FMI, Info, Anul I
Logică matematică şi computaţională

Seminar 10

(S10.1) Fie $\mathcal{L}$ un limbaj de ordinul I, $\mathcal{A}$ o $\mathcal{L}$-structură şi $e : V \to A$ o interpretare a lui $\mathcal{L}$ în $\mathcal{A}$. Să se demonstreze că pentru orice formule φ, ψ şi orice variabilă x:

(i) $(\varphi \vee \psi)^{\mathcal{A}}(e) = \varphi^{\mathcal{A}}(e) \mathbin{\pmb{\vee}} \psi^{\mathcal{A}}(e)$;

(ii) $(\exists x\varphi)^{\mathcal{A}}(e) = \begin{cases} 1, & \text{dacă există } a \in A \text{ a.î. } \varphi^{\mathcal{A}}(e_{x\leftarrow a}) = 1; \\ 0, & \text{altfel.} \end{cases}$

Demonstraţie:

(i) Avem:

$$\begin{aligned} (\varphi \vee \psi)^{\mathcal{A}}(e) = 1 &\iff (\neg\varphi \to \psi)^{\mathcal{A}}(e) = 1 \\ &\iff \pmb{\neg}\varphi^{\mathcal{A}}(e) \pmb{\to} \psi^{\mathcal{A}}(e) = 1 \\ &\iff \varphi^{\mathcal{A}}(e) \mathbin{\pmb{\vee}} \psi^{\mathcal{A}}(e) = 1. \end{aligned}$$

(ii) Avem:

$$\begin{aligned} (\exists x\varphi)^{\mathcal{A}}(e) = 1 &\iff (\neg\forall x\neg\varphi)^{\mathcal{A}}(e) = 1 \iff \pmb{\neg}(\forall x\neg\varphi)^{\mathcal{A}}(e) = 1 \\ &\iff (\forall x\neg\varphi)^{\mathcal{A}}(e) = 0 \\ &\iff \text{nu e adevărat că } (\forall x\neg\varphi)^{\mathcal{A}}(e) = 1 \\ &\iff \text{nu e adevărat că pentru orice } a \in A, (\neg\varphi)^{\mathcal{A}}(e_{x\leftarrow a}) = 1 \\ &\iff \text{există } a \in A \text{ a.î. } (\neg\varphi)^{\mathcal{A}}(e_{x\leftarrow a}) \neq 1 \\ &\iff \text{există } a \in A \text{ a.î. } (\neg\varphi)^{\mathcal{A}}(e_{x\leftarrow a}) = 0 \\ &\iff \text{există } a \in A \text{ a.î. } \varphi^{\mathcal{A}}(e_{x\leftarrow a}) = 1. \end{aligned}$$

□

(S10.2) Considerăm limbajul de ordinul I $\mathcal{L}_{ar} = (\dot{<}; \dot{+}, \dot{\times}, \dot{S}; \dot{0})$ (limbajul aritmeticii) şi $\mathcal{L}_{ar}$-structura $\mathcal{N} = (\mathbb{N}, <, +, \cdot, S, 0)$.

(i) Fie $x, y \in V$ cu $x \neq y$, şi $t = \dot{S}x\dot{\times}\dot{S}\dot{S}y = \dot{\times}(\dot{S}x, \dot{S}\dot{S}y)$. Să se calculeze $t^{\mathcal{N}}(e)$, unde $e : V \to \mathbb{N}$ este o evaluare ce verifică $e(x) = 3$ şi $e(y) = 7$.

(ii) Fie $\varphi = x\dot{<}\dot{S}y \to (x\dot{<}y \vee x = y) = \dot{<}(x, \dot{S}y) \to (\dot{<}(x, y) \vee x = y)$. Să se arate că $\mathcal{N} \vDash \varphi[e]$ pentru orice $e : V \to \mathbb{N}$.

Demonstraţie:

(i) Pentru orice interpretare $e : V \to \mathbb{N}$, avem

$$\begin{aligned} t^{\mathcal{N}}(e) &= \dot{\times}^{\mathcal{N}}((\dot{S}x)^{\mathcal{N}}(e), (\dot{S}\dot{S}y)^{\mathcal{N}}(e)) = (\dot{S}x)^{\mathcal{N}}(e) \cdot (\dot{S}\dot{S}y)^{\mathcal{N}}(e) \\ &= \dot{S}^{\mathcal{N}}(x^{\mathcal{N}}(e)) \cdot \dot{S}^{\mathcal{N}}((\dot{S}y)^{\mathcal{N}}(e)) = S(e(x)) \cdot S(\dot{S}^{\mathcal{N}}(y^{\mathcal{N}}(e))) \\ &= S(e(x)) \cdot S(S(e(y))). \end{aligned}$$

Prin urmare, dacă $e(x) = 3$ şi $e(y) = 7$, atunci

$$t^{\mathcal{N}}(e) = S(3) \cdot S(S(7)) = 4 \cdot 9 = 36.$$

(ii) Pentru orice interpretare $e : V \to \mathbb{N}$, avem

$$\begin{aligned} \mathcal{N} \vDash \varphi[e] &\iff \mathcal{N} \nvDash (\dot{<}(x, \dot{S}y))[e] \text{ sau } \mathcal{N} \vDash (\dot{<}(x, y) \vee x = y)[e] \\ &\iff \dot{<}^{\mathcal{N}}(e(x), S(e(y)) \text{ nu e satisfăcută sau} \\ &\qquad \mathcal{N} \vDash (\dot{<}(x, y))[e] \text{ sau } \mathcal{N} \vDash (x = y)[e] \\ &\iff <(e(x), S(e(y)) \text{ nu e satisfăcută sau } <(e(x), e(y)) \\ &\qquad \text{sau } e(x) = e(y) \\ &\iff e(x) \geq S(e(y)) \text{ sau } e(x) < e(y) \text{ sau } e(x) = e(y) \\ &\iff e(x) \geq e(y) + 1 \text{ sau } e(x) < e(y) \text{ sau } e(x) = e(y). \end{aligned}$$

Prin urmare, $\mathcal{N} \vDash \varphi[e]$ pentru orice $e : V \to \mathbb{N}$.

De obicei, scriem:

$$\begin{aligned} \mathcal{N} \vDash \varphi[e] &\iff \mathcal{N} \nvDash (\dot{<}(x, \dot{S}y))[e] \text{ sau } \mathcal{N} \vDash (\dot{<}(x, y) \vee x = y)[e] \\ &\iff e(x) \geq S(e(y)) \text{ sau } e(x) < e(y) \text{ sau } e(x) = e(y) \\ &\iff e(x) \geq e(y) + 1 \text{ sau } e(x) < e(y) \text{ sau } e(x) = e(y). \end{aligned}$$

$\square$

(S10.3) Considerăm limbajul de ordinul I $\mathcal{L}_{ar} = (\dot{<}; \dot{+}, \dot{\times}, \dot{S}; \dot{0})$ (limbajul aritmeticii) şi $\mathcal{L}_{ar}$-structura $\mathcal{N} = (\mathbb{N}, <, +, \cdot, S, 0)$. Fie formula $\varphi = \forall v_4(v_3 \dot{<} v_4 \vee v_3 = v_4)$. Să se caracterizeze acele $e : V \to \mathbb{N}$ ce au proprietatea că $\varphi^{\mathcal{N}}(e) = 1$.

Demonstraţie: Fie $e : V \to \mathbb{N}$. Avem:

$$\begin{aligned}
\varphi^{\mathcal{N}}(e) = 1 &\iff (\forall v_4(v_3 \dot{<} v_4 \vee v_3 = v_4))^{\mathcal{N}}(e) = 1 \\
&\iff \text{pentru orice } a \in \mathbb{N},\ (v_3 \dot{<} v_4 \vee v_3 = v_4)^{\mathcal{N}}(e_{v_4 \leftarrow a}) = 1 \\
&\iff \text{pentru orice } a \in \mathbb{N},\ (v_3 \dot{<} v_4)^{\mathcal{N}}(e_{v_4 \leftarrow a}) \vee (v_3 = v_4)^{\mathcal{N}}(e_{v_4 \leftarrow a}) = 1 \\
&\iff \text{pentru orice } a \in \mathbb{N},\ (v_3 \dot{<} v_4)^{\mathcal{N}}(e_{v_4 \leftarrow a}) = 1 \text{ sau } (v_3 = v_4)^{\mathcal{N}}(e_{v_4 \leftarrow a}) = 1 \\
&\iff \text{pentru orice } a \in \mathbb{N},\ e_{v_4 \leftarrow a}(v_3) < e_{v_4 \leftarrow a}(v_4) \text{ sau } e_{v_4 \leftarrow a}(v_3) = e_{v_4 \leftarrow a}(v_4) \\
&\iff \text{pentru orice } a \in \mathbb{N},\ e_{v_4 \leftarrow a}(v_3) \leq e_{v_4 \leftarrow a}(v_4) \\
&\iff \text{pentru orice } a \in \mathbb{N},\ e(v_3) \leq a \\
&\iff e(v_3) = 0.
\end{aligned}$$

□

Notaţia 1. *Fie $\mathcal{L}$ un limbaj de ordinul I. Pentru orice variabile x, y cu $x \neq y$, orice $\mathcal{L}$-structură $\mathcal{A}$, orice $e : V \to A$ şi orice a, $b \in A$, avem că:*

$$(e_{y \leftarrow b})_{x \leftarrow a} = (e_{x \leftarrow a})_{y \leftarrow b}.$$

În acest caz, notăm valoarea lor comună cu $e_{x \leftarrow a, y \leftarrow b}$. Aşadar,

$$e_{x \leftarrow a, y \leftarrow b} : V \to A, \quad e_{x \leftarrow a, y \leftarrow b}(v) = \begin{cases} e(v) & \textit{dacă } v \neq x \textit{ şi } v \neq y \\ a & \textit{dacă } v = x \\ b & \textit{dacă } v = y. \end{cases}$$

(S10.4) Să se arate că pentru orice formule φ, ψ şi orice variabile x, y cu $x \neq y$ avem,

(i) $\forall x(\varphi \wedge \psi) \vDash\!\!\!\!\!\dashv \forall x\varphi \wedge \forall x\psi$;

(ii) $\exists y \forall x \varphi \vDash \forall x \exists y \varphi$.

Demonstraţie: Fie $\mathcal{A}$ şi $e : V \to A$.

(i) $\mathcal{A} \vDash (\forall x(\varphi \wedge \psi))[e] \iff$ pentru orice $a \in A$, avem $\mathcal{A} \vDash (\varphi \wedge \psi)[e_{x \leftarrow a}] \iff$ pentru orice $a \in A$, avem $\mathcal{A} \vDash \varphi[e_{x \leftarrow a}]$ şi $\mathcal{A} \vDash \psi[e_{x \leftarrow a}] \iff \big($pentru orice $a \in A$, avem $\mathcal{A} \vDash \varphi[e_{x \leftarrow a}]\big)$ şi $\big($pentru orice $a \in A$, avem $\mathcal{A} \vDash \psi[e_{x \leftarrow a}]\big) \iff \mathcal{A} \vDash (\forall x\varphi)[e]$ şi $\mathcal{A} \vDash (\forall x\psi)[e] \iff \mathcal{A} \vDash (\forall x\varphi \wedge \forall x\psi)[e]$.

(ii) Avem că $\mathcal{A} \vDash (\exists y \forall x \varphi)[e] \iff$ există $b \in A$ a.î. pentru orice $a \in A$ avem $\mathcal{A} \vDash \varphi[(e_{y \leftarrow b})_{x \leftarrow a}]$, i.e., folosind ipoteza că $x \neq y$, $\mathcal{A} \vDash \varphi[e_{x \leftarrow a, y \leftarrow b}]$ (*).

Pe de altă parte, $\mathcal{A} \vDash (\forall x \exists y \varphi)[e] \iff$ pentru orice $c \in A$ există $d \in A$ a.î. $\mathcal{A} \vDash \varphi[(e_{x \leftarrow c})_{y \leftarrow d}]$, i.e., folosind ipoteza că $x \neq y$, $\mathcal{A} \vDash \varphi[e_{x \leftarrow c, y \leftarrow d}]$ (**).

Ştim (*) şi vrem să arătăm (**).

Fie $c \in A$. Vrem $d \in A$ a.î. $\mathcal{A} \vDash \varphi[e_{x \leftarrow c, y \leftarrow d}]$.

Luăm d să fie b-ul din (*). Atunci, pentru orice $a \in A$ avem $\mathcal{A} \vDash \varphi[e_{x \leftarrow a, y \leftarrow d}]$. În particular, luând $a := c$, obţinem $\mathcal{A} \vDash \varphi[e_{x \leftarrow c, y \leftarrow d}]$, ceea ce ne trebuia.

□

(S10.5) Fie x, y variabile cu $x \neq y$. Să se dea exemple de limbaj de ordinul I, $\mathcal{L}$, şi de formule φ, ψ ale lui $\mathcal{L}$ astfel încât:

(i) $\forall x(\varphi \vee \psi) \not\vDash \forall x \varphi \vee \forall x \psi$;

(ii) $\forall x \exists y \varphi \not\vDash \exists y \forall x \varphi$.

Demonstraţie: Considerăm $\mathcal{L}_{ar} = (\dot{<}, \dot{+}, \dot{\times}, \dot{S}, \dot{0})$, $\mathcal{L}_{ar}$-structura $\mathcal{N} := (\mathbb{N}, <, +, \cdot, S, 0)$ şi $e : V \to \mathbb{N}$ o evaluare arbitrară (să zicem, punem $e(v) := 7$ pentru orice $v \in V$).

(i) Fie $\dot{2} := \dot{S}\dot{S}\dot{0}$, $\varphi := x \dot{<} \dot{2}$ şi $\psi := \neg(x \dot{<} \dot{2})$. Atunci

$$\mathcal{N} \vDash \forall x(\varphi \vee \psi)[e].$$

Pe de altă parte,

(a) $\mathcal{N} \vDash (\forall x \varphi)[e] \iff$ pentru orice $n \in \mathbb{N}$ avem $\mathcal{N} \vDash \varphi[e_{x \leftarrow n}] \iff$ pentru orice $n \in \mathbb{N}$, avem $n < 2$, ceea ce nu este adevărat (luând $n := 3$, de exemplu). Deci, $\mathcal{N} \not\vDash (\forall x \varphi)[e]$.

(b) $\mathcal{N} \vDash (\forall x \psi)[e] \iff$ pentru orice $n \in \mathbb{N}$ avem $\mathcal{N} \vDash \psi[e_{x \leftarrow n}] \iff$ pentru orice $n \in \mathbb{N}$, avem $n \geq 2$, ceea ce nu este adevărat (luând $n := 1$, de exemplu). Deci, $\mathcal{N} \not\vDash (\forall x \psi)[e]$.

Prin urmare,

$$\mathcal{N} \not\vDash (\forall x \varphi \vee \forall x \psi)[e].$$

(ii) Fie $\varphi := x \dot{<} y$. Atunci

$$\begin{aligned}
\mathcal{N} \vDash (\forall x \exists y \varphi)[e] \quad &\iff \quad \text{pentru orice } n \in \mathbb{N}, \text{ avem } \mathcal{N} \vDash (\exists y \varphi)[e_{x \leftarrow n}] \\
&\iff \quad \text{pentru orice } n \in \mathbb{N} \text{ există } m \in \mathbb{N} \text{ a.î. } \mathcal{N} \vDash \varphi[e_{x \leftarrow n, y \leftarrow m}] \\
&\iff \quad \text{pentru orice } n \in \mathbb{N} \text{ există } m \in \mathbb{N} \text{ a.î. } n < m,
\end{aligned}$$

ceea ce este adevărat – se ia, de pildă, $m := n + 1$. Aşadar,

$$\mathcal{N} \vDash (\forall x \exists y \varphi)[e].$$

Pe de altă parte,

$$\begin{aligned}
\mathcal{N} \vDash (\exists y \forall x \varphi)[e] \quad &\iff \quad \text{există } m \in \mathbb{N} \text{ a.î. } \mathcal{N} \vDash (\forall x \varphi)[e_{y \leftarrow m}] \\
&\iff \quad \text{există } m \in \mathbb{N} \text{ a.î. pentru orice } n \in \mathbb{N} \\
&\qquad\quad \text{avem } \mathcal{N} \vDash \varphi[e_{x \leftarrow n, y \leftarrow m}] \\
&\iff \quad \text{există } m \in \mathbb{N} \text{ a.î. pentru orice } n \in \mathbb{N} \text{ avem } n < m,
\end{aligned}$$

ceea ce este fals. Aşadar,

$$\mathcal{N} \not\vDash (\exists y \forall x \varphi)[e].$$

$\square$