FMI, Info, Anul I
Logică matematică şi computaţională

Seminar 8

(S8.1)

(i) Să se arate că mulţimea modelelor unei mulţimi satisfiabile şi finite de formule este infinită.

(ii) Găsiţi o mulţime infinită de formule care nu este semantic echivalentă cu nicio mulţime finită de formule.

Demonstraţie:

(i) Fie Γ o mulţime de formule ca în enunţ. Dat fiind că Γ este satisfiabilă, admite un model şi fie acesta e. Pe de altă parte, dat fiind că Γ este finită, există un $n \in \mathbb{N}$ cu proprietatea că $\bigcup_{\varphi\in\Gamma} Var(\varphi) \subseteq \{v_0, v_1, \ldots, v_n\}$.

Fie, atunci, pentru orice $k \in \mathbb{N}$, câte o funcţie $e_k : V \to \{0, 1\}$, definită, pentru orice $x \in V$, prin:

$$e_k(x) := \begin{cases} e(x), & \text{dacă } x \in \{v_0, \ldots, v_n\} \\ 1, & \text{dacă } x \in \{v_{n+1}, \ldots, v_{n+k}\} \\ 0, & \text{altfel.} \end{cases}$$

Atunci, pentru $k \neq l$ avem $e_k \neq e_l$. Prin urmare, $\{e_k \mid k \in \mathbb{N}\}$ este o mulţime numărabilă, deci infinită. Pentru orice $k \in \mathbb{N}$ şi $\varphi \in \Gamma$, aplicând Propoziţia 2.13 pentru φ, e şi e_k, avem că $e_k^+(\varphi) = e^+(\varphi) = 1$, deci $e_k \vDash \varphi$.

Am obţinut astfel că $\{e_k \mid k \in \mathbb{N}\} \subseteq Mod(\Gamma)$. Aşadar, $Mod(\Gamma)$ este infinită.

(ii) Considerăm $\Gamma := V = \{v_n \mid n \in \mathbb{N}\}$, o mulţime infinită de formule. Demonstrăm că Γ nu este echivalentă cu nicio mulţime finită de formule. Observăm că o evaluare $e : V \to \{0, 1\}$ este model al lui Γ dacă şi numai dacă $e(v_n) = 1$ pentru orice $n \in \mathbb{N}$ dacă şi numai dacă e este funcţia constantă $\mathbf{1}$. Prin urmare, $Mod(\Gamma) = \{\mathbf{1}\}$.

Fie acum Δ o mulţime finită de formule. Avem două cazuri:

(a) Δ nu este satisfiabilă. Atunci $Mod(\Delta) = \emptyset$.

(b) Δ este satisfiabilă. Atunci aplicăm (i) pentru a concluziona că $Mod(\Delta)$ este infinită.

În ambele cazuri, obţinem că $Mod(\Delta) \neq Mod(\Gamma)$, deci Γ nu este echivalentă cu Δ.

$\square$

(S8.2) Să se demonstreze Teorema de completitudine tare - versiunea 2, dar fără a se folosi, precum în curs, Teorema de completitudine tare - versiunea 1.
Demonstraţie: Fie $\varphi \in Form$, $\Gamma \subseteq Form$. Avem că:

$$
\begin{array}{lcll}
\Gamma \vdash \varphi & \Leftrightarrow & \text{există } \varphi_1, ..., \varphi_n \in \Gamma \text{ cu } \{\varphi_1, ..., \varphi_n\} \vdash \varphi & \text{Propoziţia 2.43} \\
& \Leftrightarrow & \text{există } \varphi_1, ..., \varphi_n \in \Gamma \text{ cu } \vdash (\varphi_1 \wedge ... \wedge \varphi_n) \to \varphi & \text{Propoziţia 2.61.(i)} \\
& \Leftrightarrow & \text{există } \varphi_1, ..., \varphi_n \in \Gamma \text{ cu } \vDash (\varphi_1 \wedge ... \wedge \varphi_n) \to \varphi & \text{T. de completitudine 2.55} \\
& \Leftrightarrow & \text{există } \varphi_1, ..., \varphi_n \in \Gamma \text{ cu } \{\varphi_1, ..., \varphi_n\} \vDash \varphi & \text{din Propoziţia 2.31.(ii)} \\
& \Leftrightarrow & \Gamma \vDash \varphi & \text{T. de compacitate - V3}
\end{array}
$$

$\square$

(S8.3) Să se arate că Teorema de completitudine tare - versiunea 2 implică Teorema de completitudine tare - versiunea 1.
Demonstraţie: Fie $\Gamma \subseteq Form$. Vrem să arătăm că Γ este consistentă dacă şi numai dacă Γ este satisfiabilă. Avem că:

$$
\begin{array}{lcll}
\Gamma \text{ este consistentă} & \Leftrightarrow & \Gamma \nvdash \bot & \text{Propoziţia 2.59} \\
& \Leftrightarrow & \Gamma \nvDash \bot & \text{Teorema de completitudine tare - versiunea 2} \\
& \Leftrightarrow & \Gamma \text{ este satisfiabilă} & \text{Propoziţia 2.29.}
\end{array}
$$

$\square$

(S8.4) Să se aducă următoarele formule la cele două forme normale prin transformări sintactice:

(i) $((v_0 \to v_1) \wedge v_1) \to v_0$;

(ii) $(v_1 \vee \neg v_4) \to (\neg v_2 \to v_3)$.

Demonstraţie:

(i) Avem:

$$\begin{aligned}
((v_0 \to v_1) \land v_1) \to v_0 &\sim \neg((\neg v_0 \lor v_1) \land v_1) \lor v_0 && \text{(înlocuirea implicaţiei)}\\
&\sim \neg(\neg v_0 \lor v_1) \lor \neg v_1 \lor v_0 && \text{(de Morgan)}\\
&\sim (\neg\neg v_0 \land \neg v_1) \lor \neg v_1 \lor v_0 && \text{(de Morgan)}\\
&\sim (v_0 \land \neg v_1) \lor \neg v_1 \lor v_0, && \text{(reducerea dublei negaţii)}
\end{aligned}$$

iar ultima formulă este în FND. Mai departe, obţinem:

$$\begin{aligned}
(v_0 \land \neg v_1) \lor \neg v_1 \lor v_0 &\sim ((v_0 \lor \neg v_1) \land (\neg v_1 \lor \neg v_1)) \lor v_0 && \text{(distributivitate)}\\
&\sim (v_0 \lor \neg v_1 \lor v_0) \land (\neg v_1 \lor \neg v_1 \lor v_0) && \text{(distributivitate)}\\
&\sim (v_0 \lor \neg v_1) \land (\neg v_1 \lor v_0), && \text{(idempotenţă)}
\end{aligned}$$

iar ultima formulă este în FNC. De asemenea, ultima formulă este echivalentă şi cu:

$$v_0 \lor \neg v_1,$$

care este şi în FND, şi în FNC.

(ii) Avem:

$$\begin{aligned}
(v_1 \lor \neg v_4) \to (\neg v_2 \to v_3) &\sim \neg(v_1 \lor \neg v_4) \lor (\neg\neg v_2 \lor v_3) && \text{(înlocuirea implicaţiilor)}\\
&\sim \neg(v_1 \lor \neg v_4) \lor v_2 \lor v_3 && \text{(reducerea dublei negaţii)}\\
&\sim (\neg v_1 \land \neg\neg v_4) \lor v_2 \lor v_3 && \text{(de Morgan)}\\
&\sim (\neg v_1 \land v_4) \lor v_2 \lor v_3, && \text{(reducerea dublei negaţii)}
\end{aligned}$$

iar ultima formulă este în FND. Mai departe, obţinem:

$$\begin{aligned}
(\neg v_1 \land v_4) \lor v_2 \lor v_3 &\sim ((\neg v_1 \lor v_2) \land (v_4 \lor v_2)) \lor v_3 && \text{(distributivitate)}\\
&\sim (\neg v_1 \lor v_2 \lor v_3) \land (v_4 \lor v_2 \lor v_3), && \text{(distributivitate)}
\end{aligned}$$

iar ultima formulă este în FNC.

□

(S8.5) Să se aducă formula $\varphi = (v_0 \to v_1) \to v_2$ la cele două forme normale trecându-se prin funcţia booleană asociată (i.e. metoda tabelului).
Demonstraţie: Alcătuim tabelul de valori al funcţiei asociate $F_\varphi : \{0,1\}^3 \to \{0,1\}$, precum şi pe cel al funcţiei $\neg \circ F_\varphi$.

x_0	x_1	x_2	$x_0 \to x_1$	$F_\varphi(x_0,x_1,x_2) := (x_0 \to x_1) \to x_2$	$\neg F_\varphi(x_0,x_1,x_2)$
1	1	1	1	1	0
1	1	0	1	0	1
1	0	1	0	1	0
1	0	0	0	1	0
0	1	1	1	1	0
0	1	0	1	0	1
0	0	1	1	1	0
0	0	0	1	0	1

Obţinem, aşadar, uitându-ne pe liniile cu 1 de pe coloana valorilor lui F_φ şi aplicând raţionamentul din demonstraţiile Teoremelor 2.74 şi 2.76, că o formă normală disjunctivă a lui φ este:

$$(v_0 \wedge v_1 \wedge v_2) \vee (v_0 \wedge \neg v_1 \wedge v_2) \vee (v_0 \wedge \neg v_1 \wedge \neg v_2) \vee (\neg v_0 \wedge v_1 \wedge v_2) \vee (\neg v_0 \wedge \neg v_1 \wedge v_2),$$

iar uitându-ne pe liniile cu 0 de pe coloana valorilor lui F_φ şi aplicând raţionamentul din demonstraţiile Teoremelor 2.75 şi 2.76, obţinem că o formă normală conjunctivă a lui φ este:

$$(\neg v_0 \vee \neg v_1 \vee v_2) \wedge (v_0 \vee \neg v_1 \vee v_2) \wedge (v_0 \vee v_1 \vee v_2).$$

Alternativ, ne putem uita pe liniile cu 1 de pe coloana valorilor lui $\neg \circ F_\varphi = F_{\neg\varphi}$ pentru a obţine (ca mai sus) următoarea formă normală disjunctivă a lui $\neg\varphi$:

$$(v_0 \wedge v_1 \wedge \neg v_2) \vee (\neg v_0 \wedge v_1 \wedge \neg v_2) \vee (\neg v_0 \wedge \neg v_1 \wedge \neg v_2),$$

iar, pe urmă, aplicând Propoziţia 2.70.(ii), obţinem că o formă normală conjunctivă a lui $\neg\neg\varphi$, şi deci a lui φ, este:

$$(\neg v_0 \vee \neg v_1 \vee v_2) \wedge (v_0 \vee \neg v_1 \vee v_2) \wedge (v_0 \vee v_1 \vee v_2).$$

$\square$