**FMI, Info, Anul I**
**Logică matematică şi computaţională**

# Seminar 2

Dacă $n \in \mathbb{N}$, spunem despre o mulţime $A$ că *are $n$ elemente* dacă există o bijecţie

$$f : A \to \{m \in \mathbb{N} \mid 1 \leq m \leq n\}.$$

Spunem că o mulţime $A$ este *finită* dacă există $n \in \mathbb{N}$ astfel încât $A$ are $n$ elemente, iar în caz contrar spunem că $A$ este *infinită*. O mulţime $A$ se numeşte *numărabilă* dacă există o bijecţie $f : A \to \mathbb{N}$. O mulţime se numeşte *cel mult numărabilă* dacă este finită sau numărabilă.

**(S2.1)** Arătaţi, pe rând, următoarele:

(i) $\mathbb{N}^*$ este numărabilă.

(ii) $\mathbb{Z}$ este numărabilă.

(iii) $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ este numărabilă.

**(S2.2)** Demonstraţi că orice mulţime infinită are o submulţime numărabilă.

**(S2.3)** Demonstraţi că orice submulţime infinită a unei mulţimi numărabile este numărabilă.

**(S2.4)** Demonstraţi că o mulţime $A$ este cel mult numărabilă dacă şi numai dacă există o funcţie injectivă de la $A$ la o mulţime numărabilă (pe care o putem lua ca fiind $\mathbb{N}$).

**(S2.5)** Demonstraţi următoarele:

(i) Produsul cartezian a două mulţimi cel mult numărabile este cel mult numărabil.

(ii) Reuniunea a două mulţimi cel mult numărabile este cel mult numărabilă.