ЛЕКЦИЯ 9. ОЦЕНКА КАЧЕСТВА ЛОГИЧЕСКОЙ СТРУКТУРЫ УЧЕБНОГО МАТЕРИАЛА

Цели занятия:

– определить количество и состав связей между учебными элементами;
– рассмотреть методы оценки качества логической структуры учебного материала;
– привести способы вычисления квазиминоров;
– определить значимость учебных элементов в структуре курса;
– рассмотреть методы вычисления рангов.

Определение числа и состава связей между элементами системы является одной из составных задач системного анализа. При описании логической структуры учебного курса в виде графа решение этой задачи сводится к определению числа и состава элементарных путей в графе, что, в свою очередь, предполагает умение находить все элементарные пути, идущие из любой вершины исследуемого графа в любую другую его вершину.

Существуют несколько способов решения данной задачи. В работе представлен один из них, основанный на использовании алгебры квазиминоров.

Квазиминором элемента a_{kl}, $k \neq l$ матрицы $A_{[n]} = \|a_{ij}\|_n^n$ называют определитель особого рода (беззнаковый определитель) матрицы, получаемой из матрицы $A_{[n]}$ путем вычеркивания *k*-го столбца и *l*-й строки.

Квазиминор элемента a_{kl} обозначают символом $|a_{ij-lk}|_{kl}$. При этом знак $|\ |_{kl}$ является символом квазиминора, а знак a_{ij-lk} обозначает матрицу, полученную из матрицы $\|a_{ij}\|_n^n$ путем вычеркивания *l*-й строки и *k*-го столбца, которая вписывается в символ квазиминора подобно матрице, вписываемой в символ обычного минора.

Квазиминор $|a_{ij-lk}|_{kl}$ при $k \neq l$ может быть вычислен с помощью выражения

$$|a_{ij-lk}|_{kl} = \sum_q a_{pq} A_{pq}^{(l)}, \qquad (1)$$

где $a_{pq}, q = 1(1)n, q \neq k$ – элементы *p-й* строки матрицы $\|a_{ij}\|_n^n$ за исключением элемента $a_{pq}, p[1(1)n], q \neq l$;

$$A_{pq}^{(l)} = \begin{cases} 1, & при \quad q = l; \\ |a_{ij-lk-pq}|_{ql}, & при \quad q \neq l. \end{cases}$$

Формула (1) сводит вычисление исходного квазиминора $|a_{ij-lk}|_{kl}$ к вычислению квазиминоров меньшего порядка с помощью разложения его на указанные квазиминоры. Процесс вычисления во многом сходен с процессом вычисления обычных определителей и после приобретения практических навыков оказывается достаточно простым. Кроме того, данный процесс легко поддается алгоритмизации, а, следовательно, и выполнению на ЭВМ. Сущность рассматриваемого способа определения всех элементарных путей в графе состоит в том, что на основе матрицы смежности вершин графа строится матрица непосредственных путей, а по ней с помощью алгебры квазиминоров находится полная матрица путей.

Определение 1. ***Матрицей непосредственных путей*** графа *G* с *n* вершинами будем называть квадратную матрицу $U_{[n]}$, строки и столбцы которой соответствуют вершинам графа, а элементы определяются по формуле

$$u_{ij} = \begin{cases} u_{ij} - \text{если данная дуга существует;} \\ 0 - \text{ в противном случае, } i = 1(1)n,\ j = 1(1)n. \end{cases}$$

Матрица непосредственных путей легко получается из матрицы смежности вершин, если в ней все элементы, не равные нулю, заменить соответствующими символами дуг.

Определение 2. ***Полной матрицей путей*** графа *G* с n вершинами будем называть квадратную матрицу $A_{[n]}$, строки и столбцы которой соответствуют вершинам графа, а значение элементов $a_{ij}, i = 1(1)n, j = 1(1)n,$ равно числу всех элементарных путей из вершины x_i графа в вершину x_j. Доказано, что число всех элементарных путей, ведущих из *k*-й вершины в *l*-ю, т.е. значение элемента a_{kl} полной матрицы путей $A_{[n]}$, равно значению квазиминора элемента u_{kl} матрицы непосредственных путей $U_{[n]}$:

$$a_{kl} = \left| u_{ij-lk} \right|_{kl}, \quad \text{если } k \neq l. \tag{2}$$

Элементы a_{kk} полной матрицы путей можно вычислить с помощью выражения

$$a_{kk} = \left| u_{ij} \right|_{kk},\ k = 1(1)n. \tag{3}$$

При этом в квазиминор вписывается вся матрица без вычеркивания столбцов и строк. Следует помнить, что для графа без петель и контуров элементы $a_{kk}=0$.

Порядок вычисления элементов a_{kl} полной матрицы путей $A_{[n]}$ следующий. Пусть граф задан матрицей $R_{[n]}$ смежности вершин графа.

1-й этап. По матрице $R_{[n]}$ путем замены всех элементов, не равных нулю, на символы $u_{ij}, i = 1(1)n,\ j = 1(1)n,$ получают матрицу непосредственных путей $U_{[n]}$.

2-й этап. Применяя алгебру квазиминоров, вычисляют элемент a_{kl} матрицы полных путей по формуле (2) либо (3) с помощью последовательного разложения исходного квазиминора на квазиминоры меньшего порядка по формуле (1) до тех пор, пока не получится обыкновенное алгебраическое выражение, значение которого вычисляется стандартным способом. При этом индексацию столбцов и строк квазиминоров в процессе вычисления не изменяют.

Данный метод, с помощью которого находят возможные пути изучения материала, позволяет программе на основании определенных критериев автоматически выбирать дальнейший маршрут обучения. Зная номер фрагмента, на котором остановился обучаемый, и историю его обучения, можно предлагать ему ту или иную стратегию обучения, оптимизируя ее по объему материала, времени обучения.

Значимость учебных элементов в структуре КСО

Методы теории графов позволяют определять и такую структурную характеристику системы учебного курса, как значимость учебного элемента в ее структуре. Естественно предположить, что, чем больше связей имеет элемент с другими компонентами, тем большую роль при прочих равных условиях он может играть в системе.

Разделы курса связаны между собой. Чем большим числом связей обладает какой-либо раздел, или чем выше его значения, тем значительнее влияние такого раздела на остальные. Это естественно, т.к. плохое усвоение обучаемым этого раздела существенно затрудняет изучение материала других, связанных с ним разделов. Такое влияние иногда называют доминированием, а величины доминирования выражают через ранги. Ранг - это число, характеризующее действующие связи. При составлении программы для обучающего комплекса разделы, обладающие высоким рангом, требуют тщательного дидактического оформления.

Существуют разные методы вычисления рангов. На практике удобно пользоваться двумя из них, определяющими одно- и двухзвенные пути между данной вершиной графа и другими вершинами.

Методы вычисления рангов

1. Ранг i-го элемента можно определить как сумму элементов i-й строки матрицы $\|r_{ij}\|$, где

$$\|r_{ij}\| = \|a_{ij}\| + \|a_{ij}\|^2. \qquad (4)$$

Этот способ дает возможность достаточно несложным образом получить количественные значения величин доминирования разделов учебного материала. Однако, здесь учитываются только одно- и двузвенные дуги, связывающие определенный элемент структуры с другим. Кроме этого, здесь вычисляются абсолютные значения рангов для каждого конкретного случая.

2. В. И. Нечипоренко предлагает определить ранг функцией вида

$$R(i)=\lim_{k\to\infty} R_k^i=\lim\frac{\alpha^{(i)}(k)}{\alpha^{(i)}(k)+\alpha^{(2)}(k)+\ldots+\alpha^{(n)}(k)} \qquad (5)$$

где $\alpha^{(1)}(k)$ - количество путей длины k, идущих от элемента i. Вычисление ранга с помощью этого выражения позволяет устранить недостатки, отмеченные у способа определения ранга (4). На практике пользоваться формулой (5) довольно сложно, хотя этот предел всегда существует, поскольку вектор $\overline{R_R}=(R_R^1,\ldots,R_R^n)$ стремится к одному из собственных векторов матрицы смежностей $\|a_{ij}\|$.

3. Для практических вычислений рангов вершин анализируемого графа можно пользоваться более простой формулой

$$\gamma_i=\frac{\sum_{j=1}^{n} b_{ij}}{\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} b_{ij}}, \qquad (6)$$

где $\|b_{ij}\|=\|a_{ij}\|^4$.

Следует отметить, что ранг – это относительный показатель доминирования. Поэтому вычисление ранга только одного какого-то элемента лишено смысла. Само по себе полученное число ни о чем не свидетельствует. Необходимо сравнить величины рангов, чтобы сделать вывод о значимости каждого раздела. Однако, при определении, скажем, информационной емкости разделов можно пользоваться абсолютными значениями рангов.

Таким образом, графы позволяют получать количественные характеристики логической структуры учебного материала для компьютерных обучающих программ, что существенно повышает качество прикладного программного обеспечения.

Вопросы для повторения:

- Каким образом определяется количество и состав связей между учебными элементами?
- Какие методы оценки качества логической структуры учебного материала Вы знаете?
- Приведите способы вычисления квазиминоров.
- Как определить значимость учебных элементов в структуре курса?
- Приведите методы вычисления рангов.