FMI, Info, Anul I
Logică matematică şi computaţională

Seminar 11

(S11.1) Să se arate că pentru orice formule φ, ψ şi orice variabilă $x \notin FV(\varphi)$,

(i) $\varphi \mathrel{\models\!\!\!|} \exists x\varphi$;

(ii) $\forall x(\varphi \land \psi) \mathrel{\models\!\!\!|} \varphi \land \forall x\psi$;

(iii) $\exists x(\psi \to \varphi) \mathrel{\models\!\!\!|} \forall x\psi \to \varphi$.

Demonstraţie: Fie $\mathcal{A}$ o $\mathcal{L}$-structură şi $e : V \to A$.

(i) Avem:

$$\begin{aligned}
\mathcal{A} \models (\exists x\varphi)[e] &\iff \text{există } a \in A \text{ a.î. } \mathcal{A} \models \varphi[e_{x\leftarrow a}] \\
&\iff \text{există } a \in A \text{ a.î. } \mathcal{A} \models \varphi[e] \text{ (aplicând P. 3.27)} \\
&\iff \mathcal{A} \models \varphi[e].
\end{aligned}$$

(ii) Avem:

$$\begin{aligned}
\mathcal{A} \models (\forall x(\varphi \land \psi))[e] &\iff \text{pentru orice } a \in A,\ \mathcal{A} \models (\varphi \land \psi)[e_{x\leftarrow a}] \\
&\iff \text{pentru orice } a \in A,\ \mathcal{A} \models \varphi[e_{x\leftarrow a}] \text{ şi } \mathcal{A} \models \psi[e_{x\leftarrow a}] \\
&\iff \text{pentru orice } a \in A,\ \mathcal{A} \models \varphi[e] \text{ şi } \mathcal{A} \models \psi[e_{x\leftarrow a}] \text{ (aplicând P. 3.27)} \\
&\iff \mathcal{A} \models \varphi[e] \text{ şi pentru orice } a \in A,\ \mathcal{A} \models \psi[e_{x\leftarrow a}] \\
&\iff \mathcal{A} \models \varphi[e] \text{ şi } \mathcal{A} \models \forall x\psi[e] \iff \mathcal{A} \models (\varphi \land \forall x\psi)[e].
\end{aligned}$$

(iii) Avem:

$$\begin{aligned}
\mathcal{A} \models (\exists x(\psi \to \varphi))[e] &\iff \text{există } a \in A \text{ a.î. } \mathcal{A} \models (\psi \to \varphi)[e_{x\leftarrow a}] \\
&\iff \text{există } a \in A \text{ a.î. } \big(\mathcal{A} \not\models \psi[e_{x\leftarrow a}] \text{ sau } \mathcal{A} \models \varphi[e_{x\leftarrow a}]\big) \\
&\iff \text{există } a \in A \text{ a.î. } \big(\mathcal{A} \not\models \psi[e_{x\leftarrow a}] \text{ sau } \mathcal{A} \models \varphi[e]\big) \text{ (aplicând P. 3.27)} \\
&\iff (\text{există } a \in A \text{ a.î. } \mathcal{A} \not\models \psi[e_{x\leftarrow a}]) \text{ sau } \mathcal{A} \models \varphi[e] \\
&\iff \mathcal{A} \not\models \forall x\psi[e] \text{ sau } \mathcal{A} \models \varphi[e] \\
&\iff \mathcal{A} \models (\forall x\psi \to \varphi)[e].
\end{aligned}$$

□

(S11.2) Considerăm limbajul $\mathcal{L}_{ar} = (\dot{<}, \dot{+}, \dot{\times}, \dot{S}, \dot{0})$ (limbajul aritmeticii) şi $\mathcal{L}_{ar}$-structura canonică peste acest limbaj $\mathcal{N} := (\mathbb{N}, <, +, \cdot, S, 0)$. Să se dea exemplu de $\mathcal{L}_{ar}$-formule φ_1, φ_2, φ_3 astfel încât pentru orice $e : V \to \mathbb{N}$,

(i) $\mathcal{N} \vDash \varphi_1[e] \Leftrightarrow e(v_0)$ este par;

(ii) $\mathcal{N} \vDash \varphi_2[e] \Leftrightarrow e(v_0)$ este prim;

(iii) $\mathcal{N} \vDash \varphi_3[e] \Leftrightarrow e(v_0)$ este putere a lui 2 cu exponent strict pozitiv.

Demonstraţie:

(i) Luăm
$$\varphi_1 := \exists v_1(v_1 \dot{+} v_1 = v_0).$$

(ii) Luăm
$$\varphi_2 := \dot{S}\dot{0} \dot{<} v_0 \wedge \forall v_1((v_1 \dot{<} v_0 \wedge \exists v_2(v_1 \dot{\times} v_2 = v_0)) \to v_1 = \dot{S}\dot{0}).$$

(iii) Luăm
$$\varphi_3 := \dot{S}\dot{0} \dot{<} v_0 \wedge \forall v_1((\dot{S}\dot{0} \dot{<} v_1 \wedge \exists v_2(v_1 \dot{\times} v_2 = v_0)) \to \exists v_2(v_1 = v_2 \dot{+} v_2)).$$

□

(S11.3) Considerăm limbajul $\mathcal{L}_r = (\dot{+}, \dot{\times})$ şi $\mathcal{L}_r$-structura $\mathcal{R} := (\mathbb{R}, +, \cdot)$. Să se dea exemplu de $\mathcal{L}_r$-formulă ψ astfel încât pentru orice $e : V \to \mathbb{R}$,
$$\mathcal{R} \vDash \psi[e] \Leftrightarrow e(v_0) \leq e(v_1).$$

Demonstraţie: Luăm
$$\psi := \exists v_2(v_1 = v_0 \dot{+} v_2 \wedge \exists v_3(v_2 = v_3 \dot{\times} v_3)).$$

□

(S11.4) Considerăm limbajul $\mathcal{L}$ ce conţine un singur simbol, anume un simbol de funcţie de aritate 2. Să se găsească un enunţ φ astfel încât $(\mathbb{Z}, +) \vDash \varphi$, dar $(\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}, +) \nvDash \varphi$.

Demonstraţie:

Prima soluţie: se ia φ ca fiind
$$\forall x \forall y((\neg\exists z(x = z + z) \wedge \neg\exists z(y = z + z)) \to \exists z(x + y = z + z)),$$

ce exprimă faptul că suma a două elemente "nepare" este pară – în $\mathbb{Z}$, avem într-adevăr regula "impar + impar = par", dar în $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ avem contraexemplul $(1,0)+(0,1)=(1,1)$.
A doua soluţie: se ia φ ca fiind

$$\exists t \forall x (\exists z (x = z + z) \vee \exists z (x = z + z + t)),$$

ce este adevărată în $\mathbb{Z}$, luând $t := 1$ (orice număr este ori de forma $2z$, ori de forma $2z+1$), dar nu este adevărat în $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$, unde relaţia de congruenţă indusă de elementele pare are patru clase, şi nu două. $\square$