FMI, Info, Anul I
Logică matematică şi computaţională

Seminar 4

(S4.1) Fie LP logica propoziţională.

(i) Demonstraţi că mulţimea $Expr$ a expresiilor lui LP este numărabilă.

(ii) Demonstraţi că mulţimea $Form$ a formulelor lui LP este numărabilă.

Demonstraţie:

(i) Avem că $Expr = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} Sim^n = \{\lambda\} \cup Sim \cup \bigcup_{n\geq 2} Sim^n = A \cup B$, unde $A = \{\lambda\} \cup Sim$ şi $B = \bigcup_{n\geq 2} Sim^n$. Deoarece $Sim = V \cup \{\neg, \rightarrow, (,)\}$ şi V este numărabilă, obţinem, din Corolarul 1.10, că Sim este numărabilă. Aplicând încă o dată Corolarul 1.10, rezultă că A este numărabilă.

Conform Propoziţiei 1.13.(iii), Sim^n este numărabilă pentru orice $n \geq 2$. Este evident că $\mathbb{N} \setminus \{0, 1\}$ este numărabilă (se poate verifica imediat că $h : \mathbb{N} \setminus \{0, 1\} \to \mathbb{N},\ h(n) = n - 2$ este bijecţie). Putem aplica Propoziţia 1.13.(i) pentru a concluziona că B este cel mult numărabilă. Evident, B este nevidă.

Aplicând din nou Corolarul 1.10, obţinem că $Expr$ este cel mult numărabilă.

Cum $V \subseteq Expr$, iar V este infinită, rezultă că $Expr$ este numărabilă.

(ii) Cum $Form \subseteq Expr$, iar $Expr$ este numărabilă, rezultă că $Form$ este o mulţime cel mult numărabilă.

Cum $V \subseteq Form$, iar V este infinită, rezultă că $Form$ este numărabilă.

$\square$

(S4.2) Să se demonstreze că pentru orice x_0, x_1, x_3, x_4 din $\{0, 1\}$ avem:

(i) $((x_0 \rightarrow x_1) \rightarrow x_0) \rightarrow x_0 = 1$;

(ii) $(x_3 \rightarrow x_4) \rightarrow ((x_4 \rightarrow x_1) \rightarrow (x_3 \rightarrow x_1)) = 1$.

Demonstraţie:

(i)

x_0	x_1	$x_0 \to x_1$	$(x_0 \to x_1) \to x_0$	$((x_0 \to x_1) \to x_0) \to x_0$
1	1	1	1	1
1	0	0	1	1
0	1	1	0	1
0	0	1	0	1

(ii) Notăm $f(x_1, x_3, x_4) := (x_3 \to x_4) \to ((x_4 \to x_1) \to (x_3 \to x_1))$.

x_1	x_3	x_4	$x_3 \to x_4$	$x_4 \to x_1$	$x_3 \to x_1$	$(x_4 \to x_1) \to (x_3 \to x_1)$	$f(x_1, x_3, x_4)$
1	1	1	1	1	1	1	1
1	1	0	0	1	1	1	1
1	0	1	1	1	1	1	1
1	0	0	1	1	1	1	1
0	1	1	1	0	0	1	1
0	1	0	0	1	0	0	1
0	0	1	1	0	1	1	1
0	0	0	1	1	1	1	1

□

Fie φ, $\psi \in Form$. Pentru orice $e : V \to \{0, 1\}$, notăm cu $e \vDash \varphi$ (şi spunem că e **satisface** φ sau e este **model** pentru φ) dacă $e^+(\varphi) = 1$. Notăm cu $\vDash \varphi$ (şi spunem că φ este **tautologie**) dacă pentru orice $e : V \to \{0, 1\}$ avem că $e \vDash \varphi$. Spunem că φ este **satisfiabilă** dacă există $e : V \to \{0, 1\}$ cu $e \vDash \varphi$ şi **nesatisfiabilă** în caz contrar, când nu există $e : V \to \{0, 1\}$ cu $e \vDash \varphi$, i.e. pentru orice $e : V \to \{0, 1\}$ avem că $e \nvDash \varphi$. Notăm $\varphi \vDash \psi$ (şi spunem că **din** φ **se deduce semantic** ψ sau că ψ **este consecinţă semantică a lui** φ) dacă pentru orice $e : V \to \{0, 1\}$ cu $e \vDash \varphi$ avem $e \vDash \psi$. Notăm cu $\varphi \sim \psi$ dacă pentru orice $e : V \to \{0, 1\}$ avem $e \vDash \varphi$ dacă şi numai dacă $e \vDash \psi$, i.e. pentru orice $e : V \to \{0, 1\}$ avem $e^+(\varphi) = e^+(\psi)$.

(S4.3) Să se găsească câte un model pentru fiecare dintre formulele:

(i) $v_0 \to v_2$;

(ii) $v_0 \wedge v_3 \wedge \neg v_4$.

Demonstraţie:

(i) Fie funcţia $e : V \to \{0,1\}$, definită, pentru orice $x \in V$, prin:

$$e(x) := \begin{cases} 0, & \text{dacă } x = v_0 \\ 1, & \text{dacă } x = v_2 \\ 0, & \text{altfel.} \end{cases}$$

Atunci:

$$e^+(v_0 \to v_2) = e^+(v_0) \rightarrow e^+(v_2) = e(v_0) \rightarrow e(v_2) = 0 \rightarrow 1 = 1.$$

(ii) Fie funcţia $e : V \to \{0,1\}$, definită, pentru orice $x \in V$, prin:

$$e(x) := \begin{cases} 1, & \text{dacă } x = v_0 \\ 1, & \text{dacă } x = v_3 \\ 0, & \text{dacă } x = v_4 \\ 1, & \text{altfel.} \end{cases}$$

Atunci:

$$\begin{aligned} e^+(v_0 \wedge v_3 \wedge \neg v_4) &= e^+(v_0) \wedge e^+(v_3) \wedge \neg e^+(v_4) \\ &= e(v_0) \wedge e(v_3) \wedge \neg e(v_4) \\ &= 1 \wedge 1 \wedge \neg 0 \\ &= 1 \wedge 1 \wedge 1 \\ &= 1. \end{aligned}$$

□

(S4.4) Arătaţi că pentru orice φ, ψ, $\chi \in Form$, avem:

(i) $\psi \vDash (\varphi \to \psi)$;

(ii) $\varphi \to (\psi \to \chi) \sim (\varphi \wedge \psi) \to \chi$;

(iii) $\varphi \vee (\varphi \wedge \psi) \sim \varphi$;

(iv) $\vDash \neg\varphi \to (\neg\psi \leftrightarrow (\psi \to \varphi))$.

Demonstraţie: Vom folosi în demonstraţii următoarele: pentru orice $a, b \in \{0,1\}$,

$$\begin{array}{rcl} a \rightarrow b = 1 & \iff & a \leq b, \\ 1 \rightarrow a = a, & & a \rightarrow 1 = 1 \\ 0 \rightarrow a = 1, & & a \rightarrow 0 = \neg a \\ 1 \wedge a = a, & & 0 \wedge a = 0, \\ 1 \vee a = 1, & & 0 \vee a = a. \end{array}$$

(i) Fie $e : V \to \{0,1\}$ cu $e^+(\psi) = 1$. Vrem să arătăm că $e^+(\varphi \to \psi) = 1$. Dar:

$$e^+(\varphi \to \psi) = e^+(\varphi) \boldsymbol{\to} e^+(\psi) = e^+(\varphi) \boldsymbol{\to} 1 = 1.$$

(ii) Fie $e : V \to \{0,1\}$ o evaluare arbitrară. Trebuie să demonstrăm că

$$e^+(\varphi \to (\psi \to \chi) = 1 \text{ dacă şi numai dacă } e^+(\varphi \wedge \psi \to \chi) = 1,$$

ceea ce este echivalent cu a arăta că $e^+(\varphi \to (\psi \to \chi)) = e^+(\varphi \wedge \psi \to \chi)$.

Metoda 1: Ne folosim de următorul tabel:

$e^+(\varphi)$	$e^+(\psi)$	$e^+(\chi)$	$e^+(\psi \to \chi)$	$e^+(\varphi \to (\psi \to \chi))$	$e^+(\varphi \wedge \psi)$	$e^+(\varphi \wedge \psi \to \chi)$
1	1	1	1	1	1	1
1	1	0	0	0	1	0
1	0	1	1	1	0	1
1	0	0	1	1	0	1
0	1	1	1	1	0	1
0	1	0	0	1	0	1
0	0	1	1	1	0	1
0	0	0	1	1	0	1

Metoda 2: Raţionăm direct. Observăm că

$$\begin{aligned} e^+(\varphi \to (\psi \to \chi)) &= e^+(\varphi) \boldsymbol{\to} (e^+(\psi) \boldsymbol{\to} e^+(\chi)), \\ e^+(\varphi \wedge \psi \to \chi) &= e^+(\varphi) \boldsymbol{\wedge} e^+(\psi) \boldsymbol{\to} e^+(\chi). \end{aligned}$$

Avem cazurile:

(a) $e^+(\varphi) = 0$. Atunci

$$\begin{aligned} e^+(\varphi) \boldsymbol{\to} (e^+(\psi) \boldsymbol{\to} e^+(\chi)) &= 0 \boldsymbol{\to} (e^+(\psi) \boldsymbol{\to} e^+(\chi)) = 1, \\ e^+(\varphi) \boldsymbol{\wedge} e^+(\psi) \boldsymbol{\to} e^+(\chi) &= 0 \boldsymbol{\wedge} e^+(\psi) \boldsymbol{\to} e^+(\chi) = 0 \boldsymbol{\to} e^+(\chi) = 1. \end{aligned}$$

(b) $e^+(\varphi) = 1$. Atunci

$$\begin{aligned} e^+(\varphi) \boldsymbol{\to} (e^+(\psi) \boldsymbol{\to} e^+(\chi)) &= 1 \boldsymbol{\to} (e^+(\psi) \boldsymbol{\to} e^+(\chi)) = e^+(\psi) \boldsymbol{\to} e^+(\chi), \\ e^+(\varphi) \boldsymbol{\wedge} e^+(\psi) \boldsymbol{\to} e^+(\chi) &= 1 \boldsymbol{\wedge} e^+(\psi) \boldsymbol{\to} e^+(\chi) = e^+(\psi) \boldsymbol{\to} e^+(\chi). \end{aligned}$$

(iii) Fie $e : V \to \{0,1\}$ o evaluare arbitrară. Trebuie să demonstrăm că

$$e^+(\varphi \vee (\varphi \wedge \psi)) = e^+(\varphi), \quad \text{deci că} \quad e^+(\varphi) \boldsymbol{\vee} (e^+(\varphi) \boldsymbol{\wedge} e^+(\psi)) = e^+(\varphi).$$

Avem cazurile:

(a) $e^+(\varphi) = 1$. Atunci

$$e^+(\varphi) \vee (e^+(\varphi) \wedge e^+(\psi)) = 1 \vee (1 \wedge e^+(\psi)) = 1 \vee e^+(\psi) = 1.$$

(b) $e^+(\varphi) = 0$. Atunci

$$e^+(\varphi) \vee (e^+(\varphi) \wedge e^+(\psi)) = 0 \vee (0 \wedge e^+(\psi)) = 0 \vee 0 = 0.$$

(iv) Fie $e : V \to \{0,1\}$ o evaluare arbitrară.

$$e^+(\neg\varphi \to (\neg\psi \leftrightarrow (\psi \to \varphi))) = \neg e^+(\varphi) \to (\neg e^+(\psi) \leftrightarrow (e^+(\psi) \to e^+(\varphi))).$$

Avem cazurile:

(a) $e^+(\varphi) = 1$. Atunci $\neg e^+(\varphi) = 0$ şi, prin urmare,

$$\begin{aligned}\neg e^+(\varphi) \to (\neg e^+(\psi) \leftrightarrow (e^+(\psi) \to e^+(\varphi))) &= 0 \to (\neg e^+(\psi) \leftrightarrow (e^+(\psi) \to e^+(\varphi))) \\ &= 1.\end{aligned}$$

(b) $e^+(\varphi) = 0$. Atunci

$$\begin{aligned}\neg e^+(\varphi) \to (\neg e^+(\psi) \leftrightarrow (e^+(\psi) \to e^+(\varphi))) &= \neg 0 \to (\neg e^+(\psi) \leftrightarrow (e^+(\psi) \to 0)) \\ &= 1 \to (\neg e^+(\psi) \leftrightarrow (e^+(\psi) \to 0)) \\ &= \neg e^+(\psi) \leftrightarrow (e^+(\psi) \to 0) \\ &= \neg e^+(\psi) \leftrightarrow \neg e^+(\psi) \\ &= 1.\end{aligned}$$

□

(S4.5) Să se demonstreze că, pentru orice formulă φ, φ este tautologie dacă şi numai dacă $\neg\varphi$ este nesatisfiabilă.

Demonstraţie:

Avem:

$$\begin{aligned}\varphi \text{ este tautologie} &\iff \text{pentru orice } e : V \to \{0,1\},\ e^+(\varphi) = 1 \\ &\iff \text{pentru orice } e : V \to \{0,1\},\ \neg e^+(\varphi) = 0 \\ &\iff \text{pentru orice } e : V \to \{0,1\},\ e^+(\neg\varphi) = 0 \\ &\iff \text{pentru orice } e : V \to \{0,1\},\ \text{nu avem că } e^+(\neg\varphi) = 1 \\ &\iff \text{nu avem că există } e : V \to \{0,1\} \text{ cu } e^+(\neg\varphi) = 1 \\ &\iff \text{nu avem că } \neg\varphi \text{ e satisfiabilă} \\ &\iff \neg\varphi \text{ nu e satisfiabilă} \\ &\iff \neg\varphi \text{ e nesatisfiabilă.}\end{aligned}$$

□