

Curs 3

Spații vectoriale. Definiție, exemple

În cursul anterior am făcut mai multe exemple de determinanți. Voi începe cursul de astăzi cu o aplicație, anume expresia inversei unei matrice 2×2 .

Fie $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ inversabilă $\Leftrightarrow \det(A) = ad - bc \neq 0$. Avem ${}^t A = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}$, de unde adjuncta $A^* = \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$. Astfel,

$$A^{-1} = \frac{1}{ad - bc} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}.$$

Exemplul 1. Fie $A = \begin{pmatrix} \cos(t) & -\sin(t) \\ \sin(t) & \cos(t) \end{pmatrix}$. $\det(A) = \cos^2(t) + \sin^2(t) = 1$. Conform formulei de mai sus, $A^{-1} = \begin{pmatrix} \cos(t) & \sin(t) \\ -\sin(t) & \cos(t) \end{pmatrix} = {}^t A$.

Reamintesc și următorul rezultat enunțat cursul trecut

Teorema 2. Pentru $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ avem $\det(AB) = \det(A) \det(B)$.

Demonstrație: Folosim formula Laplace. Fie $C = \begin{pmatrix} A & 0 \\ -I_n & B \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{2n}(\mathbb{R})$. Rezultă din exercițiul (2) de la sfârșitul cursului 1 că $\det(C) = \det(A) \cdot \det(B)$.

Fie $A = (a_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n}$ și $B = (b_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n}$. Pentru fiecare $1 \leq j \leq n$, adunăm la $C_{n+j}(C)$ următoarea combinație liniară $b_{1j}C_1(C) + b_{2j}C_2(C) + \dots + b_{nj}C_n(C) = \begin{pmatrix} A \\ -I_n \end{pmatrix} \cdot C_j(B)$. $\begin{pmatrix} A \\ -I_n \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{2n,n}(\mathbb{R})$ iar $C_j(B) \in \mathcal{M}_{n,1}$. Făcând combinația liniară de mai sus, pe primele n linii ale coloanei $n+j$, $1 \leq j \leq n$, ale noii matrice vom avea $0 + A \cdot C_j(B)$, iar pe ultimele n linii vom avea $C_j(B) + (-I_n) \cdot C_j(B)$.

Deci în urma acestor combinații liniare cu coloane obținem matricea

$$C' = \begin{pmatrix} A & A \cdot B \\ -I_n & 0 \end{pmatrix}. \text{ Am obținut } C' \text{ prin combinații liniare cu coloane, deci}$$

$\det(C) = \det(C') = (-1)^{n^2} \det(A \cdot B) \det(-I_n) = (-1)^{n^2} \det(A \cdot B) \det(-I_n) = (-1)^{n^2} (-1)^n \det(A \cdot B) = (-1)^{n^2+n} \det(A \cdot B) = (-1)^{n(n+1)} \det(A \cdot B) = \det(A \cdot B)$. De aici egalitatea dorită.

□

Corolarul 3. Pentru $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ avem $\det(AB) = \det(BA)$.

Demonstrație: $\det(AB) = \det(A) \det(B) = \det(B) \det(A) = \det(BA)$.

□

Corolarul 4. Fie $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ inversabilă și $X \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Atunci $\det(AXA^{-1}) = \det(X)$.

Demonstrație: $\det(AXA^{-1}) = \det(A^{-1}AX) = \det(I_n X) = \det(X)$. □

Ultimul rezultat legat de determinanți pe care îl voi menționa este

Teorema 5 (Binet-Cauchy). Fie $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$, $B \in \mathcal{M}_{p,r}(\mathbb{R})$, $k \leq \min\{n, p, r\}$, $I = \{i_1, \dots, i_k\} \subset [n]$ și $L = \{l_1, \dots, l_k\} \subset [r]$. Atunci

$$\det(A \cdot B)_{I,L} = \sum_{\substack{J \subset [p] \\ |J| = k}} \det(A_{I,J}) \det(B_{J,L})$$

Acest rezultat se folosește **esențial** în demonstrația teoremei matrice-arbore pe care am enunțat-o cursul trecut.

Observația 6. $\det : \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathbb{R}$, $\det(A + B) \neq \det(A) + \det(B)$. Voi da un exemplu. Fie $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ și $B = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$. $A + B = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.
 $\det(A + B) = 0 \neq 2 = 1 + 1 = \det(A) + \det(B)$.

Voi introduce o altă funcție pe mulțimea matricelor pătrate.

Definiția 7. Fie $A = (a_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. *Urma* matricii A , $\text{tr}(A) = \sum_{j=1}^n a_{jj}$.

Avem deci $\text{tr} : \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathbb{R}$. De exemplu $\text{tr}(I_n) = 1 + 1 + \dots + 1 = n$.

Voi enumera proprietățile de bază

- este clar că $\text{tr}(A + B) = \text{tr}(A) + \text{tr}(B)$.
- $\text{tr}(\alpha A) = \alpha \text{tr}(A)$.
 $\text{tr}(\alpha A) = \sum_{j=1}^n (\alpha a_{jj}) = \alpha \sum_{j=1}^n a_{jj} = \alpha \text{tr}(A)$.
- $\text{tr}(AB) = \text{tr}(BA)$.
 $\text{tr}(AB) = \sum_{k=1}^n (AB)_{kk} = \sum_{k=1}^n (\sum_{j=1}^n a_{kj} b_{jk}) = \sum_{j=1}^n (\sum_{k=1}^n a_{kj} b_{jk}) =$
 $= \sum_{j=1}^n (\sum_{k=1}^n b_{jk} a_{kj}) = \sum_{j=1}^n (BA)_{jj} = \text{tr}(BA)$.
- $A, X \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, A inversabilă. Din proprietatea anterioară rezultă
 $\text{tr}(AXA^{-1}) = \text{tr}(X)$.

Exemplul 8. Să se demonstreze că NU există $A, B \in \mathcal{M}_m(\mathbb{R})$ a.î. $AB - BA = I_n$. Presupunem că ar exista două astfel de matrice A, B , atunci $\text{tr}(AB - BA) = \text{tr}(I_n) \Leftrightarrow \text{tr}(AB) - \text{tr}(BA) = n \Leftrightarrow 0 = n$. O contradicție.

Spații vectoriale

Definiția 9. Un spațiu vectorial peste un corp comutativ \mathbb{K} (vom lucra peste \mathbb{R}) este un grup abelian (comutativ) $(V, +)$ ce are și o multiplicare externă cu scalari din \mathbb{K} $((\alpha, v) \mapsto \alpha v \in V, \text{ cu } \alpha \in \mathbb{K} \text{ și } v \in V)$, înmulțire ce îndeplinește următoarele proprietăți:

- (1) $\alpha(v_1 + v_2) = \alpha v_1 + \alpha v_2$, pentru $(\forall) \alpha \in \mathbb{K}$ și $(\forall) v_1, v_2 \in V$,
- (2) $(\alpha_1 + \alpha_2)v = \alpha_1 v + \alpha_2 v$, pentru $(\forall) \alpha_j \in \mathbb{K}$ și $(\forall) v \in V$,
- (3) $\alpha_1(\alpha_2 v) = (\alpha_1 \alpha_2)v$, pentru $(\forall) \alpha_j \in \mathbb{K}$ și $(\forall) v \in V$,
- (4) $1 \cdot v = v$.

De aici înainte toate considerațiile vor fi făcute pentru corpul numerelor reale \mathbb{R} . Elementele din V se numesc vectori iar cele din \mathbb{R} se numesc scalari.

Example:

- (1) 0
- (2) $(\mathbb{R}, +, \cdot)$ este spațiu vectorial peste \mathbb{R}

$$(3) \mathbb{R}^n = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \mid x_i \in \mathbb{R} \right\}$$

$$\text{Pentru } \vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, \vec{y} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n, \text{ adunarea este } \vec{x} + \vec{y} = \begin{pmatrix} x_1 + y_1 \\ x_2 + y_2 \\ \vdots \\ x_n + y_n \end{pmatrix}$$

$$\text{și înmulțirea cu scalari } \alpha \vec{x} = \begin{pmatrix} \alpha x_1 \\ \alpha x_2 \\ \vdots \\ \alpha x_n \end{pmatrix}, \text{ pentru } \alpha \in \mathbb{R}.$$

Opusul unui vector $\vec{x} \in \mathbb{R}^n$ este obținut schimbând semnul pe fiecare coordonată.

- (4) $\mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{R}) = \{(a_{i,j})_{1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq n} \mid a_{i,j} \in \mathbb{R}\}$. Operațiile sunt cele prezentate în primul curs, adunarea matricelor și înmulțirea acestora cu scalari.

$$\mathcal{M}_{m,1}(\mathbb{R}) = \left\{ \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_m \end{pmatrix} \mid a_i \in \mathbb{R} \right\} = \mathbb{R}^m.$$

Similar $\mathcal{M}_{1,n}(\mathbb{R}) = \{(a_1 \ a_2 \ \dots \ a_n) \mid a_j \in \mathbb{R}\} \cong \mathbb{R}^n$.

- (5) $\mathbb{R}[X]_{\leq n} = \mathbb{R}[X]_n = \{a_n X^n + a_{n-1} X^{n-1} + \dots + a_1 X + a_0 \mid a_i \in \mathbb{R}\}$ mulțimea polinoamelor cu coeficienți reali de grad cel mult n .

Suma și respectiv înmulțirea cu scalari sunt cele obișnuite.

- (6) $\mathcal{F} = \mathcal{F}(X, \mathbb{R}) = \{f : X \rightarrow \mathbb{R} \mid f \text{ funcție}\}$ unde X este o mulțime nevidă.

Operațiile sunt: fie $f, g \in \mathcal{F}$, $(f + g)(x) = f(x) + g(x)$ ptr. $x \in X$, iar $(\alpha f)(x) = \alpha f(x)$, pentru $x \in X$.

(7) $\mathcal{C}((a, b), \mathbb{R}) = \{f : (a, b) \longrightarrow \mathbb{R} \mid f \text{ funcție continuă}\}$

(8) $\mathcal{C}^1((a, b), \mathbb{R}) = \{f : (a, b) \longrightarrow \mathbb{R} \mid f \text{ funcție continuă cu } f' \text{ continuă}\}.$

Definiția 10. Fie V un spațiu vectorial peste \mathbb{R} , $U \subset V$ se numește subspațiu vectorial al lui V dacă și numai dacă pentru $(\forall) v_1, v_2 \in U$ și pentru $(\forall) \alpha, \beta \in \mathbb{R}$, $\alpha v_1 + \beta v_2 \in U$.

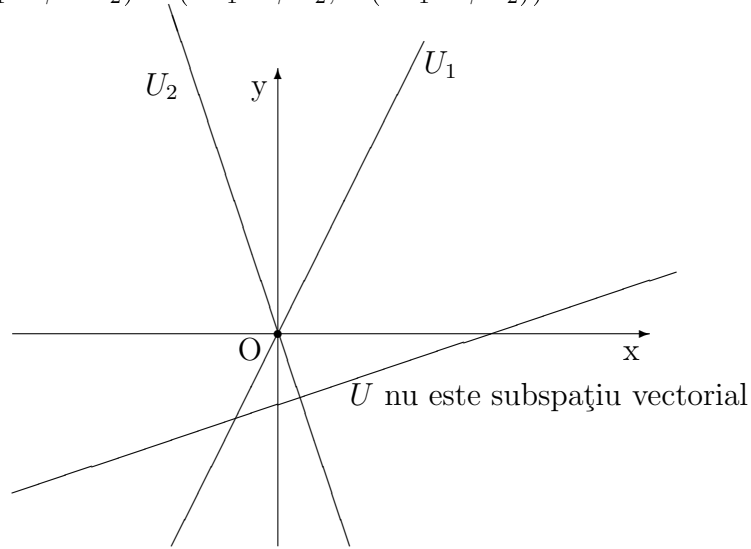
Observația 11. O condiție necesară pentru o submulțime U a spațiului vectorial V să fie subspațiu vectorial este ca $0 \in U$, unde 0 este elementul neutru din V .

Exemplul 12. Considerăm $\mathbb{R}^2 = \{(x, y) \mid x, y \in \mathbb{R}\}$ și $U = \{(x, mx) \mid x \in \mathbb{R}\} = \{(x, y) \mid y = mx, x \in \mathbb{R}\} \subset \mathbb{R}^2$.

Să vedem că într-adevăr avem un subspațiu vectorial.

Fie $v_1 = (x_1, mx_1), v_2 = (x_2, mx_2) \in U$ și $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

Avem $\alpha v_1 + \beta v_2 = \alpha(x_1, mx_1) + \beta(x_2, mx_2) = (\alpha x_1, \alpha mx_1) + (\beta x_2, \beta mx_2) = (\alpha x_1 + \beta x_2, \alpha mx_1 + \beta mx_2) = (\alpha x_1 + \beta x_2, m(\alpha x_1 + \beta x_2)) \in U$.



U din figura de mai sus nu este un subspațiu vectorial în \mathbb{R}^2 , nu conține originea. Pe de altă parte, U_1 și U_2 sunt. Cele două linii U_1 și U_2 sunt reprezentări grafice pentru aceste subspații. U_1 este o dreaptă de pantă pozitivă, pe când, U_2 are panta negativă.

Observația 13. Fie $(V_i)_{i \in I}$ subspații vectoriale ale unui \mathbb{R} -spațiu vectorial V . Atunci $\bigcap_{i \in I} V_i$ este un subspațiu vectorial al lui V .

Demonstrație: Fie $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ și $v_1, v_2 \in \bigcap_{i \in I} V_i$. Din definiția intersecției rezultă că $v_1, v_2 \in V_i, (\forall) i \in I$. Dar V_i sunt subspații vectoriale, deci $\alpha v_1 + \beta v_2 \in V_i$ pentru $(\forall) i \in I$, deci $(\alpha v_1 + \beta v_2) \in \bigcap_{i \in I} V_i$.



Definiția 14. Fie $S \subset V$, submulțime. Notăm

$$\langle S \rangle = \bigcap_{\substack{W \text{ subspațiu în } V \\ S \subset W}} W$$

intersecția tuturor subspațiilor lui V ce conțin pe S . $\langle S \rangle$ se numește subspațiul generat de mulțimea S .

Se observă că $\langle \emptyset \rangle = 0$.

$\langle S \rangle$ se descrie astfel:

$$\langle S \rangle = \{a_1 v_1 + \dots + a_n v_n \mid n \in \mathbb{N}^*, v_1, \dots, v_n \in S, a_1, \dots, a_n \in \mathbb{R}\}$$

Mai mult dacă $(V_i)_{i \in I}$ sunt subspații în V , cu $I \neq \emptyset$, atunci

$$\langle \bigcup_{i \in I} V_i \rangle = \{x_{i_1} + \dots + x_{i_n} \mid n \in \mathbb{N}^*, i_1, \dots, i_n \in I, x_{i_j} \in V_{i_j}\}$$

este cel mai mic subspațiu care include toate V_i -urile, și se notează $\sum_{i \in I} V_i$. Dacă $I = \{1, 2, \dots, n\}$, atunci $\sum_{i \in I} V_i = V_1 + \dots + V_n$.

Definiția 15. $S \subset V$ se numește sistem de generatori pentru V dacă $\langle S \rangle = V$.

Exemplul 16. Fie $S = \{v_1 = (1, 0), v_2 = (0, 1)\} \subset \mathbb{R}^2$. După cum am menționat mai sus, $\langle S \rangle$ este mulțimea tuturor combinațiilor liniare ai vectorilor v_1, v_2 cu coeficienți în \mathbb{R} , deci $\langle S \rangle = \{\alpha v_1 + \beta v_2 \mid \alpha, \beta \in \mathbb{R}\}$. Să demonstrăm că $\langle S \rangle = \mathbb{R}^2$. $\langle S \rangle \subset \mathbb{R}^2$ prin definiție. Fie $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ atunci $(a, b) = a \cdot (1, 0) + b \cdot (0, 1) \in \langle S \rangle$. Avem deci egalitate și astfel S este sistem de generatori pentru \mathbb{R}^2 .