FMI, Info, Anul I
Logică matematică şi computaţională

Seminar 11

(S11.1) Să se arate că pentru orice formule φ, ψ şi orice variabilă $x \notin FV(\varphi)$,

(i) $\varphi \mathrel{\text{⫤}}\!\models \exists x\varphi$;

(ii) $\forall x(\varphi \land \psi) \mathrel{\text{⫤}}\!\models \varphi \land \forall x\psi$;

(iii) $\exists x(\psi \to \varphi) \mathrel{\text{⫤}}\!\models \forall x\psi \to \varphi$.

(S11.2) Considerăm limbajul $\mathcal{L}_{ar} = (\dot{<}, \dot{+}, \dot{\times}, \dot{S}, \dot{0})$ (limbajul aritmeticii) şi $\mathcal{L}_{ar}$-structura canonică peste acest limbaj $\mathcal{N} := (\mathbb{N}, <, +, \cdot, S, 0)$. Să se dea exemplu de $\mathcal{L}_{ar}$-formule φ_1, φ_2, φ_3 astfel încât pentru orice $e : V \to \mathbb{N}$,

(i) $\mathcal{N} \models \varphi_1[e] \Leftrightarrow e(v_0)$ este par;

(ii) $\mathcal{N} \models \varphi_2[e] \Leftrightarrow e(v_0)$ este prim;

(iii) $\mathcal{N} \models \varphi_3[e] \Leftrightarrow e(v_0)$ este putere a lui 2 cu exponent strict pozitiv.

(S11.3) Considerăm limbajul $\mathcal{L}_r = (\dot{+}, \dot{\times})$ şi $\mathcal{L}_r$-structura $\mathcal{R} := (\mathbb{R}, +, \cdot)$. Să se dea exemplu de $\mathcal{L}_r$-formulă ψ astfel încât pentru orice $e : V \to \mathbb{R}$,

$$\mathcal{R} \models \psi[e] \Leftrightarrow e(v_0) \leq e(v_1).$$

(S11.4) Considerăm limbajul $\mathcal{L}$ ce conţine un singur simbol, anume un simbol de funcţie de aritate 2. Să se găsească un enunţ φ astfel încât $(\mathbb{Z}, +) \models \varphi$, dar $(\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}, +) \not\models \varphi$.