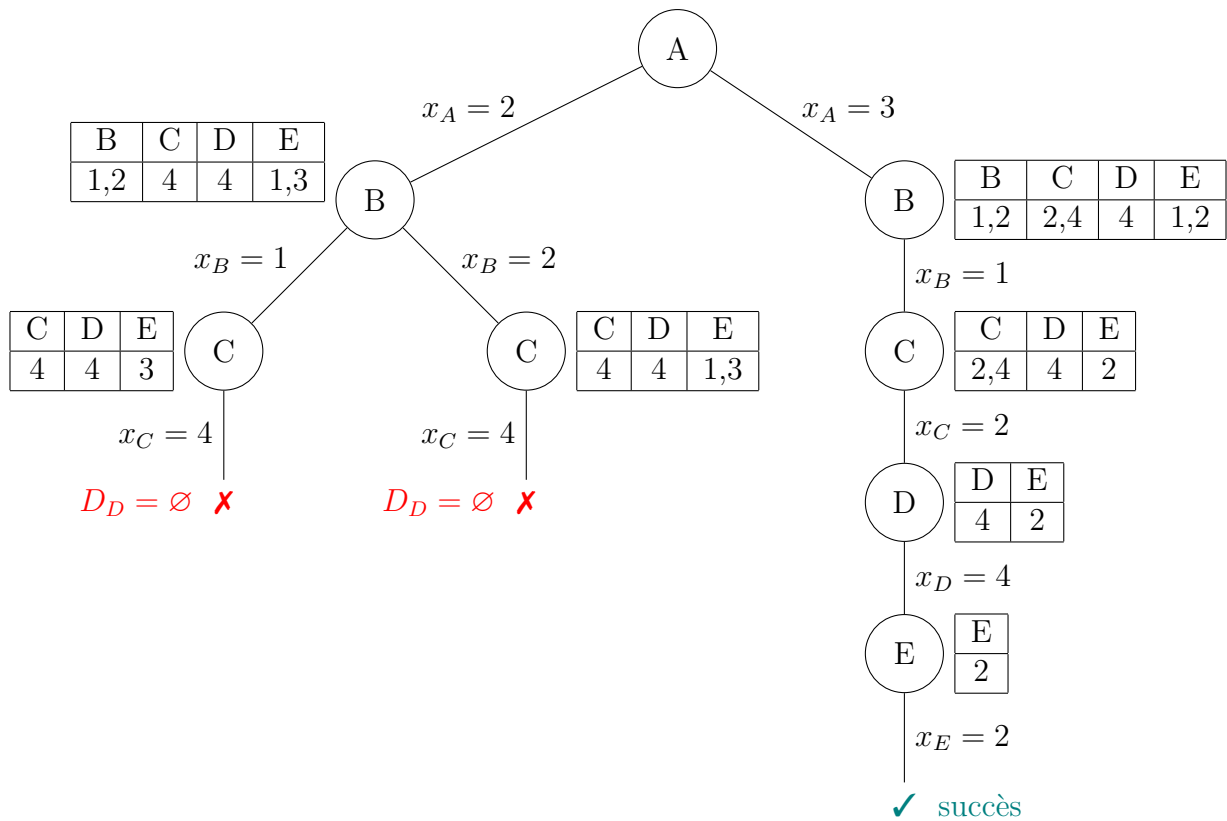
La propagation de contrainte est terminée, et celle-ci donne des affectations uniques pour chaque variable (c'est le cas ici, mais ça ne l'est pas toujours, auquel cas il faut refaire un arbre).

On a donc : $x_A = 3$, $x_B = 1$, $x_C = 2$, $x_D = 4$, $x_E = 2$.

Question 1.4 :



Affectation	D_A	D_B	D_C	D_D	D_E
	2,3,4	1,2	2,4	4	1,2,3
A \leftarrow 2	2	1,2	4	4	1,3
B \leftarrow 1	2	1	4	4	3
C \leftarrow 4	2	1	4	\emptyset	- échec
B \leftarrow 2	2	2	4	4	1,3
C \leftarrow 4	2	2	4	\emptyset	- échec
A \leftarrow 3	3	1,2	2,4	4	1,2
B \leftarrow 1	3	1	2,4	4	2
C \leftarrow 2	3	1	2	4	2
D \leftarrow 4	3	1	2	4	2
E \leftarrow 2	3	1	2	4	2 succès



Exercice 2 (les N-Reines)

Question 2.1 :

On va représenter les contraintes sous forme de "tableaux" qui se lit comme suit :

- le nom du tableau indique de quelles reines on parle : C_{12} = tableau des contraintes entre les reines 1 et 2 ;
- chaque case du tableau indique si oui ou non la combinaison est possible :
 - ac dans le tableau C_{12} indique que la combinaison "reine 1 sur colonne a" et "reine 2 sur la colone c" est possible ;
 - ab dans le tableau C_{12} indique que la combinaison "reine 1 sur colonne a" et "reine 2 sur la colone b" est impossible ;

Contraintes pour $n = 3$:

$$C_{12} = \begin{array}{ccc} aa & ab & ac \\ ba & bb & be \\ ca & eb & ee \end{array}$$

$$C_{13} = \begin{array}{ccc} aa & ab & ae \\ ba & bb & bc \\ ea & cb & ee \end{array}$$

$$C_{23} = \begin{array}{ccc} aa & ab & ac \\ ba & bb & be \\ ca & eb & ee \end{array}$$

Contraintes pour $n = 4$:

$$C_{12} = \begin{array}{cccc} aa & ab & ac & ad \\ ba & bb & be & bd \\ ca & eb & ee & ed \\ da & db & de & dd \end{array}$$

$$C_{13} = \begin{array}{cccc} aa & ab & ae & ad \\ ba & bb & bc & bd \\ ea & cb & ee & cd \\ da & eb & dc & dd \end{array}$$

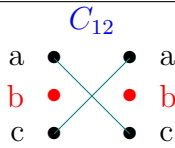
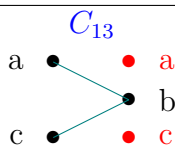
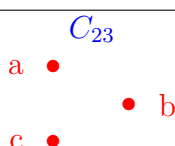
$$C_{14} = \begin{array}{cccc} aa & ab & ac & ad \\ ba & bb & bc & bd \\ ca & cb & ee & cd \\ da & db & dc & dd \end{array}$$

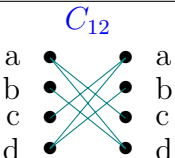
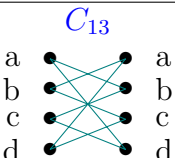
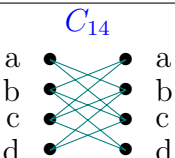
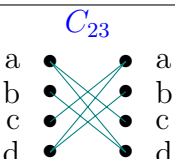
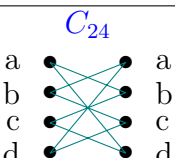
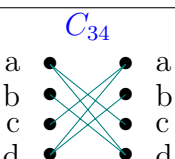
$$C_{23} = \begin{array}{cccc} aa & ab & ac & ad \\ ba & bb & be & bd \\ ca & eb & ee & ed \\ da & db & de & dd \end{array}$$

$$C_{24} = \begin{array}{cccc} aa & ab & ae & ad \\ ba & bb & bc & bd \\ ea & cb & ee & cd \\ da & eb & dc & dd \end{array}$$

$$C_{34} = \begin{array}{cccc} aa & ab & ac & ad \\ ba & bb & be & bd \\ ca & eb & ee & ed \\ da & db & de & dd \end{array}$$

Question 2.2 :

Contrainte propagée	R_1	R_2	R_3	Q (file d'attente contraintes)
<i>début</i>	a,b,c	a,b,c	a,b,c	C_{12}, C_{13}, C_{23}
	a,c	a,c	a,b,c	C_{13}, C_{23}, C_{12}
	a,c	a,c	b	C_{23}, C_{12}, C_{13}
	a,c	\emptyset	\emptyset	échec

Contrainte propagée	R_1	R_2	R_3	R_4	Q (file d'attente contraintes)
<i>début</i>	a,b,c,d	a,b,c,d	a,b,c,d	a,b,c,d	C_{12}, C_{13}, C_{14} C_{23}, C_{24}, C_{34}
	a,b,c,d	a,b,c,d	a,b,c,d	a,b,c,d	$C_{13}, C_{14},$ C_{23}, C_{24}, C_{34}
	a,b,c,d	a,b,c,d	a,b,c,d	a,b,c,d	$C_{14}, C_{23}, C_{24}, C_{34}$
	a,b,c,d	a,b,c,d	a,b,c,d	a,b,c,d	C_{23}, C_{24}, C_{34}
	a,b,c,d	a,b,c,d	a,b,c,d	a,b,c,d	C_{24}, C_{34}
	a,b,c,d	a,b,c,d	a,b,c,d	a,b,c,d	C_{34}
	a,b,c,d	a,b,c,d	a,b,c,d	a,b,c,d	\emptyset

2 Modélisation

Exercice 3

Question 3.1 : Modélisation

Variables : x_i temps du début de t_i

Domaines : $D_i = [0, 1, 2, 3, 4, 5, 6]$

Contraintes :

- t_2 et t_3 pas en parallèle :
 $\rightarrow x_2 \geq x_3 + 3$ ou $x_3 \geq x_2 + 1$
- t_4 après t_3
 $\rightarrow x_4 \geq x_3 + 3$

Question 3.2 : Propagation de contraintes

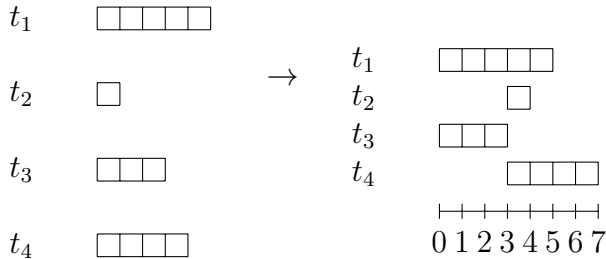
- t_2 et t_3 pas en parallèle : n'a aucun impact ;
- $x_4 \geq x_3 + 3$:
 - on a $x_3 \geq 0 \Rightarrow x_4 \geq 3 \rightarrow D_4 = [3, 4, 5, 6]$
 - on a $x_4 \leq 6 \Rightarrow x_3 \leq 3 \rightarrow D_3 = [0, 1, 2, 3]$

Question 3.3 : Exemple de solution

Proposition :

$$x_1 = x_3 = 0$$

$$x_2 = x_4 = 3$$



Exercice 4

Question 3.1 : Modélisation

Variables et Domaines :

- $p, D_p = [1, 2, 3]$
- $m, D_m = [1, 2, 3, 4]$
- $d, D_d = [1, 2, 3]$

Contraintes :

- $p \neq 1$ ou $d \neq 3$
- $m \geq p$
- $p = m = 2 \Rightarrow d = 2$
- $\text{cout}(p) + \text{cout}(m) + \text{cout}(d) \leq C$

La suite n'a pas été traitée en TD.