

Examen ianuarie 2022

Indicații:

- În cazul exercițiilor cu forma normală prenex și forma normală Skolem, ipoteza este următoarea:

Fie \mathcal{L} un limbaj de ordinul întâi care conține:

- două simboluri de relații unare S, T și un simbol de relație binară R ;
- un simbol de operație unară f ;
- un simbol de constantă c .

Partea I. Probleme cu rezolvare clasică

(P1) [1,5 puncte] Fie E, D astfel încât $E \subseteq D$, E este cel mult numărabilă, iar D nu este cel mult numărabilă. Arătați că $D \setminus E$ nu este cel mult numărabilă.

(P2) [1,5 puncte] Să se definească, folosind Principiul recursiei pe formule, funcția Var ce asociază fiecărei formule din logica propozițională mulțimea variabilelor sale.

(P3) [1,5 puncte] Fie LP logica propozițională. Pentru orice $k \in \mathbb{N}$, definim evaluarea $e_k : V \rightarrow \{0, 1\}$ astfel: pentru orice $n \in \mathbb{N}$,

$$e_k(v_n) := \begin{cases} 0, & \text{dacă } n = k; \\ 1, & \text{dacă } n \neq k. \end{cases}$$

Notăm $\mathcal{E} := \{e_k \mid k \in \mathbb{N}\}$. Să se arate că nu există $\Theta \subseteq Form$ astfel încât $Mod(\Theta) = \mathcal{E}$.

(P4) [1,5 puncte] Fie Γ, Δ mulțimi de formule ale logicii propoziționale astfel încât Δ este finită și $Mod(\Gamma) = Mod(\Delta)$. Să se arate că există o submulțime finită Σ a lui Γ astfel încât $Mod(\Gamma) = Mod(\Sigma)$.

(P5) [1,5 puncte] Fie \mathcal{L} un limbaj de ordinul I și Θ o mulțime de \mathcal{L} -enunțuri. Să se arate că pentru orice teorie T cu $\Theta \subseteq T$ avem $Th(\Theta) \subseteq T$.

(P6) [1,5 puncte] Fie \mathcal{L} un limbaj de ordinul I, ψ o \mathcal{L} -formulă și $z \in V$. Să se arate că $\forall z \psi \models \psi$.

Partea II. Probleme de tip grilă

(P7) [2 răspunsuri corecte] Fie $\mathcal{L}_{ar} = (\prec, \dot{+}, \dot{\times}, \dot{S}, \dot{0})$, \mathcal{L}_{ar} -structura $\mathcal{N} = (\mathbb{N}, <, +, \cdot, S, 0)$ și $e : V \rightarrow \mathbb{N}$ o evaluare arbitrară. Considerăm formulele:

$$\varphi := \neg(x < \dot{0} \vee x = \dot{0}) \text{ și } \psi := \neg(x < \dot{2}), \text{ unde } \dot{2} := \dot{S}\dot{S}\dot{0}.$$

Care dintre următoarele afirmații sunt adevărate?

- ☐ A: $\mathcal{N} \models (\exists x\varphi \rightarrow \exists x\psi)[e]$.
- ☐ B: $\mathcal{N} \models (\forall x\neg\varphi)[e]$.
- ☐ C: $\mathcal{N} \models (\neg\varphi \vee \neg\psi)[e_{x \leftarrow 5}]$.
- ☐ D: $\mathcal{N} \not\models (\exists x\varphi)[e]$.
- ☐ E: $\mathcal{N} \not\models (\forall x(\varphi \rightarrow \psi))[e]$.

(P8) [2 răspunsuri corecte] Fie următoarea mulțime de clauze:

$$\mathcal{S} = \{C_1 = \{v_1, \neg v_2, v_3\}, C_2 = \{v_2, v_4\}, C_3 = \{\neg v_1, v_4\}, C_4 = \{\neg v_1, v_3\}\}$$

Care dintre următoarele sunt derivări corecte prin rezoluție?

- ☐ A: $C_5 = \{v_1, \neg v_2, v_3, v_4\}$ (rezolvent al C_1, C_3) și $C_6 = \{\neg v_2, v_3, v_4\}$ (rezolvent al C_1, C_5).
- ☐ B: $C_5 = \{\neg v_1, v_2\}$ (rezolvent al C_2, C_3) și $C_6 = \{v_2, v_3\}$ (rezolvent al C_4, C_5).
- ☐ C: $C_5 = \{\neg v_2, v_3\}$ (rezolvent al C_1, C_4).
- ☐ D: $C_5 = \{\neg v_2, v_3\}$ (rezolvent al C_1, C_4) și $C_6 = \{\neg v_1, \neg v_2, v_3, \neg v_4\}$ (rezolvent al C_3, C_5).
- ☐ E: $C_5 = \{v_1, v_3, v_4\}$ (rezolvent al C_1, C_2) și $C_6 = \{v_3, v_4\}$ (rezolvent al C_4, C_5).

(P9) [2 răspunsuri corecte] Fie următoarea formulă în limbajul logicii propoziționale:

$$\varphi := (v_1 \wedge v_2 \wedge v_3) \rightarrow (v_1 \wedge v_3)$$

Care dintre următoarele afirmații sunt adevărate?

- ☐ A: φ nu este satisfiabilă.
- ☐ B: Dacă e este o evaluare astfel încât $e(v_1) = e(v_3) = e(v_2) = 1$, atunci $e^+(\varphi) = 1$.
- ☐ C: φ nu este tautologie.
- ☐ D: φ este satisfiabilă.
- ☐ E: Dacă e este o evaluare astfel încât $e^+(\varphi) = 1$, atunci $e(v_1) = 0$, $e(v_2) = 1$ și $e(v_3) = 0$.

(P10) [2 răspunsuri corecte] Fie următoarea mulțime de clauze:

$$\mathcal{S} = \{\{v_0\}, \{\neg v_0, v_1\}, \{\neg v_2\}, \{v_1, v_2\}, \{v_2, \neg v_0\}\}$$

Aplicând algoritmul Davis-Putnam pentru intrarea \mathcal{S} și alegând succesiv $x_1 := v_0$, $x_2 := v_1$, $x_3 := v_2$ obținem:

- ☐ A: $U_2 = \emptyset$.
- ☐ B: $\{v_0, v_0 \rightarrow v_1, \neg v_2, v_1 \vee v_2\} \models v_2 \wedge v_0$.
- ☐ C: $\{v_0, v_0 \rightarrow v_1, \neg v_2, v_1 \vee v_2\} \models \neg v_2 \wedge v_0$.
- ☐ D: $U_3 = \{\{v_2\}\}$.
- ☐ E: $\mathcal{S}_4 = \emptyset$.

(P11) [1 răspuns corect] Fie următoarea formulă în \mathcal{L} :

$$\varphi := \exists x(\forall y(S(y) \wedge \forall y\neg R(x, y)) \rightarrow (\exists x\forall y\neg R(x, y) \vee \exists xT(x)))$$

Care dintre următoarele afirmații este adevărată?

- ☐ A: $\forall x\exists y\exists u\forall v((S(y) \wedge \neg R(x, y)) \rightarrow (\neg R(u, v) \vee T(u)))$ este o formă normală prenex pentru φ .
- ☐ B: $\exists x\forall y\exists u\forall v((S(y) \wedge \neg R(x, y)) \rightarrow (\neg R(u, v) \vee T(u)))$ este o formă normală prenex pentru φ .
- ☐ C: $\exists x\forall y\exists u\forall v((S(y) \wedge \neg R(x, y)) \rightarrow (\neg R(u, v) \wedge T(v)))$ este o formă normală prenex pentru φ .

- ☐ D: $\forall x \exists y \exists u \forall v ((S(y) \wedge \neg R(x, y)) \rightarrow (\neg R(u, v) \wedge T(v)))$ este o formă normală prenex pentru φ .
☐ E: $\forall x \exists y \forall u \exists v ((S(y) \wedge \neg R(x, y)) \rightarrow (\neg R(u, v) \wedge T(v)))$ este o formă normală prenex pentru φ .

(P12) [1 răspuns corect] Fie următoarea formulă în \mathcal{L} :

$$\varphi := \exists x R(x, y) \rightarrow (\neg \exists z (f(z) = c) \wedge \forall v S(v))$$

Care dintre următoarele afirmații este adevărată?

- ☒ A: $\forall x \forall z \forall v (R(x, y) \rightarrow (\neg (f(z) = c) \wedge S(v)))$ este o formă normală prenex pentru φ .
☐ B: $\exists x \exists z \forall v (R(x, y) \rightarrow (\neg (f(z) = c) \wedge R(v)))$ este o formă normală prenex pentru φ .
☐ C: $\forall x \exists z \exists v (R(x, y) \rightarrow (\neg (f(z) = c) \wedge S(v)))$ este o formă normală prenex pentru φ .
☐ D: $\exists x \exists z \forall v (R(x, y) \rightarrow (\neg (f(z) = c) \wedge S(v)))$ este o formă normală prenex pentru φ .
☐ E: $\exists x \forall z \forall v (R(x, y) \rightarrow (\neg (f(z) = c) \wedge S(v)))$ este o formă normală prenex pentru φ .

(P13) [1 răspuns corect] Fie următoarea formulă:

$$\varphi := (v_1 \vee v_2) \rightarrow (v_3 \rightarrow \neg v_2)$$

Care dintre următoarele afirmații este adevărată?

- ☒ A: $(\neg v_1 \wedge \neg v_2) \vee \neg v_3 \vee \neg v_2$ este FND a lui φ .
☐ B: $(v_1 \vee v_2 \vee v_3) \wedge (v_2 \vee \neg v_3)$ este FND a lui φ .
☐ C: $(\neg v_1 \wedge \neg v_2 \wedge \neg v_3) \vee \neg v_2 \vee v_3$ este FND a lui φ .
☐ D: $(\neg v_1 \wedge \neg v_3) \vee (\neg v_3 \wedge \neg v_2)$ este FND a lui φ .
☐ E: $(v_1 \wedge v_2) \vee (v_1 \wedge v_3) \vee (v_2 \wedge v_3)$ este FND a lui φ .

(P14) [1 răspuns corect] Fie următoarea formulă:

$$\psi := (v_1 \vee v_2) \rightarrow \neg(\neg v_3 \wedge \neg v_1)$$

Care dintre următoarele afirmații este adevărată?

- ☐ A: $\neg v_1 \vee v_2 \vee v_3$ este FNC a lui ψ .
☐ B: $v_1 \vee v_2 \vee \neg v_3$ este FNC a lui ψ .
☐ C: $\neg v_1 \vee \neg v_2 \vee \neg v_3$ este FNC a lui ψ .
☒ D: $v_1 \vee \neg v_2 \vee v_3$ este FNC a lui ψ .
☐ E: $(\neg v_1 \vee \neg v_2 \vee \neg v_3) \wedge (\neg v_1 \vee v_2 \vee \neg v_3)$ este FNC a lui ψ .

(P15) [2 răspunsuri corecte] Fie următoarea formulă în limbajul logicii propoziționale:

$$\theta := (v_1 \rightarrow v_3) \wedge (v_2 \rightarrow v_3)$$

Care dintre următoarele afirmații sunt adevărate?

- ☐ A: $e^+(\theta) = e^+((v_1 \wedge v_2 \wedge v_3) \vee (\neg v_1 \vee \neg v_2 \vee \neg v_3))$ pentru orice evaluare e .
☐ B: $e^+(\theta) = e^+(v_1 \rightarrow (\neg v_1 \rightarrow (v_2 \wedge v_3)))$ pentru orice evaluare e .
☒ C: $e^+(\theta) = e^+((\neg v_1 \wedge \neg v_2) \vee v_3)$ pentru orice evaluare e .
☒ D: $e^+(\theta) = e^+((v_1 \vee v_2) \rightarrow v_3)$ pentru orice evaluare e .
☐ E: $e^+(\theta) = e^+((v_1 \wedge v_2) \rightarrow v_1)$ pentru orice evaluare e .

(P16) [2 răspunsuri corecte] Fie următorul enunț în \mathcal{L} :

$$\varphi := \exists x \forall y \exists z \forall v (S(x) \rightarrow (R(y, z) \vee (\neg S(v) \rightarrow T(z))))$$

Care dintre următoarele formule sunt forme normale Skolem pentru φ ?

- A: $\forall y \forall v (S(l) \rightarrow (R(y, l) \vee (\neg S(l) \rightarrow T(n))))$, unde l și n sunt simboluri noi de constante.
- B: $\forall y \forall v (S(n(y)) \rightarrow (R(y, z) \vee (\neg S(v) \rightarrow T(l))))$, unde l este simbol nou de constantă, iar n este simbol nou de operație unară.
- C: $\forall y \forall v (S(l) \rightarrow (R(y, n(y)) \vee (\neg S(v) \rightarrow T(n(y)))))$, unde l este simbol nou de constantă, iar n este simbol nou de operație unară.
- D: $\forall y \forall v (S(d) \rightarrow (R(y, m(y)) \vee (\neg S(v) \rightarrow T(m(y)))))$, unde d este simbol nou de constantă, iar m este simbol nou de operație unară.
- E: $\forall y \forall v (S(n(y)) \rightarrow (R(y, l) \vee (\neg S(v) \rightarrow T(l))))$, unde l este simbol nou de constantă, iar n este simbol nou de operație unară.