TDs : SAT et classes de complexité

1 SAT

Exercice 1. Question 1.1. En utilisant l'algorithme DPLL, déterminez si les CNF suivantes sont satisfiables :

1. $\{p \vee q \vee r\ ,\ p \vee \neg q\ ,\ q \vee \neg r\ ,\ r \vee \neg p\ ,\ \neg p \vee \neg q \vee \neg r\}$
2. $\{\neg p \vee q \vee r, \neg p \vee \neg q \vee \neg r\ ,\ p \vee \neg q \vee r\ ,\ p \vee \neg q \vee \neg r, \neg p \vee s\ ,\ p \vee \neg s \vee \neg t \vee \neg u\ ,\ \neg p \vee v\}$
3. $\left\{ \begin{array}{c} p \vee \neg r \vee t\ ,\ p \vee s\ ,\ \neg p \vee \neg q \vee \neg r\ ,\ \neg p \vee \neg q \vee s \vee \neg u\ ,\ \neg p \vee \neg s \\ q \vee \neg u\ ,\ \neg q \vee t \vee u\ ,\ r \vee s \vee u\ ,\ \neg r \vee \neg s \vee \neg t \vee \neg u\ ,\ s \vee u \end{array} \right\}$

On considère maintenant la CNF $\mathcal{C} = \{p \vee q \vee \neg r\ ,\ r \vee \neg q\ ,\ s \vee q \vee \neg r\}$.

Question 1.2. Montrez, en utilisant DPLL, que cet ensemble est satisfiable. Combien l'interprétation partielle trouvée a-t-elle de complétions ? Donnez une interprétation qui satisfait $\mathcal{C}$ et qui n'est pas une complétion de cette interprétation partielle.

Exercice 2. L'objectif de cet exercice est de montrer que toute instance de SAT peut être transformée, en temps polynomial, en une instance de 3SAT, où toutes les clauses ont au plus 3 litéraux.

Soit $\mathcal{C}$ un ensemble de clauses sur un ensemble de variables $\mathcal{V}$.

Question 2.1. Soit $a \vee b \in \mathcal{C}$, et soit x une «nouvelle» variables booléenne – $x \notin \mathcal{V}$. Montrer que $\mathcal{C}$ est satisfiable si et seulement si $(\mathcal{C} - \{a \vee b\}) \cup \{a \vee x, \neg x \vee b\})$ est satisfiable.

Question 2.2. Comment peut-on remplacer chaque clause de longueur > 3 de $\mathcal{C}$ par un ensemble de clauses de longueur 3 tout en conservant la satisfiabilité de $\mathcal{C}$? Plus précisément, si $C \in \mathcal{C}$ et $|C| > 3$, on veut définir un ensemble de clauses $\mathcal{C}'$ tel que $\mathcal{C}$ est satisfiable si et seulement si $(\mathcal{C} - \{C\}) \cup \mathcal{C}'$ est satisfiable.

Question 2.3. Montrer que la transformation de la question précédente peut se faire en temps polynomial en la taille de $\mathcal{C}$.

2 La classe NP

Exercice 3. On veut démontrer que le problème des déménageurs est NP-complet. On considère pour cela le problème 2-PARTITION, dont on suppose qu'on sait qu'il est NP-complet :

2-PARTITION : On a un ensemble d'entiers S, on veut savoir s'il existe une partition de S en deux sous-ensembles S_1 et S_2 tels que la somme des entiers de S_1 est égale à la somme des entiers de S_2.

Question 3.1. Montrez que 2-PARTITION $\preceq$ DÉMÉNAGEURS.

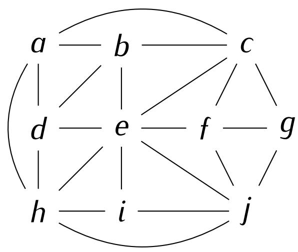
Question 3.2. Sachant que 2-PARTITION est NP-complet, que peut-on en déduire pour DÉMÉNAGEURS ?

Exercice 4. L'objectif de cet exercice est de démontrer que plusieurs problèmes sur les graphes sont NP-complets, à partir du fait que 3SAT l'est. Étant donné un graphe $G = (V, A)$, supposé connexe, ces problèmes sont définis ainsi :

ENSEMBLE INDÉPENDANT on cherche un sous-ensemble S de V tel qu'aucune arête de A n'a ses deux extrémités dans S ; l'objectif est de maximiser $|S|$.

CLIQUE on cherche un sous-graphe complet de G, c'est-à-dire un sous-ensemble S de V tel que pour toute paire x, y de sommets de S, A contient l'arête $\{x, y\}$; l'objectif est encore de maximiser $|S|$.

COUVERTURE PAR SOMMETS on cherche un sous-ensemble S de V tel que toute arête de A ait au moins une extrémité dans S ; l'objectif est de minimiser $|S|$.



Question 4.1. Quelles sont les cliques du graphe ci-contre ?

Question 4.2. Donner un ensemble indépendant et un ensemble de sommets couvrant toutes les arêtes les meilleurs possibles pour le graphe ci-contre.

Question 4.3. Si S est un ensemble indépendant, que peut-on dire de $V - S$?

Question 4.4. Soit $\overline{G} = (V, \overline{E})$ le complémentaire du graphe G : $\overline{E}$ est l'ensemble des arêtes «qui ne sont pas dans E», c'est-à-dire que $(x, y) \in \overline{E}$ si et seulement si $\{x, y\} \notin E$. Si S est un ensemble indépendant de E, qu'est S pour le graphe $\overline{G}$?

On va maintenant montrer que 3SAT $\preceq$ ENSEMBLE INDEPENDANT.

ENS. INDÉPENDANT – version *décision* : graphe G, entier K $\Rightarrow$ existe-t-il un ensemble indépendant de taille $\geq K$

Question 4.5. Considérons d'abord une clause $C_1 = a \vee \neg b \vee c$, et un graphe à trois sommets étiquetés par a_1, $\neg b_1$ et c_1 : quelles arêtes doit-on mettre pour que les ensembles indépendants de ce graphe ne contiennent qu'un litéral de C_1 ?

Question 4.6. Considérons maintenant l'ensemble de clauses $\mathcal{C} = \{C_1, C_2\}$, où $C_2 = \neg a \vee c$. On ajoute au graphe deux nouveaux sommets étiquetés par $\neg a_2$ et c_2. Quelles arêtes faut-il ajouter pour que les ensembles indépendants de ce nouveau graphe contiennent exactement deux sommets et correspondent à des interprétations de $\mathcal{C}$.

Question 4.7. Proposez une méthode générale pour traduire un ensemble de clauses $\mathcal{C}$ en un graphe tel que le graphe ait un ensemble indépendant de taille $|\mathcal{C}|$ si et seulement si $\mathcal{C}$ est satisfiable.

Question 4.8. Montrez que ENSEMBLE INDÉPENDANT est NP-complet.

Question 4.9. Montrez que les problèmes CLIQUE et COUVERTURE PAR SOMMETS sont NP-complets.