Algorithmique Avancée

TD2
Programmation linéaire

Elana Courtines
courtines.e@gmail.com
https://github.com/irinacake

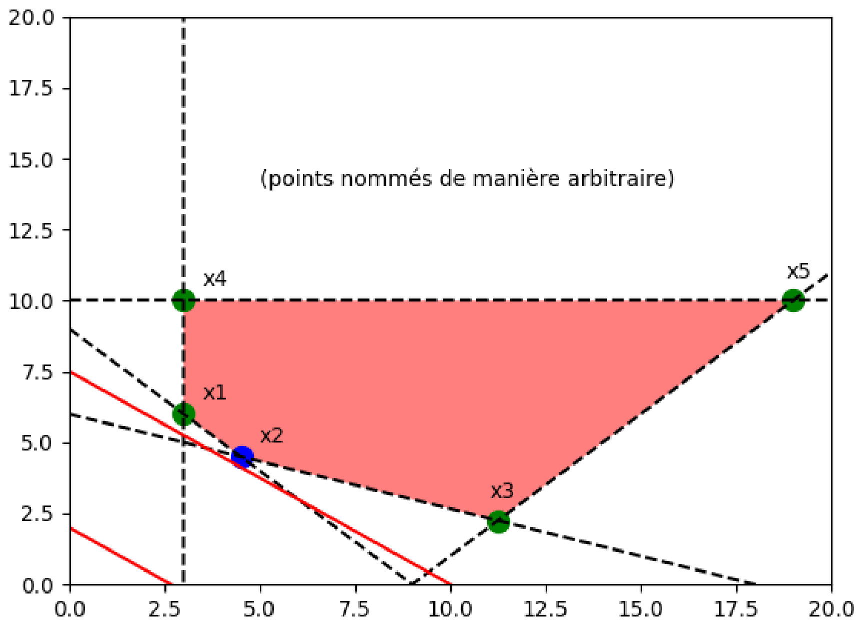
Séance 1 - 30 septembre 2022
Séance 2 - 7 octobre 2022

Jerome Mengin - jerome.mengin@univ-tlse3.fr

1 Résolution graphique : forme, minimisation et maximisation

Exercice 1:

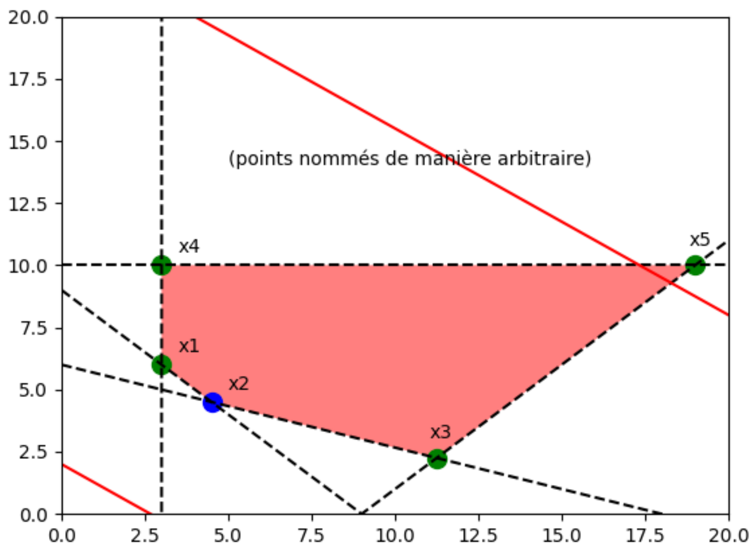
Il s'agit bien d'un programme linéaire (min), sous forme générale (il y a des $\leq$ et des $\geq$)



Visuellement, on a envie de dire que l'optimum est x_2, cherchons alors ses coordonnées :

$$optimum = \begin{cases} x + 3y = 18 \\ x + y = 9 \end{cases} = \begin{cases} 2y = 9 \\ y = 4.5 = x \end{cases} \tag{1}$$

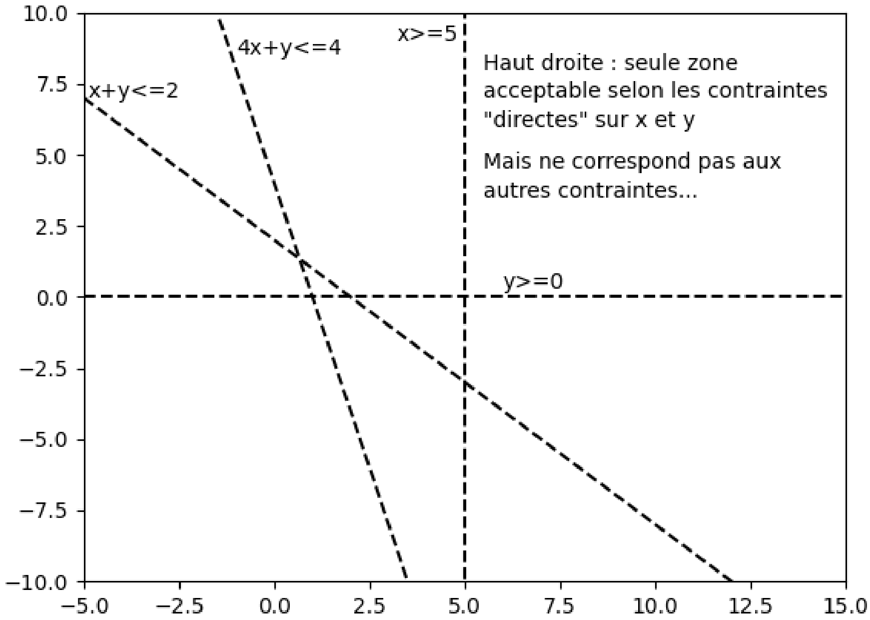
Si on cherchait à maximiser, on obtiendrai :



Exercice 2:

Pour $P1$: $max(z = 12x + 10y)$:

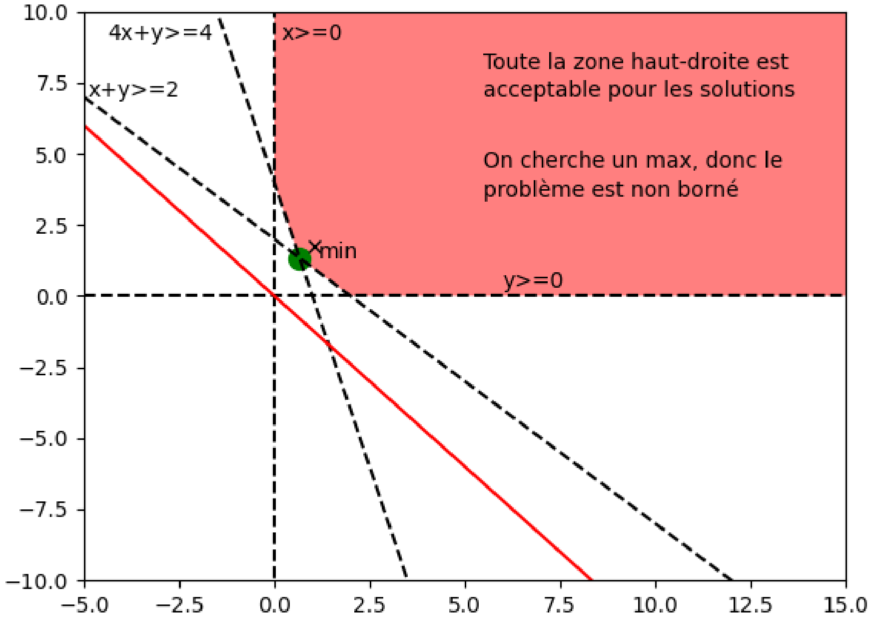
Il s'agit bien d'un programme linéaire (max), sous forme générale (il y a des $\leq$ et des $\geq$)



Comme on peut le constater sur la résolution graphique, les contraintes $x \geq 5$ et $y \geq 0$ forcent les solutions à être dans le cadran haut-droite, mais il suffit de prendre $x + y \leq 2$ pour ne plus avoir de solution.

Pour $P2$: $max(z = 12x + 10y)$:

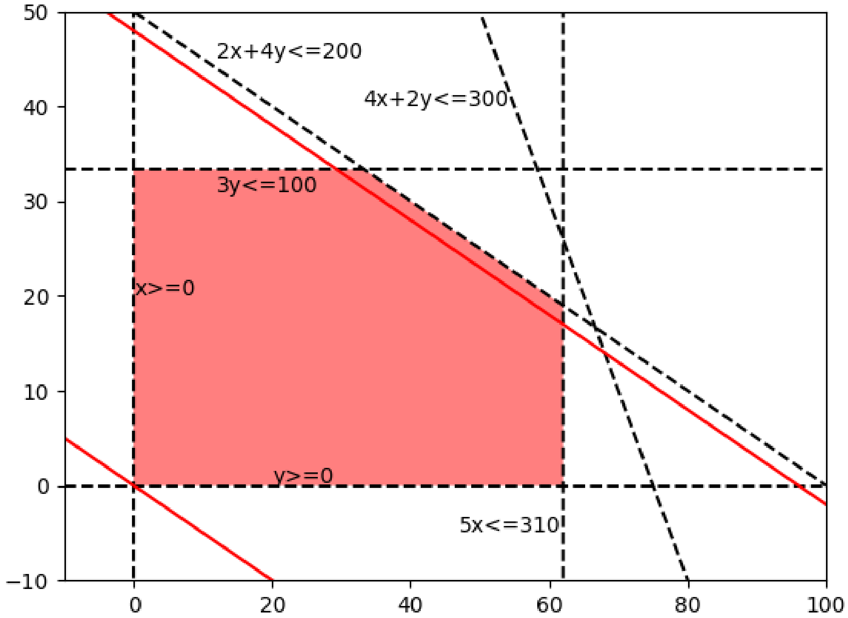
Il s'agit bien d'un programme linéaire (max), sous forme canonique (il n'y a que des $\geq$)



Comme on peut le constater sur la résolution graphique, tout le cadran haut-droite est solution du problème. Le problème est donc non borné, il n'y a pas d'optimum.
Note : si on voulait minimiser la solution plutôt que de le maximiser, on trouverai un optimum, noté x_{min} sur le graphe.

Pour $P3$: $max(z = x + 2y)$:

Il s'agit bien d'un programme linéaire (max), sous forme canonique (il n'y a que des $\leq$)



Comme on peut le constater sur la résolution graphique, l'optimum est atteint sur tout un segment de droite.

2 Modélisation simple, Primal, Dual : Le fleuriste et l'hôtelier

Exercice 3 :

Variables :

- x = nombre de bouquets de type 1 composés
- y = nombre de bouquets de type 2 composés
- z = nombre de bouquets de type 3 composés

But : $max(8x + 5y + 6z)$

Contraintes :

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \\ 4 & 3 & 1 \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \leq \begin{pmatrix} 90 \\ 81 \\ 120 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x + 3y + 2z & \leq 90 \\ x + 2y + z & \leq 81 \\ 4x + 3y + z & \leq 120 \end{cases}$$

Exercice 4 :

Question 4.1 :
$S = 90t + 81u + 120v$
Ou plutôt : $min(90t + 81u + 120v)$ si on veut que l'hôtelier paie le moins possible.

Question 4.2/4.3 :
But ci-dessus.
Contraintes :

$$\begin{cases} t, u, v & \geq 0 \\ 2t + u + 4v & \geq 8 \\ 3t + 2u + 3v & \geq 5 \\ 2t + u + v & \geq 6 \end{cases}$$

Question 4.4:

$$\begin{cases} 2x + 3y + 2z + e_1 & = 90 \\ x + 2y + z + e_2 & = 81 \\ 4x + 3y + z + e_3 & = 120 \\ x, y, z, e_1, e_2, e_3 & \geq 0 \end{cases}$$

Premier tableau du simplex :

	x	y	z	e_1	e_2	e_3	
e_1	2	3	2	1	0	0	90
e_2	1	2	1	0	1	0	81
e_3	4	3	1	0	0	1	120
obj	8	5	6	0	0	0	

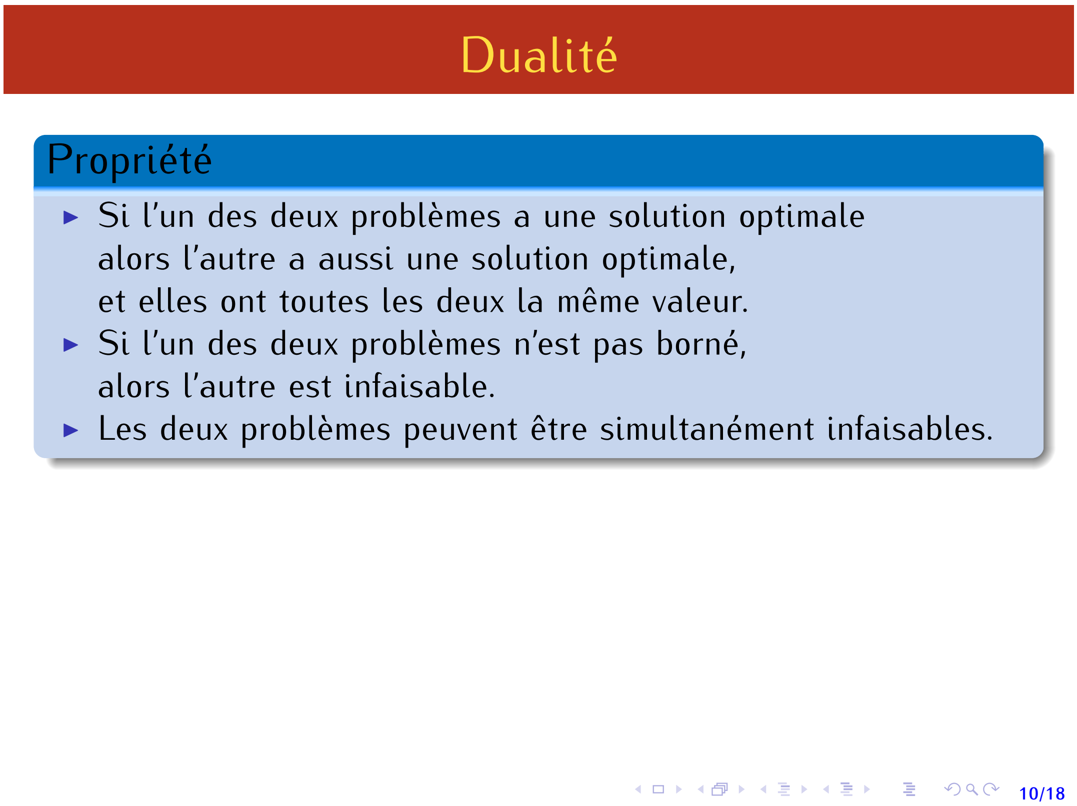
Second tableau du simplex :

	x	y	z	e_1	e_2	e_3	
e_1	0	3/2	3/2	1	0	-1/2	30
e_2	0	5/4	1/2	0	1	-1/4	51
x	1	3/4	1/4	0	0	1/4	30
obj	0	-1	4	0	0	-2	

3 Primal-Dual : existence de solutions

Primal ↓ / Dual →	$\exists$ Sol. Optimale	Pb. Sans Sol. Réalisable	Pb. Non Borné
$\exists$ Sol. Optimale	✓	✗	✗
Pb. Sans Sol. Réalisable	✗	✓	✓
Pb. Non Borné	✗	✓	✗

Cf. Slide 10/18 du cours :



4 Modélisation

Exercice 6 :

Question 6.1 :

Variables de décision : les "recettes" des différents carburant qu'on doit produire.

$\forall i \in \{1,2,3,4,5\},\ j \in \{1,2\},\ x_{ij}$ = nombre de barils d'essence de type i utilisés pour la production de carburant de type j.

Exemple :
Si $x_{11} = 2,\ x_{21} = 1,\ x_{31} = x_{41} = x_{51} = 0,$
Alors on obtient le carburant de performance : $\dfrac{2 * 70 + 1 * 80}{3}$

Autres variables possible :
y_{ij} = proportion d'essence de type i dans le carburant de type j.
$y_{11} = \frac{2}{3},\ y_{21} = \frac{1}{3},\ y_{31} = y_{41} = y_{51} = 0,$
Mais alors il faut des variables indiquant le nombre de barils produits.

Question 6.2 :

But : $max(\ profit = \sum_{j=1}^{nC}(pr_j * \sum_{i=1}^{nE} x_{ij}) - \sum_{i=1}^{nE}(c_i * \sum_{j=1}^{nC} x_{ij})\ )$

$= max(\ profit = \sum_{i=1}^{nE} \sum_{j=1}^{nC}(pr_j - c_i) * x_{ij})$

Contraintes :

$$\begin{cases} & \forall i, j\ ,\ x_{ij} \geq 0 \\ prod_j \geq minprod_j & \forall j \in \{1, ..., nC\}\ ,\ (\sum_{i=1}^{nE} x_{ij}) > minprod_j \\ \text{disponibilité des essences} & \forall i \in \{1, ..., nE\}\ ,\ (\sum_{j=1}^{nC} x_{ij}) \leq d_i \\ \text{indice de performance} & \forall j \in \{1, ..., nC\}\ ,\ (\sum_{i=1}^{nE}(pe_i - pemin_j) * x_{ij}) \geq 0 \end{cases}$$