FMI, Info, Anul I
Logică matematică şi computaţională

Seminar 12

(S12.1) Fie $\mathcal{L}$ un limbaj de ordinul I. Să se arate că:

(i) pentru orice formule φ, ψ şi orice variabilă x,

$$\vDash \forall x(\varphi \rightarrow \psi) \rightarrow (\forall x\varphi \rightarrow \forall x\psi);$$

(ii) pentru orice formulă φ şi orice variabilă x cu $x \notin Var(\varphi)$,

$$\vDash \varphi \rightarrow \forall x\varphi;$$

(iii) pentru orice variabilă x şi orice termen t cu $x \notin Var(t)$,

$$\vDash \exists x(x = t).$$

Demonstraţie: Fie $\mathcal{A}$ o $\mathcal{L}$-structură şi $e : V \rightarrow A$ o evaluare.

(i) Vrem să arătăm că $\mathcal{A} \vDash (\forall x(\varphi \rightarrow \psi) \rightarrow (\forall x\varphi \rightarrow \forall x\psi))[e]$. Pentru aceasta, presupunem că $\mathcal{A} \vDash (\forall x(\varphi \rightarrow \psi))[e]$ – deci pentru orice $a \in A$, vom avea că are loc $\mathcal{A} \vDash (\varphi \rightarrow \psi)[e_{x\leftarrow a}]$ (*) – şi vrem să arătăm că $\mathcal{A} \vDash (\forall x\varphi \rightarrow \forall x\psi)[e]$. Presupunem prin absurd că nu e aşa – atunci avem că $\mathcal{A} \vDash (\forall x\varphi)[e]$ şi $\mathcal{A} \not\vDash (\forall x\psi)[e]$. Deci pentru orice $a \in A$, $\mathcal{A} \vDash \varphi[e_{x\leftarrow a}]$ (**) şi există un $b \in A$ cu $\mathcal{A} \not\vDash \psi[e_{x\leftarrow b}]$ (***). Luând în (*) şi (**) $a := b$, obţinem că $\mathcal{A} \vDash (\varphi \rightarrow \psi)[e_{x\leftarrow b}]$ şi $\mathcal{A} \vDash \varphi[e_{x\leftarrow b}]$, de unde avem că $\mathcal{A} \vDash \psi[e_{x\leftarrow b}]$, ceea ce contrazice (***).

(ii) Vrem să arătăm că $\mathcal{A} \vDash (\varphi \rightarrow \forall x\varphi)[e]$. Pentru aceasta, presupunem că $\mathcal{A} \vDash \varphi[e]$ şi vrem să arătăm $\mathcal{A} \vDash (\forall x\varphi)[e]$, i.e. că pentru orice $a \in A$, $\mathcal{A} \vDash \varphi[e_{x\leftarrow a}]$. Fie $a \in A$. Clar $FV(\varphi) \subseteq Var(\varphi)$. Cum $x \notin Var(\varphi)$, $x \notin FV(\varphi)$. Avem că e şi $e_{x\leftarrow a}$ diferă cel mult pe "poziţia" x, deci restricţionate la $FV(\varphi)$ ele devin egale. Aplicând Propoziţia 3.27, rezultă că avem într-adevăr $\mathcal{A} \vDash \varphi[e_{x\leftarrow a}]$.

(iii) Trebuie arătat, folosind (S10.1).(ii), că există un $b \in A$ astfel încât $\mathcal{A} \vDash (x = t)[e_{x \leftarrow b}]$, i.e. că există un $b \in A$ astfel încât $b = t^{\mathcal{A}}(e_{x \leftarrow b})$. Cum $x \notin Var(t)$, aplicând Propoziţia 3.26, avem $t^{\mathcal{A}}(e_{x \leftarrow b}) = t^{\mathcal{A}}(e)$. Deci trebuie arătat doar că există un $b \in A$ astfel încât $b = t^{\mathcal{A}}(e)$. Dar acest lucru e simplu, doar luăm $b := t^{\mathcal{A}}(e)$.

□

(S12.2) Dacă $\mathcal{L}$ este un limbaj cu un singur simbol de relaţie de aritate 2, simbol notat cu $\sim$, să se scrie un enunţ φ ce spune că relaţia asociată simbolului este o relaţie de echivalenţă cu proprietatea că fiecare clasă a sa are exact două elemente. Să se determine mulţimea acelor $n \in \mathbb{N}^*$ cu proprietatea că există o $\mathcal{L}$-structură cu n elemente care satisface φ.

Demonstraţie:

Enunţul φ va fi conjuncţia celor trei proprietăţi ale relaţiilor de echivalenţă, împreună cu:

$$\forall x \exists y (x \sim y \land \neg(x = y) \land \forall z (z \sim x \rightarrow (z = x \lor z = y))).$$

Este imediat faptul că o mulţime finită poate fi înzestrată cu o asemenea relaţie dacă şi numai dacă are un număr par de elemente. Aşadar, mulţimea cerută este mulţimea numerelor naturale nenule pare. □

Fixăm acum $\mathcal{L}$ un limbaj de ordinul întâi care conţine

- două simboluri de relaţii unare R, S şi două simboluri de relaţii binare P, Q;
- un simbol de funcţie unară f şi un simbol de funcţie binară g;
- două simboluri de constante c, d.

(S12.3) Să se găsească forme normale prenex pentru următoarele formule ale lui $\mathcal{L}$:

(i) $\forall x (f(x) = c) \land \neg \forall z (g(y, z) = d)$;

(ii) $\forall y (\forall x P(x, y) \rightarrow \exists z Q(x, z))$;

(iii) $\exists x \forall y P(x, y) \lor \neg \exists y (S(y) \rightarrow \forall z R(z))$;

(iv) $\exists z (\exists x Q(x, z) \lor \exists x R(x)) \rightarrow \neg(\neg \exists x R(x) \land \forall x \exists z Q(z, x))$.

Demonstraţie:

(i)

$$\begin{aligned}\forall x(f(x)=c)\wedge\neg\forall z(g(y,z)=d) &\;\;\text{⫤⊨}\;\; \forall x(f(x)=c)\wedge\exists z\neg(g(y,z)=d)\\ &\;\;\text{⫤⊨}\;\; \forall x\exists z(f(x)=c\wedge\neg(g(y,z)=d)).\end{aligned}$$

(ii)

$$\begin{aligned}\forall y(\forall xP(x,y)\to\exists zQ(x,z)) &\;\;\text{⫤⊨}\;\; \forall y\exists z(\forall xP(x,y)\to Q(x,z))\\ &\;\;\text{⫤⊨}\;\; \forall y\exists z(\forall uP(u,y)\to Q(x,z))\\ &\;\;\text{⫤⊨}\;\; \forall y\exists z\exists u(P(u,y)\to Q(x,z)).\end{aligned}$$

(iii)

$$\begin{aligned}\exists x\forall yP(x,y)\vee\neg\exists y(S(y)\to\forall zR(z)) &\;\;\text{⫤⊨}\;\; \exists x(\forall yP(x,y)\vee\neg\exists y\forall z(S(y)\to R(z))\\ &\;\;\text{⫤⊨}\;\; \exists x(\forall yP(x,y)\vee\forall y\exists z\neg(S(y)\to R(z))\\ &\;\;\text{⫤⊨}\;\; \exists x(\forall uP(x,u)\vee\forall y\exists z\neg(S(y)\to R(z))\\ &\;\;\text{⫤⊨}\;\; \exists x\forall u\forall y\exists z(P(x,u)\vee\neg(S(y)\to R(z)).\end{aligned}$$

(iv)

$$\begin{aligned}\exists z(\exists xQ(x,z)\vee\exists xR(x))\to\neg(\neg\exists xR(x)\wedge\forall x\exists zQ(z,x)) &\;\;\text{⫤⊨}\\ \exists z\exists x(Q(x,z)\vee R(x))\to(\neg\neg\exists xR(x)\vee\neg\forall x\exists zQ(z,x)) &\;\;\text{⫤⊨}\\ \exists z\exists x(Q(x,z)\vee R(x))\to(\exists xR(x)\vee\exists x\forall z\neg Q(z,x)) &\;\;\text{⫤⊨}\\ \exists z\exists x(Q(x,z)\vee R(x))\to\exists x(R(x)\vee\forall z\neg Q(z,x)) &\;\;\text{⫤⊨}\\ \exists z\exists x(Q(x,z)\vee R(x))\to\exists x\forall z(R(x)\vee\neg Q(z,x)) &\;\;\text{⫤⊨}\\ \exists z\exists x(Q(x,z)\vee R(x))\to\exists u\forall v(R(u)\vee\neg Q(v,u)) &\;\;\text{⫤⊨}\\ \forall z\forall x\exists u\forall v((Q(x,z)\vee R(x))\to(R(u)\vee\neg Q(v,u))).&\end{aligned}$$

□

(S12.4) Să se găsească o formă normală Skolem pentru enunţul φ în formă normală prenex, unde φ este, pe rând:

(i) $\forall x\exists z(f(x)=c\wedge\neg(g(x,z)=d))$;

(ii) $\forall y\exists z\exists u(P(u,y)\to Q(y,z))$;

(iii) $\exists x\forall u\forall y\exists z(P(x,u)\vee\neg(S(y)\to R(z)))$;

(iv) $\forall z\forall x\exists u\forall v((Q(x,z)\vee R(x))\to(R(u)\vee\neg Q(v,u)))$.

Demonstraţie:

(i) Avem $\varphi^1 = \forall x(f(x) = c \wedge \neg(g(x,z) = d)_z(h(x)) = \forall x(f(x) = c \wedge \neg(g(x,h(x)) = d)$, unde h este un nou simbol de operaţie unară. Cum φ^1 este o formulă universală avem $\varphi^{Sk} = \varphi^1$.

(ii) Avem $\varphi^1 = \forall y \exists u(P(u,y) \to Q(y,z))_z(p(y)) = \forall y \exists u(P(u,y) \to Q(y,p(y)))$, unde p este un nou simbol de operaţie unară, şi $\varphi^2 = \forall y(P(u,y) \to Q(y,p(y)))_u(j(y)) = \forall y(P(j(y),y) \to Q(y,p(y)))$, unde j este un nou simbol de operaţie unară. Cum φ^2 este o formulă universală avem $\varphi^{Sk} = \varphi^2$.

(iii) Avem $\varphi^1 = \forall u \forall y \exists z(P(x,u) \vee \neg(S(y) \to R(z)))_x(m) = \forall u \forall y \exists z(P(m,u) \vee \neg(S(y) \to R(z)))$, unde m este un nou simbol de constantă, şi $\varphi^2 = \forall u \forall y(P(m,u) \vee \neg(S(y) \to R(z)))_z(k(u,y)) = \forall u \forall y(P(m,u) \vee \neg(S(y) \to R(k(u,y))))$, unde k este un nou simbol de operaţie binară. Cum φ^2 este o formulă universală avem $\varphi^{Sk} = \varphi^2$.

(iv) Avem $\varphi^1 = \forall z \forall x \forall v((Q(x,z) \vee R(x)) \to (R(u) \vee \neg Q(v,u)))_u(n(z,x)) = \forall z \forall x \forall v((Q(x,z) \vee R(x)) \to (R(n(z,x)) \vee \neg Q(v,n(z,x))))$, unde n este un nou simbol de operaţie binară. Cum φ^1 este o formulă universală avem $\varphi^{Sk} = \varphi^1$.

$\square$