Limbaje formale şi automate

Seriile 13 si 15

Săptămâna 5, 16 martie 2021

Andrei Păun

Cuprinsul cursului:
16 martie 2021

- Noțiuni despre limbajele DFA
- Lema de pompare pentru limbajele DFA
- Exerciții cu lema de pompare
- Exerciții din examenele anterioare

Noțiuni despre limbajele DFA

- Sunt toate limbajele modelate de către DFA-uri?
- Nu!
  - Majoritatea limbajelor NU sunt regulate/DFA
- De ce?
  - Automatul finit are memorie finită.
- Cum putem arăta că un limbaj este regulat?
- Cum putem arăta că un limbaj nu este regulat?

Limbajele finite

- ***Teoremă***: Orice limbaj finit L este modelat de un DFA

- ***Demonstrație***:
  - Pentru fiecare cuvânt din L se poate construi câte un automat (linie) cu stări disjuncte
  - Se mai definește o stare, cu λ-mişcări către stările inițiale ale automatelor
  - Se transformă λ-NFA în NFA şi apoi în DFA

Limbajele infinite

- Limbajele infinite pot fi regulate/DFA sau neregulate

- Exemplu de limbaj infinit regulat:

$$L=\{0^n \mid n\geq 0\}$$

- Exemplu de limbaj infinit ne-regulat :

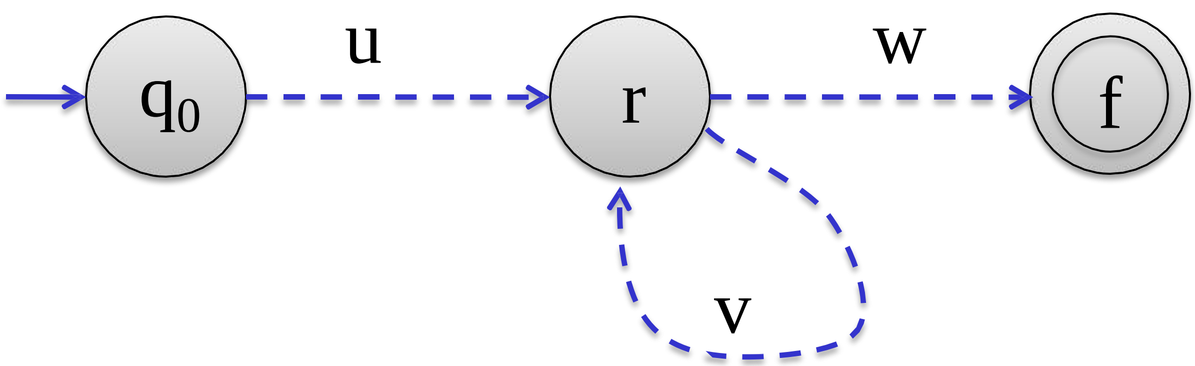
$$L = \{0^n 1^n \mid n\geq 0\}$$

Lema de pompare pentru limbajele DFA

- Teoremă importantă în zona de automate finite
- Apare la examen în mod frecvent
- Orice limbaj regulat/DFA satisface această lema/proprietate
- Dacă un limbaj nu are această proprietate atunci acel limbaj NU este regulat

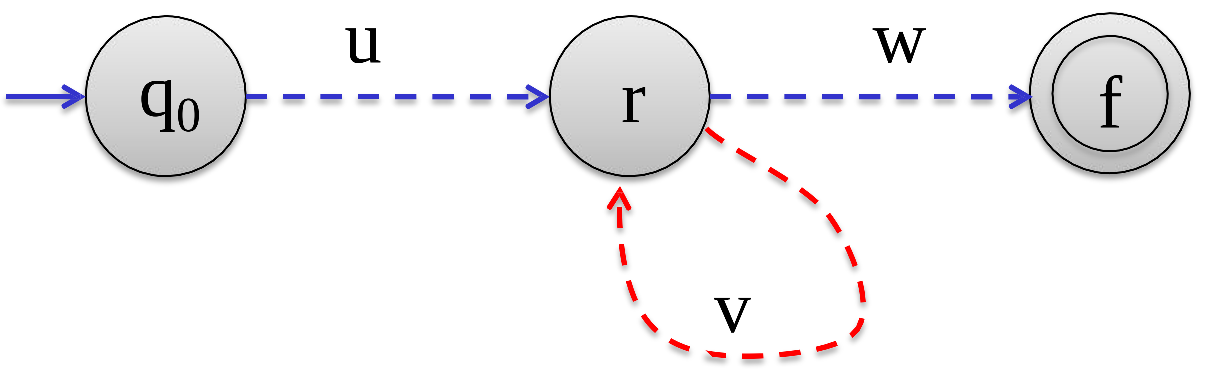
Ideea de bază

- Să presupunem că numărul de stări din automat este p
- Orice cuvânt w, |w|≥p trebuie să aibă un ciclu
- Notam cuvântul procesat prin acest ciclu cu v, cuvântul pana în ciclu cu u şi cuvântul după ciclu cu w



Lema de pompare (cont.)

- Ciclul poate fi repetat de oricâte ori şi apoi să se meargă cu w către o stare finală
- Deci partea v poate fi “pompata”
- Așadar mergem prin u până în starea care începe ciclul respectiv, apoi mergem de oricâte ori prin ciclu cu v, şi în final, mergem cu w către o stare finală şi acceptăm şi acest cuvânt.



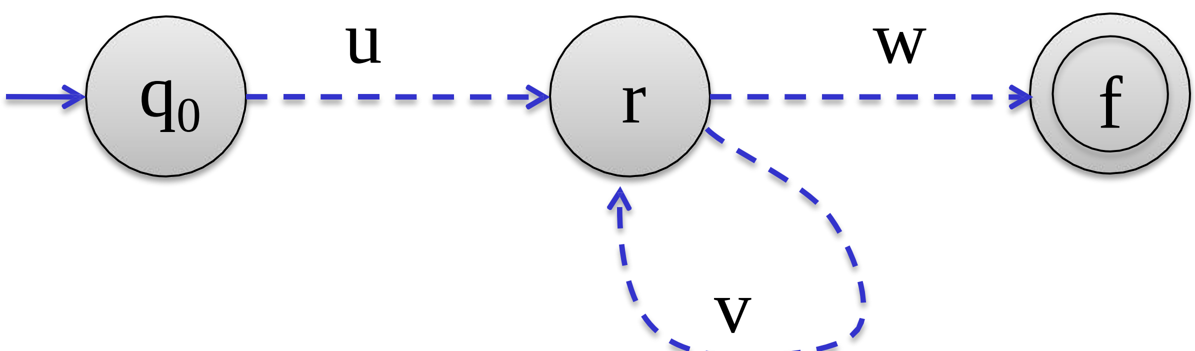
Lema de pompare

Lema: Fie L un limbaj regulat, există atunci un număr p astfel încât **orice** cuvânt $z \in L$, cu proprietatea că $|w| \geq p$, **poate** fi descompus în trei părți *z=uvw* astfel încât:

1. $|uv| \leq p$

2. $|v| > 0$

3. Pentru orice $i \geq 0$ avem că $uv^iw \in L$



Descriere informală

- Pentru fiecare limbaj regulat există un număr/o constantă p (care nu se modifică) pentru care lema de pompare spune că orice cuvânt de lungime mai mare decât această constantă se poate descompune în 3 componente (uvw) iar partea din mijloc u poate fi pompată
- În plus partea din mijloc (care e pompată) are cel puțin o literă
- Prefixul şi/sau sufixul (u sau w) pot fi λ
- Partea pompată face parte din primele p litere ale cuvântului.

Demonstrație formală

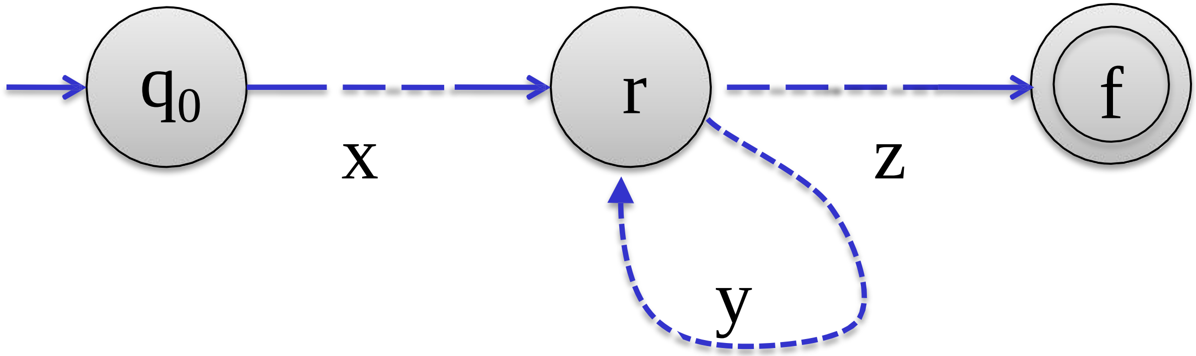
- Fie un automat DFA M automatul care modelează limbajul L. Fie p numărul de stări ale automatului M.
- Fie z un cuvânt din L de lungime mai mare sau egală cu p.
- Considerăm prefixul de lungime exact p litere al lui z şi procesarea prin automatul M a acestui prefix.
- Plecăm din starea inițială q_0 şi apoi fiecare stare va procesa câte o literă din prefixul de p litere considerat
- Pentru că considerăm cuvântul de lungime p, vom ajunge în starea q_p, deci trecem prin $p+1$ stări

Demonstrație formală (cont.)

- Din principiul cutiei şi pentru că avem p stări în automatul M, dar prefixul de lungime p al cuvântului va fi procesat de n+1 stări rezultă că cel puțin o stare apare de două ori
- Notăm o asemenea stare care apare de două ori cu *r*.
- Fie cuvântul u prefixul lui z cu care se ajunge în prima apariție a lui r
- Fie v subșirul din z (care apare imediat după u în z) prin care se ajunge din r în aceeași stare r.
- Fie w sufixul lui z pe care îl citim după v. Adică uv concatenat cu w ne dă z

Demonstrație formală (cont.)

- *w ne va duce din starea r intr-o stare finală*
- *u este un cuvânt care ciclează din r în aceeași stare r.*
- *de asemenea v are cel puțin o literă pentru că ne mutăm din stare în stare cu cel puțin o literă; uv fac parte din primele p litere ale cuvântului z, deci* $|uv| \leq p$



Demonstrație formală (cont.)

- De vreme ce cuvântul z e acceptat rezultă că există un drum de la starea r la o stare finală f, $q_0 \rightarrow r \rightarrow f$; asta înseamnă că cuvântul uw nu va merge prin ciclu şi va ajunge la starea finală f. ($uv^0w=uw$).
- Pe de altă parte, se poate merge un număr arbitrar de ori prin ciclu şi tot se ajunge în starea finală f: (uv^iw).

Demonstrație formală (cont.)

- așadar cuvântul z se poate descompune în cele trei părți u, v, w cu proprietățile

$|uv| \leq p$ deoarece am ales prefixul de exact p litere şi din acest prefix am definit v ca fiind bucata pe ciclul respectiv

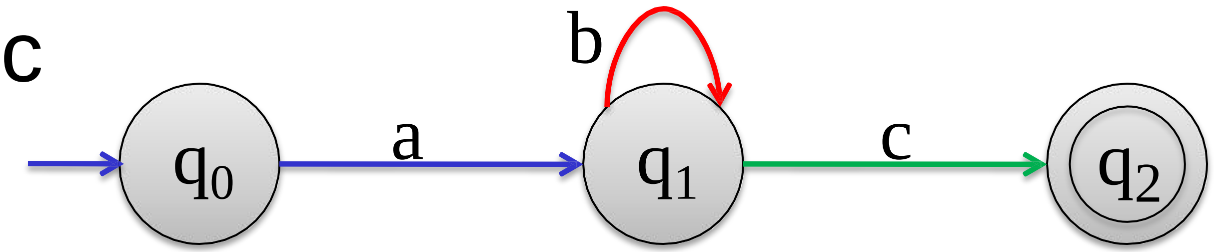
$|v| > 0$ pentru că ciclul are cel puțin o literă

Pentru orice $i \geq 0$ avem că $uv^i w \in L$

Q.E.D.

Exemplu de limbaj

$L = ab^*c$



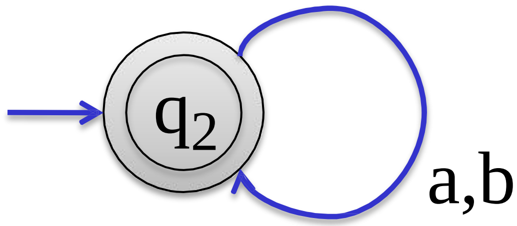
pentru orice cuvânt de lungime mai mare de 3 din L putem să îl scriem ca uvw,

în cazul de față

u=a; v=b (sau b^k cu k>1) si w=c (sau w= $b^l c$)

Evident, orice cuvânt $uv^iw \in L$

Un alt exemplu

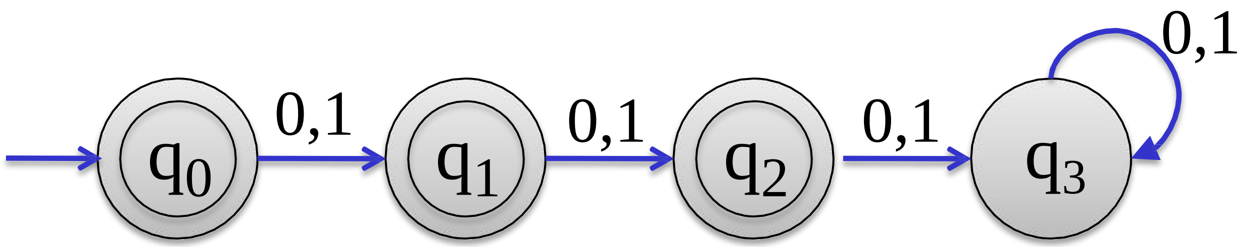


acceptă toate cuvintele peste alfabetul $\Sigma=\{a,b\}$, deci $L=\Sigma^*$

în acest caz putem lua u şi w cuvântul vid λ

Cazul limbajelor finite

O imagine grafică ar fi un automat de genul următor:



A are 4 stări. *L(A) conține toate cuvintele de lungime 2 sau mai puțin*. *L(A) este regulat doar că lema de pompare nu pare să funcționeze aici. De ce*???

Teoremă: Daca un DFA A are limbajul acceptat finit si numărul de stări din A este n, atunci lungimea celui mai lung cuvânt din L este mai mică decât n (|z|< n)

Dem: dacă $\exists(w \in L$ şi $|w| \geq n)$ atunci $\exists(w=xyz)$ astfel încât 1+2+3 există, proprietatea 3 îmi dă L infinit ceea ce ar fi o contradicție.

Utilizarea Lemei de Pompare

Utilizarea Lemei este de a demonstra ca un limbaj NU ESTE regulat, daca vrem sa demonstram ca un limbaje ESTE regulat, e suficient sa dam un automat pentru acel limbaj.

Tehnica de demonstrație: prin reducere la absurd

1. Presupunem prin absurd ca limbajul ESTE regulat.
2. Atunci exista un p fix pentru L si căutam/gasim un cuvânt w de lungime mai mare decat p
3. Demonstram ca nu exista nicio descompunere a lui w in w=uvw astfel incat avem toate cele 3 proprietati din L.P. De fapt proprietățile 1 si 2 ne dau restricții pentru u dar mai ales pentru v iar din proprietatea 3 vom avea contradicția

Atentie!

- Lema: daca L este regulat $\exists n$, a.i. $\forall(w \in L$, si $|w| \geq n)$ $\exists$ (w=xyz) a.i. 1+2+3
  - regulat(L) $\Rightarrow$ lema (L).
  - lema (L) $\not\Rightarrow$ regulat(L).
  - ~lema(L) $\Rightarrow$ ~regulat(L).
  - Ca sa aratam ca L nu e regulat vom arata ca $\forall n$, $\exists(w \in L$ cu proprietatea $|w| \geq n)$ a.i. $\forall$(w=xyz) , ~1 or ~2 or ~3. (deobicei 1 si 2 si ~3)

Greseli comune

- $\exists w \in L$ a.i. lema(w) $\Rightarrow$ regulat(L)
- $\forall w \in L$, lema(w) $\Rightarrow$ regulat(L)
- $\exists w \in L$ si $\exists$(w=uvw) a.i. $uv^iw \notin L \Rightarrow$ ~regulat(L)
  (trebuie aratat pentru toate posibilele descompuneri)
- $\exists w \in L$ si $\forall$(w=uvw) $uv^iw \notin L \Rightarrow$ ~regular(L)
  (|w| e posibil sa fie mai mica decat p)

$$L = \{0^m 1^m \mid m>0\}$$

- Aratam cu Lema de pompare ca limbajul urmator $L = \{0^m 1^m \mid m>0\}$ nu e regulat.
- Presupunem prin absurd ca L este regulat.
- Fie p numarul dat de lema de pompare pentru L (este numarul de stari din eventualul automat care il accepta).
- Consider $w = 0^p 1^p$.
- w este evident din L, $|w|>p$ asadar din LP w poate fi descompus in cel putin o descompunere w=uvw.

$L = \{0^m 1^m \mid m>0\}$ (cont.)

- U si v sunt ambele in prefixul de lungime p, deci amandoua au doar 0-uri in componenta.
- Notam lungimea lui u cu *s* si lungimea lui v cu *t*.
- Deci :
  - $u=0^s \quad s\geq 0$
  - $v=0^t \quad t\geq 1,\ s+t\leq n$
  - $w=0^{n-s-t}1^n$

$$\underbrace{000\ldots0}_{s}\underbrace{00}_{t}0111\ldots111$$

- Din LP avem ca uv^iw este in L pentru orice i.

$L = \{0^m 1^m \mid m>0\}$ (cont.)

- Luăm i=2.
- Cuvântul obținut $uv^2w = 0^s 0^{2t} 0^{n-s-t} 1^n = 0^{n+t} 1^n$.
- Acest cuvânt nu este în L pentru $t \geq 1$: numărul de 0-uri e mai mare decât numărul de 1-uri.
- Am găsit o contradicție cu LP: nu există descompuneri ale lui $w= 0^p 1^p$ cu proprietățile 1,2,3
- Adică: presupunerea că L e regulat e greșită.
- L nu e limbaj regulat. Q.E.D.

$L=\{a^{k!} \mid k\geq 0\}$

- Este $L=\{a^{k\,!} \mid k\geq 0\}$ regulat?
- Demonstram folosind Lema de pompare ca NU este regulat.
- Presupunem ca L este regulat (prin absurd).
- Fie *p* valoarea din lema de pompare
- Alegem $w= a^n$ unde $n=\max(p!,2)$
- w este in L, $|w|\geq p$ deci din LP w poate fi descompus in trei parti w=uvw.

$L=\{a^{k!} \mid k\geq 0\}$

- u si v au doar a-uri in componenta.
- Fie lungimea lui x *s* si fungimea lui v *t*.
- Atunci avem:

  - $u=a^s$, $s\geq 0$
  - $v=a^t$ $t>0$, $s+t\leq p$ (din 1 si 2)
  - $w=a^{p!-t-s}$

- Din proprietatea 3: uv^iw este in L pentru orice i.

$$L=\{a^{k!} \mid k\geq 0\}$$

- Fie i=2.
- Cuvantul obtinut este $uv^2w = a^{p!+t}$.
- Stim din 2 si 1 ca $t>0$ si $t\leq p$, deci avem

$$p!+t \leq p!+p < p!+(p+1) < p!*(p+1) = (p+1)!$$

- Deci pentru i=2 cuvantul nu este in limbaj (este intre doua factoriale)
- Asadar orice descompunere a cuvantului $a^{p!}$ care satisface 1 si 2 nu il va satisface pe 3, deci avem contradictie, asadar presupunerea ca L este regulat a fost falsa

$L=\{0^m1^n \mid m>n\}$

- Presupunem ca L este regulat.
- Fie *p* numarul promis de Lema de pompare.
- Fie $z=0^{p+1}1^p$; evident $|z|>p$
- *z* se poate descompune in $z=uvw$.
- din 1: $|uv|\leq p$, rezulta ca *v* este compus doar de 0-uri, iar din 2 $|v|>0$.
- $\Rightarrow |(uv^0w)|_0 \leq |(uv^0w)|_1$
- $\Rightarrow uv^0w \notin L$ ceea ce contrazice punctul 3 din LP$\Rightarrow$ L nu e regulat.

$$L = \{w \mid |w|_1 = |w|_0\}$$

- Este regulat L?

- **idee de demonstratie**:
  - Presupunem prin absurd ca este regulat.
  - din LP avem *p* a.i. … 1,2,3
  - Alegem $w=0^n1^n \in L$
  - Pompam *w* spre un $w' \notin L$
- **Problema**: daca alegem $v=0^n1^n$ $w' \in L$??

$$L = \{w \mid \#_1(w) = \#_0(w)\}$$

- Este L regulat? (nu)

- **Proof** :
  - REG e inchisa la intersectie.
  - Pp prin absurd ca e REG.
  - Atunci $L' = (0^*1^* \cap L)$ este si el regulat.
  - Dar $L' = \{0^n1^n \mid n>0\}$ nu e REG

  - L nu e regulat

$L = \{ww \mid w \in \{0,1\}^* \}$

- Este regulat? (nu)

- **Dem**:
  - Pp prin absurd ca e REG.
  - Avem lema de pompare…
  - alegem $w = 0^n 1 0^n 1 \in L$
  - Pompam w spre un $w' \notin L$

Problema din examenul de anul trecut

9. (10 puncte) Spuneţi dacă limbajul următor este sau nu regulat. Dacă limbajul este regulat construiţi un automat finit determinist care să îl accepte, dacă nu, demonstraţi folosind lema de pompare pentru REG că limbajul nu este regulat $L = \{a^k wcw \mid w \in \{a, b, c\}^*, k \geq 4\}$.
ALTERNATIV pentru max 5 puncte: $L = \{a^{k-1} b^{2l+3} \mid k, l \geq 5\}$.

- Deci $L_1=\{a^k wcw \mid k>3\}$
- $L_2=\{a^{k-1}b^{2l+3} \mid k,l>4\}$

$L_2=\{a^{k-1}b^{2l+3} | k,l>4\}$

- Se poate construi un DFA pentru
  - $L_3=\{a^k | k>3\}$: un ciclu de lungime 3 si de asemenea pentru
  - $L_4=\{b^{2l+3} | l>4\}$: un ciclu de lungime 2 precedat de un drum ("o linie") de lungime 3

- Se poate face concatenarea lui L3 cu L4 si acesta este DFA-ul pentru limbajul respectiv

$L_1=\{a^k wcw \mid k>3\}$

- Limbajul nu e REG
- Demonstratie prin lema de pompare
- Alegem cuvantul $a^4b^pa^pcb^pa^p$