ARHITECTURA SISTEMELOR DE CALCUL - CURS 0x05

ÎNMULȚIREA/ÎMPĂRȚIREA NUMERELOR ÎNTREGI, REPREZENTAREA ÎN VIRGULĂ MOBILĂ

Cristian Rusu

DATA TRECUTĂ

- **detaliile unui circuit de adunare binară**

- **multiplexare**

- **circuite secvențiale**
    - SR Latch
    - D Latch
    - D Flip Flop
    - circuit adunare secvențial

- **reprezentarea pe stări a unui circuit**

CUPRINS

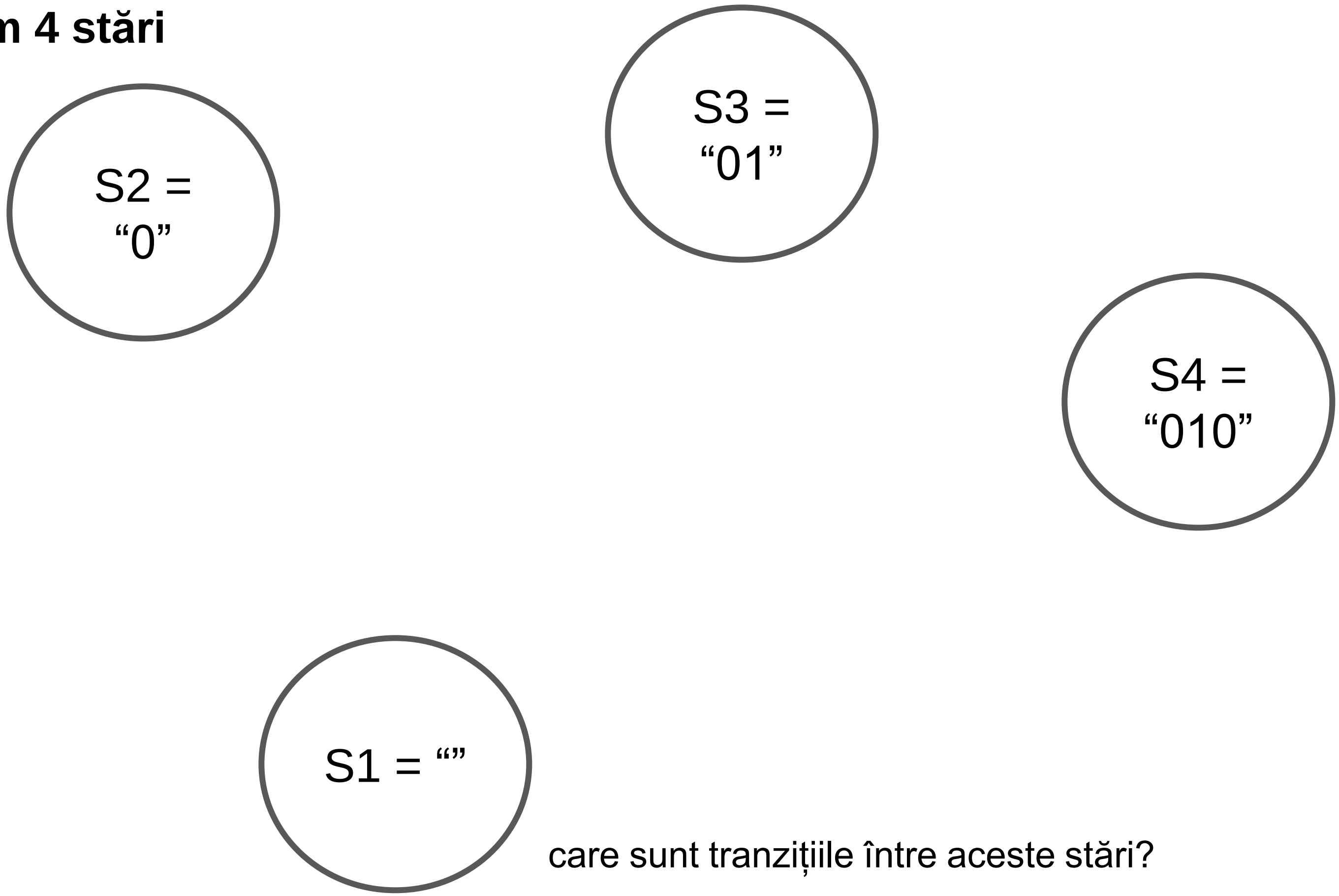
- logică secvențială + combinatorială, un exemplu
- înmulțirea numerelor întregi binare
- împărțirea numerelor întregi binare
- reprezentarea numerelor în virgulă mobilă
- lucrul cu numerele în virgulă mobilă

SECVENȚIAL, SEMINAR 0x02, EX 10

- un semnal digital A poate lua valori {0, 1} în timp iar noi vrem să detectăm dacă semnalul are valoarea 010 la un moment dat. Dacă acestă secvență de biți este detectată în A atunci o variabilă Y este setată la 1, altfel această variabilă este 0.
- definim 4 stări

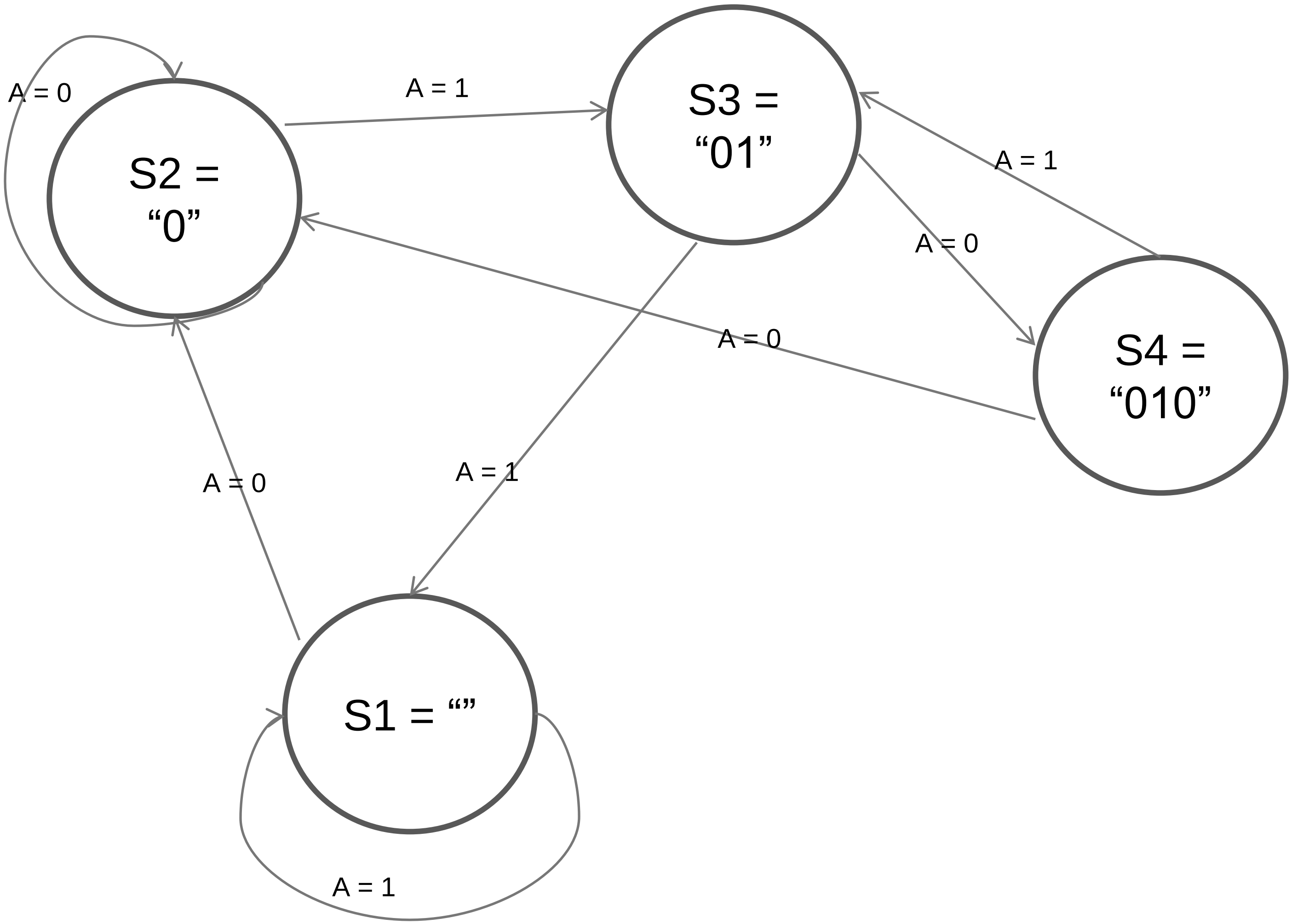
SECVENȚIAL, SEMINAR 0x02, EX 10

- **un semnal digital A poate lua valori {0, 1} în timp iar noi vrem să detectăm dacă semnalul are valoarea 010 la un moment dat. Dacă această secvență de biți este detectată în A atunci o variabilă Y este setată la 1, altfel această variabilă este 0**
- **definim 4 stări**

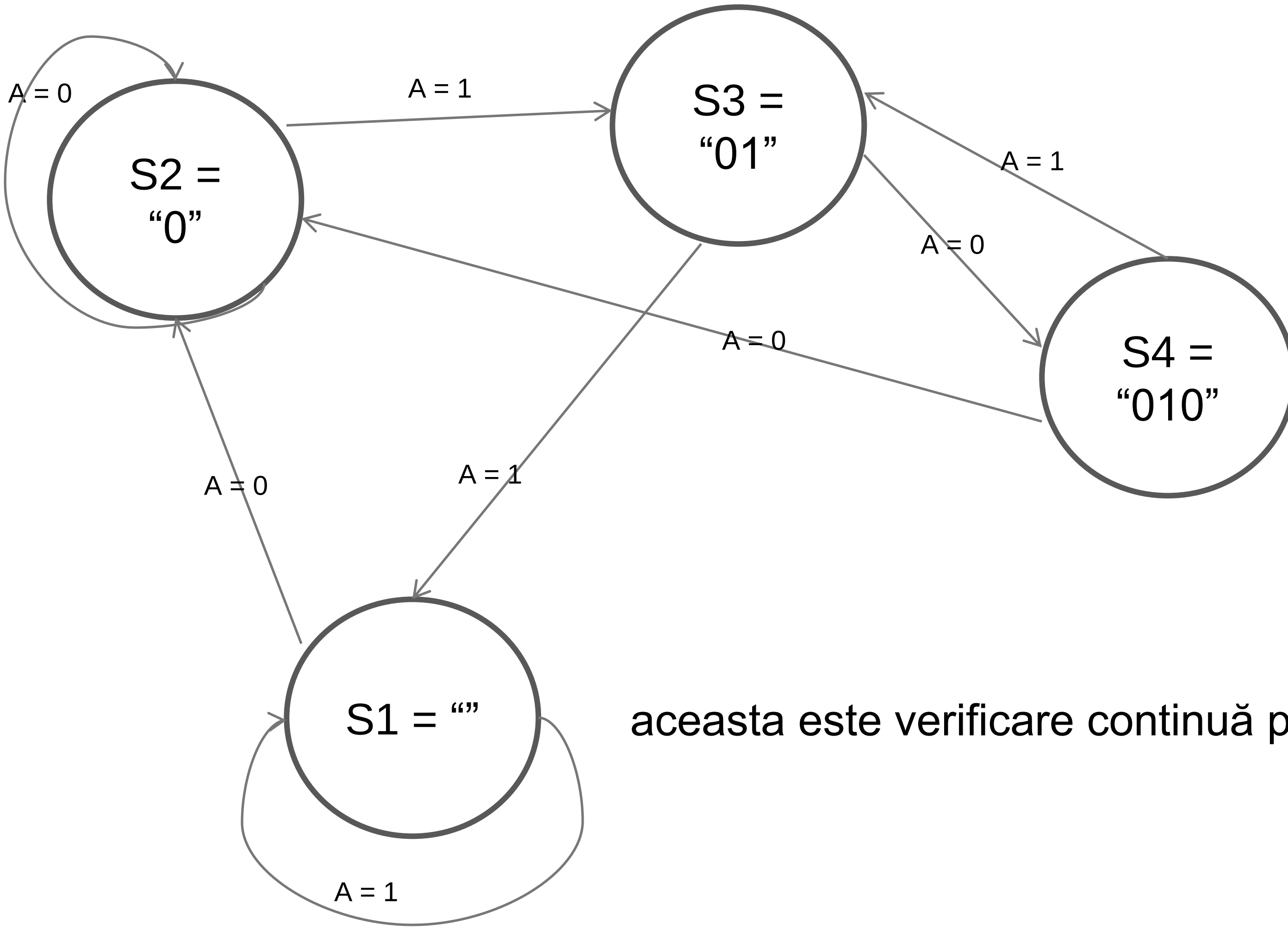


care sunt tranzițiile între aceste stări?

SECVENȚIAL, SEMINAR 0x02, EX 10

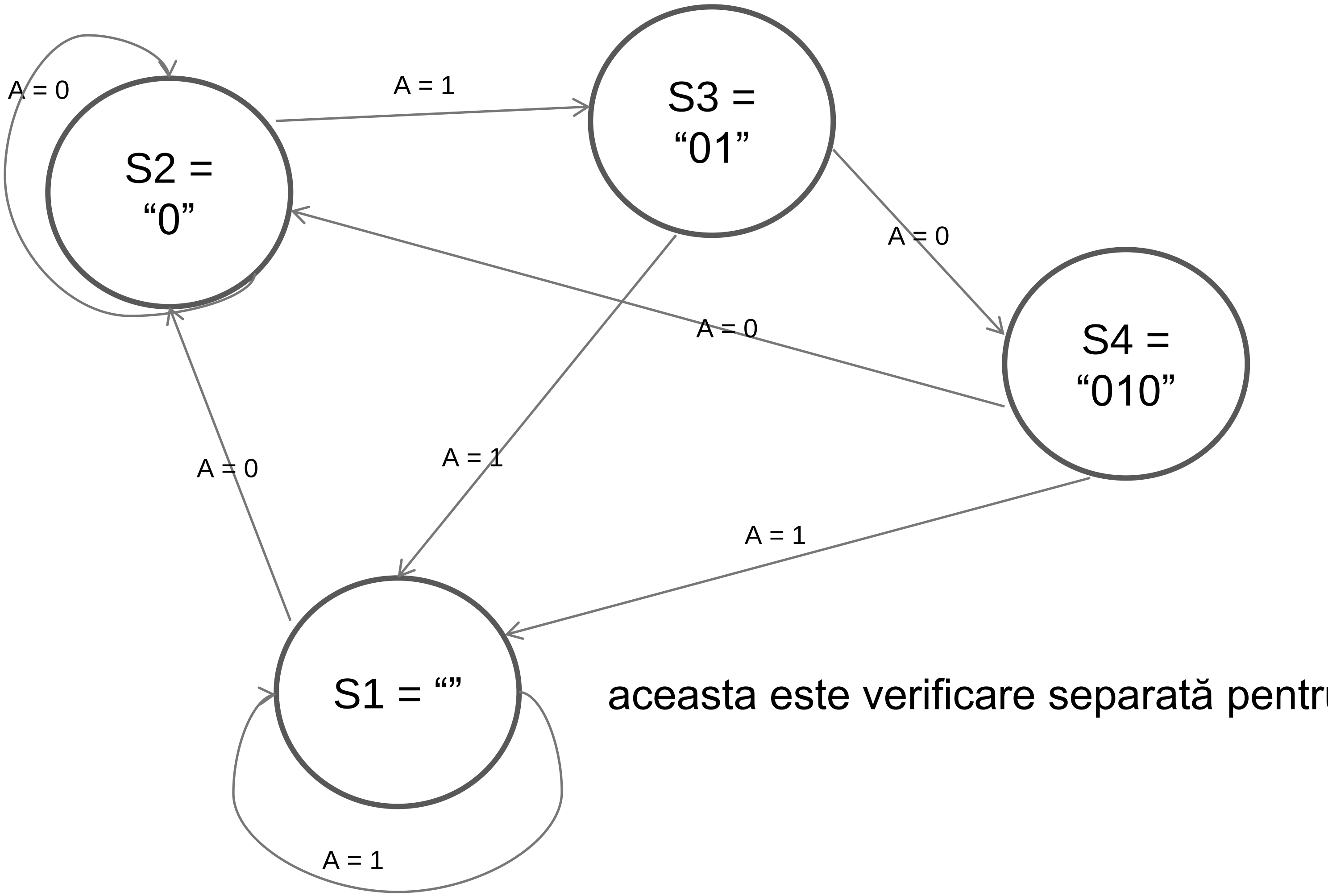


SECVENȚIAL, SEMINAR 0x02, EX 10



aceasta este verificare continuă pentru 010

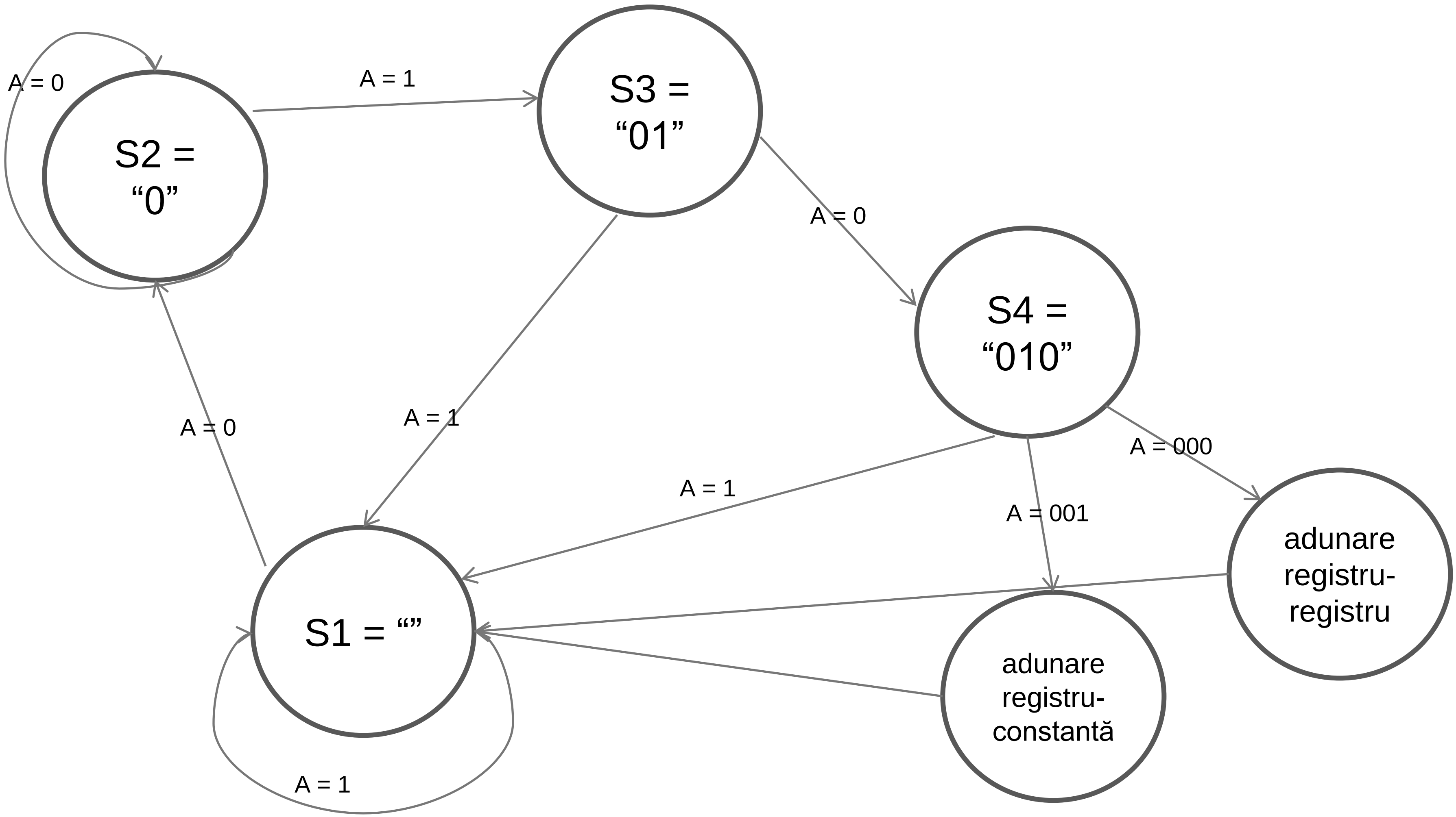
SECVENȚIAL, SEMINAR 0x02, EX 10



aceasta este verificare separată pentru 010

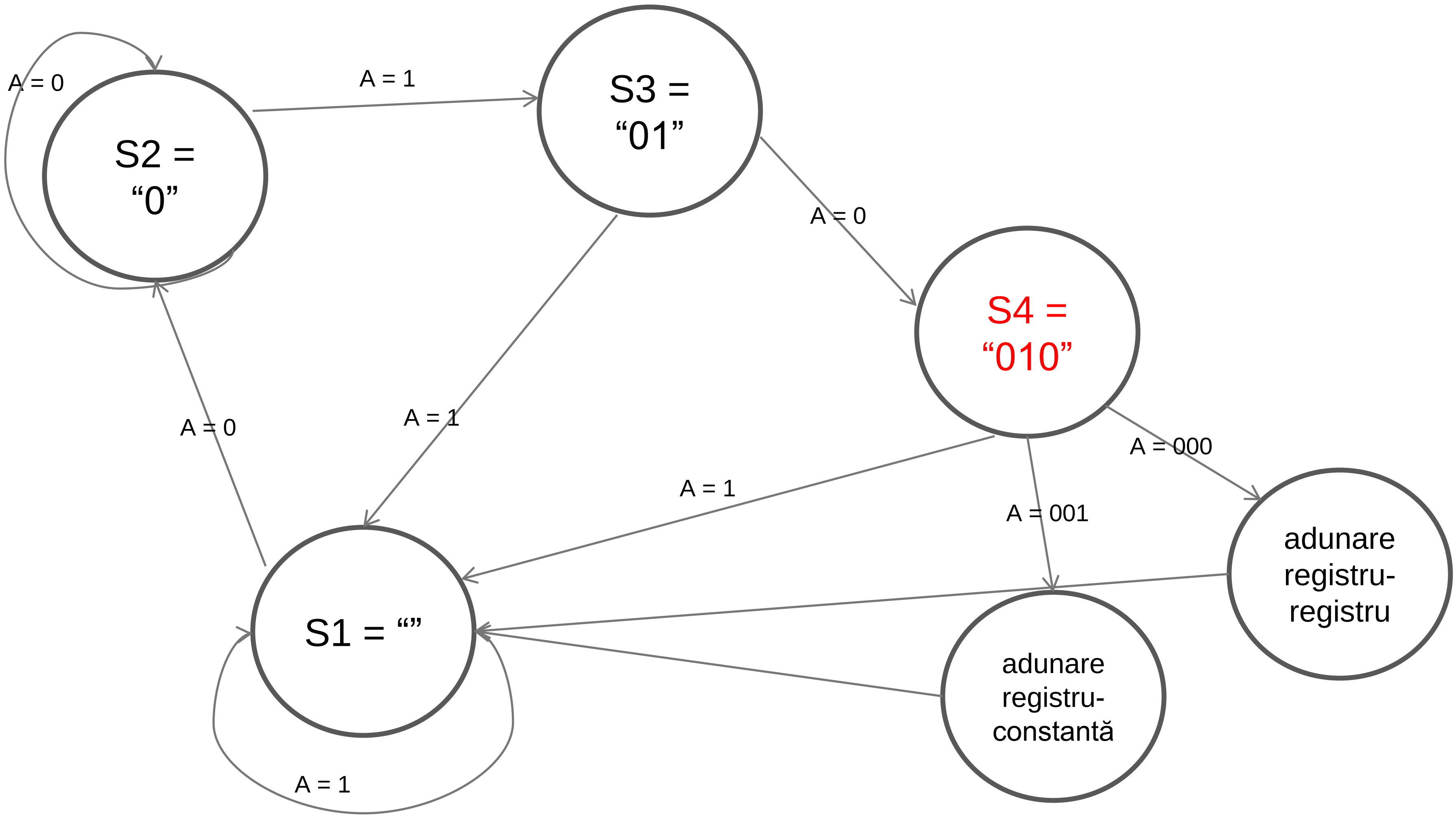
.

CE FACE UN PROCESOR



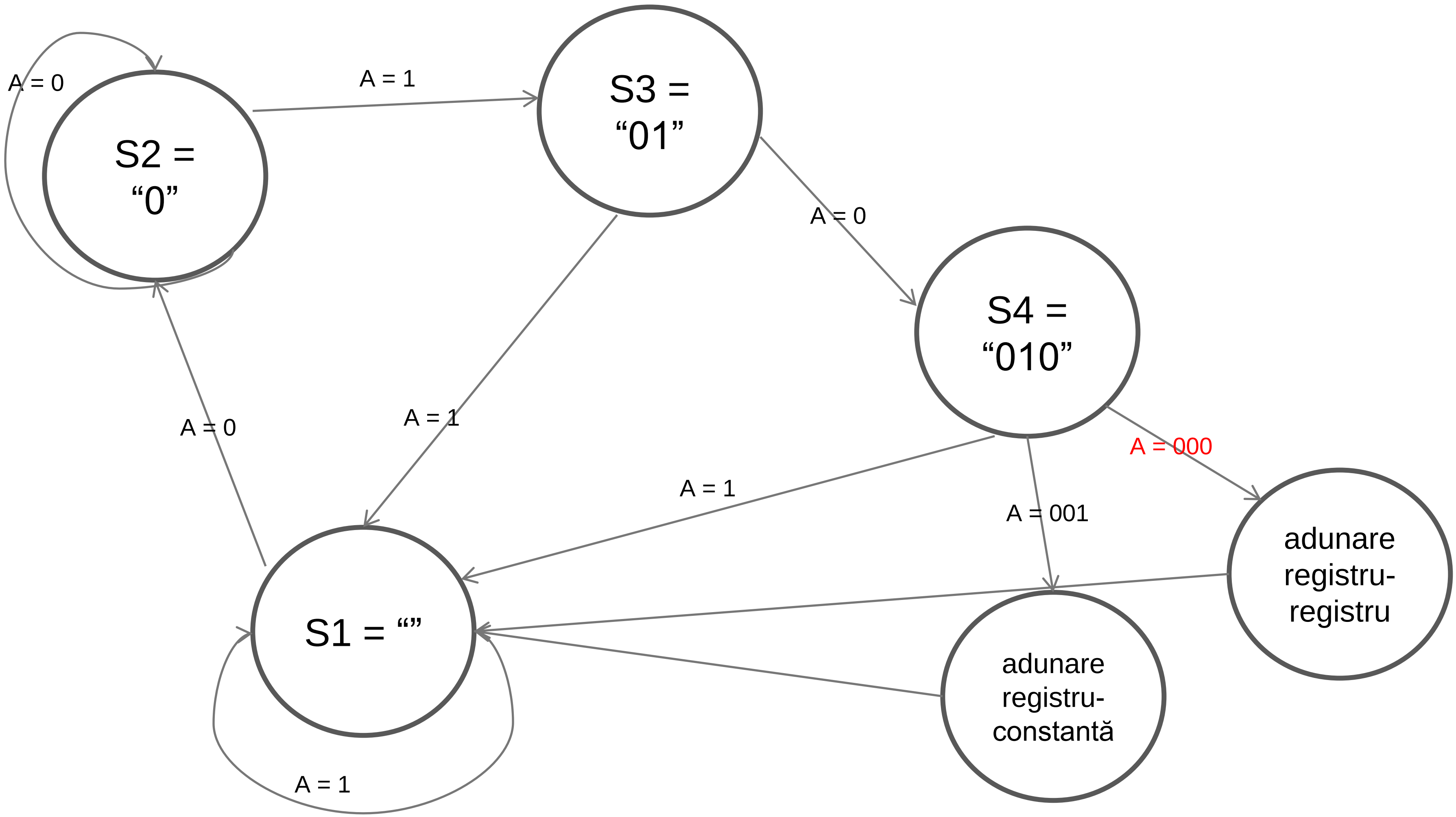
...0100001011010001010000100011001011 ...

CE FACE UN PROCESOR



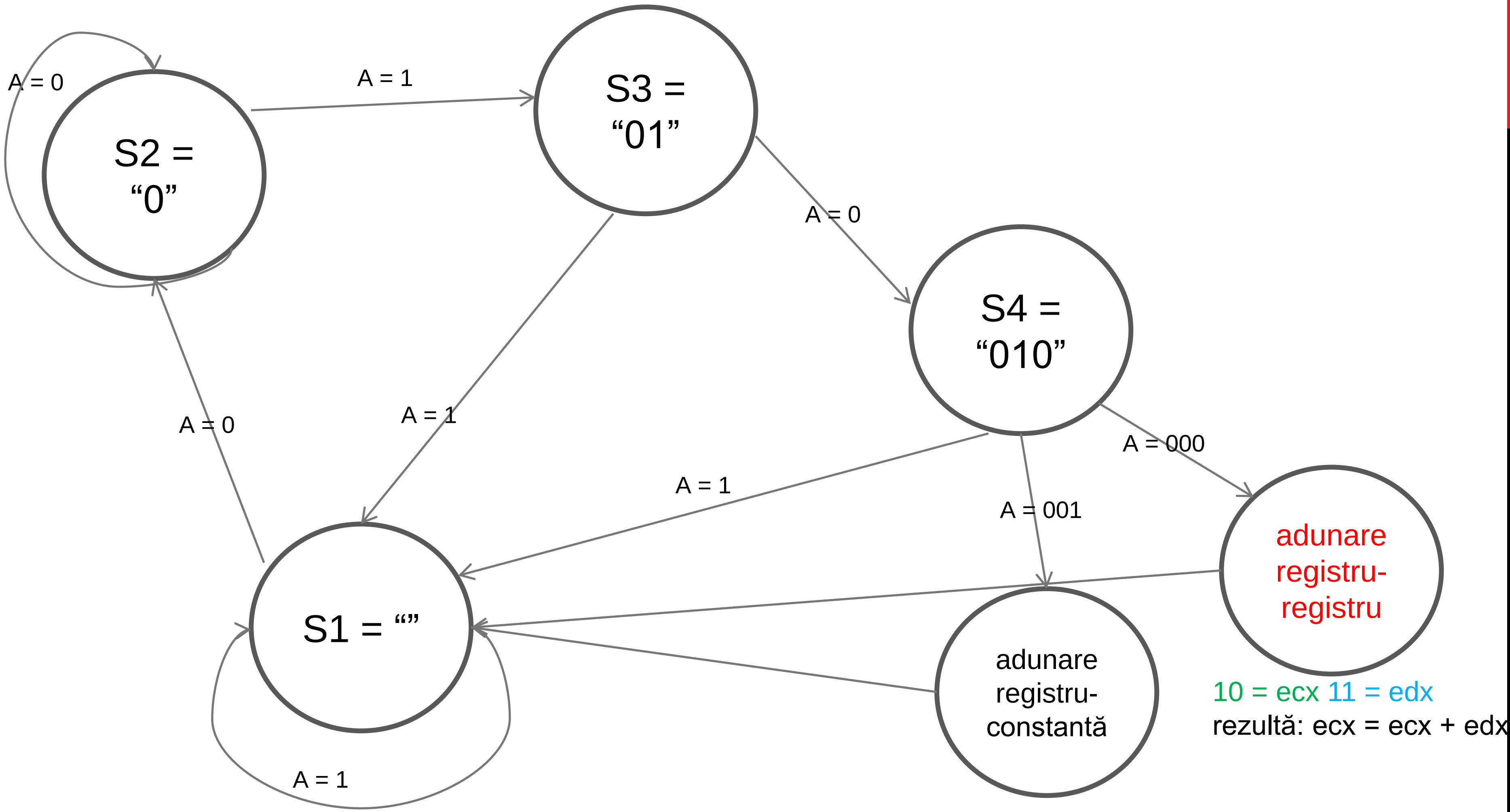
...010000101101000101000010001100101 1 ...

CE FACE UN PROCESOR



...010000101101000101000010001100101 1 ...

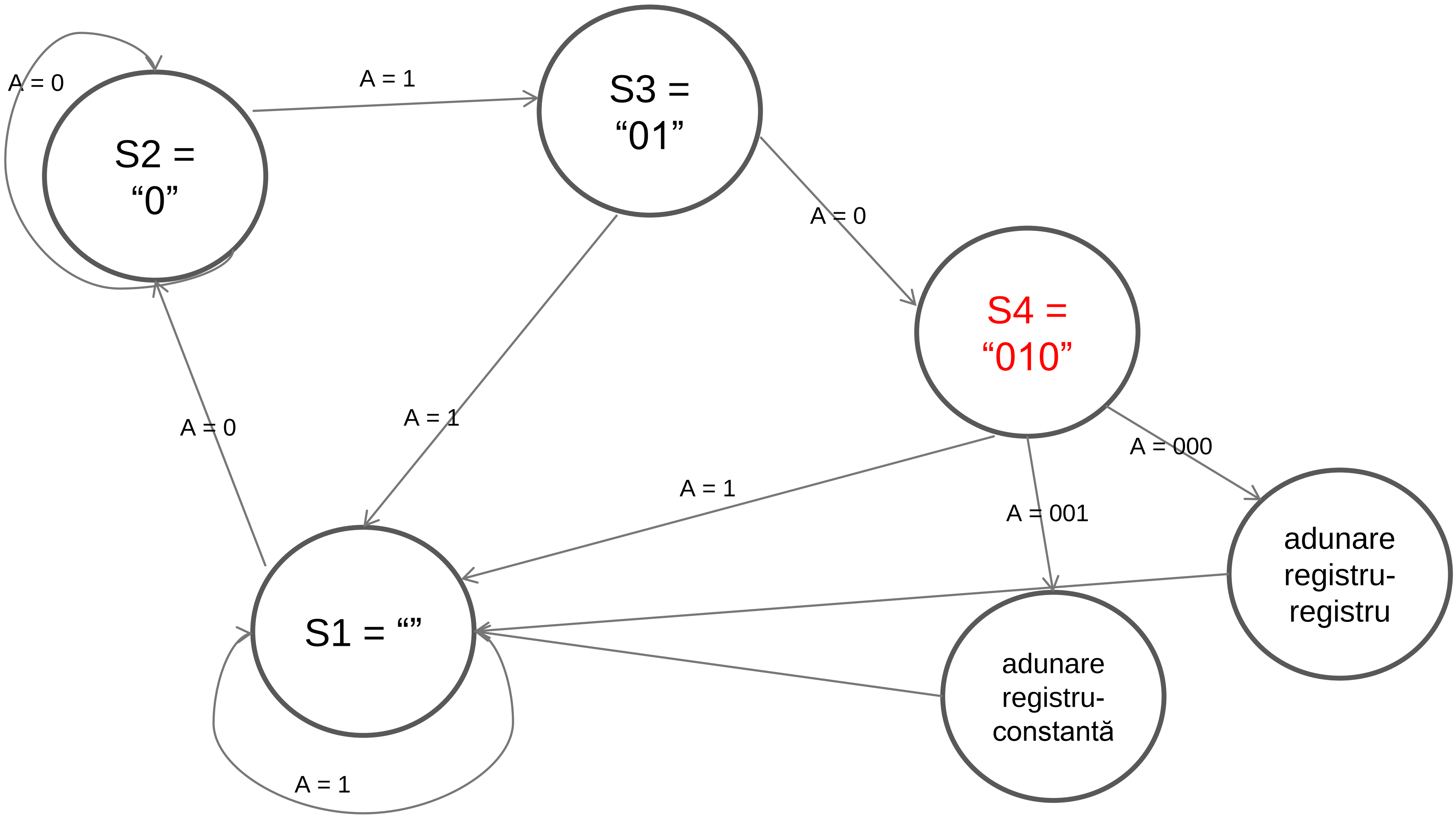
CE FACE UN PROCESOR



...01000010110100010100001000110010 11 ...

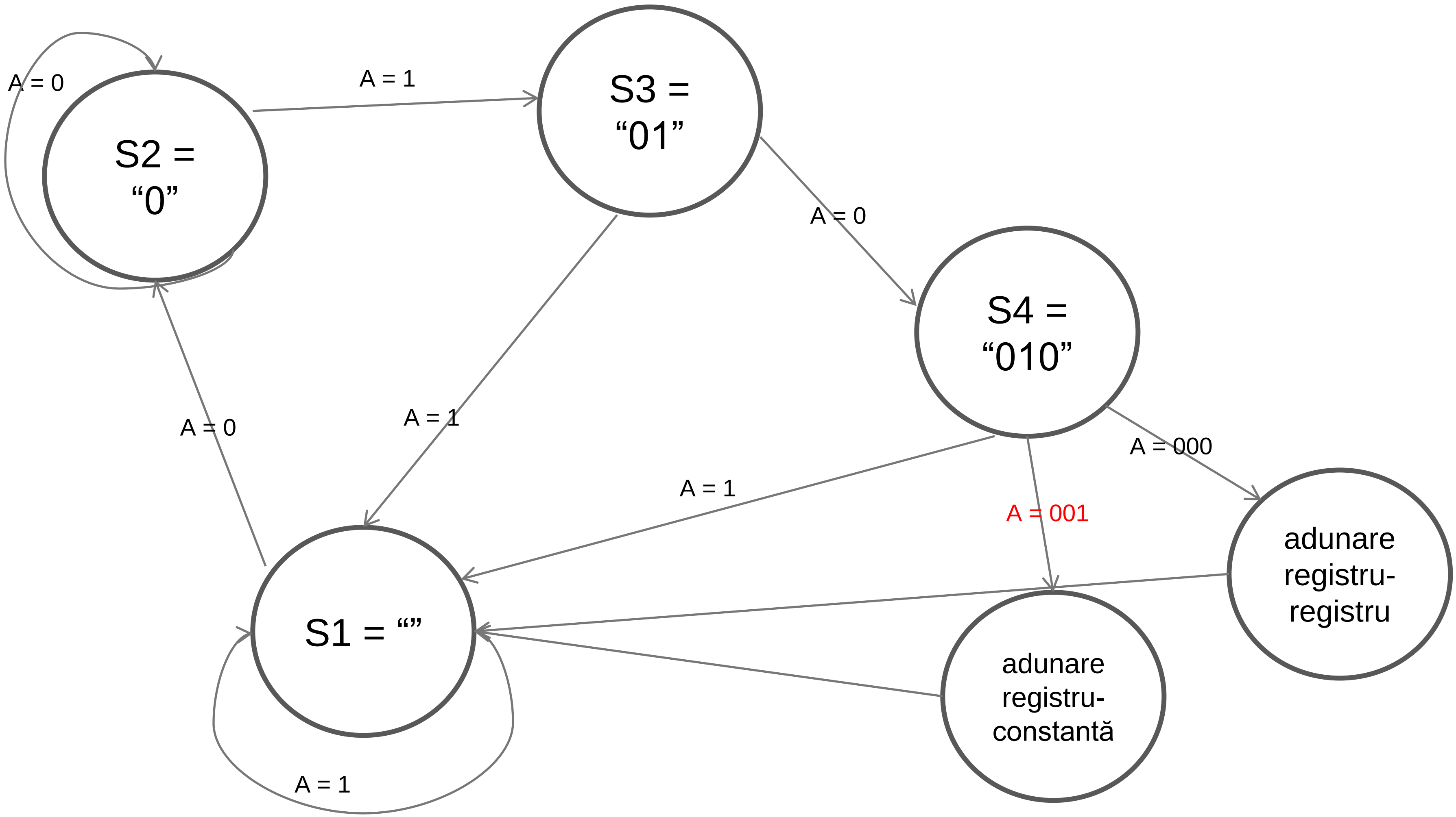
.

CE FACE UN PROCESOR



...0100001011010001010000100011001011 ...

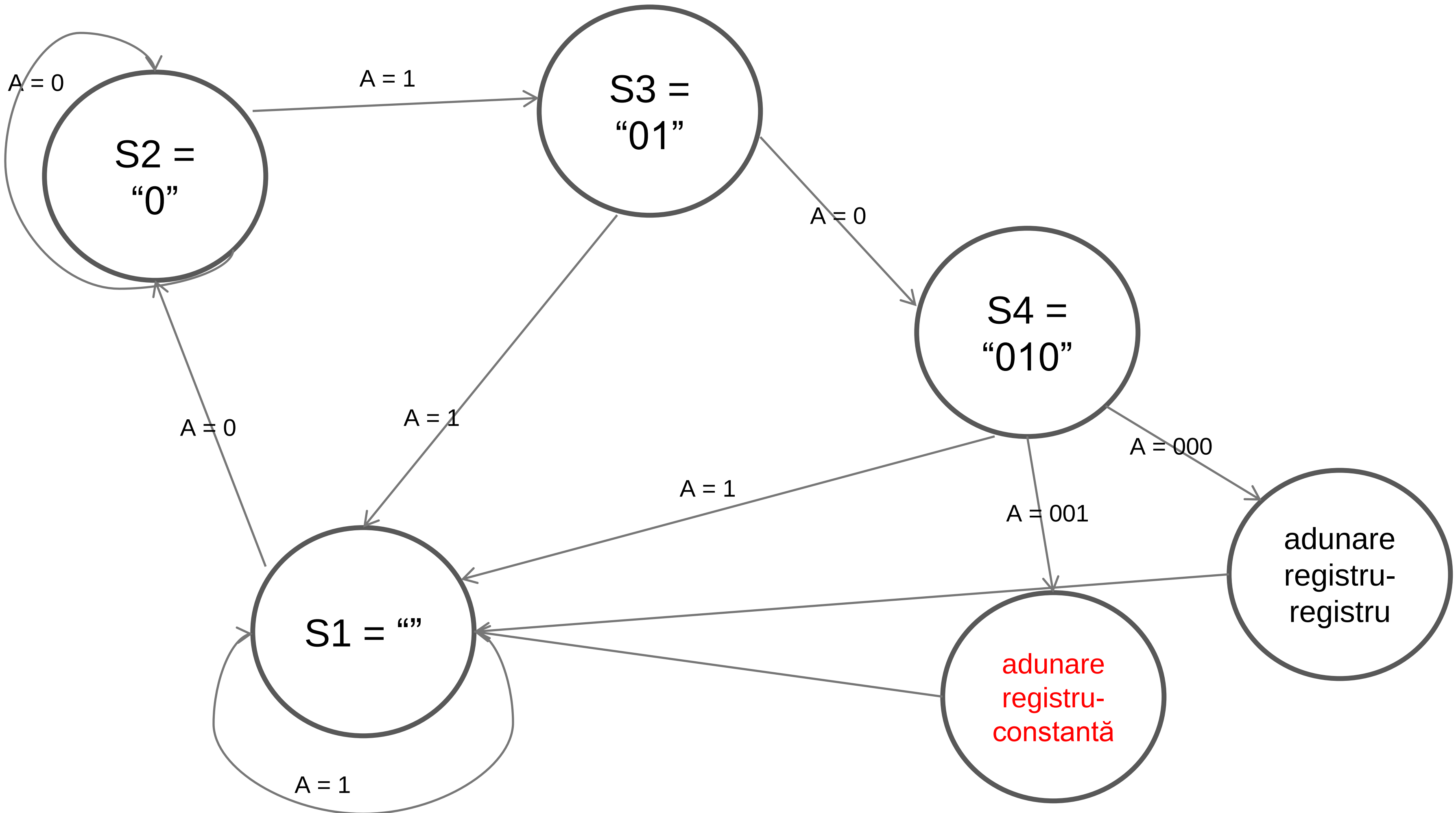
CE FACE UN PROCESOR



...0100001011010001010000100011001011 ...

.

CE FACE UN PROCESOR

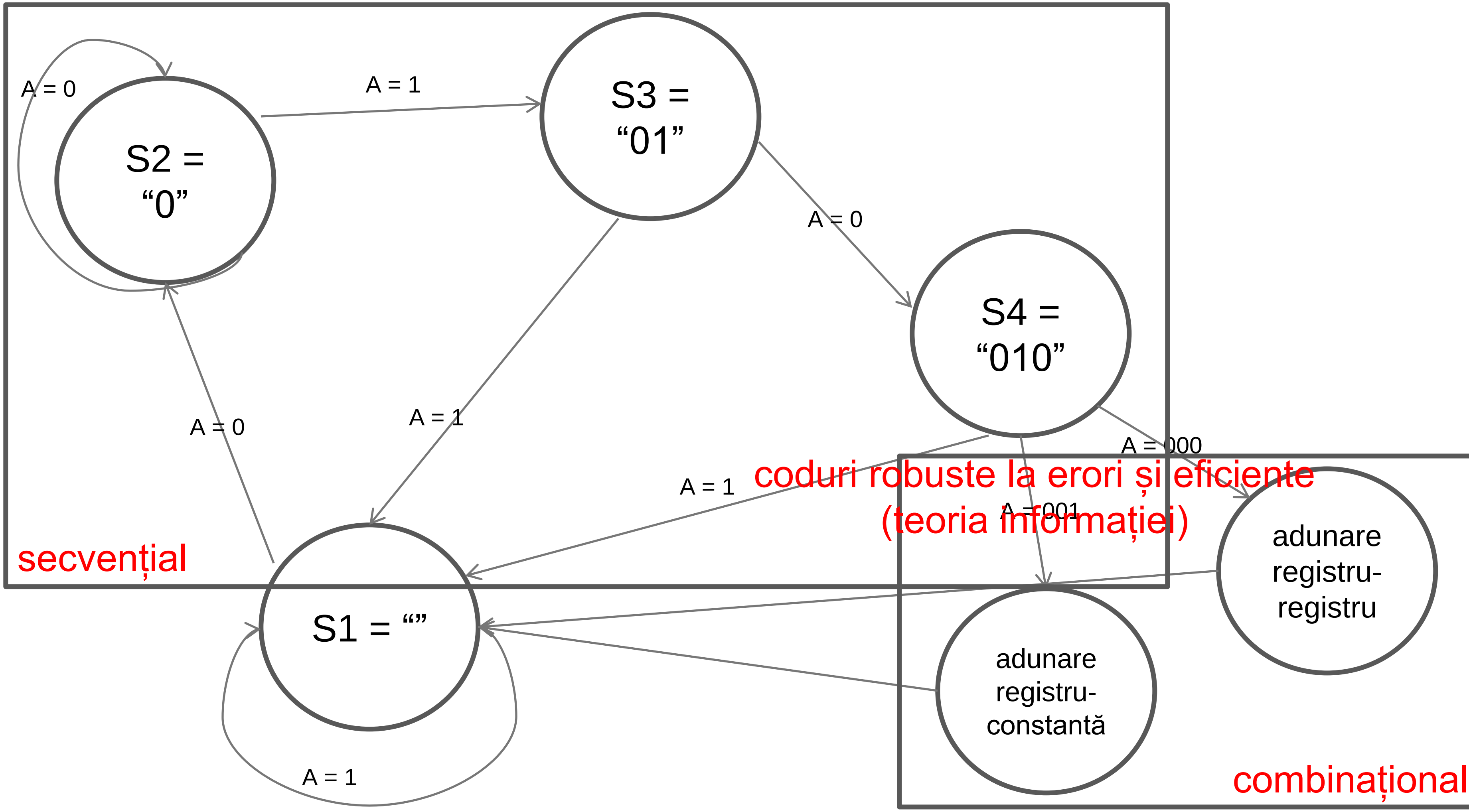


01 = ebx 0000100011001011 = 381

rezultă: ebx = ebx + 381

...0100001011010001010000100011001011 ...

CE FACE UN PROCESOR



cod mașină ...010000101101000101000010001100101 1 ...

CONȚINUT NOU PENTRU CURS

- înmulțirea numerelor întregi binare
- împărțirea numerelor întregi binare
- reprezentarea numerelor în virgulă mobilă
- lucrul cu numerele în virgulă mobilă

ÎNMULȚIREA NUMERELOR ÎNTREGI

- **exemplu, s = a x b**
  - *a* și *b* pe N biți
  - *s* pe ?? biți

$$
\begin{array}{rl}
\boxed{1\ 1\ 1\ 0} & a \\
\boxed{0\ 1\ 0\ 1} & b \\
\hline
 & s
\end{array}
$$

ÎNMULȚIREA NUMERELOR ÎNTREGI

- **exemplu, s = a x b**
  - *a* și *b* pe N biți
  - *s* pe 2N biți

$\boxed{1\ 1\ 1\ 0}$	*a*
$\boxed{0\ 1\ 0\ 1}$	*b*
	s

ÎNMULȚIREA NUMERELOR ÎNTREGI

- **exemplu, s = a x b**

			1	1	1	0	*a*
			0	1	0	1	*b*
			1	1	1	0	*s*
		0	0	0	0		
	1	1	1	0			
0	0	0	0				
1	0	0	0	1	1	0	

ÎNMULȚIREA NUMERELOR ÎNTREGI

- **exemplu, s = a x b**

			1	1	1	0	*a = 14*
			0	1	0	1	*b = 5*
			1	1	1	0	*s = 70*
		0	0	0	0		
	1	1	1	0			
0	0	0	0				
1	0	0	0	1	1	0	

ÎNMULȚIREA NUMERELOR ÎNTREGI

- **exemplu, s = a x b**

```
         1 1 1 0      a = 14
         0 1 0 1      b = 5
    ----------------
         1 1 1 0      s = 70
       0 0 0 0
     1 1 1 0
   0 0 0 0
    ----------------
   1 0 0 0 1 1 0
```

a = 14

b = 5

s = 70

ce am făcut aici este corect, dar am presupus că am primit numere naturale. ce se întâmplă dacă *a* și *b* sunt în complement față de doi?

ÎNMULȚIREA NUMERELOR ÎNTREGI

- **exemplu, s = a x b**

$\boxed{1\ 1\ 1\ 0}$ $\quad$ *a = -2*

$\boxed{0\ 1\ 0\ 1}$ $\quad$ *b = 5*

---

s = -10

primul pas: extindem operanzii pe 8 biți

ÎNMULȚIREA NUMERELOR ÎNTREGI

- **exemplu, s = a x b**

1 1 1 1 1 1 1 0	*a = -2*
0 0 0 0 0 1 0 1	*b = 5*
1 1 1 1 1 1 1 0	*s = -10*
0 0 0 0 0 0 0 0	
1 1 1 1 1 1 1 0	
...	
.........1 1 1 1 1 0 1 1 0	

al doilea pas: facem operația de înmulțire obișnuită

.

ÎNMULȚIREA NUMERELOR ÎNTREGI

- **exemplu, s = a x b**

1 1 1 1 1 1 1 0   *a = -2*

0 0 0 0 0 1 0 1   *b = 5*

1 1 1 1 1 1 1 0   *s = -10*

0 0 0 0 0 0 0 0

1 1 1 1 1 1 1 0

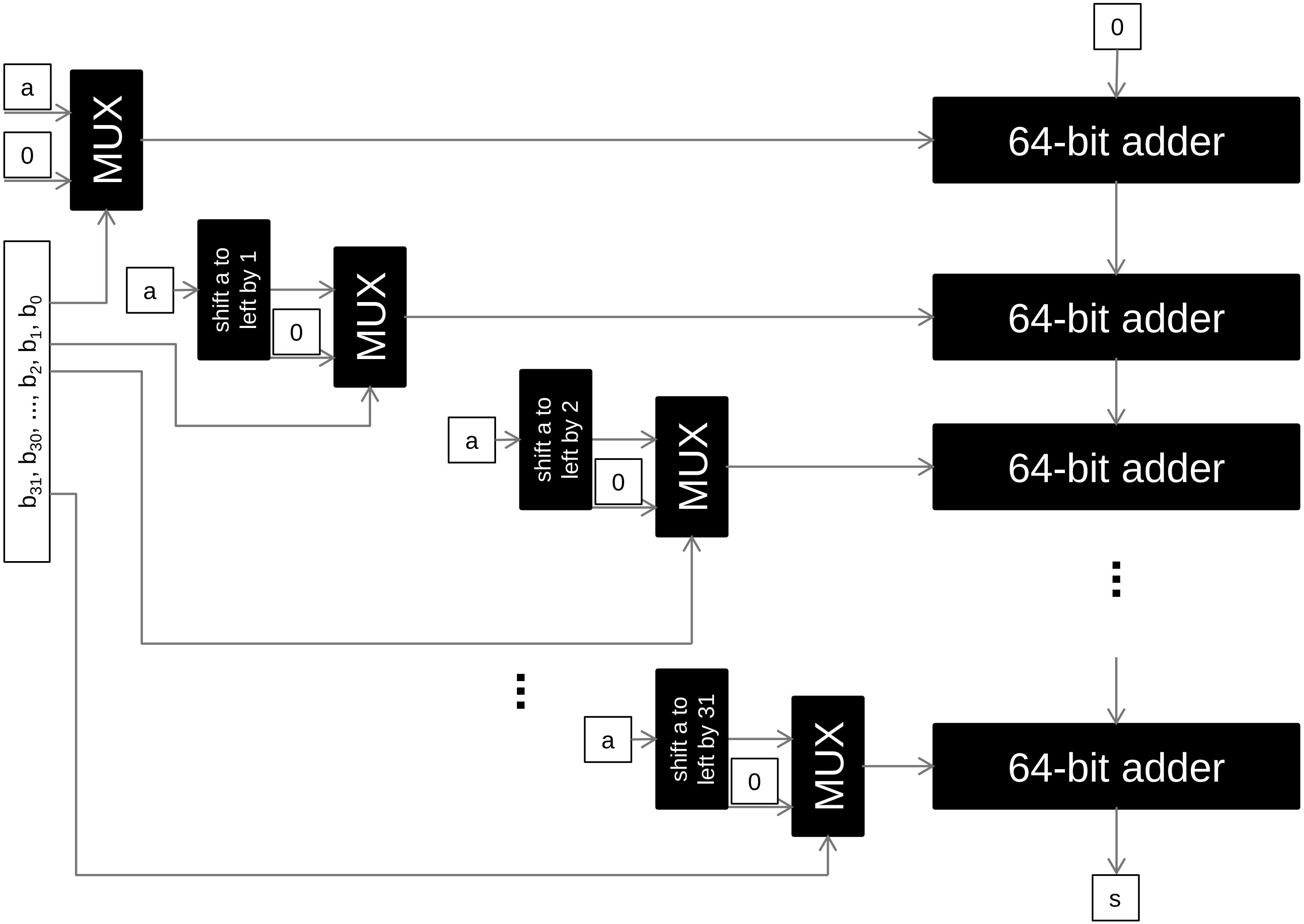
...

.........1 1 1 1 1 0 1 1 0

al treilea pas: rezultatul este pe 8 biți în complement față de doi

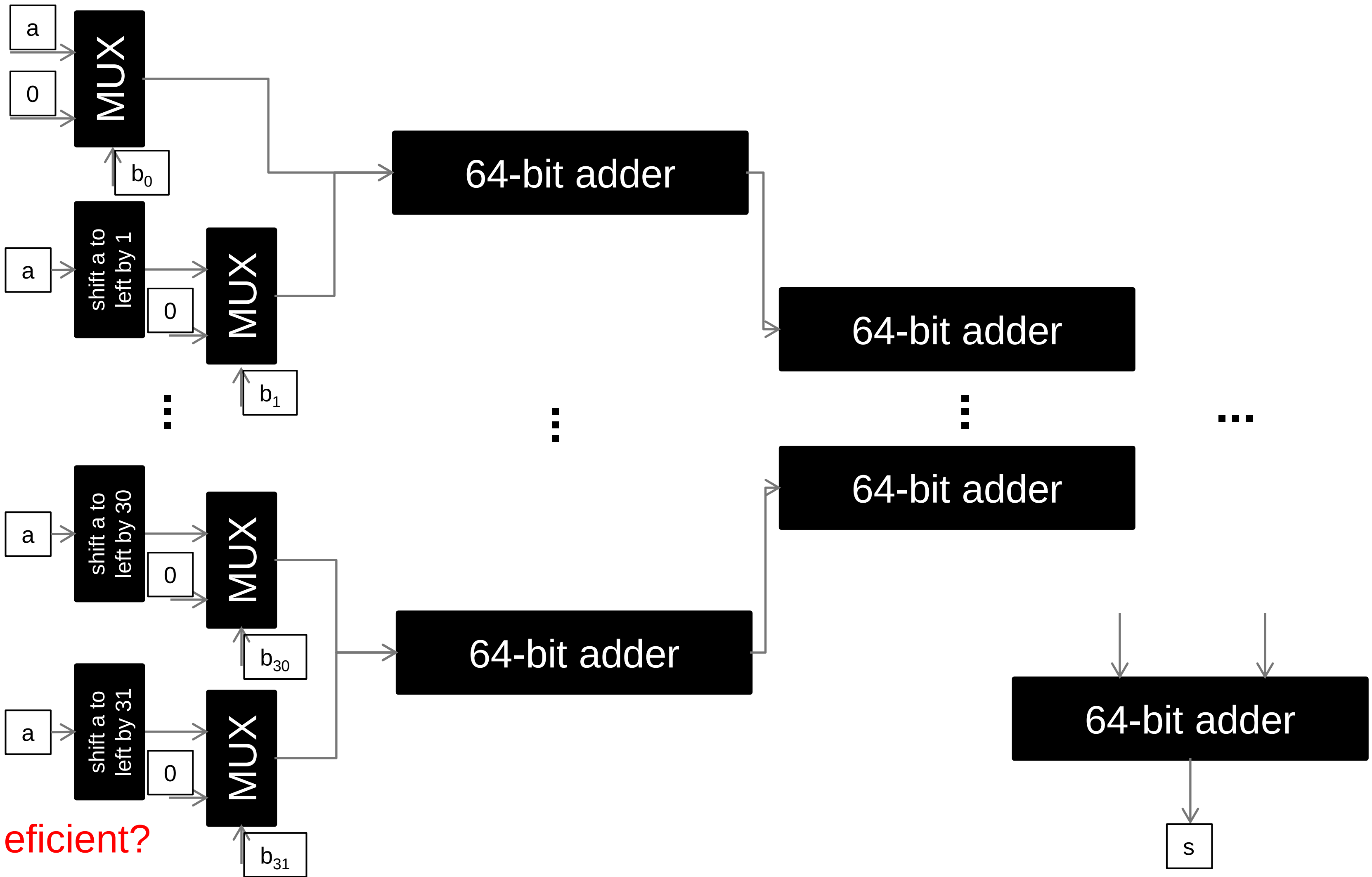
ÎNMULȚIREA NUMERELOR ÎNTREGI

- **circuitul combinațional**
  - s = a x b, a și b sunt numere pe 32 de biți



ÎNMULȚIREA NUMERELOR ÎNTREGI

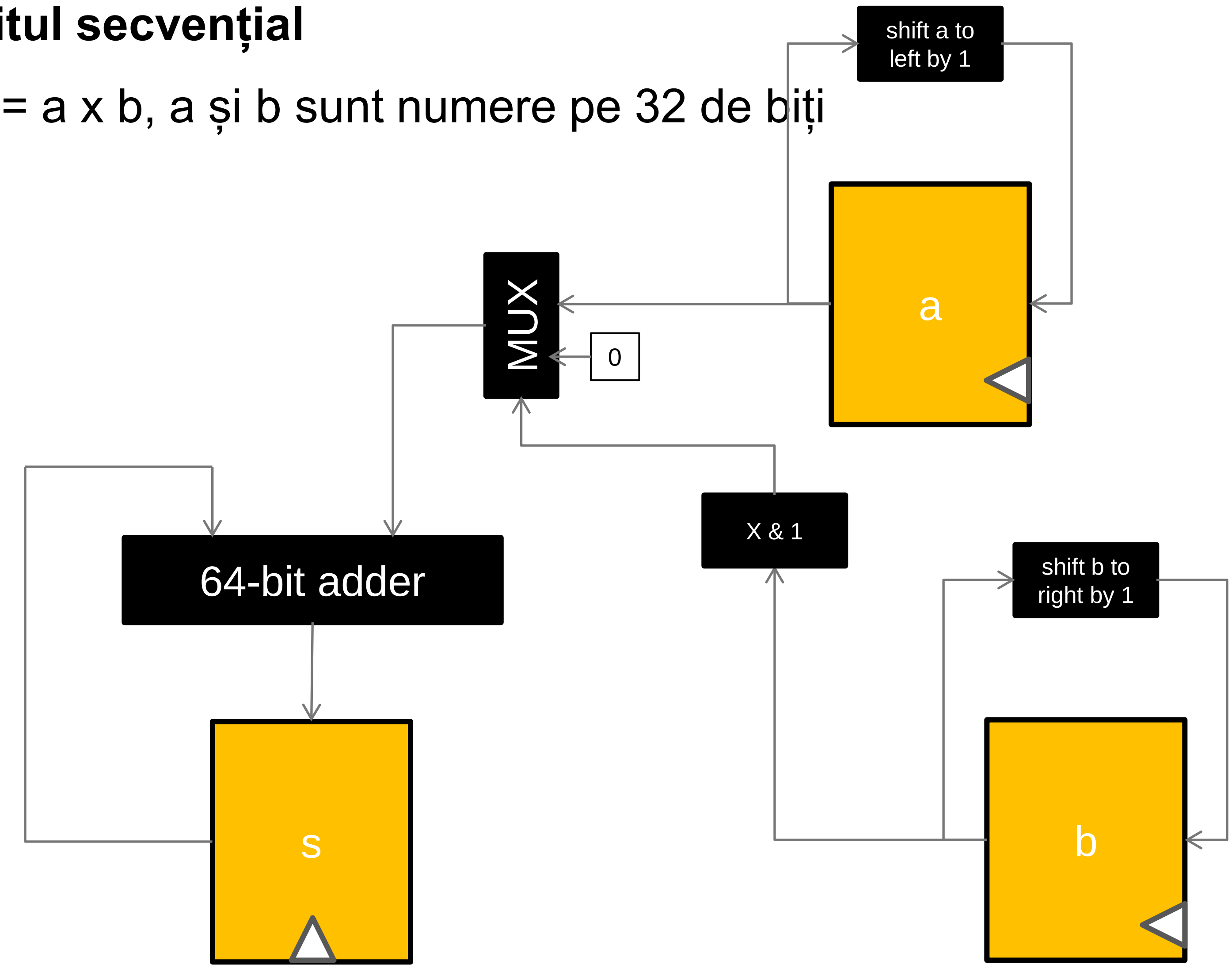
- **circuitul combinațional**
  - s = a x b, a și b sunt numere pe 32 de biți



ceva mai eficient?

ÎNMULȚIREA NUMERELOR ÎNTREGI

- **circuitul secvențial**
  - s = a x b, a și b sunt numere pe 32 de biți



ÎMPĂRȚIREA NUMERELOR ÎNTREGI

- **exemplu, s = a ÷ b**

1 0 0 1 1 1

1 1

.

ÎMPĂRȚIREA NUMERELOR ÎNTREGI

- **exemplu, s = a ÷ b**

$\boxed{1}$ 0 0 1 1 1

1 1

0

ÎMPĂRȚIREA NUMERELOR ÎNTREGI

- **exemplu, s = a ÷ b**

$\boxed{1\ 0}\ 0\ 1\ 1\ 1$

1 1

0 0

ÎMPĂRȚIREA NUMERELOR ÎNTREGI

- **exemplu, s = a ÷ b**

$\boxed{1\ 0\ 0}\ 1\ 1\ 1$

1 1

0 0 1

ÎMPĂRȚIREA NUMERELOR ÎNTREGI

- **exemplu, s = a ÷ b**

1 1 1 1

1 1

0 0 1

.

ÎMPĂRȚIREA NUMERELOR ÎNTREGI

- **exemplu, s = a ÷ b**

1 1 1 1

1 1

0 0 1 1

ÎMPĂRȚIREA NUMERELOR ÎNTREGI

- **exemplu, s = a ÷ b**

1 1

1 1

0 0 1 1 0

ÎMPĂRȚIREA NUMERELOR ÎNTREGI

- **exemplu, s = a ÷ b**

$\boxed{1\ 1}$	$a = 39$
1 1	$b = 3$
0 0 1 1 0 1	$s = 13$

ÎMPĂRȚIREA NUMERELOR ÎNTREGI

- **s = a ÷ b**
  - ce se întâmplă dacă *a* sau *b* sunt variabile negative?
  - rezultatul este negativ dacă *a* și *b* au semne diferite (XOR logic)
  - în general
    - a = s x b + r
    - semnul lui r este semnul lui a
  - circuitul pentru împărțire nici nu vom încerca să îl facem
  - din cauza acestei complexități ridicate, compilatoarele și sistemele de calcul vor face tot posibilul pentru a evita o împărțire
  - vedem mai multe exemple la seminar ...

REPREZENTAREA ÎN VIRGULĂ MOBILĂ

- **am discutat la Seminar 0x00 despre reprezentarea în virgulă fixă**

...	2^7	2^6	2^5	2^4	2^3	2^2	2^1	2^0	2^{-1}	2^{-2}	2^{-3}	2^{-4}	2^{-5}	2^{-6}	2^{-7}	...

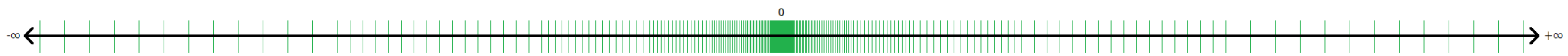
- **exemplu: 7.5 e scris ca 111.1**

- **care este problema cu această reprezentare?**
  - partea întreagă este separată de partea fracționară
  - fiecare are nevoie de un număr de biți prestabilit
  - asta poate să fie ineficient
  - vrem ca numărul de biți total să fie alocat “dinamic”, în funcție de numărul pe care trebuie să îl reprezentăm

REPREZENTAREA ÎN VIRGULĂ MOBILĂ

- **când trebuie să reprezentăm un număr real**
  - nu putem să avem precizie infinită
  - avem un număr finit de biți, deci putem să scriem biții în circuite
  - avem nevoie de precizie variabilă
  - putem avea precizie “infinită” dacă avem numere raționale (și vom salva separat numărătorul și numitor ca întregi)

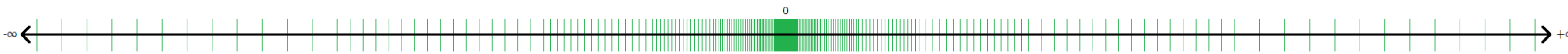
- **standardul: IEEE 754 Floating Point**
  - densitatea nu este uniformă pe linia reală



https://en.wikipedia.org/wiki/Floating-point_arithmetic

REPREZENTAREA ÎN VIRGULĂ MOBILĂ

- **standardul: IEEE 754 Floating Point**
  - densitatea nu este uniformă pe linia reală



- **sunt câteva consecințe**
  - (0.1 + 0.2) == 0.3 versus (0.2 + 0.3) == 0.5
  - (0.7 + 0.2) + 0.1 versus (0.7 + 0.1) + 0.2 (nu avem asociativitatea)
  - math.sqrt(3)*math.sqrt(3) == 3 versus math.sqrt(3*3) == 3
  - diferența cu numere întregi
    - dacă folosim tip de date întreg: 16777216 + 1 = 16777217
    - dacă folosim tip de date FP: 16777216.0 + 1 = 16777216.0

    - float(123456789101112) + 1.0 = 123456789101113.0
    - float(1234567891011121) + 1.0 = 1234567891011122.0
    - float(12345678910111213) + 1.0 = 1.2345678910111212e+16

testele sunt făcute în C și python cu variable care sunt single precision (FP 32 de biți)

REPREZENTAREA ÎN VIRGULĂ MOBILĂ

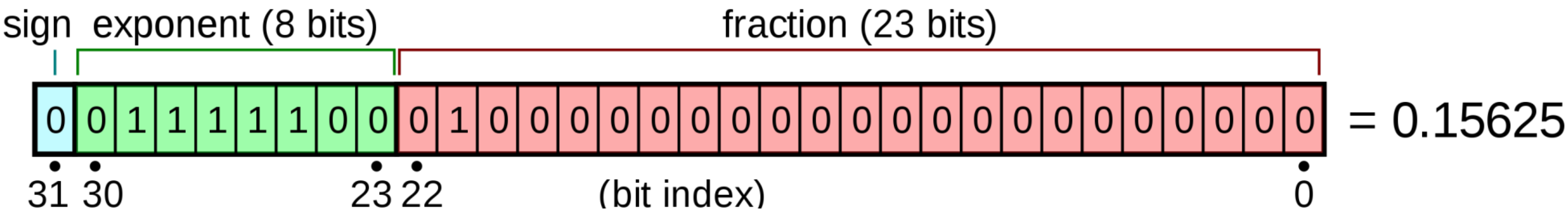
- **reprezentarea științifică**
  - $12345 = 1.2345 \times 10^4$
  - $1024 = 1.024 \times 10^3$
  - $0.00125 = 1.25 \times 10^{-3}$

  - float(1234567891011121) + 1.0 = 1234567891011122.0
  - float(12345678910111213) + 1.0 = 1.2345678910111212e+16

  - $101010 = 1.0101 \times 2^4$
    - în sistemul binar, primul bit din reprezentare este mereu 1

REPREZENTAREA ÎN VIRGULĂ MOBILĂ

- **standardul: IEEE 754 Floating Point**



- **$x = (-1)^{s}$ 1.mmmmmmmmmmmmmmmmmmmmmmm $2^{eeeeeeee-127}$**

- **exemple:**
  - $0.15625 = (-1)^{0}\ 1.0100...0\ 2^{b(01111100)\ -\ 127} = 1.25\ 2^{-3} = 1.25/8$
  - alte exemple:
  - $(-1)^{0}\ 1.1000...0\ 2^{b(01111100)\ -127} = 1.5\ 2^{-3} = 1.5/8 = 0.1875$
  - $1 = (-1)^{0}\ \ 1.00000000000000000000000\ 2^{01111111-127}$
  - $-1 = (-1)^{1}\ \ 1.00000000000000000000000\ 2^{01111111-127}$
  - $2 = (-1)^{0}\ \ 1.00000000000000000000000\ 2^{10000000-127}$
  - $\infty = (-1)^{0}\ \ 1.00000000000000000000000\ 2^{11111111-127}$
  - $-\infty = (-1)^{1}\ \ 1.00000000000000000000000\ 2^{11111111-127}$

mai mult exemple, la Seminarul 0x03

https://en.wikipedia.org/wiki/Floating-point_arithmetic https://www.h-schmidt.net/FloatConverter/IEEE754.html

CE AM FĂCUT ASTĂZI

- **logică secvențială + combinațională, un exemplu**
- **înmulțirea numerelor întregi binare**
- **împărțirea numerelor întregi binare**
- **reprezentarea numerelor în virgulă mobilă**
- **lucrul cu numerele în virgulă mobilă**

DATA VIITOARE …

- începem să discutăm despre arhitecturi de calcul
- începem să discutăm despre seturi de instrucțiuni

LECTURĂ SUPLIMENTARĂ

- **PH book**
  - 3.3 Multiplication
  - 3.4 Division
  - 3.5 Floating Point

- **Computerphile, Floating Point Numbers, https://www.youtube.com/watch?v=PZRI1IfStY0**
- **Computephile, Floating Point Numbers (Part1: Fp vs Fixed), https://www.youtube.com/watch?v=f4ekifyijIg**
- **Computephile, Floating Point Numbers (Part2: Fp Addition), https://www.youtube.com/watch?v=782QWNOD_Z0**