FMI, Info, Anul I
Logică matematică şi computaţională

Seminar 5

(S5.1) Confirmaţi sau infirmaţi:

(i) pentru orice φ, $\psi \in Form$, $\vDash \varphi \wedge \psi$ dacă şi numai dacă $\vDash \varphi$ şi $\vDash \psi$;

(ii) pentru orice φ, $\psi \in Form$, $\vDash \varphi \vee \psi$ dacă şi numai dacă $\vDash \varphi$ sau $\vDash \psi$.

Demonstraţie:

(i) Este adevărat. Avem:

$$\begin{aligned}
\vDash \varphi \wedge \psi &\iff \text{pentru orice } e : V \to \{0,1\}, e^+(\varphi \wedge \psi) = 1 \\
&\iff \text{pentru orice } e : V \to \{0,1\}, e^+(\varphi) \mathbin{\pmb{\wedge}} e^+(\psi) = 1 \\
&\iff \text{pentru orice } e : V \to \{0,1\}, e^+(\varphi) = 1 \text{ şi } e^+(\psi) = 1 \\
&\iff \text{pentru orice } e : V \to \{0,1\}, e^+(\varphi) = 1 \text{ şi} \\
&\qquad\ \text{pentru orice } e : V \to \{0,1\}, e^+(\psi) = 1 \\
&\iff \vDash \varphi \text{ şi} \vDash \psi.
\end{aligned}$$

(ii) Nu este adevărat! Dacă luăm $e_1 : V \to \{0,1\}$, astfel încât, pentru orice $x \in V$, $e_1(x) = 1$, şi $e_2 : V \to \{0,1\}$, astfel încât, pentru orice $x \in V$, $e_2(x) = 0$, avem că $e_1 \not\vDash \neg v_0$ şi $e_2 \not\vDash v_0$, deci v_0 şi $\neg v_0$ nu sunt tautologii, pe când $v_0 \vee \neg v_0$ este tautologie.

$\square$

(S5.2) Să se găsească toate modelele fiecăreia dintre mulţimile de formule:

(i) $\Gamma = \{v_n \to v_{n+1} \mid n \in \mathbb{N}\}$;

(ii) $\Gamma = \{v_0\} \cup \{v_n \to v_{n+1} \mid 0 \leq n \leq 7\}$.

Demonstraţie:

(i) Fie $e : V \to \{0,1\}$ şi $n \in \mathbb{N}$. Atunci $e \vDash v_n \to v_{n+1}$ dacă şi numai dacă $e^+(v_n \to v_{n+1}) = 1$ dacă şi numai dacă $e^+(v_n) \rightarrow e^+(v_{n+1}) = 1$ dacă şi numai dacă $e(v_n) \rightarrow e(v_{n+1}) = 1$ dacă şi numai dacă $e(v_n) \leq e(v_{n+1})$. Prin urmare,

$$\begin{array}{lll} e \vDash \Gamma & \text{dacă şi numai dacă} & \text{pentru orice } n \in \mathbb{N},\ e(v_n) \leq e(v_{n+1}) \\ & \text{dacă şi numai dacă} & e(v_0) \leq e(v_1) \leq \ldots \leq e(v_n) \leq e(v_{n+1}) \leq \ldots \\ & \text{dacă şi numai dacă} & (\text{pentru orice } v \in V,\ e(v) = 0) \\ & & \text{sau (există } k \in \mathbb{N} \text{ a.î. pentru orice } i < k,\ e(v_i) = 0 \text{ şi}, \\ & & \text{pentru orice } i \geq k,\ e(v_i) = 1). \end{array}$$

Definim $e^\infty : V \to \{0,1\}$ astfel încât, pentru orice $v \in V$, $e^\infty(v) = 0$ şi, pentru orice $k \in \mathbb{N}$, $e_k : V \to \{0,1\}$, astfel încât, pentru orice $n \in \mathbb{N}$,

$$e_k(v_n) = \begin{cases} 0 & \text{dacă } n < k \\ 1 & \text{dacă } n \geq k. \end{cases}$$

Atunci

$$Mod(\Gamma) = \{e_k \mid k \in \mathbb{N}\} \cup \{e^\infty\}.$$

(ii) Fie $e : V \to \{0,1\}$. Atunci

$$\begin{array}{lll} e \vDash \Gamma & \text{dacă şi numai dacă} & e \vDash v_0 \text{ şi, pentru orice } 0 \leq n \leq 7,\ e \vDash v_n \to v_{n+1} \\ & \text{dacă şi numai dacă} & e(v_0) = 1 \text{ şi } e(v_0) \leq e(v_1) \leq \ldots \leq e(v_7) \leq e(v_8) \\ & \text{dacă şi numai dacă} & \text{pentru orice } n \in \{0, 1, \ldots, 8\},\ e(v_n) = 1\ . \end{array}$$

Aşadar,

$$Mod(\Gamma) = \{e : V \to \{0,1\} \mid e(v_n) = 1 \ \text{ pentru orice } 0 \leq n \leq 8\}.$$

□

(S5.3) Fie $\Gamma \subseteq Form$ şi φ, $\psi \in Form$. Să se demonstreze:

(i) Dacă $\Gamma \vDash \varphi$ şi $\Gamma \vDash \varphi \to \psi$, atunci $\Gamma \vDash \psi$.

(ii) $\Gamma \cup \{\varphi\} \vDash \psi$ dacă şi numai dacă $\Gamma \vDash \varphi \to \psi$.

(iii) $\Gamma \vDash \varphi \land \psi$ dacă şi numai dacă $\Gamma \vDash \varphi$ şi $\Gamma \vDash \psi$.

Demonstraţie:

(i) Fie e un model al lui Γ. Vrem să arătăm că e este model al lui ψ. Cum $\Gamma \vDash \varphi$ şi $\Gamma \vDash \varphi \to \psi$, avem $e \vDash \varphi$ şi $e \vDash \varphi \to \psi$. Atunci $e^+(\varphi) = 1$ şi $e^+(\varphi \to \psi) = 1$. Deoarece $e^+(\varphi \to \psi) = e^+(\varphi) \rightarrow e^+(\psi) = 1 \rightarrow e^+(\psi) = e^+(\psi)$, rezultă că $e^+(\psi) = 1$, adică $e \vDash \psi$.

(ii) "$\Rightarrow$" Fie e un model al lui Γ. Vrem să arătăm că e este model al lui $\varphi \to \psi$. Avem două cazuri:

   (a) $e^+(\varphi) = 0$. Atunci $e^+(\varphi \to \psi) = 0 \rightarrow e^+(\psi) = 1$, deci $e \vDash \varphi \to \psi$.

   (b) $e^+(\varphi) = 1$, deci $e \vDash \varphi$. Atunci $e \vDash \Gamma \cup \{\varphi\}$, şi prin urmare, $e \vDash \psi$, adică $e^+(\psi) = 1$. Rezultă că $e^+(\varphi \to \psi) = 1 \rightarrow 1 = 1$, deci $e \vDash \varphi \to \psi$.

   "$\Leftarrow$" Fie e un model al lui $\Gamma \cup \{\varphi\}$. Atunci $e^+(\varphi) = 1$ şi $e \vDash \Gamma$, deci, din ipoteză, $e^+(\varphi \to \psi) = 1$. Obţinem atunci, ca la (i), că $e^+(\psi) = 1$, adică $e \vDash \psi$.

(iii) $\Gamma \vDash \varphi \wedge \psi \iff$ pentru orice model e al lui Γ, avem $e^+(\varphi \wedge \psi) = 1 \iff$ pentru orice model e al lui Γ, avem $e^+(\varphi) = e^+(\psi) = 1 \iff$ pentru orice model e al lui Γ, avem $e \vDash \varphi$ şi $e \vDash \psi \iff \Gamma \vDash \varphi$ şi $\Gamma \vDash \psi$.

□

Notaţie. *Pentru orice mulţime Γ de formule şi orice formulă φ, notăm cu $\Gamma \vDash_f \varphi$ (şi citim* **din Γ se deduce semantic finit** *φ) faptul că există o submulţime finită Δ a lui Γ a.î. $\Delta \vDash \varphi$.*

(S5.4) Să se arate că pentru orice mulţime de formule Γ şi orice formulă φ avem că $\Gamma \vDash_f \varphi$ dacă şi numai dacă $\Gamma \cup \{\neg\varphi\}$ nu este finit satisfiabilă.

Demonstraţie:

Avem întâi că $\Gamma \vDash_f \varphi \iff$ există $\Delta \subseteq \Gamma$ finită cu $\Delta \vDash \varphi \iff$ (din Propoziţia 2.30.(i)) există $\Delta \subseteq \Gamma$ finită cu $\Delta \cup \{\neg\varphi\}$ nesatisfiabilă (*).
Apoi, cum o mulţime finit satisfiabilă înseamnă o mulţime pentru care orice submulţime finită a sa e satisfiabilă, avem că $\Gamma \cup \{\neg\varphi\}$ nu e finit satisfiabilă $\iff$ există $\Delta' \subseteq \Gamma \cup \{\neg\varphi\}$ finită astfel încât Δ' e nesatisfiabilă (**).
Noi vrem să arătăm că (*) este echivalent cu (**).
Pentru "(*) implică (**)", luăm $\Delta' := \Delta \cup \{\neg\varphi\}$, ce este, clar, o submulţime finită a lui $\Gamma \cup \{\neg\varphi\}$.
Pentru "(**) implică (*)", luăm $\Delta := \Delta' \cap \Gamma$. Clar, Δ este o submulţime finită a lui Γ. Rămâne de arătat că $\Delta \cup \{\neg\varphi\}$ e nesatisfiabilă. Cum $\Delta' \subseteq \Gamma \cup \{\neg\varphi\}$, avem:

$$\Delta' = \Delta' \cap (\Gamma \cup \{\neg\varphi\}) = (\Delta' \cap \Gamma) \cup (\Delta' \cap \{\neg\varphi\}) = \Delta \cup (\Delta' \cap \{\neg\varphi\}) \subseteq \Delta \cup \{\neg\varphi\}.$$

Cum Δ' e nesatisfiabilă, rezultă că şi $\Delta \cup \{\neg\varphi\}$ e nesatisfiabilă. □

(S5.5) Demonstraţi că următoarele afirmaţii sunt echivalente:

(V1) Pentru orice $\Gamma \subseteq Form$, Γ este satisfiabilă ddacă Γ este finit satisfiabilă.

(V2) Pentru orice $\Gamma \subseteq Form$, Γ este nesatisfiabilă ddacă Γ nu este finit satisfiabilă.

(V3) Pentru orice $\Gamma \subseteq Form$, $\varphi \in Form$, $\Gamma \vDash \varphi$ dacă şi numai dacă $\Gamma \vDash_f \varphi$.

Demonstraţie:

Echivalenţa între (V1) şi (V2) este evidentă.

Demonstrăm că (V2) $\Rightarrow$ (V3):

$$
\begin{aligned}
\Gamma \vDash \varphi \quad &\Longleftrightarrow \quad \Gamma \cup \{\neg\varphi\} \text{ este nesatisfiabilă (conform Propoziţiei 2.30.(i))} \\
&\Longleftrightarrow \quad \Gamma \cup \{\neg\varphi\} \text{ nu este finit satisfiabilă (conform (V2) pentru } \Gamma \cup \{\neg\varphi\}) \\
&\Longleftrightarrow \quad \Gamma \vDash_{\mathrm{f}} \varphi \text{ (conform (S5.4)).}
\end{aligned}
$$

Demonstrăm că (V3) $\Rightarrow$ (V2):

$$
\begin{aligned}
\Gamma \text{ este nesatisfiabilă} \quad &\Longleftrightarrow \quad \Gamma \vDash \bot \text{ (conform Propoziţiei 2.29)} \\
&\Longleftrightarrow \quad \Gamma \vDash_{\mathrm{f}} \bot \text{ (conform (V3) pentru } \Gamma \text{ şi } \bot) \\
&\Longleftrightarrow \quad \text{există o submulţime finită } \Delta \text{ a lui } \Gamma \text{ a.î. } \Delta \vDash \bot \\
&\Longleftrightarrow \quad \text{există o submulţime finită } \Delta \text{ a lui } \Gamma \text{ a.î.} \\
&\qquad\quad\; \Delta \text{ este nesatisfiabilă (conform Propoziţiei 2.29)} \\
&\Longleftrightarrow \quad \Gamma \text{ nu este finit satisfiabilă.}
\end{aligned}
$$

$\square$