# Calcul Scientifique et Apprentissage Automatique

# Optimisation - Partie 1

Elana Courtines

Mardi 27 Septembre 2022

Sandrine Mouysset (CM3): sandrine.mouysset@irit.fr
Thomas Pellegrini : thomas.pellegrini@irit.fr

**Exercice diapo 5 :**
*La courbe de niveau $k$ d'une fonction $f$ de 2 variables $(x, y) \to f(x, y)$ est l'ensemble des points du plan $xy$ qui satisfont $f(x, y) = k$.*

Calculer la courbe de niveau $k = 4$ de la fonction $f(x, y) = 3 - x - \frac{1}{2}y$ :

$\Leftrightarrow\ 4 = 3 - x - \frac{1}{2}y$

$\Leftrightarrow\ y = -2 * (4 - 3 + x)$

$\Leftrightarrow\ y = -2x - 2$

Calculer la courbe de niveau $k = 100$ de la fonction $f(x, y) = x^2 + y^2$ :

$\Leftrightarrow\ 100 = x^2 + y^2$

$\Leftrightarrow\ x^2 + y^2 - 10^2 = 0$

*Il s'agit de l'équation d'un cercle de centre (0,0) et de rayon 10* :

$\Leftrightarrow\ C(\,(0, 0)\,, 10)$

**Exercice diapo 7 :**

*Calculez les dérivées partielles et le gradient des fonctions suivantes :*

Pour $f(x, y) = x^2y^2 + 3xy$ :

- $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x, y) = 2xy^2 + 3y$
- $\dfrac{\partial f}{\partial y}(x, y) = 2x^2y + 3x$

D'où :

$$\nabla f(x, y) = \begin{bmatrix} \dfrac{\partial f}{\partial x}(x, y) \\ \dfrac{\partial f}{\partial y}(x, y) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2xy^2 + 3y \\ 2x^2y + 3x \end{bmatrix}$$

Pour $g(x, y) = sin(x)y^2$ :

- $\dfrac{\partial g}{\partial x}(x, y) = cos(x)y^2$
- $\dfrac{\partial g}{\partial y}(x, y) = 2sin(x)y$

D'où :

$$\nabla f(x, y) = \begin{bmatrix} \dfrac{\partial g}{\partial x}(x, y) \\ \dfrac{\partial g}{\partial y}(x, y) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} cos(x)y^2 \\ 2sin(x)y \end{bmatrix}$$

**Exercice diapo 11 :**
*Calculez les matrices hessiennes fonctions suivantes :*

Pour $f(x,y) = x^2y^2 + 3xy$ :

- $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial x}(x,y) = \dfrac{\partial}{\partial x}(\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y)) = \dfrac{\partial}{\partial x}(2xy^2 + 3y) = 2y^2$
- $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y) = \dfrac{\partial}{\partial x}(\dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y)) = \dfrac{\partial}{\partial x}(2x^2y + 3x) = 4xy + 3$
- $\dfrac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x,y) = \dfrac{\partial}{\partial y}(\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y)) = \dfrac{\partial}{\partial y}(2xy^2 + 3y) = 4xy + 3$
- $\dfrac{\partial^2 f}{\partial y \partial y}(x,y) = \dfrac{\partial}{\partial y}(\dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y)) = \dfrac{\partial}{\partial y}(2x^2y + 3x) = 2x^2$

D'où :

$$\nabla^2 f(x,y) = \begin{bmatrix} \dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial x}(x,y) & \dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y) \\ \dfrac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x,y) & \dfrac{\partial^2 f}{\partial y \partial y}(x,y) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2y^2 & 4xy+3 \\ 4xy+3 & 2x^2 \end{bmatrix}$$

Pour $g(x,y) = sin(x)y^2$ :

- $\dfrac{\partial^2 g}{\partial x \partial x}(x,y) = \dfrac{\partial}{\partial x}(\dfrac{\partial g}{\partial x}(x,y)) = \dfrac{\partial}{\partial x}(cos(x)y^2) = -sin(x)y^2$
- $\dfrac{\partial^2 g}{\partial x \partial y}(x,y) = \dfrac{\partial}{\partial x}(\dfrac{\partial g}{\partial y}(x,y)) = \dfrac{\partial}{\partial x}(2sin(x)y) = 2cos(x)y$
- $\dfrac{\partial^2 g}{\partial y \partial x}(x,y) = \dfrac{\partial}{\partial y}(\dfrac{\partial g}{\partial x}(x,y)) = \dfrac{\partial}{\partial y}(cos(x)y^2) = 2cos(x)y$
- $\dfrac{\partial^2 g}{\partial y \partial y}(x,y) = \dfrac{\partial}{\partial y}(\dfrac{\partial g}{\partial y}(x,y)) = \dfrac{\partial}{\partial y}(2sin(x)y) = 2sin(x)$

D'où :

$$\nabla^2 g(x,y) = \begin{bmatrix} \dfrac{\partial^2 g}{\partial x \partial x}(x,y) & \dfrac{\partial^2 g}{\partial x \partial y}(x,y) \\ \dfrac{\partial^2 g}{\partial y \partial x}(x,y) & \dfrac{\partial^2 g}{\partial y \partial y}(x,y) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -sin(x)y^2 & 2cos(x)y \\ 2cos(x)y & 2sin(x) \end{bmatrix}$$

**Méthode de résolution des points critiques (exemple en dimension 2) :**

Étape 1 : $CN$ $1^{er}$ ordre :

On cherche l'ensemble des points tels que : $\nabla f(x,y) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$

Cette équation permet d'obtenir un ensemble de points critiques notés $C$ tel que :

$C = \{(\bar{x}, \bar{y}) \in \mathbb{R}^2 \mid \nabla f(\bar{x}, \bar{y}) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}\}$

Étape 2 : $CS$ $2^e$ ordre :

On cherche : $\forall (\bar{x}, \bar{y}) \in C$, la matrice $\nabla^2 f(x,y)$

Cette matrice prend la forme $\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$, à partie de laquelle on détermine deux valeurs :

- $det(\nabla^2 f(\bar{x}, \bar{y}))$
- $Tr(\nabla^2 f(\bar{x}, \bar{y}))$

Ces deux valeurs permettent de déterminer de quel type de point critique il s'agit, de la manière suivante :

1) Si $det(\nabla^2 f(\bar{x}, \bar{y})) > 0$, alors :
    a) Si $Tr(\nabla^2 f(\bar{x}, \bar{y})) < 0$, alors : $(\bar{x}, \bar{y})$ est un minimum local ;
    b) Si $Tr(\nabla^2 f(\bar{x}, \bar{y})) > 0$, alors : $(\bar{x}, \bar{y})$ est un maximum local ;
2) Si $det(\nabla^2 f(\bar{x}, \bar{y})) < 0$, alors $(\bar{x}, \bar{y})$ est un point-selle ;
3) Si $det(\nabla^2 f(\bar{x}, \bar{y})) = 0$, alors on ne peut pas conclure sur la nature de $(\bar{x}, \bar{y})$.

**Exercice diapo 22 :**

*Calculez les points critiques et définissez la nature de ces points pour la fonction suivante :*
$f(x,y) = 2x^2 + 3xy + 8y^2 + 5$

<u>Étape 1 :</u> $CN$ $1^{er}$ ordre :

On cherche l'ensemble des points tels que : $\nabla f(x,y) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ :

- $\dfrac{\partial f}{\partial x}(2x^2 + 3xy + 8y^2 + 5) = 4x + 3y$
- $\dfrac{\partial f}{\partial y}(2x^2 + 3xy + 8y^2 + 5) = 3x + 16y$

d'où : $\begin{cases} 4x + 3y = 0 \\ 3x + 16y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -3y/4 \\ 3 * (\dfrac{-3y}{4}) + 16y = 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} y = 0 \\ x = 0 \end{cases}$

D'où l'ensemble des points critique $C = \{(0,0)\}$

<u>Étape 2 :</u> $CS$ $2^e$ ordre :

$\nabla^2 f(x,y) = \begin{bmatrix} 4 & 3 \\ 3 & 16 \end{bmatrix}$

d'où :

- $det(\nabla^2 f(x,y)) = 64 - 9 = 55 > 0$
- $Tr(\nabla^2 f(x,y)) = 4 + 16 = 20 > 0$

Donc le point critique (0,0) est un minimum local.