Η γεωμετρική καμπύλη της έλλειψης μέσω προβλημάτων της μηχανικής

Περυσινάκη Ειρήνη
Σύμβουλος Εκπαίδευσης ΠΕ03, iriniper@sch.gr

Περίληψη

Συζητούνται δύο προβλήματα μηχανικής που οδηγούν σε ελλείψεις: το πρώτο αφορά την θέση που παίρνει μια χάντρα σε κρεμασμένη κλωστή, ενώ το δεύτερο αφορά τον γεωμετρικό τόπο σημείου σκάλας που ολισθαίνει. Η γεωμετρική προσέγγιση των προβλημάτων αποκαλύπτει την ανακλαστική ιδιότητα της έλλειψης, την θεώρηση της έλλειψης ως «παραμορφωμένου» κύκλου και την μηχανική λειτουργία του ελλειψογράφου του Αρχιμήδη.

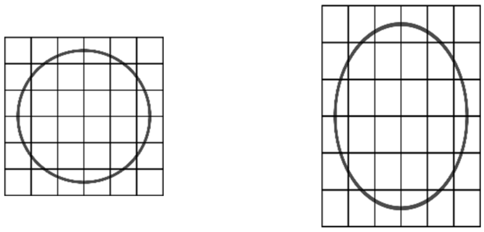
Abstract

We discuss two problems in mechanics that lead to ellipses: the first concerns the position taken by a bead on a hanging thread, while the second concerns the locus of a point in a ladder that slides on the floor. The geometric approach of the problems reveals the reflective property of the ellipse, the consideration of the ellipse as a "distorted" circle, and the mechanical operation of the trammel of Archimedes.

Λέξεις κλειδιά: καμπύλη της έλλειψης, ελλειψογράφος Αρχιμήδη, γεωμετρικός τόπος σημείων, ανακλαστική ιδιότητα της έλλειψης

Εισαγωγή

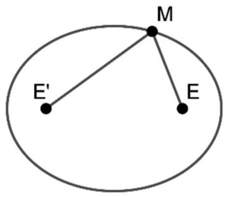
Το *οβάλ* είναι το σχήμα που αντιλαμβάνονται όλοι ως «μακρόστενος κύκλος». Η κατασκευή του οβάλ σχήματος επιτυγχάνεται με την επιμήκυνση ενός κύκλου ως προς μία κατεύθυνση -ιδιαίτερα εύκολη με τα σύγχρονα εργαλεία επεξεργασίας εικόνας (σχήμα 1).



(α) (β)

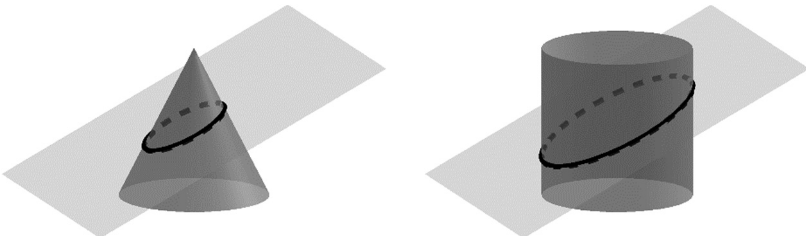
Σχήμα 1: (α) κύκλος, (β) το οβάλ ως κατακόρυφη επιμήκυνση του κύκλου

Από την άλλη, η *έλλειψη* είναι μια σαφώς καθορισμένη γεωμετρική καμπύλη: δεδομένων δύο σημείων E και E', που καλούνται εστίες της έλλειψης, και ενός μήκους 2α μεγαλύτερου της εστιακής απόστασης EE', η έλλειψη είναι ο γεωμετρικός τόπος των σημείων του επιπέδου M που το άθροισμα των αποστάσεών του από τις δύο εστίες είναι ακριβώς 2α (σχήμα 2).



$$ME + ME' = 2a$$

Σχήμα 2: η έλλειψη ως γεωμετρικός τόπος

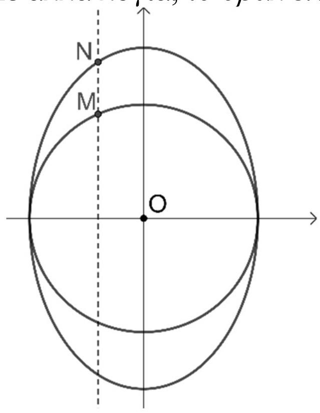


(α) (β)

Σχήμα 3: η έλλειψη ως τομή (α) κώνου με επίπεδο, (β) κυλίνδρου με επίπεδο

Η έλλειψη στη γεωμετρία εμφανίζεται ακόμα και ως τομή κώνου με επίπεδο (σχήμα 3α) και ως τομή ορθού κυλίνδρου με επίπεδο (σχήμα 3β) - έτσι ερμηνεύεται το γιατί η σκιά ενός κυκλικού αντικειμένου στον χώρο είναι συνήθως ελλειπτική ή γιατί όταν παρατηρούμε κυκλικά αντικείμενα στον χώρο υπό γωνία τα αντιλαμβανόμαστε και τα απεικονίζουμε ως ελλειπτικά (όπως συνέβη στην βάση του κώνου στο σχήμα 3β).

Αλλά και η επιμήκυνση ενός κύκλου κατά μία κατεύθυνση (η κατασκευή του οβάλ όπως την περιγράψαμε) είναι ένας μετασχηματισμός του κύκλου που οδηγεί σε έλλειψη. Με άλλα λόγια, *το οβάλ είναι έλλειψη*.



Σχήμα 4: κατακόρυφη επιμήκυνση του κύκλου κατά παράγοντα $\lambda = 1{,}5$

Απόδειξη: Ο κύκλος με κέντρο το O και ακτίνα ρ, έχει εξίσωση:

$$x^2 + y^2 = \rho^2 \qquad (1)$$

Επιμηκύνοντάς τον κατακόρυφα κατά παράγοντα λ>1, για κάθε σημείο $M(x_M, y_M)$ του κύκλο παίρνουμε ένα αντίστοιχο σημείο $N(x_N, y_N)$ του οβάλ στην ίδια κατακόρυφο, με $x_N = x_M$ και $y_N = \lambda y_M$.

Η σχέση (1) για τις συντεταγμένες του σημείου M γίνεται

$$x_M^2 + y_M^2 = \rho^2 \qquad (2)$$

από όπου προκύπτει ότι

$$x_N^2 + \frac{y_N^2}{\lambda^2} = \rho^2 \qquad (3)$$

ή αλλιώς,

$$\frac{x_N^2}{\rho^2} + \frac{y_N^2}{(\lambda\rho)^2} = 1 \qquad (4)$$

Οπότε το σημείο N ανήκει σε έλλειψη με εστίες $E'(0, -\rho\sqrt{\lambda^2 - 1})$ και $E(0, \rho\sqrt{\lambda^2 - 1})$ και μεγάλο άξονα $2\lambda\rho$ καθώς

$$NE' + NE = \sqrt{x_N^2 + \left(y_N + \rho\sqrt{\lambda^2 - 1}\right)^2} + \sqrt{x_N^2 + \left(y_N - \rho\sqrt{\lambda^2 - 1}\right)^2} = \qquad (5)$$

$$\sqrt{x_M^2+\left(\lambda y_M+\rho\sqrt{\lambda^2-1}\right)^2}+\sqrt{x_M^2+\left(\lambda y_M-\rho\sqrt{\lambda^2-1}\right)^2}=$$

$$\sqrt{\rho^2-y_M^2+\left(\lambda y_M+\rho\sqrt{\lambda^2-1}\right)^2}+\sqrt{\rho^2-y_M^2+\left(\lambda y_M-\rho\sqrt{\lambda^2-1}\right)^2}=$$

$$\sqrt{\lambda^2\rho^2+(\lambda^2-1)y_M^2+2\lambda\rho y_M\sqrt{\lambda^2-1}}+\sqrt{\lambda^2\rho^2+(\lambda^2-1)y_M^2-2\lambda\rho y_M\sqrt{\lambda^2-1}}=$$

$$\left(\lambda\rho+y_M\sqrt{\lambda^2-1}\right)+\left(\lambda\rho-y_M\sqrt{\lambda^2-1}\right)=$$

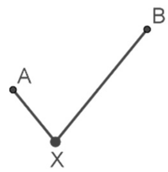
$$2\lambda\rho$$

Η προ-τελευταία σχέση ισχύει γιατί $\lambda>\sqrt{\lambda^2-1}$ και $|y_M|\le\rho$.

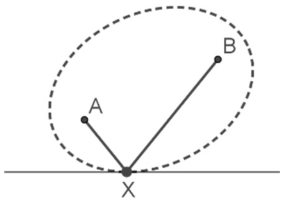
Στις επόμενες παραγράφους θα διερευνήσουμε δύο προβλήματα από την μηχανική, όπου θα εμφανιστούν ελλείψεις. Στο πρώτο πρόβλημα -της κρεμασμένης χάντρας- θα αναγνωρίσουμε την έλλειψη από τον ορισμό της ως γεωμετρικό τόπο. Στο δεύτερο πρόβλημα -της σκάλας που ολισθαίνει στο πάτωμα- θα αναγνωρίσουμε την έλλειψη ως την επιμήκυνση ενός κύκλου.

Η διερεύνηση των δύο προβλημάτων θα γίνει αποκλειστικά με μεθόδους ευκλείδειας γεωμετρίας και όχι αναλυτικής γεωμετρίας. Τα συμπεράσματα θα είναι εντυπωσιακά: χωρίς να γνωρίζουμε την εξίσωση της έλλειψης ή της εφαπτομένης της έλλειψης, το πρώτο πρόβλημα θα μας οδηγήσει στην ανακλαστική ιδιότητα της έλλειψης, ενώ με το δεύτερο πρόβλημα θα «επινοήσουμε» -μετά τον Αρχιμήδη- τον ελλειψογράφο του Αρχιμήδη.

1. Το πρόβλημα της Κρεμασμένης Χάντρας



(α)

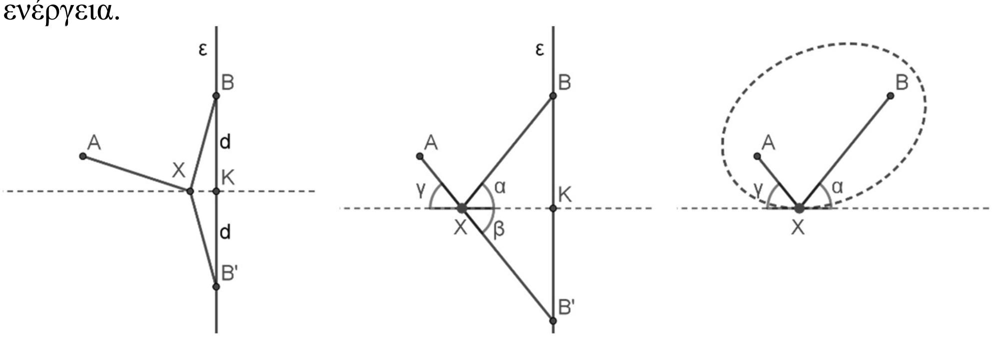


(β)

Σχήμα 5: (α) Η κρεμασμένη χάντρα, (β) η κατώτερη θέση που καταλαμβάνει στην έλλειψη

Πρόβλημα: Σε μία κλωστή μήκους l έχουμε περάσει μια χάντρα. Τα άκρα της κλωστής βρίσκονται σε σταθερά σημεία A και B που απέχουν μεταξύ τους λιγότερο από l. Η χάντρα, υπό την επίδραση της βαρύτητας, ισορροπεί στην θέση X ενώ η κλωστή λαμβάνει το σχήμα ανοιχτής τεθλασμένης γραμμής AXB (σχήμα 5α). Να καθορίσετε την ακριβή θέση του σημείου X ώστε να απεικονίσετε με ακρίβεια το σχήμα με την κρεμασμένη χάντρα, λαμβάνοντας υπόψη ότι η θέση του X θα πρέπει να είναι η κατώτερη δυνατή.

Η πληροφορία που μάς παρέχεται από την μηχανική είναι ότι η θέση της κρεμασμένης χάντρας είναι η κατώτερη δυνατή από όλα τα σημεία στα οποία θα μπορούσε να βρεθεί, δηλαδή τα σημεία μιας έλλειψης με εστίες τα A και B και μεγάλο άξονα l (σχήμα 5β). Και είναι λογικό η χάντρα να ισορροπεί στην κατώτερη θέση, καθώς εκεί θα έχει την μικρότερη δυναμική ενέργεια.



(α) (β) (γ)

Σχήμα 6: η διερεύνηση για την «κατώτερη» θέση για την χάντρα (α και β) που οδηγεί στην ανακλαστική ιδιότητα της έλλειψης (γ)

Ας εξετάσουμε γεωμετρικά τι συμβαίνει με αυτή την κατώτερη θέση για την χάντρα, θεωρώντας σταθερές τις θέσεις των άκρων της κλωστής A, B και το μήκος της l. Ας τοποθετήσουμε την χάντρα σε μια τυχαία θέση X στην κλωστή (σχήμα 6α), ας είναι ε η κατακόρυφη ευθεία που διέρχεται από το B και ας φέρουμε και την οριζόντια ευθεία που διέρχεται από το X και τέμνει την ε στο K, οπότε τα σημεία X και K έχουν το ίδιο «υψόμετρο». Ζητούμενο είναι να μεγιστοποιήσουμε την απόσταση $BK = d$ ή ισοδύναμα την απόσταση $BB' = 2d$, όπου B' είναι το συμμετρικό του B ως προς την οριζόντια ευθεία που διέρχεται από το X.
Το τμήμα BB' είναι το άθροισμα των προβολών των τμημάτων AB και AB' στην ε:

$$BB' = \pi\rho o\beta_{\varepsilon}AB + \pi\rho o\beta_{\varepsilon}AB' \qquad (6)$$

Άρα το BB' μεγιστοποιείται όταν μεγιστοποιηθεί η προβολή του AB' στην ε. Με τη σειρά της, αυτή η προβολή θα μεγιστοποιηθεί όταν μεγιστοποιηθεί το ίδιο το τμήμα AB' (ανισωτική σχέση πλάγιων τμημάτων σε ευθεία).

Όμως, από την τριγωνική ανισότητα στο τρίγωνο AXB' ισχύει

$$AB' \leq AX + XB' \qquad (7)$$

Και επειδή $XB' = XB$, από την (7) προκύπτει ότι

$$AB' \leq AX + XB \Leftrightarrow AB' \leq l \qquad (8)$$

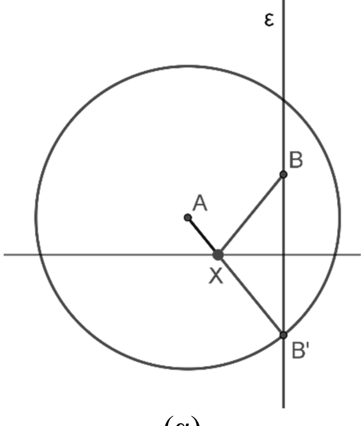
Άρα, η κατώτερη θέση για το X επιτυγχάνεται όταν $AB' = l$ και τα σημεία A, X και B' είναι συνευθειακά (σχήμα 6β).

Πριν περιγράψουμε αναλυτικά την κατασκευή της κατώτερης θέσης, ας παρατηρήσουμε την ισότητα των γωνιών $\hat{\alpha}$, $\hat{\beta}$, και $\hat{\gamma}$ στο σχήμα 6β:

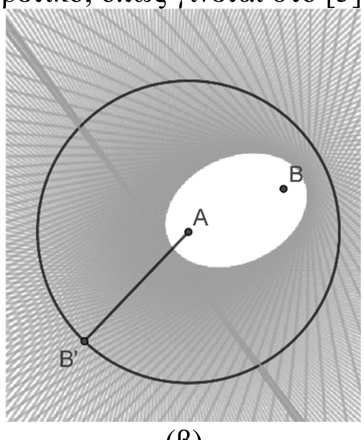
$\hat{\alpha} = \hat{\beta}$	γιατί η μεσοκάθετος του BB' διχοτομεί την γωνία κορυφής στο ισοσκελές τρίγωνο BXB'	(9)
$\hat{\beta} = \hat{\gamma}$	ως κατακορυφήν	(10)

Τότε όμως $\hat{\alpha} = \hat{\gamma}$, σχέση που παραπέμπει στην **ανακλαστική ιδιότητα της έλλειψης** (σχήμα 6γ), καθώς η οριζόντια ευθεία που διέρχεται από το X είναι και εφαπτομένη της έλλειψης, μια και όλα τα άλλα σημεία της έλλειψης βρίσκονται «πάνω» από την οριζόντια ευθεία (ή και βάσει του ορισμού της εφαπτομένης ως την οριακή θέση μιας τέμνουσας ευθείας).

Να σχολιάσουμε ότι αυτή η ιδιότητα δεν αφορά μόνο το «κατώτερο» σημείο της έλλειψης, αλλά όλα τα σημεία της, καθώς θα μπορούσαν οι θέσεις των εστιών να είναι τέτοιες ώστε να περιστρέψουν την έλλειψη και το κατώτερο σημείο της να είναι διαφορετικό, όπως γίνεται στο [5].



(α)



(β)

Σχήμα 7: (α) Η κατασκευή της ακριβούς θέσης της χάντρας, (β) η μεσοκάθετος του BB' ως περιβάλλουσα της έλλειψης

Επανερχόμαστε στην κατασκευή της κατώτερης θέσης για την χάντρα, μετά την ανάλυση που κάναμε προηγουμένως (σχήμα 7α):

Βήμα 1ο: Φέρνουμε την κατακόρυφη ευθεία ε που διέρχεται από το B.

Βήμα 2ο: Σχεδιάζουμε κύκλο κέντρου A και ακτίνας l. Έτσι ορίζεται το σημείο B' ως το «κατώτερο» σημείο τομής του κύκλου και της ε (από τα δύο σημεία τομής).

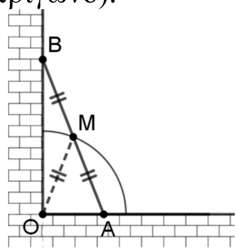
Βήμα 3ο: Φέρνουμε την μεσοκάθετο του BB' που τέμνει το AB' στο X.

Ο καθένας μπορεί να αντιληφθεί την αναλογία αυτής της κατασκευής με την κατασκευή που φαίνεται στο σχήμα 7β κατά την οποία το σημείο B' διατρέχει τον κύκλο (A, l) ενώ η μεσοκάθετος του BB' (το B είναι εσωτερικό σημείο του κύκλου) είναι η περιβάλλουσα της έλλειψης με εστίες τα σημεία A και B και μεγάλο άξονα l. Με άλλα λόγια, η έλλειψη σχηματίζεται ως το χωρίο που περιβάλλεται από τις μεσοκαθέτους του BB'.

2. Το Πρόβλημα της Σκάλας που Ολισθαίνει

Πρόβλημα: Μια σκάλα ολισθαίνει στο πάτωμα. Ποια τροχιά διαγράφει ένα σταθερό σημείο της σκάλας;

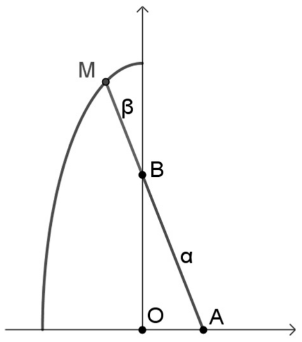
Η απάντηση στο παραπάνω πρόβλημα θα μπορούσε να είναι απλή αν το σημείο ήταν το μέσο της σκάλας: η τροχιά που διαγράφει είναι ένα τεταρτοκύκλιο (σχήμα 8), καθώς η απόστασή του μέσου της σκάλας από το σημείο τομής τοίχου και πατώματος είναι σταθερή και ίση με το μισό του μήκους της σκάλας (βάσει της σχέσης της υποτείνουσας και της αντίστοιχης διαμέσου σε ένα ορθογώνιο τρίγωνο).

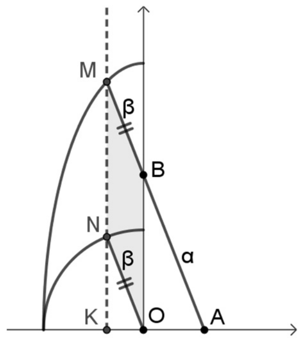


Σχήμα 8: Η τροχιά του μέσου M μιας σκάλας AB που ολισθαίνει είναι τεταρτοκύκλιο

Όμως, κάθε άλλο σημείο της σκάλας, ή του άξονα της σκάλας, έχει ως τροχιά ένα τόξο (τέταρτο) μιας έλλειψης, όπως αποδεικνύουμε:

Θεωρούμε λοιπόν ότι η σκάλα AB έχει μήκος α και ότι τα άκρα της ολισθαίνουν στους ημιάξονες Ox, Oy. Θα μελετήσουμε την τροχιά ενός σημείου M, το οποίο βρίσκεται στον άξονα της σκάλας AB αλλά εκτός αυτής, προς το μέρος του B και σε απόσταση β από αυτό (σχήμα 9α).





Σχήμα 9: Το σημείο M διαγράφει τόξο έλλειψης κατά την ολίσθηση της σκάλας AB

Φέρνουμε παραλληλόγραμμο $OBMN$ (σχήμα 9β), δηλαδή η MN είναι παράλληλη στον Oy και $ON = BM = \beta$.

Παρατηρούμε λοιπόν ότι:

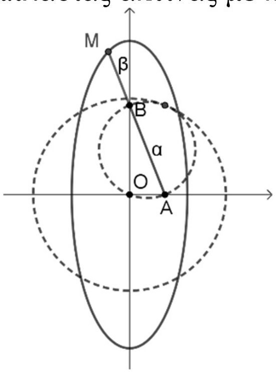
- Το σημείο N θα κινηθεί σε τεταρτοκύκλιο κέντρου O και ακτίνας β κατά την ολίσθηση της σκάλας και
- Ο λόγος $\frac{KM}{KN}$ είναι σταθερά ίσος με $\frac{\alpha+\beta}{\beta}$ (αυτό προκύπτει από την ομοιότητα των τριγώνων AKM και OKN).

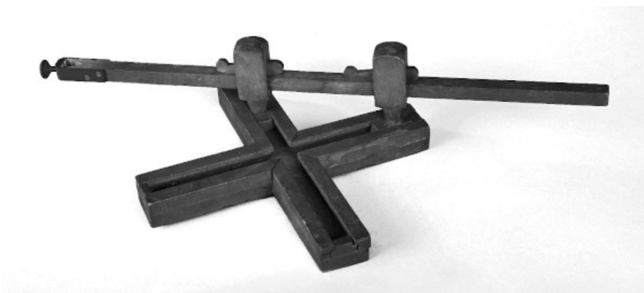
Κατόπιν αυτής της ανάλυσης, παραλείποντας τις λεπτομέρειες της σύνθεσης, συμπεραίνουμε ότι ο γεωμετρικός τόπος του M προκύπτει από την κατακόρυφη επιμήκυνση του τεταρτοκύκλιου όπου κινείται το N, κατά λόγο $\lambda = \frac{\alpha+\beta}{\beta}$. Άρα θα είναι το αντίστοιχο ελλειπτικό τόξο, σύμφωνα με όσα αναφέραμε στην εισαγωγή περί επιμηκύνσεων κύκλων προς μία κατεύθυνση.

3. Ο Ελλειψογραφος του Αρχιμήδη

Το πρόβλημα της σκάλας που ολισθαίνει συνδέεται με τον ελλειψογράφο του Αρχιμήδη. Αποτελείται από δύο κάθετους οδηγούς στους οποίους έχουν εφαρμοστεί και σέρνονται δύο δρομείς που η μεταξύ τους απόσταση είναι σταθερή. Οι δρομείς συνδέονται με ράβδο που εξέχει προς την μία κατεύθυνση, την θέση όπου βρίσκεται η γραφίδα που σχεδιάζει την έλλειψη (σχήμα 10β).

Μπορούμε να φανταστούμε τους κάθετους οδηγούς σαν τους άξονες σε ένα ορθοκανονικό σύστημα συντεταγμένων και τους δρομείς σαν τα άκρα της σκάλας που ολισθαίνει (σχήμα 10α), αλλά με την διαφορά ότι τα άκρα αυτά καταλαμβάνουν και αρνητικές θέσεις στους άξονες, ώστε το σημείο M (η θέση της γραφίδας) να διαγράφει ολόκληρη έλλειψη και όχι μόνο ένα ελλειπτικό τόξο. Η κίνηση των δρομέων επάνω στους άξονες είναι ομαλή, καθώς είναι ακριβώς η κίνηση των άκρων μιας διαμέτρου ενός κύκλου, ο οποίος διέρχεται από το O και κυλίεται στο εσωτερικό ενός κύκλου διπλάσιας ακτίνας με κέντρο το O (σχήμα 10α).





(α) (β)

Σχήμα 10: (α) Η αρχή του ελλειψογράφου του Αρχιμήδη και (β) ελλειψογράφος [1]

Αυτή την ομαλή κίνηση δύσκολα μπορούμε να την φανταστούμε. Δύσκολα αποδεχόμαστε ότι καθώς ο κύκλος κυλίεται, τα άκρα της διαμέτρου του μικρού κύκλου κινούνται ευθύγραμμα σε δύο κάθετους άξονες. Είναι ένα ενδιαφέρον θέμα προς διερεύνηση με λογισμικό [3], το οποίο γενικεύεται όχι μόνο με δύο αντιδιαμετρικά σημεία, αλλά με τις κορυφές ενός κανονικού ν-γώνου εγγεγραμμένου στον μικρό κύκλο, οι οποίες κινούνται ευθύγραμμα σε διαφορετικούς άξονες καθώς ο μικρός κύκλος κυλίεται στο εσωτερικό του μεγαλύτερου κύκλου με την διπλάσια ακτίνα [4].

4. Συζήτηση - Συμπεράσματα

Στα Νέα Προγράμματα Σπουδών για τα Μαθηματικά [2], οι κωνικές τομές εντάσσονται στα Μαθηματικά Προσανατολισμού Θετικών Σπουδών της Γ΄ Λυκείου. Δύο από τα προσδοκώμενα μαθησιακά αποτελέσματα που σχετίζονται με αυτές είναι:

- ΑΓ.Κ.12.Π.2. Βρίσκουν χαρακτηριστικά στοιχεία και ιδιότητες των κωνικών τομών και τα αξιοποιούν στην επίλυση προβλημάτων.

- ΑΓ.Κ.12.Π.3. Προσδιορίζουν γεωμετρικούς τόπους που είναι κωνικές τομές ή ευθείες, αλλά και τμημάτων τους, είτε μέσω των ορισμών τους είτε μέσω των γνωστών εξισώσεων τους.

Το πρόβλημα της σκάλας που ολισθαίνει είναι ένα πρόβλημα γεωμετρικού τόπου που οδηγεί σε τμήμα έλλειψης (ΠΜΑ ΑΓ.Κ.12.Π.3.), με εξίσωση της μορφής $\frac{x^2}{b^2}+\frac{y^2}{a^2}=1$. Συνεπώς μπορούμε να την εντοπίσουμε με μεθόδους της αναλυτικής γεωμετρίας δουλεύοντας με εξισώσεις ευθειών και συντεταγμένες σημείων. Η προσέγγιση όμως μέσω της ευκλείδειας γεωμετρίας δίνει το πλεονέκτημα να αντιληφθούμε την έλλειψη σε σχέση με έναν κύκλο και μάς οδήγησε στην «επινόηση» του ελλειψογράφου του Αρχιμήδη.

Το πρόβλημα της κρεμασμένης χάντρας είναι ένα πρόβλημα γεωμετρικής κατασκευής και η έλλειψη εμφανίζεται μέσα από τον ορισμό της ως γεωμετρικός τόπος σημείων. Παρόλο όμως που αγνοούσαμε την εξίσωσή της (δεν επιχειρήσαμε καν να ορίσουμε ένα σύστημα συντεταγμένων), βγήκε αρκετά αβίαστα η ανακλαστική ιδιότητα της έλλειψης (ΠΜΑ ΑΓ.Κ.12.Π.2.). Είναι πάντως πολύ ενδιαφέρον το γεγονός ότι ένα τόσο απλό πρόβλημα, το οποίο θα μπορούσε να ενταχθεί στη Γεωμετρία της Α΄ Λυκείου, εμπεριέχει μια τόσο σημαντική πληροφορία για την έλλειψη που μέχρι στιγμής δεν αποδεικνύεται στα βιβλία αναλυτικής γεωμετρίας του Λυκείου, ίσως γιατί η «απλούστερη» αναλυτική προσέγγιση της ανακλαστικής ιδιότητας της έλλειψης προϋποθέτει την έννοια του εφαπτομενικού διανύσματος, όπως γίνεται στο [1].

6. Προέλευση Εικόνων

- Όλα τα σχήματα σχεδιάστηκαν με το λογισμικό GeoGebra από την συγγραφέα
- Η εικόνα του ελλειψογράφου του Αρχιμήδη (σχήμα 10β) διατίθεται με την άδεια CC BY-NC-SA: By National Museum of American History, Kenneth E. Behring Center, Gift of Wesleyan University - Elliptic Trammel http://americanhistory.si.edu/collections/search/object/nmah_694104 , Public Domain, https://commons.wikimedia.org/w/index.php?curid=57868477

7. Βιβλιογραφία – Δικτυογραφια

1. Apostol Tom M. (1962), «*Διαφορικός και Ολοκληρωτικός Λογισμός, Τόμος Ι»* (σελ. 360), Εκδόσεις «ΑΤΛΑΝΤΙΣ» 1962, σελ. 352-161
2. Υπ. Απόφαση 23523/Δ2, ΦΕΚ Β 1326/8-3-2023
3. Ελλειψογράφος https://www.geogebra.org/m/hpxkwpts
4. Οπτική απάτη με κύκλους, ή μήπως όχι; https://www.geogebra.org/m/nw2g4wdr
5. Ρουμπίνι και κλωστή https://www.geogebra.org/m/xbpctnqk