TDs : Résolution approchée de problèmes NP-complets

Exercice 1. Le problème de COUVERTURE PAR SOMMETS est un problème de sélection d'un ensemble de sommets : étant donné un graphe $G = (V, A)$, où V est l'ensemble des sommets et A l'ensemble des arêtes, on cherche un sous-ensemble S de V *couvrant* toutes les arêtes, c'est-à-dire que pour toute arêtes $\{x, y\} \in A$ on a $x \in S$ ou $y \in S$; on veut un tel S de cardinalité minimale.

Question 1.1. Écrire un algorithme de sélection gloutonne simple d'arêtes pour résoudre ce problème : à chaque itération, l'algorithme choisit une arête, et ajoute ses deux extrémités à la solution courante.

Question 1.2. Montrer que si $S^{\mathcal{A}}$ est la solution retournée par l'algorithme, et si S^* est une solution optimale, alors $|S^{\mathcal{A}}| \leq 2|S^*|$. *(Indication : on pourra raisonner sur le nombre d'itérations effectuées par l'algorithme.)*

Exercice 2. On s'intéresse au problème des DÉMÉNAGEURS : on a un ensemble de n objets numérotés de 1 à n ; chaque objet a une taille entière $t_i > 0$; on a aussi une capacité entière $C > 0$ (ça correspond à la «taille» des boites) ; on suppose que pour chaque i, $t_i \leq C$. On cherche une partition S de $\{1, \ldots, n\}$, telle que pour chaque partie $S_j \in S$, (donc $S_j \subseteq \{1, \ldots, n\}$) on ait $\sum_{i \in S_j} t_i \leq C$; on veut minimiser $|S|$, le nombre de parties / boites.

Question 2.1. Écrire un algorithme *glouton* qui énumère les objets : chacun est ajouté à la première boite dans laquelle il y a encore de la place, si il ne rentre dans aucune on créée une nouvelle boite.

La valeur de la solution retournée est le nombre de boites générées : $v^{\mathcal{A}} = m$. On note U l'espace inutilisé final dans les boites générées par l'algorithme : $U = \sum_{j=1}^{v^{\mathcal{A}}}(C - \sum_{i \in S_j} t_i)$.

Question 2.2. Pourquoi l'algorithme laisse-t-il au plus une boite remplie à moins de la moitié ? En déduire une relation entre U, $v^{\mathcal{A}}$ et C.

On note $T = \sum_1^n t_i$ l'espace total nécessaire pour tous les objets.

Question 2.3. Quelle relation a-t-on entre $v^{\mathcal{A}}$, C, T et U. En déduire une majoration de $v^{\mathcal{A}}$ en fonction du rapport T/C.

Question 2.4. Que représente le rapport T/C. Quelle relation y a-t-il entre T/C et v^* ?

Question 2.5. Quelle minoration en déduit-on pour v^* en fonction de $v^{\mathcal{A}}$?

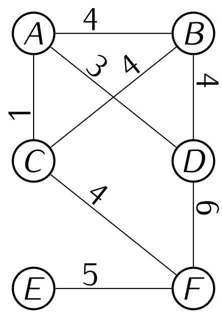
Remarque 1. [DLHT13] montrent que $v^* \geq \frac{1}{11/9} v^{\mathcal{A}} - \frac{6}{11}$ si on prend les objets par ordre de tailles décroissantes – et qu'il n'y a pas de meilleur majorant possible (pour cet algorithme).

Exercice 3. On s'intéresse au VOYAGEUR DE COMMERCE.

Question 3.1. Donnez un algorithme «glouton» pour ce problème, qui, partant d'une ville initiale quelconque, ajoute les villes l'une après l'autre en choisissant à chaque étape la ville non encore visitée la plus proche de la ville précédente.

Question 3.2. Donnez l'ordre de grandeur du temps d'exécution de cet algorithme en fonction du nombre de villes.

Question 3.3. Montrez que pour toute constante $\alpha > 1$ on peut trouver un exemple à 4 villes tel que, si $v^{\mathcal{A}}$ est la longueur du cycle retournée par l'algorithme précédent, et si v^* est la longueur du cycle optimal, alors $v^{\mathcal{A}}/v^* > \alpha$. *(Indication : on n'a pas supposé que c est une distance...)*



Lorsqu'on a l'inégalité triangulaire (c'est-à-dire *lorsque c vérifie l'inégalité triangulaire*), le facteur d'approximation de l'algorithme de sélection gloutonne est en $\log n$. Le meilleur algorithme d'approximation connu pour le VOYAGEUR DE COMMERCE dans ce cas commence par calculer un arbre couvrant de coût minimal du graphe complet sous-jacent au problème : pour un graphe connexe non-orienté $G = (V, A)$ et une fonction de coût $c : A \to \mathbb{R}^+$, un arbre couvrant est un sous-graphe $G' = (V, A')$ qui contient donc tous les sommets de G, et qui n'a pas de cycle. Il est de coût minimal s'il n'y a pas d'autre arbre couvrant de coût strictement inférieur. Sur l'exemple ci-contre, un arbre couvrant est obtenu en enlevant les arêtes AC, AD et BD, mais il n'est pas de poids minimal.

Question 3.4. Donnez un arbre couvrant de coût minimal du graphe ci-dessus.

Question 3.5. Donnez un algorithme par sélection gloutonne d'arêtes pour calculer un arbre couvrant d'un graphe donné. Comment peut-on naturellement ordonner les arêtes en fonction du coût avant la sélection gloutonne si on veut minimiser le coût de l'arbre calculé ? Montrez qu'on obtient bien ainsi un arbre couvrant de coût minimal. *(Indication : un invariant est qu'à chaque étape, l'ensemble d'arêtes sélectionnées est inclus dans un arbre couvrant de coût minimal…)*

Question 3.6. Si on applique cet algorithme au problème du voyageur de commerce, comment peut-on parcourir l'arbre (en prenant éventuellement des raccourcis – grâce à l'inégalité triangulaire) pour obtenir un tour de coût au pire 2 fois plus élevé que le coût optimal ?

Question 3.7. Écrivez un algorithme permettant d'approximer en temps polynomial avec un facteur 2 le VOYAGEUR DE COMMERCE AVEC INÉGALITÉ TRIANGULAIRE. Donnez sa complexité temporelle asymptotique.

Remarque 2. En améliorant la transformation d'un arbre couvrant en un tour, [Chr76] obtient un facteur d'approximation de 1,5.

Exercice 4. On va maintenant montrer que DÉMÉNAGEURS $\notin$ PTAS – sauf si NP = P. On va pour cela utiliser le fait que 2-PARTITION est NP-complet.

Soit une instance I de 2-PARTITION définie par n entiers $x_1, \ldots, x_n$. On note $S = \sum_{i=1}^{n} x_i$. On suppose que $x_i \leq S/2$ pour tout i (sinon, l'instance est trivialement insatisfiable). On définit une instance I' des déménageurs comme suit : il y a n objets de tailles respectives x_i, et la capacité est $C = S/2$.

Question 4.1. Montrez que I est satisfiable si et seulement si $v^*(I') = 2$.Que vaut $v^*(I')$ si I n'est pas satisfiable ?

Question 4.2. Démontrez que si un algorithme $\mathcal{A}$ permet de résoudre le problème des DÉMÉNAGEURS avec un facteur d'approximation $\alpha < 3/2$, alors il permet de résoudre 2-PARTITION.

Question 4.3. Qu'en conclue-t-on sur la classe de complexité de DÉMÉNAGEURS ?

Références

[Chr76] Nicos Christofides. Worst-case analysis of a new heuristic for the travelling salesman problem. Technical Report 388, Graduate School of Industrial Administration, Carnegie Mellon Université, 1976.

[DLHT13] György Dósa, Rongheng Li, Xin Han, and Zsolt Tuza. Tight absolute bound for first fit decreasing bin-packing : Ffd(l) $\leq$ 11/9 OPT(L) + 6/9. *Theorertical Compututer Science*, 510 :13–61, 2013.