FMI, Info, Anul I
Logică matematică şi computaţională

Seminar 12

(S12.1) Fie $\mathcal{L}$ un limbaj de ordinul I. Să se arate că:

(i) pentru orice formule φ, ψ şi orice variabilă x,

$$\vDash \forall x(\varphi \to \psi) \to (\forall x\varphi \to \forall x\psi);$$

(ii) pentru orice formulă φ şi orice variabilă x cu $x \notin Var(\varphi)$,

$$\vDash \varphi \to \forall x\varphi;$$

(iii) pentru orice variabilă x şi orice termen t cu $x \notin Var(t)$,

$$\vDash \exists x(x = t).$$

(S12.2) Dacă $\mathcal{L}$ este un limbaj cu un singur simbol de relaţie de aritate 2, simbol notat cu $\sim$, să se scrie un enunţ φ ce spune că relaţia asociată simbolului este o relaţie de echivalenţă cu proprietatea că fiecare clasă a sa are exact două elemente. Să se determine mulţimea acelor $n \in \mathbb{N}^*$ cu proprietatea că există o $\mathcal{L}$-structură cu n elemente care satisface φ.

Fixăm acum $\mathcal{L}$ un limbaj de ordinul întâi care conţine

- două simboluri de relaţii unare R, S şi două simboluri de relaţii binare P, Q;
- un simbol de funcţie unară f şi un simbol de funcţie binară g;
- două simboluri de constante c, d.

(S12.3) Să se găsească forme normale prenex pentru următoarele formule ale lui $\mathcal{L}$:

(i) $\forall x(f(x) = c) \land \neg\forall z(g(y, z) = d)$;

(ii) $\forall y(\forall xP(x, y) \to \exists zQ(x, z))$;

(iii) $\exists x \forall y P(x, y) \vee \neg \exists y (S(y) \rightarrow \forall z R(z))$;

(iv) $\exists z (\exists x Q(x, z) \vee \exists x R(x)) \rightarrow \neg(\neg \exists x R(x) \wedge \forall x \exists z Q(z, x))$.

(S12.4) Să se găsească o formă normală Skolem pentru enunţul φ în formă normală prenex, unde φ este, pe rând:

(i) $\forall x \exists z (f(x) = c \wedge \neg(g(x, z) = d))$;

(ii) $\forall y \exists z \exists u (P(u, y) \rightarrow Q(y, z))$;

(iii) $\exists x \forall u \forall y \exists z (P(x, u) \vee \neg(S(y) \rightarrow R(z)))$;

(iv) $\forall z \forall x \exists u \forall v ((Q(x, z) \vee R(x)) \rightarrow (R(u) \vee \neg Q(v, u)))$.