FMI, Info, Anul I
Logică matematică şi computaţională

Seminar 13

(S13.1) Să se axiomatizeze următoarele clase de mulţimi:

(i) mulţimile care au între 3 şi 5 elemente;

(ii) mulţimile nevide care au mai puţin de 7 elemente;

(iii) mulţimile care au între 20 şi 300 elemente;

(iv) mulţimile care au cel puţin 10 elemente.

(S13.2) Să se axiomatizeze următoarele clase de grafuri:

(i) grafurile complete;

(ii) grafurile cu proprietatea că orice vârf are exact o muchie incidentă;

(iii) grafurile infinite;

(iv) grafurile care au cel puţin un ciclu de lungime 3.

(S13.3) Să se axiomatizeze:

(i) clasa mulţimilor strict ordonate care au un element minimal;

(ii) clasa mulţimilor strict ordonate care au un element maximal;

(iii) clasa mulţimilor strict ordonate cu proprietatea că orice element are un unic succesor.

Definiţia 1. *O $\mathcal{L}$-teorie T se numeşte completă dacă pentru orice enunţ φ, avem că $\varphi \in T$ sau $\neg\varphi \in T$.*

(S13.4) Pentru orice $\mathcal{L}$-structură $\mathcal{A}$, definim

$$Th(\mathcal{A}) := \{\varphi \mid \varphi \text{ este enunţ şi } \mathcal{A} \vDash \varphi\}.$$

Demonstraţi că $Th(\mathcal{A})$ este o teorie completă.

(S13.5) Considerăm limbajul $\mathcal{L}$ ce conţine un singur simbol, anume un simbol de relaţie de aritate 2, notat cu $\dot{<}$. Fie Γ o mulţime de enunţuri ce conţine axiomele de ordine strictă, totală şi ce admite măcar un model infinit. Să se arate că există un model $\mathcal{A}$ pentru Γ în care, mai mult, $(\mathbb{Q}, <)$ se scufundă, i.e. există $f : \mathbb{Q} \to A$ (necesar injectivă) cu proprietatea că pentru orice q, $r \in \mathbb{Q}$, $q < r$ dacă şi numai dacă $f(q) \dot{<}^{\mathcal{A}} f(r)$.