Examen SAI seria 15, sem. I, 5.06.2021 [1]

Numele şi prenumele ....

Grupa ....

Problema 1. Pe mulţimea $\mathbb{N}$ definim relaţia "$\sim$" astfel:

$$a \sim b \Leftrightarrow \text{ există } m, n \in \mathbb{N}^* \text{ astfel încât } a \mid b^m \text{ şi } b \mid a^n.$$

Arătaţi că :

(i) $a \sim b$ dacă şi numai dacă a şi b au aceiaşi divizori primi. (3 pct.)

(ii) $\sim$ este o relaţie de echivalenţă pe $\mathbb{N}$. (4 pct.)

Determinaţi un sistem complet de reprezentanţi pentru relaţia de echivalenţă $\sim$. (2 pct.)

Problema 2. (i) Determinaţi elementele de ordin 10 din $\mathbb{Z}_{12} \times \mathbb{Z}_{15}$. (6 pct.)

(ii) Determinaţi $\widehat{k} \in \mathbb{Z}_{20}$ astfel încât $\widehat{17}^{-8} \cdot \widehat{k} \cdot \widehat{7}^{2021} = \hat{3}^{-9}$. (3 pct.)

Problema 3. Se consideră permutarea $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 3 & 1 & 4 & 5 & 6 & 2 \end{pmatrix} \in S_6$.

(i) Descompuneţi σ în produs de cicli disjuncţi şi în produs de transpoziţii. (**2+2 pct.**)

(ii) Aflaţi signatura lui σ, ordinul lui σ şi calculaţi σ^{2021}. (**1+1+1 pct.**)

(iii) Calculaţi numărul elementelor de ordin 3 din S_6. (**2 pct.**)

Problema 4. Fie $I = (3, X^3 - X^2 + 2X + 1)$ ideal în $\mathbb{Z}[X]$.

(i) Daţi exemplu de un polinom din $\mathbb{Z}[X]$ care nu aparţine lui I. (**2 pct.**)

(ii) Există $f \in \mathbb{Z}[X]$ astfel încât $(f) = I$? (**3 pct.**)

(iii) Să se arate că inelele factor $\frac{\mathbb{Z}[X]}{I}$ şi $\frac{\mathbb{Z}_3[X]}{(X^3 + \hat{2}X^2 - X + \hat{1})}$ sunt izomorfe. Este $\frac{\mathbb{Z}[X]}{I}$ corp? (**2+2 pct.**)

---

[1] **Toate subiectele sunt obligatorii. Toate răspunsurile trebuie justificate. Timp de lucru $2\frac{1}{2}$ ore. Succes!**