

## Seminar 10

**(S10.1)** Fie  $\mathcal{L}$  un limbaj de ordinul I,  $\mathcal{A}$  o  $\mathcal{L}$ -structură și  $e : V \rightarrow A$  o interpretare a lui  $\mathcal{L}$  în  $\mathcal{A}$ . Să se demonstreze că pentru orice formule  $\varphi, \psi$  și orice variabilă  $x$ :

- (i)  $(\varphi \vee \psi)^{\mathcal{A}}(e) = \varphi^{\mathcal{A}}(e) \vee \psi^{\mathcal{A}}(e)$ ;
- (ii)  $(\exists x \varphi)^{\mathcal{A}}(e) = \begin{cases} 1, & \text{dacă există } a \in A \text{ a.î. } \varphi^{\mathcal{A}}(e_{x \leftarrow a}) = 1; \\ 0, & \text{altfel.} \end{cases}$

**(S10.2)** Considerăm limbajul de ordinul I  $\mathcal{L}_{ar} = (\dot{<}; \dot{+}, \dot{\times}, \dot{S}; \dot{0})$  (limbajul aritmeticii) și  $\mathcal{L}_{ar}$ -structura  $\mathcal{N} = (\mathbb{N}, <, +, \cdot, S, 0)$ .

- (i) Fie  $x, y \in V$  cu  $x \neq y$ , și  $t = \dot{S}x \dot{\times} \dot{S}\dot{S}y = \dot{\times}(\dot{S}x, \dot{S}\dot{S}y)$ . Să se calculeze  $t^{\mathcal{N}}(e)$ , unde  $e : V \rightarrow \mathbb{N}$  este o evaluare ce verifică  $e(x) = 3$  și  $e(y) = 7$ .
- (ii) Fie  $\varphi = x \dot{<} \dot{S}y \rightarrow (x \dot{<} y \vee x = y) = \dot{<}(x, \dot{S}y) \rightarrow (\dot{<}(x, y) \vee x = y)$ . Să se arate că  $\mathcal{N} \models \varphi[e]$  pentru orice  $e : V \rightarrow \mathbb{N}$ .

**(S10.3)** Considerăm limbajul de ordinul I  $\mathcal{L}_{ar} = (\dot{<}; \dot{+}, \dot{\times}, \dot{S}; \dot{0})$  (limbajul aritmeticii) și  $\mathcal{L}_{ar}$ -structura  $\mathcal{N} = (\mathbb{N}, <, +, \cdot, S, 0)$ . Fie formula  $\varphi = \forall v_4 (v_3 \dot{<} v_4 \vee v_3 = v_4)$ . Să se caracterizeze acele  $e : V \rightarrow \mathbb{N}$  ce au proprietatea că  $\varphi^{\mathcal{N}}(e) = 1$ .

**Notația 1.** Fie  $\mathcal{L}$  un limbaj de ordinul I. Pentru orice variabile  $x, y$  cu  $x \neq y$ , orice  $\mathcal{L}$ -structură  $\mathcal{A}$ , orice  $e : V \rightarrow A$  și orice  $a, b \in A$ , avem că:

$$(e_{y \leftarrow b})_{x \leftarrow a} = (e_{x \leftarrow a})_{y \leftarrow b}.$$

În acest caz, notăm valoarea lor comună cu  $e_{x \leftarrow a, y \leftarrow b}$ . Așadar,

$$e_{x \leftarrow a, y \leftarrow b} : V \rightarrow A, \quad e_{x \leftarrow a, y \leftarrow b}(v) = \begin{cases} e(v) & \text{dacă } v \neq x \text{ și } v \neq y \\ a & \text{dacă } v = x \\ b & \text{dacă } v = y. \end{cases}$$

**(S10.4)** Să se arate că pentru orice formule  $\varphi, \psi$  și orice variabile  $x, y$  cu  $x \neq y$  avem,

(i)  $\forall x(\varphi \wedge \psi) \models \forall x\varphi \wedge \forall x\psi$ ;

(ii)  $\exists y\forall x\varphi \models \forall x\exists y\varphi$ .

**(S10.5)** Fie  $x, y$  variabile cu  $x \neq y$ . Să se dea exemple de limbaj de ordinul I,  $\mathcal{L}$ , și de formule  $\varphi, \psi$  ale lui  $\mathcal{L}$  astfel încât:

(i)  $\forall x(\varphi \vee \psi) \not\models \forall x\varphi \vee \forall x\psi$ ;

(ii)  $\forall x\exists y\varphi \not\models \exists y\forall x\varphi$ .