Tutoriat 10+2

„Cu de toate"

1.02.2022

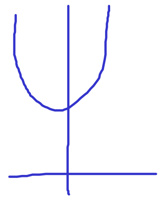
7. Se consideră funcţia $f : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$ definită astfel:

$$f(x) = \begin{cases} ax + b(1+a), & \text{dacă } x < -b, \\ ax^2 + 2a(a-1)x + a^3 - 2a^2 + a + b, & \text{dacă } x \geq -b. \end{cases}$$

Decideţi dacă funcţia f este injectivă, surjectivă, respectiv bijectivă. Calculaţi $f^{-1}([-b-1, b+1])$.

$a = 7$

$b = 6$



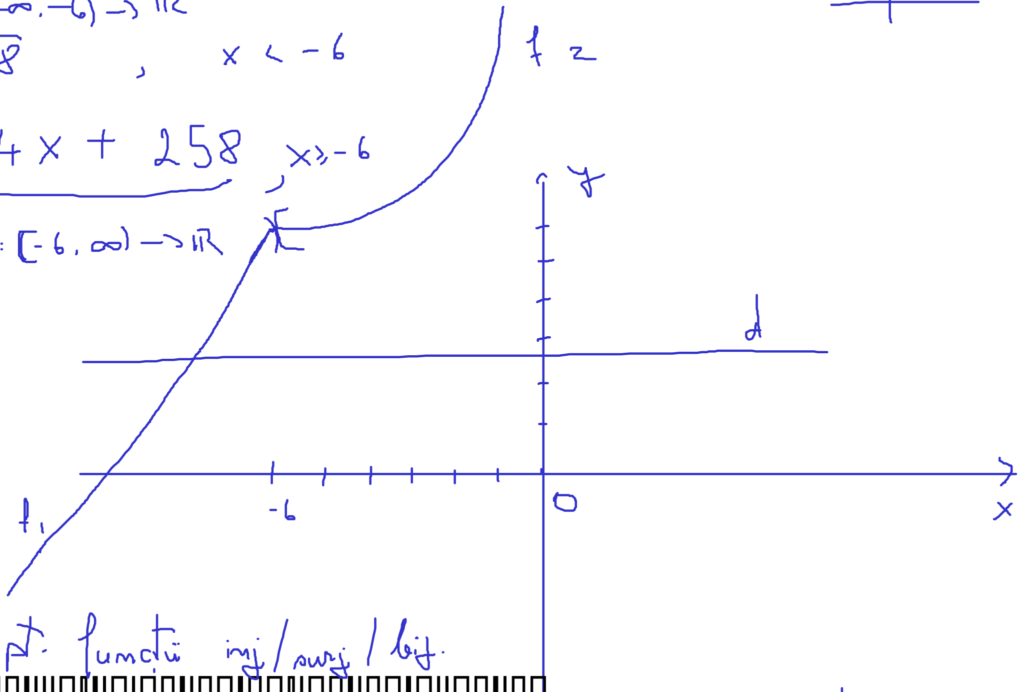
$f_1 : (-\infty, -6) \to \mathbb{R}$

$$f(x) = \begin{cases} \overbrace{7x + 48}, & x < -6 \\ \underbrace{7x^2 + 84x + 258}, & x \geq -6 \end{cases}$$

$f_2 : [-6, \infty) \to \mathbb{R}$

$\underline{f_2} : V_f = \left(-\frac{84}{14}, -\frac{-168}{28}\right)$

$= (-6, 6)$



Interpretare geometrică pt. funcții inj/surj/bij.

Paralela la Ox intersectează graficul în maxim/minim/exact un punct

- $\left.\begin{array}{l} \text{Im } f_1 = (-\infty, 6) \\ \text{Im } f_2 = [6, \infty) \end{array}\right| \Rightarrow \text{Im } f = \text{Im } f_1 \cup \text{Im } f_2 = \mathbb{R}$

  $\Rightarrow$ surjectivitate

- Cum f_1 funcție de grad 1 $\Rightarrow$ injectivă pe $(-\infty, -6)$

  $\left.\begin{array}{l} f_2 : [-6, \infty) \to \mathbb{R} \\ \min(f_2) = (-6, 6) \cdot V_f \\ f_2 \nearrow \end{array}\right| \Rightarrow f_2$ injectivă pe $[-6, \infty)$

Deci f surj, inj $\Rightarrow$ bij.

$\left(\begin{array}{l} f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad f(x) = x^2 \\ \underline{f} : [0, \infty) \to [0, \infty), \quad \bar{f} = f \quad \text{bij} \end{array} \right)$

$$f^{-1}([-7,7]) = \{x\in\mathbb{R} \mid f(x)\in[-7,7]\} = f^{-1}(\underbrace{[-7,6)}_{\subseteq \operatorname{Im} f_1} \cup \underbrace{[6,7]}_{\subseteq \operatorname{Im} f_2})$$

$\operatorname{Im} f_1 = (-\infty, 6)$

$\operatorname{Im} f_2 = [6, \infty)$

$$= \underbrace{f^{-1}([-7,6))}_{I_1} \cup \underbrace{f^{-1}([6,7])}_{I_2}$$

Concret: • $-7 \le f_1(x) < 6 \iff -7 \le 7x+48 < 6 \quad |-48$

$\iff -55 \le 7x < -42 \quad |:7>0$

$\iff -\frac{55}{7} \le x < -6 \Rightarrow \underbrace{x \in \left[-\frac{55}{7}, -6\right)}_{I_1}$

• $6 \le f_2(x) \le 7 \iff \underbrace{6 \le \overbrace{7x^2+84x+258 \le 7}}$

$I_2 = \{x$ care satisfac $\}$

$7x^2+84x+252 \ge 0$

$x^2+12x+36 \ge 0 \iff (x+6)^2 \ge 0 \Rightarrow$

$\left.\begin{array}{l} x \in \mathbb{R} \\ x \ge -6 \end{array}\right| \Rightarrow x \in [-6, \infty)$

$7x^2+84x+251 \le 0 \quad |+1$

$7x^2+84x+252 \le 1$

$7(x+6)^2 \le 1 \Rightarrow (x+6)^2 \le \frac{1}{7}$

$\Updownarrow$

$-\sqrt{\frac{1}{7}} \le x+6 \le \sqrt{\frac{1}{7}}$

$-6-\sqrt{\frac{1}{7}} \le x \le \sqrt{\frac{1}{7}}-6$

x			$-6-\sqrt{}$		-6		$-6+\sqrt{}$	
$7x^2+84x+251$	+	+	0	-	-	-	0	+

asta căutăm

Deci $I_2 = [-6, \infty) \cap \left[-6, -6+\sqrt{\frac{1}{7}}\right]$

$= \left[-6, -6+\sqrt{\frac{1}{7}}\right]$

Deci $I_1 \cup I_2 = \left[-\frac{55}{7}, -6\right) \cup \left[-6, -6+\sqrt{\frac{1}{7}}\right]$

$= \left[-\frac{55}{7}, -6+\sqrt{\frac{1}{7}}\right]$

■

Subiectul I. Pe mulţimea numerelor naturale $\mathbb{N}$ se consideră relaţia $a \sim b$ dacă şi numai dacă există $k \in \mathbb{Z}$ astfel încât $b = 3^k a$.

1. Arătaţi că $\sim$ este o relaţie de echivalenţă pe $\mathbb{N}$. (3 pct.) ✓
2. Dacă $\hat{a}$ este clasa de echivalenţă a lui $a \in \mathbb{N}$ modulo $\sim$, descrieţi $\hat{0}$, $\hat{1}$, $\hat{6}$ şi $\widehat{12}$. (2 pct.)
3. Determinaţi un sistem complet de reprezentanţi pentru $\sim$. (2 pct.)
4. Dacă $\frac{\mathbb{N}}{\sim}$ este mulţimea claselor de echivalenţă pe $\mathbb{N}$ modulo $\sim$, există $f : \frac{\mathbb{N}}{\sim} \to \mathbb{N}$ funcţie bijectivă? Dar $g : \mathbb{N} \to \frac{\mathbb{N}}{\sim}$ funcţie bijectivă? (2 pct.)

2. $a \sim b \Leftrightarrow b = 3^k a$

- $0 \sim b \Leftrightarrow b = 3^k \cdot 0 = 0 \Rightarrow \hat{0} = \{0\}$
- $1 \sim b \Leftrightarrow b = 3^k \cdot 1 = 3^k \Rightarrow \hat{1} = \{3^k \mid k \in \mathbb{Z}\}$
- $6 \sim b \Leftrightarrow b = 3^k \cdot 6 \Rightarrow \hat{6} = \{6 \cdot 3^k \mid k \in \mathbb{Z}\}$

$\hat{6} = \hat{2} = \{2 \cdot 3^p \mid p \in \mathbb{Z}\}$

- $12 \sim b \Leftrightarrow b = 12 \cdot 3^k = 4 \cdot 3^{k+1} = 4 \cdot 3^m$

$\widehat{12} = \{4 \cdot 3^m \mid m \in \mathbb{Z}\}$

- $x \sim y \Leftrightarrow y = 3^k \cdot x$ $\qquad \hat{x} = \{x \cdot 3^k \mid k \in \mathbb{Z}\}$

Descompun $x = p_1^{\alpha_1} \cdot p_2^{\alpha_2} \cdot \ldots \cdot p_m^{\alpha_m}$ $\qquad p_i \neq 3 \Leftrightarrow (x,3) = 1$

$p_1 < p_2 < \dots < p_m$ $\qquad \hat{x} = \left\{ \frac{x}{3^{\alpha_i}} 3^k \mid k \in \mathbb{Z} \right\}$

ex: $\widehat{12} = \hat{4}$, $\widehat{15} = \hat{5}$ $\qquad \alpha_i \neq 0$

$\hat{6} = \{2, 6, 18, 54, \dots\}$

3) $SCR = \mathbb{N} \setminus \{3k \mid k \in \mathbb{N}^*\}$

4) Argumente de logică cu cardinale

$|\mathbb{N}| = |\mathbb{N} \setminus 3\mathbb{N}| = \aleph_0 \Rightarrow \exists$ bijecţii.

Fie p cel mai mic număr prim din descompunerea în factori primi a lui a şi q cel mai mare număr prim mai mic sau egal cu $a+b$, diferit de p. Pentru un număr natural nenul n notăm cu $\exp_p(n)$ exponentul la care apare p în descompunerea în factori primi a lui n. Considerăm pe $\mathbb{N}$ relaţia binară ρ dată astfel: $m\rho n$ dacă $\exp_p(n) = \exp_p(m)$ şi $\exp_q(n) = \exp_q(m)$. Să se arate că ρ este relaţie de echivalenţă, să se calculeze clasele de echivalenţă ale lui a şi b şi să se determine un sistem complet de reprezentanţi pentru această relaţie de echivalenţă.

$a = 7$

$b = 6$

$p = 7$

$q = 13$

$$m \sim n \iff \exp_7(m) = \exp_7(n)$$
$$\exp_{13}(m) = \exp_{13}(n)$$

$$m \sim n \iff \underbrace{\exp_7(m)}_{=\alpha} = \exp_7(n) \Rightarrow 7^\alpha \mid n$$
$$\underbrace{\exp_{13}(m)}_{=\beta} = \exp_{13}(n) \Rightarrow 13^\beta \mid n$$

$(k, 7) = (k, 13) = 1$

Deci $\hat{m} = \{ 7^\alpha \cdot 13^\beta k \mid k \in \mathbb{N}^*, \alpha, \beta$ de mai sus$\}$

$\hat{6} = \hat{10} = \hat{15} = \widehat{29}$

SCR = $\mathbb{N}$

4. Determinaţi numărul elementelor de ordin 24 din grupul produs direct $\underbrace{(\mathbb{Z}_{2^7},+)\times(\mathbb{Z}_{3^7},+)}_{G}$, cu $\mathbb{Z}_{2^7} = \mathbb{Z}_{128}$ și $\mathbb{Z}_{3^7} = \mathbb{Z}_{2187}$.

$\mathbb{Z}_{128} \times \mathbb{Z}_{2187}$

$(\hat{x}, \hat{y})$

$$o((\hat{x},\hat{y})) = 24 = [\,o_{\mathbb{Z}_{128}}(\hat{x}),\ o_{\mathbb{Z}_{2187}}(\hat{y})\,]$$

~~Variante: $[1,24], [2,24], [3,24], \dots, [12,24], [24,24]$~~ $[4,24]$

~~și invers~~

<u>Reamintire</u>: în $(\mathbb{Z}_n,+)$, $x \in \mathbb{Z}_n$, $o(x) \mid n$

Variante posibile: $[8, 3]$

[illegible]

Căutăm $\hat{x}$ în $\mathbb{Z}_{128}$ a.î. $\widehat{8x} = \hat{0} \pmod{128}$

$$\widehat{2^3 x} \equiv \hat{2^7} \equiv \hat{0} \pmod{128}$$

$128 = 2^7$

$$o(x) = \frac{128}{(x,128)}$$

$\frac{128}{8} = (x,128)$

$\Rightarrow (128, x) = 16 \Rightarrow \underline{\hat{x} \in \{16, 48, 80, 112\}} \Rightarrow 4$ elem.

Căutăm $x = 2^4 \cdot$ ceva, ceva $\in \mathbb{N}^*$

$x \in \{2^4, \cancel{32}, 48, \cancel{64}, 80, \cancel{96}, 112\}$

Căutăm y în $\mathbb{Z}_{2187}$ cu $o(y) = 3$

$$3 = o(y) = \frac{2187}{(y,2187)} \Rightarrow 729 = (y, 2187) \Rightarrow y \in \{729, 1458\}$$

$\Rightarrow 2$ elem.

Deci elemente de ordin 24 în G sunt $4 \cdot 2 = \underline{8}$

$n = p^m$. divizorii lui $n = p^k$, $k \leq m$

Problema 2. Fie $G = U(\mathbb{Z}_{48})$, grupul elementelor inversabile din monoidul $(\mathbb{Z}_{48}, \cdot)$.

(1) Determinați ordinul lui G. (5 p.)

(2) Arătați că $G \simeq \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_4$. (5 p.)

(3) În G considerăm subgrupul $H = \langle \hat{5} \rangle$. Determinați ordinul lui H. (5 p.)

(4) Cu ce grup este izomorf G/H? (5 p.)

16 elem.: $\mathbb{Z}_{16}$, $\mathbb{Z}_4 \times \mathbb{Z}_4$, $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_4$, $\mathbb{Z}_8 \times \mathbb{Z}_2$, $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$

(1) $|G| = \varphi(48) = 48 \cdot \left(1 - \frac{1}{2}\right) \cdot \left(1 - \frac{1}{3}\right) = 48 \cdot \frac{1}{\cancel{2}} \cdot \frac{\cancel{2}}{3} = 16$

(2) $\underbrace{\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_4}_{M}$, $|M| = 16 = 2^4$

$x \in M$, $o(x) \in \{1, 2, 4\}$

$G = \{1, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 25, 29, 31, 35, 37, 41, 43, 47\}$

Vrem: ordinele elem. lui G

$o(1) = 1$

$o(5) = 4$

$5^2 = 25$

$5^4 = 625 \overset{48}{\equiv} 1$

$o(7) = 2$

$o(11) = 4$

$11^2 = 121 \overset{48}{\equiv} 25$

$o(47) = o(-1) = 2$

$o(43) = o(-5) = 4$

Vă las să vedeți că $o(y)$, $y \in G$ $\in \{1, 2, 4\}$

$\Rightarrow G \simeq M$

(3) $H = \langle \hat{5} \rangle$ $\qquad o_G(5) = 4 \Rightarrow |H| = 4$

$H = \{\hat{1}, \hat{5}, \widehat{25}, \widehat{29}\}$

$H' = \langle 7, 5 \rangle \Rightarrow H' = \{7^\alpha \cdot 5^\beta \mid \alpha, \beta \in \mathbb{N}\}$

Încercați voi

(4) G/H $\qquad$ Din Lagrange, $\underset{16}{|G|} = \underset{4}{|H|} \cdot |G/H| \Rightarrow |G/H| = 4$

$\Downarrow$ comutativ

$G/H \simeq \mathbb{Z}_4$

$\simeq \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$

$G/_{H}$

$\bar{1} = \{\hat{1}, \hat{5}, \widehat{25}, \widehat{29}\} = \hat{1}H = \langle 5 \rangle$

$\bar{x}, \bar{y} \in G/_{H}$

$\bar{x} \cap \bar{y} = \emptyset$

$\bar{7} = \hat{7}H = \hat{7}\{\hat{1}, \hat{5}, \widehat{25}, \widehat{29}\} = \{\hat{7}, \widehat{35}, \widehat{31}, \widehat{11}\}$

$\overline{13} = \widehat{13}H = \{\widehat{13}, \widehat{17}, \widehat{37}, \widehat{41}\}$

$\overline{19} = \{\widehat{19}, \widehat{23}, \widehat{43}, \widehat{47}\}$

$G/_{H} = \{\bar{1}, \bar{7}, \overline{13}, \overline{19}\}$

$\cdot$	$\bar{1}$	$\bar{7}$	$\overline{13}$	$\overline{19}$
$\bar{1}$	$\bar{1}$	$\bar{7}$	$\overline{13}$	$\overline{19}$
$\bar{7}$	$\bar{7}$	$\bar{1}$	$\overline{19}$	$\overline{13}$
$\overline{13}$	$\overline{13}$	$\overline{43} = \overline{19}$	$\bar{1}$	$\bar{7}$
$\overline{19}$	$\overline{19}$	$\overline{37} = \overline{13}$	$\bar{7}$	$\bar{1}$

$\bar{x} \in G/_{H}, \quad \bar{x}^2 = \bar{1}$

$\bar{x} \neq \bar{1}$

$\Downarrow$

$o(\bar{x}) = 2$

$\Downarrow \; o \neq 4$

$$\boxed{G/_{H} \simeq \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2}$$

Subiectul IV.

1. În inelul de polinoame $\mathbb{Z}_{350}[X]$, există divizori ai lui zero nenuli ce nu sunt elemente nilpotente? Dar polinoame inversabile de grad n, n număr natural nenul? (2+2 pct.)

2. Arătaţi că $f = X^3 + X^2 + \hat{1}$ este un polinom ireductibil în $\mathbb{Z}_2[X]$. Descrieţi inelul factor $L = \frac{\mathbb{Z}_2[X]}{f\mathbb{Z}_2[X]}$ şi determinaţi elementele inversabile din L. (3 pct.)

1) . Polinoame inversabile în $A[X]$

$f = a_n X^n + a_{n-1} X^{n-1} + \dots + a_1 X + a_0$

f inversabil în $A[X] \Leftrightarrow a_0$ inversabil în A

. Divizorii – ciu ciu

2) $f = X^3 + X^2 + \hat{1}$ ired în $\mathbb{Z}_2[X]$

$f(\hat{0}) = f(\hat{1}) = \hat{1} \Rightarrow f$ nu are factori liniari (de grad 1)

$\deg f = 3 \Rightarrow f$ ired.

$L = \frac{\mathbb{Z}_2[X]}{(X^3+X^2+\hat{1})} = \{aX^2 + bX + c \mid a, b, c \in \mathbb{Z}_2,\ X^3 + X^2 = -1\}$

$\hat{f} \in L$ inversabil $\Rightarrow c = \hat{1}$

$\hat{f} = aX^2 + bX + c$

$\mathbb{Z}_2 = \{\hat{0}, \hat{1}\}$

$aX^2 + bX + \hat{1}$, $a \in \{0, 1\}$, $b \in \{0, 1\}$

3. Este $f = X^4 + X^2 + \hat{1}$ polinom reductibil în $\mathbb{Z}_3[X]$? În caz afirmativ, descompuneţi f în produs de polinoame ireductibile. (2 pct.)

1) Factori de grad 1

$f(\hat{0}) = \hat{1}$

$f(-\hat{1}) = f(\hat{2}) = \hat{0} \Rightarrow X + \hat{1} \mid f$

$f(\hat{1}) = \hat{0} \Rightarrow X - \hat{1} \mid f$

$$\begin{array}{l|l} X^4 + X^2 + \hat{1} & X + \hat{1} \\ \hline -\ X^4 + X^3 & X^3 + 2X^2 + 2X + \hat{1} \\ \quad 2X^3 + X^2 + \hat{1} & \\ -\ 2X^3 + 2X^2 & \\ \quad 2X^2 + \hat{1} & \\ -\ 2X^2 + 2X & \\ \quad X + \hat{1} & \end{array}$$

$$\begin{array}{l|l} X^3+2X^2+2X+\hat{1} & X-\hat{1} \\ \hline X^3+2X^2 & X^2+2 \\ \hline = \quad 2X+\hat{1} & \\ - \quad \underline{2X-2} & \\ \quad\quad 0 & \end{array}$$

$$f = (X-\hat{1})(X+\hat{1})(X^2+\hat{2})$$

$$\underset{(X^2-1)^2}{\shortparallel}$$

$$f = (X-\hat{1})^2(X+\hat{1})^2$$

Problema 4. Fie $I = (3, X^3 - X^2 + 2X + 1)$ ideal în $\mathbb{Z}[X]$.

(i) Daţi exemplu de un polinom din $\mathbb{Z}[X]$ care nu aparţine lui I. **(2 pct.)**

(ii) Există $f \in \mathbb{Z}[X]$ astfel încât $(f) = I$? **(3 pct.)**

(iii) Să se arate că inelele factor $\frac{\mathbb{Z}[X]}{I}$ şi $\frac{\mathbb{Z}_3[X]}{(X^3+\hat{2}X^2-X+\hat{1})}$ sunt izomorfe. Este $\frac{\mathbb{Z}[X]}{I}$ corp? **(2+2 pct.)**

1) $I = 3f(x) + (X^3 - X^2 + 2X + 1)g(x)$, $f, g \in \mathbb{Z}[x]$

ex: $2X^2 + 1 \in \mathbb{Z}[x]$, $\notin I$

Într-un ideal, nu există elemente inversabile

$1 \notin I$

2) Verificăm dacă I ideal principal (adică $I = (f)$, $f \in \mathbb{Z}[x]$)

p.p. $I = (f)$, $f \neq 1$ $\Rightarrow$ $3 \in (f) \Rightarrow 3 = fg$, $g \in \mathbb{Z}[x]$

$\Downarrow$

f, g constante $\Rightarrow f = 3$

$\underbrace{X^3 - X^2 + 2X + 1}_{h} \in I \Rightarrow h \in (3) = 3\mathbb{Z}$

Ab

3) $\frac{\mathbb{Z}[x]}{I} = \frac{\mathbb{Z}[x]}{(3, X^3 - X^2 + 2X + 1)} \simeq \frac{\mathbb{Z}_3[x]}{(X^3 - X^2 + 2X + 1)}$

Calculați $7^{7^{17^{17}}} \pmod{29}$.

Din Fermat, $7^{28} \equiv 1 \ (29)$. Notăm $N := 7^{17^{17}}$ și dorim să calculăm $N \bmod 28 =: x$, iar apoi $7^N = 7^x \ (29)$ (*)

Vrem să calculăm $7^{17^{17}} \ (28)$

$7^{17^{17}} \equiv 0 \ (7)$

$7^{17^{17}} \overset{4}{\equiv} (-1)^{17^{17}} = \overset{3}{\overset{\shortparallel}{-1}} \ (4)$

$(4,7) = 1$

$\xrightarrow[\text{chinezești a Resturilor}]{\text{Lema}}$ $\begin{cases} x \equiv 0 \ (7) \Rightarrow x \in \{0, 7, 14, 21\} \\ x \equiv 3 \ (4) \\ 0 \le x < 28 \end{cases}$

Vedem că doar $x = 7$ satisface

$\Rightarrow x = 7$, adică $N \equiv 7 \ (28)$

Ne întoarcem în (*): $7^7 = 7^2 \cdot 7^2 \cdot 7^2 \cdot 7 \overset{29}{\equiv} (-9) \cdot (-9)(-9) \cdot 7 \equiv$

$\equiv 81 \cdot (-63) \overset{29}{\equiv} -6 \cdot 5 \equiv 1 \ (29)$