FMI, Info, Anul I
Logică matematică şi computaţională

Seminar 2

Dacă $n \in \mathbb{N}$, spunem despre o mulţime A că *are n elemente* dacă există o bijecţie

$$f : A \to \{m \in \mathbb{N} \mid 1 \leq m \leq n\}.$$

Spunem că o mulţime A este *finită* dacă există $n \in \mathbb{N}$ astfel încât A are n elemente, iar în caz contrar spunem că A este *infinită*. O mulţime A se numeşte *numărabilă* dacă există o bijecţie $f : A \to \mathbb{N}$. O mulţime se numeşte *cel mult numărabilă* dacă este finită sau numărabilă.

(S2.1) Arătaţi, pe rând, următoarele:

(i) $\mathbb{N}^*$ este numărabilă.

(ii) $\mathbb{Z}$ este numărabilă.

(iii) $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ este numărabilă.

Demonstraţie:

(i) Definim

$$f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}^*, \quad f(n) = n + 1.$$

Se demonstrează imediat că f este bijecţie, inversa sa fiind

$$f^{-1} : \mathbb{N}^* \to \mathbb{N}, \quad f^{-1}(n) = n - 1.$$

(ii) Enumerăm elementele lui $\mathbb{Z}$ astfel:

$$0, -1, 1, -2, 2, -3, 3, \ldots$$

Funcţia $f : \mathbb{N} \to \mathbb{Z}$ corespunzătoare acestei enumerări este următoarea:

$$f(n) = \begin{cases} \frac{n}{2} & \text{dacă } n \text{ e par} \\ -\frac{n+1}{2} & \text{dacă } n \text{ e impar.} \end{cases}$$

E clar că f e bijectivă şi că $h : \mathbb{Z} \to \mathbb{N}$ definită prin:

$$h(s) = \begin{cases} 2s & \text{dacă } s \geq 0 \\ -2s-1 & \text{dacă } s < 0 \end{cases}$$

este inversa lui f.

(iii) Ordonăm elementele lui $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ după suma coordonatelor şi în cadrul elementelor cu aceeaşi sumă după prima componentă în ordine crescătoare:

$$\begin{array}{rc} \text{linia } 0 & (0,0), \\ \text{linia } 1 & (0,1),(1,0), \\ \text{linia } 2 & (0,2),(1,1),(2,0), \\ \text{linia } 3 & (0,3),(1,2),(2,1),(3,0), \\ \vdots & \\ \text{linia } k & (0,k),(1,k-1),\ldots,(k-1,1),(k,0), \\ \vdots & \end{array}$$

Prin urmare, pentru fiecare $k \in \mathbb{N}$, pe linia k sunt $k+1$ perechi $(i, k-i), i = 0, \ldots, k$. Definim $f : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ astfel: $f(0,0) = 0$, $f(0,1) = 1$, $f(1,0) = 2, \ldots$ În general, $f(i,j)$ se defineşte ca fiind numărul perechilor situate înaintea lui (i,j). Deoarece (i,j) este al $(i+1)$-lea element pe linia $i+j$, rezultă că înaintea sa sunt $1+2+3+\ldots+(i+j)+i = \frac{(i+j)(i+j+1)}{2} + i$ elemente. Aşadar, bijecţia va fi funcţia

$$f : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \mathbb{N}, \quad f(i,j) = \frac{(i+j)(i+j+1)}{2} + i.$$

Această funcţie se numeşte şi *funcţia de numărare diagonală a lui Cantor* (în engleză, *Cantor pairing function*).

□

(S2.2) Demonstraţi că orice mulţime infinită are o submulţime numărabilă.
Demonstraţie: Fie A o mulţime infinită. Definim inductiv şirul $(a_n)_{n \in N}$ din A cu proprietatea că $a_i \neq a_j$ pentru orice $i, j \in \mathbb{N}, i \neq j$.
Deoarece A este nevidă, există $a_0 \in A$. Cum A este infinită, $A - \{a_0\}$ este nevidă, deci există $a_1 \in A$ a.î. $a_1 \neq a_0$.
Cum A este infinită, $A - \{a_0, a_1\}$ este nevidă, deci există $a_2 \in A$ a.î. $a_2 \neq a_0$ şi $a_2 \neq a_1$.
În general, presupunem că am definit $a_0, \ldots, a_n \in A$ distincte două câte două. Cum A este infinită, $A - \{a_0, \ldots, a_n\}$ este nevidă, deci există $a_{n+1} \in A$ diferit de toţi $a_0, \ldots, a_n$.

Definim funcţia $f : \mathbb{N} \to A$ prin $f(n) = a_n$ pentru orice $n \in \mathbb{N}$. Se observă imediat că f este injectivă, prin urmare avem că $f(\mathbb{N}) \sim \mathbb{N}$. Rezultă că $f(\mathbb{N})$ este o submulţime numărabilă a lui A. $\square$

(S2.3) Demonstraţi că orice submulţime infinită a unei mulţimi numărabile este numărabilă.

Demonstraţie: Fie A, B mulţimi a.î. $A \subseteq B$, A este infinită şi B este numărabilă.

Deoarece $A \subseteq B$, funcţia incluziune $f : A \to B$, $f(a) = a$ este injectivă.
Deoarece A este infinită, putem aplica (S2.2) pentru a obţine o submulţime numărabilă C a lui A. Prin urmare, există o funcţie bijectivă $h : B \to C$. Compunând h cu funcţia incluziune a lui C în A obţinem funcţia $g : B \to A$, $g(b) = h(b)$, care este injectivă.
Am obţinut funcţiile injective $f : A \to B$, $g : B \to A$. Putem aplica Teorema Cantor-Schröder-Bernstein pentru a concluziona că $A \sim B$, deci că A este numărabilă.
Altă demonstraţie: Cu A, B ca mai devreme, fie $g : \mathbb{N} \to B$ o bijecţie. Vom defini inductiv un şir $(a_n)_{n \in N}$ din A, ca în (S2.2), cu diferenţa că nu vom mai face alegeri arbitrare, ele fiind acum unic determinate la fiecare pas.
Deoarece A este nevidă, iar g este surjectivă, există $m \in \mathbb{N}$ a.î. $g(m) \in A$. Alegem m minim cu această proprietate şi punem $a_0 := g(m)$.
Cum A este infinită, $A - \{a_0\}$ este nevidă, deci din nou putem alege m minim cu proprietatea că $g(m) \in A - \{a_0\}$ şi punem $a_1 := g(m)$.
În general, presupunem că am definit $a_0, \ldots, a_n \in A$. Cum A este infinită, $A - \{a_0, \ldots, a_n\}$ este nevidă, deci alegem m minim cu proprietatea că $g(m) \in A - \{a_0, \ldots, a_n\}$ şi punem $a_{n+1} := g(m)$.
Atunci funcţia $f : \mathbb{N} \to A$, definită, pentru orice $n \in \mathbb{N}$, prin $f(n) = a_n$, va fi bijecţia dorită. $\square$

(S2.4) Demonstraţi că o mulţime A este cel mult numărabilă dacă şi numai dacă există o funcţie injectivă de la A la o mulţime numărabilă (pe care o putem lua ca fiind $\mathbb{N}$).
Demonstraţie: $\Rightarrow$ Dacă A este numărabilă, există o bijecţie $f : A \to \mathbb{N}$. Dacă A este finită, avem două cazuri:

(i) $A = \emptyset$. Atunci funcţia vidă este injecţie de la $\emptyset$ în $\mathbb{N}$.

(ii) $A = \{a_1, \ldots, a_n\}$ pentru un $n \geq 1$. Atunci $f : A \to \mathbb{N}$, $f(a_i) = i$ pentru orice $i = 1, \ldots, n$ este injecţie.

$\Leftarrow$ Dacă A este finită, concluzia este evidentă. Presupunem că A este infinită. Fie B o mulţime numărabilă şi $f : A \to B$ o injecţie. Atunci $A \sim f(A) \subseteq B$. Din (S2.3), rezultă că $f(A)$ este numărabilă. Prin urmare, A este numărabilă. $\square$

(S2.5) Demonstraţi următoarele:

(i) Produsul cartezian a două mulţimi cel mult numărabile este cel mult numărabil.

(ii) Reuniunea a două mulţimi cel mult numărabile este cel mult numărabilă.

Demonstraţie: Fie A_1 şi A_2 două mulţimi cel mult numărabile. Dacă una din mulţimile A_1, A_2 este vidă, concluzia este imediată, deoarece $C \times \emptyset = \emptyset \times C = \emptyset$ şi $C \cup \emptyset = \emptyset \cup C = C$ pentru orice mulţime C. Presupunem, aşadar, că A_1 şi A_2 sunt nevide. Conform (S2.4), există funcţiile injective $f_1 : A_1 \to \mathbb{N}$, $f_2 : A_2 \to \mathbb{N}$.

(i) Definim

$$f : A_1 \times A_2 \to \mathbb{N} \times \mathbb{N}, \quad f(a,b) = (f_1(a), f_2(b)).$$

Rezultă uşor că f este injectivă: Fie $(a_1,b_1),(a_2,b_2) \in A_1 \times A_2$. Atunci $f(a_1,b_1) = f(a_2,b_2)$ ddacă $(f_1(a_1), f_2(b_1)) = (f_1(a_2), f_2(b_2))$ ddacă $f_1(a_1) = f_1(a_2)$ şi $f_2(b_1) = f_2(b_2)$ ddacă $a_1 = a_2$ şi $b_1 = b_2$ (deoarece f_1, f_2 sunt injective) ddacă $(a_1,b_1) = (a_2,b_2)$.

Deoarece $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ este numărabilă, conform (S2.1), aplicăm din nou (S2.4) pentru a concluziona că $A_1 \times A_2$ este cel mult numărabilă.

(ii) Definim $f : A_1 \cup A_2 \to \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ astfel:

dacă $a \in A_1 \cup A_2$, alegem $i_a \in \{1,2\}$ cu $a \in A_{i_a}$ şi definim $f(a) = (f_{i_a}(a), i_a)$.

Rezultă uşor că f este injectivă: dacă $a, b \in A_1 \cup A_2$ sunt a.î. $(f_{i_a}(a), i_a) = (f_{i_b}(b), i_b)$, atunci $i_a = i_b$ şi $f_{i_a}(a) = f_{i_a}(b)$, deci $a = b$, deoarece f_{i_a} este injectivă.

Deoarece $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ este numărabilă, conform (S2.1), aplicăm din nou (S2.4) pentru a concluziona că $A_1 \cup A_2$ este cel mult numărabilă.

$\square$