TEMA 1

Subpunctul a

Pentru a demonstra ca Transformata Fourier a semnalului dat are urmatoarea forma, vom proceda astfel:

Avem semnalul dat: $x[n] = e^{j\omega_0 n}$

Transformata Fourier a acestui semnal este:

$$X(\omega) = \sum_{n=0}^{N-1} x[n]\cdot e^{-j\omega n} = \sum_{n=0}^{N-1} e^{j\omega_0 n}\, e^{-j\omega n} =$$

$$= \sum_{n=0}^{N-1} e^{jn(\omega-\omega_0)} \leftarrow \text{progresie geometrică}$$

$$\Rightarrow \boxed{X(\omega) = \frac{1-e^{jN(\omega-\omega_0)}}{1-e^{j(\omega-\omega_0)}}} = \frac{e^{jN(\omega-\omega_0)}-1}{e^{j(\omega_0-\omega)}-1} =$$

$$= \frac{e^{j\frac{N}{2}(\omega_0-\omega)}\left(e^{j\frac{N}{2}(\omega_0-\omega)} - e^{-j\frac{N}{2}(\omega_0-\omega)}\right)}{e^{j(\omega_0-\omega)/2}\left(e^{j\frac{(\omega_0-\omega)}{2}} - e^{-j\frac{(\omega_0-\omega)}{2}}\right)}$$

Înmulțesc și împart cu $2j$ atât numărătorul cât și numitorul fracției, deoarece, conform formulei lui Euler:

$$\boxed{\frac{e^{jx}-e^{-jx}}{2j} = \sin x}$$

Așadar:

$$X(\omega) = \frac{e^{j\frac{N}{2}(\omega_0-\omega)}\cdot \cancel{2j}\cdot \sin\left((\omega_0-\omega)\cdot\frac{N}{2}\right)}{e^{j\left(\frac{\omega_0-\omega}{2}\right)}\cdot \cancel{2j}\cdot \sin\left(\frac{\omega_0-\omega}{2}\right)}; \text{ Știind că}$$

$$\boxed{\sin(x) = -\sin(-x)} \Rightarrow$$

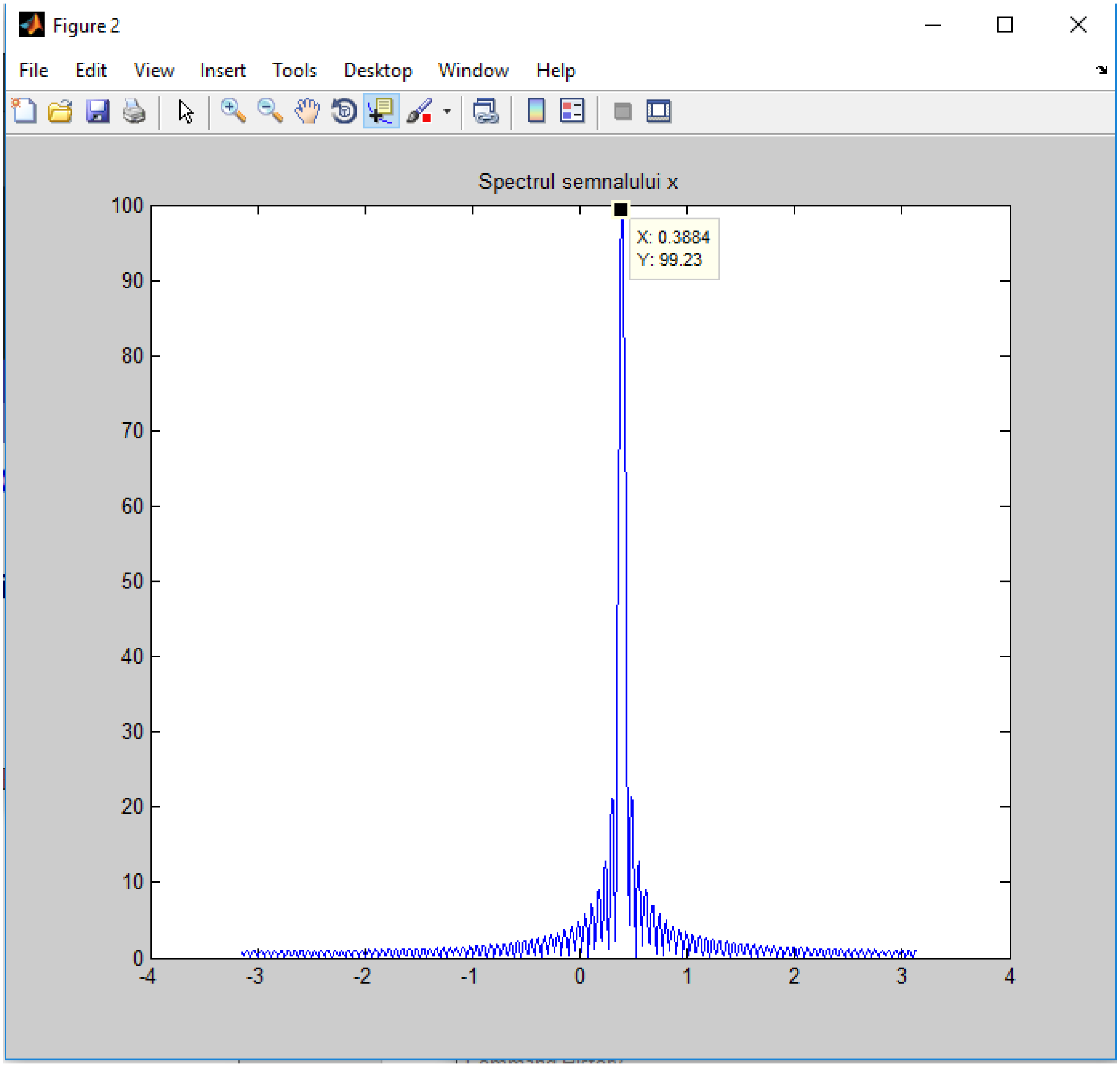
$$\Rightarrow X(\omega) = \frac{e^{-j\frac{N}{2}(\omega-\omega_0)}\cdot \cancel{(-1)}\cdot \sin\left((\omega-\omega_0)\frac{N}{2}\right)}{e^{-j\left(\frac{\omega-\omega_0}{2}\right)}\cdot \cancel{(-1)}\cdot \sin\left(\frac{\omega-\omega_0}{2}\right)}$$

TF a semnalului dat are într-adevăr expresia

$$\Rightarrow X(\omega) = \frac{e^{-j(\omega-\omega_0)N/2}}{e^{-j(\omega-\omega_0)/2}}\cdot\frac{\sin\frac{(\omega-\omega_0)N}{2}}{\sin\frac{\omega-\omega_0}{2}}, \ \forall\, \omega\in\mathbb{R}$$

Subpunctul b

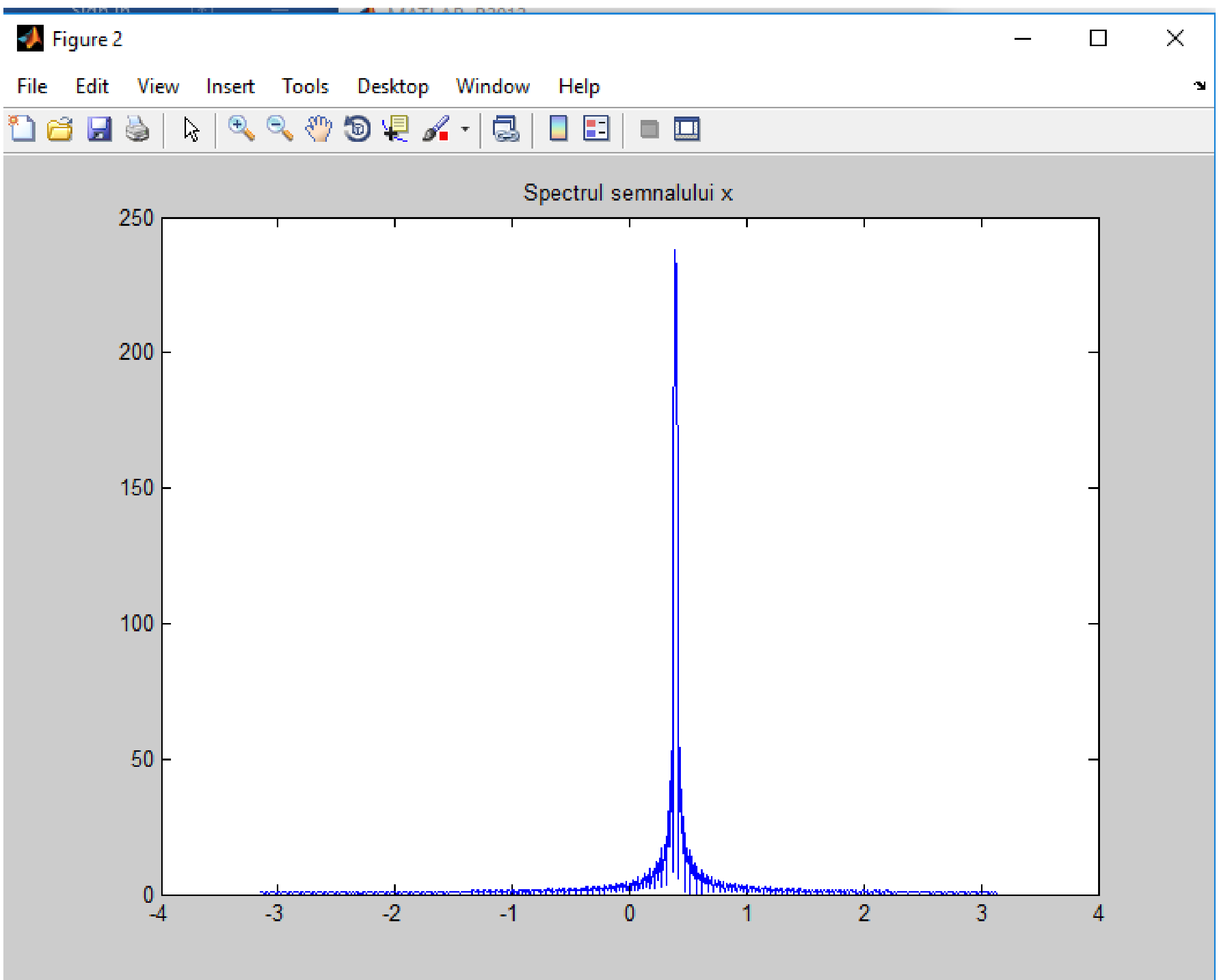
Spectrul semnalului va avea urmatorul grafic:



Se observa ca punctul de maxim se afla aproximativ in w0, iar valoarea spectrului in acel punct este aproximativ egala cu N. Valoarea maxima a spectrului se afla in w0 deoarece semnalul din acest exercitiu se poate descompune in urmatoarea suma de cos si sin : *cos (w0*n) + j sin(w0*n).* Stim ca TF are valori mari in frecventele corespunzatoare componentelor sinusoidale ale unui semnal. Asadar, este normal ca punctul de maxim al spectrului sa se afle in w0.

Valoarea punctului de maxim este aproximativ egala cu N, mai multe detalii despre aceasta egalitate se vor regasi in redactarea subpunctului c.

Semnalul dat nu este stabil, si nici de energie finita, dar totusi i se poate asocia o TF. Spectrul sau nu respecta relatia 2.9. Desi are un varf pronuntat, acesta nu contine doar o linie. Se observa ca daca vom creste numarul de esantioane, spectrului i se va modifica precizia, forma sa devenind din ce in ce mai apropiata de cea a unui spectru de tip linie. Cu cat micsoram mai mult numarul de esantionae ale unui semnal, cu atat precizia spectrului semnalului scade. Pentru un N mai mare, in exemplul de mai jos N = 250, spectrul va avea urmatoarea forma:



Subpunctul c

|X(w0)| este aproximativ egal cu N, din grafic observand ca acesta are valoarea de 99.23, pt un N egal cu 100. Intervalul finit pe care este definit w este din nou cauza acestei mici erori pentru ca si relatia 2.15 este definita tot pentru w apartinand multimii numerelor reale. De asemenea, functia freqz nu are o precizie exacta de calcul. Egalitatea modulului lui X(w0) cu N este o proprietate normala, demonstrata si matematic astfel:

$$|X(\omega_0)| = \left| \frac{\sin\frac{(\omega_0-\omega_0)N}{2}}{\sin\frac{(\omega_0-\omega_0)}{2}} \right| \Rightarrow \text{trecem la limită, ne}$$

$$\text{aflăm în cazul } \text{„}\tfrac{0}{0}\text{"} \Rightarrow \lim_{(\omega \to \omega_0) \to 0} \frac{\sin\frac{(\omega-\omega_0)N}{2}}{\sin\frac{(\omega-\omega_0)}{2}} =$$

$$\underline{\underline{\text{L'Hospital}}} \quad \lim_{(\omega-\omega_0)\to 0} \frac{\cos\frac{(\omega-\omega_0)N}{2} \cdot \frac{N}{2}}{\cos\frac{(\omega-\omega_0)}{2} \cdot \frac{1}{2}} = \frac{N}{2} \cdot 2 = N$$

$$1 \leftarrow \cos\frac{(\omega-\omega_0)N}{2}, \qquad \cos\frac{(\omega-\omega_0)}{2} \to 1$$

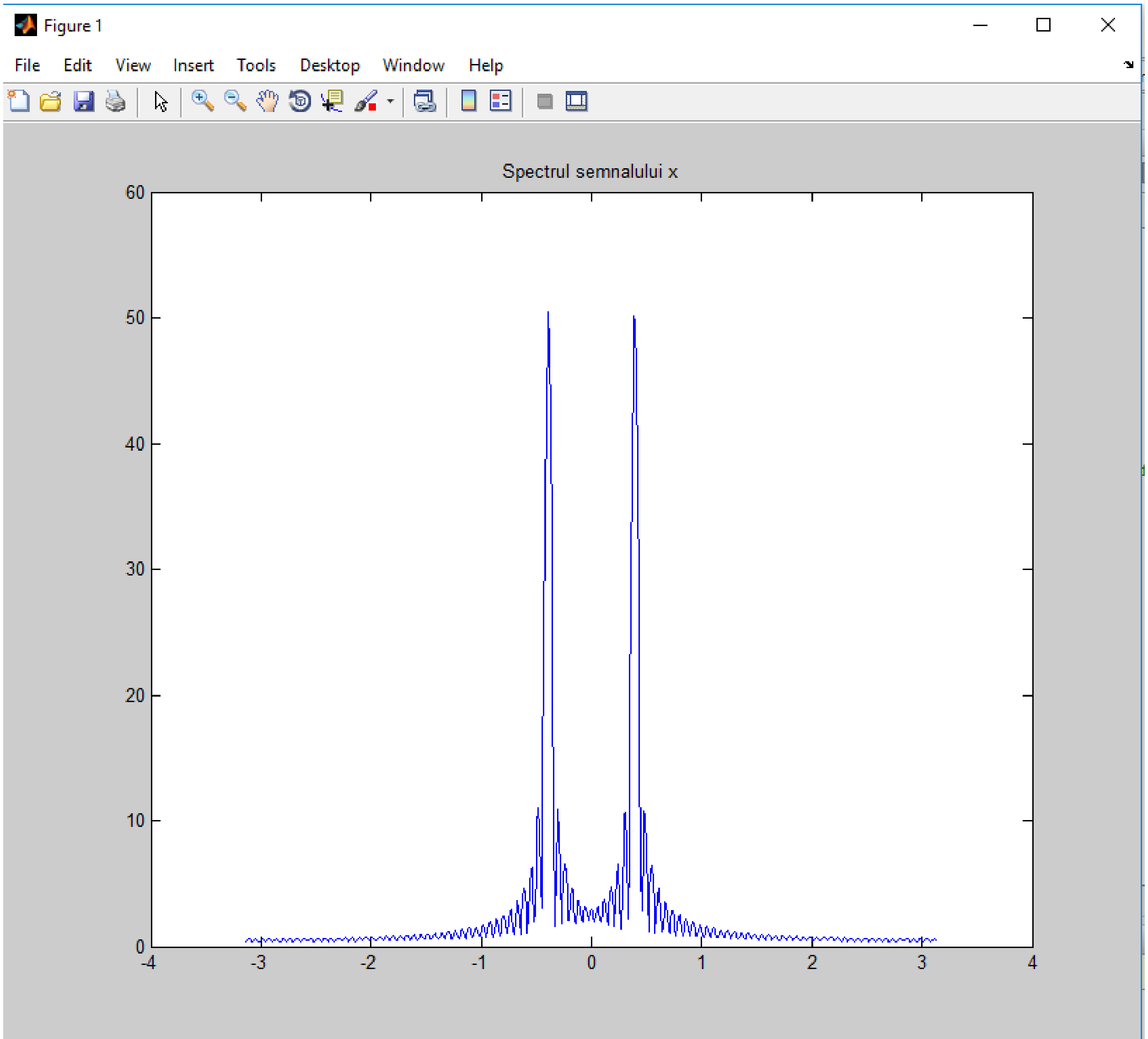
$$\Rightarrow |X(\omega_0)| = N$$

W nu va fi niciodata egal cu w0, el variaza de la -pi la pi cu un pas de 0.01. Prin aceasta variatie el nu va atinge niciodata valoarea exacta de (pi/8) = 0.3927 pe care o are w0.

TEMA 2

Subpunctul a

Graficul spectrului semnalului dat este prezentat in figura urmatoare:



Se observa ca graficul spectrului semnalului este simetric fata de axa verticala. Mai exact, |X(w)| = |X(-w)|. Spectrul poate avea aceasta proprietate de simetrie deoarece semnalul dat este real.

Subpunctul b

Justificarea formei graficului se va interpreta din rezultatul urmatoarei demonstratii:

Avem semnalul dat: $x[n] = \cos(\omega_0 n + \varphi)$

Transformata Fourier a acestui semnal este:

$$X(\omega) = \sum_{n=0}^{N-1} x[n] \cdot e^{-j\omega n} = \sum_{n=0}^{N-1} \cos(\omega_0 n + \varphi) \cdot e^{-j\omega n}$$

$$\Rightarrow X(\omega) = \sum_{n=0}^{N-1} \underbrace{\frac{e^{j(\omega_0 n + \varphi)} + e^{-j(\omega_0 n + \varphi)}}{2}}_{\text{cosinusul conform formulei lui Euler}} \cdot e^{-j\omega n}$$

$$\Rightarrow X(\omega) = \frac{1}{2} \sum_{n=0}^{N-1} \left(e^{j(\omega_0 n + \varphi - \omega n)} + e^{-j(\omega_0 n + \varphi + \omega n)} \right)$$

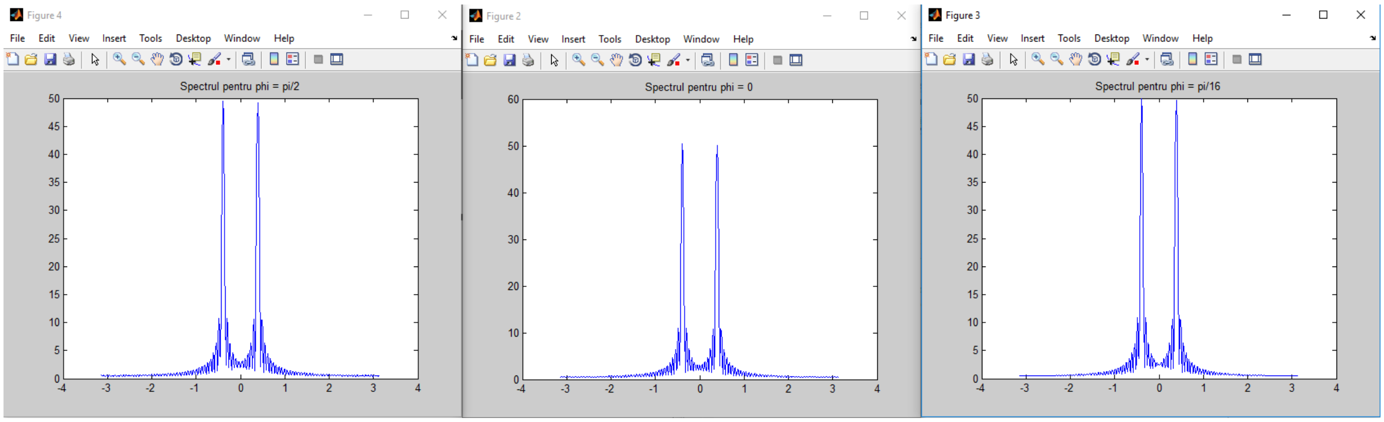
$$\Rightarrow X(\omega) = \frac{1}{2} \left[\sum_{n=0}^{N-1} e^{j(\omega_0 n + \varphi - \omega n)} + \sum_{n=0}^{N-1} e^{-j(\omega_0 n + \varphi + \omega n)} \right]$$

Se observa ca in urma aplicarii Transformatei Fourier semnalului dat, se vor obtine doua serii, ceea ce justifica forma graficului spectrului ce contine doua puncte de maxim, mai exact in w0 si -w0, deoarece am aratat anterior ca acest grafic este simetric fata de axa OY.

Subpunctul c

Spectrul semnalului reprezinta modulul transformatei Fourier a acestuia. Calculand TF pentru semnalul cos(w0*n+phi), vom obtine factorul exp(j*phi) in fata sumei. Modulul acestuia este egal cu sqrt(cos(phi)^2 + sin(phi)^2), adica egal intotdeauna cu 1, indifferent de valoarea lui phi. Variabila phi nu mai apare altundeva in expresia TF a semnalului, asadar, aceasta variatia acesteia nu are cum sa influenteze spectrul semnalului.

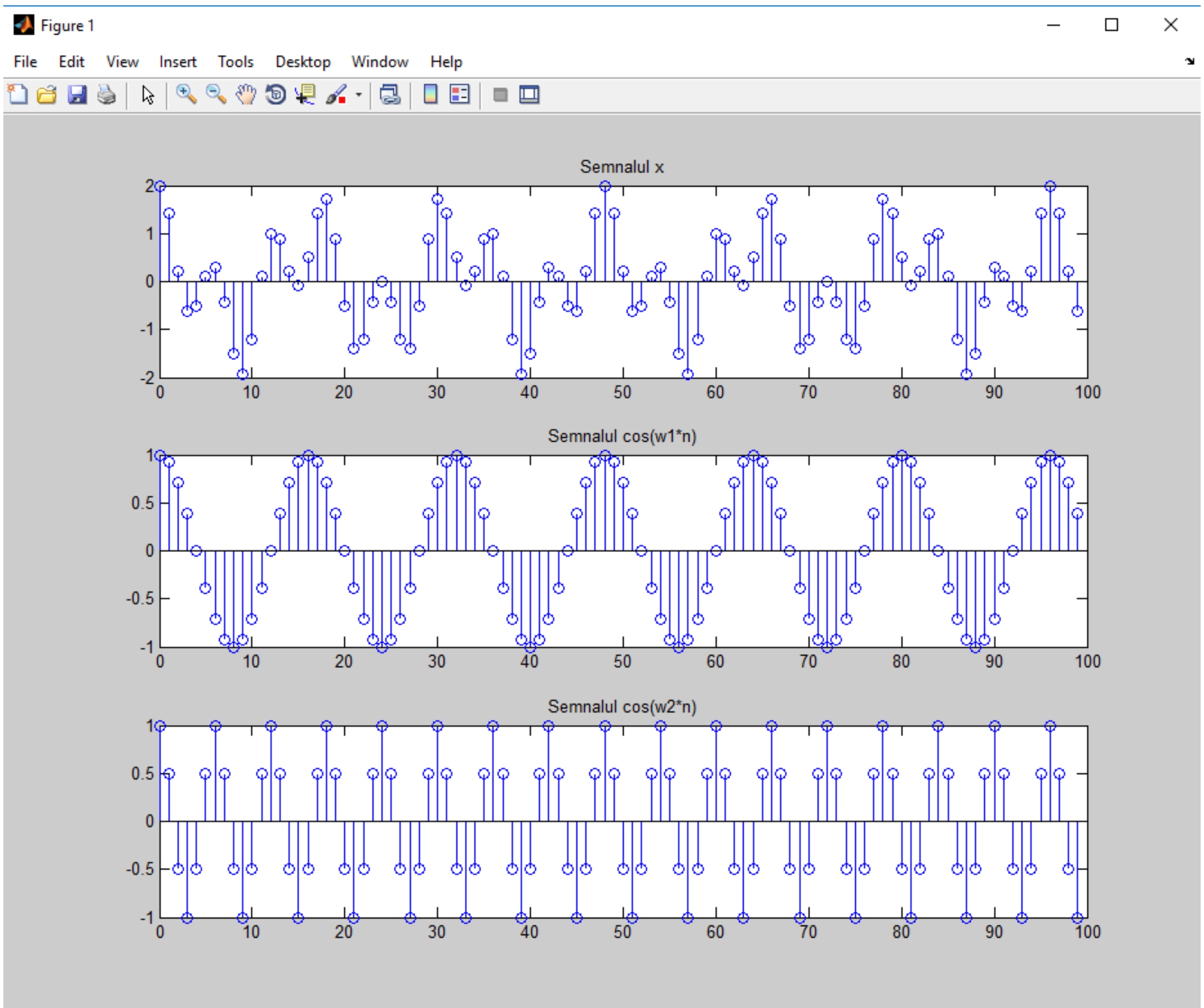
Figurile de mai jos ilustreaza spectrul semnalului in functie de valori diferite ale lui phi, confirmand demonstratia de mai sus.



TEMA 3

Subpunctul a

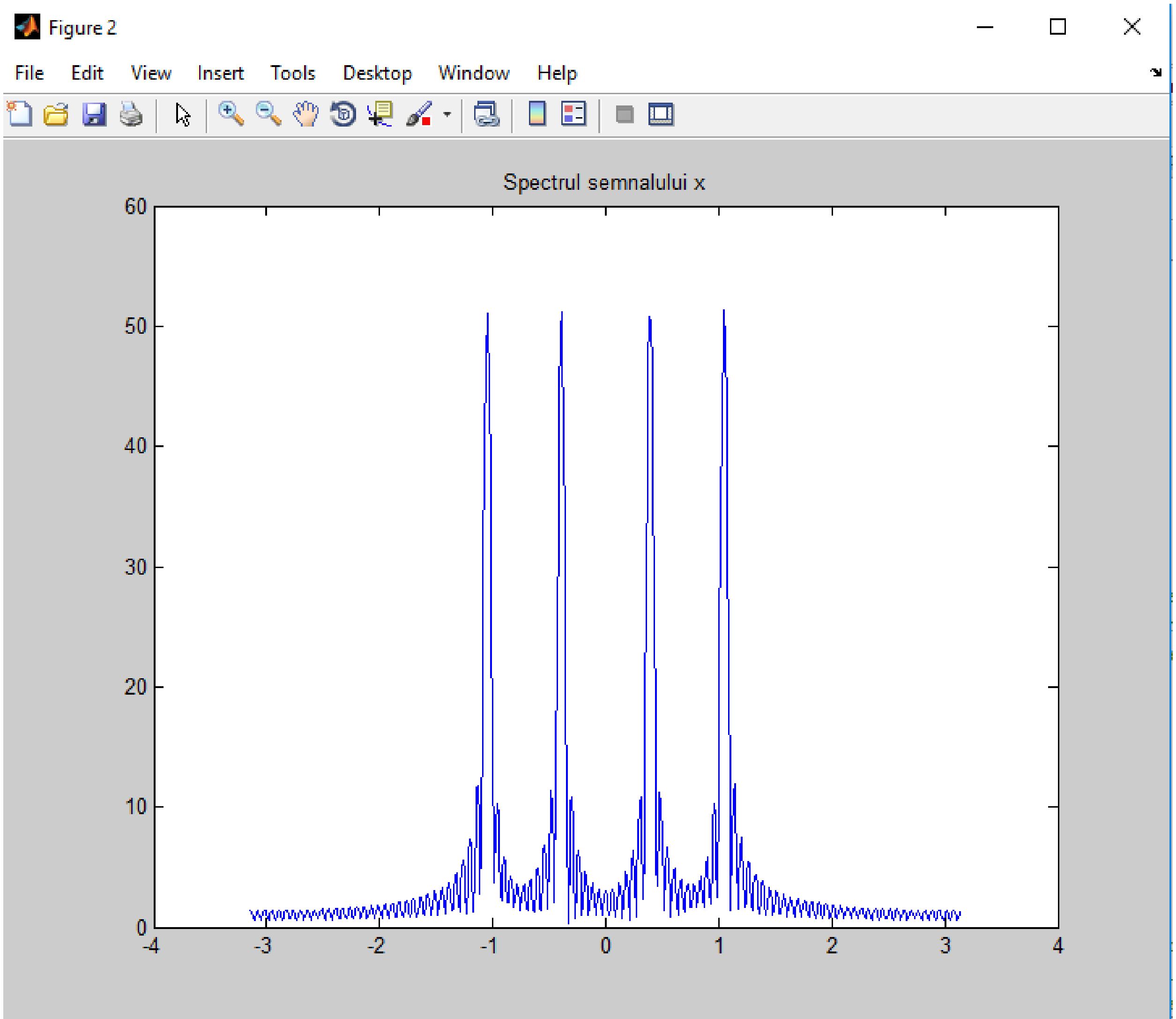
Graficul semnalului x, precum si graficele cosinusurilor componente sunt prezentate in figura:



Perioada lui x1 este 16, iar perioada lui x2 este 6. Perioada intregului semnal va fi cel mai mic multiplu comun al perioadelor celor doua semnale care il compun, asadar aceasta va fi egala cu 48.

Subpunctul b

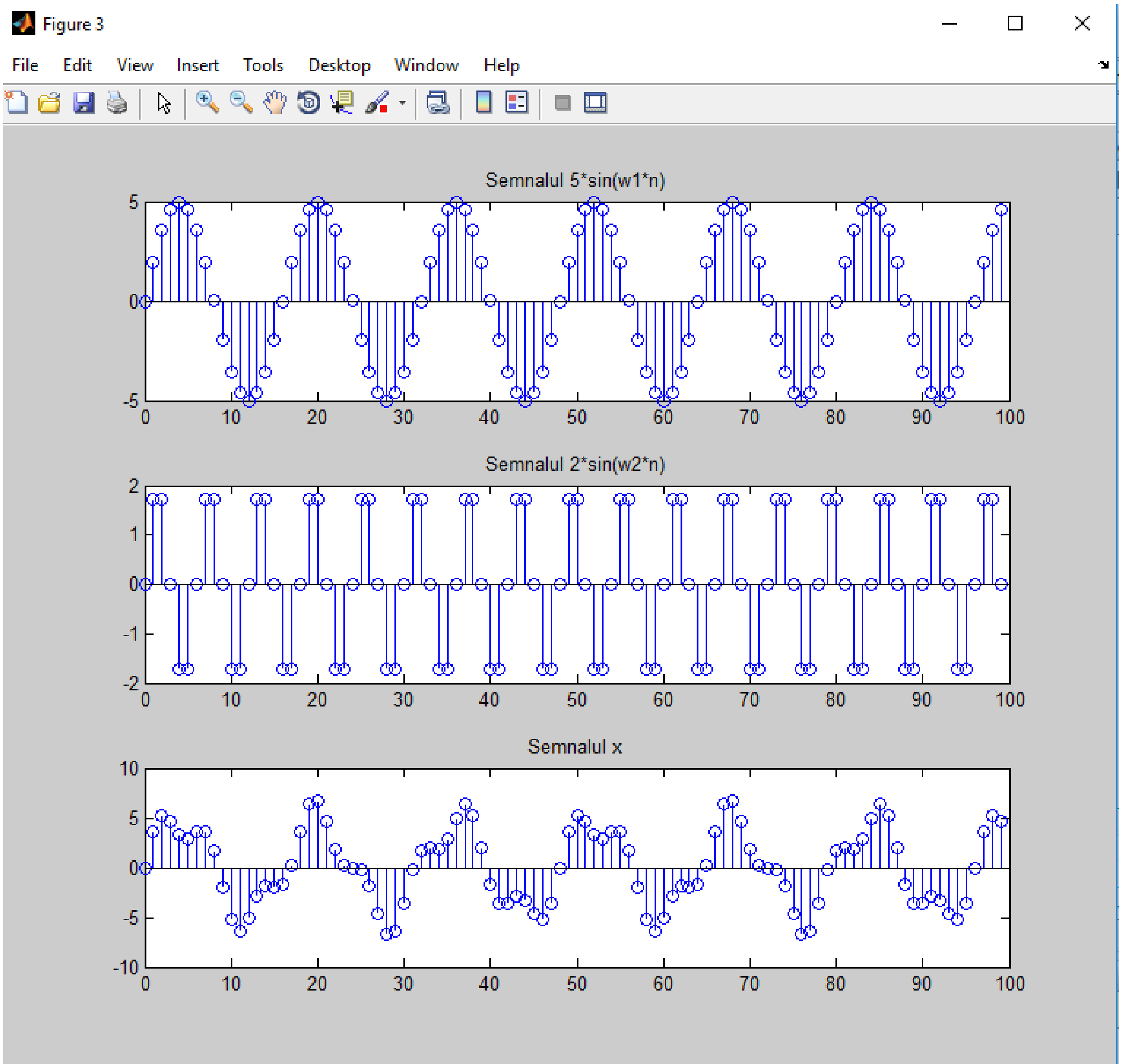
Graficul spectrului semnalului este reprezentat in figura urmatoare:



Conform formulei lui Euler, cosinusul de descompune ca suma de doua semnale exponentiale. Avand doua cosinusuri, vor rezulta 4 semnale exponentiale, fiecare avand un punct de maxim. Observam ca spectrul semnalului x prezinta intr-adevar 4 puncte de maxim corespuncatoare valorilor w1, -w1, w2, -w2, asadar graficul obtinut este conform asteptarilor bazate pe rezultatele exercitiului 1.

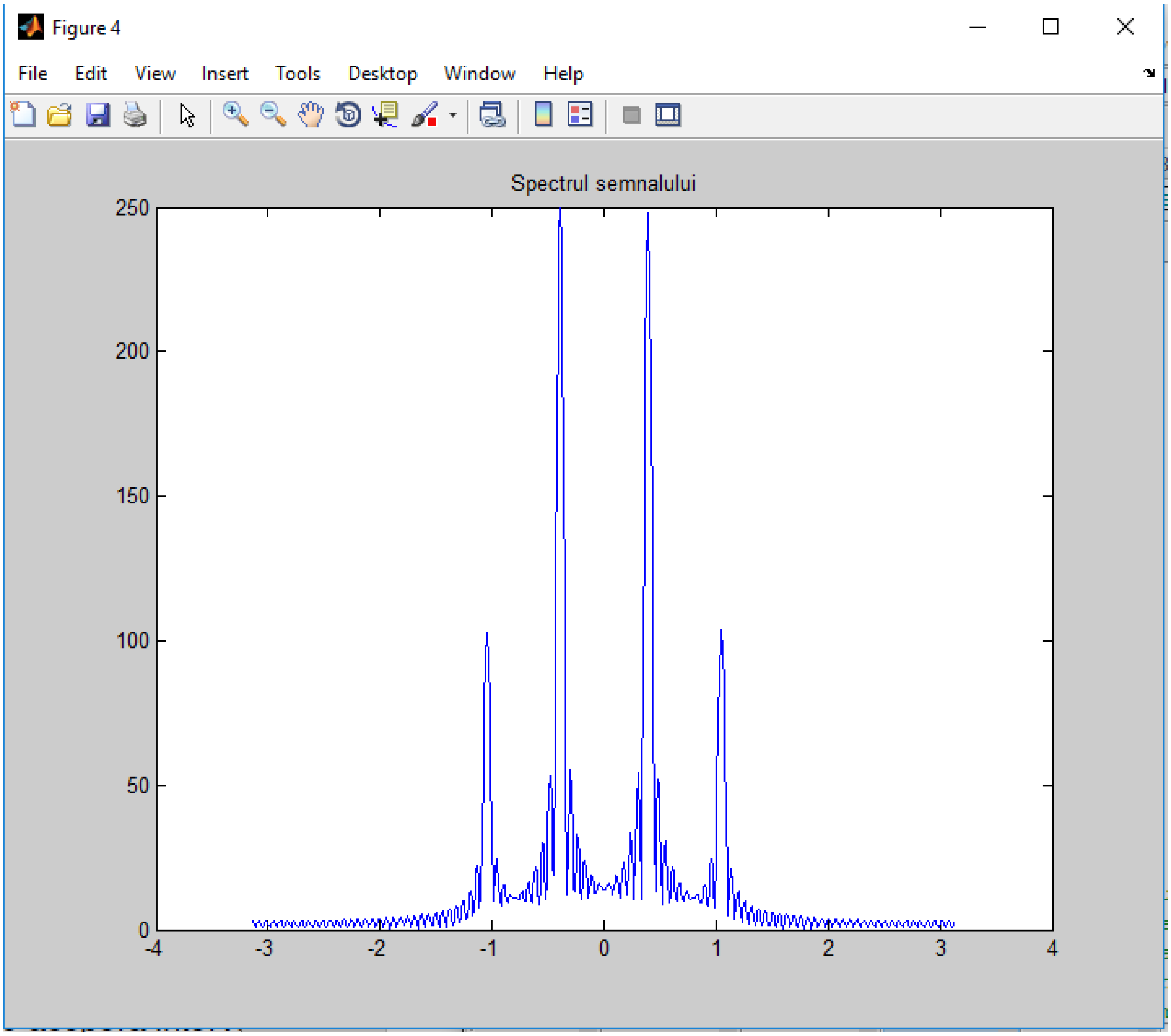
Subpunctul c

Graficul semnalului x, precum si graficele sinusurilor componente sunt prezentate in figura:



In acest caz perioada este egala cu 48;

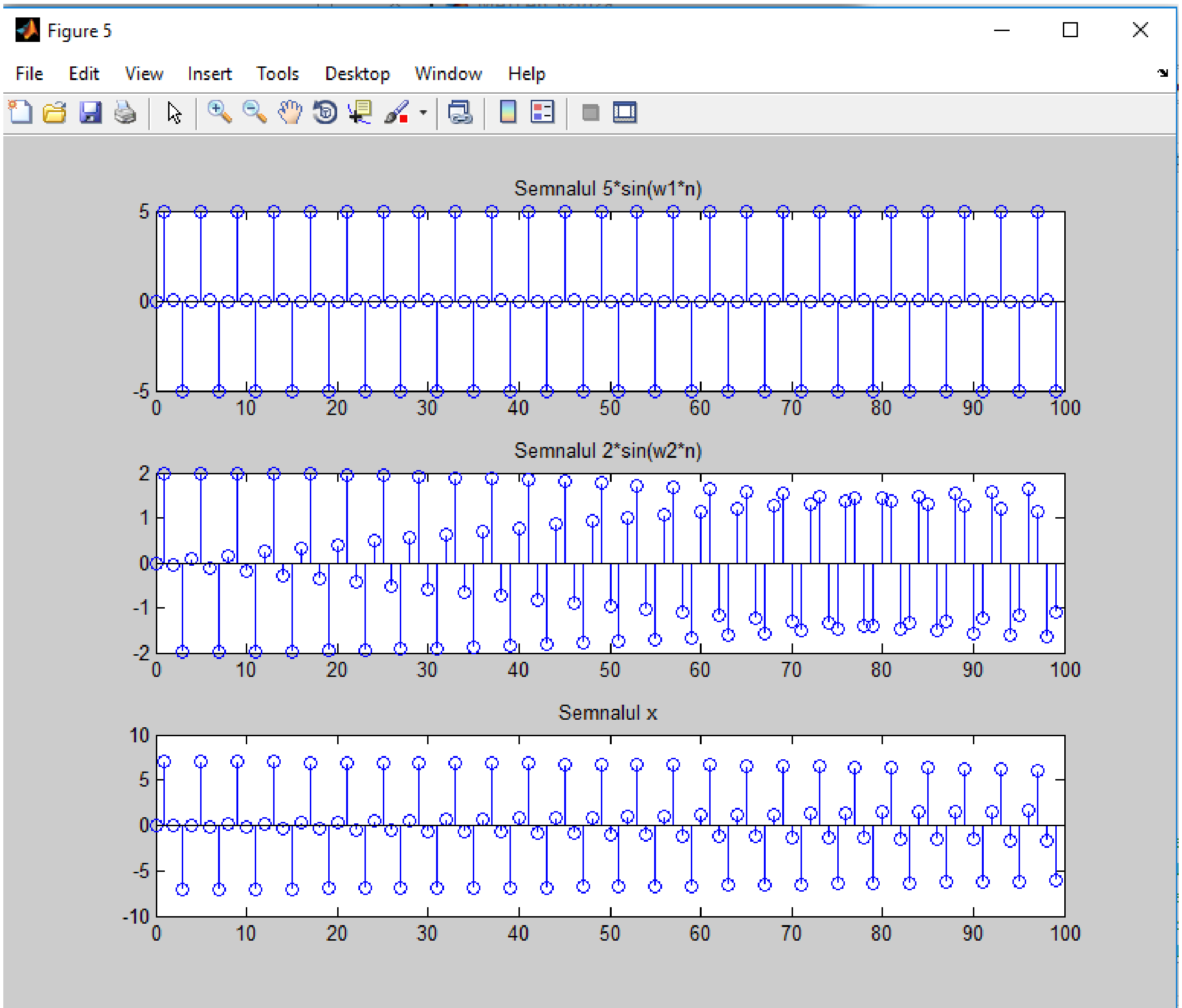
Spectrul semnalului astfel obitnut este:



Se observa in continuare 4 puncte de maxim, datorate descompunerii fiecarei sinusoide conform formulei lui Euler. Se observa ca la frecventa pi/8, respectiv -pi/8, adica w1 si -w1 valoarea spectrului este mai mare decat in cazul w2, -w2. Acest lucru este datorat amplitudinilor diferite ale celor doua semnale: 5*sin(w1) + 2*sin(w2). Daca amplitudinile ar fi fost alese egale, cele 4 puncte de maxim ar fi trebuit sa atinga aceleasi valori.

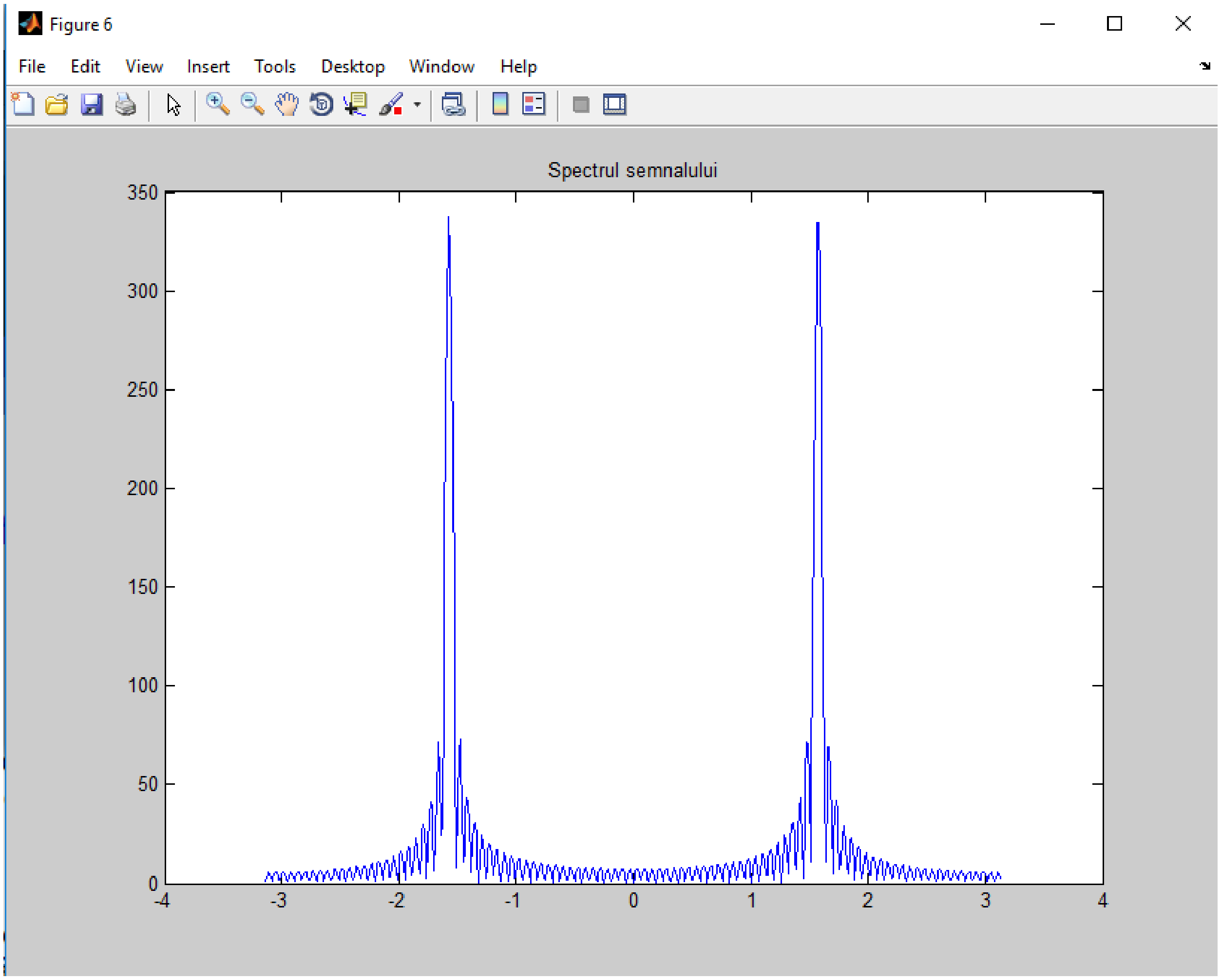
Subpunctul d

Pentru w1 = pi/2 si w2 = pi/2 + 0.01 se vor obtine urmatoarele semnale:



Perioada semnalului x va fi egala cu 4;

Spectrul va avea urmatorul grafic:

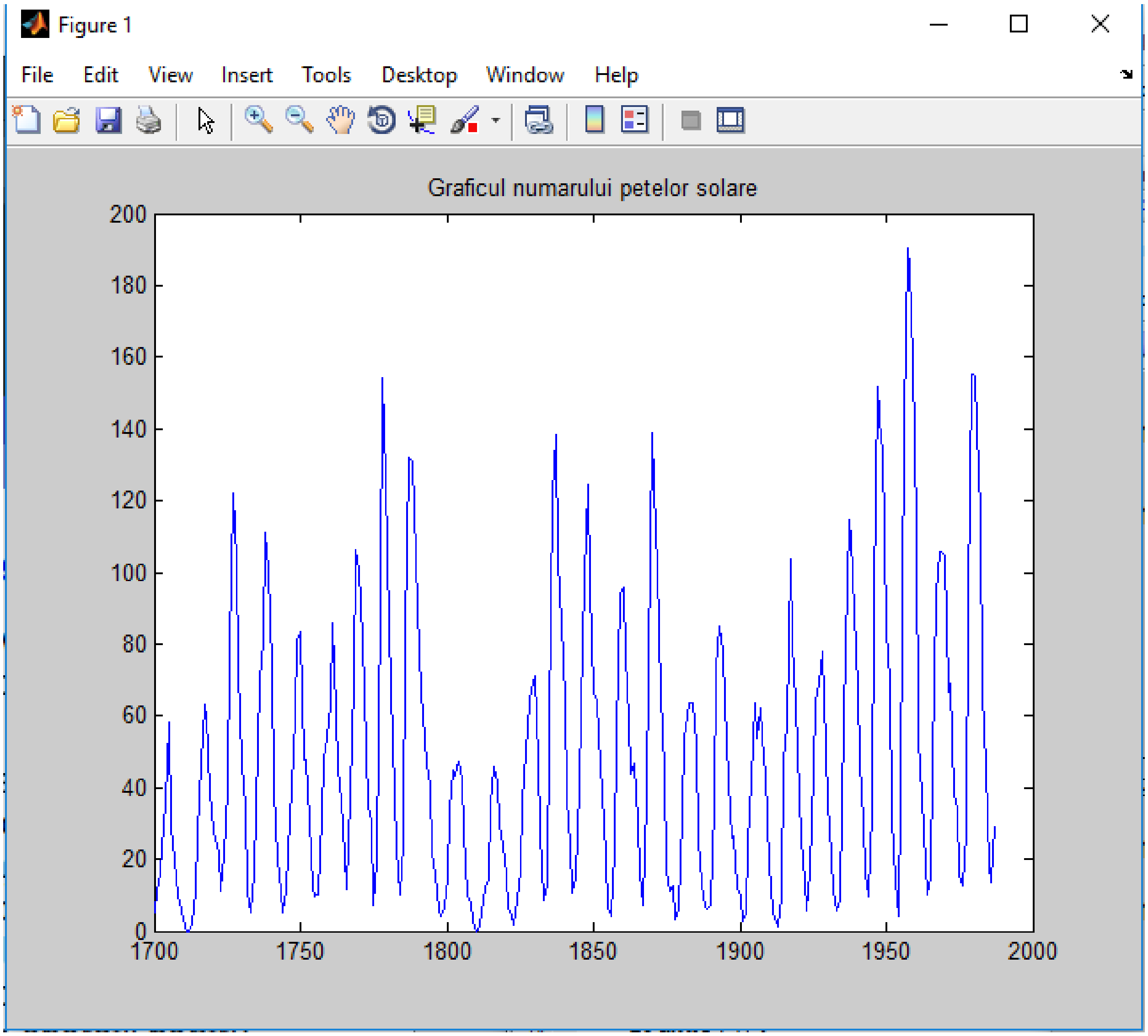


Se observa ca graficul nu va mai prezenta 4 puncte de maxim. Prezenta a numai doua puncte de maxim in graficul spectrului semnalului este cauzata de diferenta foarte mica dintre valorile w1 si w2, aceasta facand ca punctele de maxim din w1 si w2, repspectiv -w1 si -w2 sa se suprapuna.

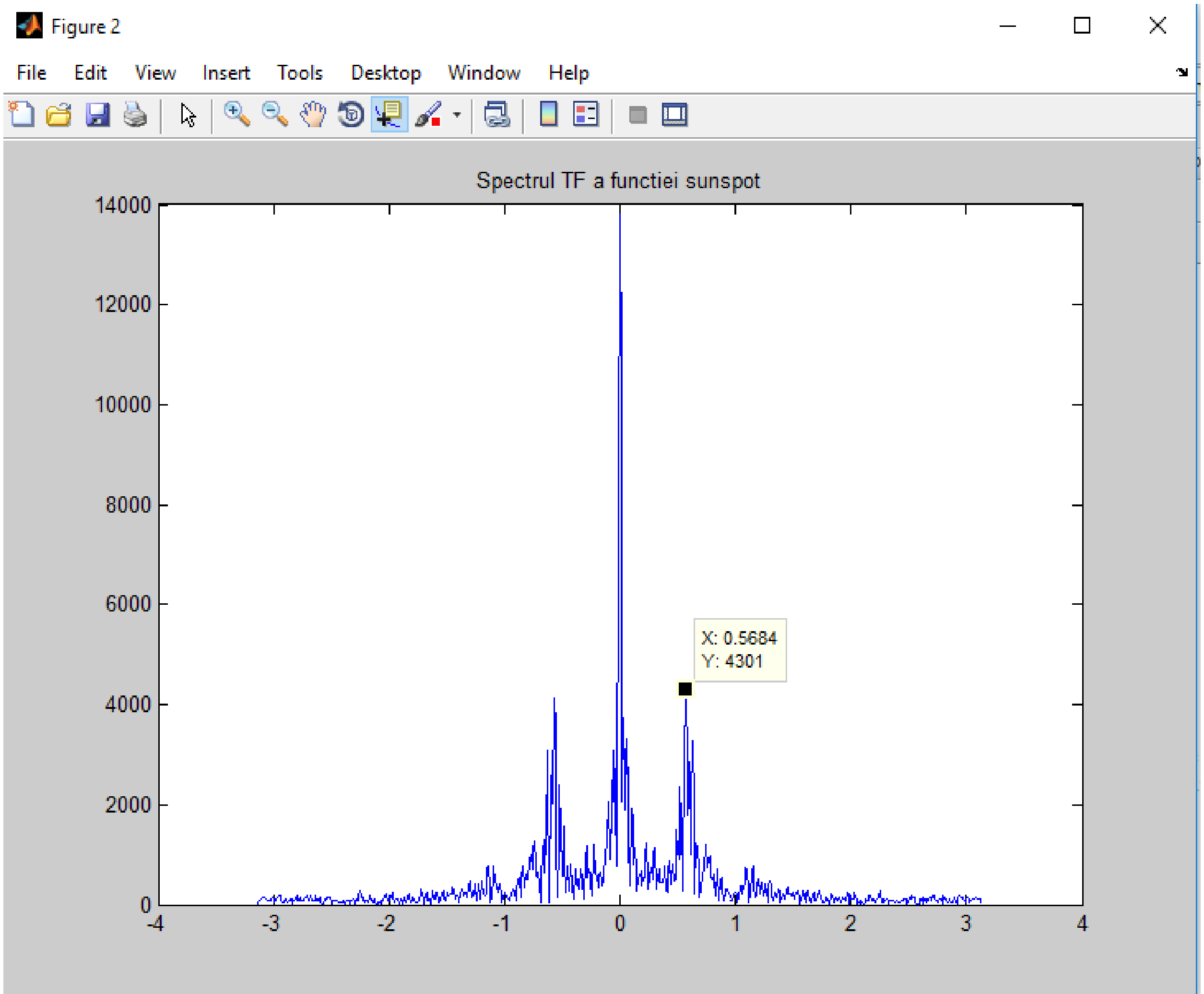
TEMA 4

Subpunctul a

Graficul numarului de pete solare trasat pe baza datelor din fisierul sunspot da teste reprezentat in urmatoarea figura:

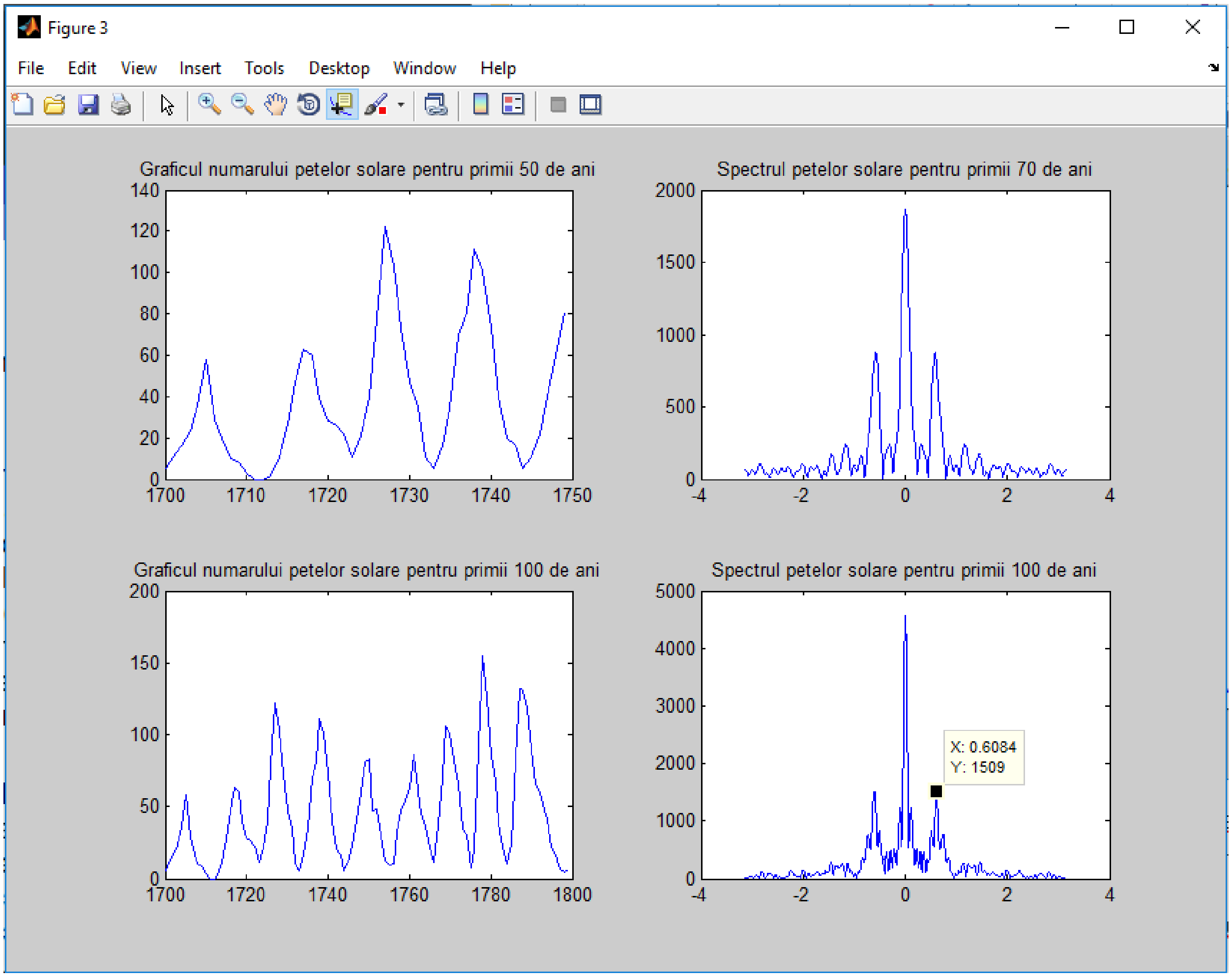


Spectrul Transformatei Fourier a acestui semnal este in figura:



Se observa ca punctul de maxim(in afara celui din w=0) de afla in w = 0.5684. Asadar, perioada va fi egala cu T = 2*pi / w = 11.05, adica aproximativ 11, asa cum este specificat si in enuntul problemei.

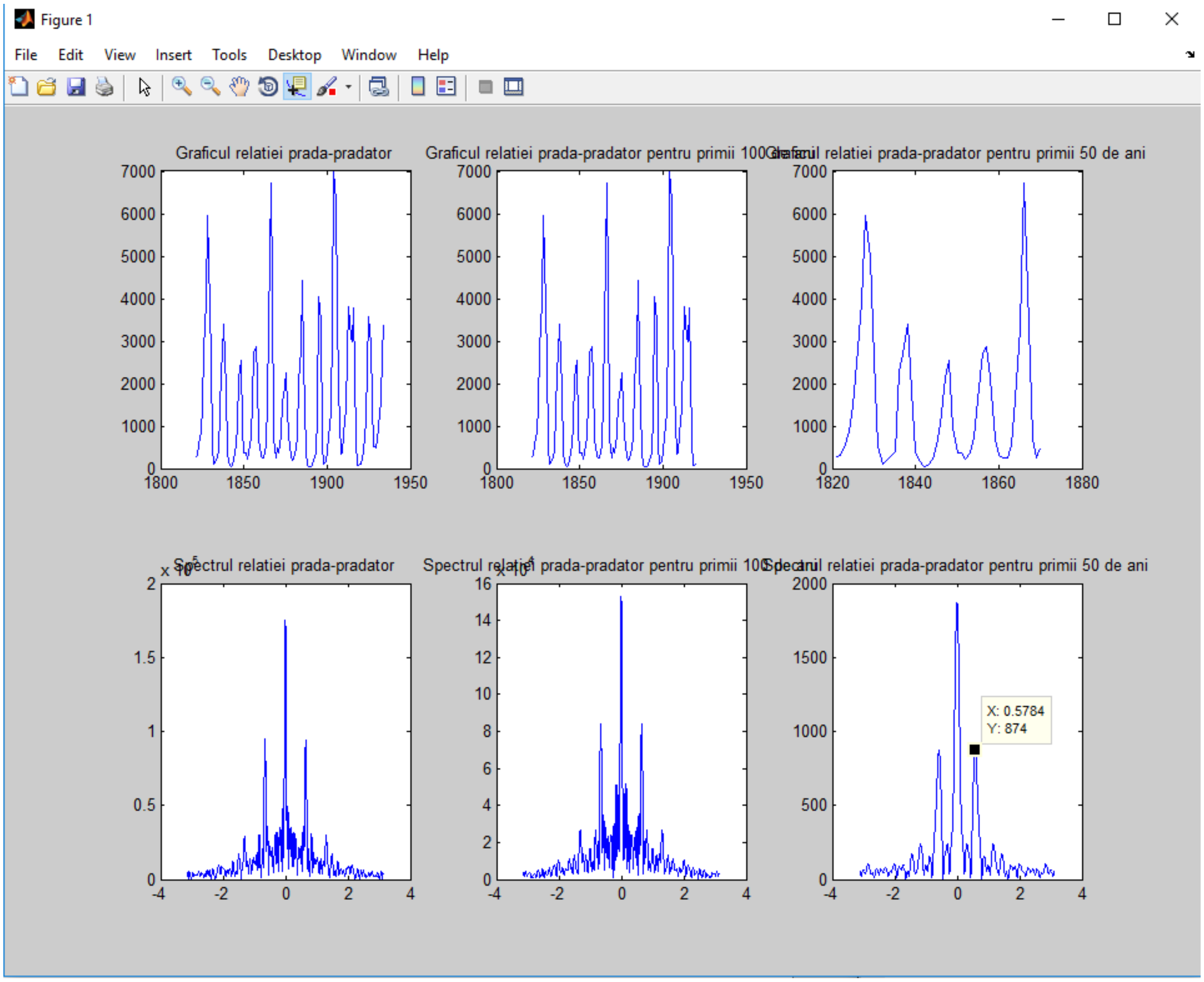
Graficele pentru perioade de timp mai scurte de 300 de ani sunt reprezentate in figura de mai jos:



Se observa ca o scadere a duratei provoaca o modificare a valorii in care se atinge maximul, precum si o schimbare a valorii de maxim. Precizia spectrului se pierde asadar odata cu scaderea duratei.

Subpunctul b

In cazul fisierului lynx, rezultatele sunt prezentate in figura urmatoare:

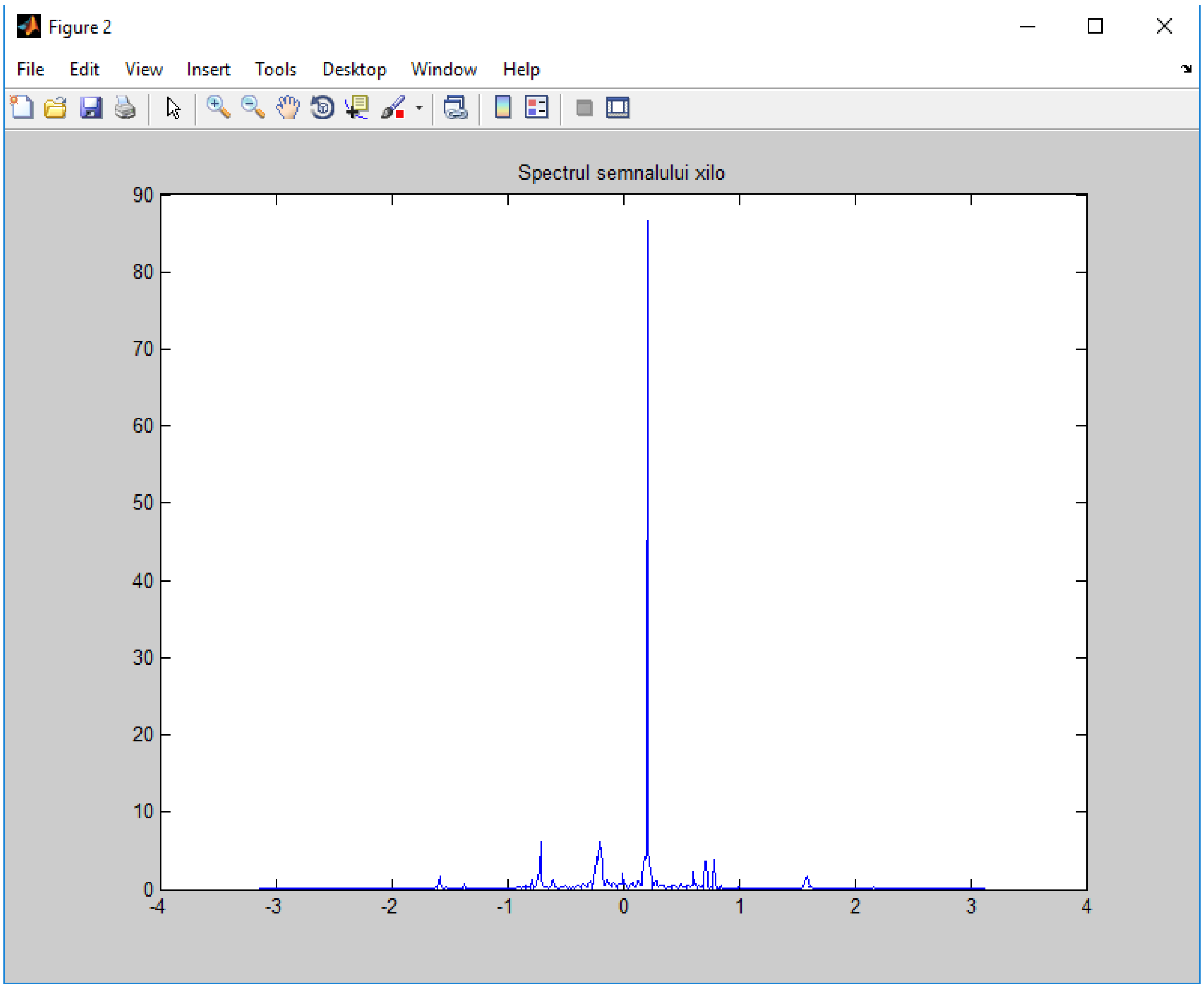


Perioada T = 2*pi/0.6484 = 9.69.
Pentru primii 100 de ani, w = 0.6584, iar T = 9.5431;
Pentru primii 50 de ani, w = 0.5784, iar T = 10.8630;

Si in acest caz scaderea duratei N va duce la pierderea preciziei spectrului.

Subpunctul c

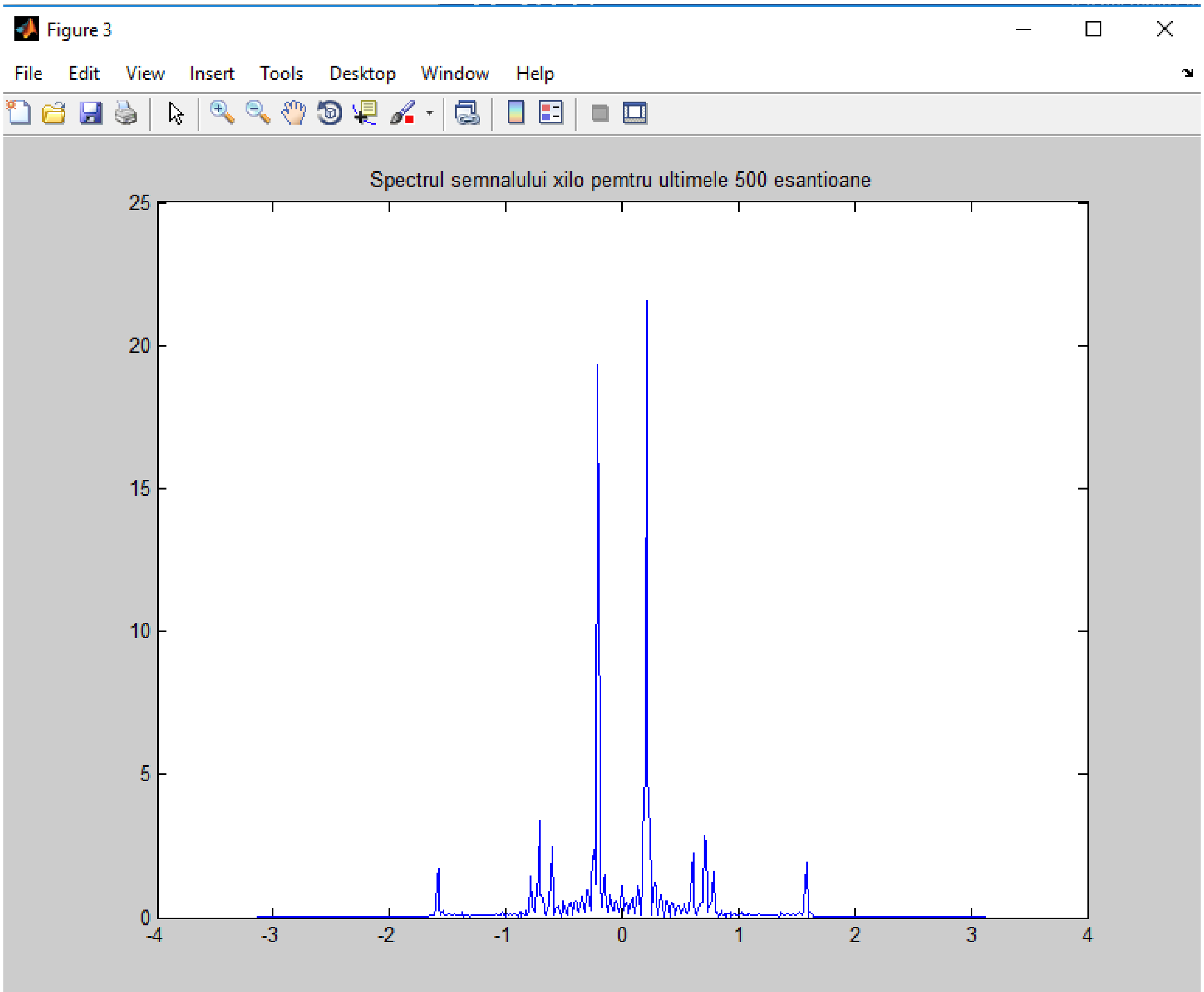
Pentru semnalul xilo, vom avea:



Se observa ca perioada lui xilo va fi T = 2*pi/0.2 = 31.4.

Un semnal are un spectru armonic daca si numai daca acesta este periodic. Xilo este periodic in partea lui finala, de aceea putem observa prezenta armonicelor.

Spectrul lui Xilo pentru ultimele 500 de esantioane este urmatorul:

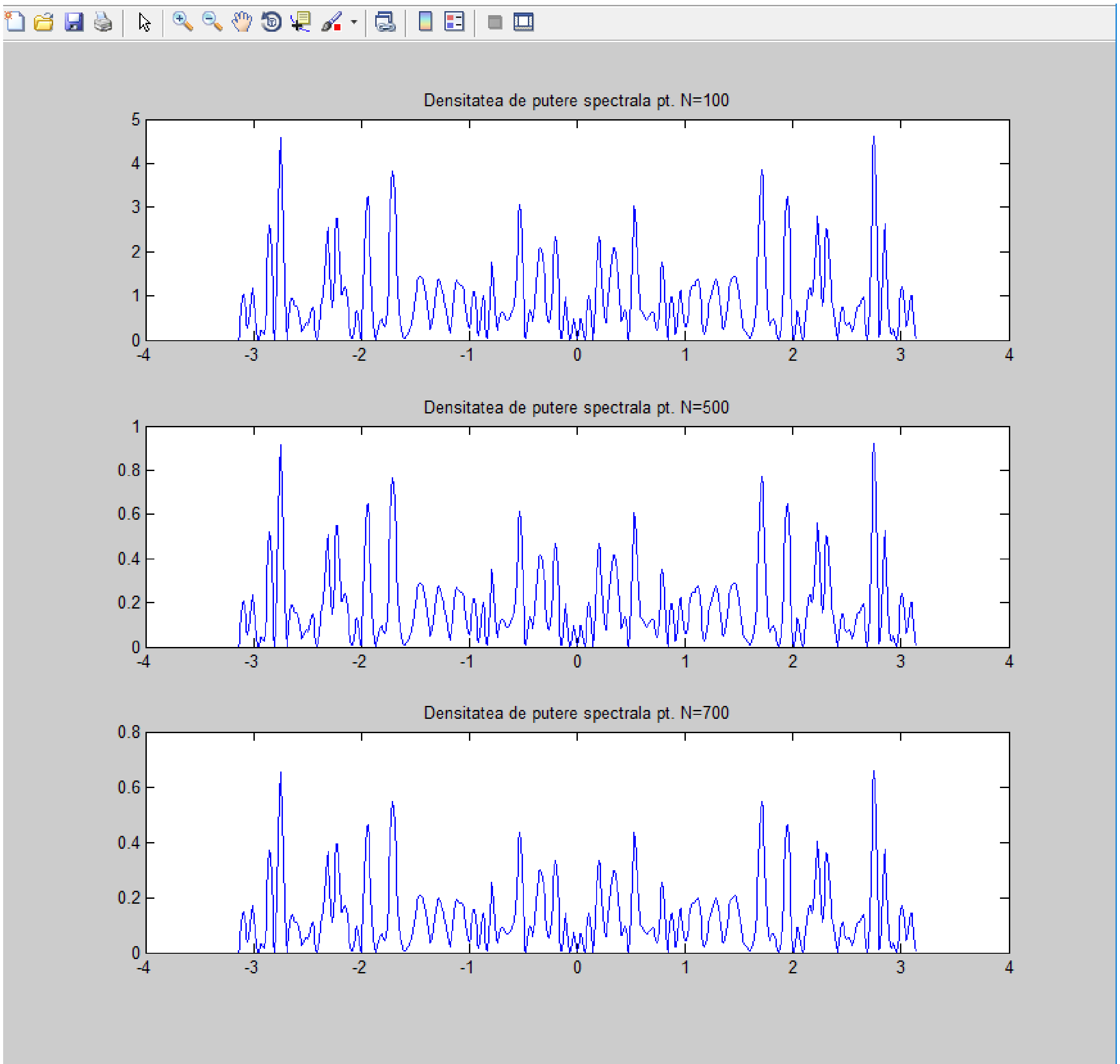


In acest caz, w = 0.2084, iar T = 30,14.

Ca si mai sus, scaderea numarului de esantioane provoaca pierderea preciziei spectrului si odata cu ea modificarea perioadei, precum si a punctului de maxim al acestuia.

TEMA 5

Graficele densitatii spectrale pentru valori diferite ale lui N sunt reprezentate in figura:



Un semnal poate fi exprimat ca o combinatie de sinusuri si cosinusuri de diferite perioade si amplitudini. Aceasta descompunere ne poate ajuta sa aflam informatii importante despre comprtamentul periodic al semnalului.

Periodograma este utilizata pentru a identifica perioadele sau frecventele dominante cu scopul de a decide ce semnale din descompunerea semnalului initial ofera informatie importanta si ce semnale nu contin o cantitate atat de mare de informatie..

Pentru un semnal random, asa cum este si cel din exercitiul prezentat, toate componentele sinus sau cosinus sunt de egala importanta, de aceea graficul periodogramei variaza in jurul unei anumite constante. Teoretic, densitatea spectrala de putere a zgomotului alb este constanta si egala cu lamda^2 (dispersia). Acest semnal nu este cu exactitate un zgomot alb, astfel explicandu-se variatia lui in jurul unei constante. Aceasta metoda de trasare a periodogramei nu ne releva informatii utile legate de semnalul studiat. Daca semnalul initial are o sinusoida puternica la o anumita frecventa, atunci, la acea frecventa, pe graficul periodogramei se va regasi un punct de maxim pronuntat.

De asemenea, conform relatiei 2.10 putem observa ca periodograma reprezinta transformata Fourier a secventei de autocorelatie a semnalului dat.

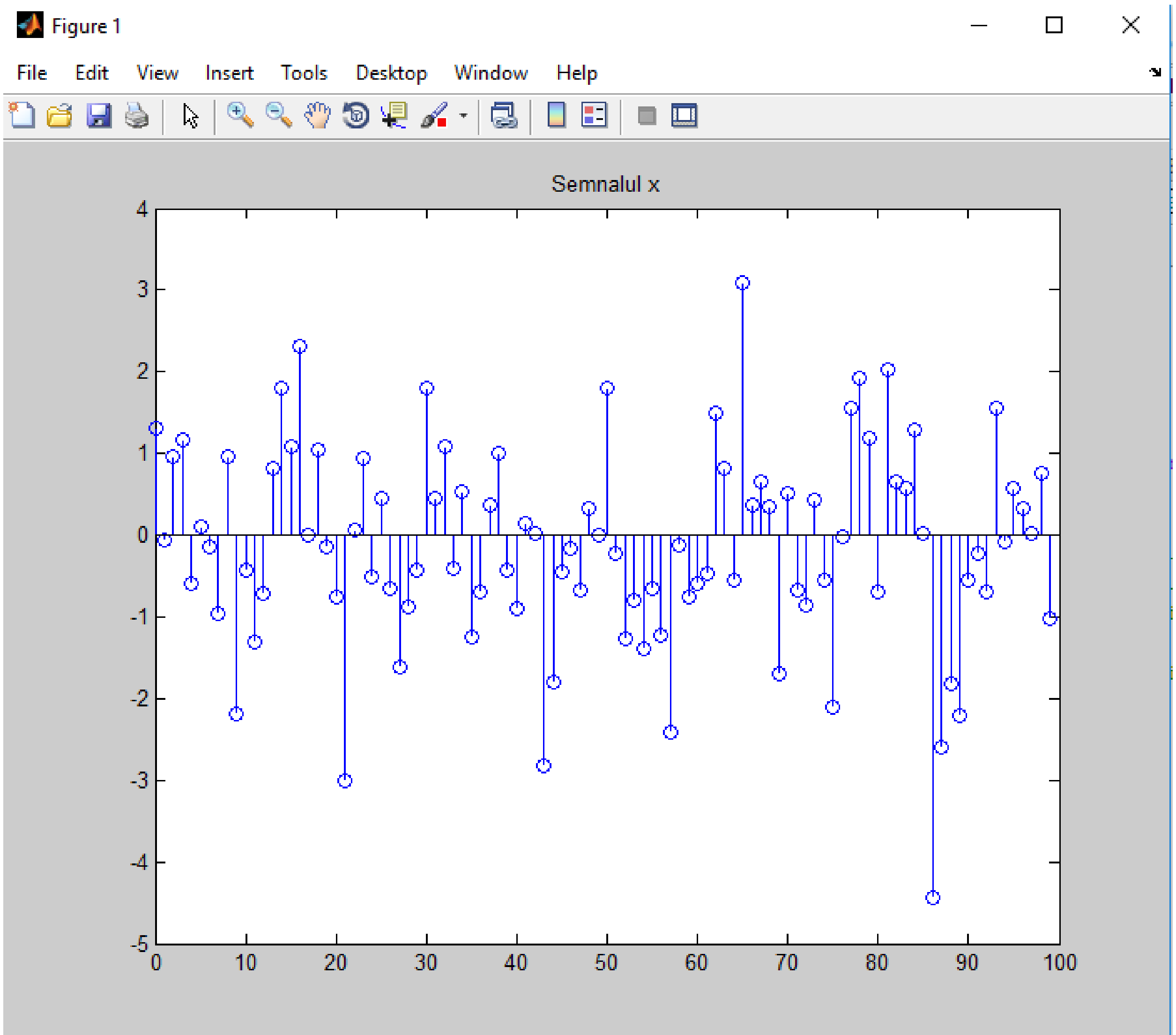
Se observa ca densitatea de putere spectrala are un aspect tipic care nu se modifica marind valoarea lui N. De asemenea, se observa ca graficul nu prezinta un maxim pronuntat in nicio frecventa din intervalul ales. Asadar nicio frecventa nu este favorizata.

Astfel, putem concluziona ca, in acest caz, periodograma este un slab estimator al densitatii spectrale de putere deoarece nu putem extrage informatii utile din examinarea acesteia.

TEMA 6

Subpunctul a

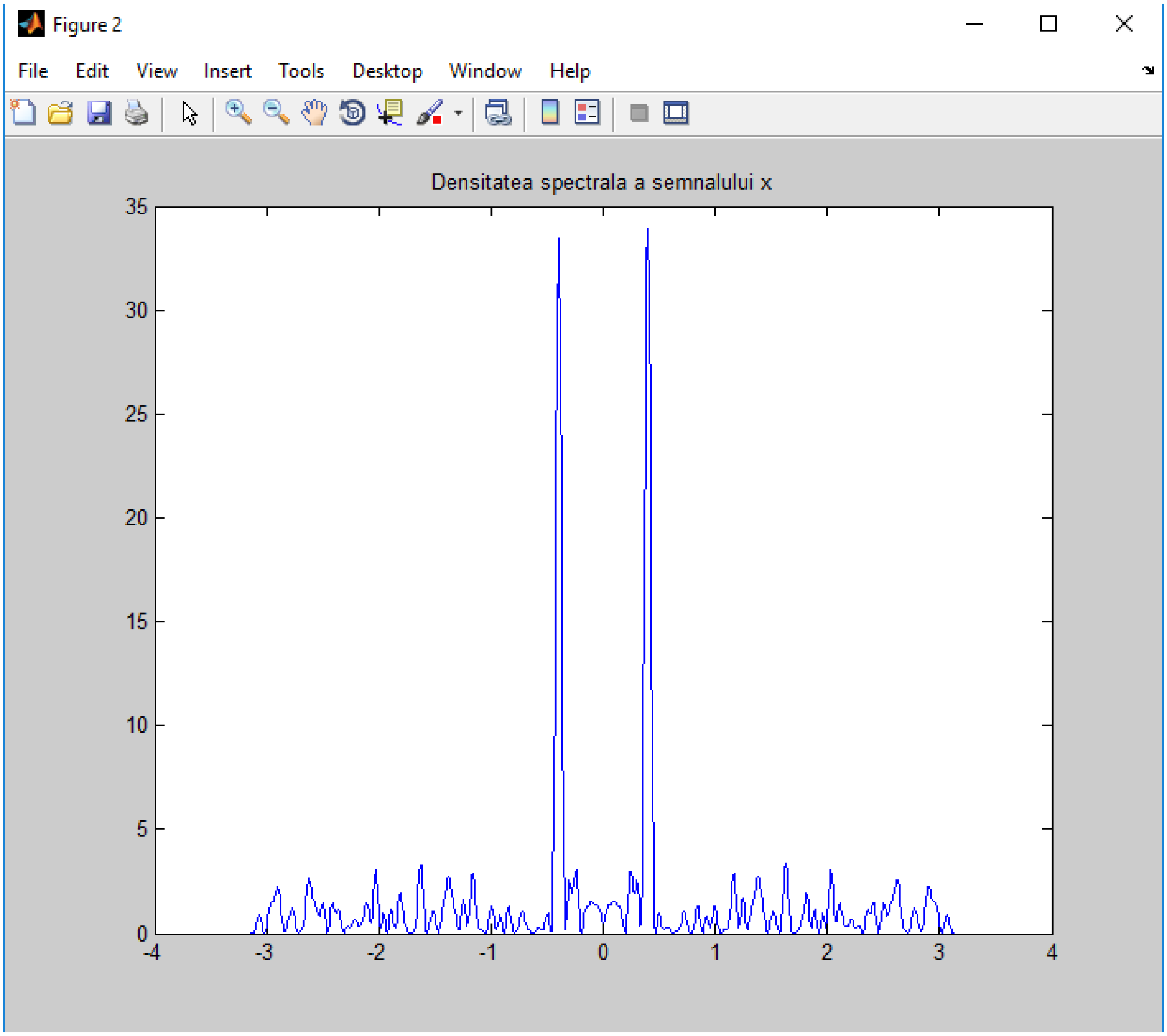
Graficul semnalului este reprezentat in figura urmatoare. Am ales N = 100.



Se observa intr-adevar ca este greu de observat periodicitatea acestuia. Semnalul sinusoidal este alterat de semnalul de tip zgomot alb. Asadar, nu putem extrage nicio informatie referitoare la w0.

Subpunctul b

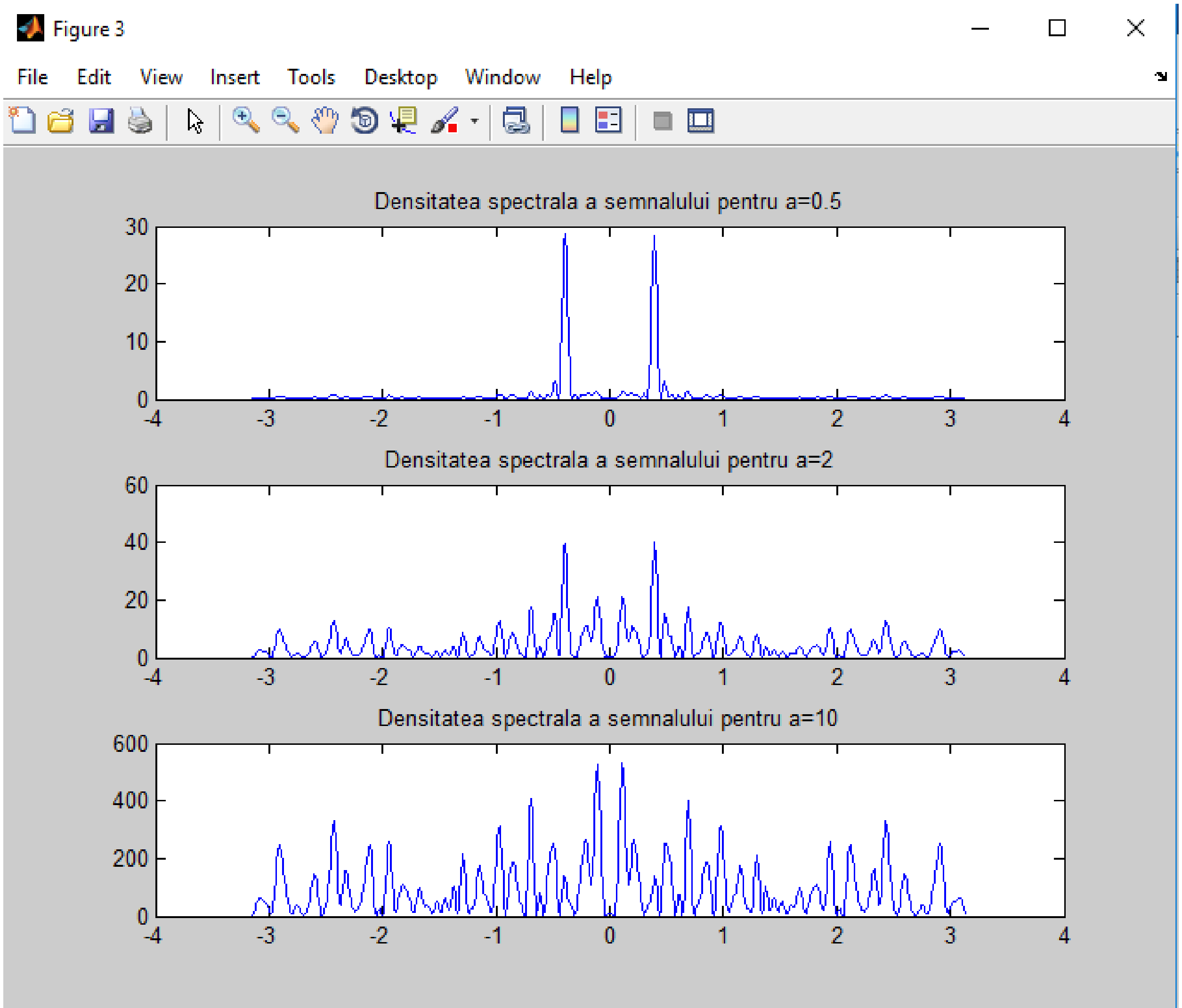
Graficul densitatii de putere spectrala este reprezentat in figura:



Se observa doua puncta de maxim, corespunzatoare valorilor w0 si -w0, mai precis (0.4 si -0.4). Desi tranformata Fourier a semnalului reprezinta suma transformatelor Fourier ale semnalelor componente, spectrul nu mai respecta aceasta proprietate. Dar, termenul care apare in plus in expresia acestuia este proportional cu partea reala a transformatei Fourier a semnalului sinusoidal, asadar acest rezultat este corect.

Subpunctul c

Graficele densitatilor spectrale pentru diferite valori ale amplificarii a sunt prezentate in cele ce urmeaza:



Cu cat crestem valoarea amplificarii zgomotului alb, cu atat ne este mai greu sa observam punctele de maxim ale spectrului sinusoidei. Zgomotul alb altereaza semnalul purtator de informatie, adica cosinusul, precum si densitatea sa de putere spectrala. Asadar, in cadrul valorilor alese, punctele de maxim se afla in w0 si -w0 (aproximativ 0.4) si se pot distinge pana la o valoare aproximativa a amplificarii a aproximativ egala cu 2 (aceasta valoare a=2 am obtinut-o experimental, dand valori lui a pana in momentul in care am observant ca punctele de maxim din w0, respectiv -w0 nu se mai pot distinge).

Subpunctul d

Functia din fisierul *tema6d.m* calculeaza vectorul SNR. Pentru semnalul dat x = cos(w0*n), in interiorul functiei se calculeaza secventa de auto corelatie a lui x. Definesc vectorul valorilor lui a de la valoarea 0.01 pana la amplitudinea maxima estimate la punctul anterior a=2.5 cu pas de 0.1, astfel incat voi avea 25 de valori pentru amplificarea zgomotului alb. Intr-un ciclu for construiesc semnalul v = a(i) * e, unde e reprezinta semnalul de tip randn. La fiecare iteratie calculez secventa de autocorelatie pentru semnalul v si aflu cate un element din vectorul SNR folosindu-ma de formula 2.21. Dupa ce ciclul for se incheie, plotez vectorul SNR in functie de valoarea amplificarii a.

Din grafic se observa ca odata cu cresterea amplitudinii a, valorile din vectorul SNR scad. Acest lucru este normal deoarece SNR reprezinta raportul dintre puterea semnalului util si cea a zgomotului. Este firesc asadar ca odata ce puterea zgomotului creste, raportul sa scada. Graficul obtinut este prezentat in figura urmatoare: