Examen-GAL-08.06.2021

Subiectul 1. Fie spaţiul vectorial $(\mathbf{R}_2[X], +, \cdot)$ şi sistemul de vectori $S = \{1 - X, X + X^2, -3 + aX^2\}$.

Determinaţi $a \in \mathbf{R}$ astfel încât S este un sistem liniar dependent.

Subiectul 2. Fie spaţiul vectorial $(\mathbf{R}^3, +, \cdot)$ şi subspaţiul vectorial $V =< \{(1, 2, 1), (1, 1, -1), (-1, 1, 5)\} >$. Aflaţi $dim\, V$.

Subiectul 3. Fie $f : \mathbf{R}^2 \mapsto \mathbf{R}^4, f(x_1, x_2) = (x_1 - x_2, 2x_1 - x_2, x_1, -x_2)$.

Aflaţi $Ker(f)$ şi $Im(f)$.

Subiectul 4. Fie $f \in End(\mathbf{R}_2[X])$.

Fie $P_1 = 1+X, P_2 = 1-X^2, P_3 = X+2X^2$ vectori proprii corespunzători valorilor proprii $\lambda_1 = 1, \lambda_2 = 2$, respectiv $\lambda_3 = -2$.

Să se afle $f(1 + X + X^2)$.

Subiectul 5. Fie $Q : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}$ formă pătratică şi $G = \begin{pmatrix} 3 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ matricea asociată în raport cu reperul canonic.

a) Să se aducă Q la o formă canonică.

b Fie g forma polară asociată lui Q. Este $(\mathbf{R}^3, g)$ un spaţiu vectorial euclidian?

Subiectul 6. Fie $(\mathbf{R}^3, g_0)$ spaţiul vectorial euclidian canonic.

Fie subspaţiul vectorial $U = \{x \in \mathbf{R}^3 | x_1 + 2x_2 - x_3 = 0\}$.

a) Să se afle $U^\perp$. Precizaţi un reper ortonormat $\mathcal{R} = \mathcal{R}_1 \cup \mathcal{R}_2$, unde $\mathcal{R}_1, \mathcal{R}_2$ sunt repere ortonormate în U, respectiv $U^\perp$.

b) Fie p_1 proiecţia ortogonală pe $U^\perp$ şi s_1 simetria ortogonală faţă de $U^\perp$. Să se afle $p_1(1, 2, 3), s_1(1, 2, 3)$.

Subiectul 7. Fie $(\mathbf{R}^3, g_0)$ spaţiul vectorial euclidian canonic.

Fie $f : \mathbf{R}^3 \mapsto \mathbf{R}^3, f(x) = u \cdot g_0(x, u)$, unde $u = (1, 2, 2)$.

a) Arătaţi că f este endomorfism simetric. Să se scrie forma pătratică Q asociată lui f.

b) Să se aducă Q la o formă canonică, efectuând o transformare ortogonală.

Subiectul 8. În spaţiul euclidian $\mathcal{E}_2$ se consideră conica

$\Gamma : f(x_1, x_2) = 3x_1^2 - 4x_1x_2 - 4x_1 + 8x_2 - 3 = 0$.

Să se aducă la o formă canonică, efectuând izometrii.

Subiectul 9. În spaţiul euclidian $\mathcal{E}_3$ se consideră dreptele

$\mathcal{D}_1 : \frac{x_1}{1} = \frac{x_2}{-1} = \frac{x_3}{2},\ \mathcal{D}_2 : \frac{x_1-1}{1} = \frac{x_2+1}{2} = \frac{x_3-2}{3}$.

a) Să se arate că cele două drepte sunt coplanare.

b) Să se determine ecuaţia planului π determinat de cele două drepte.

Observaţie.

• Rezolvaţi ex. în ordinea în care sunt scrise.

• Scrieţi enunţul şi rezolvarea fiecăruia.

• Punctaj: Fiecare ex. are 1p. 1p oficiu.

• Scrieţi pe foi albe, cu pix negru sau albastru, nume, grupa, data, lucrare, numerotaţi paginile. Scanaţi şi încărcaţi pe Moodle un singur fişier PDF, numit "nume-prenume-grupa-GAL-08.06.2021.pdf"

• Timp 8:00-10:30 (timp de lucru 8:00-10:10 şi timp de incărcare fişier 20 minute). **Succes!**