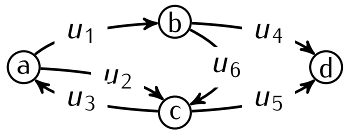
TDs : Flots

1 Loi de Kirchhoff et algorithme de Ford-Fulkerson

Exercice 1. Question 1.1. Donnez trois exemples de flots (qui ne sont pas des cycles) sur le graphe ci-contre.

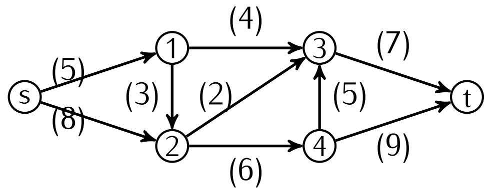


Question 1.2. Démontrez la loi de Kirchhoff généralisée : étant donné un flot ϕ sur un graphe orienté (X, U), et un sous-ensemble A de X :

$$\sum_{u \in \omega^+(A)} \varphi(u) = \sum_{u \in \omega^-(A)} \varphi(u).$$

Question 1.3. *(Travail Personnel)* Montrez que toute combinaison linéaire de flots est un flot.

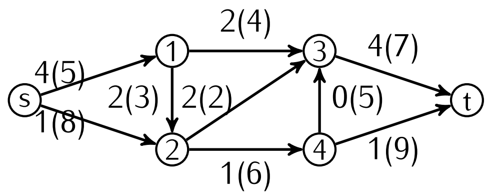
Exercice 2 (Coupe min. et flot max., algo. de Ford-Fulkerson)**.** Soit le réseau ci-contre avec les capacités indiquées entre parenthèse.



Question 2.1. Donnez des exemples de coupes avec leur capacité.

Question 2.2. Quelle est la coupe de capacité minimum ?

Question 2.3. On considère le vecteur φ_0 ci-contre, ses composantes sont indiquées sur les arcs suivies par les capacités de ces arcs indiquées entre parenthèses. Vérifiez que φ_0 est un flot sur le réseau de transport associé, et qu'il est compatible, donnez sa valeur $v(\varphi_0)$.

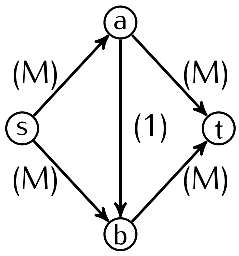


Question 2.4. (*tr. pers.*) Montrez que tout flot a une valeur inférieure ou égale à la capacité de toute coupe
Indice : Vous considérerez un flot compatible quelconque φ et une coupe quelconque $C(A, X \setminus A)$ sur le même réseau $R(X, U)$, vous exprimerez la loi de Kirchhoff généralisée sur A. Vous mettrez ensuite en évidence l'arc de retour u_0 dans la précédente équation, en utilisant le fait que le flot est compatible vous pourrez conclure..

Question 2.5. Trouvez un flot maximum par marquage Ford Fulkerson, décrivez dans un tableau avec une colonne par arc, les vecteurs cycles (associés aux chaînes augmentantes utilisées) ainsi que les flots obtenus successivement.

Question 2.6. (*travail personnel*) Soit φ_k le flot obtenu à la dernière étape de l'algorithme de Ford Fulkerson. Soit A l'ensemble des sommets que l'on peut marquer pour le flot φ_k. Montrez que $\varphi_k(u_0) = capa(\omega^+(A))$ et donc que φ_k est maximum.
Indice : considérez les arcs de $\omega^+(A)$ et les arcs de $\omega^-(A)$.

Question 2.7. *(Travail Personnel)* Il peut arriver qu'en choisissant mal les chaînes augmentantes, on ait besoin de beaucoup d'itération du marquage Ford-Fulkerson. On considère le graphe ci-contre (Edmonds et Karp 1972).Montrez qu'en choisissant les chaînes augmentantes d'une certaine façon, on peut avoir à faire $2M$ étapes de marquage avant d'obtenir un flot maximum (Ce qui rend l'algorithme dépendant de la valeur du flot, et donc non polynomial).



2 Modélisation

Exercice 3 (Châteaux d'eau)**.** On considère 2 châteaux d'eau A et B alimentant 3 villages C, D et E. Le château d'eau A peut être alimenté avec 50 litres par secondes, et B avec 80 litres par seconde. Le village C a besoin au maximum de 70 l/s, D de 30 l/s et E de 30 l/s. Les capacités des canalisations en l/s sont :

canalisation	AC	AD	BD	BE
capacité en l/s	40	20	50	20

Question 3.1. On cherche une répartition de l'eau qui satisfasse au mieux ces contraintes, exprimer ce problème en termes de flot dans un réseau à dessiner.

Question 3.2. Le vecteur φ suivant est-il un flot compatible ? Quelle est sa valeur ?

canalisation	sA	sB	AC	AD	BD	BE	Ct	Dt	Et
φ	50	30	30	20	10	20	30	30	20

Question 3.3. Déterminer un flot maximum grâce à l'algorithme de Ford-Fulkerson.

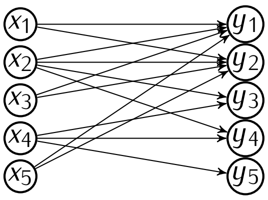
Question 3.4. Tous les villages pourront-ils subvenir à leurs besoins ?

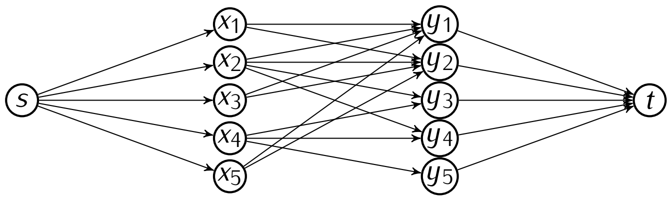
Exercice 4 (Lorsque dîner est un problème !)**.** Trois familles A, B et C souhaitent diner ensemble. Mais pour développer leurs affinités, elles aimeraient qu'à chaque table, il y ait au plus **deux** membres de chaque famille. Supposons que la famille **A possède 5 membres**, la famille **B 6** et la famille **C 8**. La salle de réception comporte 4 tables (T1, T2, T3 et T4) de **5 places** chacune. Les familles souhaitent qu'un maximum de personnes puisse manger.

Montrer que ce problème peut se formuler comme un problème de recherche de flot maximum dans un réseau que vous dessinerez (vous préciserez les capacités des arcs du réseau sur le graphe, vous expliquerez pourquoi trouver un plan de table correspond à un flot maximum dans ce réseau avec ces capacités précises).

On ne demande pas de résoudre le problème mais seulement de le représenter.

Exercice 5 (Graphe biparti)**.** Soit G le graphe biparti (à gauche) et R_G le réseau de transport biparti "associé" (à droite) dans lequel on suppose les capacités $capa(u)$ toutes égales à 1.





Question 5.1. Trouver un flot maximum φ^* dans R_G.

Un couplage d'un graphe biparti est un ensemble d'arcs (ou d'arêtes) 2 à 2 non adjacent(e)s.

Question 5.2. Vérifier (et expliquer) que pour tout flot φ sur R_G, l'ensemble E des arcs u de G en lesquels le flux $\varphi(u)$ est égal à 1 est un couplage de G.

Question 5.3. Donnez le couplage associé au flot maximum φ^*, quel est sa cardinalité ?

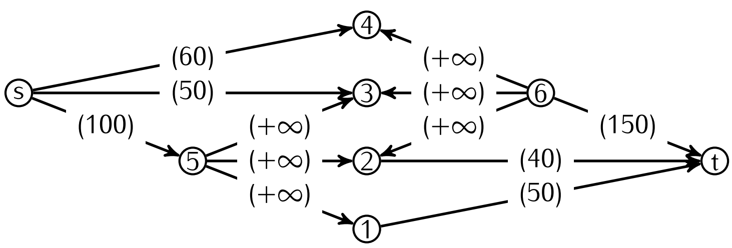
On appelle *couplage maximum* un couplage de cardinalité maximum parmi tous les couplages possibles, on appelle *couplage maximal* un couplage E tel que l'ajout de tout nouvel arc de G à E n'est plus un couplage. On appelle *couplage parfait* un couplage tel que tout sommet est adjacent à au moins un arc du couplage.

Question 5.4. Conclure sur le couplage obtenu.

Question 5.5. (*Travail personnel*) Proposez un couplage maximal non maximum.

Exercice 6 (Mine à ciel ouvert)**.** On considère le graphe ci-contre :

Question 6.1. Calculez un flot compatible maximum de s à t dans le réseau associé à ce graphe.



Question 6.2. Décrivez une coupe de capacité minimum ainsi que ses arcs et sa capacité.

Ce graphe est un codage d'un problème d'exploitation de Mines à Ciel Ouvert. Ce problème est un cas particulier parmi les problèmes de sélection d'ensembles avec des contraintes de dépendances. On désire extraire un ensemble de blocs qui aura le meilleur profit.
Pour des raisons de sécurité, pour retirer un bloc on doit d'abord retirer les 3 blocs qui sont au-dessus de lui (directement sur lui, au-dessus à gauche et au-dessus à droite). On considère la "mine" dessinée ci-dessous accompagnée des profits des blocs : pour extraire le bloc 5, il faudra extraire les blocs 1, 2 et 3.

1	2	3	4
	5	6	

bloc i	1	2	3	4	5	6
profit p_i (revenu-coût d'extraction)	-50	-40	50	60	100	-150

Le profit associé à un bloc est p_i (c'est le revenu du bloc moins le coût de son extraction). Le profit associé à un ensemble de blocs est la somme des profits de ces blocs. Ici les sommets du graphe représentent les blocs, et pour tout bloc i dont l'extraction nécessite celle de j, on crée un arc (i, j) de capacité $(+\infty)$, pour tout bloc i ayant un profit p_i positif, un arc (s, i) de capacité (p_i) et pour tout bloc j ayant un profit p_j négatif, un arc (j, t) de capacité $(-p_j)$.

Question 6.3. Soit profit(A) la somme des profits des blocs appartenant à A. Montrez que toute coupe $C = (A, X \setminus A)$ de capacité finie vérifie profit$(A) = \sum_{i|p_i \geq 0} p_i - \text{capa}(C)$.

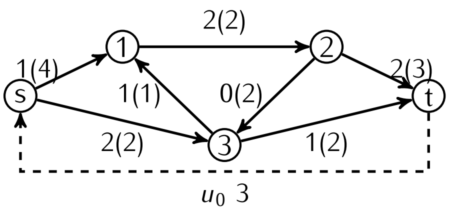
Question 6.4. En déduire les blocs à extraire pour obtenir un profit maximum, et le profit obtenu.

3 Graphe d'écart et flots à coûts

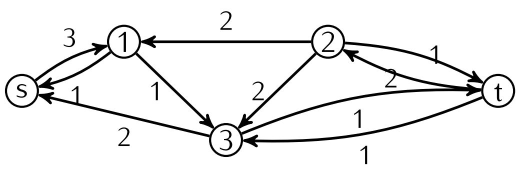
Le graphe d'écart $G_R(\varphi) = (X, U_\varphi, r_\varphi)$ associé à un réseau de transport $R = (X, U, capa)$ et à un flot compatible φ est défini par : tout arc $(x, y) \in U$ peut induire deux arcs dans U_φ :

- un arc dit "direct" : $(x, y) \in U_\varphi$ si $\varphi(x, y) < capa(x, y)$ avec $r_\varphi = capa(x, y) - \varphi(x, y)$
- un arc dit "indirect" : $(y, x) \in U_\varphi$ si $\varphi(y, x) > 0$ avec $r_\varphi = \varphi(y, x)$

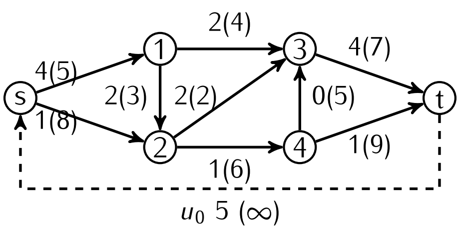
Réseau R initial avec son flot φ

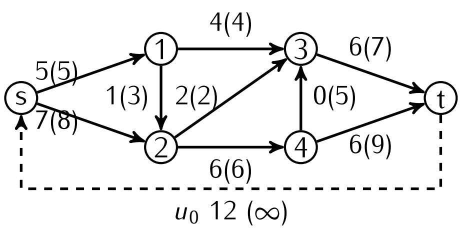


Graphe d'écart $G_R(\varphi)$



Exercice 7. Question 7.1. Dessinez les graphes d'écart associés au réseau suivant pour les deux flots proposés.





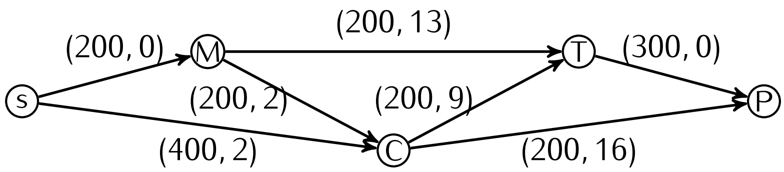
Question 7.2. Existe-t-il un chemin de s à t dans les deux graphes d'écart ? Que peut-on en déduire ?

Exercice 8 (Les fleurs c'est périssable)**.** Un grossiste en fleurs assure leur transport depuis Mougins et Vallauris vers Paris. Ce transport est effectué par camionnettes de Vallauris à Cannes et de Mougins à Cannes ou Grasse, puis par train ou avion de Cannes à Paris et par train de Grasse à Paris. On désire étudier le transport global par semaine durant l'été de façon à envoyer un maximum de fleurs à Paris pour un coût minimal.

Les camionnettes disponibles à Vallauris permettent d'acheminer au plus 400 cartons par semaine vers Cannes au coût unitaire de 2€ ; celles de Mougins, 400 cartons, dont la moitié vers Grasse au coût de 3€ et l'autre moitié vers Cannes, au coût de 2€. De plus, on doit limiter les envois par le train, trop lents, à 300 cartons dont 200 au plus depuis Cannes, le coût unitaire étant alors de 10€ de Grasse et de 9€ de Cannes. Par avion, le coût est de 16€ mais leur nombre ne permet pas d'expédier plus de 200 cartons de Cannes à Paris. Enfin, la production de Mougins ne peut dépasser 200 cartons, celle de Vallauris étant toujours excédentaire.

Question 8.1. Tracer un graphe de 8 sommets représentant le problème : sommets à créer s (entrée), V, M, G, C et P pour les cinq villes, T et A pour train et avion. Valuer les arcs (x,y) par des couples $(capa(x, y), \gamma(x, y))$, $capa(x, y)$ indiquant la capacité de l'arc et $\gamma(x, y)$ le coût unitaire de transport associé ; pour certains arcs $capa(x, y)$ pourra être infini.

Question 8.2. Quelles sont les simplifications à faire pour aboutir au graphe G ci-contre ? Les justifier.



Question 8.3. Déterminer un flot maximal de coût minimal avec l'algorithme de Roy, Busacker et Gowen.

Algorithm Roy (1960) [Roy69], Busacker and Gowen (1961) [BG61]
Max flow of min cost of a transport network $R = (X, U, capa, \gamma)$

1. Initialization : $\varphi \leftarrow (0, \dots, 0)$ (null flow)
2. Current Step : Build the residual graph[a] $G_R(\varphi) = (X, U_\varphi, capa_\varphi, \gamma_\varphi)$ with $\gamma_\varphi(u) = \begin{cases} \gamma(u) & \text{if } u \text{ is a direct arc} \\ -\gamma(u) & \text{if } u \text{ is an indirect arc} \end{cases}$
3. If $\nexists$ directed path $[s, t]$ in $G_R(\varphi)$ Then END : φ is a max flow of min cost
   Else
   - find an elementary st-minimal directed path ν_{st} in $(X, U_\varphi, \gamma_\varphi)$
   - $k \leftarrow \min_{u \in \nu_{st}} capa_\varphi(u)$
   - $\mu_{st} \leftarrow \nu_{st} \cup \{u_0\}$
   - $\varphi \leftarrow \varphi + k\mu_{st}$; $\gamma(\varphi) \leftarrow \gamma(\varphi) + k.\gamma_\varphi(\nu_{st})$
4. Reiterate 2 and 3 in order to obtain a flow of higher value

[a] "Residual graph" signifie "Graphe d'écart"

Références

[BG61] R. Busacker and P. Gowen. A procedure for determining minimal-cost network flow patterns. Technical Report ORO-15, Operational Research Office, John Hopkins University, 1961.

[Roy69] B. Roy. *Algèbre moderne et théorie des graphes*. Dunod, Paris, 1969.