

Algorithmique Avancée

TD3

Programmation Linéaire en Nombres Entiers

Elana Courtines

courtines.e@gmail.com

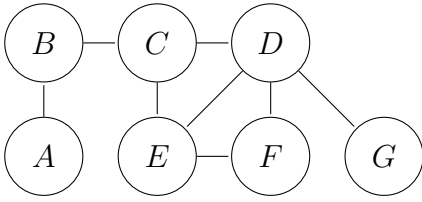
<https://github.com/irinacake>

Séance 1 - 7 octobre 2022

Séance 1 - 10 octobre 2022

Jerome Mengin - jerome.mengin@univ-tlse3.fr

Exercice 1 :



Dans l'exemple de l'exercice, une solution serait : $\{B, D, E\}$.

Dans le cas général :

- sommets : $\{1, 2, \dots, n\}$
- arêtes : paires $\{i, j\}$, $i \neq j$
→ d'où un booléen x_i
- $x_i = 1$ si sommet i sélectionné
→ on cherche : $\min(\sum_{i=1}^n x_i)$
- $\forall \{i, j\}$ arête du graphe, $x_i + x_j \geq 1$

Exercice 2 :

Question 2.1 :

Variables :

$$\begin{cases} x_{ij} = & 1 \text{ si la tâche } i \text{ a été réalisée sur la machine } j \\ & 0 \text{ sinon} \end{cases}$$

Objectif :

$$\min(\sum_{j=1}^p c_j(\sum_{i=1}^k d_{ij} * x_{ij}))$$

Contraintes :

$$\begin{cases} \text{Durée sur machine } \leq D : & \forall j \in \{1, \dots, p\} \text{ machine , } \sum_{i=1}^k d_{ij} * x_{ij} \leq D \\ \text{Unicité des tâches :} & \forall i \in \{1, \dots, k\} \text{ tâche , } \sum_{j=1}^p x_{ij} = 1 \end{cases}$$

Note : si la notation $\sum_{j=1}^p x_{ij} = 1$ est acceptable en "langage humain", elle ne l'est pas pour un solveur. En théorie il faudrait donner cette contrainte sous forme de deux contraintes avec inégalité : l'une présentant ' \leq ' et l'autre présentant ' \geq '.

En pratique cela dit, un solveur devrait être capable de convertir une telle égalité en deux inégalités.

Question 2.2 :

Variables :

$$\begin{cases} x_{ij} = & 1 \text{ si la tâche } i \text{ a été réalisée sur la machine } j \\ & 0 \text{ sinon} \\ d_{max} & \geq 0, \text{ durée sur la machine qui finit en dernier} \\ & \text{également appelé } maxspan \text{ en anglais} \end{cases}$$

Objectif : $\min(d_{max})$

Contraintes :

$$\begin{cases} \forall j \in \{1, \dots, p\} \text{ machine , } \sum_{i=1}^k d_{ij} * x_{ij} \leq d_{max} \\ \forall i \in \{1, \dots, k\} \text{ tâche , } \sum_{j=1}^p x_{ij} = 1 \end{cases}$$

Exercice 3 :

Question 3.1 :

$$\text{Variables : } \begin{cases} x_{ij} = & 1 \text{ si l'équipe } i \text{ va au site } j \\ & 0 \text{ sinon} \\ y_{ijk} = & 1 \text{ si equipe } i \text{ visite sites } j \text{ et } k, j \leq k \\ & 0 \text{ sinon} \end{cases}$$

$$\begin{aligned} \text{Objectif : } & \min(\sum_{i,j} t_{ij} * x_{ij} + \sum_{i,j,k} d_{jk} * y_{ijk}) \\ & = \min(\sum_{i,j} t_{ij} * x_{ij} + \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n \sum_{k=j+1}^n d_{jk} * y_{ijk}) \end{aligned}$$

Contraintes :

$$\begin{cases} \forall i, \sum_j x_{ij} \leq 2 & \text{Chaque équipe va sur 2 sites au plus} \\ \forall j, \sum_i x_{ij} = 1 & \text{Chaque site visité par une seule équipe} \\ \forall i, j, k, y_{ijk} \geq x_{ij} + x_{ik} - 1 & \begin{aligned} & y_{ijk} = 1 \text{ si } x_{ij} = x_{ik} = 1 \\ & \text{si } x_{ij} = 0 \text{ ou } x_{ik} = 0, \text{ la contrainte devient :} \\ & y_{ijk} \geq 0, \text{ car } y_{ijk} \text{ ne peut pas valoir } -1 \end{aligned} \\ \forall i, j, k, y_{ijk} \leq x_{ij} \\ \forall i, j, k, y_{ijk} \leq x_{ik} \end{cases}$$

Question 3.2 :

$$\text{Variables : } \begin{cases} x_{ij} = & 1 \text{ si l'équipe } i \text{ va au site } j \\ & 0 \text{ sinon} \\ y_{ijk} = & 1 \text{ si equipe } i \text{ visite sites } j \text{ et } k, j \leq k \\ & 0 \text{ sinon} \\ t_{max} & \geq 0, \text{ temps pris par l'équipe qui termine en dernier} \end{cases}$$

$$\text{Objectif : } \min(t_{max})$$

Contraintes :

- $\forall i, \sum_j x_{ij} \leq 2$, Chaque équipe va sur 2 sites au plus
- $\forall j, \sum_i x_{ij} = 1$, Chaque site visité par une seule équipe
- $\forall i, j, k, y_{ijk} \geq x_{ij} + x_{ik} - 1$
 $y_{ijk} = 1$ si $x_{ij} = x_{ik} = 1$
si $x_{ij} = 0$ ou $x_{ik} = 0$, la contrainte devient :
 $y_{ijk} \geq 0$, car y_{ijk} ne peut pas valoir -1
- $\forall i, j, k, y_{ijk} \leq x_{ij}$
- $\forall i, j, k, y_{ijk} \leq x_{ik}$
- + $\forall i (\sum_j t_{ij} * x_{ij}) + (\sum_{j,k} d_{jk} * y_{ijk}) \leq t_{max}$

Exercice 5 :

Question 5.1 :

- T_{min} et T_{max} : $\begin{cases} \sum_j x_{Aj} * 100 \geq 200 \\ \sum_j x_{Aj} * 100 \leq 500 \end{cases}$, Soit 2 contraintes.

On veut idéalement multiplier les valeurs par 100 (plutôt que de garder des petits entiers) car il s'agit simplement ici d'une simplification. Dans un univers plus réaliste, des valeurs aussi petites n'auraient aucun sens.

- B ne travaille pas le samedi : $x_{B5} = 0$.

Note : on a fait le contrainte sur B ici à titre d'exemple, puisque A n'a aucune contrainte sur les jours off.

- $MinConsOff$: Quand A travaille, c'est au moins 3 jours consécutifs.

$$\forall j = 0, \dots, 3, \begin{cases} x_{Aj} + x_{A(j+3)} \geq x_{A(j+1)} \\ x_{Aj} + x_{A(j+3)} \geq x_{A(j+2)} \end{cases}, \text{ Soit 8 contraintes.}$$

- $MaxConsOff$: Quand A travaille, c'est au plus 5 jours consécutifs.

$$\begin{cases} x_{A0} + x_{A1} + x_{A2} + x_{A3} + x_{A4} + x_{A5} \leq 5 \\ x_{A1} + x_{A2} + x_{A3} + x_{A4} + x_{A5} + x_{A6} \leq 5 \end{cases}, \text{ Soit 2 contraintes.}$$

Pour A , il y a donc au total 12 contraintes.