EXAMEN CALCUL DIFERENTIAL SI INTEGRAL
SERIA 13

OFICIU: **1 punct**

SUBIECTUL 1. *(2 puncte)*

Sa se studieze natura seriei $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{a^n (n!)^3}{(1+1^3)(1+2^3)\cdot\dots\cdot(1+n^3)}$, unde $a > 0$.

SUBIECTUL 2. *(2 puncte)*

Sa se determine punctele de extrem local ale functiei $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, f(x,y) = xye^{x+y}\ \forall\,(x,y) \in \mathbb{R}^2$.

SUBIECTUL 3. *(2 puncte)*

Sa se studieze convergenta simpla si uniforma a sirului de functii $f_n : (0,+\infty) \to \mathbb{R}, f_n(x) = \frac{nx}{1+n^4x^2}\ \forall x \in (0,+\infty), \forall n \in \mathbb{N}$.

SUBIECTUL 4. *(3 puncte)*

a) Sa se calculeze $\iint\limits_D x\,dx\,dy$, unde $D = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid y - x \le 2, x^2 \le y\right\}$.

b) Fie $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ un sir marginit de numere reale strict pozitive astfel ca $x_{n+1}\sqrt[2^{n+1}]{2} \ge x_n\ \forall n \in \mathbb{N}$. Sa se demonstreze ca sirul $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ este convergent.

Enescu Irina Ștefania 31.01.2022

Grupa 133

Examen CDI

Subiectul I

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a^n (n!)^3}{(1+1^3)(1+2^3)\dots(1+n^3)} \qquad a>0$$

$$x_n = \frac{a^n (n!)^3}{(1+1^3)(1+2^3)\dots(1+n^3)} \qquad x_n>0 \ \forall n\in\mathbb{N}^* \text{ și } a>0$$

Cum seria are term. poz., încercăm să aplicăm Criteriul raportului:

$$l = \lim_{n\to\infty} \frac{x_{n+1}}{x_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{a^{n+1}((n+1)!)^3}{\cancel{(1+1^3)(1+2^3)\dots(1+n^3)}(1+(n+1)^3)} \cdot \frac{\cancel{(1+1^3)(1+2^3)\dots(1+n^3)}}{a^n (n!)^3} =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{a\cdot \cancel{a^n}\cdot \cancel{(n!)^3}\cdot (n+1)^3}{\cancel{a^n}\cdot \cancel{(n!)^3}\cdot (1+(n+1)^3)} = \lim_{n\to\infty} \frac{a(n^3+3n^2+3n+1)}{n^3+3n^2+3n+1+1} =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{an^3+3an^2+3an+a}{n^3+3n^2+3n+2} = a \in \overline{\mathbb{R}} \quad \forall a>0$$

$\Rightarrow$ se poate aplica criteriul

Cum $l = a\in\overline{\mathbb{R}}$, seria are doar termeni poz., aplicăm criteriul raportului făcând discuție după a, unde $a>0$

a) Dacă $a\in(0,1) \Rightarrow l<1 \Rightarrow$ serie convergentă

b) Dacă $a\in(1,\infty) \Rightarrow l>1 \Rightarrow$ serie divergentă

c) Dacă $a=1$ nu ne putem pronunța și seria devine:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n!)^3}{(1+1^3)(1+2^3)\dots(1+n^3)}$$

$$y_n = \frac{(n!)^3}{(1+1^3)(1+2^3)\dots(1+n^3)} \qquad y_n>0 \ \forall n\in\mathbb{N}^*$$

Cum seria are term. poz., încercăm să aplicăm Criteriul Raabe-Duhamel.

$$l = \lim_{n\to\infty} n\left(\frac{y_n}{y_{n+1}} - 1\right) = \lim_{n\to\infty} n\left(\frac{(n!)^3}{\cancel{(1+1^3)(1+2^3)\dots(1+n^3)}} \cdot \frac{\cancel{(1+1^3)\dots(1+n^3)}(1+(n+1)^3)}{((n+1)!)^3} - 1\right)$$

$$= \lim_{n\to\infty} n\left(\frac{n^3+3n^2+3n+2}{n^3+3n^2+3n+1} - 1\right) = \lim_{n\to\infty} n\,\frac{\cancel{n^3}+\cancel{3n^2}+\cancel{3n}+2-\cancel{n^3}-\cancel{3n^2}-\cancel{3n}-1}{n^3+3n^2+3n+1}$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{n}{n^3+3n^2+3n+1} = 0 \in \overline{\mathbb{R}} \quad \Rightarrow \text{se poate aplica criteriul Raabe-Duhamel}$$

și cum $l<1 \Rightarrow$ serie divergentă

Subiectul II

$f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $f(x,y) = xye^{x+y}$ $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2$

- $D = \mathbb{R}^2$ mulțime deschisă
- f cont pe $\mathbb{R}^2$ ca o compunere de f cont pe $\mathbb{R}^2$

$D_f = \{x \in D \mid f$ nu e cont în $x\} = \emptyset$

- $\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = (xye^{x+y})'_x = (xy)'_x \cdot e^{x+y} + (xy)\cdot(e^{x+y})'_x = ye^{x+y} + (xy)\cdot(x+y)'_x \cdot e^{x+y} =$

$= ye^{x+y} + xye^{x+y} = ye^{x+y}(1+x)$ $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2$

$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = (xye^{x+y})'_y = (xy)'_y \cdot e^{x+y} + (xy)\cdot(e^{x+y})'_y = xe^{x+y} + (xy)(x+y)'_y \cdot e^{x+y}$

$= xe^{x+y} + xye^{x+y} = xe^{x+y}(1+y)$ $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2$

$\left.\begin{array}{l} \exists \frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y} \text{ pe } \mathbb{R}^2 \\ \text{sunt continue pe } \mathbb{R}^2 \text{ ca o comp. de } f \text{ cont. pe } \mathbb{R}^2 \\ \mathbb{R}^2 \text{ m. deschisă} \end{array}\right\} \Rightarrow f \text{ diferențiabilă pe } \mathbb{R}^2$

$D_1 = \{x \in D \mid f$ nu e diferențiabilă în $x\} = \emptyset$

- $\begin{cases} ye^{x+y}(1+x) = 0 & \Rightarrow y = 0 \text{ sau } x = -1 \\ xe^{x+y}(1+y) = 0 & \Rightarrow x = 0 \text{ sau } y = -1 \end{cases}$

cum $e^{x+y} \neq 0$ $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2$

Pentru $y = 0 \Rightarrow x = 0$

$y = -1 \Rightarrow x = -1$

$x = 0 \Rightarrow y = 0$

$x = -1 \Rightarrow y = -1$

$C = \{x \in D \mid x$ punct critic al $f\} = \{(0,0), (-1,-1)\}$

- $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) = (ye^{x+y}(1+x))'_x = (ye^{x+y})'_x(1+x) + (ye^{x+y})\cdot(1+x)'_x =$

$= y(x+y)'_x \cdot e^{x+y}(1+x) + ye^{x+y} = ye^{x+y}(1+x) + ye^{x+y} =$

$= ye^{x+y}(x+2)$ cont. pe $\mathbb{R}^2$ care e m. deschisă

$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y) = (xe^{x+y}(1+y))'_x = [(1+y)x]'_x \cdot e^{x+y} + (e^{x+y})'_x \cdot (x(1+y)) =$

$= (1+y)e^{x+y} + e^{x+y}(1+y)\cdot x = (1+y)e^{x+y}(x+1)$ cont. pe $\mathbb{R}^2$

care e m. deschisă

$\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x,y) = (ye^{x+y}(1+x))'_y = [(1+x)y]'_y \cdot e^{x+y} + (e^{x+y})'_y [y(1+x)] =$

$= (1+x)e^{x+y} + e^{x+y}(1+x)\cdot y = (1+x)e^{x+y}(1+y)$ cont. pe $\mathbb{R}^2$ care e

m. deschisă

$$\frac{\partial^2 f}{\partial^2 y}(x,y) = \left(xe^{x+y}(1+y)\right)'_y = (xe^{x+y})'_y(1+y) + xe^{x+y}(1+y)'_y =$$

$$= xe^{x+y}(1+y) + xe^{x+y} = xe^{x+y}(y+2)$$ cont. pe $\mathbb{R}^2$ care e m. deschisă

deci f diferențiabila de două ori pe $\mathbb{R}^2$

$D_2 = \{x \in D \mid f$ nu e diferențiabilă de două ori în $x\} = \emptyset$

- $D_3 = \{x \in D \mid$ criteriul Sylvester se pronunță în $x\} = \{(-1,-1), (0,0)\}$

$D_4 = \{x \in D \mid$ criteriul Sylvester nu se pronunță în $x\} = \emptyset$

$$H_f(-1,-1) = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial^2 x}(-1,-1) & \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(-1,-1) \\ \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(-1,-1) & \frac{\partial^2 f}{\partial^2 y}(-1,-1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1/e^2 & 0 \\ 0 & -1/e^2 \end{pmatrix}$$

$$\left.\begin{array}{l} \Delta_1 = -1/e^2 < 0 \\ \Delta = 1/e^4 > 0 \end{array}\right\} \Rightarrow (-1,-1) \text{ punct de maxim local}$$

$$H_f(0,0) = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial^2 x}(0,0) & \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0,0) \\ \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(0,0) & \frac{\partial^2 f}{\partial^2 y}(0,0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\left.\begin{array}{l} \Delta_1 = 0 \\ \Delta = -1 < 0 \end{array}\right\} \Rightarrow (0,0) \text{ nu e punct de extrem local}$$

- Deci $E = \{(-1,-1)\}$.

Subiectul III

$f_n : (0,\infty) \to \mathbb{R}$ $f_n(x) = \frac{nx}{1+n^4x^4}$ $\forall x \in (0,\infty)$ $\forall n \in \mathbb{N}$

Convergența simplă:

Fie $x \in (0,\infty)$

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = \lim_{n\to\infty} \frac{nx}{1+n^4x^2} = 0 \quad \forall x \in (0,\infty)$$

$$A = \{x \in D \mid \exists \lim_{n\to\infty} f_n(x) \in \mathbb{R}\} = (0,\infty)$$

$f : (0,\infty) \to \mathbb{R}$, $f(x) = 0$ $\forall x \in (0,\infty)$

Cum $\exists \lim_{n\to\infty} f_n(x) \in \mathbb{R}$ $\forall x \in (0,\infty)$ $\Rightarrow$ $f_n \xrightarrow[(0,\infty)]{s} f$

Convergența uniformă

Fie $n \in \mathbb{N}^*$

Cum f_n și f cont. pe $(0,\infty)$, aplicăm criteriul practic de convergență uniformă:

Calculăm sau evaluăm:

$$\sup_{x\in(0,\infty)} |f_n(x)-f(x)| = \sup_{x\in(0,\infty)} \left| \frac{nx}{1+n^4x^2} - 0 \right| = \sup_{x\in(0,\infty)} \frac{nx}{1+n^4x^2}$$

Știm că $a^2+b^2 \geq 2\sqrt{a^2b^2} \quad \forall\, a,b\in\mathbb{R}$

Deci $1+n^4x^2 \geq 2\sqrt{n^4x^2} \quad \forall\, x\in(0,\infty)$ și $n\in\mathbb{N}^*$

$$\frac{1}{1+n^4x^2} \leq \frac{1}{2n^2x} \quad \forall\, x\in(0,\infty) \text{ și } n\in\mathbb{N}^* \quad \Big|\cdot nx$$

$$\frac{nx}{1+n^4x^2} \leq \frac{nx}{2n^2x} \quad \forall\, x\in(0,\infty) \text{ și } n\in\mathbb{N}^*$$

$$\frac{nx}{1+n^4x^2} \leq \frac{1}{2n}$$

$$\left.\begin{aligned} &\Rightarrow \sup_{x\in(0,\infty)} \frac{nx}{1+n^4x^2} \leq \frac{1}{2n} \\ &\text{și cum } 0 \leq \sup_{x\in(0,\infty)} \frac{nx}{1+n^4x^2} \end{aligned}\right\} \Rightarrow 0 \leq \sup_{x\in(0,\infty)} \frac{nx}{1+n^4x^2} \leq \frac{1}{2n}$$

$$\searrow \quad \downarrow \quad \swarrow$$

$$0 \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \lim_{n\to\infty} \left(\sup_{x\in(0,\infty)} |f_n(x)-f(x)|\right) = 0 \Rightarrow f_n \xrightarrow[(0,\infty)]{u} f$$

Subiectul IV

a) $\iint_D x\,dx\,dy$ unde $D = \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid y-x\leq 2,\ x^2\leq y\}$

Rezolvăm sistemul $\begin{cases} y-x\leq 2 \\ x^2\leq y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y-x\leq 2 \\ x^2-y\leq 0 \end{cases} \Rightarrow$

$$\underline{\hphantom{x^2-y\leq 0 \quad}}_{\ +}$$

$$\left.\begin{aligned} &\Rightarrow x^2-x\leq 2 \Rightarrow x^2-x-2\leq 0 \\ &x^2-x-2=0 \\ &(x+1)(x-2)=0 \ \Big< \begin{aligned} &x=-1 \\ &x=2 \end{aligned} \end{aligned}\right\} \Rightarrow x\in[-1,2]$$

$$\begin{cases} x\in[-1,2] \\ g(x)\leq y\leq h(x) \end{cases} \quad g,h:[-1,2]\to\mathbb{R} \text{ f.cont.}$$

$$\begin{cases} y-x\leq 2 \\ x^2-y\leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y\leq 2+x \\ -y\leq -x^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y\leq 2+x \\ y\geq x^2 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x^2\leq y\leq 2+x$$

Deci $g:[-1,2]\to\mathbb{R} \quad g(x)=x^2$

$h:[-1,2]\to\mathbb{R} \quad h(x)=2+x$ cont. pe $[-1,2]$

(f. elementare)

$D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \in [-1, 2],\ g(x) \le y \le h(x)\}$

D e mulțime simplă în raport cu axa Oy. $\Rightarrow$ Ord. de integrare este $dy\,dx$

$\iint\limits_D x\,dx\,dy$.

$$\iint\limits_D x\,dy\,dx = \iint\limits_D x\,dy\,dx = \int_{-1}^{2}\left(\int_{g(x)}^{h(x)} x\,dy\right)dx = \int_{-1}^{2}\left(\int_{x^2}^{2+x} x\,dy\right)dx =$$

$$= \int_{-1}^{2} x\cdot y\Big|_{x^2}^{2+x} dx = \int_{-1}^{2} x(2+x-x^2)\,dx = \int_{-1}^{2}(-x^3+x^2+2x)\,dx =$$

$$= -\frac{x^4}{4}\Big|_{-1}^{2} + \frac{x^3}{3}\Big|_{-1}^{2} + x^2\Big|_{-1}^{2} = \left(-\frac{2^4}{4}\right) - \left(-\frac{(-1)^4}{4}\right) + \frac{2^3}{3} - \frac{(-1)^3}{3} + 2 - (-1)^2$$

$$= -\frac{16}{4} + \frac{1}{4} + \frac{8}{3} + \frac{1}{3} + 2 - 1 = -4 + \frac{1}{4} + \frac{9}{3} + 1 = -4 + 3 + 1 + \frac{1}{4} = \frac{1}{4}$$

b) $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ șir mărginit de nr. reale > 0

$x_{n+1} \sqrt[2^{n+1}]{2} \ge x_n \quad \forall n \in \mathbb{N}$

$(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ convergent $\Leftrightarrow$ are limită în $\mathbb{R}$

Știm că un șir monoton și mărginit e convergent (Weierstrass).

Trebuie să arătăm că șirul e monoton.

$x_{n+1} - x_n = ?$

$x_{n+1}\sqrt[2^{n+1}]{2} \ge x_n \quad \Rightarrow \quad -x_{n+1}\sqrt[2^{n+1}]{2} \le -x_n \quad | + x_{n+1}$

$\Rightarrow x_{n+1} - x_{n+1}\sqrt[2^{n+1}]{2} \le x_{n+1} - x_n$

$\Rightarrow (x_{n+1})(1 - \sqrt[2^{n+1}]{2}) \le x_{n+1} - x_n$

$\lim\limits_{n\to\infty} 1 - \sqrt[2^{n+1}]{2} = \lim\limits_{n\to\infty} 1 - 2^{\frac{1}{2^{n+1}}} = 1.$

Deci $1 - \sqrt[2^{n+1}]{2} \le 1 \quad | \cdot (x_{n+1})$

$(x_{n+1})(1 - \sqrt[2^{n+1}]{2}) \le x_{n+1}$

$\Rightarrow x_{n+1} - x_n \ge 1 \cdot \ldots \quad \Rightarrow \quad x_{n+1} - x_n \ge 0 \quad \Rightarrow$ șir monoton crescător

Cum șirul e monoton și crescător $\overset{T.W.}{\Rightarrow}$ e convergent