Περιφερειακή Διεύθυνση

Πρωτοβάθμιας και Δευτεροβάθμιας Εκπαίδευσης Κρήτης

Επιμορφωτικό Πρόγραμμα «Μαθηματικές διαδρομές μετάβασης από το Δημοτικό στο Γυμνάσιο»

Οδηγός Επιμορφωτή – Εγχειρίδιο Χρήσης

Συνεργασία Συμβούλων Εκπαίδευσης της Κρήτης με την ομάδα MathTASK του University of East Anglia

Ηράκλειο, 2025

Δημιουργοί
Μαρία Καδιανάκη
Δημήτριος Καλυκάκης
Ιωάννης Κανέλλος
Νικόλαος Καρατάσος
Ειρήνη Μπιζά
Έλενα Ναρδή
Ειρήνη Περυσινάκη

με συμμετοχή και στήριξη από την ομάδα MathTASK του University of East Anglia

Έκδοση: Νοέμβριος 2025

Πόρος: https://github.com/iriniper/mathimatikes-diadromes-metabasis-apo-to-dimotiko-sto-gymnasio

Περιεχόμενα

Εισαγωγικό σημείωμα

Στο παρόν εισαγωγικό σημείωμα θα περιγράψουμε σύντομα τις αρχές του επιμορφωτικού προγράμματος, το πλαίσιο συνεργασίας με την ομάδα MathTASK του University of East Anglia (UEA) στο Ηνωμένο Βασίλειο και μια σύντομη αναφορά στο πώς μπορεί να αξιοποιηθεί αυτό το εκπαιδευτικό υλικό.

Οι αρχές του επιμορφωτικού προγράμματος

Ο κύριος στόχος του επιμορφωτικού προγράμματος είναι να βρεθούν στο «ίδιο τραπέζι» εκπαιδευτικοί και από τις δύο βαθμίδες (Δημοτικό και Γυμνάσιο) που διδάσκουν Μαθηματικά και να συζητήσουν για συγκεκριμένα θέματα της διδακτικής των Μαθηματικών. Οι διαφορετικές οπτικές που θα εκφραστούν, πιστεύουμε ότι θα διευρύνουν την αντίληψη των εκπαιδευτικών για το πώς μαθαίνουν οι μαθητές τους τα Μαθηματικά, κυρίως μέσα από τις αδυναμίες και τα λάθη τους. Καλλιεργείται έτσι μια ομαλή συνέχεια στη διδακτική προσέγγιση των Μαθηματικών από το Δημοτικό στο Γυμνάσιο. Το επιμορφωτικό πρόγραμμα στηρίζεται στις αρχές του Νέου Προγράμματος Σπουδών για τα Μαθηματικά (2022) και σε βιβλιογραφικά δεδομένα από την έρευνα στη διδακτική των μαθηματικών.

Κρίναμε ότι το πιο πρόσφορο έδαφος για να δομηθεί μια εστιασμένη συζήτηση για θέματα διδακτικής των μαθηματικών είναι το εργαλείο «mathtask» που αναπτύχθηκε από την ομάδα MathTASK του University of East Anglia. Τα mathtasks παρουσιάζουν ένα κρίσιμο συμβάν κατά την διδασκαλία των μαθηματικών στο περιβάλλον μιας τάξης και θέτουν ερωτήματα που προκαλούν τη συζήτηση για την αποτίμηση και τη διαχείριση του συμβάντος. Επιθυμώντας να διεγείρουμε συζητήσεις από πολλά θεματικά πεδία των Μαθηματικών (αριθμοί, άλγεβρα, γεωμετρία, στερεομετρία), δημιουργήσαμε mathtasks που αναδεικνύουν κάποια από τα διδακτικά προβλήματα σε αυτά τα πεδία.

Επί πλέον, κρίναμε ότι είναι ευκαιρία να αναπτυχθεί διάλογος και για άλλα κοινά θέματα όπως για το πώς βαθμολογούμε ένα γραπτό μαθητή ή για το πώς εργάζονται οι μαθητές κάθε βαθμίδας όταν τους ανατίθεται κάποιο έργο. Γι’ αυτό και προσθέσαμε αντίστοιχες προαιρετικές εργασίες σε αυτά τα πεδία.

Η αξιοποίηση ψηφιακών εργαλείων και χειραπτικών μέσων στη διδακτική διαδικασία, ήταν επίσης ένα από τα ζητούμενα του επιμορφωτικού προγράμματος.

Τέλος, διακρίναμε την ανάγκη των εκπαιδευτικών να διευρυνθεί το συγκεκριμένο πρόγραμμα με δραστηριότητες που θα επέτρεπαν μεγαλύτερο βαθμό ελευθερίας, τις οποίες θα επέλεγαν και θα σχεδίαζαν οι ίδιοι (είτε ατομικά, είτε σε ομάδες). Πρόκειται για τη λεγόμενη «Β’ φάση του προγράμματος», η υλοποίηση της οποία ξεκίνησε το σχ. έτος 2024-25 και παρουσιάζεται στο τέλος αυτού του εγχειριδίου.

Ο προγραμματισμός μας για το σχ. έτος 2025-26 είναι να υλοποιηθούν οι δύο φάσεις του προγράμματος κατά το ίδιο σχολικό έτος, ως ενιαίο επιμορφωτικό πρόγραμμα, ως εξής: το πρώτο τετράμηνο να υλοποιηθεί η Α΄ φάση και το δεύτερο τετράμηνο να υλοποιηθεί η Β΄ φάση, ως συνέχεια της Α΄ φάσης.

Η συνεργασία με την ομάδα MathTASK του University of East Anglia (UEA)

Η επαφή μας με την ομάδα MathTASK ξεκίνησε από τον καιρό του COVID-19 και τις εξ αποστάσεως επιμορφώσεις. Εκείνη την περίοδο, λόγω της μη δυνατότητας της άμεσης επαφής, δημιουργήθηκαν κάποιες επιμορφωτικές συναντήσεις για τους εκπαιδευτικούς. Διαπιστώσαμε τότε ότι το εργαλείο mathtask ήταν ιδανικό για να αναπτυχθούν διάλογοι σύντομοι, αλλά με νόημα, μεταξύ των εκπαιδευτικών.

Η ιδέα κλιμακώθηκε με τη διοργάνωση μιας δια ζώσης διημερίδας στο Ηράκλειο στις 16-17 Μαΐου 2023 με τίτλο «*Επίλυση μαθηματικού προβλήματος με σύγχρονα (και όχι μόνο) εργαλεία – μετάβαση από βαθμίδα σε βαθμίδα (Δημοτικό – Γυμνάσιο – Λύκειο)»*, με κύρια εισηγήτρια την Ειρήνη Μπιζά. Ως ανάγκη των επιμορφούμενων τότε, διαφάνηκε η επέκταση της επιμορφωτικής δράσης και την επόμενη σχολική χρονιά. Έτσι, σχεδιάσαμε μια ετήσια πιλοτική επιμόρφωση-εργαστήριο, συνολικής διάρκειας 50 ωρών για την μετάβαση στα Μαθηματικά από το Δημοτικό στο Γυμνάσιο, κατά το σχολικό έτος 2023-24.

Παρακολουθώντας τη διαχείριση των mathtasks από την καθηγήτρια Ειρήνη Μπιζά στα εργαστήρια της δια ζώσης διημερίδας, κατανοήσαμε πόσο σημαντικό είναι να αφήνουμε τις ομάδες να εκφράζονται και ο ρόλος μας να περιορίζεται στον συντονισμό της συζήτησης και στη σύνθεση των απαντήσεων, ώστε να αναδειχθούν τόσο τα σημεία όπου οι ομάδες συμφωνούν, όσο και αυτά που διαφωνούν καθώς και σημεία αοριστίας/αμφισημίας, προβάλλοντας συγχρόνως και τη διαφορετική οπτική τους.

Κατά την εφαρμογή του προγράμματος, η ομάδα συντονισμού είχαμε τακτική επικοινωνία με την ομάδα του UEA (Ειρήνη Μπιζά και Έλενα Νάρδη), όπου παρουσιάζαμε το επιμορφωτικό έργο μας και λαμβάναμε την πολύ χρήσιμη ανατροφοδότηση εκ μέρους τους ενώ ταυτόχρονα η συζήτηση επηρέαζε σημαντικά και τον μελλοντικό σχεδιασμό μας. Επίσης, σε μία από τις συναντήσεις του προγράμματος (είτε στην αρχή είτε στο τέλος) η ομάδα του UEA συμμετείχε με φυσική παρουσία για να αλληλεπιδράσει με τους επιμορφούμενους και να αποκτήσει μια προσωπική άποψη για την εξέλιξη του προγράμματος.

Αξιοποιώντας το παρόν εκπαιδευτικό υλικό

Το επιμορφωτικό υλικό έχει κατανεμηθεί σε 5 τρίωρες συναντήσεις. Οι τέσσερις πρώτες εστιάζουν σε κάποια θεματική των μαθηματικών, ενώ η πέμπτη περιέχει δραστηριότητες ολοκλήρωσης του προγράμματος (δημιουργία ενός mathtask από τις ομάδες και αξιολόγηση του προγράμματος). Το υλικό που αφορά στα ψηφιακά εργαλεία και στα χειραπτικά μέσα, το οποίο εμφανίζεται στην 5^{η} συνάντηση, μπορεί να κατανεμηθεί στις τέσσερις πρώτες συναντήσεις (κάτι που κατά περίσταση επιλέξαμε να κάνουμε).

Για διευκόλυνση, πριν από κάθε συνάντηση έχουμε προσθέσει έναν πίνακα με προτεινόμενες δραστηριότητες και τους αντίστοιχους χρόνους (συνολικά 135΄).

Το υλικό μπορεί να τροποποιηθεί κατά την κρίση της ομάδας Συμβούλων Εκπαίδευσης που θα εφαρμόσει το πρόγραμμα - όπως άλλωστε αναφέρεται και στην άδεια διάθεσής του - αλλά θα πρέπει να διατηρηθεί η φιλοσοφία του προγράμματος.

Τι είναι και τι επιδιώκει το MathTASK;

Το MathTASK είναι ένα συνεργατικό ερευνητικό και αναπτυξιακό πρόγραμμα στο Ηνωμένο Βασίλειο, στη Βραζιλία και στην Ελλάδα. Με αντικείμενο τις παιδαγωγικές και μαθηματικές συζητήσεις και το μετασχηματισμό των φιλοδοξιών και επιδιώξεων των δασκάλων και των καθηγητών που διδάσκουν Μαθηματικά στην πρωτοβάθμια και στη δευτεροβάθμια εκπαίδευση σε παιδαγωγικές πρακτικές.

Το MathTASK έχει 4 πεδία δραστηριοτήτων:

(1) Το *μαθηματικό σκέπτεσθαι* το οποίο εστιάζει στις παιδαγωγικές και διδακτικές πρακτικές σε σχέση με τη διδασκαλία και την μάθηση ενός συγκεκριμένου μαθηματικού αντικείμενου.

(2) *Διαχείριση τάξης* που μελετά τις αλληλεπιδράσεις της διαχείρισης της τάξης με τη μάθηση στα Μαθηματικά.

(3) *CAPTeaM* (Challenging Ableist Perspectives on the Teaching of Mathematics) ένα έργο χρηματοδοτούμενο από τη Βρετανική Ακαδημία το οποίο εστιάζει στη συμπερίληψη στην τάξη των μαθηματικών στοχεύοντας στον κλονισμό των «ικανοτιστικών» (ableist) απόψεων στην μαθηματική παιδεία, ειδικά σχετικά με άτομα με αναπηρία.

(4) Ο ρόλος της ψηφιακής τεχνολογίας και άλλων πηγών στη διδασκαλία και τη μάθηση των Μαθηματικών.

Καθώς το πρόγραμμα αναπτύσσεται, νέα πεδία γεννώνται από τις εμπειρίες και τις ιδέες των εκπαιδευτικών που λαμβάνουν μέρος. Η έρευνα του MathTASK ξεκινά με την παραδοχή ότι ο μαθηματικός και παιδαγωγικός λόγος των εκπαιδευτικών διερευνάται και αναπτύσσεται πληρέστερα στο πλαίσιο συγκεκριμένων καταστάσεων. Για το σκοπό αυτό σχεδιάζονται δραστηριότητες βασισμένες σε συγκεκριμένες διδακτικές καταστάσεις και στη συνέχεια χρησιμοποιούνται για ερευνητικούς σκοπούς ή στην εκπαίδευση/επιμόρφωση εκπαιδευτικών (Μπιζά & Ναρδή, 2019[1]; Biza, Nardi & Zachariades, 2007[2]).

Το υλικό που ακολουθεί σχεδιάστηκε για τα εργαστήρια του **MathTASK** που έλαβαν χώρα τη χρονιά 2023-24 και χαρακτηρίζονται από το ότι η θεματολογία τους περιστρέφεται γύρω από έναν κεντρικό άξονα, τη μετάβαση από την πρωτοβάθμια στην δευτεροβάθμια εκπαίδευση. Αποτελεί μάλιστα μια ιδιαίτερη κατάκτηση **MathTASK** στην Κρήτη και μπορεί να χρησιμοποιηθεί και να εμπλουτιστεί από αντίστοιχες δραστηριότητες ανά την Ελλάδα. Ήδη γίνεται σοβαρή προσπάθεια να υπάρξει μια τέτοια απόπειρα σε περιφέρειες τις Αττικής. Προσδοκούμε πως το υλικό που κρατάτε στα χέρια σας σε αυτήν την περίπτωση θα βοηθήσει αποφασιστικά.

[1] Η συνολική βιβλιογραφία του MathTASK είναι στη σελίδα του προγράμματος, https://www.uea.ac.uk/groups-and-centres/a-z/mathtask/publications. Για ενδεικτική βιβλιογραφία του προγράμματος MathTASK δείτε τη βιβλιογραφική λίστα στο τέλος του Επιμορφωτικού Οδηγού.

[2] Στη βιβλιογραφική λίστα, μπορείτε να βρείτε περιλήψεις στα ελληνικά σε επιλεγμένες δημοσιεύσεις

Σχετικά με το επιμορφωτικό πρόγραμμα

Το επιμορφωτικό πρόγραμμα «Μαθηματικές διαδρομές μετάβασης από το Δημοτικό στο Γυμνάσιο» είναι εκπαιδευτικό έργο που απευθύνεται κυρίως σε εκπαιδευτικούς πρωτοβάθμιας και δευτεροβάθμιας εκπαίδευσης που διδάσκουν Μαθηματικά στην ΣΤ΄ Δημοτικού και Α΄ Γυμνασίου, αντίστοιχα, αλλά μπορεί να ενδιαφέρει ευρύτερα και άλλους εκπαιδευτικούς που ενασχολούνται με θέματα διδακτικής των Μαθηματικών. Έχει ως αντικείμενο τη μετάβαση από το Δημοτικό στο Γυμνάσιο στο πλαίσιο του μαθήματος των Μαθηματικών. Θέματα μετάβασης από το Δημοτικό στο Γυμνάσιο έχουν τεθεί στη βιβλιογραφία επανειλημμένα (π.χ. Kaur, McLoughlin & Grimes, 20222; Ναρδή, Μπαμπίλη, Μπούφη, Στουραΐτης & Τριανταφυλλίδης, 2017). Η έμφαση σε αυτά τα θέματα είναι συχνά στο μαθηματικό περιεχόμενο (π.χ. από την Αριθμητική στην Άλγεβρα) και στις μαθηματικές πρακτικές (π.χ. από τις δοκιμές και την παραγωγική επιχειρηματολογία στην επαγωγική επιχειρηματολογία και την απόδειξη). Επίσης, η έρευνα αναδεικνύει θέματα σχετικά με την αλλαγή του μαθησιακού περιβάλλοντος καθώς και θέματα αντιλήψεων των εκπαιδευτικών (Κατσομήτρος & Τάτσης, 2022; Kaur et al., 2022· Sdrolias & Triandafillidis, 2008). Η σύγχρονη εκπαιδευτική πολιτική επιδιώκει την εξομάλυνση του περάσματος από τη μία βαθμίδα στην άλλη (Psycharis et al., 2020). Ειδικότερα στην περίπτωση των μαθηματικών, έμφαση δίνεται στη σύνδεση των μαθηματικών εννοιών (π.χ. σύνδεση της Αριθμητικής με την Άλγεβρα). Συχνά οι επιμορφωτικές δράσεις για εκπαιδευτικούς σε θέματα μετάβασης αφορούν μεμονωμένα σε δασκάλους, οι οποίοι προετοιμάζουν τους μαθητές για το Γυμνάσιο, ή μεμονωμένα σε καθηγητές, οι οποίοι υποδέχονται τους μαθητές από το Δημοτικό. Δράσεις που απευθύνονται σε δασκάλους και καθηγητές μαζί είναι αξιοσημείωτες για τα θετικά τους αποτελέσματα (Psycharis et al., 2020). Μία τέτοια δράση, η οποία απευθύνεται σε εκπαιδευτικούς και των δύο βαθμίδων, είναι αυτή του επιχειρείται σε αυτό το επιμορφωτικό πρόγραμμα (δες επίσης Μπιζά κ.ά., 2024). Θέματα μετάβασης μεταξύ βαθμίδων καθώς και θέματα σύνδεσης μαθηματικών εννοιών και πρακτικών είναι στο κέντρο των προτεραιοτήτων του Νέου Προγράμματος Σπουδών για τα Μαθηματικά γενικά και ειδικά για το Δημοτικό και το Γυμνάσιο (Πόταρη, κ.ά., 2022; Σακονίδης κ.ά., 2022). Ο σχεδιασμός του υλικού και η εφαρμογή του κατά την Α΄ φάση του επιμορφωτικού προγράμματος βασίζεται στην παραδοχή ότι ο μαθηματικός και παιδαγωγικός λόγος των εκπαιδευτικών διερευνάται και αναπτύσσεται πληρέστερα στο πλαίσιο συγκεκριμένων διδακτικών καταστάσεων (προσέγγιση MathTASK), όπως προαναφέραμε (Μπιζά & Ναρδή, 2019; Biza, Nardi & Zachariades, 2007).

Το πρόγραμμα είναι σχεδιασμένο σύμφωνα με τις αρχές της εκπαίδευσης ενηλίκων και έχει βιωματικό – εργαστηριακό χαρακτήρα. Οι εκπαιδευτικοί που συμμετέχουν στο έργο έχουν την ευκαιρία να συζητήσουν διδακτικές καταστάσεις σχετικές με το μαθηματικό περιεχόμενο του καθημερινού μαθήματος, να σχεδιάσουν δραστηριότητες για την τάξη τους και να αξιολογήσουν μαζί με συναδέλφους απαντήσεις μαθητών/τριών. Το πρόγραμμα αποσκοπεί στη συνεργασία και στην αλληλεπίδραση ανάμεσα στους εκπαιδευτικούς πρωτοβάθμιας και δευτεροβάθμιας εκπαίδευσης σε επίπεδο μαθηματικού περιεχομένου και διδακτικών πρακτικών. Κύριος στόχος είναι η ομαλή μετάβαση των μαθητών από το Δημοτικό στο Γυμνάσιο.

Οι μαθηματικές θεματικές που περιλαμβάνει το πρόγραμμα είναι οι εξής:

- ✓ ιδιότητες των αριθμών και διαχείριση πληροφορίας
- ✓ κλασματικοί αριθμοί και εφαρμογές
- ✓ μετρήσεις και υπολογισμοί (μήκος, εμβαδόν, όγκος)
- ✓ μετάβαση από την αριθμητική στην άλγεβρα

Κάθε θεματική έχει οργανωθεί στη βάση των παρακάτω αξόνων:

- ➢ επιχειρηματολογία
- ➢ ανάπτυξη κριτικής σκέψης στα Μαθηματικά
- ➢ επίλυση προβλήματος
- ➢ ερωτήσεις σύνθεσης και αξιολόγησης
- ➢ χειραπτικά υλικά και ψηφιακά εργαλεία

Σε κάθε συνάντηση, οι εκπαιδευτικοί καλούνται να εμπλακούν με δραστηριότητες mathtasks, με ομαδικές συζητήσεις και διαμοιρασμό με τις άλλες ομάδες. Σε μία ενδεικτική δομή οι κεπαιδευτικοί καλούνται:

- Σε ομάδες, συζητήστε το συμβάν και απαντήστε τις ερωτήσεις που ακολουθούν.
- Σε κάθε ομάδα, ορίστε κάποιον/α που θα κρατά σημειώσεις και κάποιον/α που θα παρουσιάσει τη συζήτηση σε όλους/ες στην ολομέλεια – μπορεί και να είναι το ίδιο άτομο.
- Μπορείτε να βρείτε το συμβάν και τις ερωτήσεις στο QR code στα δεξιά ή εδώ: [πλατφόρμα διαμοιρασμού] – *ενδείκνυται για διαδικτυακές συναντήσεις ή/και για την αποφυγή φωτοτυπιών*
- Συζήτηση του συμβάντος και των ερωτημάτων που ακολουθούν σε ομάδες
- Όταν επανέλθουμε, κάθε ομάδα θα έχει χρόνο να παρουσιάσει τη σύνοψη της συζήτησης στην ολομέλεια

Το πρόγραμμα έχει ήδη εφαρμοστεί στην Κρήτη, από όπου προέκυψε και το παρόν επιμορφωτικό υλικό. Συγκεκριμένα: το σχολικό έτος 2023-24 εφαρμόστηκε πιλοτικά στο Ηράκλειο με 7 τετράωρες δια ζώσης συναντήσεις και 22 ώρες ασύγχρονης εργασίας, ενώ το σχολικό έτος 2024-25 εφαρμόστηκε ευρύτερα σε τρία επιμορφωτικά κέντρα (Ηράκλειο, Μοίρες και Ρέθυμνο) με διάρκεια 5 τρίωρες δια ζώσης συναντήσεις και 15 ασύγχρονης εργασίας.

Οι βασικότερες διαπιστώσεις που προέκυψαν από τις εφαρμογές του προγράμματος είναι:

- η επιχειρηματολογία είναι το βασικό συστατικό στοιχείο των Μαθηματικών και κοινό εργαλείο για τη διδασκαλία τους τόσο στην πρωτοβάθμια όσο και στην δευτεροβάθμια εκπαίδευση,
- η επίλυση μαθηματικού προβλήματος, σε συνδυασμό με ενεργή μαθητική συμμετοχή, καλλιεργεί υψηλές μορφωτικές δεξιότητες στους μαθητές και στις μαθήτριες και στα τέσσερα βασικά επίπεδα: γνωστικό, μεταγνωστικό, κοινωνικό, συναισθηματικό,
- τα προβλήματα με νόημα για τους μαθητές και τις μαθήτριες μπορούν να προκαλέσουν ενδιαφέρον και να προσφέρουν επιπλέον κίνητρα μάθησης,

- η επιλογή μίας πηγής ή εργαλείου, αναλογικού ή ψηφιακού, κατά την επίλυση ενός προβλήματος είναι δυνατόν να διευρύνει και να αναπτύξει ή αντιθέτως να περιορίσει την ελευθερία ή τη δημιουργικότητα του/της μαθητή/μαθήτριας, ανάλογα με το πώς χρησιμοποιείται η πηγή ή το εργαλείο και ανάλογα με τον βαθμό της ενεργούς συμμετοχής του/της μαθητή/τριας στη μαθηματική δραστηριότητα,
- η διερεύνηση και η ανακάλυψη, ως διδακτική προσέγγιση στην επίλυση μαθηματικού προβλήματος, απελευθερώνει μεγάλο ποσό δημιουργικότητας και συνεισφέρει σημαντικά στη μάθηση,
- οι κώδικες και οι νόρμες, κοινωνικές και μαθηματικές, είναι συστατικά στοιχεία στη διδασκαλία και στη μάθηση των Μαθηματικών,
- ο διάλογος, η συζήτηση και η αλληλεπίδραση ανάμεσα σε εκπαιδευτικούς πρωτοβάθμιας και δευτεροβάθμιας εκπαίδευσης σχετικά με θέματα κοινού ενδιαφέροντος προσφέρει οφέλη γνωστικά, μεταγνωστικά, επαγγελματικά, κοινωνικά, συναισθηματικά, διαμορφώνει θετικές στάσεις και καταρρίπτει στερεότυπα.

1η Συνάντηση: Θεματική Ενότητα «Αριθμοί»

Ι. *Μετάβαση από το Δημοτικό στο Γυμνάσιο και ανάπτυξη ανώτερων γνωστικών λειτουργιών*
ΙΙ. *Αριθμοί: ιδιότητες και εφαρμογές τους* (φυσικοί, δεκαδικοί, κλασματικοί, …) - ΜΕΡΟΣ Α΄

Έργο	**Διάρκεια**
Παρουσίαση του προγράμματος	15΄
Ένα δώρο για την Αθηνά (mathtask) (αυτή η δραστηριότητα αρμόζει θεματικά στην 2η συνάντηση και παρουσιάζεται εκεί – μπορεί όμως και να παρουσιαστεί στη πρώτη συνάντηση ως εισαγωγή στη δομή και τη φιλοσοφία του προγράμματος)	20΄επεξεργασία σε ομάδες, 25΄ ολομέλεια – διαλεκτική ανταλλαγή
Σύγκριση κλασμάτων ΙΙ (mathtask)	20΄ επεξεργασία σε ομάδες, 25΄ ολομέλεια – διαλεκτική ανταλλαγή
Πέντε δημιουργίες με το Polypad (εργαστηριακή δραστηριότητα) (εφόσον παραλειφθεί το 1ο mathtask)	45΄ στο εργαστήριο Η/Υ
Βαθμολόγηση γραπτού στη σύγκριση κλασμάτων (ατομικό έργο)	10΄ βαθμολόγηση και 15' συζήτηση
Συγκρίσεις/διατάξεις κλασμάτων (εργασία για την τάξη)	5΄ (η ανάθεση του έργου)

Σύγκριση κλασμάτων Ι (mathtask)

Η δασκάλα ζήτησε από τους μαθητές και τις μαθήτριες της να συγκρίνουν τα κλάσματα $\frac{6}{8}$ και $\frac{4}{5}$. Ακούστηκαν οι ακόλουθες προτάσεις:

Γιώργος: Να συγκρίνουμε αριθμητές με αριθμητές και παρονομαστές με παρονομαστές. Αφού το 6 είναι μεγαλύτερο του 4 και το 8 μεγαλύτερο του 5, έπεται ότι και το κλάσμα $\frac{6}{8}$ είναι μεγαλύτερο από το $\frac{4}{5}$.

Μαρία: Εγώ τα έκανα πρώτα ομώνυμα και μετά σύγκρινα τους αριθμητές: $\frac{6}{8}=\frac{6\cdot 5}{8\cdot 5}=\frac{30}{40}$ και $\frac{4}{5}=\frac{4\cdot 8}{5\cdot 8}=\frac{32}{40}$. Άρα, το κλάσμα $\frac{6}{8}$ είναι μικρότερο από το $\frac{4}{5}$.

Νίκος: Συμφωνώ με την Μαρία. Το επιβεβαίωσα «χιαστί»: $6\cdot 5<8\cdot 4$.

Γιώργος: Η μέθοδος «χιαστί» δεν δίνει πάντα το σωστό αποτέλεσμα. Δεν πρέπει να την εμπιστευτούμε.

Αθηνά: Και τα δύο κλάσματα είμαι μικρότερα του 1. Ξέρω ότι το $\frac{4}{5}$ είναι το ίδιο με το $\frac{8}{10}$ και το $\frac{8}{10}$ απέχει $\frac{2}{10}$ από το 1. Επίσης, ξέρω ότι $\frac{6}{8}$ απέχει $\frac{2}{8}$ από το 1. Και αφού τα δέκατα είναι μικρότερα από τα όγδοα, το κλάσμα $\frac{8}{10}$ θα πρέπει να είναι πιο κοντά στο 1. Άρα, το κλάσμα $\frac{4}{5}$ είναι το μεγαλύτερο.»

Θαλής: Ξέρω ότι το $\frac{6}{8}$ είναι το ίδιο με $\frac{12}{16}$ και το $\frac{4}{5}$ είναι το ίδιο με $\frac{12}{15}$. Αφού τα δέκατα πέμπτα είναι μεγαλύτερα από τα δέκατα έκτα και οι αριθμητές είναι ίδιοι, το κλάσμα $\frac{4}{5}$ πρέπει να είναι το μεγαλύτερο.

Βαρβάρα: Είναι $\frac{6}{8}=6:8=0{,}75$ και $\frac{4}{5}=4:5=0{,}8$, άρα το κλάσμα $\frac{4}{5}$ είναι το μεγαλύτερο».

Ερωτήσεις:
1. Να σχολιάσετε την απάντηση κάθε παιδιού.
2. Να αναδείξετε τα δυνατά ή/και τα αδύναμα σημεία κάθε απάντησης.
3. Πώς θα αξιοποιούσατε τα λάθη των μαθητών στη διδασκαλία σας;
4. Ποια προσέγγιση επιλέγετε εσείς στην διδασκαλία σας στη σύγκριση κλασμάτων;

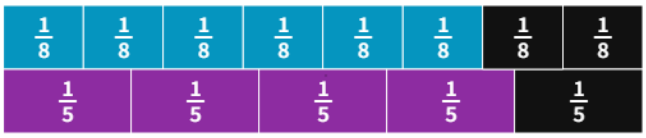
Σύγκριση κλασμάτων ΙΙ (mathtask)

Η δασκάλα ζήτησε από τους μαθητές και τις μαθήτριές της να συγκρίνουν τα κλάσματα $\frac{6}{8}$ και $\frac{4}{5}$. Ακούστηκαν οι ακόλουθες προτάσεις:

Γιώργος: Να συγκρίνουμε αριθμητές με αριθμητές και παρονομαστές με παρονομαστές. Αφού το 6 είναι μεγαλύτερο του 4 και το 8 μεγαλύτερο του 5, έπεται ότι το κλάσμα $\frac{6}{8}$ είναι μεγαλύτερο από το $\frac{4}{5}$.

Μαρία: Εγώ τα έκανα πρώτα ομώνυμα και μετά σύγκρινα τους αριθμητές: $\frac{6}{8} = \frac{6\cdot5}{8\cdot5} = \frac{30}{40}$ και $\frac{4}{5} = \frac{4\cdot8}{5\cdot8} = \frac{32}{40}$. Άρα, το κλάσμα $\frac{6}{8}$ είναι μικρότερο από το $\frac{4}{5}$.

Νίκος: Συμφωνώ με την Μαρία. Το επιβεβαίωσα με το mathigon/polypad:



Γιάννης: Η γεωμετρική ιδέα του Νίκου μου αρέσει πολύ. Θα κάνω και εγώ το ίδιο σχέδιο σε τετραγωνισμένο (millimetrè) χαρτί.

ΕΡΩΤΗΣΕΙΣ

1. Να σχολιάσετε την ορθότητα της απάντησης κάθε παιδιού.
2. Ο Γιώργος ουσιαστικά χρησιμοποίησε τον ακόλουθο ισχυρισμό: « $αν\ α > β\ και\ γ > δ,\ τότε\ \frac{α}{γ} > \frac{β}{δ}$». Πώς θα εξηγούσατε στον Γιώργο ότι ο ισχυρισμός στον οποίο βασίστηκε δεν είναι γενικά σωστός;
3. Πιστεύετε ότι υπάρχει τρόπος να αξιοποιηθεί ορθά το σκεπτικό του Γιώργου (με κατάλληλη τροποποίηση) σε προβλήματα σύγκρισης κλασμάτων;
4. Ποια θεμελιώδη έννοια (των Μαθηματικών και ειδικότερα των κλασμάτων) χρησιμοποιεί η Μαρία;
5. Θεωρείτε την προσέγγιση του Νίκου ορθή;
6. Τι θα συμβουλεύατε τον Γιάννη στην προσπάθειά του να δουλέψει με το τετραγωνισμένο (millimetrè) χαρτί;
7. Ποια προσέγγιση επιλέγετε εσείς στη διδασκαλία σας στη σύγκριση κλασμάτων;

Σύγκριση κλασμάτων ΙΙΙ (mathtask)

Η δασκάλα ζήτησε από τους μαθητές και τις μαθήτριές της να συγκρίνουν τα κλάσματα $\frac{6}{8}$ και $\frac{4}{5}$. Ακούστηκαν οι ακόλουθες προτάσεις:

Αθηνά: Και τα δύο κλάσματα είμαι μικρότερα του 1. Ξέρω ότι το $\frac{4}{5}$ είναι το ίδιο με το $\frac{8}{10}$ και το $\frac{8}{10}$ απέχει $\frac{2}{10}$ από το 1. Επίσης, ξέρω ότι $\frac{6}{8}$ απέχει $\frac{2}{8}$ από το 1. Και αφού τα δέκατα είναι μικρότερα από τα όγδοα, το κλάσμα $\frac{8}{10}$ θα πρέπει να είναι πιο κοντά στο 1. Άρα, το κλάσμα $\frac{4}{5}$ είναι το μεγαλύτερο.

Περικλής: Ξέρω ότι το $\frac{6}{8}$ είναι το ίδιο με $\frac{12}{16}$ και το $\frac{4}{5}$ είναι το ίδιο με $\frac{12}{15}$. Αφού τα δέκατα πέμπτα είναι μεγαλύτερα από τα δέκατα έκτα και οι αριθμητές είναι ίδιοι, το κλάσμα $\frac{4}{5}$ πρέπει να είναι το μεγαλύτερο.

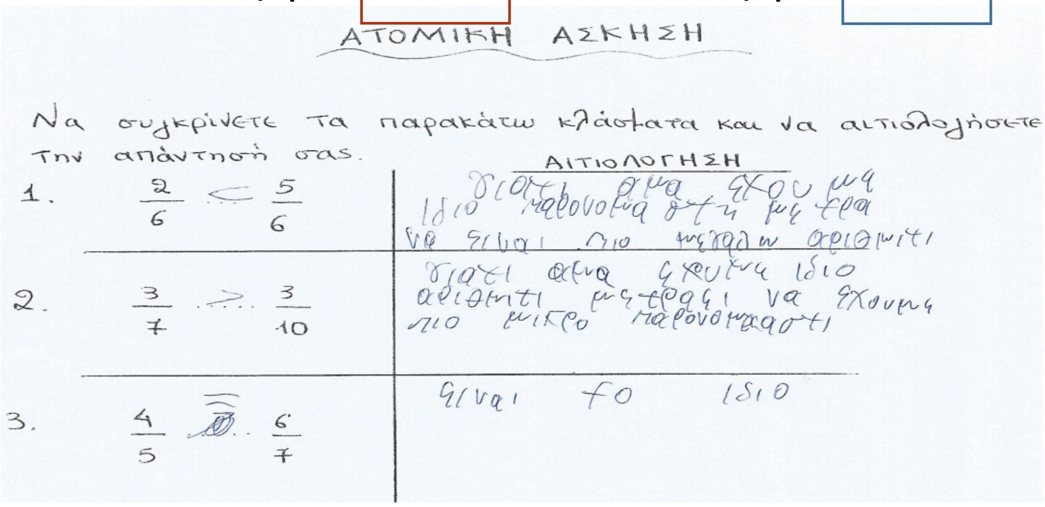
Κλειώ: Είναι $\frac{6}{8} = 6:8 = 0{,}75$ και $\frac{4}{5} = 4:5 = 0{,}8$, άρα το κλάσμα $\frac{4}{5}$ είναι το μεγαλύτερο.

ΕΡΩΤΗΣΕΙΣ

1. Να σχολιάσετε την απάντηση κάθε παιδιού.
2. Ποια από τις μαθητικές απαντήσεις στις Δραστηριότητες 1α και 1β σας έκανε περισσότερο εντύπωση και γιατί;
3. Ποια θεμελιώδη έννοια των Μαθηματικών και ειδικότερα των κλασμάτων βρίσκεται πίσω από κάθε μαθητική απάντηση στις Δραστηριότητες 1α και 1β;

Βαθμολόγηση γραπτού στη σύγκριση κλασμάτων (ατομικό έργο για εκπαιδευτικούς)

Π/θμια ☐ **Δ/θμια** ☐


ΑΤΟΜΙΚΗ ΑΣΚΗΣΗ

Να συγκρίνετε τα παρακάτω κλάσματα και να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

	ΑΙΤΙΟΛΟΓΗΣΗ
1. $\frac{2}{6} < \frac{5}{6}$	γιατι αμα εχου μια ιδιο παρονομαστη με ενα να ειναι πιο μεγαλω αριθμιτι
2. $\frac{3}{7} > \frac{3}{10}$	γιατι αμα εχουνε ιδιο αριθμιτι μετραει να εχουμε πιο μικρο παρονομαστι
3. $\frac{4}{5} = \frac{6}{7}$	ειναι το ιδιο

Ερώτηση: Με άριστα το 6 (έξι), να βαθμολογήσετε το παραπάνω γραπτό, συμπληρώνοντας τον παρακάτω πίνακα:

	Μαθηματική απάντηση	**Αιτιολόγηση**
	ΒΑΘΜΟΣ	**ΒΑΘΜΟΣ**
1	(μέγιστη βαθμολογία το 1) ………..	(μέγιστη βαθμολογία το 1) ………..
2	(μέγιστη βαθμολογία το 1) ………..	(μέγιστη βαθμολογία το 1) ………..
3	(μέγιστη βαθμολογία το 1) ………..	(μέγιστη βαθμολογία το 1) ………..
ΣΥΝΟΛΟ		

Α. Να αιτιολογήσετε τις επιμέρους βαθμολογίες που βάλατε στην ερώτηση 1.

……
……
……
……
……

Β. Να αιτιολογήσετε τις επιμέρους βαθμολογίες που βάλατε στην ερώτηση 2.

……
……
……
……
……

Γ. Να αιτιολογήσετε τις επιμέρους βαθμολογίες που βάλατε στην ερώτηση 3.

……
……
……
……
……

Συγκρίσεις/διατάξεις κλασμάτων (εργασία για την σχολική τάξη)

Δραστηριότητα για την τάξη (που διδάσκει κάθε επιμορφούμενος/η)

Να θέσετε τα ακόλουθα ερωτήματα στους μαθητές και τις μαθήτριες σας και να συλλέξετε τις απαντήσεις τους.

α) Ποιο από τα δύο κλάσματα $\frac{1}{2}$ και $\frac{1}{3}$ είναι μεγαλύτερο; Ή μήπως είναι ίσα;

β) Να τοποθετήσεις τα κλάσματα $\frac{1}{2}$ και $\frac{1}{3}$ πάνω στην αριθμογραμμή.

γ) Υπάρχει κάποιο κλάσμα ανάμεσα στο $\frac{1}{2}$ και $\frac{1}{3}$; Αν ναι, βρες ένα. Αν όχι, να αιτιολογήσεις την απάντησή σου και να αγνοήσεις τα ακόλουθα ερωτήματα δ) και ε).

δ) Μπορείς να βρεις και δεύτερο κλάσμα ανάμεσα στο $\frac{1}{2}$ και $\frac{1}{3}$;

ε) Μπορείς να βρεις δέκα κλάσματα ανάμεσα στο $\frac{1}{2}$ και $\frac{1}{3}$;

2η Συνάντηση: Θεματική Ενότητα «Από την Αριθμητική στην Άλγεβρα»

I. *Αριθμοί: ιδιότητες και εφαρμογές τους* (φυσικοί, δεκαδικοί, κλασματικοί, …) - ΜΕΡΟΣ Β΄
II. *Από την αριθμητική στην άλγεβρα-Μεταβλητά μεγέθη*
(ανάλογα και αντιστρόφως ανάλογα ποσά, διαγράμματα, εξισώσεις, μοντελοποίηση, μοτίβα …)

Έργο	**Διάρκεια**
ΔΙΔΑΣΚΑΛΙΑ ΜΕ ΜΙΚΡΟΠΕΙΡΑΜΑΤΑ	20΄ επεξεργασία σε ομάδες, 25΄ ολομέλεια – διαλεκτική ανταλλαγή
Η ανηφόρα (mathtask)	20΄ επεξεργασία σε ομάδες, 25΄ ολομέλεια – διαλεκτική ανταλλαγή
Χειραπτικό υλικό για τα αντιστρόφως ανάλογα ποσά Δίνεται έτοιμο στις ομάδες και συζητούν για την διδακτική αξιοποίησή του	10΄ επεξεργασία σε ομάδες, 15΄ ολομέλεια – διαλεκτική ανταλλαγή
Συγκέντρωση και συζήτηση εργασιών που ανάθεσαν οι εκπαιδευτικοί στην τάξη τους (προηγούμενης συνάντησης)	20΄
Βαθμολόγηση γραπτών στις πράξεις κλασμάτων (ατομικό έργο)	5’ (η ανάθεση του έργου)

Ένα δώρο για την Αθηνά (mathtask)

Δημιουργήθηκε από την ομάδα MathTASK του University of East Anglia

Παρακάτω είναι ένα επεισόδιο από τη ΣΤ΄ τάξη της Κα Δωράκη. Η Κα Δωράκη ζήτησε από τα παιδιά να δουλέψουν στο παρακάτω πρόβλημα.

> *Ο Τζουντ, ο Καρίμ, η Λίνα και ο Ζένο θέλουν να πάρουν ένα δώρο για τη φίλη τους την Αθηνά. Έχουν βρει ένα δώρο που είναι ό,τι πρέπει για την Αθηνά και συζητούν πώς θα το πληρώσουν. Αρχικά, είπαν να μοιραστούν το ποσό δίκαια σε τέσσερα ίσα μερίδια, αλλά ο Τζουντ λέει «λυπάμαι, αλλά δεν έχω αρκετά χρήματα και μπορώ να πληρώσω 5 ευρώ λιγότερα από το μερίδιο μου». Ο Καρίμ λέει ότι μπορεί να πληρώσει μόνο το μερίδιό του και τίποτα παραπάνω ενώ ο Ζένο λέει ότι μπορεί να πληρώσει ένα ευρώ παραπάνω από το μερίδιο του. Ευτυχώς η Λίνα προσφέρθηκε να πληρώσει όλο το υπόλοιπο ποσό και έδωσε 29 ευρώ. Πόσο έκανε το δώρο της Αθηνάς;*

Ένας από τους μαθητές, ο Νίκος, παραπονιέται ότι το πρόβλημα είναι πολύ δύσκολο και ότι «μισεί τα προβλήματα», μια και, όπως λέει, «δεν έχουν κανένα νόημα». Η Κα Δωράκη καλεί τα παιδιά της τάξης να πουν τη γνώμη τους για το σχόλιο του Νίκου. Η Άννα σηκώνει το χέρι της και η Κα Δωράκη της δίνει το λόγο.

Άννα: Δε νομίζω ότι είναι και τόσο δύσκολο, όπως λέει ο Νίκος. Νομίζω όμως ότι θέλει κάποιο χρόνο για να λυθεί. Ξεκίνησα με διάφορες τιμές για το δώρο από 30 ευρώ και πάνω, ξέροντας ότι η Λίνα πλήρωσε 29 ευρώ. Δοκίμασα 40 ευρώ και δεν βγήκαν τα νούμερα, μετά 50 ευρώ, και πάλι δε βγήκαν τα νούμερα. Μετά δοκίμασα 100 ευρώ και μου βγήκε!

Τότε, ένας άλλος μαθητής, ο Βασίλης, ζητά το λόγο.

Βασίλης: Γιατί πρέπει να ξοδέψεις τόσο πολύ χρόνο και δοκιμές για να λύσεις το πρόβλημα; Η αδερφή μου που είναι στο Λύκειο μου είπε ότι υπάρχει ένα πράγμα που το λένε Άλ … ευρα ή κάτι τέτοιο [η τάξη γελά στο άκουσμα της λέξης], και μου έδειξε μια τρομερή μέθοδο για τέτοια προβλήματα [*πάει στον πίνακα*]. Αν το κάθε ένα από τα δίκαια μερίδια είναι, ας πούμε κάτι που το λέμε *x*, το δώρο θα κάνει 4 φορές το *x*. Τότε ο Τζουντ πλήρωσε *x*-5, ο Καρίμ *x*, ο Ζένο *x*+1 και η Λίνα πλήρωσε 29 ευρώ. Το σύνολο είναι: (x-5)+x+(x+1)+29=4x. *Το έλυσα και … το x* είναι 25 ευρώ και η αξία του δώρου είναι τέσσερεις φορές το *x*, δηλαδή 100 ευρώ!

Ένας τρίτος μαθητής, ο Γιώργος, σηκώνει το χέρι ανυπόμονα. Η Κα Δωράκη του κάνει νόημα να μιλήσει.

Γιώργος: Πλάκα μας κάνεις! Αυτό είναι ακόμα πιο μπερδεμένο και απίστευτο χάσιμο χρόνου! Γιατί να πρέπει να δοκιμάσουμε όλα αυτά τα νούμερα; [απευθυνόμενος στην Άννα] και γιατί να κάνω όλα αυτά τα ακαταλαβίστικα; [δείχνοντας με περιφρόνηση τη λύση του Βασίλη] Ο Τζουντ, ο Καρίμ, η Λίνα και ο Ζένο πρέπει να πληρώσουν το μερίδιο τους ακριβώς! Κι έτσι και δεν υπάρχει πρόβλημα, κι εμείς δεν παιδευόμαστε!

«Σας ευχαριστώ», λέει η Κα Δωράκη στην τάξη, «πολλές ιδέες ακούστηκαν. Να τις πάρουμε μία μία;»

Φανταστείτε ότι είσαστε ο δάσκαλος/η δασκάλα αυτής της τάξης και απαντήστε τις παρακάτω ερωτήσεις:

1. Λύστε το μαθηματικό πρόβλημα που έδωσε η Κα Δωράκη. Πώς θα δικαιολογούσατε την απάντησή σας;
2. Πώς θα απαντούσατε στην Άννα;
3. Πώς θα απαντούσατε στο Βασίλη;
4. Πώς θα απαντούσατε στο Γιώργο; Πώς θα κλείνατε το μάθημα ώστε να δώσετε μία ικανοποιητική απάντηση στο μαθηματικό πρόβλημα για όλη την τάξη και επίσης θα ανταποκριθείτε και στο παράπονο του Νίκου;

Μοιράζοντας τις καραμέλες (mathtask)

Αριθμοί: ιδιότητες και εφαρμογές τους

Η δασκάλα έβαλε το εξής πρόβλημα στους μαθητές της:

Πρόβλημα (εμπνευσμένο από την εφαρμογή 4 του σχολικού βιβλίου Β΄ Γυμνασίου σελ. 28)

> *Δύο αδέλφια μοιράστηκαν ένα πλήθος από καραμέλες. Ο μικρότερος έλαβε το 1/5 του συνόλου και 4 καραμέλες ακόμη και ο μεγαλύτερος έλαβε το 1/2 του συνόλου και 2 καραμέλες ακόμη. α) Πόσες ήταν όλες οι καραμέλες; β) Πόσες καραμέλες πήρε ο καθένας τελικά;*

Η ιδέα της Μαρίας:

Να βρούμε έναν αριθμό που διαιρείται με το 5 και το 2. Έχουμε ΕΚΠ(5, 2)=10.
Αν όλες οι καραμέλες ήταν 10, τότε:
Ο μικρότερος θα πάρει $10:5+4=2+4=6$
Ο μεγαλύτερος θα πάρει $10:2+2=5+2=7$
Όμως $6+7=13$ που είναι μεγαλύτερο του 10.

Η ιδέα του Νίκου:

Μου αρέσει, Μαρία, η ιδέα σου. Να δοκιμάσουμε τον επόμενο αριθμό, που διαιρείται με το 5 και το 2 που είναι ο αριθμός 20. Τότε:
Ο μικρότερος θα πάρει $20:5+4=4+4=8$
Ο μεγαλύτερος θα πάρει $20:2+2=10+2=12$
Τώρα, $8+12=20$. Το λύσαμε!

Η ερώτηση της Μαρίνας:

Κατάλαβα ότι το 10 διαιρείται και με τους δύο αριθμούς, αφού είναι το ΕΚΠ τους. Όμως, Νίκο, γιατί είπες ότι ο επόμενος αριθμός για να δοκιμάσουμε είναι το 20; Γιατί ο «επόμενος» αριθμός που διαιρείται και με το 5 και με το 2 δεν είναι κάποιος άλλος αριθμός;

ΕΡΩΤΗΣΕΙΣ – Α΄ ΜΕΡΟΣ:

1. Εσείς πώς θα λύνατε το πρόβλημα;
2. Τι θα απαντούσατε σε καθένα από τα παιδιά;

ΕΡΩΤΗΣΕΙΣ – Β΄ ΜΕΡΟΣ:

…μετά από σύντομη παρουσίαση τριών εργαλείων της εφαρμογής polypad https://polypad.amplify.com/ (1. fraction bars, 2. prime factor circles, 3. number line)

3. Πώς θα χρησιμοποιούσατε το polypad (τις κλασματικές ράβδους/fraction bars) για να βοηθήσετε τους μαθητές να διαμορφώσουν ακόμα μία στρατηγική;
4. Πώς θα βοηθούσατε την Μαρίνα να καταλάβει την επιλογή του Νίκου για τον αριθμό 20, χρησιμοποιώντας το polypad (κύκλους πρώτων παραγόντων/prime factor circles ή την αριθμογραμμή/number line μαζί με τα τόξα ίσων βημάτων);

Διδασκαλία με Μικροπειράματα

Αριθμοί: ιδιότητες και εφαρμογές τους

Πόρος στο «Φωτόδεντρο»: «*Δύο πλοία επισκέπτονται ένα νησάκι στο Αιγαίο*»
https://photodentro.edu.gr/v/item/ds/8521/2244

ΕΡΩΤΗΣΕΙΣ

Αρχικά, βρείτε τον παραπάνω πόρο στο ψηφιακό αποθετήριο του Υ.ΠΑΙ.Θ.Α. «Φωτόδεντρο». Στη συνέχεια, αφού πειραματιστείτε με την παραπάνω εφαρμογή, απαντήστε τα ακόλουθα:

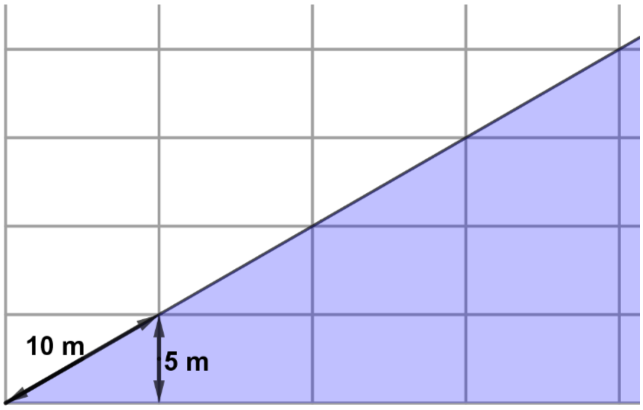
1. Πώς θα μπορούσατε να αξιοποιήσετε το παραπάνω μικροπείραμα στη διδασκαλία της ενότητας του Ελάχιστου Κοινού Πολλαπλάσιου (ΕΚΠ) δύο φυσικών αριθμών;
2. Μπορείτε να εντοπίσετε κάποια πλεονεκτήματα στην εισαγωγή του ΕΚΠ μέσω του συγκεκριμένου μικροπειράματος σε σχέση με την κλασική εισαγωγή του όπου παίρνουμε τα πολλαπλάσια δύο αριθμών και βρίσκουμε τα κοινά τους;
3. Ποια είναι η δική σας διδακτική προσέγγιση που εφαρμόζετε συνήθως στο ΕΚΠ;

Επέκταση. Πώς θα μπορούσατε να αξιοποιήσετε την *ανάλυση κάθε φυσικού αριθμού σε πρώτους παράγοντες* για τον υπολογισμό του ΕΚΠ δύο φυσικών αριθμών;

Η ανηφόρα (mathtask)

ΜΕΤΑΒΛΗΤΑ ΜΕΓΕΘΗ – Από την Αριθμητική στην Άλγεβρα

Ο/Η εκπαιδευτικός θέτει το ακόλουθο πρόβλημα στους/στις μαθητές/τριες:
Ένα παιδί, ανεβαίνοντας μια ανηφόρα παρατηρεί στην εφαρμογή «αλτίμετρο» του «smartphone» του ότι για κάθε 10 μέτρα που διανύει στην ανηφόρα, το υψόμετρό του αυξάνει κατά 5 μέτρα. Σε ποιο υψόμετρο θα φτάσει το παιδί όταν διανύσει 15 μέτρα από την αφετηρία (η οποία βρίσκεται σε υψόμετρο 0 μέτρα);



Γιώργος: Εφόσον το παιδί προχώρησε 5 μέτρα επιπλέον των 10 μέτρων, το υψόμετρό του θα αυξηθεί επίσης κατά 5 μέτρα. Άρα, το υψόμετρο που θα φτάσει το παιδί τελικά θα είναι 5+5=10 *μέτρα*.
Δήμητρα: Το 15 είναι το μισό του 30. Το 30 έχει 3 δεκάδες. Για κάθε δεκάδα όμως, αντιστοιχεί αύξηση υψομέτρου κατά 5 μέτρα. Άρα, αν περπατήσει 30 μέτρα, θα έχει υψόμετρο $3 \cdot 5 = 15$ μέτρα. Συνεπώς, στα μισά μέτρα, δηλαδή στα 15 μέτρα, το αντίστοιχο υψόμετρο θα είναι το μισό, δηλαδή $15 : 2 = 7{,}5$ μέτρα.
Μαρία: Τα μέτρα που διανύει το παιδί και το αντίστοιχο υψόμετρό του, είναι ποσά ανάλογα. Γι' αυτό, αν x είναι το ζητούμενο υψόμετρο, τότε $\frac{10}{5} = \frac{15}{x}$, οπότε
$x = 15 \cdot \frac{5}{10} = 7{,}5$ μέτρα.
Φώτης: Γιατί τα ποσά αυτά είναι ανάλογα;

ΕΡΩΤΗΣΕΙΣ

1. Τι θα λέγατε σε κάθε μαθητή και μαθήτρια για την απάντησή του/της;
2. Ποιες αναπαραστάσεις των ανάλογων ποσών διαφαίνονται από τις μαθητικές απαντήσεις;
3. Πού ανιχνεύεται η μετάβαση από την αριθμητική στην άλγεβρα στο συγκεκριμένο θέμα;
4. Ποια είναι η γνώμη σας για το πρόβλημα αυτό, θετική ή αρνητική; Εξηγήσετε την απάντησή σας.

Αντιστρόφως ανάλογα ποσά: οι ποδηλάτες (mathtask)

ΜΕΤΑΒΛΗΤΑ ΜΕΓΕΘΗ - Από την Αριθμητική στην Άλγεβρα

Η εκπαιδευτικός έθεσε το ακόλουθο πρόβλημα στους μαθητές της:

Τρεις ποδηλάτες ξεκίνησαν ταυτόχρονα να διανύσουν μια απόσταση 100 χιλιομέτρων. Γνωρίζουμε ότι όλοι οι ποδηλάτες κινήθηκαν με σταθερή ταχύτητα -όχι όμως την ίδια. Συγκεκριμένα:

- *Η ταχύτητα του 1ου ποδηλάτη ήταν 25 χιλιόμετρα την ώρα.*
- *Η ταχύτητα του 2ου ποδηλάτη ήταν 40 χιλιόμετρα την ώρα.*
- *Ο 3ος ποδηλάτης χρειάστηκε 2 ώρες και 40΄ για να διανύσει την διαδρομή.*

Μπορείτε να υπολογίσετε πόσο χρόνο χρειάστηκαν ο 1ος και ο 2ος ποδηλάτης για να διανύσουν την διαδρομή και με ποια ταχύτητα έτρεχε ο 3ος ποδηλάτης;

Μάριος: Ο 1ος ποδηλάτης σε **μία ώρα** διάνυσε 25 χιλιόμετρα, σε άλλη **μία ώρα** άλλα 25, σε άλλη **μία ώρα** άλλα 25 και άλλη **μία ώρα** άλλα 25 χιλιόμετρα και έτσι ολοκλήρωσε την διαδρομή των 100 χιλιομέτρων. Χρειάστηκε δηλαδή συνολικά **4 ώρες**.

Κώστας: Θα μπορούσαμε να πούμε αμέσως ότι ο πρώτος ποδηλάτης χρειάστηκε 100:25=4 ώρες, ο δεύτερος ποδηλάτης θα χρειάστηκε 100:40=2,5 ώρες ή αλλιώς 2 ώρες και 30 λεπτά. Ο 3ος ποδηλάτης θα έτρεχε με μια ενδιάμεση ταχύτητα αφού χρειάστηκε κάτι περισσότερο από 2 ώρες και 30 λεπτά και κάτι λιγότερο από 4 ώρες. Μπορούμε με δοκιμές να βρούμε τον «ενδιάμεσο» αριθμό από το 25 ως το 40:

100:27=3,70 100:30=3,33 100:35=2,85 100:36=2,77 100:37=2,70 100:38=2,63

όμως τίποτα δεν είναι σωστό γιατί οι 2 ώρες και 40 λεπτά είναι 2 ώρες και $\frac{2}{3}$ της ώρας, άρα $2\frac{2}{3} = 2{,}66$ ώρες

Νίκος: Οι 2 ώρες και 40 λεπτά είναι 2 ώρες και $\frac{2}{3}$ της ώρας άρα $2\frac{2}{3} = \frac{8}{3}$ώρες. Άρα η ταχύτητα του 3ου ποδηλάτη είναι «χιλιόμετρα δια χρόνο», δηλαδή $100{:}\frac{8}{3} = \frac{300}{8} = 37{,}5$ χιλιόμετρα την ώρα.

Ελένη: τα ποσά χρόνος και ταχύτητα είναι αντιστρόφως ανάλογα γιατί αν διπλασιάσω την ταχύτητα, τότε ο χρόνος που χρειάζεται να διανύσω τα 100 χιλιόμετρα είναι ο μισός. Ή αν κάνω την διαδρομή σε διπλάσιο χρόνο, αυτό δηλώνει ότι θα είχα την μισή ταχύτητα. Άρα έχω δύο κανόνες: «ταχύτητα= χιλιόμετρα διά χρόνο» και «χρόνος = χιλιόμετρα διά ταχύτητα».

Κωνσταντίνα: έχω και τρίτο κανόνα: «ταχύτητα επί χρόνος = χιλιόμετρα»

Μαρία: δεν καταλαβαίνω γιατί ισχύουν αυτοί οι τρεις κανόνες.

ΕΡΩΤΗΣΗ:

1. Πώς θα βοηθούσατε τη Μαρία να αντιληφθεί την ορθότητα των «τριών κανόνων» όπως τους διατύπωσαν ο Νίκος και η Ελένη;
2. Σχεδιάστε δύο καταλόγους με ποσά α) ανάλογα και β) αντιστρόφως ανάλογα, τα οποία θεωρείτε ότι οι μαθητές/τριες θα έπρεπε να γνωρίζουν.

Βαθμολόγηση γραπτών στις πράξεις κλασμάτων (ατομικό έργο)

ΜΕΤΑΒΛΗΤΑ ΜΕΓΕΘΗ - Από την Αριθμητική στην Άλγεβρα

Π/θμια ☐ **Δ/θμια** ☐

Δραστηριότητα 3: Βαθμολογήσεις

Ο/Η εκπαιδευτικός έθεσε τα παρακάτω ερωτήματα/θέματα στους/στις μαθητές/τριες. Αν το άριστα για κάθε θέμα είναι το 10, να βαθμολογήσετε τις λύσεις των μαθητών και να αιτιολογήσετε τη βαθμολογία σας.

***Θέμα 1*: Να υπολογίσεις το γινόμενο κλασμάτων:** $\frac{6}{5}\cdot\frac{10}{3}$

Λύση

$$\frac{6}{5}\cdot\frac{10}{3}=\frac{6\cdot 10}{5\cdot 3}=\frac{60}{15}$$

Βαθμός:

Αιτιολογία:

____

____

____

***Θέμα 2:* Να υπολογίσεις την Αριθμητική Παράσταση:** $\frac{1}{2}+\frac{5}{2}\cdot\frac{1}{10}$

Λύση 1η

$$\frac{1}{2}+\frac{5}{2}\cdot\frac{1}{10}=\frac{1+5}{2}\cdot\frac{1}{10}=\frac{6}{2}\cdot\frac{1}{10}=\frac{6\cdot 1}{2\cdot 10}=\frac{6}{20}$$

Βαθμός:

Αιτιολογία:

____

____

____

Λύση 2η

$$\frac{1}{2}+\frac{5}{2}\cdot\frac{1}{10}=\frac{1}{2}+\frac{5\cdot 1}{2\cdot 10}=\frac{1}{2}+\frac{1}{4}=0,5+0,25=0,75$$

Βαθμός:

Αιτιολογία:

____

____

____

Λύση 3η

$$\frac{1}{2}+\frac{5}{2}\cdot\frac{1}{10}=\frac{1}{2}+\frac{5\cdot 1}{2\cdot 10}=\frac{\overset{10}{1}}{2}+\frac{\overset{1}{5}}{20}=\frac{10}{20}+\frac{5}{20}=\frac{15}{20}$$

Βαθμός:

Αιτιολογία:

____

____

____

Θέμα 3: **Να υπολογίσεις την Αριθμητική Παράσταση:** $\frac{1}{12}+\frac{13}{12}-1$

Λύση 1η

$$\frac{1}{12}+\frac{13}{12}-1=\frac{14}{12}-1=\frac{13}{12}$$

Βαθμός:

Αιτιολογία:

Λύση 2η

$$\overset{1}{\frac{1}{12}}+\overset{1}{\frac{13}{12}}-\overset{12}{1}=\frac{1}{12}+\frac{13}{12}-\frac{12}{12}=\frac{14}{12}-\frac{12}{12}=\frac{2}{12}$$

Βαθμός:

Αιτιολογία:

Θέμα 4: **Να υπολογίσεις την Αριθμητική Παράσταση:** $\frac{1}{2}+\frac{1}{3}$

Λύση 1η

$$\frac{1}{2}+\frac{1}{3}=\frac{1+1}{2+3}=\frac{2}{5}$$

Βαθμός:

Αιτιολογία:

Λύση 2η

$$\frac{1}{2}+\frac{1}{3}=\frac{2}{5}$$

Βαθμός:

Αιτιολογία:

Λύση 3η

$$\overset{3}{\frac{1}{2}}+\overset{2}{\frac{1}{3}}=\frac{3}{6}+\frac{2}{6}=\frac{3+2}{6}=\frac{5}{6}$$

Βαθμός:

Αιτιολογία:

Χειραπτικό υλικό για τα αντιστρόφως ανάλογα ποσά

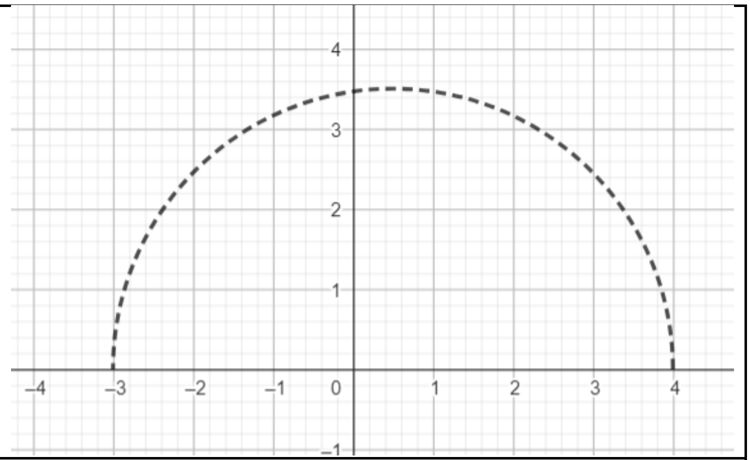
Υλικά για την κατασκευή:

- ✓ Τετραγωνισμένο χαρτί
- ✓ Μακετόχαρτο
- ✓ Ένα φύλλο ζελατίνας/διαφάνεια
- ✓ Διαβήτης, χάρακας, γνώμονας
- ✓ Πινέζα
- ✓ Κόλλα στικ ή ταινία διπλής όψης
- ✓ Λεπτό μαρκαδοράκι για γραφή σε γυαλί/λείες επιφάνειες

Κατασκευή:

1. Στο τετραγωνισμένο χαρτί σχεδιάστε δύο κάθετους άξονες, αριθμήστε τον οριζόντιο.

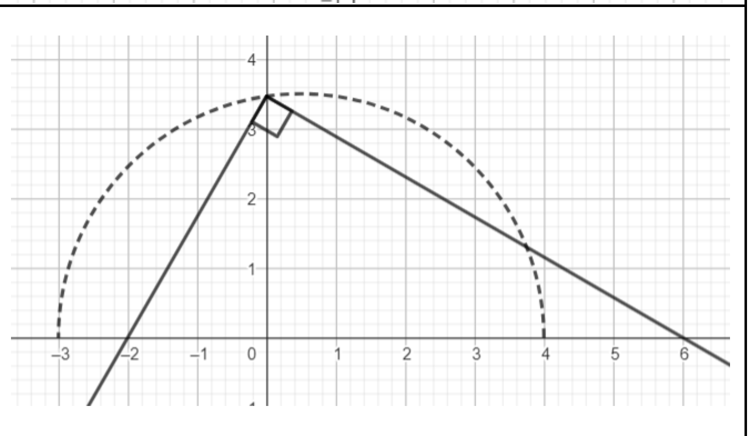
2. Σχεδιάστε ημικύκλιο διαμέτρου 7, όπως φαίνεται στο διπλανό σχήμα.



3. Κολλήστε το χαρτί στο μακετόχαρτο.

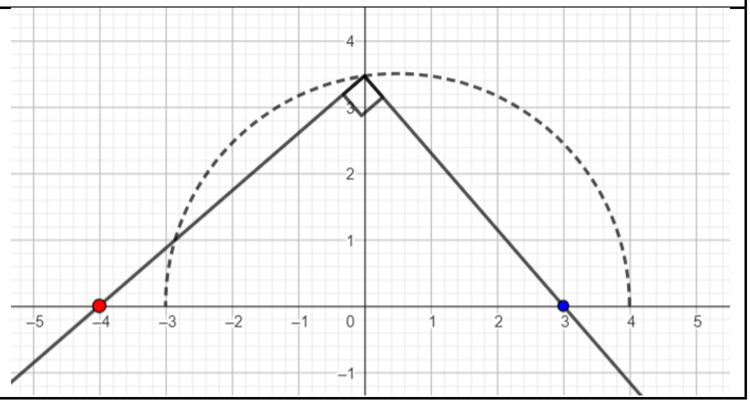
4. Σχεδιάστε σε φύλλο ζελατίνας μια ορθή γωνία.

5. Με την πινέζα, σταθεροποιήστε την κορυφή της ορθής γωνίας στη θέση που το ημικύκλιο τέμνει τον κατακόρυφο άξονα.



6. Περιστρέψτε την γωνία γύρω από την κορυφή της (πινέζα) σε διάφορες θέσεις.

7. Παρατηρήστε τους αριθμούς στον οριζόντιο άξονα που «συναντούν» οι πλευρές της γωνίας. Έχουν κάποια σχέση;



Εδώ είναι μια προσομοίωση της κατασκευής
https://www.geogebra.org/classic/hxqquta7

3η Συνάντηση: Θεματική Ενότητα «Από το μήκος στο εμβαδόν»

Από το μήκος στο εμβαδόν
(γεωμετρικά σχήματα στο επίπεδο, μετρήσεις, συμμετρία, γεωμετρικά μοτίβα, κατασκευές με χειραπτικά μέσα και ψηφιακά εργαλεία, η χρήση του χάρτη, …)

Έργο	**Διάρκεια**
Το δεύτερο ισοσκελές τρίγωνο (mathtask)	20΄ επεξεργασία σε ομάδες, 25΄ ολομέλεια – διαλεκτική ανταλλαγή
Ο υπολογισμός του εμβαδού ορθογωνίου (mathtask)	20΄ επεξεργασία σε ομάδες, 25΄ ολομέλεια – διαλεκτική ανταλλαγή
Αξιοποιώντας το ρυζόχαρτο	10΄ επεξεργασία σε ομάδες, 15΄ ολομέλεια – διαλεκτική ανταλλαγή
Απόδειξη Πυθαγορείου Θεωρήματος (puzzle)	3΄ παρουσίαση, 15΄ συζήτηση για την αξιοποίηση στη διδασκαλία
Συγκέντρωση των εργασιών που ανάθεσαν οι εκπαιδευτικοί στην τάξη τους (προηγούμενης συνάντησης)	2΄
Εργασία προς επιμορφούμενους/ες για την τάξη Ι	5΄ (η ανάθεση του έργου)

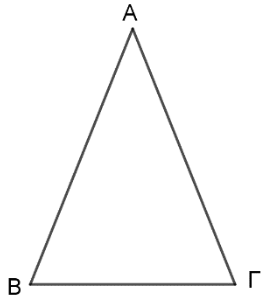
Το δεύτερο ισοσκελές τρίγωνο (mathtask)

Ο παρακάτω διάλογος είναι ένα στιγμιότυπο από το μάθημα των Μαθηματικών. Ο εκπαιδευτικός έδωσε στους μαθητές του το εξής πρόβλημα:

Πρόβλημα. Το εικονιζόμενο τρίγωνο ΑΒΓ είναι ισοσκελές.

(α) Να επαληθεύσετε ότι έχει δύο ίσες πλευρές.

(β) Μπορείτε να κατασκευάσετε δίπλα και κολλητά σε αυτό ένα δεύτερο τρίγωνο έτσι ώστε και τα δύο τρίγωνα μαζί να συνθέτουν ένα μεγαλύτερο ισοσκελές τρίγωνο;



Νίκος: Εγώ μέτρησα με τον χάρακα τις πλευρές ΑΒ και ΑΓ του τριγώνου και τις βρήκα ίσες. Όμως νομίζω ότι δεν γίνεται η κατασκευή με τα δύο τρίγωνα. Γιατί αν κολλήσω δίπλα στο ΑΒΓ ένα τρίγωνο, τα δύο μαζί κάνουν ένα τετράπλευρο.

Ελένη: Εγώ σύγκρινα τις πλευρές ΑΒ και ΑΓ με τον διαβήτη και είδα ότι είναι ίσες. Για την κατασκευή με τα δύο τρίγωνα, σκέφτηκα να το πάω ανάποδα. Να πάρω ένα μεγάλο ισοσκελές τρίγωνο και να δω αν μπορώ να το χωρίσω με μια γραμμή σε δύο τρίγωνα που το ένα να είναι ισοσκελές.

Χρήστος: Αποτύπωσα σε ρυζόχαρτο το τρίγωνο +, δίπλωσα μετά στη «μέση» και είδα ότι η ΑΒ πέφτει πάνω στην ΑΓ, άρα είναι ισοσκελές το τρίγωνο που μας δώσατε.
Μετά έφερα μια μεγάλη γραμμή πάνω στην ΒΓ και πήρα ένα σημείο Δ μετά το Γ. Έτσι έφτιαξα το τρίγωνο ΑΓΔ κολλητά στο ΑΒΓ, αλλά όμως το μεγαλύτερο τρίγωνο ΑΒΔ δεν μου βγήκε ισοσκελές.

Ερωτήσεις:

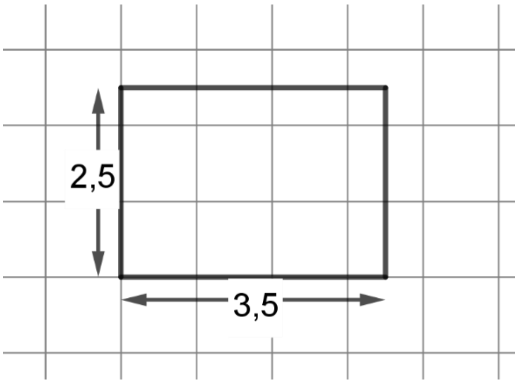
1. Θεωρείτε σωστές τις ενέργειες των μαθητών για να επαληθεύσουν ότι το τρίγωνο ΑΒΓ είναι ισοσκελές; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.
2. Μπορείτε να βρείτε κάποια θετικά στοιχεία στις ιδέες των μαθητών για την κατασκευή του μεγαλύτερου ισοσκελούς; Ποια είναι αυτά;
3. Ποια ερώτηση θα απευθύνατε σε κάθε μαθητή ξεχωριστά, ώστε να τον βοηθήσετε να κάνει ένα βήμα προς την σωστή κατασκευή;

Ο υπολογισμός του εμβαδού ορθογωνίου (mathtask)

Ο παρακάτω διάλογος είναι ένα στιγμιότυπο από το μάθημα των Μαθηματικών. Η εκπαιδευτικός έδωσε στους μαθητές της το εξής πρόβλημα:

Πρόβλημα.

Σε ένα τετραγωνικό πλέγμα με τετράγωνα πλευράς 1εκ., σχεδιάσαμε το εικονιζόμενο ορθογώνιο. Να υπολογίσετε το εμβαδόν του.



Ειρήνη: Αφού το μήκος του ορθογωνίου είναι 3,5εκ. και το πλάτος του είναι 2,5εκ., από τον γνωστό τύπο του εμβαδού θα έχουμε:

$$\mathrm{E} = 3{,}5 \times 2{,}5 = 8{,}75 \text{ τ.εκ.}$$

Δημήτρης: Εγώ για να βρω πόσα τετραγωνικά εκατοστά είναι το εμβαδόν του ορθογωνίου, μέτρησα μέσα σε αυτό 6 ολόκληρα τετράγωνα και 5 μισά. Επιπλέον υπάρχει κάτι ακόμα στην πάνω δεξιά γωνία, αλλά δεν ξέρω πόσο είναι αυτό. Έτσι θα έλεγα ότι το εμβαδόν είναι κάτι παραπάνω από $6 + 2{,}5 = 8{,}5$ τ.εκ.

Γιάννης: Εγώ δεν συμφωνώ μαζί σας. Το εμβαδόν του ορθογωνίου είναι 12.

Ερωτήσεις:

1. Με ποιον τρόπο θα βοηθούσατε τον Δημήτρη για να ολοκληρώσει τον συλλογισμό του;
2. Πώς συνδέονται οι δύο πρώτες απαντήσεις (δηλαδή της Ειρήνης και του Δημήτρη);
3. Ποια συνήθη προβλήματα αναδύονται από την απάντηση του Γιάννη;

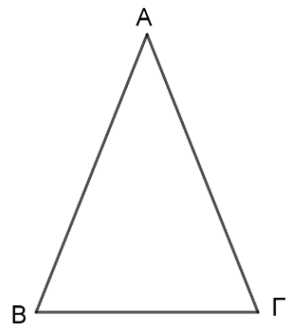
Εργασία προς επιμορφούμενους/ες για την τάξη Ι

Να δώσετε στους μαθητές και τις μαθήτριες σας να δουλέψουν στη τάξη την παρακάτω **Δραστηριότητα** (με όποιο τρόπο θέλετε εσείς).
Στη συνέχεια, να συνοψίσετε σε μία **έκθεση** τον τρόπο εργασίας, τις σκέψεις, τις ιδέες και τους προβληματισμούς των μαθητών σας μαζί με τις δικές σας παρατηρήσεις και συμπεράσματα, ξεχωριστά για κάθε ερώτημα.

(Η έκθεση να είναι περίπου 200-300 λέξεις)

ΔΡΑΣΤΗΡΙΟΤΗΤΑ

Το εικονιζόμενο τρίγωνο ΑΒΓ είναι ισοσκελές:



(γ) Να επαληθεύσετε ότι έχει δύο ίσες πλευρές.

(δ) Μπορείτε να κατασκευάσετε δίπλα και κολλητά σε αυτό ένα δεύτερο τρίγωνο έτσι ώστε και τα δύο τρίγωνα μαζί να συνθέτουν ένα μεγαλύτερο ισοσκελές τρίγωνο;

Αξιοποιώντας το ρυζόχαρτο

Να περιγράψετε τρόπους αξιοποίησης του ρυζόχαρτου για να εξηγήσετε τις παρακάτω γεωμετρικές ιδιότητες/κατασκευές:

1. Κατασκευή μεσοκάθετης ευθείας σε ευθύγραμμο τμήμα.
2. Κατασκευή διχοτόμου γωνίας.
3. Χαρακτηριστική ιδιότητα διχοτόμου γωνίας: κάθε σημείο της διχοτόμου ισαπέχει από τις δύο πλευρές της γωνίας.
4. Κατασκευή διαμέτρου κύκλου, όταν δεν δίδεται το κέντρο του.
5. Σε κάθε ρόμβο, οι διαγώνιές του α) τέμνονται κάθετα, β) διχοτομούν τις γωνίες του ρόμβου και γ) διχοτομούνται μεταξύ τους.

Εργασία προς επιμορφούμενους/ες για την τάξη ΙΙ

Να δώσετε στους μαθητές σας το εξής πείραμα στο πλαίσιο της διερεύνησης του κύκλου:

Πείραμα:

1. Σχεδιάστε σε ρυζόχαρτο κύκλο και διάμετρό του ΑΒ.
2. Πάρτε ένα σημείο Γ του κύκλου διαφορετικό από τα Α και Β και σχεδιάστε τις ευθείες ΑΓ, ΒΓ.
3. Διπλώστε το χαρτί κατά μήκος της ευθείας ΑΓ.
4. Τι παρατηρείτε; Τι συμπεραίνετε για τη γωνία $\mathrm{A}\hat{\Gamma}\mathrm{B}$;

Εργασία προς επιμορφούμενους/ες για την τάξη ΙΙΙ

Να δώσετε στους μαθητές και τις μαθήτριες σας να δουλέψουν στη τάξη την παρακάτω **Δραστηριότητα** (με όποιο τρόπο θέλετε εσείς).
Στη συνέχεια, να συνοψίσετε σε μία **έκθεση** τον τρόπο εργασίας, τις σκέψεις, τις ιδέες και τους προβληματισμούς των μαθητών σας μαζί με τις δικές σας παρατηρήσεις και συμπεράσματα, ξεχωριστά για κάθε ερώτημα.

(Η έκθεση να είναι περίπου 200-300 λέξεις)

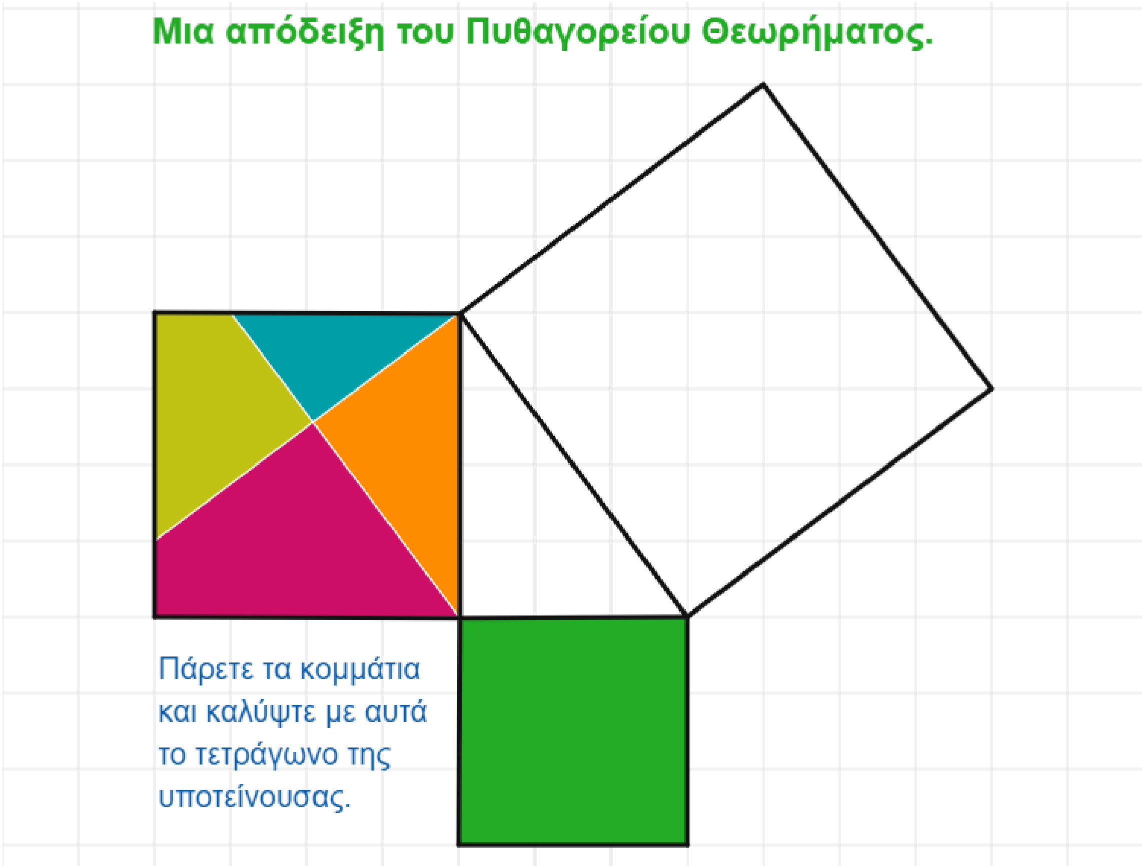
<u>ΔΡΑΣΤΗΡΙΟΤΗΤΑ</u>

Να χρησιμοποιήσετε ρυζόχαρτο για να εξηγήσετε τις παρακάτω γεωμετρικές ιδιότητες/κατασκευές:

1. Κατασκευή δύο ευθειών, που να είναι κάθετες μεταξύ τους.
2. Κατασκευή διχοτόμου γωνίας.
3. Κάθε σημείο της διχοτόμου ισαπέχει από τις δύο πλευρές της γωνίας.

Απόδειξη Πυθαγορείου Θεωρήματος (puzzle)

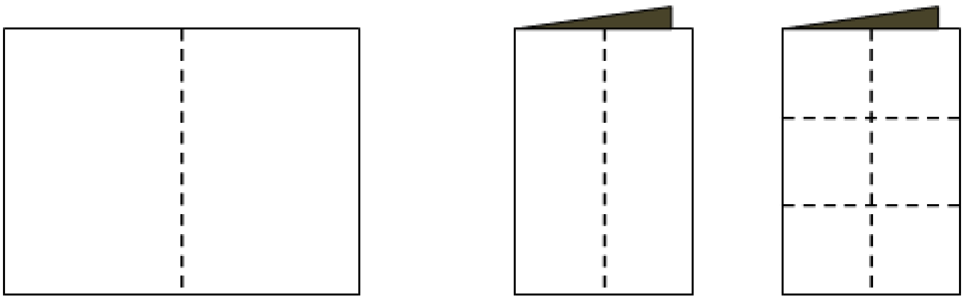
https://polypad.amplify.com/p/yE4XAiNgShCAw



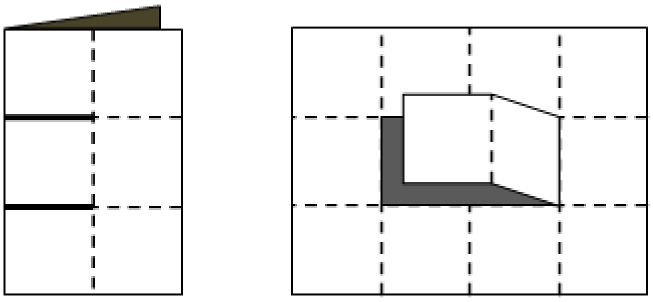
Μια μαγική κάρτα (tetra-tetra-flexagon)

Οδηγίες κατασκευής:

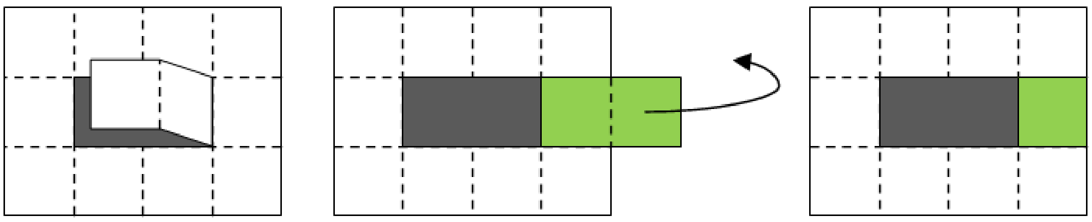
1. Ξεκινήστε με ένα χαρτί Α4 σε οριζόντια διάταξη. Διπλώστε κατακόρυφα στην μέση δύο φορές, και οριζόντια σε τρίτα, όπως δείχνει η εικόνα παρακάτω. Έτσι το φύλλο χαρτιού διαιρείται σε 3×4 κελιά.



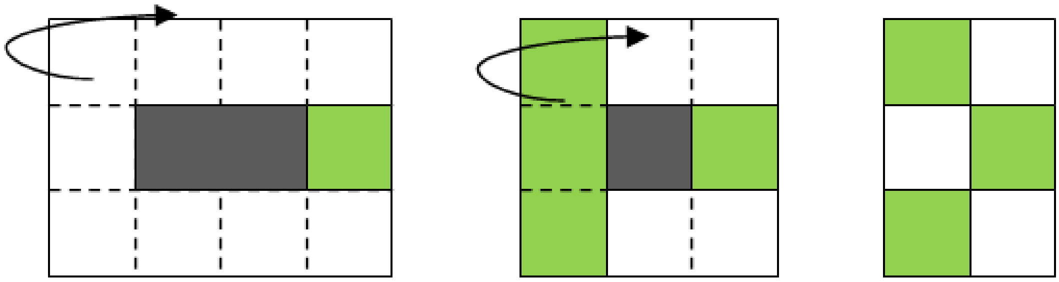
2. Καθώς βρίσκεται το φύλλο διπλωμένο στην μέση, κόψτε τις δύο οριζόντιες διπλώσεις κατά το ήμισυ του μήκους τους, όπως φαίνεται στην 1η εικόνα παρακάτω. Ανοίξτε το φύλλο και κόψτε ένα «παράθυρο» όπως την 2η εικόνα.



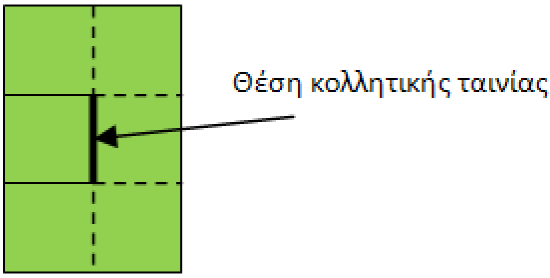
3. Ανοίξτε το παράθυρο από αριστερά προς τα δεξιά και περιτυλίξτε το πρώτα δεξιά και έπειτα πίσω από το φύλλο.



4. «Τυλίξτε» την 1η στήλη που βρίσκεται αριστερά από το παράθυρο πρώτα επάνω στην 2η στήλη και έπειτα πάνω στην 3η στήλη ώστε να κλείσει το παράθυρο.

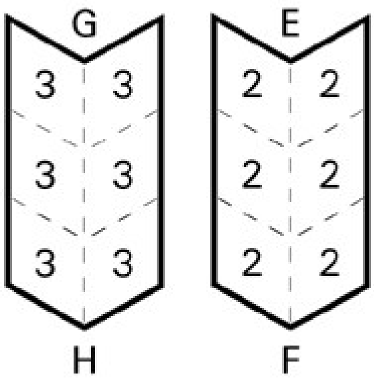


5. Γυρίστε «τούμπα» το φύλλο ώστε να φαίνεται η πίσω πλευρά του. Παρατηρήστε ότι ένα τετράγωνο «ξεπετάγεται» στη μέση. Ενώστε τα δύο μεσαία τετράγωνα με κολλητική ταινία (μονάχα αυτά).



6.

6. Μαρκάρετε την όψη με την κολλητική ταινία με “4”. Αναποδογυρίστε και μαρκάρετε την όψη με “3”. Διπλώστε την κάρτα σας στη μέση ώστε εξωτερικά να βρίσκεται η όψη 3 και εσωτερικά η όψη 4. Ανοίξτε κατά μήκος της δίπλωσης και αποκαλύψτε μια νέα όψη που την μαρκάρετε ως “2”. Επαναλάβετε για να εμφανίσετε και την όψη “1”.



7. “Μαγικές εικόνες” που εναλλάσσονται, μπορούν να σχεδιαστούν στις όψεις “2” και “3”.

$4^η$ Συνάντηση: Θεματική Ενότητα «από το εμβαδόν στον όγκο»

Από το εμβαδόν στον όγκο
(στερεά, αναπτύγματα, κατασκευές με χαρτόνι, μετρήσεις και πειράματα, όγκος και μάζα, …)

Έργο	Διάρκεια
Όγκοι κυλίνδρων (mathtask) και πειράματα Τα μοντέλα των δύο πειραμάτων δίνονται έτοιμα (τα τρία τετράεδρα που συνθέτουν τον κύβο / ο κύβος που εισέρχεται μέσα από κύβο ίσου μεγέθους) Ενώ για το πρόβλημα του κύβου με τη διαδρομή της αράχνης, όταν παρουσιάζεται η λύση δίνεται η νέα οπτική του προβλήματος με το ανάπτυγμα του κύβου για να σχεδιαστεί εκεί η διαδρομή της αράχνης	Για το mathtask: 20΄ επεξεργασία σε ομάδες, 25΄ ολομέλεια – διαλεκτική ανταλλαγή Για τα πειράματα (επιλεκτικά κάποια): 25΄
Δωδεκάεδρο: η πατέντα του Steinhaus Κατασκευή ομαδική με χοντρό χαρτόνι και λάστιχα (μέγεθος Α3 στην φωτοτυπία)	20΄
Μια μαγική κάρτα (tetra-tetra-flexagon)	25΄ (η κατασκευή)
Συγκέντρωση των εργασιών που ανάθεσαν οι εκπαιδευτικοί στην τάξη τους (προηγούμενης συνάντησης) και συζήτηση	20΄

Όγκοι κυλίνδρων (mathtask) και πειράματα

<u>ΔΡΑΣΤΗΡΙΟΤΗΤΑ 1 (όγκοι)</u>

Το παρακάτω είναι ένα στιγμιότυπο από την τάξη.

> Η εκπαιδευτικός έδωσε στους μαθητές της μια κόλλα χαρτί σχήματος ορθογωνίου και διαστάσεων 18×12 τ.εκ. μαζί με κολλητική ταινία για να ενώσουν δύο απέναντι πλευρές της (είτε τις δύο μεγάλες είτε τις δύο μικρές) ώστε να φτιάξουν έναν κύλινδρο (την παράπλευρη επιφάνειά του). Μόλις οι μαθητές έφτιαξαν τον κύλινδρο, η εκπαιδευτικός ζήτησε να συγκρίνουν τους όγκους των κυλίνδρων.
>
> **Γιάννης:** Τι να συγκρίνουμε; Το ίδιο είναι, αφού και οι δύο κύλινδροι κατασκευάστηκαν με το ίδιο χαρτί.
>
> **Ελένη:** Σίγουρα ο κύλινδρος που έχει το μεγάλο ύψος θα έχει και τον πιο μεγάλο όγκο.
>
> **Γεωργία:** Μα αυτός ο κύλινδρος που λες Ελένη, έχει πολύ μικρό κύκλο στη βάση του! Ίσως να μην έχει μεγαλύτερο όγκο από τον άλλον…
>
> **Κώστας:** Εγώ γέμισα με άμμο τους κυλίνδρους και είδα ότι «τρεις κύλινδροι στενόμακροι είναι δύο κύλινδροι κοντόχοντροι»
>
> **Νίκη:** Εγώ μέτρησα τις ακτίνες στη βάση. Στον στενόμακρο είναι περίπου 2 εκ. άρα ο όγκος του είναι 3,14×4×18=226 κ. εκ, ενώ στον κοντόχοντρο η ακτίνα είναι περίπου 3 εκ. άρα ο όγκος του είναι 3,14×9×12=339 κ. εκ.. Συνεπώς, ο κοντόχοντρος έχει πιο μεγάλο όγκο.

<u>ΕΡΩΤΗΣΕΙΣ</u>

1. Ποια παιδιά εκφράζουν ορθές απόψεις; Σε τι διαφέρει η προσέγγισή τους;
2. Για κάθε παιδί που κάνει λάθος εκτίμηση για τους όγκους, μπορείτε να βρείτε πού στηρίζεται η λάθος πεποίθησή του;
3. Μπορείτε να σκεφτείτε ένα πείραμα με κέρματα στο οποίο να γίνεται εμφανές το πώς αλλάζει ο όγκος των κυλίνδρων καθώς μεταβάλλεται το ύψος τους, ενώ η βάση τους παραμένει ίδια;

<u>ΔΡΑΣΤΗΡΙΟΤΗΤΑ 2 (παράπλευρη επιφάνεια κυλίνδρου)</u>

Πάρτε ένα πλάγιο παραλληλόγραμμο και ενώστε τις δύο απέναντι πλευρές του (ας πούμε τις δύο μικρές (αν δεν είναι ρόμβος).

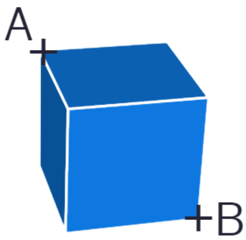
1. Θα προκύψει κάποια επιφάνεια, αλλά, τι σχήματος; Μπορείτε να τη φανταστείτε πριν υλοποιήσετε το πείραμα;

Πώς σκεφτήκατε;

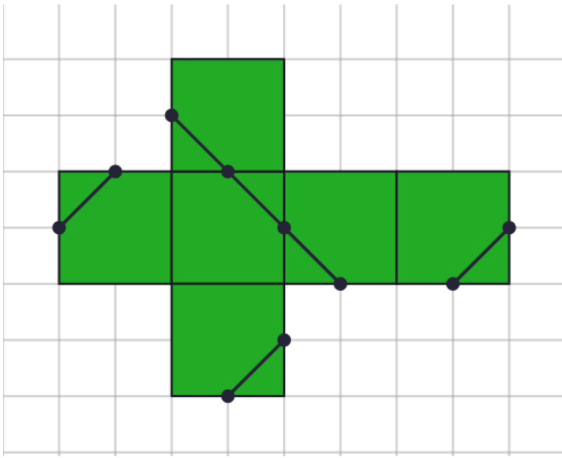
ΔΡΑΣΤΗΡΙΟΤΗΤΑ 3 (Πειράματα: από το επίπεδο στον χώρο και αντίστροφα)

1. Πάρετε ένα ρυζόχαρτο και σχεδιάστε με μαρκαδόρο μια διαγώνιό του. Τυλίξτε το έπειτα σε «ρολό» (η μικρή πλευρά μένει οριζόντια και η μεγάλη «κυκλώνεται» σε πολλούς κύκλους). Τι σχήμα πήρε η διαγώνιος; Τι συμβαίνει αν κάνετε όλο και μικρότερη τη διάμετρο του «ρολού»;

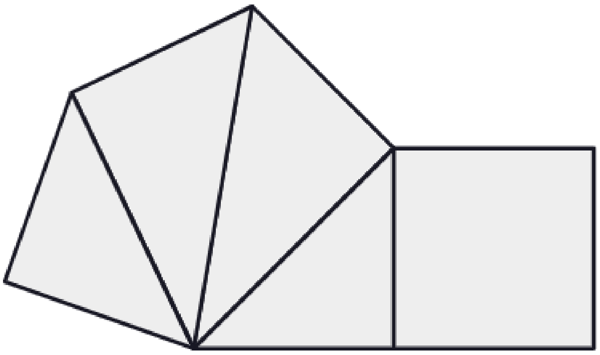
2. Μια αράχνη κινείται στην επιφάνεια ενός κύβου, από την κορυφή Α (πάνω έδρα - πίσω αριστερά) στην κορυφή Β (κάτω έδρα - εμπρός δεξιά). Ποια είναι η συντομότερη διαδρομή που συνδέει τις δύο κορυφές;



3. Παρακάτω βλέπετε το ανάπτυγμα ενός κύβου στο οποίο σχεδιάσαμε κάποιες γραμμές και σημεία. Να ονομάσετε με το ίδιο γράμμα τα σημεία που θα ταυτιστούν όταν «κλείσει» το ανάπτυγμα και σχηματιστεί ο κύβος. Τι σχήμα θα σχηματίσουν τότε οι γραμμές;

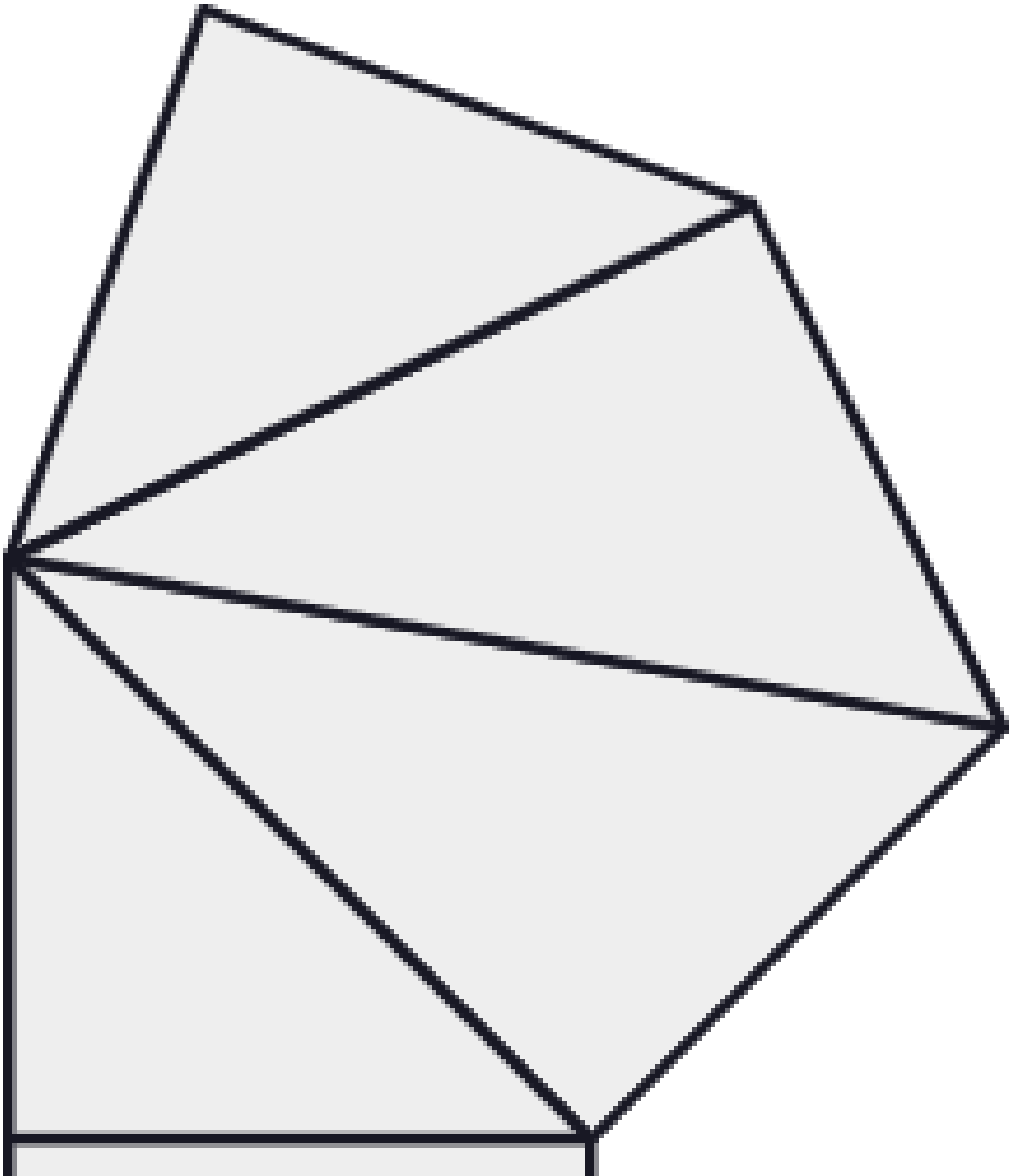


4. Το διπλανό είναι το ανάπτυγμα μιας τετραγωνικής πυραμίδας. Σχεδιάστε 3 τέτοιες πυραμίδες και προσπαθήστε να συνθέσετε έναν κύβο. Τι συμβαίνει;



https://polypad.amplify.com/p/Z3dvagizGGNWXw

5. Να λύσετε το πρόβλημα του αναπτύγματος του κύβου: https://polypad.amplify.com/p/uRAfLu92IJkjlw



Ανάπτυγμα πυραμίδας

Δωδεκάεδρο: η πατέντα του Steinhaus

https://en.etudes.ru/models/steinhaus-dodecahedron/

Περάστε έναν κύβο μέσα από έναν άλλον κύβο ίδιου μεγέθους

https://momath.org/mathmonday/math-monday-12-card-star-puzzle/math-monday-passing-a-cube-through-another-cube/

5η Συνάντηση: Ο εκπαιδευτικός στον ρόλο του δημιουργού – Αξιολόγηση του προγράμματος

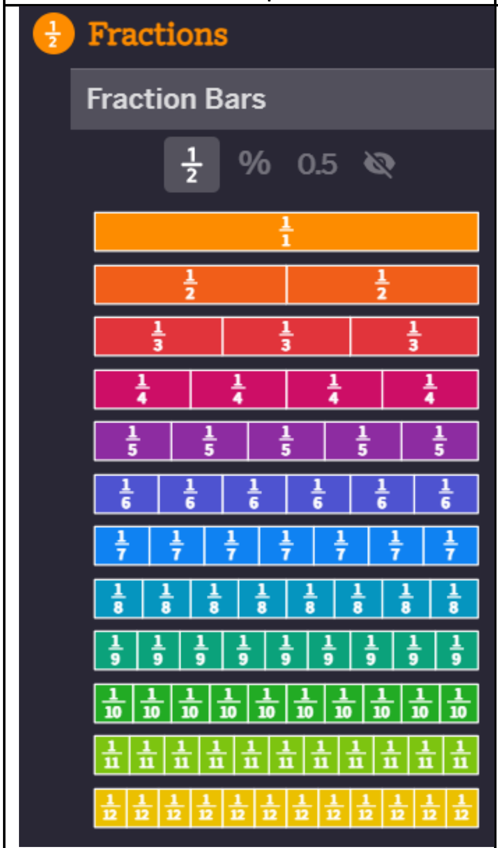
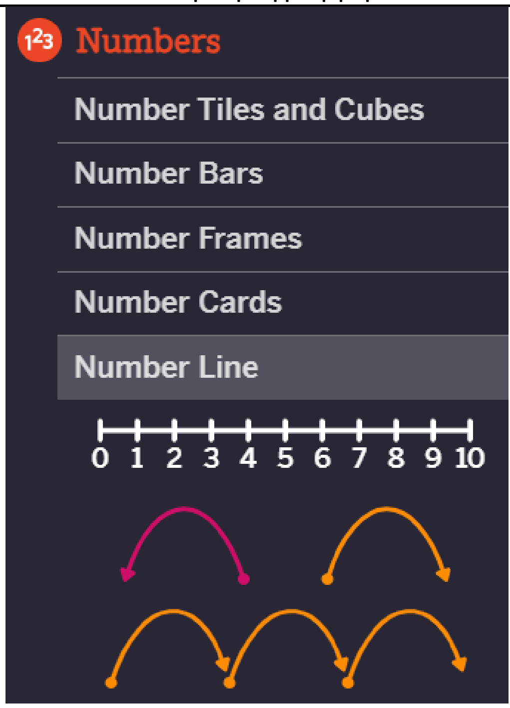
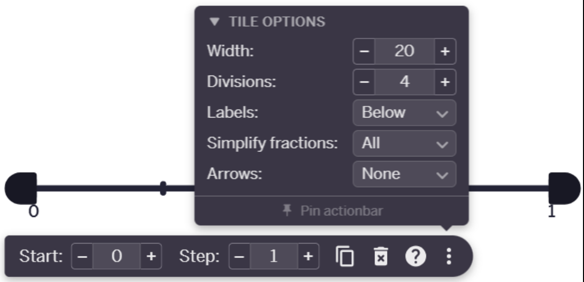
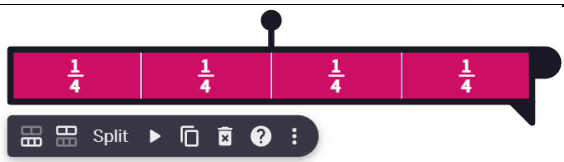
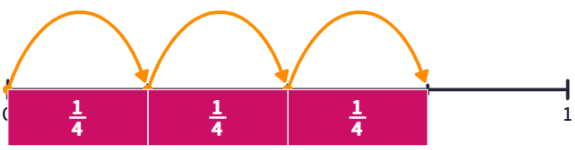
Α. Εφαρμογές με χειραπτικά εργαλεία και ψηφιακά μέσα
Β. Αξιολόγηση του Προγράμματος

Έργο	Διάρκεια
Δημιουργία mathtask	45΄
Παρουσίαση των mathtasks που δημιουργήθηκαν από τις ομάδες	45΄
Παιχνίδια στρατηγικής: ΝΙΜ, Βάτραχοι και Φρύνοι	15΄ παιχνίδι ΝΙΜ, 15΄ συζήτηση για την στρατηγική του παιχνιδιού ΝΙΜ
ΕΡΩΤΗΣΕΙΣ ΤΕΛΙΚΗΣ ΑΞΙΟΛΟΓΗΣΗΣ ΤΟΥ ΠΙΛΟΤΙΚΟΥ ΕΠΙΜΟΡΦΩΤΙΚΟΥ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑΤΟΣ:	15΄

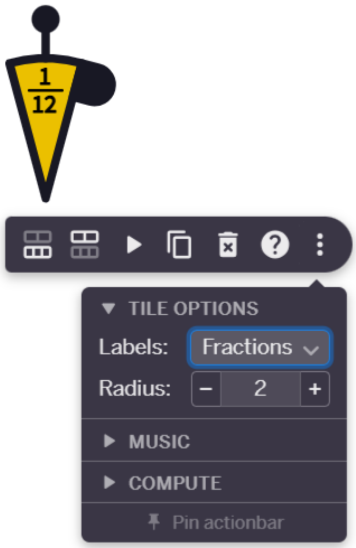
Πέντε δημιουργίες με το Polypad (εργαστηριακή δραστηριότητα)

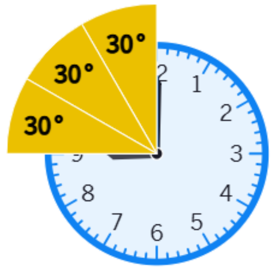
Ανοίγουμε το POLYPAD https://polypad.amplify.com/

1η δημιουργία: Κλάσματα και αριθμογραμμή

<table>
<tr><th>Τα κλάσματα:</th><th>Η αριθμογραμμή</th></tr>
<tr><td>
</td><td>
</td></tr>
<tr><td>Αρχικά, πάρτε την αριθμογραμμή
1. Την ρυθμίζετε στο εύρος 0 – 1
2. Δεξί κλικ στις τελίτσες και επιλέξτε width 20, divisions 4</td><td>
</td></tr>
<tr><td>Να πάρετε τα τέταρτα</td><td>
</td></tr>
<tr><td>Συνδυάστε με την αριθμογραμμή και το εργαλείο «διαδοχικά βήματα» για να σχηματίσετε τα $\frac{1}{4}$, $\frac{2}{4}$, $\frac{3}{4}$, $\frac{4}{4}$</td><td>
</td></tr>
</table>

$2^{η}$ δημιουργία: Κλάσματα και μοίρες

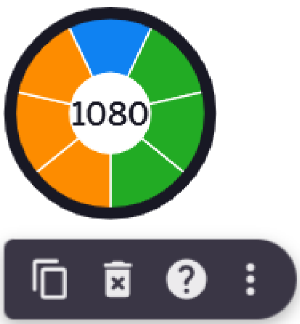
<table>
<tr>
<td>Πάρετε από τα κλάσματα τον κυκλικό τομέα 1/12
Επιλέξτε αντί για Fractions το Degrees

</td>
<td>Από τα Games and Applications / Clocks Πάρετε δύο ρολόγια με γρανάζια (μπλε) και ρυθμίστε τα στις ώρες 9:00 και 9:30

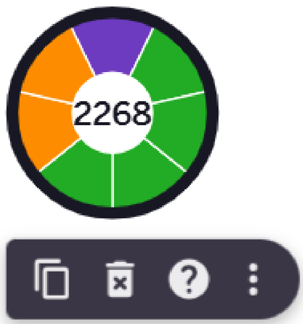
Ποια γωνία σχηματίζουν οι δείκτες;
Να διερευνηθεί με την επέκταση του τομέα:


Για την ώρα 9:30 το ίδιο ερώτημα με συνδυασμό τομέων 30^{o} και 45^{o}.</td>
</tr>
</table>

$3^{η}$ δημιουργία: Ανάλυση αριθμού σε γινόμενο πρώτων παραγόντων

<table>
<tr>
<td>Με το εργαλείο Numbers / Prime Factor Circles

Πάρετε τον αριθμό 1080


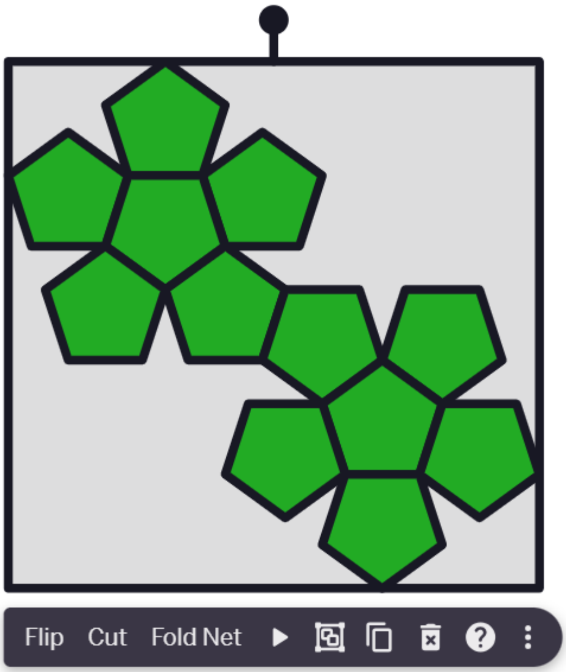
Έπειτα αναλύστε τον σε πρώτους παράγοντες (τραβώντας τους τομείς).</td>
<td>Κάνετε το ίδιο και για τον αριθμό 2268 (προσέξτε να μην μπερδέψετε τους παράγοντες)


Πώς μπορούμε από την ανάλυση να εντοπίσουμε τον ΜΚΔ(1080, 2268);</td>
</tr>
</table>

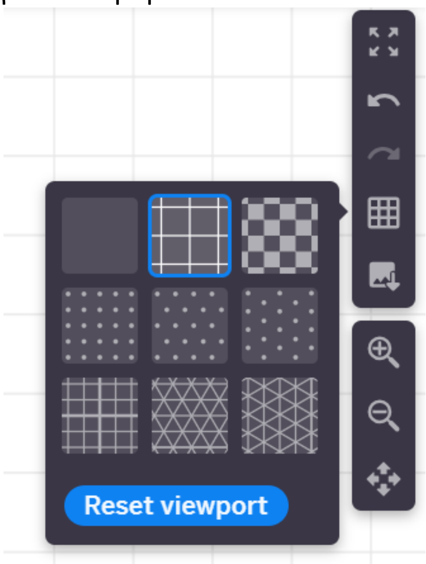
4η δημιουργία: Αναπτύγματα πλατωνικών στερεών

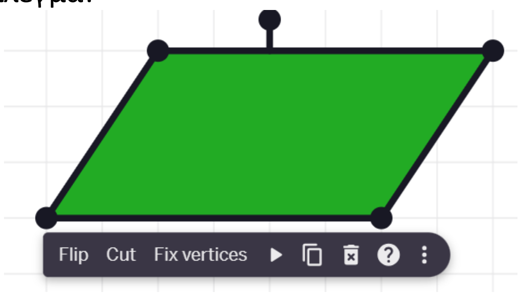
<table>
<tr>
<td>Με το εργαλείο Geometry / Polygons and Shapes δημιουργήστε τα αναπτύγματα πλατωνικών στερεών.

Στο παράδειγμα φαίνεται το δωδεκάεδρο.

Έπειτα επιλέξτε όλη την σύνθεση και πατήστε το FoldNet για να αναδιπλωθεί στον χώρο.</td>
<td></td>
</tr>
</table>

5η δημιουργία: Κόβουμε το παραλληλόγραμμο

<table>
<tr>
<td>Επιλέξτε την εμφάνιση τετραγωνικού πλέγματος από την δεξιά εργαλειοθήκη
</td>
<td>Στη συνέχεια, επιλέξτε το εργαλείο custom

για να σχεδιάσετε ένα πλάγιο παραλληλόγραμμο με κορυφές στο πλέγμα:

Με το εργαλείο Cut, κόψτε το κατάλληλα σε δύο κομμάτια που με αναδιάταξη σχηματίζουν ορθογώνιο παραλληλόγραμμο.</td>
</tr>
</table>

Παιχνίδια στρατηγικής: NIM, Βάτραχοι και Φρύνοι

https://lykpeirak-mlab.sites.sch.gr/teaching/other/2010-11_visit_A1/strategy_games.pdf
https://nrich.maths.org/content/00/12/game1/frogs/index.html#/student

Δημιουργία mathtask

ΟΜΑΔΙΚΗ ΕΡΓΑΣΙΑ: (ΧΡΟΝΟΣ 40΄)
Να δημιουργήσετε με την ομάδα σας μία ΔΙΔΑΚΤΙΚΗ ΚΑΤΑΣΤΑΣΗ στο μαθηματικό αντικείμενο που αντιστοιχεί στην ομάδα σας…
ΟΜΑΔΑ 1: Αριθμοί και Πράξεις
ΟΜΑΔΑ 2: Κλάσματα
ΟΜΑΔΑ 3: Μεταβλητές-Ποσά ανάλογα και αντιστρόφως ανάλογα
ΟΜΑΔΑ 4: Γεωμετρία
ΟΜΑΔΑ 5: Στερεομετρία

Να συμπεριλάβετε:

- πιθανές απαντήσεις των μαθητών (σωστές και λανθασμένες)
- Πώς θα απαντούσατε σωστά;
- Πώς θα διαχειριστείτε τις πιθανές λανθασμένες ή ελλιπείς προσεγγίσεις ή τη γνωστική σύγκρουση των μαθητών;
- Να παρουσιάσετε δι’ ενός εκπροσώπου της ομάδας σας, το Σενάριό σας στην Ολομέλεια.

Ερωτήσεις τελικής αξιολόγησης του επιμορφωτικού προγράμματος:

1. Πώς βιώσατε την εμπειρία συνύπαρξης των δύο βαθμίδων κατά τις συναντήσεις του σεμιναρίου;
   - Μπορείτε να περιγράψετε κάποιο συγκεκριμένο περιστατικό;
2. Άλλαξε κάτι στη διδασκαλία σας εξαιτίας της αλληλεπίδρασης μεταξύ των συναδέλφων ή/και εξαιτίας των διδακτικών προτάσεων του σεμιναρίου;
   - Μπορείτε να αναφέρετε παραδείγματα;
3. Άλλαξε η οπτική που έχετε για τους/τις συναδέλφους σας της άλλης βαθμίδας;
   - Μπορείτε να αναφέρετε ένα παράδειγμα;
4. Θεωρείτε ότι θα μπορέσετε να αντιμετωπίσετε τα λάθη των μαθητών σας με διαφορετική οπτική μετά το σεμινάριο;
   - Μπορείτε να δώσετε ένα παράδειγμα;
5. Τελικά, τι σημαίνει κατά τη γνώμη σας να είναι κάποιος καλός ή έστω ικανός στα μαθηματικά;

Προτεινόμενες δραστηριότητες για τη Β΄ φάση του προγράμματος

Στους επιμορφούμενους που ολοκλήρωσαν την Α΄ φάση κατά την προηγούμενη χρονιά (του πιλοτικού προγράμματος 2023-24), δόθηκαν οι ακόλουθες δυνατότητες για μια δεύτερη επιμορφωτική φάση, κατά το έτος 2024-25:

1. **Ετεροπαρατήρηση (απλή)**. Παρακολούθηση μίας (1) διδασκαλίας άλλου εκπαιδευτικού της ίδιας ή της άλλης βαθμίδας. Η παρακολούθηση της διδασκαλίας μπορεί να γίνει είτε στην τάξη που διδάσκει ο παρατηρητής είτε σε προηγούμενη ή επόμενη τάξη (π.χ. ένας εκπαιδευτικός που διδάσκει στην ΣΤ΄ Δημοτικού μπορεί να παρατηρήσει διδασκαλία σε Ε΄ ή ΣΤ΄ τάξη Δημοτικού ή σε Α΄ Γυμνασίου).
Ο παρατηρητής θα δημιουργήσει ένα «πρωτόκολλο παρατήρησης» το οποίο μπορεί να περιλαμβάνει τους στόχους της παρατήρησης (παιδαγωγικούς π.χ. διαχείριση τάξης ή μαθηματικούς π.χ. επίλυση προβλήματος), κάποιο κρίσιμο διδακτικό συμβάν (επεισόδιο στο οποίο κάτι έγινε, το λόγο που αυτό είναι σημαντικό, ερμηνεία, τεκμηρίωση, προτάσεις διαχείρισης - κάτι δηλαδή σαν τα επεισόδια τύπου mathtask), συμπεράσματα. Προτείνονται τουλάχιστον τρεις συναντήσεις ανάμεσα στους δύο εκπαιδευτικούς: α) πριν: στοχοθεσία, β) υλοποίηση της παρατήρησης και γ) μετά: αναστοχασμός.
<u>Στοιχεία έκθεσης απολογισμού:</u> πρωτόκολλο παρατήρησης.

2. **Συνδιδασκαλία**. Μία (1) συνδιδασκαλία με εκπαιδευτικό ίδιας ή διαφορετικής βαθμίδας.
Η δραστηριότητα προτείνεται να περιλαμβάνει τουλάχιστον τρεις συναντήσεις ανάμεσα στους δύο εκπαιδευτικούς: α) πριν: στοχοθεσία, β) υλοποίηση της συνδιδασκαλίας και γ) μετά: αναστοχασμός.
<u>Στοιχεία έκθεσης απολογισμού:</u> Έκθεση με τα προσδοκώμενα μαθησιακά αποτελέσματα, τη μεθοδολογία, το εκπαιδευτικό υλικό και τα συμπεράσματα.

3. **Ετεροπαρατήρηση (με συνοδεία μαθητών)**. Παρατήρηση μιας (1) διδασκαλίας άλλου εκπαιδευτικού, της ίδιας ή της άλλης βαθμίδας, με συνοδεία των μαθητών της τάξης που διδάσκει (π.χ. ένας εκπαιδευτικός που διδάσκει στην ΣΤ΄ Δημοτικού μπορεί να πάρει την τάξη του και να μεταβεί στην τάξη άλλου εκπαιδευτικού της ίδιας ή της άλλης βαθμίδας, όπου αυτό είναι εφικτό).
Η δραστηριότητα θα περιλαμβάνει τουλάχιστον τρεις συναντήσεις ανάμεσα στους δύο εκπαιδευτικούς: α) προετοιμασία, β) υλοποίηση και γ) αναστοχασμός. Επιπλέον, προτείνεται, στο στάδιο της προετοιμασίας, μία συζήτηση με τους μαθητές και τις μαθήτριες ώστε τα σχόλια των μαθητών να ενσωματωθούν στον αναστοχασμό.
<u>Στοιχεία έκθεσης απολογισμού:</u> Πρωτόκολλο παρατήρησης με τα στοιχεία της παρατήρησης ως προς τη διδασκαλία και την ανταπόκριση των μαθητών και των δύο τάξεων.

4. **Κριτικός φίλος**. Συμμετοχή, ως «κριτικός φίλος» με τήρηση ημερολογίου (παρατήρηση, καταγραφή και αξιολογική κρίση) σε τουλάχιστον τρεις (3) επιμορφωτικές συναντήσεις της Α΄ φάσης που υλοποιούνται κατά την τρέχουσα περίοδο.

Στοιχεία έκθεσης απολογισμού: Πρωτόκολλο παρατήρησης με τα στοιχεία της καταγραφής, τα συμπεράσματα της παρατήρησης και τον αναστοχασμό του/της παρατηρητή/τριας για το τι σημαίνει για αυτόν/τήν η εμπειρία της παρατήρησης.

5. **Εκπαιδευτική δραστηριότητα**. Οργάνωση ή συνδιοργάνωση μιας (1) εκπαιδευτικής δραστηριότητας, εκπαιδευτικής επίσκεψης, εκπαιδευτικής εκδήλωσης (π.χ. μαθηματικό θέατρο, μαθηματικό χορευτικό, επίσκεψη σε χώρο μαθηματικού ενδιαφέροντος, συνέντευξη με θέμα σχετικό με τα μαθηματικά, ανάγνωση βιβλίου από τον χώρο της μαθηματικής λογοτεχνίας-θεματολογίας κ.λπ.).
Στοιχεία έκθεσης απολογισμού: Έκθεση με τους στόχους, το περιεχόμενο και τα συμπεράσματα της δραστηριότητας.

6. **Επίλυση προβλήματος**. Εργασία τους/της εκπαιδευτικού με τους μαθητές του/της στην επίλυση προβλήματος: Επιλογή θέματος, εργασία με τους μαθητές.
Στοιχεία έκθεσης απολογισμού: Φάκελος με το εκπαιδευτικό υλικό, την καταγραφή των λύσεων των μαθητών, τα συμπεράσματα.

7. **Εκπαιδευτικό υλικό**. Παραγωγή ή συμπαραγωγή εκπαιδευτικού υλικού (ψηφιακού, εικαστικού, χειραπτικού κ.λπ.) από εκπαιδευτικούς/μαθητές της ίδιας ή διαφορετικής βαθμίδας, σχετικού με τα Μαθηματικά.
Στοιχεία έκθεσης απολογισμού: Το παραγόμενο εκπαιδευτικό υλικό μαζί με μια έκθεση στην οποία να περιγράφεται ο τρόπος εργασίας των μαθητών και ο σκοπός της δημιουργίας του εκπαιδευτικού υλικού.

Οι εργασίες που υλοποιήθηκαν κατά τη Β΄ φάση του προγράμματος (2024-25):

- **Συνδιδασκαλία** μαθητών ΣΤ΄ Δημοτικού και Α΄ Γυμνασίου στα Μαθηματικά (Δημοτικό Σχολείο και Γυμνάσιο Βιάννου).
- **Κριτικός φίλος:** Παρατήρηση, καταγραφή και αξιολογική κρίση σε τρεις επιμορφωτικές συναντήσεις της Α΄ φάσης (σκέψεις και παρατηρήσεις)
- **Κριτικός φίλος:** Παρατήρηση των 4 από τις 5 συναντήσεις της Α΄ φάσης και σχόλια για τρεις από αυτές.
- **Συνδιδασκαλία** τριών εκπαιδευτικών στα ποσοστά (2 από Δευτεροβάθμια και 1 από Πρωτοβάθμια (Πρότυπο Γυμνάσιο και 24ο Δημοτικό Σχολείο Ηρακλείου).
- **Εκπαιδευτική δραστηριότητα:** Διδασκαλία μιας διδακτικής ώρας της ενότητας «Θέσεις ευθειών στο επίπεδο: επιδράσεις από τον καλλιτέχνη Mondrian» (Δύο τμήματα της Α΄ Γυμνασίου στο Γυμνάσιο Αρχανών).
- **Εκπαιδευτική δραστηριότητα:** Διδασκαλία μιας διδακτικής ώρας από την ομάδα μαθητών/τριών της ενότητας «Ο κύκλος και τα στοιχεία του» (Ένα τμήμα της Β΄ Γυμνασίου στο Γυμνάσιο Αρχανών).
- **Συνδιδασκαλία** εκπαιδευτικών γενικής και ενταξιακής εκπαίδευσης με θέμα «Η ομορφιά της Συμμετρίας», την οποία παρακολούθησαν δύο εκπαιδευτικοί από τη Λιθουανία στο πλαίσιο του Erasmus+.

- **Συνδιδασκαλία** εκπαιδευτικών διαφορετικής βαθμίδας της ενότητας «Κύκλος, Μήκος Κύκλου, Εμβαδόν Κυκλικού Δίσκου» (Δημοτικό Σχολείο Κοκκίνη Χάνι, 1ο Γυμνάσιο Ηρακλείου)

Βιβλιογραφία

MathTASK

Ενδεικτικά προτείνουμε τις παρακάτω αναφορές, περισσότερα στο MathTASK website: https://www.uea.ac.uk/groups-and-centres/a-z/mathtask/publications

Biza, I. & Nardi, E. (2019). Scripting the experience of mathematics teaching: The value of student teacher participation in identifying and reflecting on critical classroom incidents *International Journal for Lesson and Learning Studies, 9*(1), 43–56. Publisher page. UEA Repository

Biza, I., Nardi, E., & Zachariades, T. (2018). Competences of mathematics teachers in diagnosing teaching situations and offering feedback to students: Specificity, consistency and reification of pedagogical and mathematical discourses. In T. Leuders, J. Leuders, & K. Philipp (Eds.), *Diagnostic Competence of Mathematics Teachers. Unpacking a complex construct in teacher education and teacher practice,* (pp. 55–78). Springer. Publisher page. UEA Repository, Περίληψη στα Ελληνικά.

Biza, I., Nardi, E., & Joel, G. (2015). Balancing classroom management with mathematical learning: Using practice-based task design in mathematics teacher education. *Mathematics Teacher Education and Development, 17*(2), 182–198. UEA Repository, Περίληψη στα Ελληνικά

Biza, I., Nardi, E., & Zachariades, T. (2009). Teacher beliefs and the didactic contract on visualisation. *For the Learning of Mathematics, 29*(3), 31–36. https://ueaeprints.uea.ac.uk/15822/1/FLM_2009_Biza_Nardi_Zachariades_SENT.pdf, Περίληψη στα Ελληνικά

Biza, I., Nardi, E., & Zachariades, T. (2007). Using tasks to explore teacher knowledge in situation-specific contexts. *Journal of Mathematics Teacher Education, 10,* 301–309. UEA Repository, Περίληψη στα ελληνικά

Healy, L., Nardi, E., & Biza, I. (2024). Interdependency, alternative forms of mathematical agency and joy as challenges to ableist narratives about the learning and teaching of mathematics. *ZDM Mathematics Education, 56, 379–391*. https://doi-org.uea.idm.oclc.org/10.1007/s11858-024-01565-z

Μπιζά, Ε., κ.ά. (2024, προσωρινά πρακτικά). Μαθηματικές διαδρομές μετάβασης μαθητών/τριών και εκπαιδευτικών απο το Δημοτικο στο Γυμνασιο. Στο Επιμελητές Προς Επιβεβαίωση (Επιμ.). *10ο Πανελλήνιο Συνέδριο Ένωσης Ερευνητών Διδακτικής Μαθηματικών* (σελ. 957–961). ΕΝΕΔΙΜ. Προσωρινά πρακτικά

Μπιζά, Ε., κ.ά. (2022). Μοντέλα επιμόρφωσης για την ανατροφοδότηση από την έρευνα στη διδακτική πράξη της διδασκαλίας των μαθηματικών και αντίστροφα. Στο Β. Χρυσικού, Χ. Σταθοπούλου, Τ. Τριανταφυλλίδης, Κ. Χατζηκυριάκου, Α. Χρονάκη, & Κ. Σδρόλιας (Επιμ.). *9ο Πανελλήνιο Συνέδριο Ένωσης Ερευνητών Διδακτικής Μαθηματικών* (σελ. 280–282). ΕΝΕΔΙΜ. UEA Repository

Μπιζά, Ε., & Ναρδή, Ε. (2019). MathTASK και CAPTeaM: Συγκεκριμένες καταστάσεις από την τάξη ως έναυσμα για διδακτικό αναστοχασμό. Στο Κ. Χρίστου (Επ.), *8ο Πανελλήνιο Συνέδριο Ένωσης Ερευνητών Διδακτικής Μαθηματικών* (σελ. 758–760). ΕΝΕΔΙΜ. UEA Repository

Nardi, E., Biza, I., & Zachariades, T. (2012). 'Warrant' revisited: Integrating mathematics teachers' pedagogical and epistemological considerations into Toulmin's model for argumentation. *Educational Studies in Mathematics, 79*(2), 157–173. UEA Repository, Περίληψη στα ελληνικά.

Παπαστάθη, Χ., Κανέλλος, Ι., Παπαδάκη, Π., Μπιζά, Ε., & Ναρδή, Ε. (2022). Πάρε θεση! Η μαθηματική απόδειξη ως εργαλείο τεκμηρίωσης στην τάξη. Στο Β. Χρυσικού, Χ. Σταθοπούλου, Τ. Τριανταφυλλίδης, Κ. Χατζηκυριάκου, Α. Χρονάκη, & Κ. Σδρόλιας (Επιμ.). *9ο Πανελλήνιο Συνέδριο Ένωσης Ερευνητών Διδακτικής Μαθηματικών* (σελ. 159–158). ΕΝΕΔΙΜ. UEA Repository

Σχετικά με τις προτεινόμενες δραστηριότητες και τον σχεδιασμό τους

Κατσομήτρος, Σ., & Τάτσης, Κ. (2022). Μαθηματική μετάβαση από το δημοτικό στο γυμνάσιο: Αντιλήψεις και παιδαγωγική γνώση περιεχομένου ενός εκπαιδευτικού. Στο Β. Χρυσικού, Χ. Σταθοπούλου, Τ. Τριανταφυλλίδης, Κ. Χατζηκυριάκου, Α. Χρονάκη, & Κ. Σδρόλιας (Επιμ.). *9ο Πανελλήνιο Συνέδριο Ένωσης Ερευνητών Διδακτικής Μαθηματικών* (σελ. 249–257). ΕΝΕΔΙΜ.

Kaur, T., McLoughlin, E., & Grimes, P. (2022). Mathematics and science across the transition from primary to secondary school: A systematic literature review. *International Journal of STEM Education, 9*(1), 1–13. https://doi.org/10.1186/s40594-022-00328-0

Ναρδή, Ε., Μπαμπίλη, Α., Μπούφη, Α., Στουραΐτης, Κ., & Τριανταφυλλίδης, Τ. (2017). Μεταβάσεις στη μαθηματική εκπαίδευση (πρωτοβάθμια, δευτεροβάθμια, τριτοβάθμια): Επιστημολογικές, ψυχολογικές, παιδαγωγικές και θεσμικές διαστάσεις. Στο Θ. Ζαχαριάδης, Δ. Πόταρη, Γ. Ψυχάρης (Επιμ.). *7ο Πανελλήνιο Συνέδριο Ένωσης Ερευνητών Διδακτικής Μαθηματικών* (σελ. 85–105). ΕΝΕΔΙΜ.

Πόταρη, Δ., Ζωιτσάκος, Σ., Καμπούκος, Κ., Κόσυβας, Γ., Λουλάκης, Μ., Μεταξάς, Ν., Τριανταφύλλου, Χ. (2022). Οδηγός εκπαιδευτικού Μαθηματικών Γυμνασίου. 2η Έκδοση Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής. https://www.iep.edu.gr/provoli-neon-programmaton-spoudon/

Psycharis, G., Trgalová, J., Alturkmani, M. D., Kalogeria, E., Latsi, M., & Roubin, S. (2020). Studying primary and secondary teachers' collaborative design of resources for algebra. In H. Borko & D. Potari (Eds.). *ICMI Study 25 - Teachers of mathematics working and learning in collaborative groups* (pp. 668–675). University of Lisbon.

Σακονίδης, Χ., Κασσώτη, Ό., Καφούση, Σ., Κλιάπης, Π., Κλώθου, Ά., Λάτση, Μ., Τριανταφυλλίδης, Τ. (2022). Οδηγός εκπαιδευτικού Μαθηματικών Δημοτικού. 2η Έκδοση Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής. https://www.iep.edu.gr/provoli-neon-programmaton-spoudon/

Sdrolias, K. A., & Triandafillidis, T. A. (2008). The Transition to Secondary School Geometry: Can There Be a 'Chain of School Mathematics'? *Educational Studies in Mathematics, 67*(2), 159–169. https://doi.org/10.1007/s10649-007-9093-1

Wenger, E. (1998). Communities of practice: Learning, meaning and identity. Cambridge University Press.