FMI, Info, Anul I
Logică matematică şi computaţională

Model Examen

Nume: ______________________

Prenume: ____________________

Grupa: ______________________

Indicaţii:

- În cazul exerciţiilor cu forma normală prenex şi forma normală Skolem, ipoteza este următoarea:

  Fie $\mathcal{L}$ un limbaj de ordinul întâi care conţine:

  - două simboluri de relaţii unare S, T şi un simbol de relaţie binară R;
  - un simbol de operaţie unară f şi un simbol de operaţie binară g;
  - trei simboluri de constante a, b, c.

Partea I. Probleme cu rezolvare clasică

(P1) [1 punct] Fie următoarea formulă în $\mathcal{L}$:

$$\chi := \exists u R(x,u) \wedge \exists u T(u) \rightarrow \neg \exists y S(y) \vee \exists z \neg T(z)$$

Găsiţi o formă normală prenex pentru χ.

(P2) [2 puncte] Să se ofere un exemplu justificat de mulţime infinită de formule din logica propoziţională a cărei mulţime de modele să fie infinită şi nenumărabilă.

(P3) [1 punct] Să se definească, folosind Principiul recursiei pe formule, funcţia Mod ce asociază fiecărei formule din logica propoziţională mulţimea modelelor sale.

(P4) [1,5 puncte] Fie φ, ψ formule în logica propoziţională. Să se arate:

$$\vdash (\varphi \wedge \neg\varphi) \rightarrow \psi.$$

(P5) [2 puncte]

(i) Să se dea exemplu de mulţime de $\mathcal{L}_=$-enunţuri Γ ce are proprietatea că pentru orice $\mathcal{L}_=$-structură $\mathcal{A} = (A)$ (unde A este o mulţime nevidă), avem:

$$\mathcal{A} \vDash \Gamma \text{ dacă şi numai dacă } A \text{ are un număr par de elemente.}$$

(ii) Să se dea exemplu de $\mathcal{L}_{Graf}$-enunţ φ astfel încât pentru orice graf $\mathcal{G}$,

$$\mathcal{G} \vDash \varphi \text{ dacă şi numai dacă fiecare nod al lui } \mathcal{G} \text{ are grad 2.}$$

(P6) [1,5 puncte] Fie B o mulţime şi $f : \mathbb{N} \to B$ o funcţie surjectivă. Arătaţi că B este cel mult numărabilă.

Partea II. Probleme de tip grilă

(P7) [2 răspunsuri corecte] Fie următoarea formulă în limbajul logicii propoziţionale:

$$\theta := (v_2 \leftrightarrow v_4) \to \neg(v_2 \wedge \neg v_4)$$

Care dintre următoarele afirmaţii sunt adevărate?
☐ A: $e^+(\theta) = e^+((v_2 \wedge v_4) \to v_4)$ pentru orice evaluare e.
☐ B: $e^+(\theta) = e^+((v_2 \wedge \neg v_2) \to (v_2 \wedge \neg v_2))$ pentru orice evaluare e.
☐ C: $e^+(\theta) = e^+(v_2 \to (v_2 \wedge v_4))$ pentru orice evaluare e.
☐ D: $e^+(\theta) = e^+(v_2 \wedge \neg v_2)$ pentru orice evaluare e.
☐ E: $e^+(\theta) = e^+((v_2 \leftrightarrow v_4) \to (\neg v_2 \wedge v_4))$ pentru orice evaluare e.

(P8) [1 răspuns corect] Fie următoarea mulţime de clauze:

$$\mathcal{S} = \{\{\neg v_1, \neg v_2, \neg v_4\}, \{\neg v_2, \neg v_3\}, \{v_1, \neg v_3\}, \{v_1, v_4\}, \{v_3\}\}$$

Aplicând algoritmul Davis-Putnam pentru intrarea $\mathcal{S}$ şi alegând succesiv $x_1 := v_1$, $x_2 := v_3$, $x_3 := v_2$ obţinem:
☐ A: $\mathcal{S}_4 = \{\{v_2, \neg v_4\}\}$.
☐ B: $\mathcal{S}_4 = \{\square\}$.
☐ C: $\mathcal{T}_3^1 = \emptyset$.
☐ D: $\mathcal{S}_4 = \{\{\neg v_2, \neg v_4\}\}$.
☐ E: $\mathcal{T}_3^0 = \{\{v_4, \neg v_2, \neg v_4\}, \{\neg v_2\}, \{\neg v_2, \neg v_4\}\}$.

(P9) [2 răspunsuri corecte] Fie $\mathcal{L}_{ar} = (\dot{<}, \dot{+}, \dot{\times}, \dot{S}, \dot{0})$, $\mathcal{L}_{ar}$-structura $\mathcal{N} = (\mathbb{N}, <, +, \cdot, S, 0)$ şi $e : V \to \mathbb{N}$ o evaluare arbitrară. Considerăm formulele:

$$\varphi := x \dot{<} \dot{2} \text{ şi } \psi := x \dot{<} \dot{4}, \text{ unde } \dot{2} := \dot{S}\dot{S}\dot{0},\ \dot{4} := \dot{S}\dot{S}\dot{2}.$$

Care dintre următoarele afirmaţii sunt adevărate?
☐ A: $\mathcal{N} \vDash (\forall x(\varphi \wedge \psi))[e]$.
☐ B: $\mathcal{N} \vDash (\forall x\varphi \to \forall x\psi)[e]$.
☐ C: $\mathcal{N} \vDash (\forall x\varphi)[e]$.
☐ D: $\mathcal{N} \vDash (\exists x(\varphi \wedge \neg\psi))[e]$.
☐ E: $\mathcal{N} \vDash (\varphi \vee \psi)[e_{x\leftarrow 3}]$.

(P10) [1 răspuns corect] Fie următoarea formulă:

$$\psi := (\neg v_1 \to v_2) \leftrightarrow (v_3 \vee v_1)$$

Care dintre următoarele afirmaţii este adevărată?
☐ A: $(v_1 \wedge \neg v_2 \wedge \neg v_3) \vee (v_1 \wedge v_2 \wedge \neg v_3)$ este FNC a lui ψ.
☐ B: $(\neg v_1 \vee \neg v_2 \vee \neg v_3) \wedge (v_1 \vee v_2 \vee v_3)$ este FNC a lui ψ.
☐ C: $(v_1 \vee \neg v_2 \vee v_3) \wedge (v_1 \vee v_2 \vee \neg v_3)$ este FNC a lui ψ.
☐ D: $(v_1 \vee \neg v_2 \vee v_3) \wedge (\neg v_1 \vee v_2 \vee v_3)$ este FNC a lui ψ.
☐ E: $(\neg v_1 \vee \neg v_2 \vee \neg v_3) \wedge (\neg v_1 \vee v_2 \vee v_3)$ este FNC a lui ψ.

(P11) [2 răspunsuri corecte] Fie următoarea mulţime de clauze:

$$\mathcal{S} = \{\{v_1, v_2, \neg v_4\}, \{\neg v_2, \neg v_3\}, \{\neg v_1, \neg v_3\}, \{v_1, v_4\}, \{v_3\}\}$$

Care dintre următoarele afirmaţii sunt adevărate?
☐ A: $\mathcal{S}$ este nesatisfiabilă.
☐ B: $\mathcal{S}$ nu este nici nesatisfiabilă, nici satisfiabilă.
☐ C: $\{v_4 \to (v_1 \vee v_2), v_2 \to \neg v_3, v_1 \vee v_4, v_3\} \vDash v_1 \wedge v_3$.
☐ D: $\mathcal{S}$ este satisfiabilă.
☐ E: $\{v_4 \to (v_1 \vee v_2), v_2 \to \neg v_3, v_1 \vee v_4, v_3\} \vDash \neg v_1 \vee \neg v_3$.

(P12) [1 răspuns corect] Fie următoarea formulă:

$$\varphi := \neg(v_1 \wedge v_2) \to (\neg v_3 \wedge v_2)$$

Care dintre următoarele afirmaţii este adevărată?
☐ A: $v_1 \vee v_2 \vee \neg v_3 \vee v_2$ este FNC şi FND a lui φ.
☐ B: $v_1 \vee v_2 \vee (\neg v_3 \wedge v_2)$ este FND a lui φ.
☐ C: $(v_1 \wedge \neg v_3) \vee (\neg v_3 \wedge v_2) \vee (v_1 \wedge v_2)$ este FND a lui φ.
☐ D: $(v_1 \wedge v_2) \vee \neg v_3 \vee v_2$ este FND a lui φ.
☐ E: $(v_1 \wedge v_2) \vee (\neg v_3 \wedge v_2)$ este FND a lui φ.

(P13) [2 răspunsuri corecte] Fie $\mathcal{L}$ un limbaj de ordinul I. Care dintre următoarele afirmaţii sunt adevărate pentru orice formule φ, ψ ale lui $\mathcal{L}$?

☐ A: $\forall x(\varphi \vee \psi) \vDash \forall x\varphi \vee \forall x\psi$, pentru orice variabilă x.
☐ B: $\exists x(\varphi \rightarrow \psi) \Dashv \varphi \rightarrow \forall x\psi$, pentru $x \notin FV(\varphi)$.
☐ C: $\forall x(\varphi \vee \psi) \vDash \exists x\varphi \vee \exists x\psi$, pentru orice variabilă x.
☐ D: $\forall x(\varphi \wedge \psi) \Dashv \varphi \vee \forall x\psi$, pentru $x \notin FV(\varphi)$.
☐ E: $\forall x(\varphi \wedge \psi) \vDash \varphi \vee \forall x\psi$, pentru $x \notin FV(\varphi)$.

(P14) [2 răspunsuri corecte] Fie următorul enunţ în $\mathcal{L}$:

$$\psi := \forall x \exists u \forall y \exists v\, ((S(u) \rightarrow R(v, y)) \vee (S(v) \rightarrow T(x)))$$

Care dintre următoarele formule sunt forme normale Skolem pentru ψ?
☐ A: $\forall x \forall y\, ((S(n(x)) \rightarrow R(h(x, y), y)) \vee (S(h(x, y)) \rightarrow T(x)))$, unde n este simbol nou de operaţie unară, iar h este simbol nou de operaţie binară.
☐ B: $\forall x \forall y\, ((S(n(x)) \rightarrow R(h(x, y), y)) \vee (S(n(x)) \rightarrow T(x)))$, unde n este simbol nou de operaţie unară, iar h este simbol nou de operaţie binară.
☐ C: $\forall x \forall y\, ((S(n(x, y)) \rightarrow R(h(x, y), y)) \vee (S(h(x, y)) \rightarrow T(x)))$, unde n şi h sunt simboluri noi de operaţii binare.
☐ D: $\forall x \forall y\, ((S(h(x)) \rightarrow R(n(x, y), y)) \vee (S(n(x, y)) \rightarrow T(x)))$, unde h este simbol nou de operaţie unară, iar n este simbol nou de operaţie binară.
☐ E: $\forall x \forall y\, ((S(h(x)) \rightarrow R(n(x, y))) \vee (S(n(x, y)) \rightarrow T(x)))$, unde h este simbol nou de operaţie unară, iar n este simbol nou de operaţie binară.

(P15) [1 răspuns corect] Considerăm următoarea formulă în limbajul logicii propoziţionale:

$$\psi := (v_1 \rightarrow (v_2 \rightarrow v_3)) \rightarrow (v_3 \vee \neg v_2 \vee \neg v_1)$$

Care dintre următoarele afirmaţii este adevărată (pentru orice evaluare e)?
☐ A: Dacă $e(v_2) = 1$ şi $e^+(\neg v_3) = 1$, atunci $e^+(v_3 \vee \neg v_2 \vee \neg v_1) = 0$.
☐ B: Dacă $e^+(v_1 \rightarrow (v_2 \rightarrow v_3)) = 1$, atunci $e(v_1) = e(v_2) = 0$ şi $e(v_3) = 1$.
☐ C: Dacă $e(v_1) = e(v_2) = 1$, atunci $e^+(\psi) = 0$.
☐ D: Dacă $e^+(v_3 \vee \neg v_2 \vee \neg v_1) = 0$, atunci $e(v_2) = 1$ şi $e(v_3) = 0$.
☐ E: $e^+(\psi) = 1$ numai dacă $e(v_1) = e(v_3) = 1$ şi $e(v_2) = 0$.

(P16) [2 răspunsuri corecte] Fie următoarea mulţime de clauze:

$$\mathcal{S} = \{C_1 = \{v_1, v_2, \neg v_4\}, C_2 = \{\neg v_2, \neg v_3\}, C_3 = \{\neg v_1, \neg v_3\}, C_4 = \{v_1, v_4\}, C_5 = \{v_3\}\}$$

Care dintre următoarele sunt derivări corecte prin rezoluţie?
☐ A: $C_6 = \{\neg v_3, v_4\}$ (rezolvent al C_3, C_4) şi $C_7 = \{v_1, v_2, \neg v_3\}$ (rezolvent al C_1, C_6).
☐ B: $C_6 = \{v_1, v_2\}$ (rezolvent al C_1, C_4) şi $C_7 = \{v_1, \neg v_3\}$ (rezolvent al C_2, C_6).
☐ C: $C_6 = \{\neg v_2, \neg v_1\}$ (rezolvent al C_2, C_3).
☐ D: $C_6 = \{v_1, \neg v_4, \neg v_3\}$ (rezolvent al C_1, C_2) şi $C_7 = \{v_1, \neg v_4, v_3\}$ (rezolvent al C_3, C_5).
☐ E: $C_6 = \{\neg v_2, \neg v_1\}$ (rezolvent al C_2, C_3) şi $C_7 = \{\neg v_1, \neg v_3\}$ (rezolvent al C_2, C_6).