Examen la algebră [1]
an I, sem. I
3.02.2022

Numele şi prenumele Enescu Irina Ştefania..............................

Grupa .133..........

Γ = **numărul de litere al primului nume** = .6......
Ω = **numărul de litere al primului prenume** = .5.......

Subiectul I.

1. Pe mulţimea $\mathbb{R}$ definim relaţia binară
$$x \sim y \iff x = y \text{ sau } x + y = \Omega.$$
(i) Să se arate că "$\sim$" este o relaţie de echivalenţă.
(ii) Să se determine clasa de echivalenţă a numărului real 2022 în raport cu relaţia $\sim$.
(iii) Să se arate că funcţia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definită prin $f(x) = x(\Omega - x)$, pentru orice $x \in \mathbb{R}$, nu este nici injectivă, nici surjectivă.
(iv) Să se arate că mulţimea factor $\mathbb{R}/\sim$ este echipotentă cu imaginea funcţiei f de la punctul (iii). **(6 pct.)**

2. Definim funcţia $g : \mathbb{Z} \to [0, 1)$, $g(n) = \{2^n \sqrt[13]{\Gamma}\}$, unde $\{x\}$ reprezintă partea fracţionară a numărului x. Să se arate că g este injectivă. **(3 pct.)**

Subiectul II.

1. Determinaţi elementele de ordin 2 şi elementele de ordin 3 din grupul $(\mathbb{Z}_{\Gamma+5}, +)$.

2. Determinaţi elementele de ordin 6 din grupul $(\mathbb{Z}_{\Gamma+5} \times \mathbb{Z}_{\Omega+12}, +)$. **(3 pct.)**

3. Conţine grupul $(\mathbb{Z}_{\Gamma} \times \mathbb{Z}_{\Omega}, +)$ un element de ordin $\Gamma \cdot \Omega$? **(3 pct.)**

[1]**Toate subiectele sunt obligatorii.**
La fiecare subiect, înlocuiţi Γ şi Ω cu valorile specificate mai sus! **La fiecare subiect, înlocuiţi Γ şi Ω cu valorile specificate mai sus!** **(Spre exemplu: dacă numele este Vasilescu Ştefan Alexandru consideraţi peste tot $\Gamma = 9$ şi $\Omega = 6$.)**
Toate răspunsurile trebuie justificate. Fiecare subiect trebuie scris pe foi separate.
Timp de lucru $2\frac{1}{2}$ ore. Succes!

Subiectul III. Se consideră permutarea

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & 11 \\ 2 & 9 & 5 & 7 & 10 & 3 & 11 & 6 & 1 & 8 & 4 \end{pmatrix} \in S_{11}.$$

1. Descompuneţi σ în produs de cicluri disjuncte şi în produs de transpoziţii. **(3 pct.)**

2. Aflaţi ordinul şi signatura permutării σ. Calculaţi $\sigma^{2022+\Gamma}$. **(3 pct.)**

3. Determinaţi permutările $\tau \in S_{10}$ cu proprietatea că $\tau^2 = \sigma^{\Omega}$. **(3 pct.)**

Subiectul IV.

1. Să se determine câtul şi restul împărţirii polinomului $X^4 + X^2 + \Gamma$ la $X^3 + X + \Omega$ în $\mathbb{Q}[X]$.

2. Să se determine cmmdc al polinoamelor $X^5 + X^2 + \hat{\Gamma}$ şi $X^3 + \hat{\Omega}X + \hat{1}$ în $\mathbb{Z}_2[X]$.

3. Să se determine numărul elementelor inversabile, al elementelor nilpotente şi al elementelor idempotente din inelul $\mathbb{Z}_{6\Gamma}$.

4. Fie $I = (X - \Gamma, \Omega)$ idealul din $\mathbb{Z}[X]$ generat de $X - \Gamma$ şi Ω. Să se arate că $I \neq \mathbb{Z}[X]$.

Subiectul I

1. $\mathbb{R}$ $\quad x \sim y \Leftrightarrow x = y$ sau $x + y = 5$

i) „$\sim$" relație de echivalență

- reflexivă: $x \sim x \Leftrightarrow x = x$ sau $x + x = 5$ (A)
- simetrică: $x \sim y \Leftrightarrow x = y$ sau $x + y = 5 \Leftrightarrow y = x$ sau $y + x = 5$
  $\Leftrightarrow y \sim x$ (A)
- tranzitivă: $\left.\begin{array}{l} x \sim y \Leftrightarrow x = y \text{ sau } x + y = 5 \\ y \sim z \Leftrightarrow y = z \text{ sau } y + z = 5 \end{array}\right\} \Rightarrow x = y = z$ sau $x + 5 - z = 5$

  $\Rightarrow x = z$ sau $x = z \Rightarrow x \sim z$ (A)

Cum „$\sim$" este reflexivă, simetrică și tranzitivă $\Rightarrow$ „$\sim$" relație de echivalență

ii) clasa de echivalență a nr. real 2022 în raport cu $\sim$

$\left.\begin{array}{l} 2022 \sim y \Leftrightarrow 2022 = y \text{ sau } 2022 + y = 5 \\ \Leftrightarrow y = 2022 \text{ sau } y = -2017 \end{array}\right\} \Rightarrow \widehat{2022} = \{2022, -2017\}$

iii) $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x(5-x)$ $\forall x \in \mathbb{R}$ nu e nici injectivă, nici surjectivă

- injectivitatea: $\forall x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ cu $x_1 \neq x_2 \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2)$

  $f(x) = 0 \Rightarrow x(5-x) = 0 \quad \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x = 5 \end{array}\right.$

  $\left.\begin{array}{l} \text{Cum } f(0) = 0 \\ f(5) = 0 \\ 0, 5 \in \mathbb{R} \text{ și } 0 \neq 5 \end{array}\right\} \Rightarrow f$ nu e injectivă

- surjectivitatea: $\forall y \in \mathbb{R}$ $\exists x \in \mathbb{R}$ a.î. $f(x) = y$
  în cazul nostru, $\mathrm{Im} f = \mathbb{R}$

  $\left.\begin{array}{l} f(x) = -x^2 + 5x \\ \text{cum } a < 0 \Rightarrow \mathrm{Im} f = \left(-\infty, -\frac{\Delta}{4a}\right] = \left(-\infty, -\frac{25}{4\cdot(-1)}\right] = \left(-\infty, \frac{25}{4}\right] \neq \mathbb{R} \\ \Delta = b^2 - 4ac = 25 - 4\cdot(-1)\cdot 0 = 25 \end{array}\right\} \Rightarrow f$ nu e surjectivă

iv) $\mathbb{R}/_\sim$ e echipotentă cu $\mathrm{Im} f = \left(-\infty, \frac{25}{4}\right]$

$\hat{x} = \{y \in \mathbb{R} \mid x \sim y\} \Rightarrow \hat{x} = \{y \in \mathbb{R} \mid x = y \text{ sau } x + y = 5\} \Rightarrow$

$\Rightarrow \hat{x} = \{y \in \mathbb{R} \mid x = y \text{ sau } x = 5 - y\} \Rightarrow \hat{x} = \{x, 5-x\} \Rightarrow \mathbb{R}/_\sim = \{x, 5-x\}$ $\forall x \in \mathbb{R}$

$\mathbb{R}/_\sim$ echipotentă cu $\mathrm{Im} f \Leftrightarrow$ există o bijecție $f: \mathbb{R}/_\sim \to \mathrm{Im} f$

2. $g: \mathbb{Z} \to [0,1)$

$g(n) = \{2^n \sqrt[3]{6}\}$ unde $\{x\}$ - parte fract. x

g injectivă $\Leftrightarrow$ $\forall x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ cu $x_1 \neq x_2 \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2)$

sau dacă $f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2$ $\forall x_1, x_2 \in \mathbb{R}$

sau g strict crescătoare / descrescătoare

cum $g(n) = \{2^n \sqrt[3]{6}\}$

Subiectul II

1. elem. de ordin 2
elem. de ordin 3 din $(\mathbb{Z}_{11},+)$

$|\mathbb{Z}_{11}| = 11 \Rightarrow \forall g \in (\mathbb{Z}_{11},+),\ \sigma(g) | 11 \Rightarrow \sigma(g) \in \{1, 11\} \Rightarrow$ nu există elemente de ordin 2 sau de ordin 3

2. elem. de ordin 6 din $(\mathbb{Z}_{11} \times \mathbb{Z}_{17},+)$

$|\mathbb{Z}_{11} \times \mathbb{Z}_{17}| = 11 \cdot 17 = 187 \Rightarrow \forall g \in (\mathbb{Z}_{11} \times \mathbb{Z}_{17},+),\ \sigma(g) | 187 \Rightarrow$

$\Rightarrow \sigma(g) \in \{1, 11, 17, 187\} \Rightarrow$ nu există elemente de ordin 6

3. conține $(\mathbb{Z}_6 \times \mathbb{Z}_5,+)$ un element de ordin 30?

$|\mathbb{Z}_6 \times \mathbb{Z}_5| = 30 \Rightarrow \forall g \in (\mathbb{Z}_6 \times \mathbb{Z}_5,+),\ \sigma(g) | 30 \Rightarrow \sigma(g) \in \{1,2,3,5,6,10,15,30\}$

$\Rightarrow$ poate conține

$$30 \cdot (\hat{a}, \bar{b}) = (\hat{0}, \bar{0})$$

$$\left(\begin{array}{l} 30 \cdot \hat{a} = \hat{0} \text{ în } \mathbb{Z}_6 \\ 30 \cdot \bar{b} = \bar{0} \text{ în } \mathbb{Z}_5 \end{array}\right)$$

Luăm elementul $(\hat{5}, \bar{3}) \in (\mathbb{Z}_6 \times \mathbb{Z}_5)$

Verificăm ce ordin are:

$$\left.\begin{array}{l} 1 \cdot 5 = 5 \\ 2 \cdot 5 = 10 \\ 3 \cdot 5 = 15 \\ 5 \cdot 5 = 25 \\ 6 \cdot 5 = 30 \\ 10 \cdot 5 = 50 \\ 15 \cdot 5 = 75 \\ 30 \cdot 5 = 150 \end{array}\right\} \Rightarrow 6 \cdot 5 \text{ și } \boxed{30 \cdot 5} \text{ sunt multiplii de } 6$$

$$\left.\begin{array}{l} 1 \cdot 3 = 3 \\ 2 \cdot 3 = 6 \\ 3 \cdot 3 = 9 \\ 5 \cdot 3 = 15 \\ 6 \cdot 3 = 18 \\ 10 \cdot 3 = 30 \\ 15 \cdot 3 = 45 \\ 30 \cdot 3 = 90 \end{array}\right\} \Rightarrow 5 \cdot 3,\ 10 \cdot 3 \text{ și } \boxed{30 \cdot 3} \text{ sunt multiplii de } 6$$

Deci $30(\hat{5}, \bar{3}) = (\hat{0}, \bar{0}) \Rightarrow$ elem. $(\hat{5}, \bar{3})$ are ordin 30 $\Rightarrow$ există

Subiectul III

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & 11 \\ 2 & 9 & 5 & 7 & 10 & 3 & 11 & 6 & 1 & 8 & 4 \end{pmatrix} \in S_{11}$$

1. $\sigma = (1\ 2\ 9)(3\ 5\ 10\ 8\ 6)(4\ 7\ 11)$

$\sigma = (1\ 2)(2\ 9)(3\ 5)(5\ 10)(10\ 8)(8\ 6)(4\ 7)(7\ 11)$

2. $ord(\sigma) = [3, 5] = 15$

$sgn(\sigma) = (-1)^8 = 1 \Rightarrow \sigma$ pară

$\sigma^{2022+6} = \sigma^{2028}$

$$\left.\begin{array}{l} \text{Știm că } \sigma^{15} = e \\ 2028 : 15 = 15 \cdot 135 + 3 \end{array}\right\} \Rightarrow \sigma^{2028} = \sigma^{15 \cdot 135 + 3} = \sigma^3$$

$\sigma^3 = (1\ 2\ 9)^3 (3\ 5\ 10\ 8\ 6)^3 (4\ 7\ 11)^3 = (3\ 8\ 5\ 6\ 10)$

$$\sigma^2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & 11 \\ 2 & 9 & 5 & 7 & 10 & 3 & 11 & 6 & 1 & 8 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & 11 \\ 2 & 9 & 5 & 7 & 10 & 3 & 11 & 6 & 1 & 8 & 4 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & 11 \\ 9 & 1 & 10 & 11 & 8 & 5 & 4 & 3 & 2 & 6 & 7 \end{pmatrix}$$

$$\sigma^3 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & 11 \\ 9 & 1 & 10 & 11 & 8 & 5 & 4 & 3 & 2 & 6 & 7 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & 11 \\ 2 & 9 & 5 & 7 & 10 & 3 & 11 & 6 & 1 & 8 & 4 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & 11 \\ 1 & 2 & 8 & 4 & 6 & 10 & 7 & 5 & 9 & 3 & 11 \end{pmatrix}$$

Deci $\sigma^{2028} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & 11 \\ 1 & 2 & 8 & 4 & 6 & 10 & 7 & 5 & 9 & 3 & 11 \end{pmatrix}$

3. $\tau \in S_{11}$ a.î. $\tau^2 = \sigma^5$

$$\sigma^5 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & 11 \\ 1 & 2 & 8 & 4 & 6 & 10 & 7 & 5 & 9 & 3 & 11 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & 11 \\ 9 & 1 & 10 & 11 & 8 & 5 & 4 & 3 & 2 & 6 & 7 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & 11 \\ 9 & 1 & 3 & 11 & 5 & 6 & 4 & 8 & 2 & 10 & 7 \end{pmatrix}$$

$\sigma^5 = (1\ 9\ 2)(4\ 11\ 7)(3)(5)(6)(8)(10)$

$\Rightarrow \tau^2 = (1\ 9\ 2)(4\ 11\ 7)(3)(5)(6)(8)(10)$

Putem grupa ciclii cu lungimea 3 sau îi putem lua separat.

$\sigma^2 = (1\ 9\ 2)(4\ 11\ 7)$

Separat: $c_1^2 = (1\ 9\ 2) \Rightarrow c_1 = (c_1)^{3+1} = (c_1^2)^2 = (1\ 2\ 9)$

$c_2^2 = (4\ 11\ 7) \Rightarrow c_2 = (c_2)^{3+1} = (c_2^2)^2 = (4\ 7\ 11)$

$\Rightarrow \sigma_1 = (1\ 2\ 9)(4\ 7\ 11)$

Grupat: $c_1 = (1\ 9\ 2)(4\ 11\ 7) \Rightarrow c_1 = (1\ 4\ 9\ 11\ 2\ 7)$

$c_1 = (1\ 11\ 9\ 7\ 2\ 4)$

$c_1 = (1\ 7\ 9\ 4\ 2\ 11)$

$\Rightarrow \sigma_2 = (1\ 4\ 9\ 11\ 2\ 7)$

$\sigma_3 = (1\ 11\ 9\ 7\ 2\ 4)$

$\sigma_4 = (1\ 7\ 9\ 4\ 2\ 11)$

Soluții: $\sigma \in \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & 11 \\ 9 & 1 & 3 & 11 & 5 & 6 & 4 & 8 & 2 & 10 & 7 \end{pmatrix}, \right.$

$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & 11 \\ 4 & 7 & 3 & 9 & 5 & 6 & 1 & 8 & 11 & 10 & 2 \end{pmatrix},$

$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & 11 \\ 11 & 4 & 3 & 1 & 5 & 6 & 2 & 8 & 7 & 10 & 9 \end{pmatrix},$

$\left. \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & 11 \\ 7 & 11 & 3 & 2 & 5 & 6 & 9 & 8 & 4 & 10 & 1 \end{pmatrix} \right\}$

Subiectul IV

1. Câtul și restul împărțirii polinomului x^4+x^2+6 la x^3+x+5 în $\mathbb{Q}[x]$

$$\begin{array}{l|l} x^4+x^2+6 & x^3+x+5 \\ \cline{2-2} -x^4-x^2-5x & x \\ \cline{1-1} \quad -5x+6 & \end{array} \Rightarrow \begin{array}{l} \text{cât} = x \\ \text{rest} = -5x+6 \end{array}$$

2. Cmmdc al $x^5+x^2+\hat{6}$ și $x^3+\hat{5}x+\hat{1}$ în $\mathbb{Z}_2[x]$

$\Leftrightarrow x^5+x^2+\hat{0}$ și $x^3+\hat{1}x+\hat{1}$ în $\mathbb{Z}_2[x]$

$$\begin{array}{l|l} x^5+x^2+\hat{0} & x^3+\hat{1}x+\hat{1} \\ \cline{2-2} -x^5-\hat{1}x^3-\hat{1}x^2 & x^2-\hat{1} \\ \cline{1-1} \quad -\hat{1}x^3+\hat{0} & \\ \quad +\hat{1}x^3+\hat{1}x+\hat{1} & \\ \cline{1-1} \qquad \hat{1}x+\hat{1} & \end{array} \Rightarrow \begin{array}{l} \text{cât} = x^2-\hat{1} \\ \text{rest} = x+\hat{1} \end{array}$$

$$\begin{array}{l|l} x^3+\hat{1}x+\hat{1} & x+\hat{1} \\ \cline{2-2} -x^3-\hat{1}x^2 & x^2-x \\ \cline{1-1} \quad -\hat{1}x^2+\hat{1}x+\hat{1} & \\ \quad x^2+\hat{1}x & \\ \cline{1-1} \qquad \hat{2}x+\hat{1} = \hat{1} & \end{array} \Rightarrow \begin{array}{l} \text{cât} = x^2-x \\ \text{rest} = \hat{1} \end{array} \Rightarrow \text{sunt prime între ele}$$

4. $I = (x-6, 5)$ ideal din $\mathbb{Z}[x]$ generat de $x-6$ și 5

Ar. că $I \neq \mathbb{Z}[x]$

$I = \{(x-6)f + 5g \mid f, g \in \mathbb{Z}[x]\}$

Luăm $h \in \mathbb{Z}[x] \setminus I$

$x-6=5 \Leftrightarrow x=11$

$f(11)=5 \Rightarrow [(x-6)f+5g](11) = 5f+5g \; \vdots \; 5 \Rightarrow$

$\Rightarrow$ e suficient să luăm $h \in \mathbb{Z}[x]$ a.î. $5 \nmid h(11)$

spre exemplu $h=1$, $h=x+1$ ...

cum $h \in \mathbb{Z}[x]$ și $h \in \mathbb{Z}[x] \setminus I \Rightarrow I \neq \mathbb{Z}[x]$.

3. x nilpotent dacă $\exists n \in \mathbb{N}^*$ a.î. $x^n = 0$

x idempotent dacă $x^2 = x$

inelul $\mathbb{Z}_{36}$

$N(\mathbb{Z}_{36}) = \{\hat{0}, \hat{2}, \hat{3}, \hat{4}, \hat{8}, \hat{6}, \hat{12}, \hat{18}\}$ $\Rightarrow$ 8 elemente nilpotente