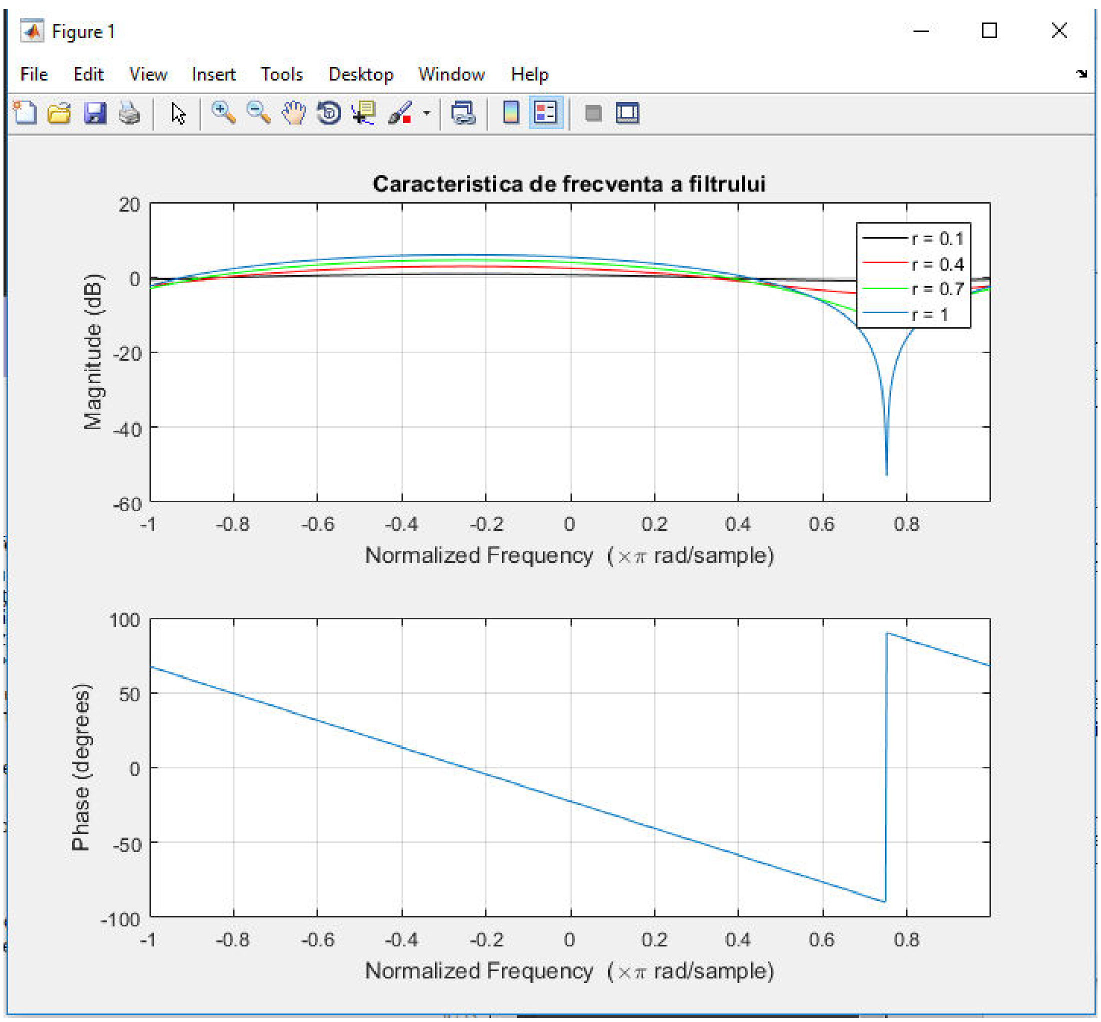
TEMA 1

Subpunctul a

Coeficientii filtrului FIR cu functia de transfer (3.7) nu sunt reali, asadar proprietatile de simetrie ale TF nu se respecta (spectrul par, faza impara), graficul nu va mai fi simetric fata de axa verticala, asadar reprezentarea spectrului si a fazei pentru raspunsul in frecventa se va face pentru w apartinand intervalului [-pi,pi].

Valoarea variabilei r trebuie sa fie intre 0 si 1 deoarece r reprezinta amplitudinea zeroului (care este un numar complex). Cu cat ea se apropie mai mult de 1, cu atat zeroul se apropie mai mult de cercul unitate. Zerouri in afara cercului unitate sau analog, pentru sisteme continue, zerouri aflate in semiplanul drept, vor conduce la un sistem de faza non-minima.

Graficele obtinute la acest exercitiu prezinta amplitudinea raspunsului in dB, amplitudinea adimensionala, precum si caracteristica filtrului obtinuta cu functia freqz. Figurile de mai jos ilustreaza rezultatele obtinute. Am ales teta = (3*pi/4).



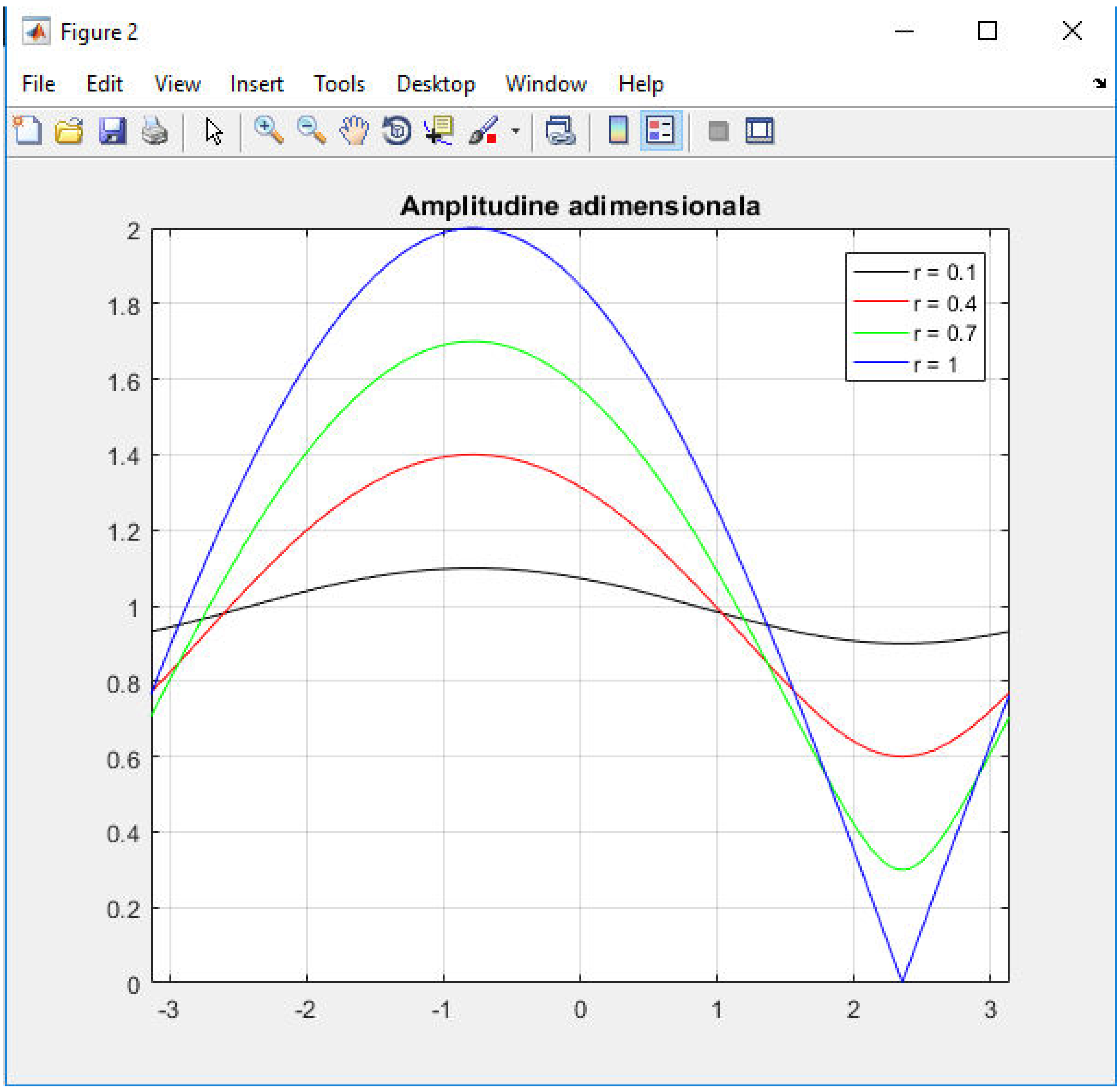
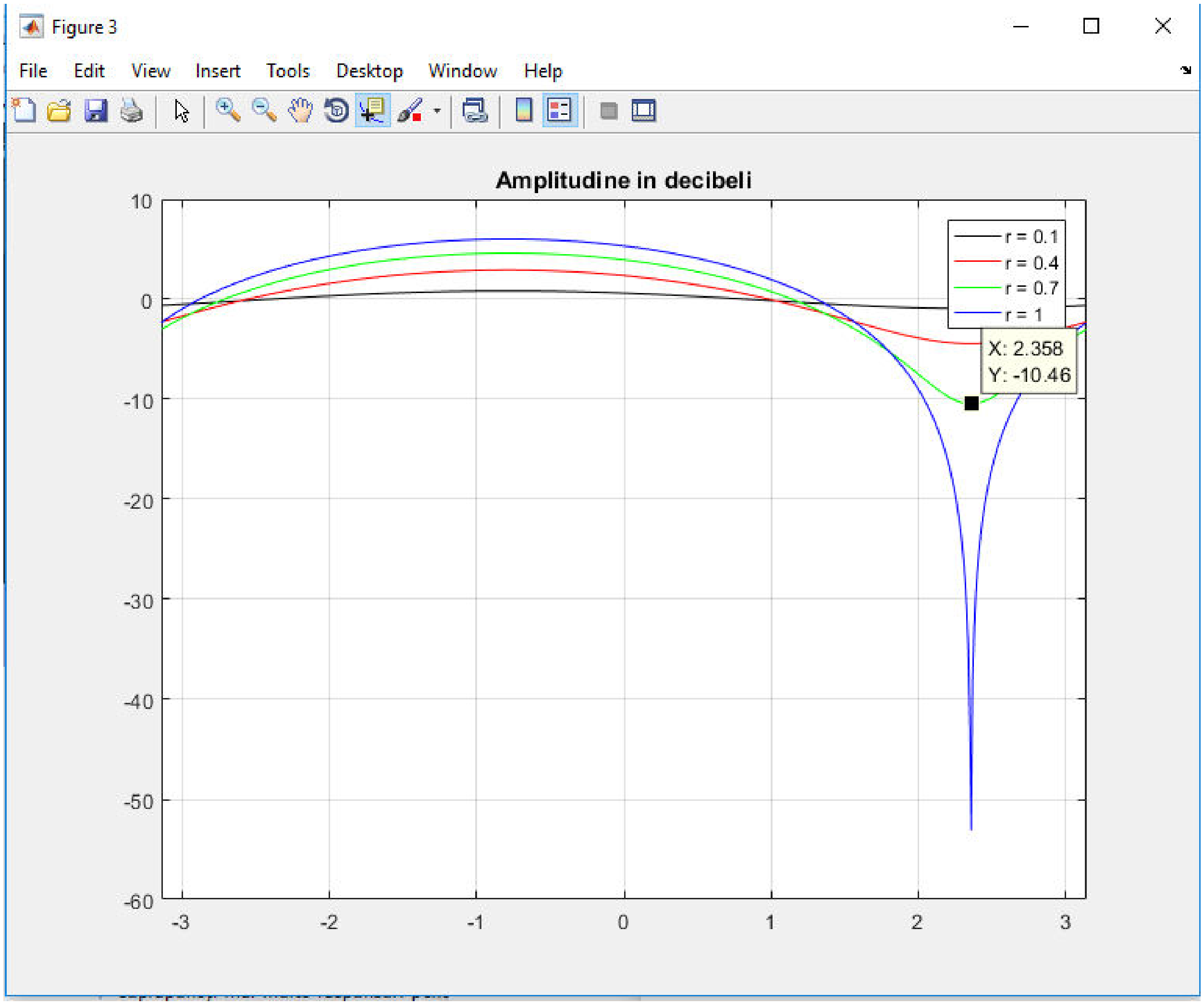


Figure 2
File Edit View Insert Tools Desktop Window Help
Amplitudine adimensionala
r = 0.1
r = 0.4
r = 0.7
r = 1
2
1.8
1.6
1.4
1.2
1
0.8
0.6
0.4
0.2
0
-3
-2
-1
0
1
2
3



Introduc urmatoarele comentarii referitoare la rezultatele obtinute si la diferentele dintre ele:

$|H(e^{j\omega})| = |1 - re^{j(\theta-\omega)}| \quad \forall\, \omega \in \mathbb{R}$

pt $\omega = \theta \Rightarrow |H(e^{j\omega})| = |1 - re^{0}| = |1 - r|$

pt valorile alese

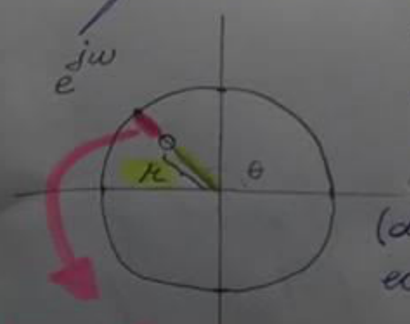
$\lvert 1-0{,}1\rvert = 0{,}9$	$20\log_{10} 0{,}9 = -0{,}9$
$\lvert 1-0{,}4\rvert = 0{,}6$	$20\log_{10} 0{,}6 \simeq -4$
$\lvert 1-0{,}7\rvert = 0{,}3$	$20\log_{10} 0{,}3 \simeq -10$
$\lvert 1-1\rvert = 0$	$20\log_{10} 0 \rightarrow -\infty$

aceste valori se verifică pe cea de-a doua figură în $\omega = \theta = 3\pi/4$

aceste valori se verifică în cea de-a treia figură pt $\omega = \theta$

Diferenta dintre prima figură si cea de-a treia e reprezentată doar de pulsátia (axa Ox), care în cadrul caracteristicii de frecventă e normalizată; Valorile din coloana a doua se verifică asadar în $\omega = \frac{3\pi}{4} \cdot \frac{1}{\pi} = 0{,}75$

este firesc ca odată cu cresterea lui r amplitudinea să scadă

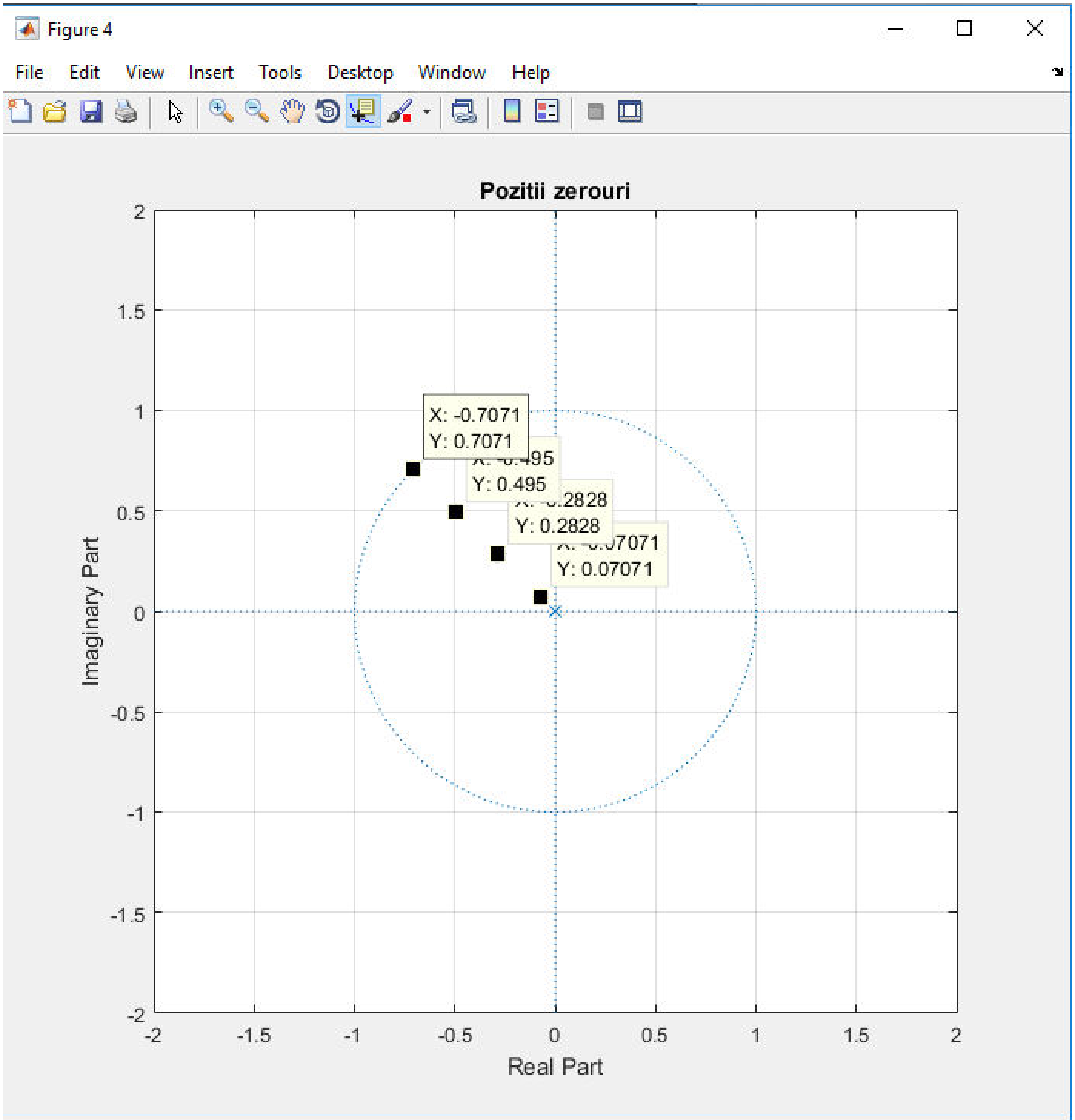


$|1-r|$

unde $\omega = 3\pi/4$

$|H(e^{j\omega})|$ cu $\omega = \theta$ e egal cu $|1-r|$
Modulul va reprezenta asadar distanta de la cercul unitate (de rază 1) la zero $\Rightarrow$ r mare echivalent cu distantă mică

Pentru a verifica pozitia zeroului, folosesc functia zplane si obtin:



Am verificat rezultatele astfel:

zero 1: $r_1 e^{j\theta} = 0,1\left(\cos\frac{3\pi}{4} + j\sin\frac{3\pi}{4}\right)$

$$= 0,1(-0,7 + j\cdot 0,7)$$

$$\boxed{= -0,07 + j\cdot 0,07}$$

zero 2: $r_2 e^{j\theta} = 0,4(-0,7 + j\cdot 0,7)$

$$\boxed{= -0,28 + j\cdot 0,28}$$

zero 3: $r_3 e^{j\theta} = 0,7(-0,7 + j\cdot 0,7)$

$$\boxed{= -0,49 + j\cdot 0,49}$$

zero 4: $r_4 e^{j\theta} = \boxed{-0,7 + j\cdot 0,7}$

zerourile mele se vor afla așadar în $\omega = \theta$, la diferite distanțe de cercul unitate (r_1, r_2, r_3, r_4)

Subpunctul b

Pentru o alta valoare a lui teta, rezultatele vor fi identice, singura diferenta este ca acum atenuarile se vor produce in w = noua valoare a lui teta. Pozitiile zerourilor vor fi de asemenea diferite, acestea aflandu-se pe raza cercului unitate ce face unghiul respectiv cu axa OX. Se obtin urmatoarele grafice: (am ales teta = pi/3)

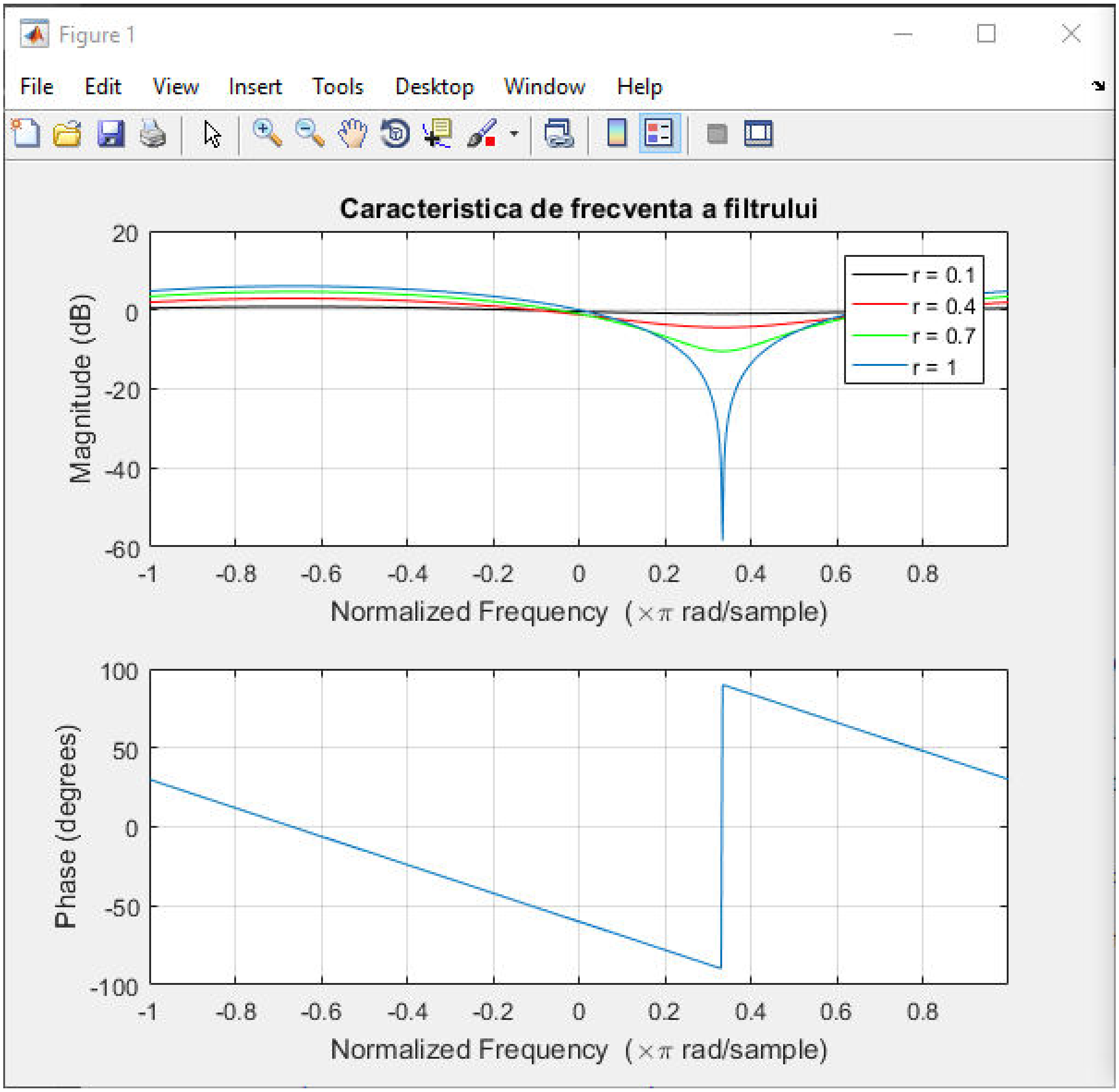


Figure 1
File Edit View Insert Tools Desktop Window Help
Caracteristica de frecventa a filtrului
Magnitude (dB)
r = 0.1
r = 0.4
r = 0.7
r = 1
Normalized Frequency (×π rad/sample)
Phase (degrees)
Normalized Frequency (×π rad/sample)

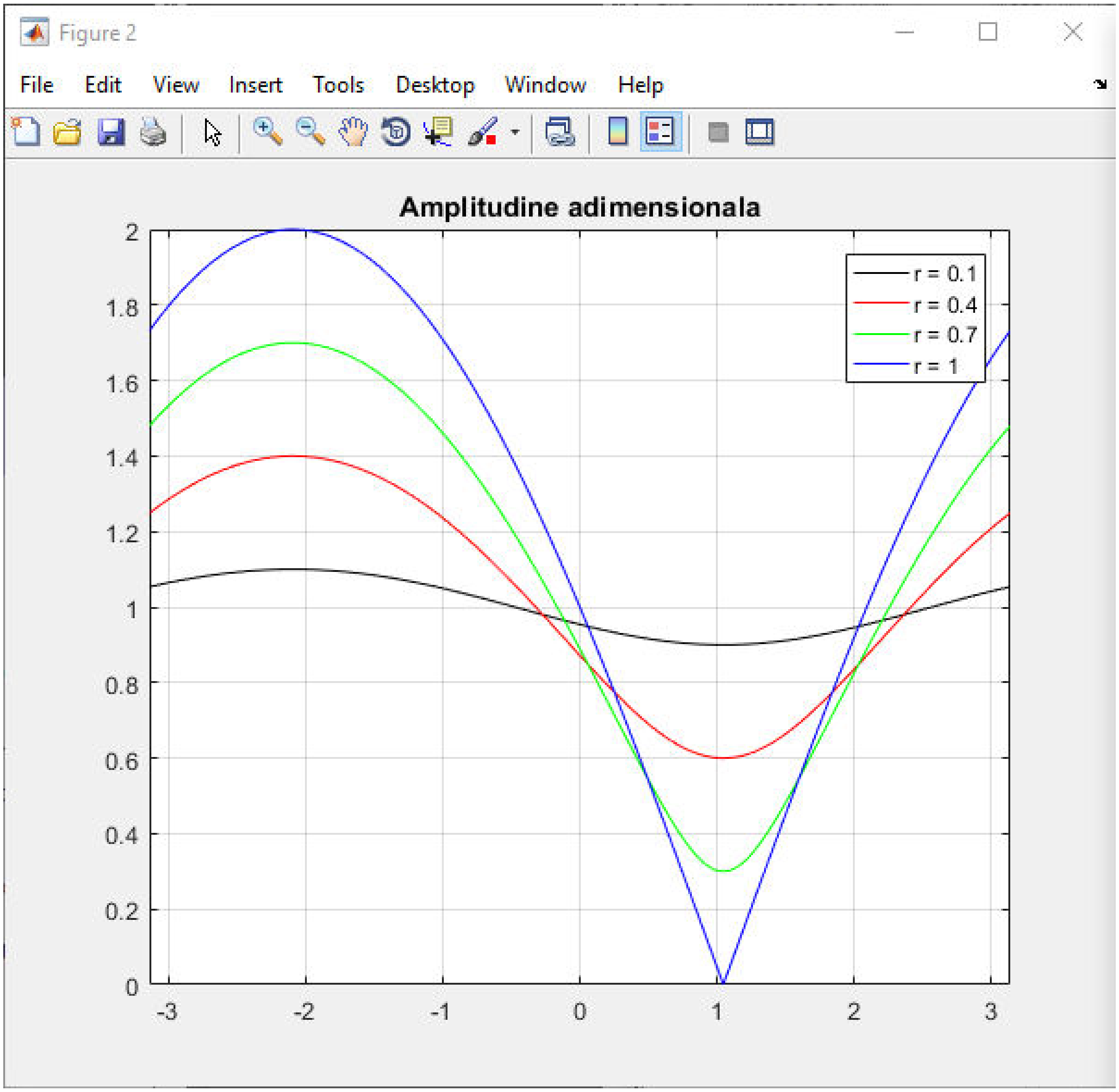


Figure 2
File Edit View Insert Tools Desktop Window Help
Amplitudine adimensionala
r = 0.1
r = 0.4
r = 0.7
r = 1
2
1.8
1.6
1.4
1.2
1
0.8
0.6
0.4
0.2
0
-3
-2
-1
0
1
2
3

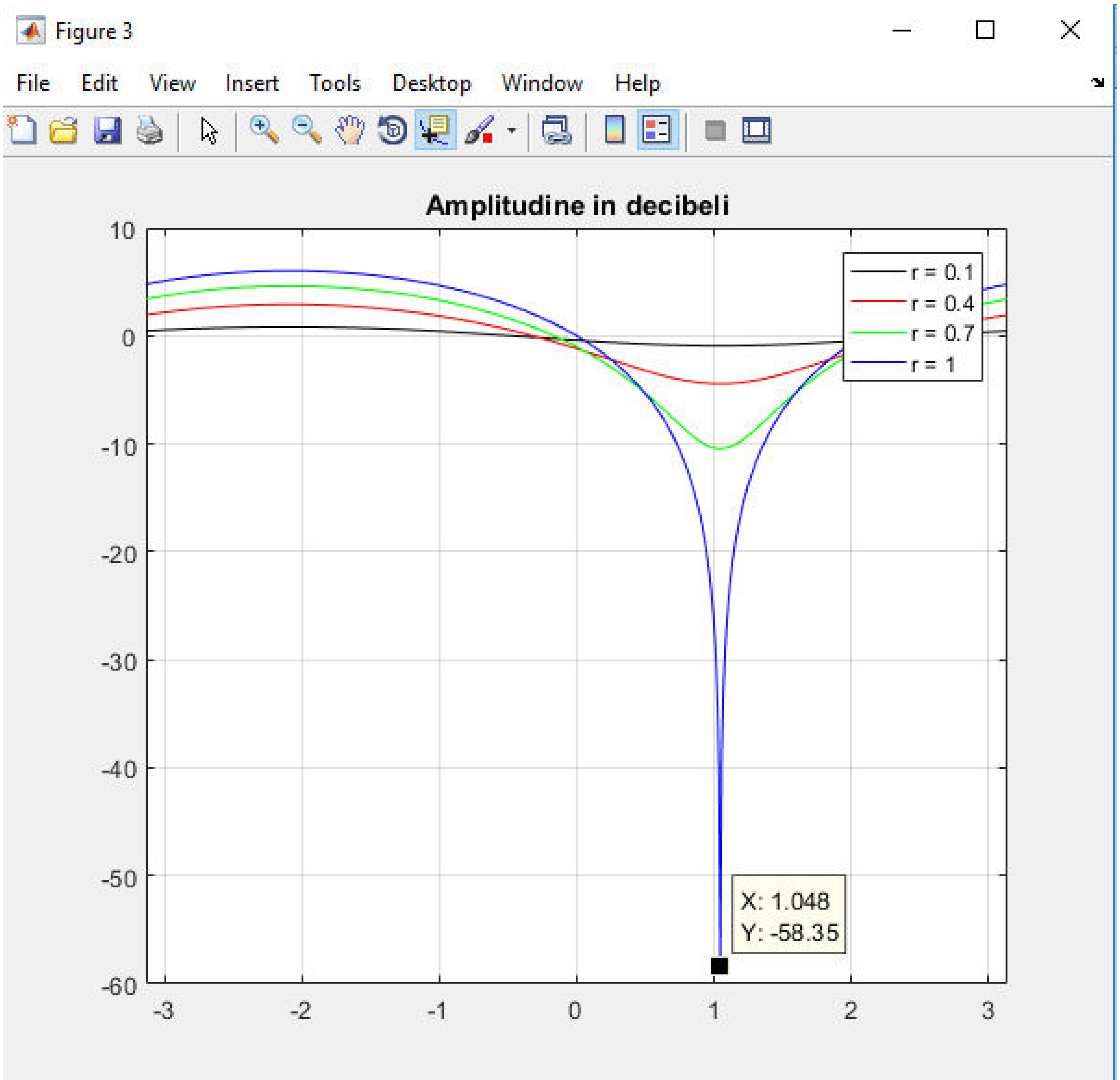
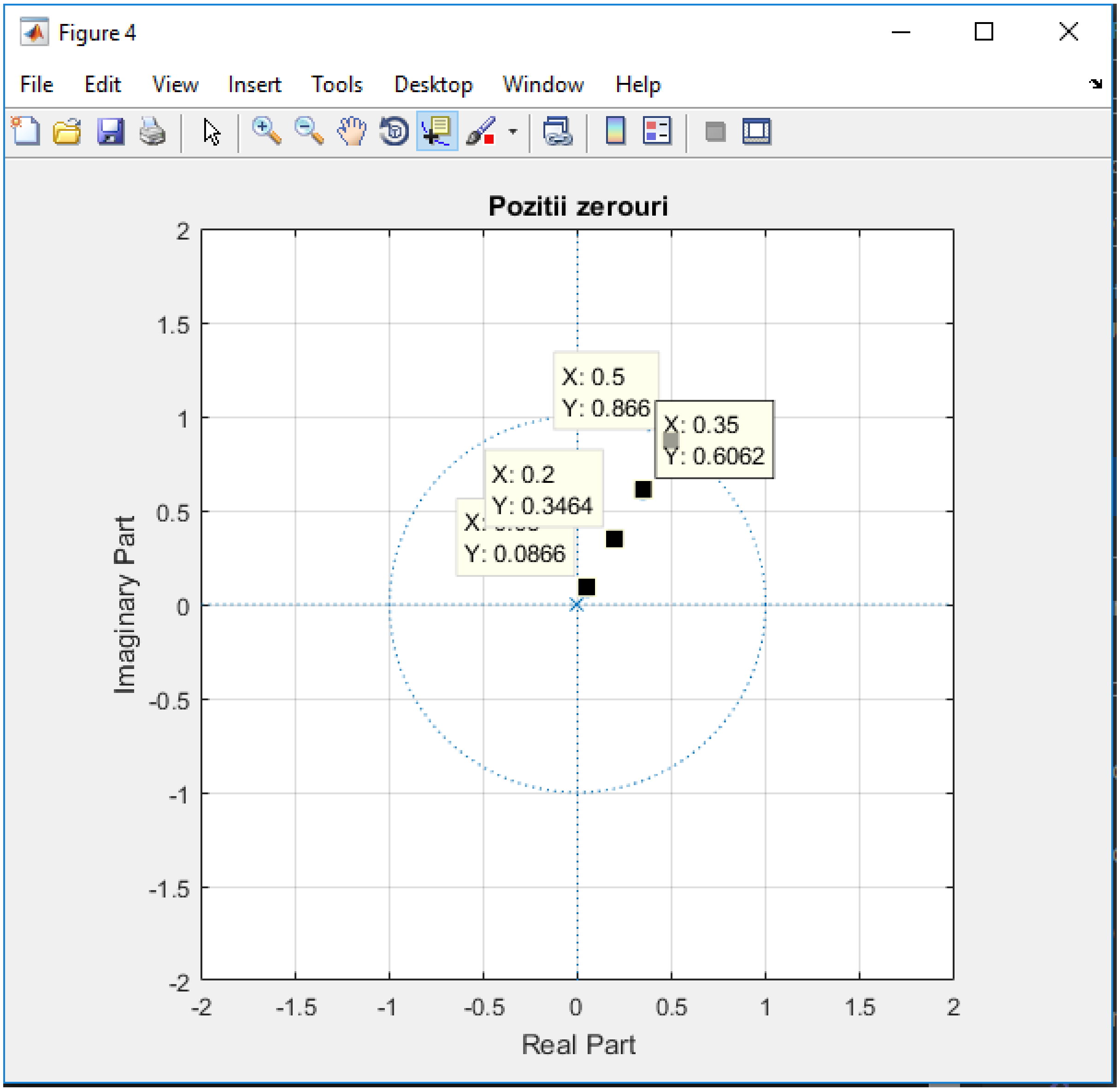


Figure 3
File Edit View Insert Tools Desktop Window Help
Amplitudine in decibeli
r = 0.1
r = 0.4
r = 0.7
r = 1
X: 1.048
Y: -58.35
10
0
-10
-20
-30
-40
-50
-60
-3
-2
-1
0
1
2
3

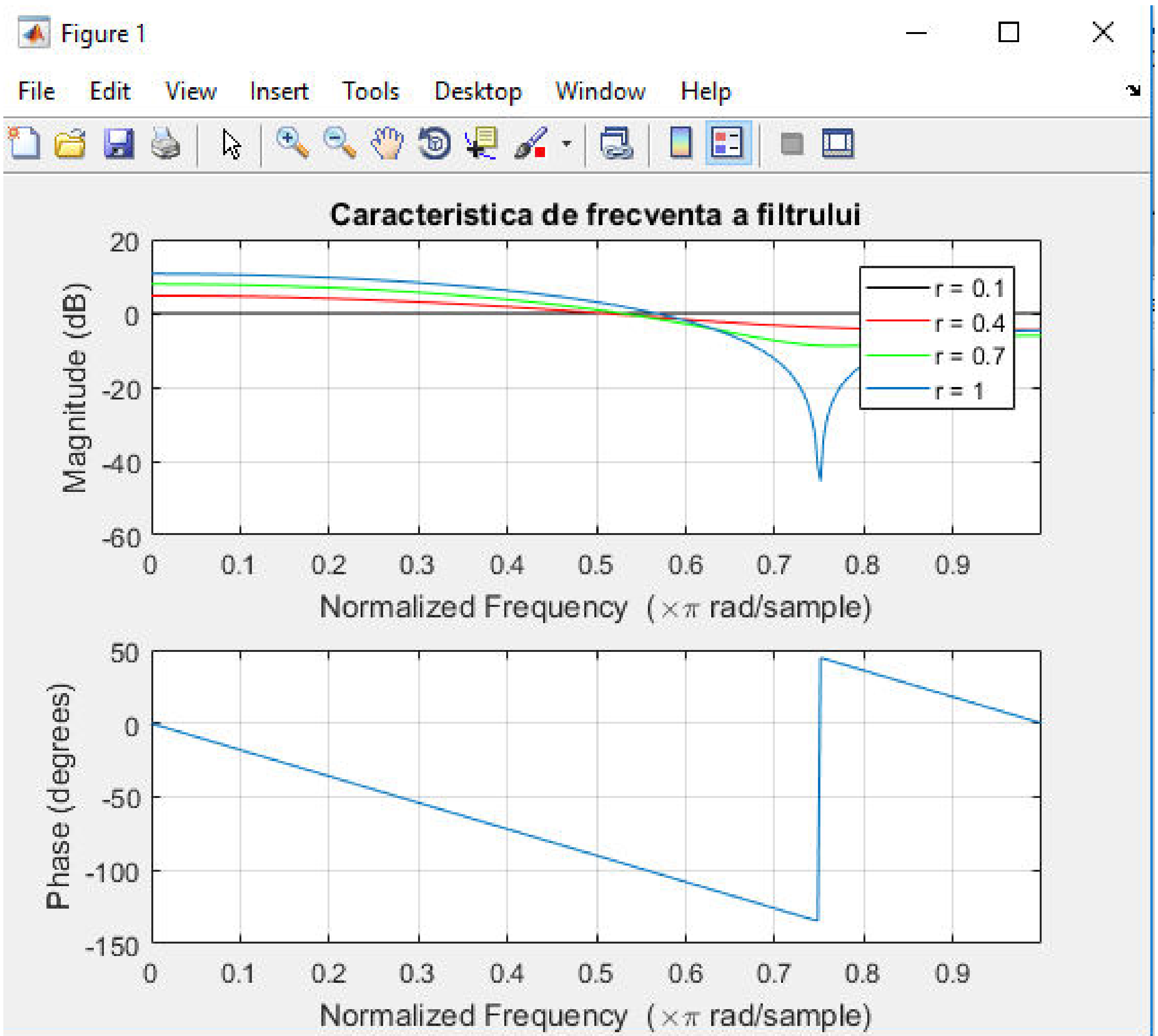


TEMA 2

In cadrul temei 2, avem un filtru FIR de ordinul 2. Observatiile facute in cadrul exercitiului 1 se aplica si in acest caz. Diferentele fata de exercitiul 1 vor consta in:

- Filtrul de ordinul 2 are coeficienti reali, asadar graficul amplitudinii este simetric fata de axa verticala; e suficienta reprezentarea pe intervalul w [0;pi];
- Diagrama zplane a zerourilor va contine perechi de zerouri dispuse simetric fata de axa OX.(filtrele FIR de ordin 2 au zerouri complex conjugate)

- Cu cat ordinul filtrului creste, cu atat semnalele cu frecvente in interiorul acelei benzi (deoarece filtrul FIR este de tip stop banda), vor fi atenuate mai bine, mai abrupt.
  Se obtin urmatoarele figuri, 4 pentru fiecare dintre cele doua cazuri: teta = (3*pi)/4 si teta = pi/3;



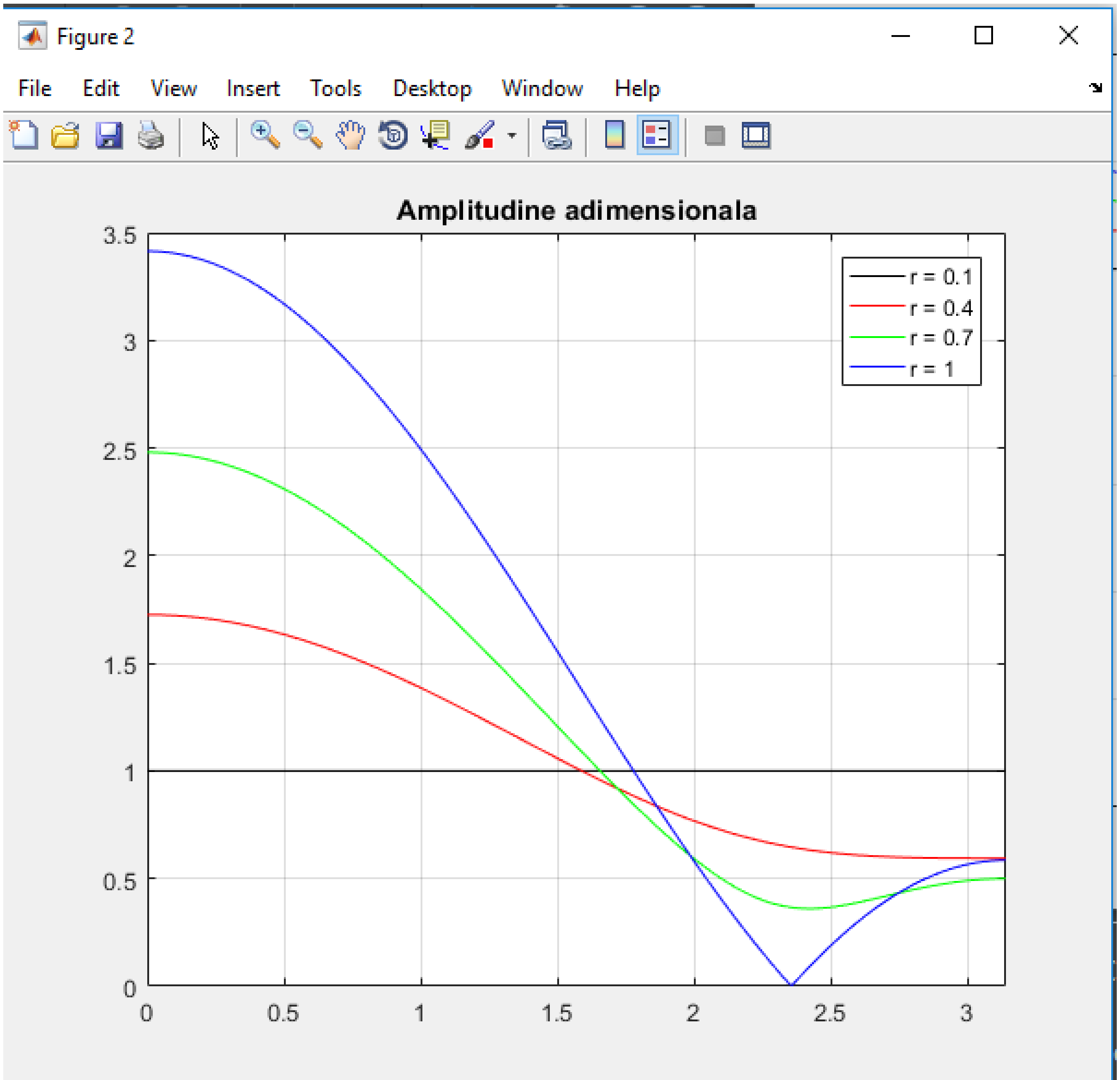


Figure 2
File
Edit
View
Insert
Tools
Desktop
Window
Help
Amplitudine adimensionala
3.5
3
2.5
2
1.5
1
0.5
0
0
0.5
1
1.5
2
2.5
3
r = 0.1
r = 0.4
r = 0.7
r = 1

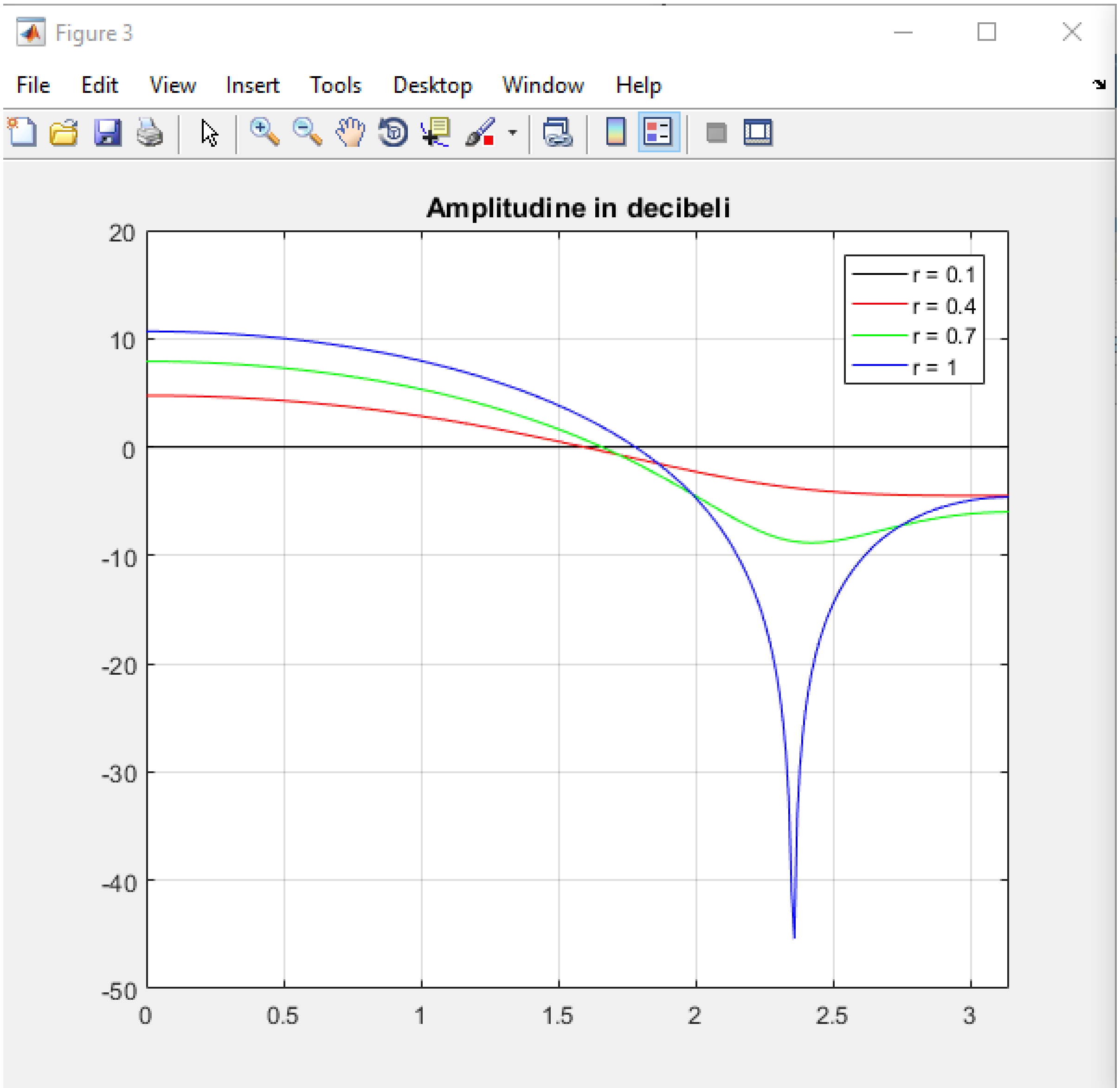


Figure 3
File
Edit
View
Insert
Tools
Desktop
Window
Help
Amplitudine in decibeli
r = 0.1
r = 0.4
r = 0.7
r = 1
20
10
0
-10
-20
-30
-40
-50
0
0.5
1
1.5
2
2.5
3

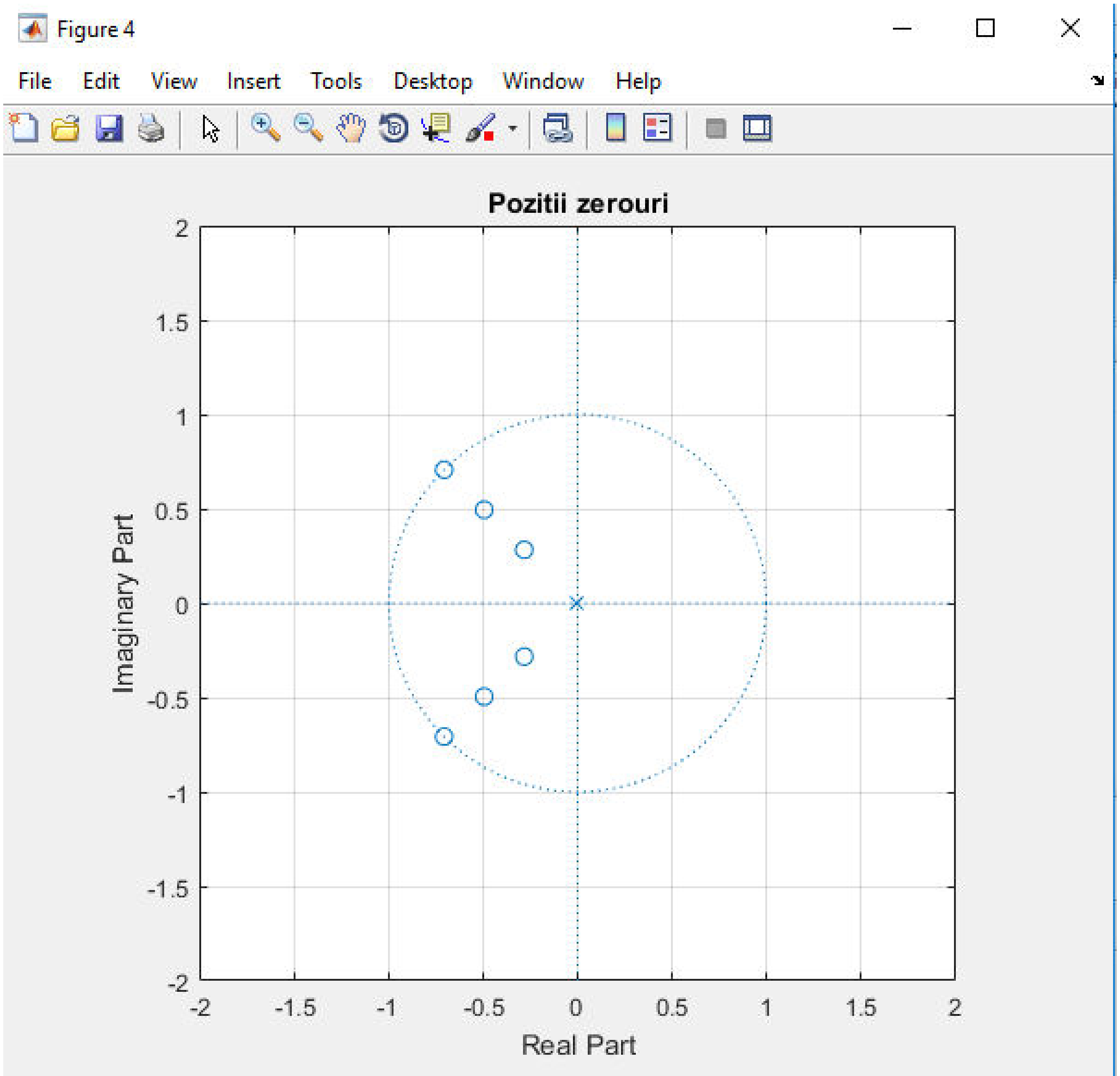


Figure 4
File Edit View Insert Tools Desktop Window Help
Pozitii zerouri
Imaginary Part
Real Part
2
1.5
1
0.5
0
-0.5
-1
-1.5
-2
-2
-1.5
-1
-0.5
0
0.5
1
1.5
2

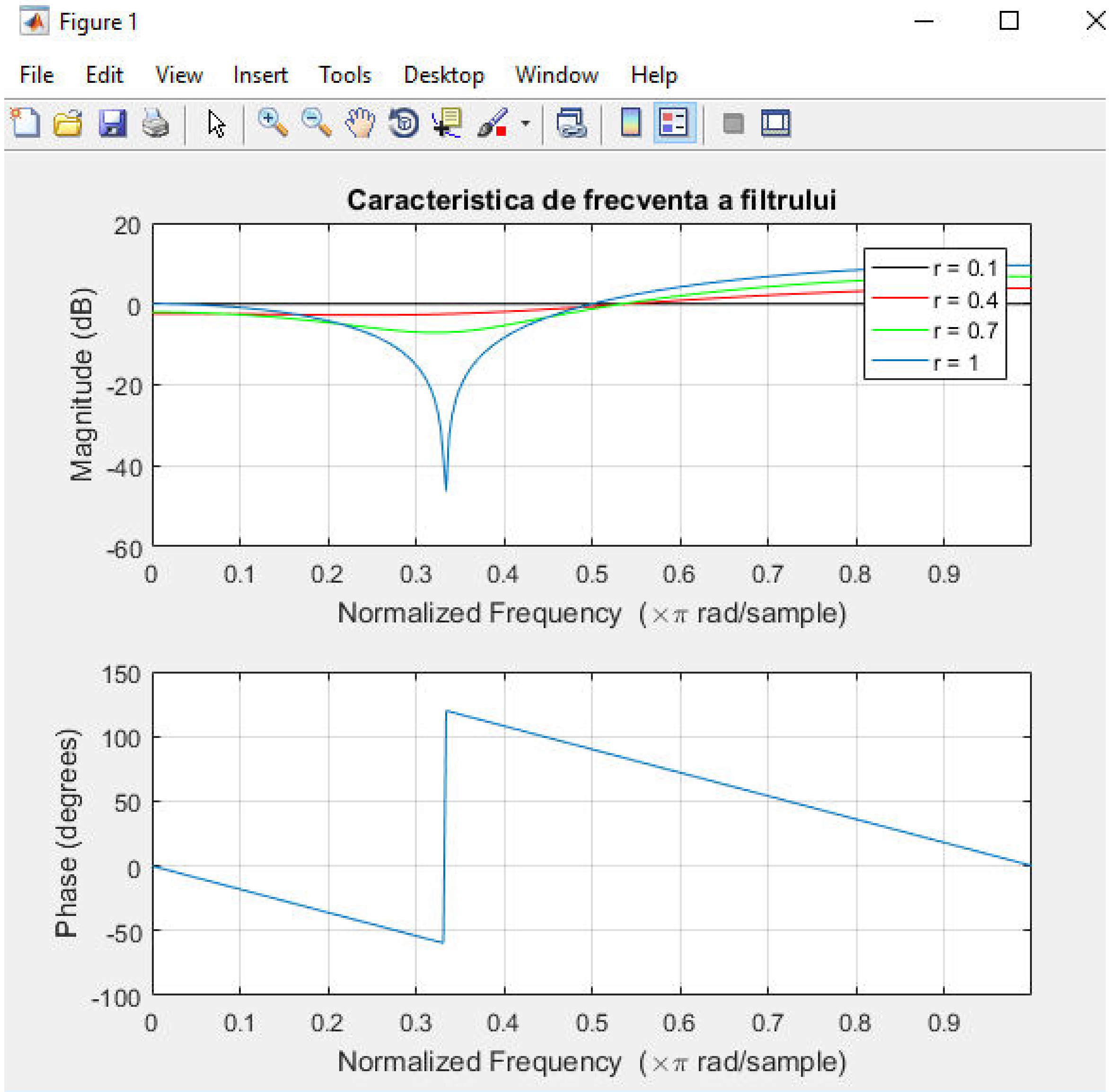


Figure 1
File Edit View Insert Tools Desktop Window Help
Caracteristica de frecventa a filtrului
Magnitude (dB)
r = 0.1
r = 0.4
r = 0.7
r = 1
20
0
-20
-40
-60
0 0.1 0.2 0.3 0.4 0.5 0.6 0.7 0.8 0.9
Normalized Frequency (×π rad/sample)
Phase (degrees)
150
100
50
0
-50
-100
0 0.1 0.2 0.3 0.4 0.5 0.6 0.7 0.8 0.9
Normalized Frequency (×π rad/sample)

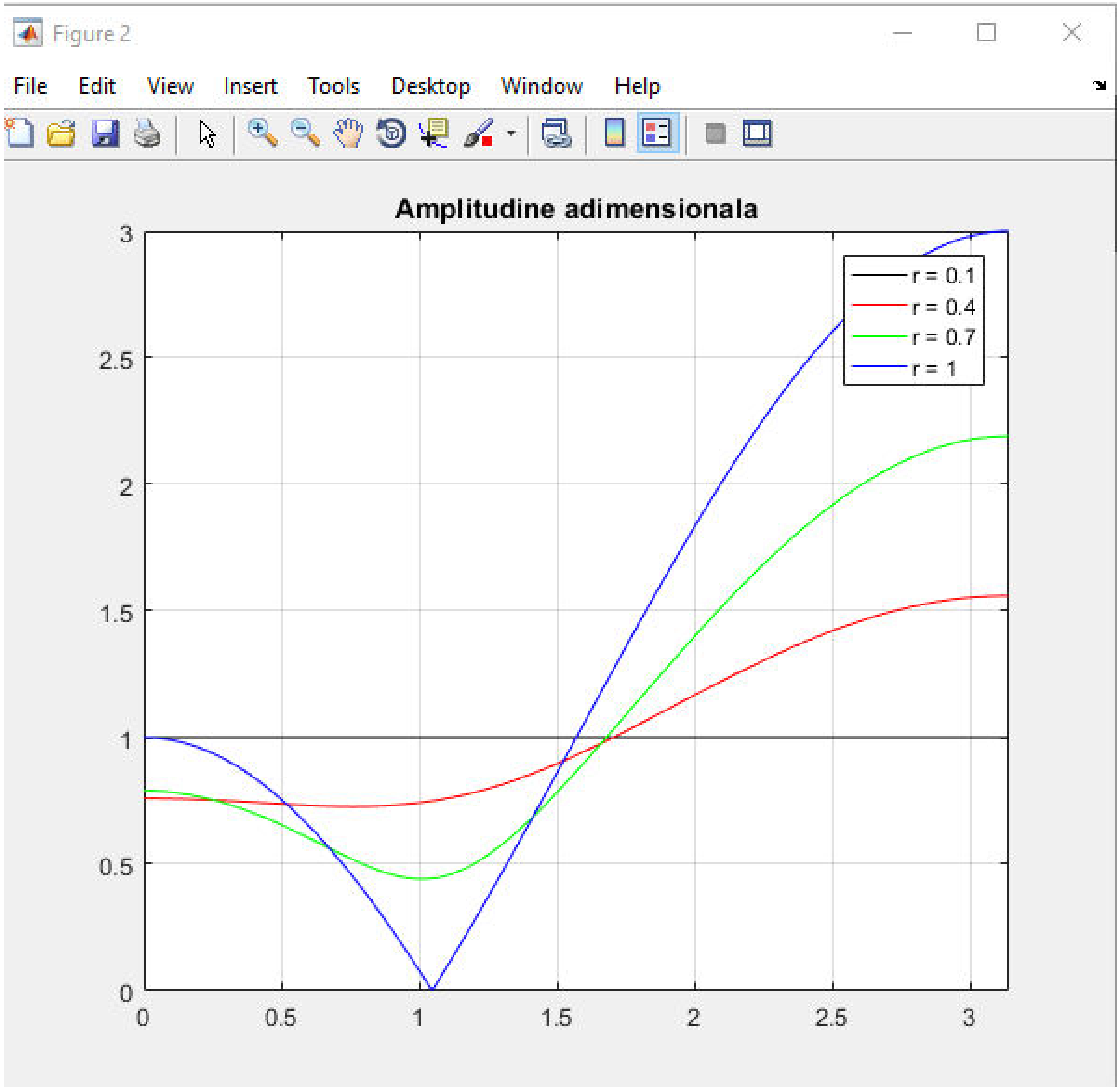


Figure 2
File
Edit
View
Insert
Tools
Desktop
Window
Help
Amplitudine adimensionala
r = 0.1
r = 0.4
r = 0.7
r = 1
0
0.5
1
1.5
2
2.5
3

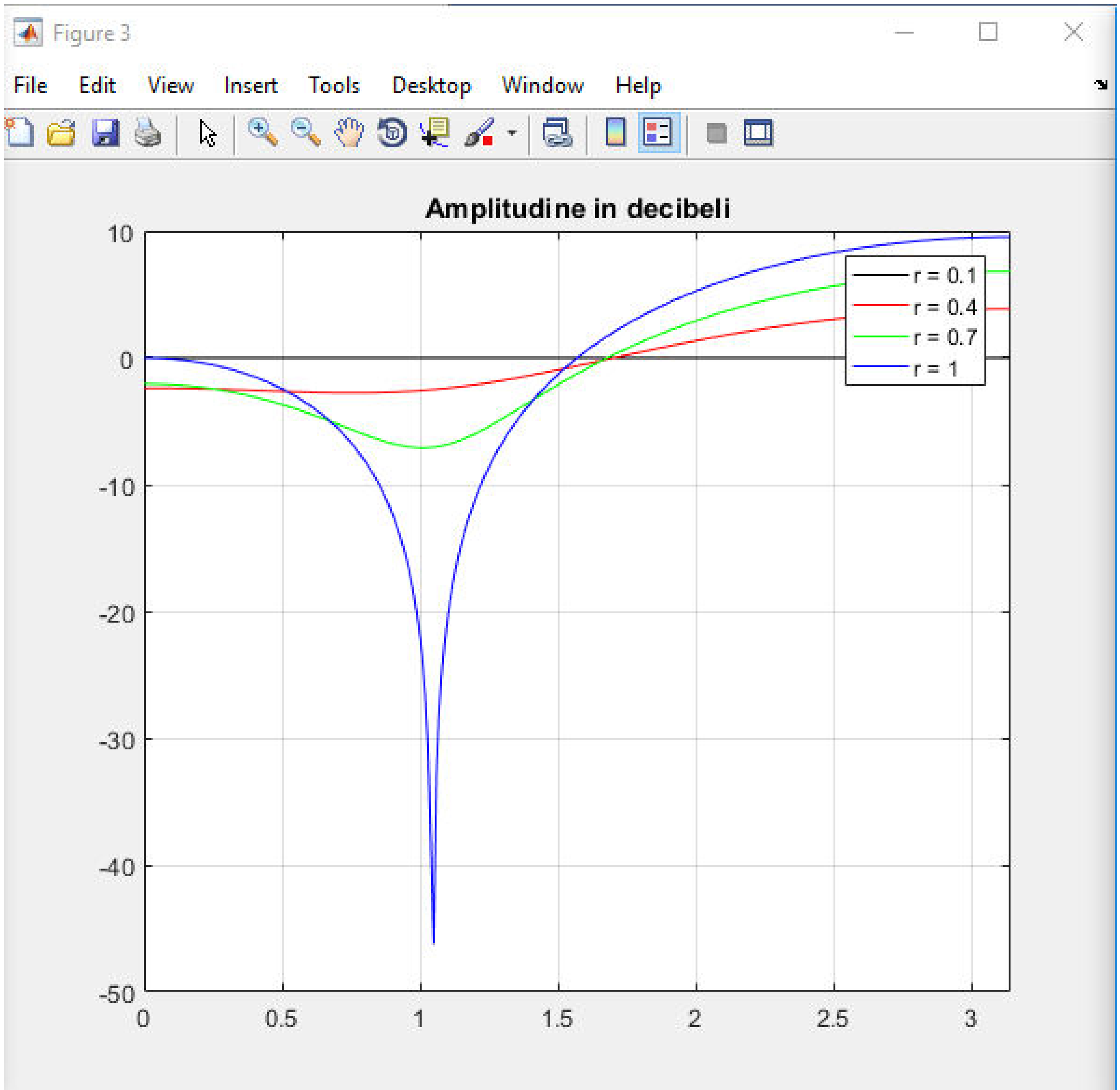


Figure 3
File Edit View Insert Tools Desktop Window Help
Amplitudine in decibeli
10
0
-10
-20
-30
-40
-50
0
0.5
1
1.5
2
2.5
3
r = 0.1
r = 0.4
r = 0.7
r = 1

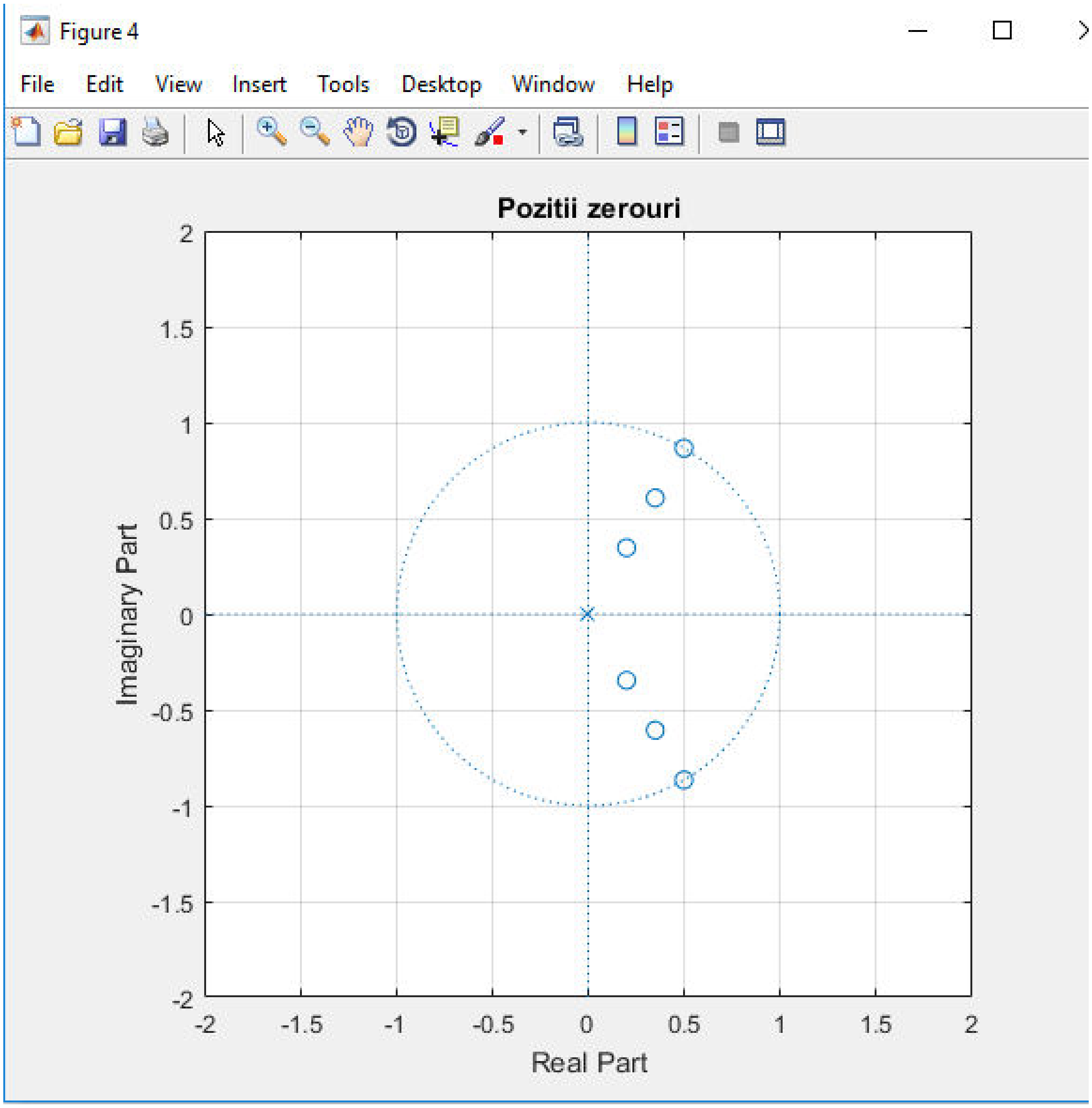


Figure 4
File
Edit
View
Insert
Tools
Desktop
Window
Help
Pozitii zerouri
Imaginary Part
Real Part
2
1.5
1
0.5
0
-0.5
-1
-1.5
-2
-2
-1.5
-1
-0.5
0
0.5
1
1.5
2

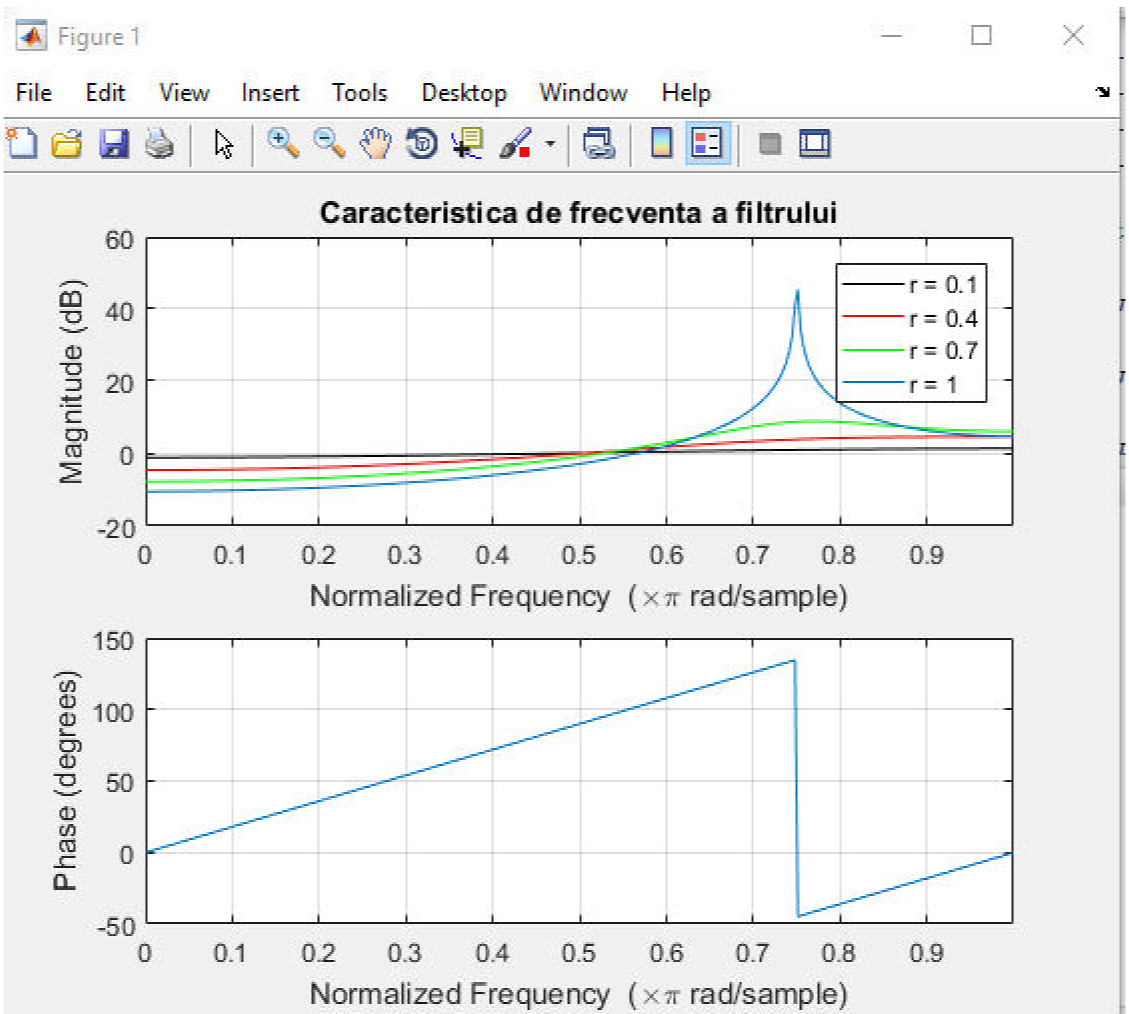
TEMA 3

La acest exercitiu diferenta consta in oglindirea fata de abscisa a graficelor obtinute in cadrul filtrului de ordin 2.

Filtrul are coeficienti reali, asadar este suficienta reprezentarea pe banda [0,pi].

Sistemul va avea 2 perechi de poli complex conjugati.

Graficele obtinute pentru teta=(3*pi)/4 pentru filtrul autoregresiv, sunt ilustrare mai jos.



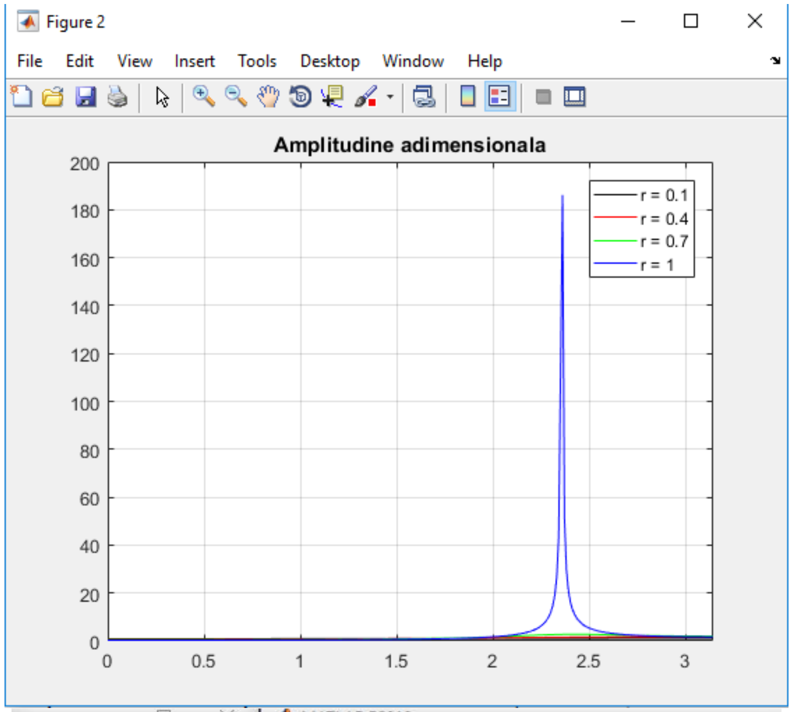


Figure 2
File Edit View Insert Tools Desktop Window Help
Amplitudine adimensionala
r = 0.1
r = 0.4
r = 0.7
r = 1
200
180
160
140
120
100
80
60
40
20
0
0 0.5 1 1.5 2 2.5 3

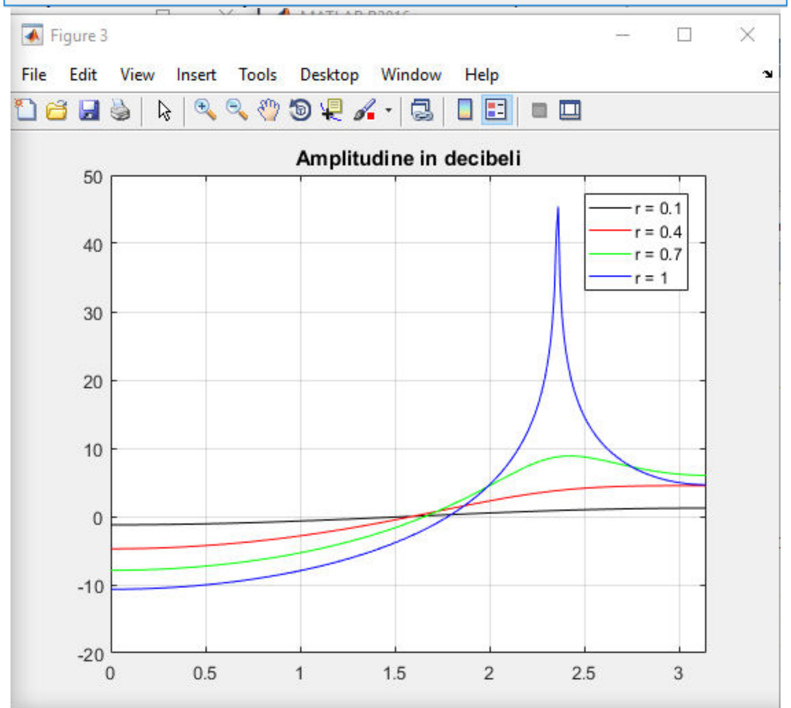
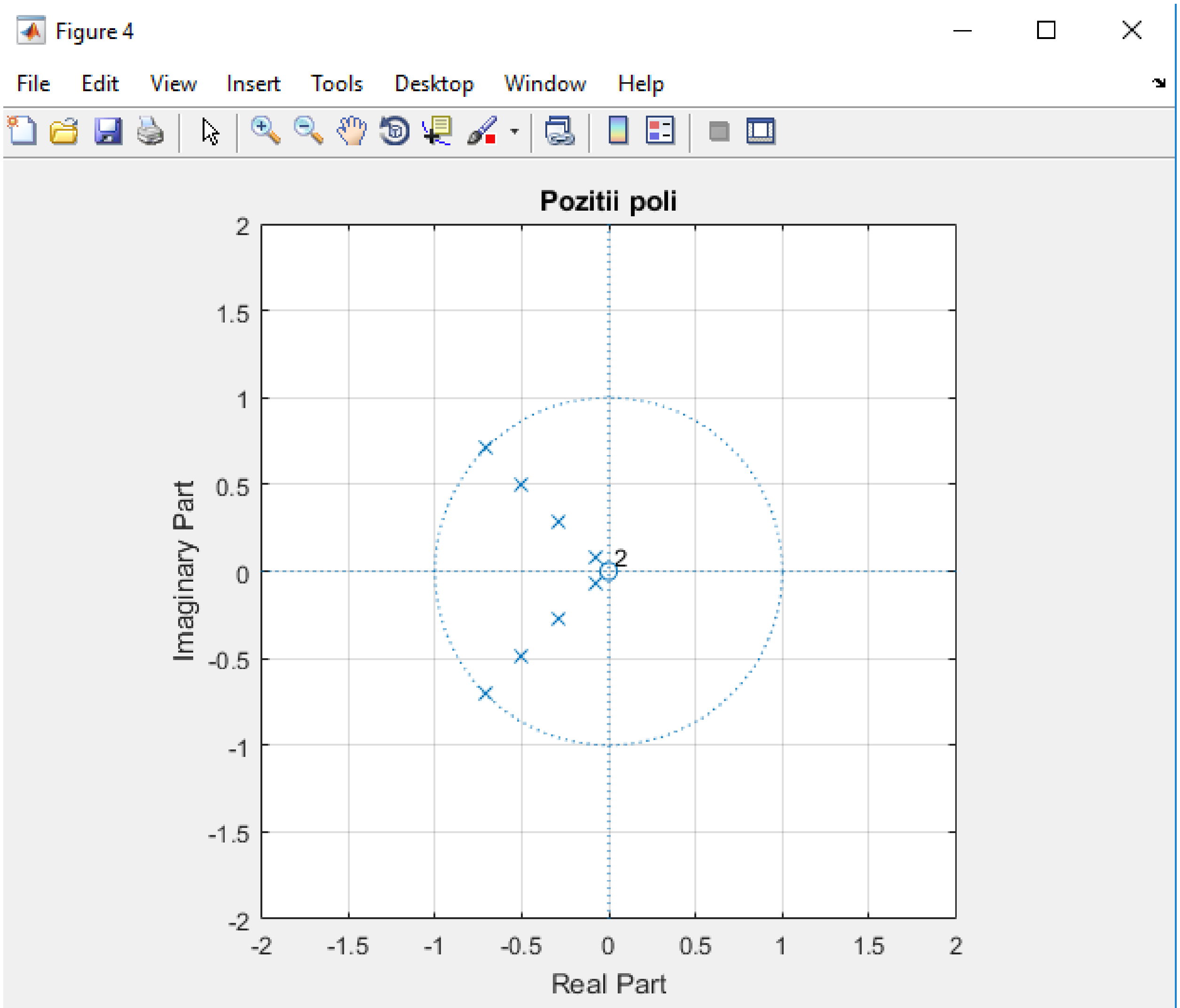


Figure 3
File Edit View Insert Tools Desktop Window Help
Amplitudine in decibeli
r = 0.1
r = 0.4
r = 0.7
r = 1
50
40
30
20
10
0
-10
-20
0 0.5 1 1.5 2 2.5 3



Pentru teta = pi/3 se vor obtine:

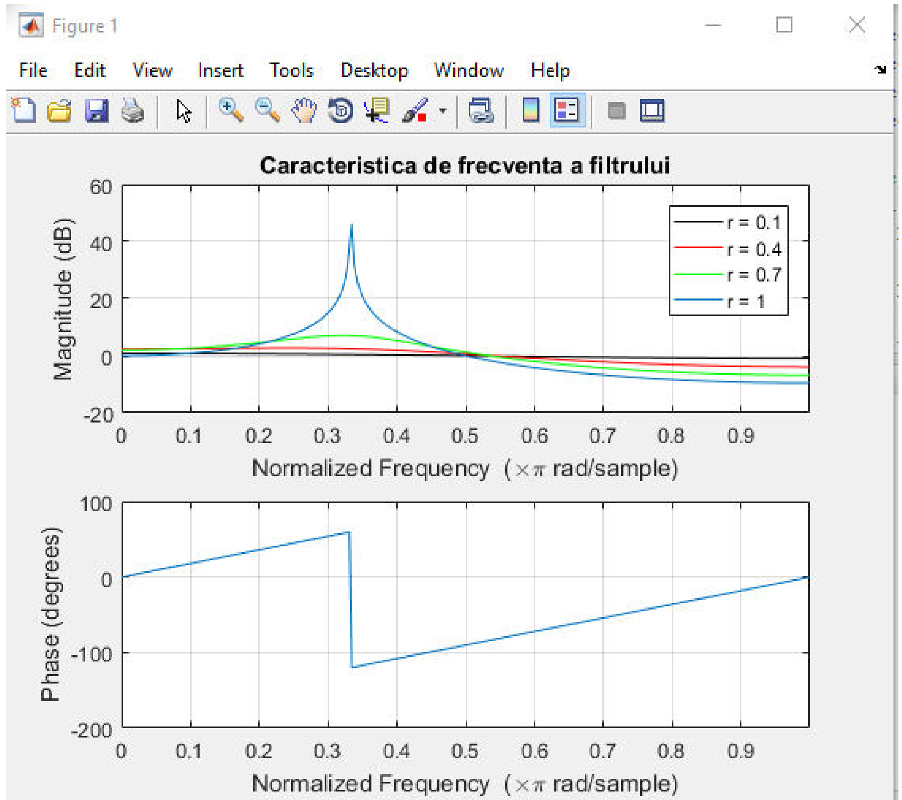


Figure 1
File Edit View Insert Tools Desktop Window Help
Caracteristica de frecventa a filtrului
Magnitude (dB)
r = 0.1
r = 0.4
r = 0.7
r = 1
Normalized Frequency (×π rad/sample)
Phase (degrees)
Normalized Frequency (×π rad/sample)

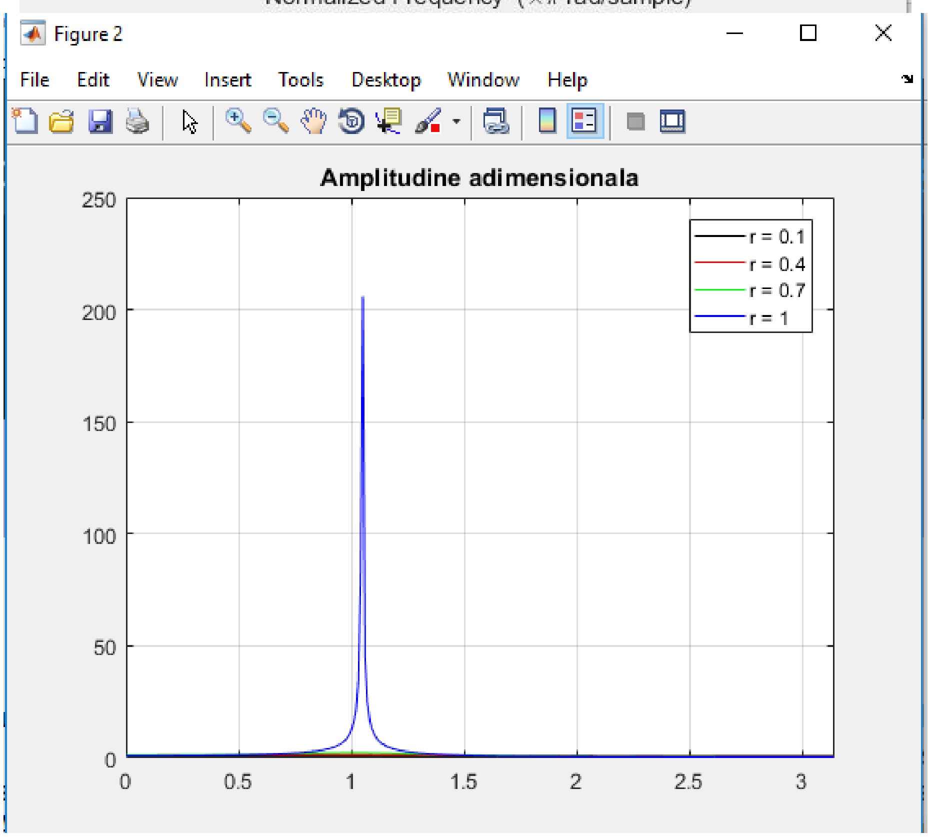


Figure 2
File Edit View Insert Tools Desktop Window Help
Amplitudine adimensionala
r = 0.1
r = 0.4
r = 0.7
r = 1

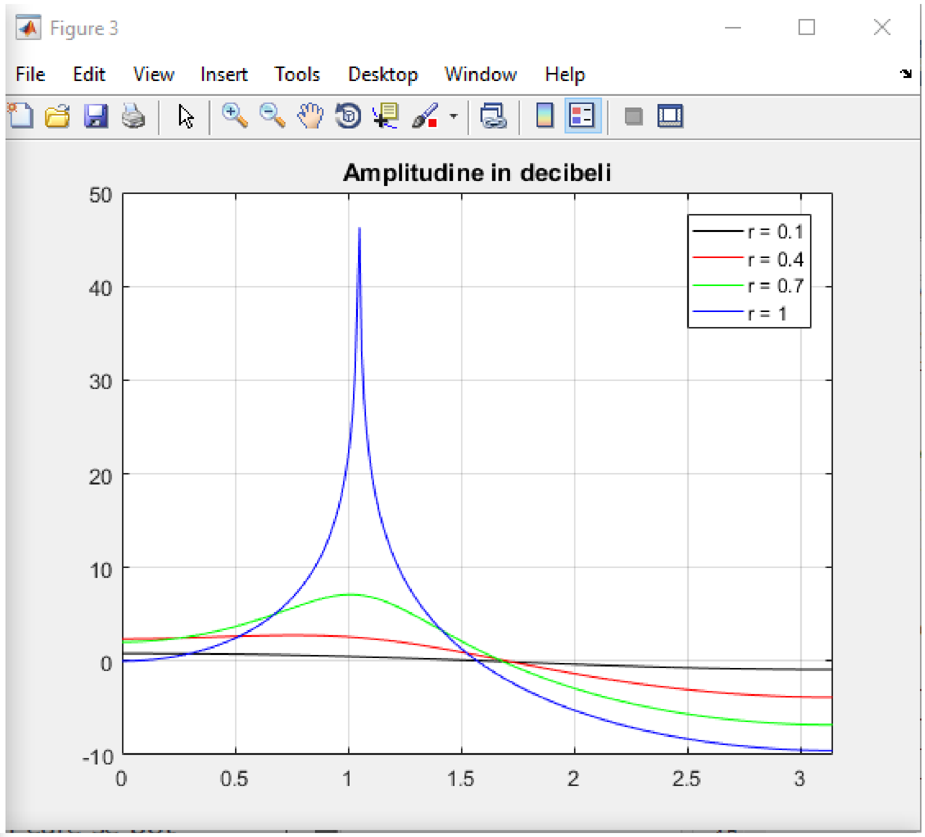


Figure 3
File Edit View Insert Tools Desktop Window Help
Amplitudine in decibeli
r = 0.1
r = 0.4
r = 0.7
r = 1
50
40
30
20
10
0
-10
0 0.5 1 1.5 2 2.5 3

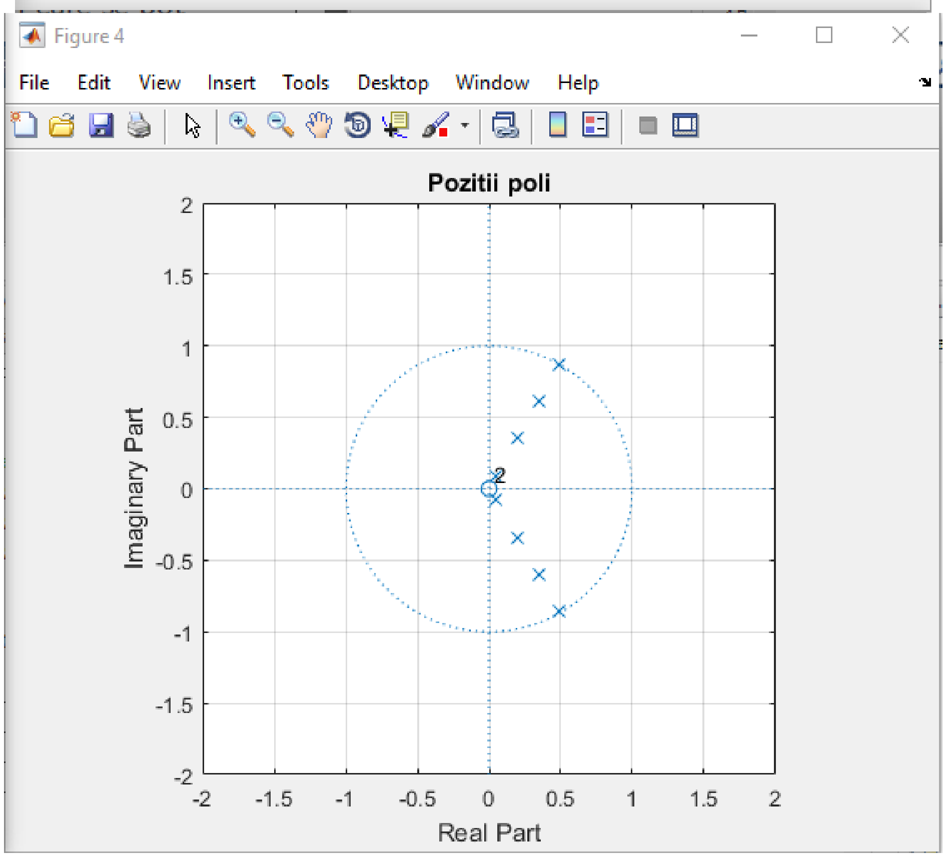
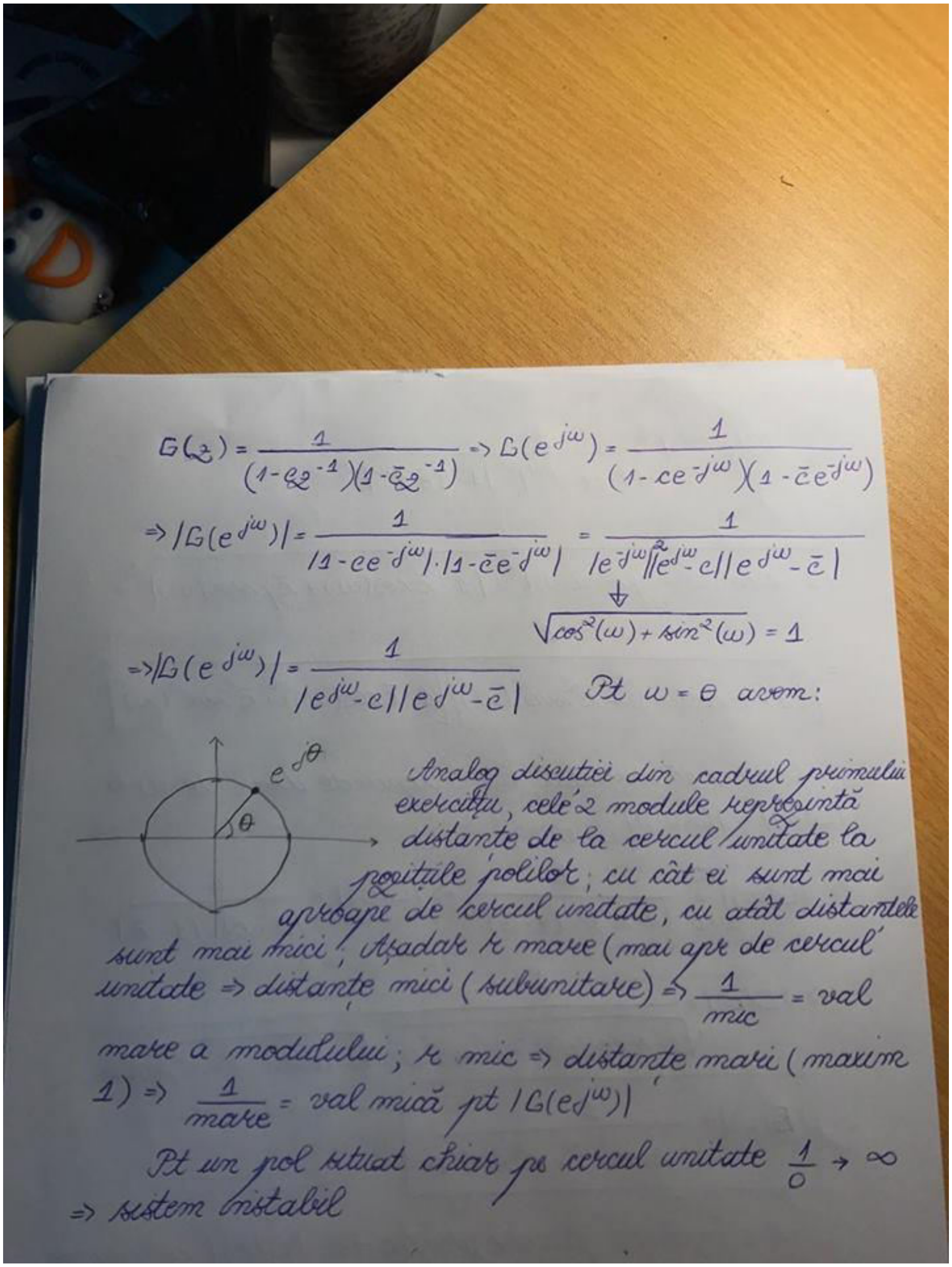


Figure 4
File Edit View Insert Tools Desktop Window Help
Pozitii poli
Imaginary Part
Real Part
2
1.5
1
0.5
0
-0.5
-1
-1.5
-2
-2 -1.5 -1 -0.5 0 0.5 1 1.5 2

Voi explica forma graficelor prin urmatoarele comentarii:



$$G(z) = \frac{1}{(1-cz^{-1})(1-\bar{c}z^{-1})} \Rightarrow G(e^{j\omega}) = \frac{1}{(1-ce^{-j\omega})(1-\bar{c}e^{-j\omega})}$$

$$\Rightarrow |G(e^{j\omega})| = \frac{1}{|1-ce^{-j\omega}|\cdot|1-\bar{c}e^{-j\omega}|} = \frac{1}{|e^{-j\omega}|^2|e^{j\omega}-c||e^{j\omega}-\bar{c}|}$$

$$\Downarrow$$

$$\sqrt{\cos^2(\omega)+\sin^2(\omega)} = 1$$

$$\Rightarrow |G(e^{j\omega})| = \frac{1}{|e^{j\omega}-c||e^{j\omega}-\bar{c}|}$$

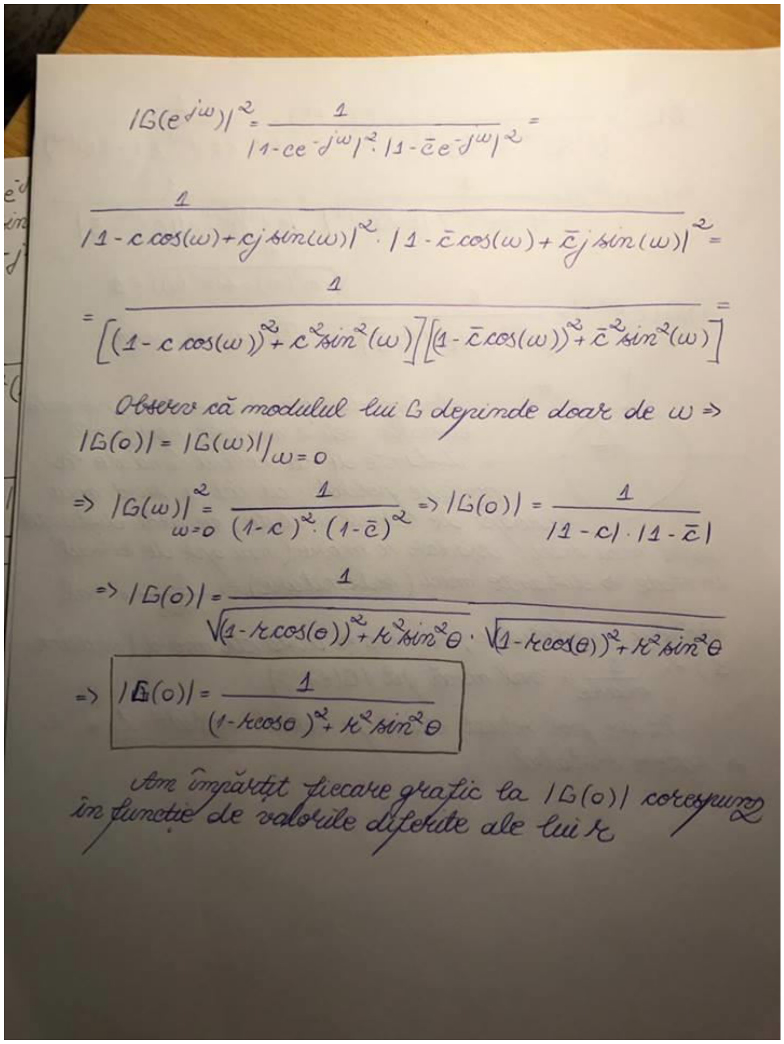
Pt $\omega = \theta$ avem:

Analog discuției din cadrul primului exercițiu, cele 2 module ~~reprezintă~~ reprezintă distanțe de la cercul unitate la pozițiile polilor; cu cât ei sunt mai aproape de cercul unitate, cu atât distanțele sunt mai mici. Așadar r mare (mai apr de cercul unitate $\Rightarrow$ distanțe mici (subunitare) $\Rightarrow \frac{1}{mic}$ = val mare a modulului; r mic $\Rightarrow$ distanțe mari (maxim 1) $\Rightarrow \frac{1}{mare}$ = val mică pt $|G(e^{j\omega})|$

Pt un pol situat chiar pe cercul unitate $\frac{1}{0} \to \infty$ $\Rightarrow$ sistem instabil

Subpunctul b

Atasez mai intai urmatoarea demonstratie:



$$|G(e^{j\omega})|^2 = \frac{1}{|1-ce^{-j\omega}|^2 \cdot |1-\bar{c}e^{-j\omega}|^2} =$$

$$\frac{1}{|1-c\cos(\omega)+cj\sin(\omega)|^2 \cdot |1-\bar{c}\cos(\omega)+\bar{c}j\sin(\omega)|^2} =$$

$$= \frac{1}{\left[(1-c\cos(\omega))^2+c^2\sin^2(\omega)\right]\left[(1-\bar{c}\cos(\omega))^2+\bar{c}^2\sin^2(\omega)\right]} =$$

Observ că modulul lui G depinde doar de ω =>

$|G(0)| = |G(\omega)|_{\omega=0}$

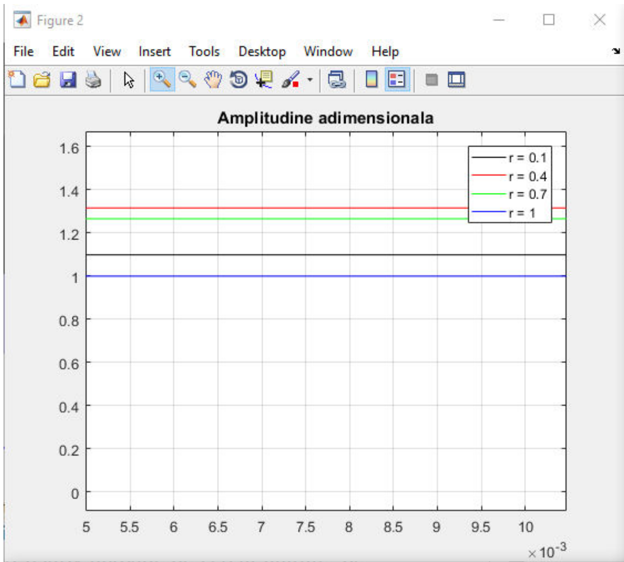
$$\Rightarrow |G(\omega)|^2_{\omega=0} = \frac{1}{(1-c)^2\cdot(1-\bar{c})^2} \Rightarrow |G(0)| = \frac{1}{|1-c|\cdot|1-\bar{c}|}$$

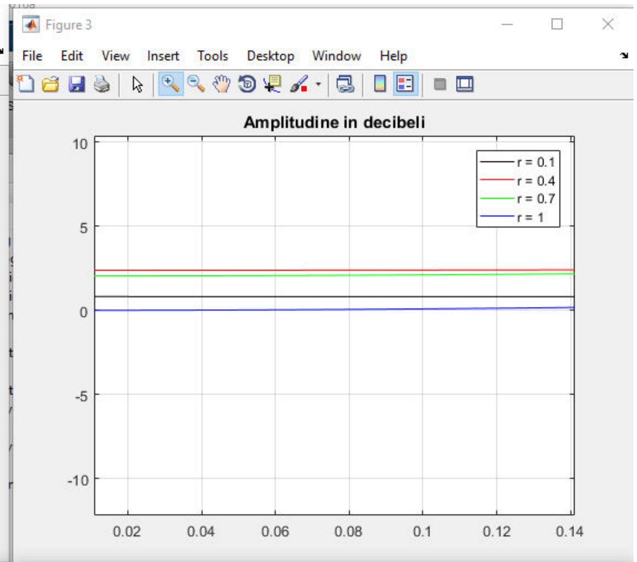
$$\Rightarrow |G(0)| = \frac{1}{\sqrt{(1-r\cos(\theta))^2+r^2\sin^2\theta}\cdot\sqrt{(1-r\cos(\theta))^2+r^2\sin^2\theta}}$$

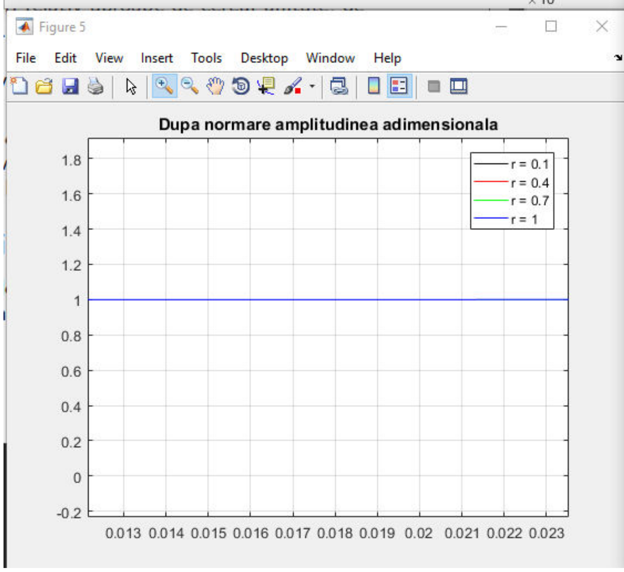
$$\Rightarrow \boxed{|G(0)| = \frac{1}{(1-r\cos\theta)^2+r^2\sin^2\theta}}$$

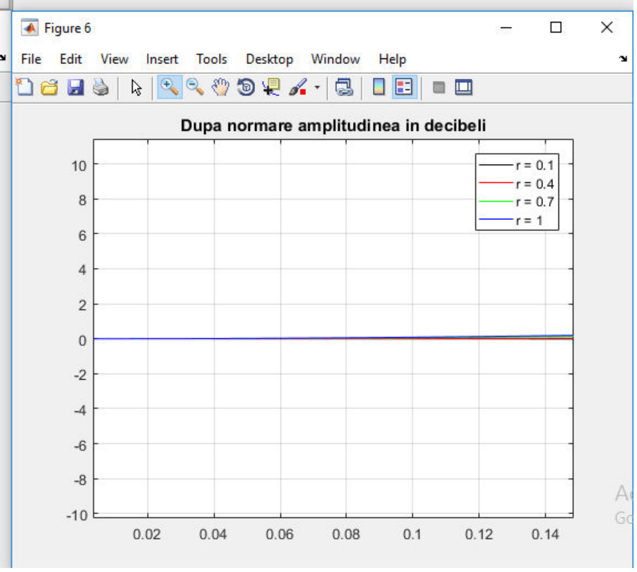
Am împărțit fiecare grafic la $|G(0)|$ corespunz în funcție de valorile diferite ale lui r

Impartind fiecare grafic la corespunzatorul |G(0)|, obtin toate amplitudinile adimensionale in w = 0 egale cu 1, respective 0 in dB. Pentru exemplificare, am marit urmatoarele portiuni din grafice:









Faptul ca toate cele 4 grafice au aceeasi amplificare initiala ma face sa observ mai usor diferentele dintre ele.

De asemenea, si valorile de maxim in w = teta se modifica, deoarece intreg filtrul este impartit la aceasta valoare. Modificarile nu sunt radicale, deoarece valorile prin care am impartit sunt relative apropiate de 1, de aceea nu am mai adaugat si graficele in intregime de dupa normare, ci am insistat pe diferentele din punctul w = 0, asa cum s-a precizat in cerinta exercitiului

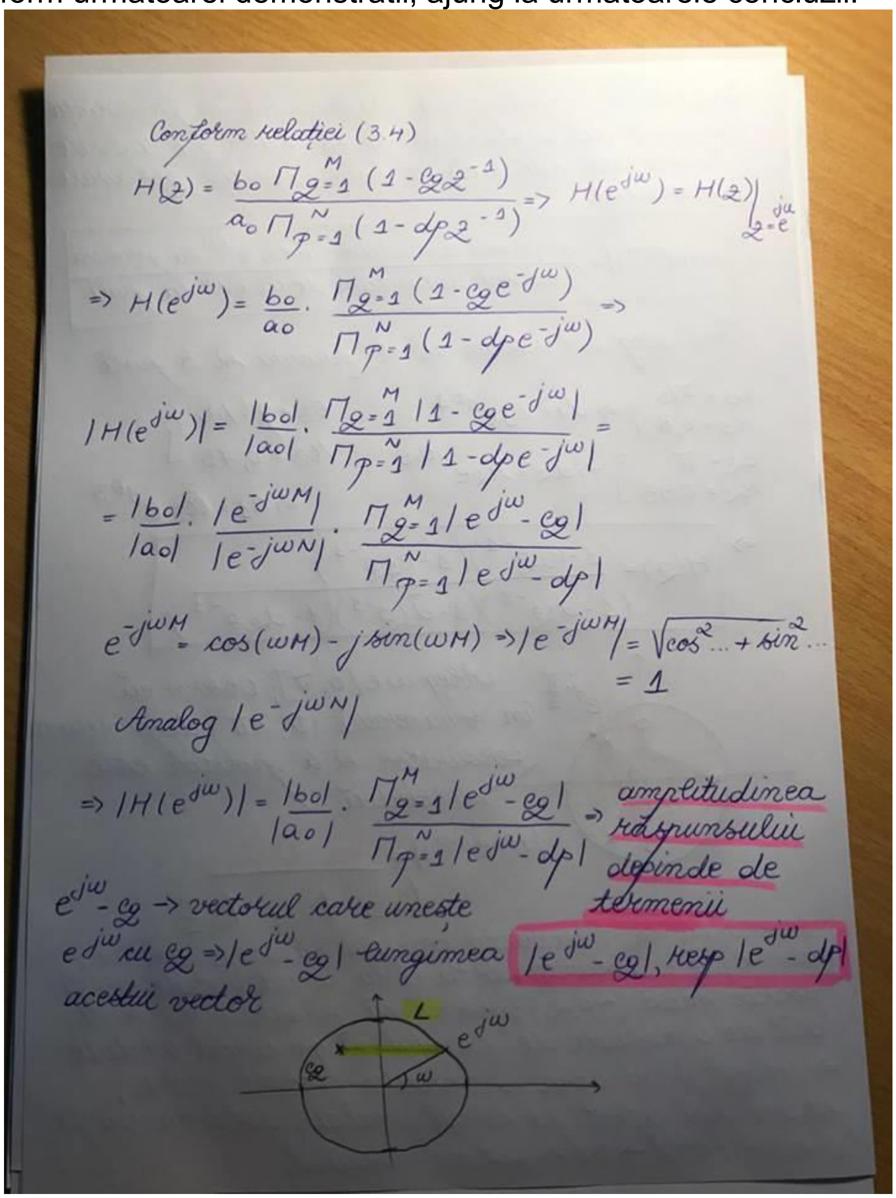
TEMA 4

Pentru aceasta tema, am ales polii si zerourile sistemului astfel incat acesta sa fie stabil si sa aiba coeficienti reali. In urma calculelor, am ajuns la urmatoarele valori ale polilor, respectiv zerourilor.

- Poli : d1 = r1*exp(j*teta1) si conjugatul sau si d2 = r2*exp(j*teta2)
- Zerouri: c1 = r3 * exp(j*teta3) si conjugatul sau

r1 = 0.8; r2 = 0.95; r3 =0.75; teta1 = pi/3; teta2 = pi; teta3 = pi/2

Conform urmatoarei demonstratii, ajung la urmatoarele concluzii:



Conform relației (3.4)

$$H(z) = \frac{b_0 \prod_{q=1}^{M} (1 - c_q z^{-1})}{a_0 \prod_{p=1}^{N} (1 - d_p z^{-1})} \Rightarrow H(e^{j\omega}) = H(z)\Big|_{z=e^{j\omega}}$$

$$\Rightarrow H(e^{j\omega}) = \frac{b_0}{a_0} \cdot \frac{\prod_{q=1}^{M} (1 - c_q e^{-j\omega})}{\prod_{p=1}^{N} (1 - d_p e^{-j\omega})} \Rightarrow$$

$$|H(e^{j\omega})| = \frac{|b_0|}{|a_0|} \cdot \frac{\prod_{q=1}^{M} |1 - c_q e^{-j\omega}|}{\prod_{p=1}^{N} |1 - d_p e^{-j\omega}|} =$$

$$= \frac{|b_0|}{|a_0|} \cdot \frac{|e^{-j\omega M}|}{|e^{-j\omega N}|} \cdot \frac{\prod_{q=1}^{M} |e^{j\omega} - c_q|}{\prod_{p=1}^{N} |e^{j\omega} - d_p|}$$

$$e^{-j\omega M} = \cos(\omega M) - j\sin(\omega M) \Rightarrow |e^{-j\omega M}| = \sqrt{\cos^2\ldots + \sin^2\ldots} = 1$$

Analog $|e^{-j\omega N}|$

$$\Rightarrow |H(e^{j\omega})| = \frac{|b_0|}{|a_0|} \cdot \frac{\prod_{q=1}^{M} |e^{j\omega} - c_q|}{\prod_{p=1}^{N} |e^{j\omega} - d_p|} \Rightarrow$$ amplitudinea răspunsului depinde de termenii $\boxed{|e^{j\omega} - c_q|, \text{ resp } |e^{j\omega} - d_p|}$

$e^{j\omega} - c_q \rightarrow$ vectorul care unește $e^{j\omega}$ cu $c_q \Rightarrow |e^{j\omega} - c_q|$ lungimea acestui vector

⇒ Așadar, amplitudinea răspunsului în frecvență depinde de distanțele de la $e^{j\omega}$ (pt diferite valori ale lui ω) la polii respectiv zerourile sistemului

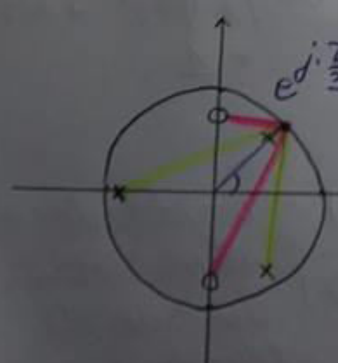
$$\boxed{|H(e^{j\omega})| = \frac{\text{produsul distanțelor de la } e^{j\omega} \text{ la zerouri}}{\text{produsul distanțelor de la } e^{j\omega} \text{ la poli}}}$$

Îmi aleg un sistem cu 2 zerouri și 3 poli

$$\left.\begin{array}{l}\theta_1 = \pi/3 \\ r_1 = 0{,}8\end{array}\right\} \Rightarrow d_1 = r_1 e^{j\theta_1} \qquad \left.\begin{array}{l}\theta_3 = \pi/2 \\ r_3 = 0{,}75\end{array}\right\}$$

$$\left.\begin{array}{l}\theta_2 = \pi \\ r_2 = 0{,}95\end{array}\right\} \Rightarrow d_2 = r_2 e^{j\theta_2} \qquad \Rightarrow c_1 = \theta_3 \cdot e^{j\theta_3}$$

$$\Rightarrow \boxed{H(z) = \frac{(1 - c_1 z^{-1})(1 - \bar{c}_1 z^{-1})}{(1 - d_1 z^{-1})(1 - \bar{d}_1 z^{-1})(1 - d_2 z^{-1})}}$$



Aleg $\omega \in [0, \pi]$; observ că în semicercul $(\pi, 2\pi)$ dispunerea zerourilor și a polilor este simetrică

$$|H(e^{j\omega})| = \frac{\Delta_1 \cdot \Delta_2}{\Delta_3 \cdot \Delta_4 \cdot \Delta_5}$$

Observ că la frecvența corespunzătoare polului, anume $(\frac{\pi}{3})$, distanța de la el la cercul unitate va fi foarte mică ($\sim 0{,}2$); observ că zerourile nu sunt atât de apropiate de punctul de pe cercul unitate $\Rightarrow |H(e^{j\omega})|$ va avea o valoare foarte mare; pt un pol aflat pe cercul unitate distanța va fi $0 \Rightarrow |H(e^{j\omega})| \to \infty \Rightarrow$ sistem instabil

La frecventa corespunzătoare zeroului se observă un fenomen asemănător, doar că de această dată $|H(e^{j\omega})|$ va avea o valoare mică. Un zero pe cercul unitate va produce un $|H(e^{j\omega})| = 0$

Graficele Matlab sunt:

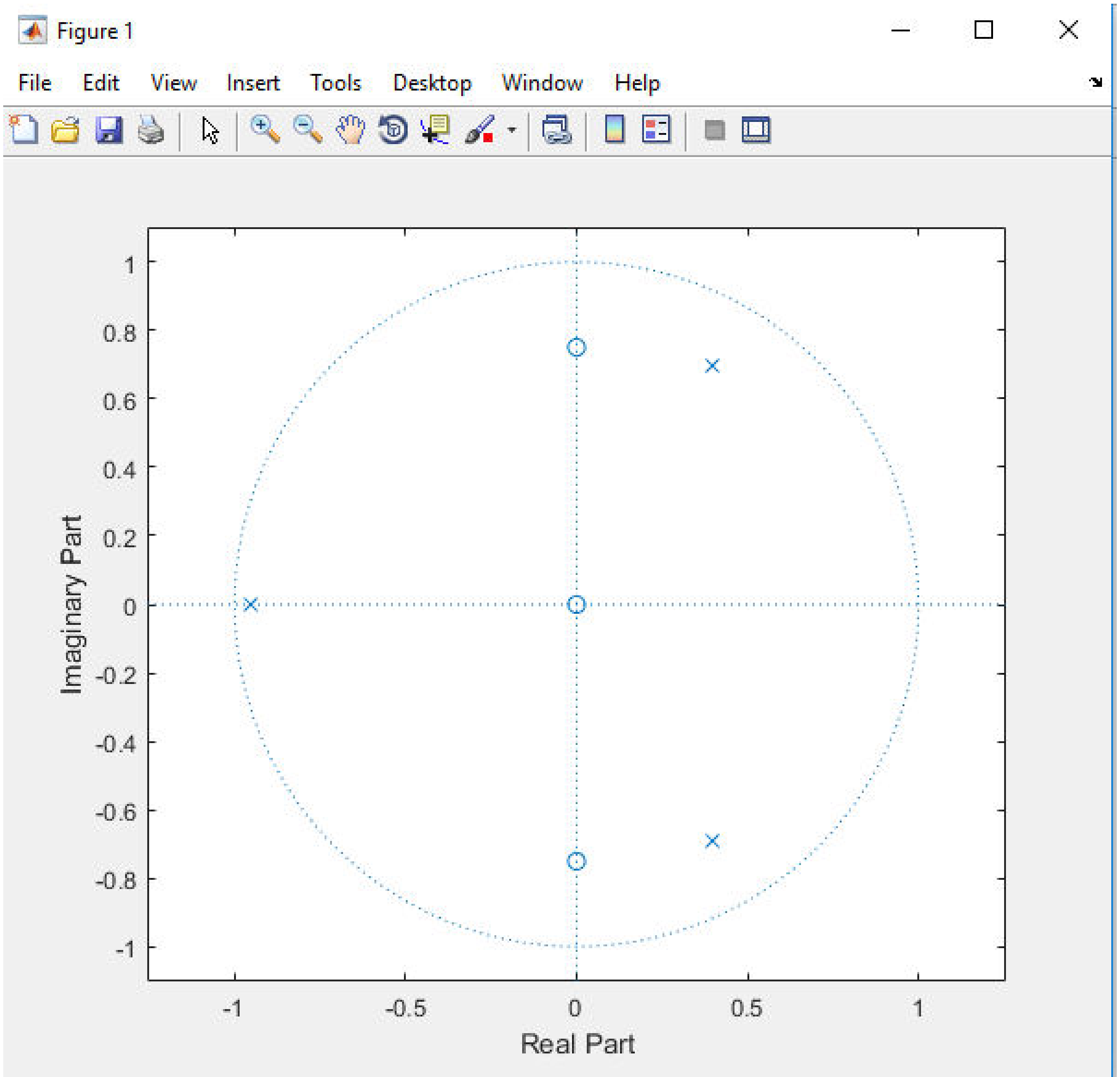


Figure 1
File
Edit
View
Insert
Tools
Desktop
Window
Help
1
0.8
0.6
0.4
0.2
0
-0.2
-0.4
-0.6
-0.8
-1
Imaginary Part
-1
-0.5
0
0.5
1
Real Part

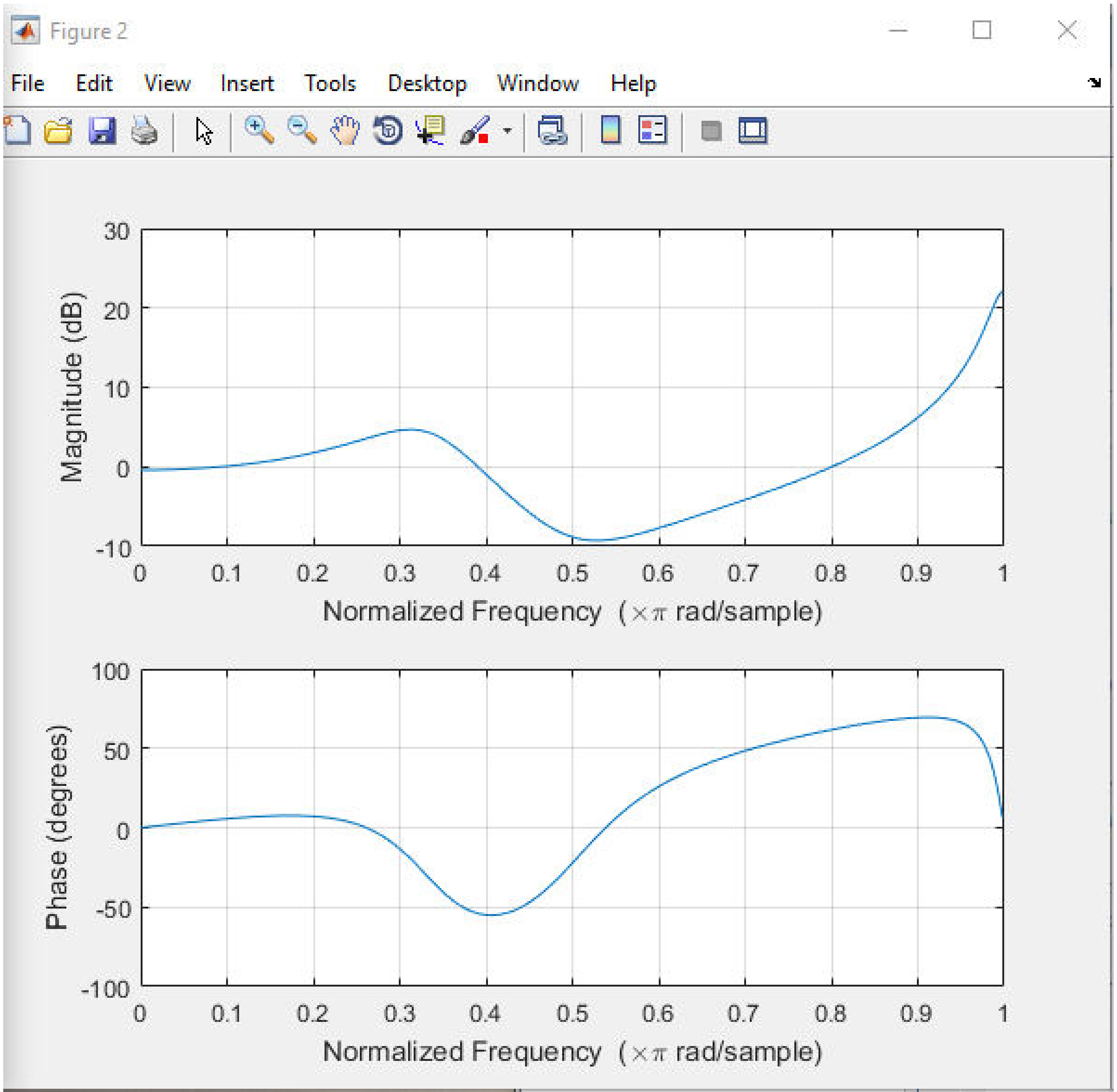
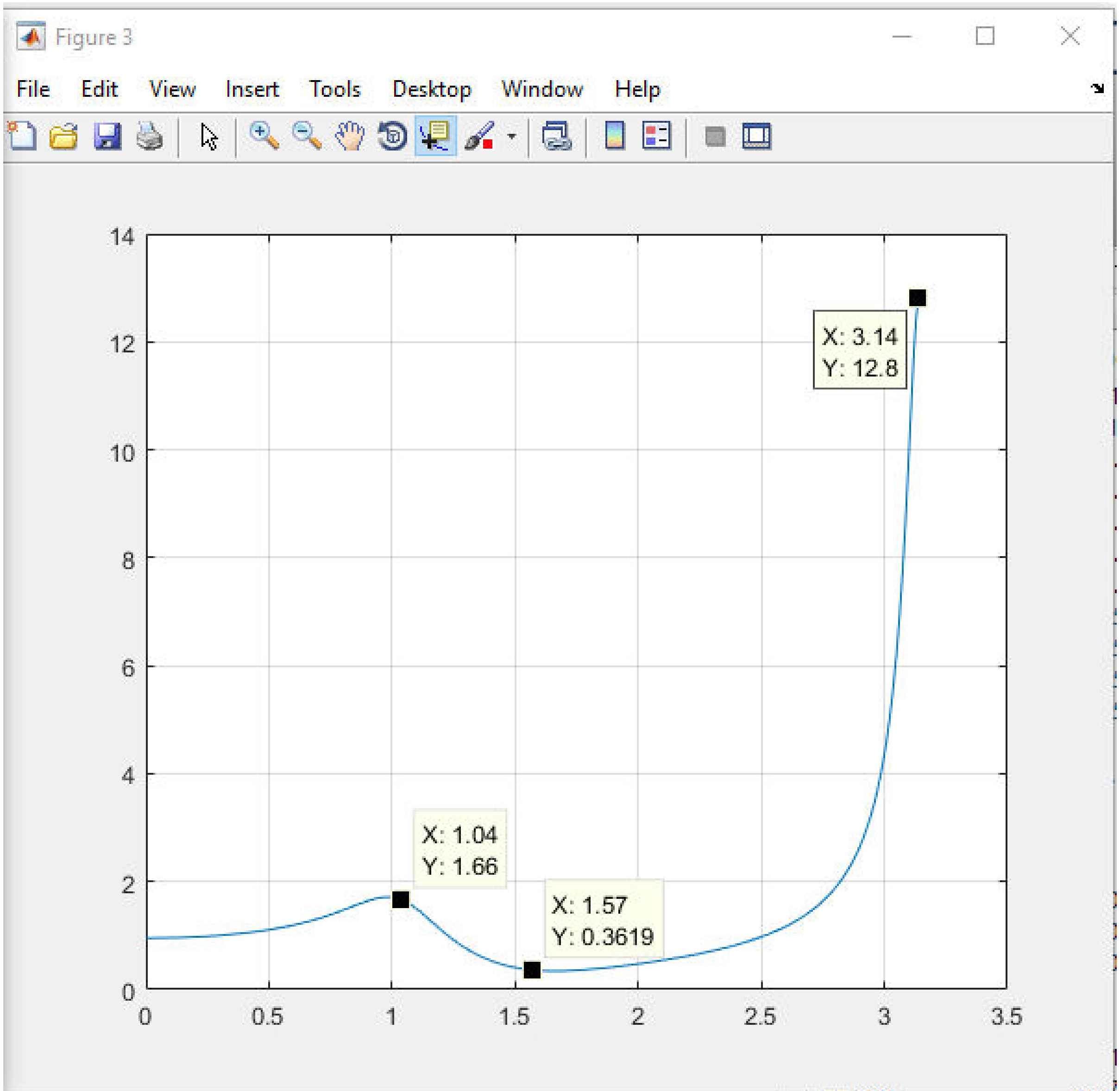


Figure 2
File Edit View Insert Tools Desktop Window Help
Magnitude (dB)
Normalized Frequency (×π rad/sample)
Phase (degrees)
Normalized Frequency (×π rad/sample)



Din graficele MATLAB se observa intr-adevar ca in frecventele corespunzatoare argumentelor polilor avem valori mari ale modulului raspunsului in frecventa, iar in frecventele corespunzatoare argumentelor zerourilor, modulul are valori mici, apropiate de 0, deoarece aceste zerouri au fost alese aproape de cercul unitate.

De asemenea in cazul polului cu modulul 0.95, se observa o crestere brusca a amplitudinii, datorata unei valori foarte apropiate de 1. Mentionez ca un pol pe cercul unitate face modulul sa tinda la infinit, asadar sistemul devine instabil.

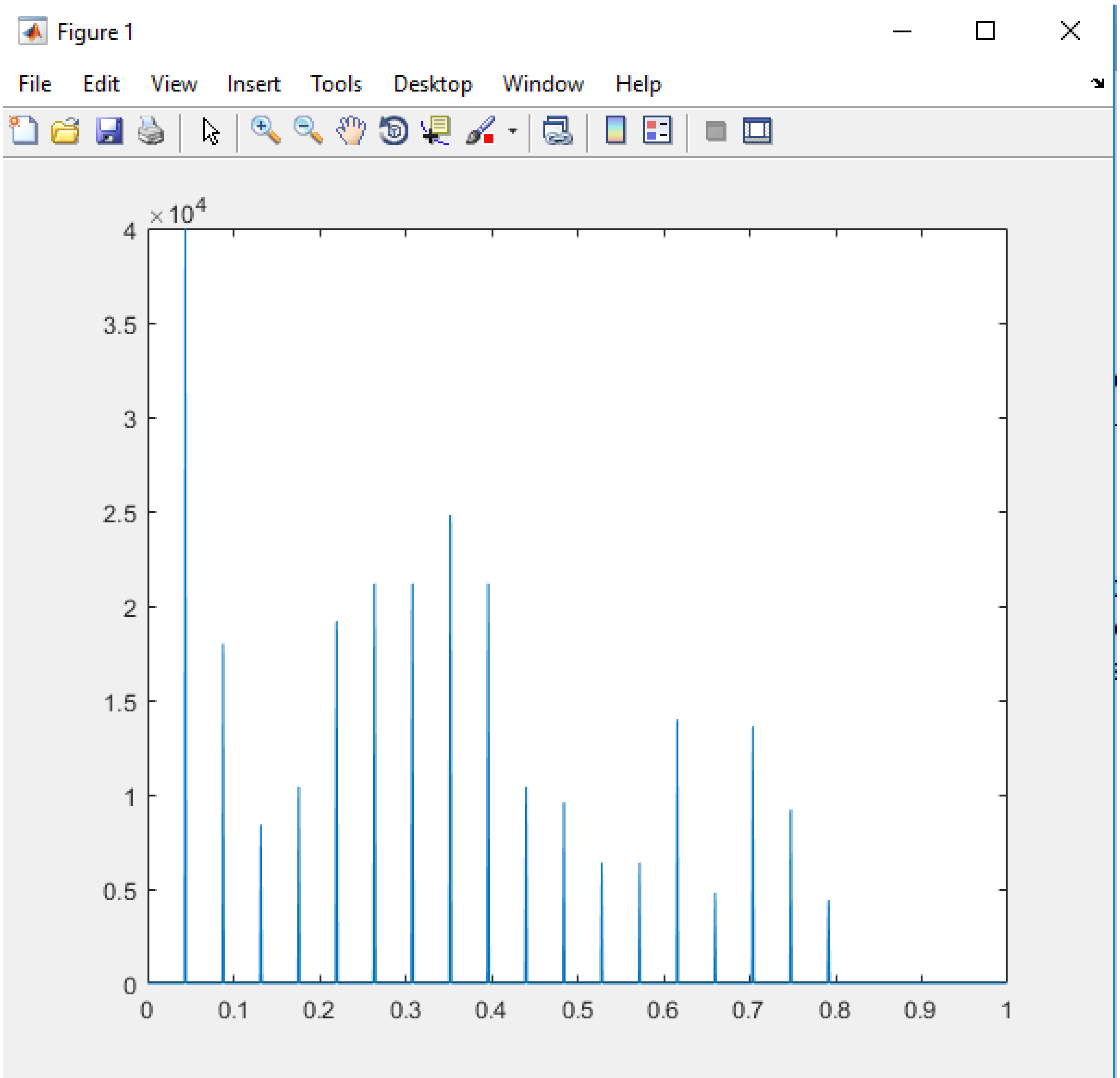
Mentionez ca pi/3 este aproximativ 1.04, pi/2 aprox 1.57, iar pi aprox 3.14.

Figura 2 reprezinta amplitudinea in decibel si frecventa w normalizata.

TEMA 5

Am executat lab3_muzica pentru sunetele predefinite, am obtinut urmatoarele grafice:

1. **VIOARA**



2. VIOLA

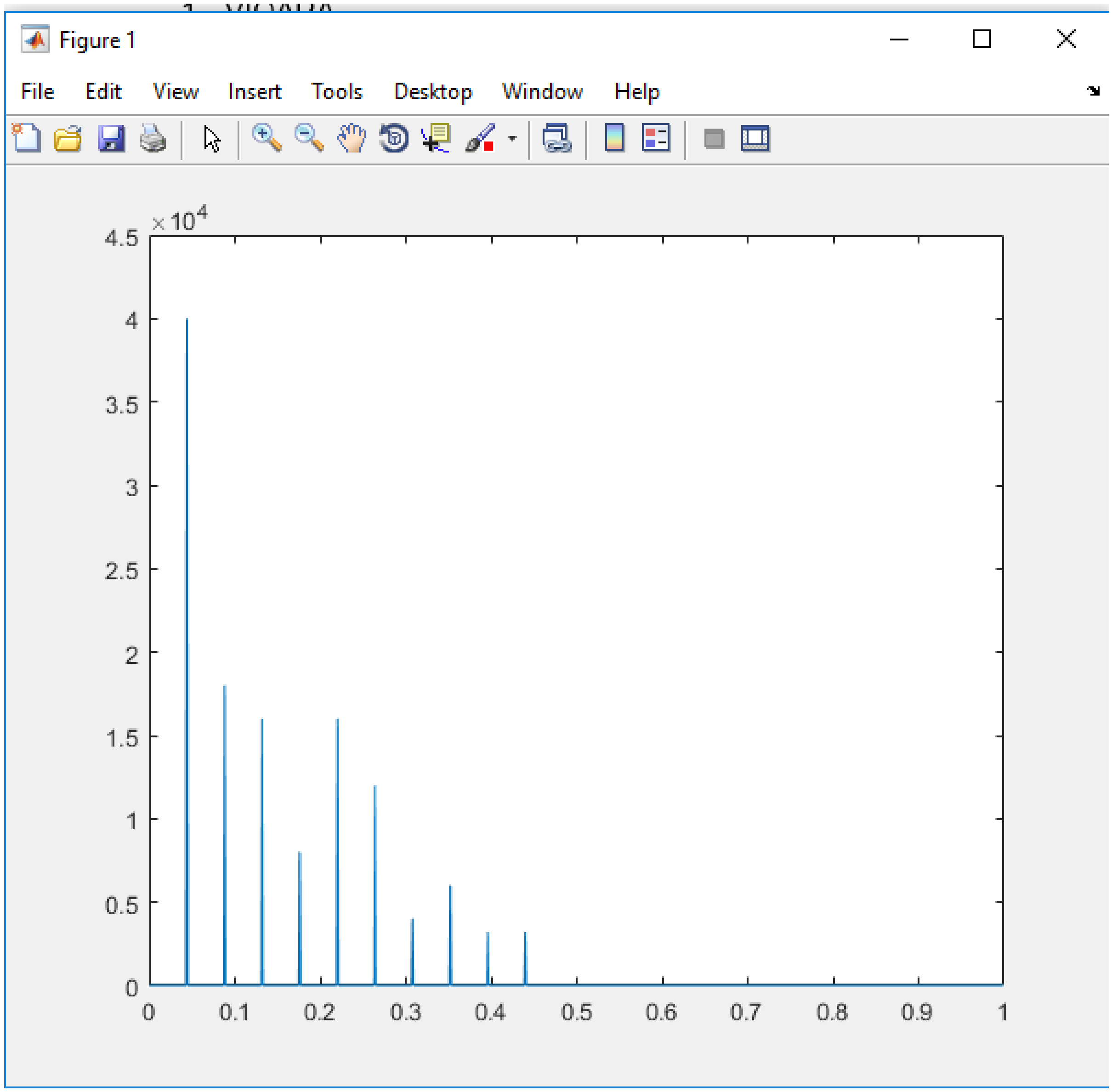


Figure 1
File
Edit
View
Insert
Tools
Desktop
Window
Help
$\times 10^4$
4.5
4
3.5
3
2.5
2
1.5
1
0.5
0
0
0.1
0.2
0.3
0.4
0.5
0.6
0.7
0.8
0.9
1

3. CLARINET

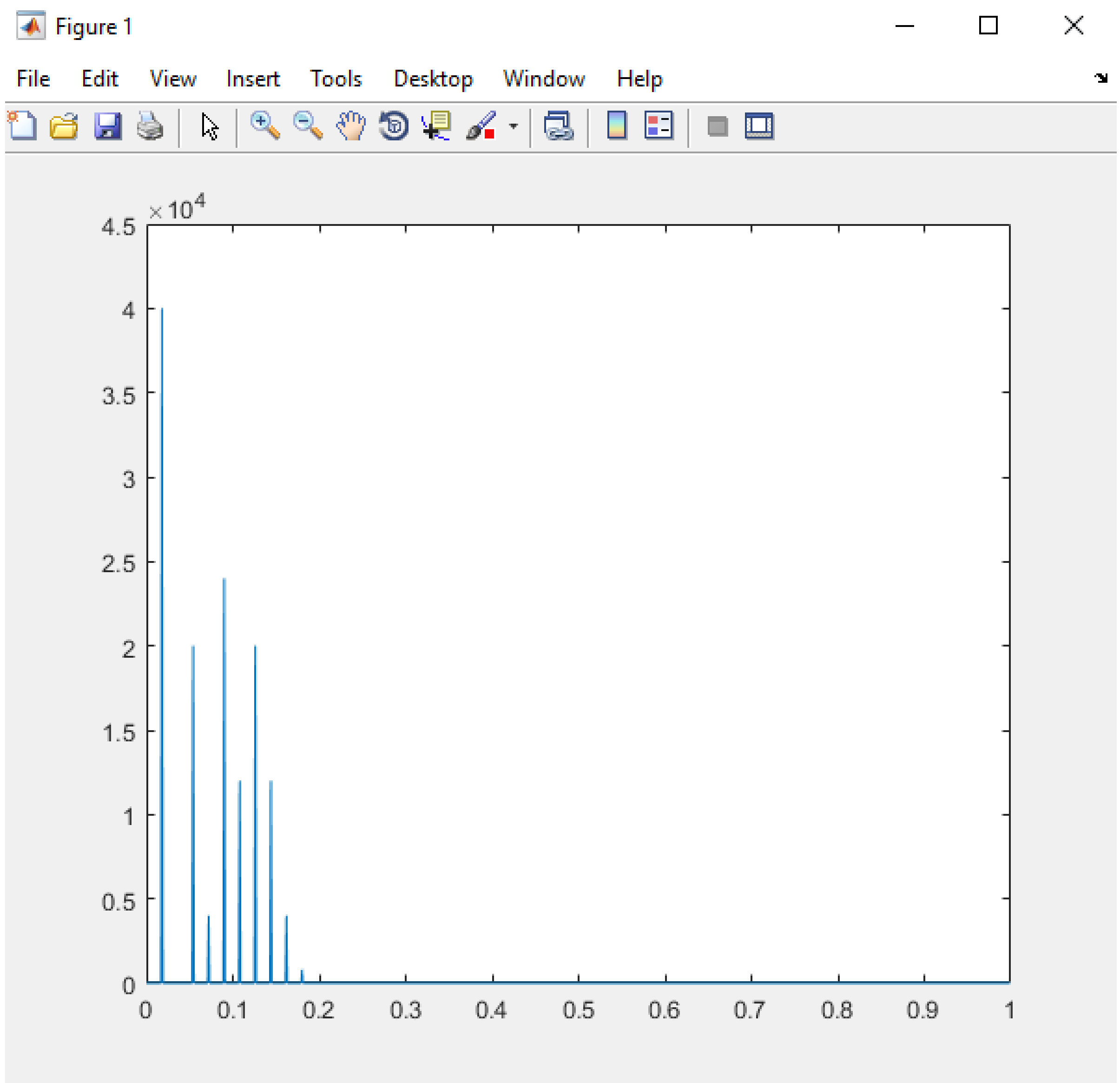
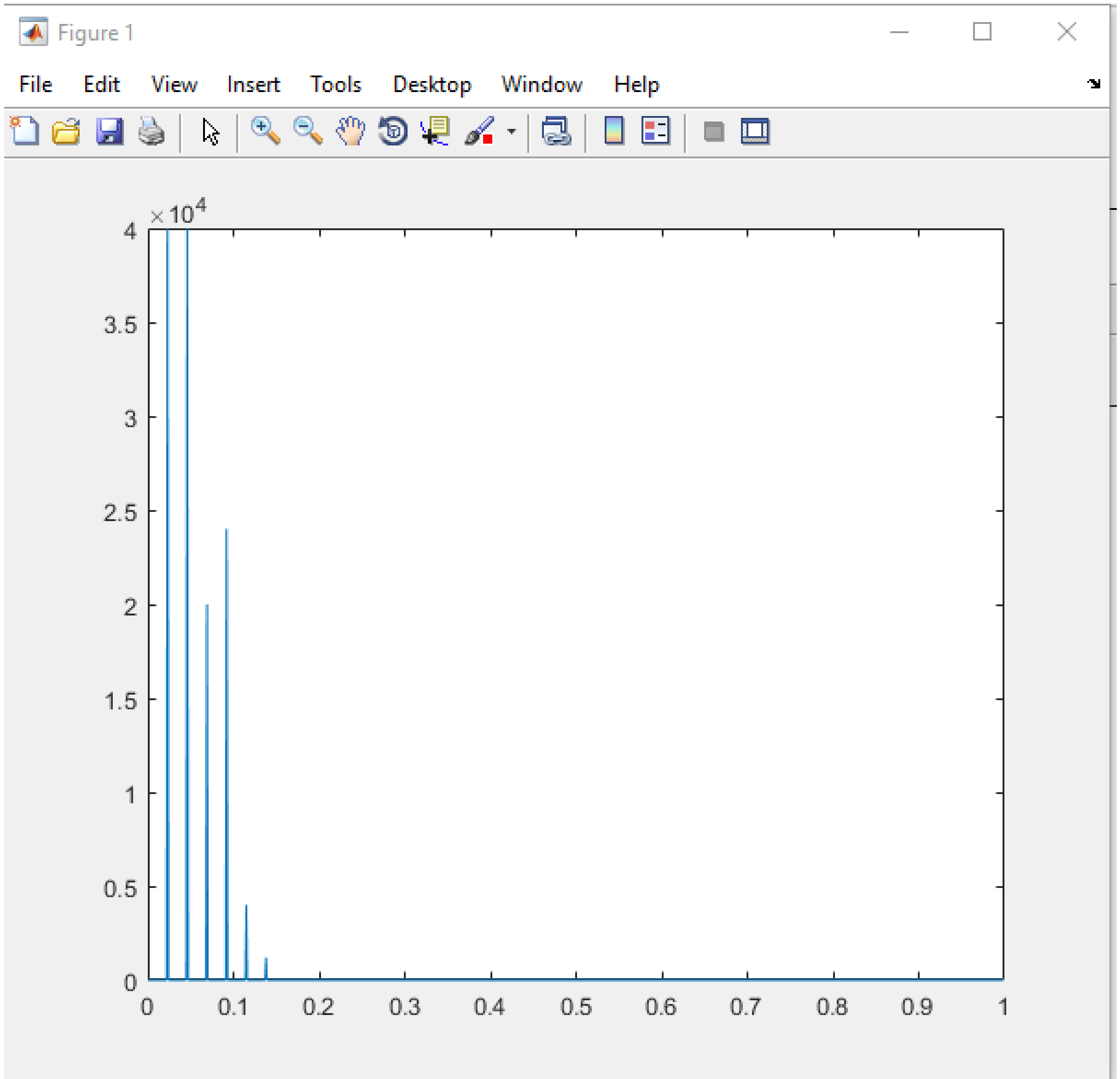


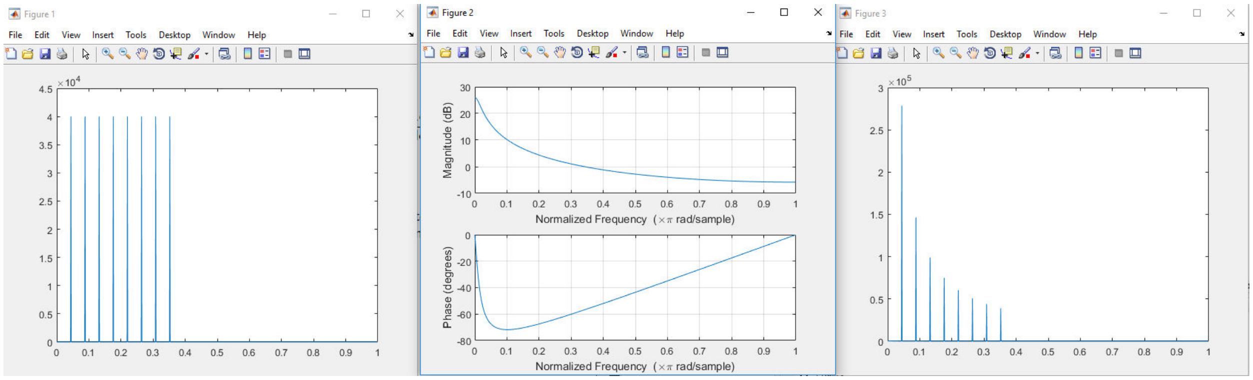
Figure 1
File Edit View Insert Tools Desktop Window Help
× 10^4
4.5
4
3.5
3
2.5
2
1.5
1
0.5
0
0 0.1 0.2 0.3 0.4 0.5 0.6 0.7 0.8 0.9 1

4. TUBA

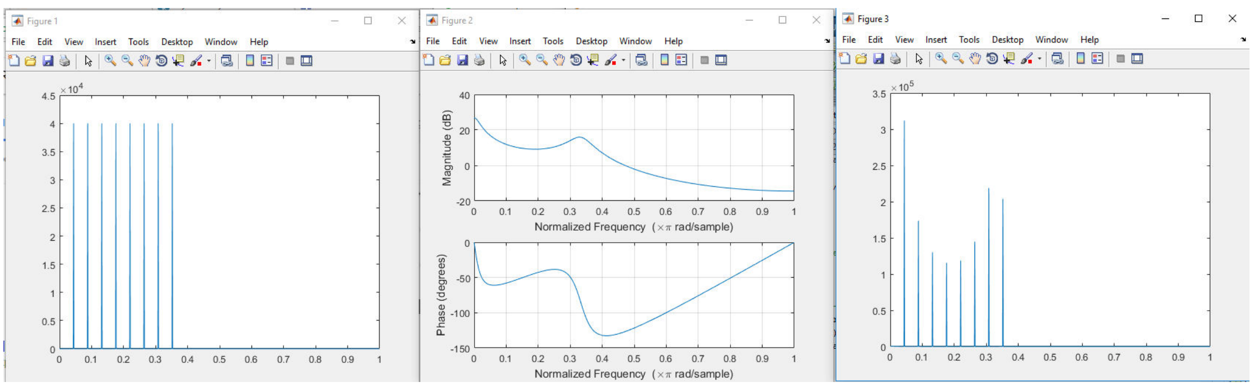


Subpunctul b

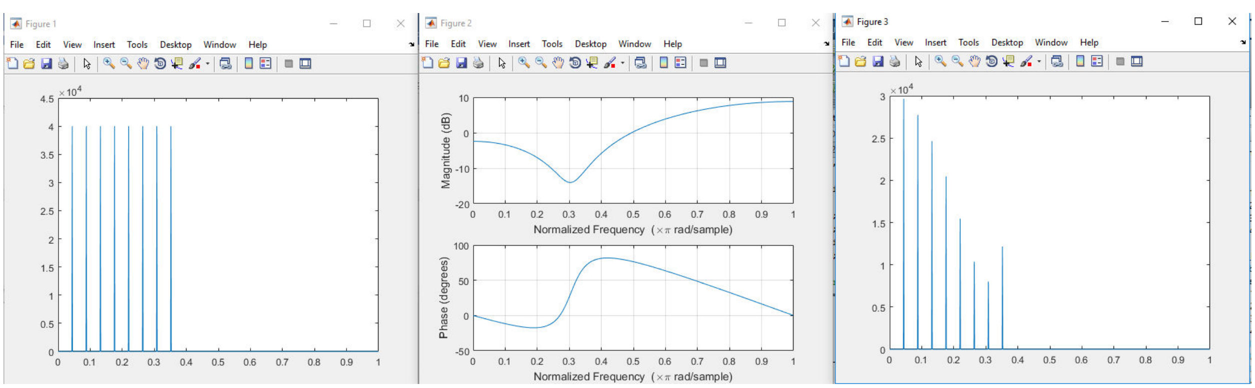
Pentru filtrul deja existent in fisier, se obtine urmatorul rezultat:



Pentru filtrul cu un pol un teta = 0 si amplitudine 0.5 si o perehe de poli conjugati in teta = pi/3, de amplitudine 0.9 se obtine:



Daca de aceasta data pun zerourile de amplitudine 0.9 in teta = pi/3, se obtine:



In toate exemplele prezentate, se observa ca amplitudinea semnalului initial se modifica conform filtrului obtinut. Acest lucru este firesc, stim ca un filtru asupra unui semnal ii modifica acestuia amplitudinea si faza, pulsatia ramanand neschimbata. Acest lucru este argumentat si in formula din cadrul pdfului laboratorului curent.