21. 2) има случай, в който $M[x \hookrightarrow N]$ е дефинирана, но $M[x \rightsquigarrow N]$ не е коректна

Знаем, че наивната субституция е коректна, ако $FV(N) \cap BV(M) = \emptyset$

Разглеждаме термовете $M = \lambda_y y$ и $N = y$.

частична субституция: $(\lambda_y P)[x \hookrightarrow N] = \lambda_y (P[x \hookrightarrow N])$, $y \neq x$, $x \notin FV(P)$ или $y \notin FV(N)$

$FV(N) = \{y\}$

$BV(M) = \{y\}$

$FV(P) = \{y\}$

При $(\lambda_y y)[x \rightarrow y]$ наивната субституция не е коректна по дефиниция, тъй като $FV(N) \cap BV(M) = \{y\} \neq \emptyset$, но частичната субституция е дефинирана, защото $y \neq x$ и $x \notin FV(P)$

1) ако $M[x \rightsquigarrow N]$ е коректна, то $M[x \hookrightarrow N]$ е дефинирана и $M[x \hookrightarrow N] \equiv M[x \rightsquigarrow N]$

Нека наивната субституция е коректна. Тогава $FV(N) \cap BV(M) = \emptyset$

Ще докажем твърдението с индукция по $\rightsquigarrow$

Тъй като клаузи $(1) \div (4)$ в дефинициите на наивната и частичната субституция съвпадат, то очевидно щом $\rightsquigarrow$ е дефинирана и коректна, то и $\hookrightarrow$ е дефинирана и двете съвпадат.

Остава да разгледаме:

5) $(\lambda_y P)[x \rightsquigarrow N] := \lambda_y (P[x \rightsquigarrow N])$, $x \neq y$

5) $(\lambda_y P)[x \hookrightarrow N] := \lambda_y (P[x \hookrightarrow N])$, $x \neq y$ и $x \notin FV(P)$ или $y \notin FV(N)$

Нека $M = \lambda_y P$. Тогава по индукционно предположение знаем, че $P[x \rightsquigarrow N] \equiv P[x \hookrightarrow N]$

Също така знаем, че наивната субституция е коректна, т.е. $FV(N) \cap BV(M) = \emptyset$

$$\emptyset = FV(N) \cap BV(M) =$$
$$= FV(N) \cap (BV(P) \cup \{y\}) =$$
$$= \underbrace{(FV(N) \cap BV(P))}_{\text{от индукционното предположение } = \emptyset} \cup (FV(N) \cap \{y\}) =$$
$$= FV(N) \cap \{y\}$$

$$\Rightarrow FV(N) \cap \{y\} = \emptyset$$

$$\Rightarrow y \notin FV(N)$$

$\Rightarrow$ частичната субституция съществува

$$M[x \rightsquigarrow N] \equiv (\lambda_y P)[x \rightsquigarrow N] \equiv$$
$$\equiv \lambda_y (P[x \rightsquigarrow N]) \overset{\text{ИП}}{\equiv} \lambda_y (P[x \hookrightarrow N]) \equiv$$
$$\equiv M[x \hookrightarrow N],$$ с което

твърдението е доказано

2.11. $\leq$ е частична наредба.

Използваме упътването, което ще докажем по-късно

Рефлексивност: $M \leq M$?

$$Sub(M) \subseteq Sub(M) \Rightarrow M \leq M$$

Транзитивност: Нека $M \leq N$ и $N \leq S$. Тогава $Sub(M) \subseteq Sub(N)$ и $Sub(N) \subseteq Sub(S) \Rightarrow Sub(M) \subseteq Sub(S)$ $\Rightarrow M \leq S$

Антисиметричност: Допускаме, че $\exists M \neq N$: $M \leq N$ и $N \leq M$. Тогава $Sub(M) \subseteq Sub(N)$ и $Sub(N) \subseteq Sub(M)$

$\Rightarrow Sub(M) = Sub(N)$

$\Rightarrow M = N$, което е противоречие с допускането, че $M \neq N \Rightarrow \leq$ е антисиметрична релация

Упътване: $M \leq N \Leftrightarrow Sub(M) \subseteq Sub(N)$

$\Rightarrow$/ $M \leq N \Rightarrow Sub(M) \subseteq Sub(N)$

По определение знаем, че $M \leq N \Leftrightarrow M \in Sub(N)$

Разглеждаме възможните случаи за N

1) $N \equiv x$

Тогава $Sub(N) = Sub(x) = x$

$\Rightarrow M \equiv x \equiv N$ и $Sub(M) \subseteq Sub(N)$

2) $N = PQ$

Тогава $Sub(N) = Sub(P) \cup Sub(Q) \cup \{PQ\}$

В този случай имаме 2 варианта за M

1) $M = PQ \equiv N$ и $Sub(M) = Sub(N)$

2) $M \in Sub(P)$ или $M \in Sub(Q)$

В този случай, заради рекурсивната дефиниция на Sub, $Sub(M) \subseteq Sub(P)$ или $Sub(M) \subseteq Sub(Q)$

$\Rightarrow Sub(M) \subseteq Sub(N)$

3) $N \equiv \lambda_x P$

$Sub(N) = Sub(P) \cup (\lambda_x P)$

Аналогично на 2):

1) $M \equiv \lambda_x P \equiv N \Rightarrow Sub(M) = Sub(N)$

2) $M \in Sub(P)$ и $Sub(M) \subseteq Sub(P) \Rightarrow$

$Sub(M) \subset Sub(N)$

$\Rightarrow M \leq N \Rightarrow Sub(M) \subseteq Sub(N)$

$\Leftarrow$/ $Sub(M) \subseteq Sub(N) \Rightarrow M \leq N$

I сл. $Sub(M) = Sub(N)$

Щом двете множества съвпадат, то на всяка стъпка на рекурсията сме попадали в едни и същи случаи (тръгвайки от последната към първата стъпка) и $\Rightarrow$ сме тръгнали от еднакви термове $\Rightarrow M \equiv N$ и от $Sub(x) = \{x\}$ $Sub(PQ) = Sub(P) \cup Sub(Q) \cup \{PQ\}$, $Sub(\lambda_x M) = Sub(M) \cup (\lambda_x M)$ можем да заключим, че всеки терм е подтерм на себе си $\Rightarrow M \leq N$

II сл. $Sub(M) \subset Sub(N)$

В този случай на някоя стъпка в рекурсивната дефиниция сме получили $Sub(N) = \ldots \cup (Sub(M) \cup \ldots) \cup \ldots$ и тъй като $M \in Sub(M)$ и $Sub(M) \subset Sub(N) \Rightarrow$

$M \in Sub(N) \Rightarrow M \leq N$

$\Rightarrow M \in Sub(M) \subseteq Sub(N) \Rightarrow M \leq N$

$\Rightarrow Sub(M) \subseteq Sub(N) \Rightarrow M \leq N$

2.20 $c_{exp}\, c_m\, c_n \xrightarrow{\beta} c_{m^n}$

$c_{exp}\, c_m\, c_n = c_n\, (c_*\ c_m)\ c_1$

Док-во: по индукция по n

1) База: $n=0$

$c_0 (c_* c_m)\ c_1 =$

$= \lambda_{f,x}\, x\ (c_* c_m)\ c_1 \xrightarrow{\beta}$

$\xrightarrow{\beta} \lambda_x\, x\ c_1 \xrightarrow{\beta} c_1$

$\Rightarrow c_0\, (c_*\ c_m)\, c_1 \xrightarrow{\beta} c_1 = c_{m^0}$

2) Нека е вярно, че $c_n\, (c_*\ c_m)\ c_1 = c_{m^n}$

3) Ще докажем, че $c_{n+1}\ (c_* c_m)\, c_1 = c_{m^{n+1}}$

$c_{n+1}\, (c_*\ c_m)\ c_1 =$

$= \lambda_{f,x}\ \underbrace{f(f(f \dots (f x)) \dots)}_{n+1 \text{ пъти}}\ (c_*\ c_m)\ c_1 \xrightarrow{\beta}$

$\xrightarrow{\beta} \lambda_x\ \underbrace{(c_* c_m)((c_* c_m)((c_* c_m) \dots (c_* c_m}_{n+1 \text{ пъти}}\ x)) \dots)\ c_1 \xrightarrow{\beta}$

$\xrightarrow{\beta} (c_* c_m)((c_* c_m)((c_* c_m) \dots (c_*\ c_m\ c_1)) \dots) \xleftarrow{\beta}$

$\xleftarrow{\beta} (c_* c_m)\ (\lambda_x\ (c_* c_m)((c_* c_m) \dots (c_* c_m\ x)) \dots) c_1) \xleftarrow{\beta}$

$\xleftarrow{\beta} (c_* c_m)\ (\lambda_{f,x}\ (f(f(f \dots (f x)) \dots)\ (c_*\ c_m)\ c_1) =$

$= (c_* \, c_m)\,(c_n\,(c_* \, c_m)\, c_1) \overset{4x}{=} c_* \, c_m \, c_m{}^n \xrightarrow{\beta}$

$\xrightarrow{\beta} c_{m \cdot m^n} = c_{m^{n+1}}$

$c_{hyp} \; c_m c_n \xrightarrow{\beta} c_p, \; p = \underbrace{m^{m^{\cdot^{\cdot^{\cdot^{m}}}}}}_{n}$

$c_{hyp} = \lambda_{m,n} \; (n \; m) \; m$

Док-во: индукция по n

1) База: $n = 0$

$c_{hyp} \; c_m \, c_0 = (\lambda_{m,n} \; (n \; m) \; m) \; c_m \;\; c_0 \xrightarrow{\beta}$

$\xrightarrow{\beta} (\lambda_n \; (n \;\; c_m) \; c_m) \;\; c_0 \xrightarrow{\beta}$

$\xrightarrow{\beta} (c_0 \;\; c_m) \; c_m = (\lambda_{f,x} \; x) \;\; c_m \;\; c_m \xrightarrow{\beta}$

$\xrightarrow{\beta} (\lambda_x \; x) \; c_m \xrightarrow{\beta} c_m$

2) Нека е вярно, че $c_{hyp} \; c_m c_n = c_p, \; p = \underbrace{m^{m^{\cdot^{\cdot^{\cdot^{m}}}}}}_{n \text{ пъти}}$

$c_{hyp} \;\; c_m c_n \xrightarrow{\beta} (c_n \;\; c_m) \; c_m$

3) Ще докажем твърдението за $n+1$

$c_{hyp} \; c_m c_{n+1} \xrightarrow{\beta} (c_{n+1} \;\; c_m) \; c_m =$

$= (\lambda_{f,x} \underbrace{f(f \ldots (f\,(f(f\,x) \ldots))}_{n+1 \text{ пъти}}) \;\; c_m \;\; c_m \xrightarrow{\beta}$

$\xrightarrow{\beta} (\lambda_x c_m\,(c_m\,(c_m\,(\ldots (c_m \;\; x)) \ldots))) \;\; c_m \xrightarrow{\beta}$

$\xrightarrow{\beta} c_m\,(c_m\,(c_m\,(\ldots (c_m \;\; c_m)) \ldots) \xleftarrow{\beta}$

$$\overset{\beta}{\leftarrow} c_m \left(\lambda_x \left(c_m \left(c_m \dots \left(c_m\, x\right) \dots\right) c_m\right) \overset{\beta}{\leftarrow}\right.$$

$$\overset{\beta}{\leftarrow} c_m \left(\lambda_{f,x} \left(\underbrace{f(f(f \dots (f(f\, x)) \dots)}_{n \text{ пъти}}\; c_m\; c_m\right)\right) \equiv$$

$$\equiv c_m \left(c_n\; c_m\; c_m\right) \overset{\text{ЧХ}}{=} c_m\, c_p \text{, където } p = \underbrace{m^{m^{m^{\cdots^{m}}}}}_{n \text{ пъти}}$$

от лекции знаем, че $c_{exp} := \lambda_{m,n,f}\, n\, m\, f \overset{\eta}{\equiv} \lambda_{m,n}\, n\, m$

$$\Rightarrow c_m\, c_p = c_q \text{, където } q = \underbrace{m^{m^{m^{\cdots^{m}}}}}_{n+1 \text{ пъти}}$$

2.22 $c_p\, c_0 \overset{\beta}{=} c_0$

$$c_p\, c_0 \equiv \left(\lambda_n\, c_1 \left(n \left(\lambda_z\, c_{<>} \left(c_S \left(c_L\, z\right)\right) \left(c_L\, z\right)\right) \left(c_{<>}\, c_0\, c_0\right)\right)\right) c_0 \xrightarrow{\beta}$$

$$\xrightarrow{\beta} c_1 \left(c_0 \left(\lambda_z\, c_{<>} \left(c_S (c_L\, z)\right) \left(c_L\, z\right)\right) \left(c_{<>}\, c_0\, c_0\right)\right) \equiv$$

$$\equiv c_1 \left(\left(\lambda_{f,x}\, x\right) \left(\lambda_z\, c_{<>} \left(c_S \left(c_L\, z\right)\right) \left(c_L\, z\right)\right) \left(c_{<>}\, c_0\, c_0\right)\right) \xrightarrow{\beta}$$

$$\xrightarrow{\beta} c_1 \left(\lambda_x x\right) \equiv \left(\lambda_p\, p\, c_{ff}\right) \left(\lambda_x x\right) \xrightarrow{\beta}$$

$$\xrightarrow{\beta} \left(\lambda_x x\right) c_{ff} \xrightarrow{\beta} c_{ff} \equiv \lambda_{x,y}\, y = c_0$$

2.27 $f(\vec{x})$ и $g(\vec{x}, y, z)$ - λ-определими
Да се покаже, че h е λ-определима

$$h(\vec{x}, 0) := f(\vec{x})$$
$$h(\vec{x}, y+1) := g(\vec{x}, y, h(\vec{x}, y))$$

Док-во:
$f(\vec{x})$ е λ-определима $\Rightarrow M c_{x_1} \dots c_{x_n} \overset{\beta}{\equiv} c_{f(\vec{x})}$

Дефинираме комбинатор $M' = \lambda_{x_1, x_2, \dots, x_{n+1}} M c_{x_1} \dots c_{x_n}$

$M'(\vec{x}, 0) = (\lambda_{x_1, \dots, x_n, x_{n+1}} M c_{x_1} \dots c_{x_n})(\vec{x}, 0) \xrightarrow{\beta}$

$$M c_{x_1} \dots c_{x_n} \overset{\beta}{\equiv} c_{f(\vec{x})}$$

Нека $h(\vec{x}, y)$ е λ-определима, т.е. $\exists$ комбинатор M.
$M c_{x_1} c_{x_2} \dots c_{x_n} c_y \overset{\beta}{\equiv} c_{h(\vec{x}, y)} \equiv c_{g(\vec{x}, y, h(\vec{x}, y-1))}$

Ще докажем, че h е λ-определима за $y+1$

$$h(\vec{x}, y+1) = g(\vec{x}, y, h(\vec{x}, y))$$

от g - λ-определима $\Rightarrow \exists$ комбинатор N:
$N c_{x_1} c_{x_2} \dots c_{x_n} c_y c_{h(\vec{x}, y)} \overset{\beta}{\equiv} c_{g(\vec{x}, y, h(\vec{x}, y))} \equiv c_{h(\vec{x}, y+1)}$

Дефинираме комбинатор P:
$P = \lambda_{x_1, x_2, \dots, x_n, (y+1)} N c_{x_1} c_{x_2} \dots c_{x_n} (c_p c_{y+1}) c_{h(\vec{x}, y)} =$

$c_p c_n$ е дефинирано на лекции ($c_p c_n \overset{\beta}{\equiv} c_{max(n-1, 0)}$), т.е. c_p дава $n-1$ или предишната стойност на n (при $y=0$, влизаме в първия случай от дефиницията на h и не се стига до прилагане на c_p върху c_y в този случай)

от ИХ
$= \lambda_{x_1 x_2 \dots x_n, y} N c_{x_1} c_{x_2} \dots c_{x_n} (c_p c_{y+1})(M c_{x_1} c_{x_2} \dots c_{x_n} (c_p c_{y+1}))$

$$P c_{x_1} \dots c_{x_n} c_{y+1} \overset{\beta}{=} N c_{x_1} \dots c_{x_n} \underbrace{(c_p c_{y+1})}_{\overset{\shortparallel}{c_y}} (M c_{x_1} \dots c_{x_n} \underbrace{(c_p c_{y+1})}_{\overset{\shortparallel}{c_y}}) =$$

$$= N c_{x_1} \dots c_{x_n} c_y (M c_{x_1} \dots c_{x_n} c_y) \overset{ux}{=}$$

$$= N c_{x_1} \dots c_{x_n} c_y c_{h(\vec{x}, y)} =$$

$$= c_{g(\vec{x}, y, h(\vec{x}, y))} =$$

$$= c_{h(\vec{x}, y+1)}$$

$\Rightarrow h$ е λ-определима

2.35 $\xrightarrow{\beta} \subseteq \xrightarrow{1} \subseteq \xrightarrow{\beta}\!\!\!\!\to$

1) $\xrightarrow{\beta} \subseteq \xrightarrow{1}$

От дефиницията на $\xrightarrow{\beta}$ знаем, че е λ-затварянето на β

λ-затваряне на R:

1) $(M,N) \in R \Rightarrow (M,N) \in R^\lambda$

2) $(M,N) \in R^\lambda$, $P \in \Lambda$ и $x \in V$:

1) $(MP, NP) \in R^\lambda$

2) $(PM, PN) \in R^\lambda$

3) $(\lambda_x M, \lambda_x N) \in R^\lambda$

$\beta: \{((\lambda_x M)N, M[x \to N]) \mid M,N \in \Lambda, x \in V\}$

Индукция по дефиницията на $\xrightarrow{\beta}$:

1) $((\lambda_x M)N, M[x \to N]) \in \beta \Rightarrow ((\lambda_x M)N, M[x \to N]) \in \xrightarrow{\beta}$

$\Rightarrow (\lambda_x M)N \xrightarrow{\beta} M[x \to N]$

в $\xrightarrow{1}$ имаме: $M \xrightarrow{1} M$ за $\forall M \in \Lambda$

ако $M \xrightarrow{1} M'$ и $N \xrightarrow{1} N'$, то $(\lambda_x M)N \xrightarrow{1} M'[x \to N']$

Тогава знаем, че: $M \xrightarrow{1} M$ и $N \to N$

$\Rightarrow (\lambda_x M)N \xrightarrow{1} M[x \to N]$

2.1) $(M,N) \in \xrightarrow{\beta}$, то $(MP, NP) \in \xrightarrow{\beta}$ $(MP \xrightarrow{\beta} NP)$

от дефиницията на $\xrightarrow{1}$: $\left.\begin{matrix} M \xrightarrow{1} M' \\ N \xrightarrow{1} N' \end{matrix}\right\} \Rightarrow MN \xrightarrow{1} M'N'$

знаем, че щом $M \xrightarrow{\beta} N$, то $M \xrightarrow{1} N$

и от дефиницията на $\xrightarrow{1}$: $P \xrightarrow{1} P$

$\Rightarrow MP \xrightarrow{1} NP$

2.2) аналогично на 2.1

2.3) $M \xrightarrow{\beta} N$ и от дефиницията на λ затваряне $\lambda_x M \xrightarrow{\beta} \lambda_x N$.

от дефиницията на $\xrightarrow{1}$ ако $M \xrightarrow{1} M'$, то $\lambda_x M \xrightarrow{1} \lambda_x M'$!

От ИХ знаем, че щом $M \xrightarrow{\beta} N$, то $M \xrightarrow{1} N$.

$\Rightarrow \lambda_x M \xrightarrow{1} \lambda_x N$

$\Rightarrow \xrightarrow{\beta} \subseteq \xrightarrow{1}$

2) $\xrightarrow{1} \subseteq \xrightarrow{\beta}\!\!\!\rightarrow$

$\xrightarrow{\beta}\!\!\!\rightarrow = (\xrightarrow{\beta})^{R,T}$ - рефлексивното и транзитивното затваряне на $\xrightarrow{\beta}$

Индукция по дефиницията на $\xrightarrow{1}$:

1) $M \xrightarrow{1} M$

от това, че многостъпковата β редукция е рефлексивното затваряне на $\beta \Rightarrow M \xrightarrow{\beta}\!\!\!\rightarrow M$

2) $M \xrightarrow{1} M'$, то $\lambda_x M \xrightarrow{1} \lambda_x M'$

от ИХ - ако $M \xrightarrow{1} M'$, то $M \xrightarrow{\beta}\!\!\!\rightarrow M'$.

От $\xrightarrow{\beta}\!\!\!\rightarrow$ - λ затваряне на $\beta \Rightarrow$

ако $(M,N) \in \xrightarrow{\beta}\!\!\!\rightarrow$, то $(\lambda_x M, \lambda_x N) \in \xrightarrow{\beta}\!\!\!\rightarrow$

$\Rightarrow M \xrightarrow{\beta}\!\!\!\rightarrow M' \Rightarrow \lambda_x M \xrightarrow{\beta}\!\!\!\rightarrow \lambda_x M'$

3) $M \xrightarrow{1} M'$ и $N \xrightarrow{1} N'$, то $MN \xrightarrow{1} M'N'$

от ИХ: $M \xrightarrow{\beta}\!\!\!\rightarrow M'$ и $N \xrightarrow{\beta}\!\!\!\rightarrow N'$

от това, че $\xrightarrow{\beta}\!\!>$ е λ затваряне на β имаме, че

$M \xrightarrow{\beta}\!\!> M' \Rightarrow MN \xrightarrow{\beta}\!\!> M'N$

$N \xrightarrow{\beta}\!\!> N' \Rightarrow M'N \xrightarrow{\beta}\!\!> M'N'$

$MN \xrightarrow{\beta}\!\!> M'N \xrightarrow{\beta}\!\!> M'N'$

от $\xrightarrow{\beta}\!\!>$ - транзитивно затваряне на β

$\Rightarrow MN \xrightarrow{\beta}\!\!> M'N'$

4) $M \xrightarrow{1} M'$, $N \xrightarrow{1} N'$, то $(\lambda_x M)N \xrightarrow{1} M'[x \to N']$

от ИХ $M \xrightarrow{\beta}\!\!> M'$ и $N \xrightarrow{\beta}\!\!> N'$

от $\xrightarrow{\beta}\!\!>$ - λ затваряне на β имаме, че

$M \xrightarrow{\beta}\!\!> M' \Rightarrow \lambda_x M \xrightarrow{\beta}\!\!> \lambda_x M'$

$\lambda_x M \xrightarrow{\beta}\!\!> \lambda_x M'$ и $N \xrightarrow{\beta}\!\!> N' \overset{\text{от } 3)}{\Rightarrow} (\lambda_x M)N \xrightarrow{\beta}\!\!> (\lambda_x M')N'$

от дефиницията на $\xrightarrow{\beta}$: $(\lambda_x M')N' \xrightarrow{\beta} M'[x \to N']$

$\Rightarrow$ от дефиницията на $\xrightarrow{\beta}\!\!>$ $(\lambda_x M')N' \xrightarrow{\beta}\!\!> M'[x \to N']$

$(\lambda_x M)N \xrightarrow{\beta}\!\!> (\lambda_x M')N' \xrightarrow{\beta}\!\!> M'[x \to N']$

от $\xrightarrow{\beta}\!\!>$ - транзитивно затваряне на $\xrightarrow{\beta}$

$\Rightarrow (\lambda_x M)N \xrightarrow{\beta}\!\!> M'[x \to N']$

$\Rightarrow \xrightarrow{1} \subseteq \xrightarrow{\beta}\!\!> \quad \Rightarrow \xrightarrow{\beta} \subseteq \xrightarrow{1} \subseteq \xrightarrow{\beta}\!\!>$

3.3 ако $\Gamma \vdash M : \tau$ и $M \twoheadrightarrow_\beta N$, то $\Gamma \vdash N : \tau$

Док-во: индукция по дефиницията на $\twoheadrightarrow_\beta$

$\beta : \{((\lambda_x M)N, M[x \to N]) \mid M, N \in \Lambda, x \in V\}$

$\twoheadrightarrow_\beta$ - λ-затварянето на β

λ-затваряне на R:

1) $(M,N) \in R \Rightarrow (M,N) \in R^\lambda$

2) $(M,N) \in R^\lambda$, $P \in \Lambda$ и $x \in V$:

1) $(MP, NP) \in R^\lambda$

2) $(PM, PN) \in R^\lambda$

3) $(\lambda_x M, \lambda_x N) \in R^\lambda$

1) $M \equiv (\lambda_x R)T$, $N \equiv R[x \to T]$

$M \twoheadrightarrow_\beta N$, защото $(M,N) \in \beta$

$\Gamma \vdash M : \tau$

$\Gamma \vdash (\lambda_x R)T : \tau$

от лемата за обръщането знаем, че ~~$\exists \rho, \sigma \in T$: $\tau = \rho \Rightarrow \sigma$ и $\Gamma, x : \rho$~~ $\exists \rho \in T$ $\Gamma \vdash \lambda_x R : \rho \Rightarrow \tau$ и $\Gamma \vdash T : \rho$

от лемата за обръщането знаем, че $\Gamma, x : \rho \vdash R : \tau$

$\Gamma \vdash T : \rho$ и можем да приложим задача 3.2

$\Gamma, x : \rho \vdash R : \tau$

и да получим $\Gamma \vdash R[x \to T] : \tau$, т.е. $\Gamma \vdash N : \tau$

2.1) $M \equiv PQ$, $N \equiv P'Q$

знаем, че $P \xrightarrow{\beta} P'$ и от ИХ ако $\Gamma \vdash P : \alpha$, то $\Gamma \vdash P' : \alpha$

$\Gamma \vdash M : \tau$

$\Gamma \vdash PQ : \tau$

от лемата за обръщането $\Rightarrow \Gamma \vdash P : \rho \Rightarrow \tau$ $\quad \Gamma \vdash Q : \rho$

от ИХ $\Gamma \vdash P' : \rho \Rightarrow \tau$ $\quad \Gamma \vdash Q : \rho$

и по дефиниция $\Gamma \vdash P'Q : \tau$, т.е.

$\Gamma \vdash N : \tau$

2.2) $M \equiv PQ$, $N \equiv PQ'$

знаем, че $Q \xrightarrow{\beta} Q'$

$\Gamma \vdash M : \tau$

$\Gamma \vdash PQ : \tau$

от лемата за обръщането $\Rightarrow \Gamma \vdash P : \rho \Rightarrow \tau$, $\Gamma \vdash Q : \rho$

от ИХ $\Gamma \vdash Q' : \rho$

и по дефиниция $\Gamma \vdash PQ' : \tau$, т.е.

$\Gamma \vdash N : \tau$

2.3) $M \equiv \lambda_x P$, $N \equiv \lambda_x T$

знаем, че $P \xrightarrow{\beta} T$

$\Gamma \vdash M : \tau$

$\Gamma \vdash \lambda_x P : \tau$

от лемата за обръщането $\exists \rho, \sigma \in T : \tau \equiv \rho \Rightarrow \sigma$ и

$\Gamma, x : \rho \vdash P : \sigma$

от ИХ $\Gamma, x : \rho \vdash Q : \sigma$

и по дефиниция $\Gamma \vdash \lambda_x Q : \rho \Rightarrow \sigma \equiv \tau$, т.е.

$\Gamma \vdash \lambda_x Q : \tau$

$\Rightarrow$ ако $\Gamma \vdash M : \tau$ и $M \xrightarrow{\beta} N$, то $\Gamma \vdash N : \tau$

ако $\Gamma \vdash M : \tau$ и $M \overset{\eta}{\twoheadrightarrow} N$, то $\Gamma \vdash N : \tau$

Док-во: индукция по дефиницията на $\overset{\eta}{\twoheadrightarrow}$

$$\eta = \{(\lambda_x M x, M) \mid M \in \Lambda, x \notin FV(M)\}$$

$$\overset{\eta}{\twoheadrightarrow} ::= \eta^{\lambda}$$

1) $M \equiv \lambda_x P x$, $N \equiv P$

$\Gamma \vdash M : \tau$
$\Gamma \vdash \lambda_x P x : \tau$
от лемата за обръщането $\tau \equiv \rho \Rightarrow \sigma$ и
$\Gamma, x : \rho \vdash M x : \sigma$
от лемата за обръщането $\exists \varepsilon \in T$: $\Gamma, x : \rho \vdash M : \varepsilon \Rightarrow \sigma$ и
$\Gamma, x : \rho \vdash x : \varepsilon$
но знаем, че типът на x трябва да е еднозначен $\Rightarrow \rho \equiv \varepsilon$

$\Rightarrow \Gamma, x : \rho \vdash M : \rho \Rightarrow \sigma \equiv \tau$

$\Rightarrow \Gamma, x : \rho \vdash M : \tau$, но $x \notin FV(M)$

$\Rightarrow x : \rho \notin (\Gamma, x : \rho) \restriction FV(M)$

и от минималността на типизирането знаем че
$(\Gamma, x : \rho) \restriction FV(M) \vdash M : \tau$ и от $x : \rho \notin (\Gamma, x : \rho) \restriction FV(M)$

$\Rightarrow \Gamma \restriction FV(M) \vdash M : \tau$
$\Gamma \restriction FV(M) \subseteq \Gamma$ и от монотонността на типизирането $\Rightarrow \Gamma \vdash M : \tau$

2.1, 2.2 и 2.3 - както при β, но с $\overset{\eta}{\twoheadrightarrow}$
$\Rightarrow$ ако $\Gamma \vdash M : \tau$ и $M \overset{\eta}{\twoheadrightarrow} N$, то $\Gamma \vdash N : \tau$

3.6 $\geq$ е частична преднаредба, т.е рефлексивна и транзитивна

Рефлексивност: Дефинираме ξ от дефиницията на типова субституция по следния начин:

- $\alpha\xi := \alpha$
- $(\rho \Rightarrow \sigma)\xi := \rho \Rightarrow \sigma$

При такава субституция $\tau\xi \equiv \tau$, $\forall \tau$

$\Rightarrow \tau \geq \tau$

Транзитивност: нека $\tau\xi \equiv \sigma$ и $\sigma\eta \equiv \gamma$

Разглеждаме субституцията $\xi\eta$, дефинирана по следния начин:

- $\alpha(\xi\eta) := (\alpha\xi)\eta$
- $(\rho \Rightarrow \sigma)(\xi\eta) := \rho(\xi\eta) \Rightarrow \sigma(\xi\eta)$

Нека τ е базов тип

$\Rightarrow \tau(\xi\eta) = (\tau\xi)\eta \equiv \sigma\eta \equiv \gamma$

$\Rightarrow \tau(\xi\eta) = \gamma$

Нека τ е функция $\alpha \Rightarrow \beta$. Тогава от дефиницията на типовата субституция и σ е функция, например $\delta \Rightarrow \varepsilon$, където $\alpha, \beta, \delta, \varepsilon$ - базови типове

$\Rightarrow \tau(\xi\eta) = (\alpha \Rightarrow \beta)(\xi\eta) =$

$= (\alpha(\xi\eta) \Rightarrow \beta(\xi\eta)) \equiv$

$\equiv ((\alpha\xi)\eta \Rightarrow (\beta\xi)\eta) \equiv$

$\equiv (\delta\eta \Rightarrow \varepsilon\eta) = (\delta \Rightarrow \varepsilon)\eta = \sigma\eta = \gamma$

от $\tau\xi \equiv \sigma$ и деф. на субституция

$\Rightarrow \alpha\xi \equiv \delta$

$\beta\xi \equiv \varepsilon$

Ако $\alpha, \beta, \delta, \varepsilon$ не са базови типове, продължаваме рекурсивно с т-2 от дефиницията до достигане на базов тип и правим аналогични разсъждения

$\Rightarrow \geq$ е частична преднаредба

$\geq$ не е антисиметрична: допускаме, че $\geq$ е антисиметрична релация. Тогава, ако $x \geq y$ и $y \geq x$, то $x \equiv y$

Нека разгледаме $\alpha \Rightarrow \beta$ и $\gamma \Rightarrow \delta$. Тогава $\alpha \Rightarrow \beta \geq \gamma \Rightarrow \delta$ и $\gamma \Rightarrow \delta \geq \alpha \Rightarrow \beta$.

$\Rightarrow \alpha \Rightarrow \beta \equiv \gamma \Rightarrow \delta$ по определение за антисиметрична релация, но е възможно да имаме $\alpha \neq \gamma$ и $\beta \neq \delta \Rightarrow$ получаваме противоречие

$\Rightarrow \geq$ не е антисиметрична релация