GEOMETRIE ŞI ALGEBRĂ LINIARĂ

Curs 5
Spaţii vectoriale factor, teoreme de izomorfism, sume directe

În cursul anterior am definit noţiunile de sistem de generatori, sistem de vectori liniar independenţi cât şi noţiunea de bază pentru un spaţiu vectorial. Reamintesc că lucrăm cu spaţii vectoriale peste corpul numerelor reale, $\mathbb{R}$.

Am enunţat douăteoreme care spun că fiecare spaţiu vectorial are o bază şi respectiv oricare două baze ale aceluiaşi spaţiu vectorial au acelaşi cardinal.

Definiţia 1. Fie V un spaţiu vectorial. Numim *dimensiunea spaţiului vectorial* V şi notăm cu $\dim_{\mathbb{R}}(V) = \dim(V) = |\mathcal{B}|$, cardinalul unei baze $\mathcal{B}$ a lui V.

Am enunţat

Teorema 2 (teorema Grassmann)**.** *Fie* V *un spaţiu vectorial şi* X, Y *subspaţii ale sale. Atunci* $\dim(X+Y) = \dim(X) + \dim(Y) - \dim(X \cap Y)$.

Observaţia 3. Teorema Grassmann este o manifestare a principiului includerii-excluderii pentru două mulţimi finite $A, B, |A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|$. O demonstraţie a teoremei Grassmann se face aşa: se alege o bază $\mathcal{B}$ a subspaţiului $X \cap Y$ şi se completează atât la o bază $\mathcal{B}_1$ a spaţiului X cât şi la una $\mathcal{B}_2$ a lui Y. Se demonstrează că $\mathcal{B}_1 \cup \mathcal{B}_2$ este bază a spaţiului $X+Y$.

Definiţia 4. Se numeşte morfism de spaţii vectoriale $f : V \longrightarrow W$ o funcţie omogenă şi aditivă.

- aditivă: $f(v_1 + v_2) = f(v_1) + f(v_2)$, pentru $(\forall) v_1, v_2 \in V$.
- omogenă: $f(\alpha v) = \alpha f(v)$ pentru $(\forall)\alpha \in \mathbb{R}$ şi $(\forall) v \in V$.

Am enunţat

Propoziţia 5. $f : V \longrightarrow W$ *este morfism de spaţii vectoriale dacă şi numai dacă pentru* $(\forall)\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ *şi* $(\forall) v_1, v_2 \in V$ *avem* $f(\alpha v_1 + \beta v_2) = \alpha f(v_1) + \beta f(v_2)$.

Asociate unui morfism $f : V \longrightarrow W$ de spaţii vectoriale avem următoarele subspaţii: *nucleul morfismului f*, $\operatorname{Ker}(f) = \{v \in V \mid f(v) = 0_W\} = f^{-1}(0_W)$, şi *imaginea morfismului f*, $\operatorname{Im}(f) = f(V) = \{f(v) \mid v \in V\}$. $\operatorname{Ker}(f)$ este subspaţiu în V iar $\operatorname{Im}(f)$ este subspaţiu în W.

Teorema 6 (rang-defect)**.** *Fie* $f : V \longrightarrow W$ *morfism de spaţii vectoriale finit dimensionale. Atunci* $\dim(V) = \dim(\operatorname{Im}(f)) + \dim(\operatorname{Ker}(f))$.

$\dim(\mathrm{Im}(f))$ se numeşte *rangul* aplicaţiei f, şi $\dim(\mathrm{Ker}(f))$ *defectul* lui f.

Observăm că f este injectiv $\Leftrightarrow \mathrm{Ker}(f) = 0_V$ şi f este surjectiv $\Leftrightarrow \mathrm{Im}(f) = W$.

Exemplul 7. Considerăm $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}, f\binom{x}{y} = x + y$. Să determinăm $\dim(\mathrm{Ker}(f))$ şi o bază pentru acest subspaţiu.

Este uşor de arătat că f este morfism de spaţii vectoriale.

f este surjectiv: $(\forall)x \in \mathbb{R}, x = f\binom{x}{0}$; deci $\dim(\mathrm{Im}(f)) = 1 = \dim(\mathbb{R})$. Din **teorema ??** şi din faptul că $\dim(\mathbb{R}^2) = 2$, rezultă că $\dim(\mathrm{Ker}(f)) = 1$.

Să găsim o bază pentru $\mathrm{Ker}(f)$.

Nucleul aplicaţiei f este mulţimea $\{\binom{x}{y} \in \mathbb{R}^2 | f\binom{x}{y} = 0\} = \{\binom{x}{y} | x + y = 0\} = \{\binom{x}{y} | y = -x\} = \{\binom{x}{-x} | x \in \mathbb{R}\}$. Bază pentru acest spaţiu este $v = \binom{1}{-1}$. Este liniar independent fiind un vector nenul. Este un sistem de generatori pentru $\mathrm{Ker}(f)$ pentru că $\binom{x}{-x} = x \cdot \binom{1}{-1}, x \in \mathbb{R}$.

Reprezentarea grafică a subspaţiului vectorial $\mathrm{Ker}(f)$ este a două bisectoare a axelor de coordonate din $\mathbb{R}^2$, o dreaptă ce trece prin origine. Şi de aici se vede că această submulţime a lui $\mathbb{R}^2$ verifică condiţia necesară de a fi subspaţiu, conţine 0.

Avem

Propoziţia 8. *Fie $f : V \longrightarrow W$ morfism de spaţii vectoriale. Atunci*

(1) $X \subset V$*, subspaţiu* $\Rightarrow f(X)$ *subspaţiu în* W*; în particular* $\mathrm{Im}(f)$ *imaginea lui* f*, este subspaţiu în* W.

(2) $Y \subset W$*, subspaţiu* $\Rightarrow f^{-1}(Y)$ *subspaţiu în* V*, în particular* $\mathrm{Ker}(f) = f^{-1}(0)$ *este subspaţiu în* V.

Demonstraţie: Voi demonstra punctul (1). Fie X subspaţiu în $V, w_1, w_2 \in f(X)$ şi $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. $(\exists)v_1, v_2 \in X$ a.î. $f(v_j) = w_j, j = 1, 2$. Atunci $\alpha w_1 + \beta w_2 = \alpha f(v_1) + \beta f(w_2) = f(\alpha v_1 + \beta v_2) \Rightarrow \alpha w_1 + \beta w_2 \in f(X)$. Deci $f(X)$ este subspaţiu vectorial în W.

Similar se demonstrează punctul (2).

□

Din **propoziţia ??** există o corespondenţă bijectivă între $\{X \subset V | X \text{ subspaţiu şi } \mathrm{Ker}(f) \subset X\}$ şi $\{Y \subset W | Y \text{ subspaţiu în } W\}$, dată de $X \mapsto f(X)$ şi $Y \mapsto f^{-1}(Y)$.

Spaţii vectoriale factor

Fie V un spaţiu vectorial şi X un subspaţiu al său. Pentru că V este grup abelian atunci X este subgrup normal şi deci putem forma grupul factor $V/X = \{\widehat{v} | v \in V\}$, unde $\widehat{v_1} = \widehat{v_2} \Leftrightarrow v_1 - v_2 \in X$.

Operaţia de adunare pe V/X este: $\widehat{v_1} + \widehat{v_2} = \widehat{v_1 + v_2}$, iar $\pi : V \longrightarrow V/X$, $\pi(v) = \widehat{v}$ (proiecţia canonică) este morfism surjectiv de grupuri abeliene.

V/X are structura de $\mathbb{R}$ spaţiu vectorial, unde înmulţirea cu scalari este $\alpha \cdot \widehat{v} = \widehat{\alpha \cdot v}, (\forall)\alpha \in \mathbb{R}$ şi $v \in V$.

Operaţia externă este corect definită: $\widehat{v_1} = \widehat{v_2} \Leftrightarrow v_1 - v_2 \in X \Rightarrow \alpha(v_1 - v_2) \in X \Rightarrow \alpha v_1 - \alpha v_2 \in X \Rightarrow \widehat{\alpha v_1} = \widehat{\alpha v_2}$.

V/X devine $\mathbb{R}$ spaţiu vectorial (de verificat axiomele).

În plus, $\pi : V \longrightarrow V/X$, $\pi(v) = \widehat{v}$ este morfism de spaţii vectoriale.

Avem $\pi(v_1+v_2) = \widehat{v_1 + v_2} = \widehat{v_1}+\widehat{v_2} = \pi(v_1)+\pi(v_2)$ şi $\pi(\alpha v) = \widehat{\alpha v} = \alpha\widehat{v} = \alpha\pi(v)$.

V/X se numeşte *spaţiul vectorial factor al lui V în raport cu X*.

Teorema 9 (teorema fundamentală de izomorfism)**.** *Fie $f : V \longrightarrow W$ un morfism de spaţii vectoriale. Atunci există un izomorfism de spaţii vectoriale $V/\operatorname{Ker}(f) \cong \operatorname{Im}(f)$.*

Demonstraţie: Din demonstraţia teoremei fundamentale de izomorfism pentru grupuri ştim că aplicaţia $\overline{f} : V/\operatorname{Ker}(f) \to \operatorname{Im}(f)$, $\overline{f}(\widehat{v}) = f(v), v \in V$ este corect definită şi este izomorfism de grupuri.

În plus $\overline{f}(\alpha\widehat{v}) = \overline{f}(\widehat{\alpha v}) = f(\alpha v) = \alpha f(v) = \alpha\overline{f}(\widehat{v})$. Deci $\overline{f}$ este chiar izomorfism de spaţii vectoriale.

□

Dacă V/X este un spaţiu vectorial factor, atunci morfismul $\pi : V \longrightarrow V/X$ induce o bijecţie între subspaţiile vectoriale $U \subset V$ a.î. $X \subset U$ şi subspaţiile lui V/X, dat de $U \longmapsto \pi(U) = U/X = \{\widehat{x} | x \in U\}$

Teorema 10 (teorema I-a de izomorfism)**.** *Fie V un spaţiu vectorial, X şi U subspaţii cu $X \subset U$. Atunci $\frac{V/X}{U/X} \cong V/U$.*

Demonstraţie: Fie $f : V/X \to V/U$, $f(\widehat{v}) = \overline{v}$, unde $\widehat{v}$ este clasa modulo X iar $\overline{v}$ este clasa modulo U. f este corect definită: $\widehat{v_1} = \widehat{v_2} \Rightarrow v_1 - v_2 \in X \Rightarrow v_1 - v_2 \in U \Rightarrow \overline{v_1} = \overline{v_2}$. Se verifică uşor că f este morfism de spaţii vectoriale. Este clar că f este surjectiv, $f(V/X) = V/U$.

$\operatorname{Ker}(f) = \{\widehat{v} | \overline{v} = \overline{0}\} = \{\widehat{v} | v \in U\} = U/X$. Concluzia rezultă din **teorema ??**.

□

Teorema 11 (teorema II-a de izomorfism)**.** *Fie V un spaţiu vectorial şi U şi X subspaţii ale sale. Atunci $(U + X)/U \cong X/(X \cap U)$.*

Demonstraţie: Definim $f : X \to (U + X)/U, f(v) = \widehat{v}$, (clasa modulo U). Este clar că f este morfism de spaţii vectoriale.

f surjectiv: fie $\widehat{u + x} \in (U + X)/U$. $\widehat{u + x} = \widehat{u} + \widehat{x} = \widehat{x} = f(x)$, pentru $u \in U$ şi $x \in X$.

Pentru $x \in X, x \in \operatorname{Ker}(f) \Leftrightarrow \widehat{x} = \widehat{0} \Leftrightarrow x \in U \Leftrightarrow x \in U \cap X$. Deci $\operatorname{Ker}(f) = U \cap X$. Folosind **teorema ??** rezultă afirmaţia din enunţ.

□

Propoziţia 12. *Fie V un spaţiu vectorial real finit dimensional şi X un subspaţiu al său. Atunci* $\dim(V/X) = \dim(V) - \dim(X)$.

Demonstraţie: Considerăm $\pi : V \to V/X$, $\pi(x) = \widehat{x}$. $\mathrm{Ker}(\pi) = X$. Aplicăm **teorema ??** morfismului π, care este surjectiv. Avem $\dim(V) = \dim(V/X) + \dim(X)$, de unde concluzia.

□

Observaţia 13. Teorema ?? se poate demonstra folosind **teorema ??** şi **propoziţia ??**

Spaţiul morfismelor între două spaţii vectoriale

Fie ca şi mai sus V, W două spaţii vectoriale peste corpul numerelor reale. Notăm cu $\mathrm{Hom}_{\mathbb{R}}(V, W) = \mathrm{Hom}(V, W) = \{f : V \longrightarrow W | f\ morfism\}$, mulţimea morfismelor spaţiilor vectoriale V şi W.

Propoziţia 14. $\mathrm{Hom}_{\mathbb{R}}(V, W)$ *este un spaţiu vectorial real.*

Demonstraţie: Fie $f, g \in \mathrm{Hom}_{\mathbb{R}}(V, W)$ şi $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Demonstrăm că $\alpha f + \beta g$ este morfism de spaţii vectoriale. Fie $a_1, a_2 \in \mathbb{R}$ şi $v_1, v_2 \in V$. $(\alpha f + \beta g)(a_1v_1 + a_2v_2) = \alpha f(a_1v_1 + a_2v_2) + \beta g(a_1v_1 + a_2v_2) = \alpha a_1 f(v_1) + \alpha a_2 f(v_2) + \beta a_1 g(v_1) + \beta a_2 g(v_2) = a_1(\alpha f(v_1) + \beta g(v_1)) + a_2(\alpha f(v_2) + \beta g(v_2)) = a_1(\alpha f + \beta g)(v_1) + a_2(\alpha f + \beta g)(v_2)$.

Deci conform **propoziţiei ??** $(\alpha f + \beta g) \in \mathrm{Hom}(V, W)$.

□

Spaţii duale

Un caz particular al spaţiului morfismelor între două spaţii vectoriale este pentru $W = \mathbb{R}$.

Fie V un $\mathbb{R}$ spaţiu vectorial. Notăm cu $V^\star = \mathrm{Hom}_{\mathbb{R}}(V, \mathbb{R})$. Morfismele de la V la $\mathbb{R}$ se numesc şi funcţionale liniare. Pe mulţimea acestor funţionale liniare avem operaţiile obişnuite de adunare şi înmulţire cu scalari.

- $(f + g)(v) = f(v) + g(v), (\forall)v \in V, f, g \in V^\star$
- $(\alpha f)(v) = \alpha f(v), (\forall)v \in V, f \in V^\star, \alpha \in \mathbb{R}$.

Dacă $f : V \longrightarrow W$ este morfism de spaţii vectoriale, atunci $f^\star : W^\star \longrightarrow V^\star$ prin $f^\star(w^\star) = w^\star \circ f$ pentru orice $w^\star \in W^\star$.

Avem următoarele proprietăţi:

(1) fie $f : V \longrightarrow W$ şi $g : W \longrightarrow U$ morisme de spaţii vectoriale, atunci $(g \circ f)^\star = f^\star \circ g^\star$.
(2) dacă $1_V : V \longrightarrow V$ este morfismul identic, atunci $(1_V)^\star = 1_{V^\star}$.
(3) dacă $f : V \longrightarrow W$ este izomorfism, atunci şi $f^\star$ este izomorfism.

Propoziţia 15. *Fie V un $\mathbb{R}$ spaţiu vectorial de dimensiune finită n. Atunci* $\dim(V^\star) = n$.

Demonstraţie: Fie $(e_i)_{i=1,n}$ bază a spaţiului vectorial V. Pentru fiecare $i = \overline{1,n}$ considerăm $e_i^\star \in V^\star$, definite prin $e_i^\star(e_j) = \delta_{i,j}, (\forall) j = \overline{1,n}$, unde $\delta_{i,j}$ este simbolul lui Kronecker. $\left(\delta_{i,j} = \begin{cases} 1 & i = j \\ 0 & i \neq j \end{cases}\right)$.

Arătăm că $(e_i^\star)_{i=1,n}$ este bază a spaţiului vectorial $V^\star$.

- liniar independenţa: fie $a_j \in \mathbb{R}$ şi considerăm $a_1 e_1^\star + \ldots + a_n e_n^\star = 0$, funcţionala liniară nulă. Atunci pentru $(\forall) i = \overline{1,n}$, $(a_1 e_1^\star + \ldots + a_n e_n^\star)(e_i) = 0 \Leftrightarrow a_i \cdot 1 = 0$.

- sistem de generatori: fie $f \in V^\star$, cu $f(e_i) = b_i \in \mathbb{R}$, $(\forall) i = \overline{1,n}$. Atunci $f = b_1 e_1^\star + \cdots + b_n e_n^\star$. Se verifică egalitatea pentru orice vector e_i din baza lui V.

□

Observaţia 16. *Baza din* **propoziţia ??** *se numeşte baza duală bazei* $(e_i)_{i=1,n}$.

Sume directe externe

Dacă $V_1, V_2, \ldots, V_n$ spaţii vectoriale, atunci suma lor directă este $V_1 \oplus V_2 \oplus \ldots \oplus V_n = V_1 \times V_2 \times \ldots \times V_n$, cu operaţiile de adunare şi înmulţire cu scalari pe componente.

Mai precis:

- $(v_1, \ldots, v_n) + (w_1, \ldots, w_n) = (v_1 + w_1, \ldots v_n + w_n)$, unde $v_j, w_j \in V_j$, pentru $(\forall) j = 1, n$.
- $\alpha \cdot (v_1, \ldots, v_n) = (\alpha v_1, \ldots, \alpha v_n)$

Se mai notează cu $\bigoplus_{i=1,n} V_i$.

Pentru fiecare $j = 1, n$, definim

- $q_j : V_j \longrightarrow \bigoplus_{i=1,n} V_i$, $q_j(v) = (0, \ldots, v, \ldots 0)$, cu v pe poziţia j. q_j este morfism injectiv.
- $\pi_j : \bigoplus_{i=1,n} V_i \longrightarrow V_j$, $\pi(v_1, \ldots, v_n) = v_i$. π_j este morfism surjectiv.

Propoziţia 17. *Fie V_1, V_2 spaţii vectoriale finit dimensionale. Atunci*

$$\dim(V_1 \oplus V_2) = \dim(V_1) + \dim(V_2)$$

Demonstraţie: $\pi_1 : V_1 \oplus V_2 \longrightarrow V_1$, $\pi_1(v_1, v_2) = v_1$ este morfism surjectiv de spaţii vectoriale. $\mathrm{Ker}(\pi_1) = 0 \oplus V_2 = q_2(V_2) \cong V_2$ (pentru că q_2 este injectiv). Din **teorema ??** rezultă că $V_1 \oplus V_2 / 0 \oplus V_2 \cong V_1$. Din **teorema ??** rezultă că $\dim(V_1 \oplus V_2) = \dim(\mathrm{Im}(\pi_1)) + \dim(\mathrm{Ker}(\pi_1)) = \dim(V_1) + \dim(V_2)$.

$\square$

Corolarul 18. *Dacă avem spaţiile vectoriale $V_1, V_2, \ldots, V_n$ finit dimensionale, atunci*

$$\dim(V_1 \oplus V_2 \oplus \ldots \oplus V_n) = \dim(V_1) + \dim(V_2) + \cdots + \dim(V_n)$$

unde $n \in \mathbb{N}^\star, n \geqslant 2$.

Sume directe interne

Fie V spaţiu şi $V_1, V_2, \ldots, V_n$ subspaţii în V. Spunem că V este suma directă internă a familiei $\{V_i\}_{i=1,n}$, dacă

- $V = V_1 + \ldots + V_n$
- pentru orice $i : V_i \cap (\sum_{1 \leqslant j \leqslant n, j \neq i} V_j) = 0$.

(aceste două condiţii sunt echivalente cu faptul că orice $v \in V$ se exprimă în mod unic ca $v = v_1 + \ldots + v_n$ cu $v_i \in V_i, \forall i$).

În acest caz scriem $V = V_1 \dot{\oplus} V_2 \dot{\oplus} \ldots \dot{\oplus} V_n$, sau $V = \dot{\bigoplus}_{i=1,n} V_i$.

Observaţia 19. Dacă $V = \dot{\bigoplus}_{i=1,n} V_i$, atunci $\dot{\bigoplus}_{i=1,n} V_i \cong \oplus_{i=1,n} V_i$, deoarece aplicaţia $f : \oplus_{i=1,n} V_i \longrightarrow \dot{\bigoplus}_{i=1,n} V_i$, definită prin $f(x_1, \ldots, x_n) = x_1 + \ldots + x_n$ este izomorfism de spaţii vectoriale. În particular $\dim(\dot{\bigoplus}_{i=1,n} V_i) = \dim(\oplus_{i=1,n} V_i)$. Mai mult, dacă $\mathcal{B}_i$ e bază în V_i pentru fiecare $i = \overline{1, n}$, atunci $\cup_{i=1,n} \mathcal{B}_i$ este bază în V.