FMI, Info, Anul I
Logică matematică şi computaţională

Seminar 3

(S3.1) Fie A o mulţime infinită. Demonstraţi următoarele, pentru orice mulţime B:

(i) Dacă există o funcţie injectivă $f : A \to B$, atunci B este infinită.

(ii) Dacă $A \subseteq B$, atunci B este infinită.

Demonstraţie:

(i) Presupunem prin reducere la absurd că B este finită. Aşadar, există o bijecţie $g : B \to \{1, \ldots, n\}$ pentru un $n \in \mathbb{N}$. Obţinem că funcţia $h : A \to \{1, \ldots, n\}$, $h = g \circ f$ este injectivă. Prin urmare, $A \sim h(A) \subseteq \{1, \ldots, n\}$. Rezultă că există (pas justificat mai jos!) $k \leq n$ astfel încât $h(A) \sim \{1, \ldots, k\}$, aşadar $A \sim \{1, \ldots, k\}$ şi deci A este finită. Am obţinut o contradicţie.

Rămâne de arătat, deci, că pentru orice $k \in \mathbb{N}$ şi orice $X \subseteq \{1, \ldots, k\}$ avem că X este finită. Demonstrăm prin inducţie după k. Pentru $k = 0$, avem $X \subseteq \{1, \ldots, 0\} = \emptyset$ şi deci $X = \emptyset$, aşadar A este finită. Pentru trecerea de la k la $k + 1$, presupunem că avem $X \subseteq \{1, \ldots, k + 1\}$. Atunci $Y := X \cap \{1, \ldots, k\} \subseteq \{1, \ldots, k\}$ şi deci există l cu $Y \sim \{1, \ldots, l\}$. Atunci fie $X = Y$ şi atunci $X \sim \{1, \ldots, l\}$, fie $X = Y \cup \{k + 1\}$ şi atunci $X \sim \{1, \ldots, l + 1\}$. În ambele cazuri, X este finită.

(ii) Funcţia incluziune $\iota : A \to B$, $\iota(a) = a$ este injectivă. Aplicăm (i) pentru a concluziona că B este infinită.

$\square$

(S3.2) Demonstraţi următoarele:

(i) Reuniunea unei familii cel mult numărabile de mulţimi cel mult numărabile este mulţime cel mult numărabilă.

(ii) Reuniunea unui număr finit (≥ 2) de mulţimi numărabile este numărabilă.

Demonstraţie:

(i) Fie $(A_i)_{i\in I}$ o familie cel mult numărabilă de mulţimi cel mult numărabile. Aşadar, I este nevidă şi cel mult numărabilă şi mulţimile $A_i, i \in I$ sunt cel mult numărabile. Conform (S2.4), există pentru fiecare $i \in I$ o funcţie injectivă $f_i : A_i \to \mathbb{N}$.

Definim $f : \bigcup_{i\in I} A_i \to \mathbb{N} \times I$ astfel:

dacă $a \in \bigcup_{i\in I} A_i$, alegem $i_a \in I$ cu $a \in A_{i_a}$ şi definim $f(a) = (f_{i_a}(a), i_a)$.

Rezultă uşor că f este injectivă: dacă $a, b \in \bigcup_{i\in I} A_i$ sunt a.î. $(f_{i_a}(a), i_a) = (f_{i_b}(b), i_b)$, atunci $i_a = i_b$ şi $f_{i_a}(a) = f_{i_a}(b)$, deci $a = b$, deoarece f_{i_a} este injectivă.

Conform Corolarului 1.10, $\mathbb{N} \times I$ este numărabilă. Aplicând din nou (S2.4), obţinem că $\bigcup_{i\in I} A_i$ este cel mult numărabilă.

(ii) Fie $n \geq 2$, $A_1, \ldots, A_n$ mulţimi numărabile şi $A := A_1 \cup \ldots \cup A_n$. Aplicând (i) pentru $I = \{1, \ldots, n\}$, obţinem că A este cel mult numărabilă. Deoarece $A_1 \subseteq A$ şi A_1 este infinită, rezultă, din (S3.1).(ii), că A este infinită. Prin urmare, A este numărabilă.

□

(S3.3) Demonstraţi că $\mathbb{Q}$ este numărabilă.
Demonstraţie: Pentru orice $n \in \mathbb{N}^*$, fie $A_n := \{\frac{m}{n} \mid m \in \mathbb{Z}\}$ şi $f_n : \mathbb{Z} \to A_n$, $f_n(m) = \frac{m}{n}$. Este evident că f_n este bijectivă. Cum $\mathbb{Z}$ este numărabilă, rezultă că A_n este numărabilă pentru orice $n \in \mathbb{N}^*$. Deoarece $\mathbb{Q} = \bigcup_{n\in\mathbb{N}^*} A_n$, aplicăm (S3.2).(i) şi faptul că $\mathbb{Q}$ este infinită pentru a obţine numărabilitatea lui $\mathbb{Q}$. □

(S3.4) Arătaţi că $\mathbb{R}$ nu este numărabilă.
Demonstraţie: Cum ştim din (S1.3) că intervalul $(0, 1)$ şi $\mathbb{R}$ sunt echipotente, este suficient să arătăm că intervalul $(0, 1)$ nu este numărabil. Presupunem, prin reducere la absurd, că există o bijecţie $f : \mathbb{N} \to (0, 1)$. Vom reprezenta funcţia f folosind tabelul de mai jos:

$$\begin{array}{c|l} 0 & 0, a_{0,0}a_{0,1}a_{0,2}a_{0,3}\ldots \\ 1 & 0, a_{1,0}a_{1,1}a_{1,2}a_{1,3}\ldots \\ 2 & 0, a_{2,0}a_{2,1}a_{2,2}a_{2,3}\ldots \\ 3 & 0, a_{3,0}a_{3,1}a_{3,2}a_{3,3}\ldots \\ \vdots & \qquad\vdots \end{array}$$

Aşa cum se observă, pentru orice $i, j \in \mathbb{N}$, $a_{i,j}$ este a $(j + 1)$-a zecimală a lui $f(i)$. Deoarece f este surjectivă, fiecărui număr din codomeniul acesteia, $(0, 1)$, îi este asociat un număr natural. Cu alte cuvinte, toate numerele reale ce compun intervalul $(0,1)$ ar trebui să se regăsească în coloana a doua a tabelului de mai sus. Vom arăta că aceasta este imposibil, construind un număr $x \in (0,1)$ ce nu se poate găsi în coloana a doua a niciunei linii din tabel. Fie $x := 0, d_0 d_1 d_2 d_3 ... d_j ...$, unde fiecare cifră d_j din reprezentarea zecimală a lui x este obţinută astfel:

$$d_j := \begin{cases} 2, & \text{dacă } a_{j,j} = 1 \\ 1, & \text{dacă } a_{j,j} \neq 1. \end{cases}$$

Având în vedere construcţia numărului x, prima zecimală a acestuia va fi diferită de prima zecimală a lui $f(0)$, a doua zecimală va fi diferită de a doua zecimală a lui $f(1)$, ..., a n-a zecimală a lui x va fi diferită de a n-a zecimală a lui $f(n-1)$, şi aşa mai departe. În concluzie, numărului x nu îi este asociat un număr natural a a.î. $x = f(a)$, deci f nu este o bijecţie. Contradicţie. □

(S3.5) Fie următoarele propoziţii exprimate în limbaj natural:

(i) Merg în parc dacă îmi termin treaba şi nu apare altceva.

(ii) Este necesar să nu plouă ca să putem observa stelele.

(iii) Treci examenul la logică numai dacă înţelegi subiectul.

(iv) Treci examenul la logică dacă rezolvi destule probleme.

Transpuneţi-le în formule ale limbajului formal al logicii propoziţionale.
Demonstraţie:

(i) Fie φ = Merg în parc dacă îmi termin treaba şi nu apare altceva. Considerăm propoziţiile atomice:

p = Merg în parc. q = Îmi termin treaba. r = Apare altceva.

Atunci $\varphi = (q \wedge (\neg r)) \to p$.

(ii) Fie ψ = Este necesar să nu plouă ca să putem observa stelele. Considerăm propoziţiile atomice:

s = Plouă. t = Putem observa stelele.

Atunci $\psi = t \to \neg s$.

(iii) Fie θ = Treci examenul la logică numai dacă înţelegi subiectul. Considerăm propoziţiile atomice:

$$w = \text{Treci examenul la logică.} \qquad z = \text{Înţelegi subiectul.}$$

Atunci $\theta = w \to z$.

(iv) Fie χ = Treci examenul la logică dacă rezolvi destule probleme. Considerăm propoziţiile atomice:

$$u = \text{Treci examenul la logică.} \qquad v = \text{Rezolvi destule probleme.}$$

Atunci $\chi = v \to u$.

□