

重庆南开中学高 2024 级高一（上）期中考试

数学试题

本试卷分第 I 卷(选择题)和第 II 卷(非选择题)两部分, 满分 150 分, 考试时间 120 分钟. 第 I 卷和第 II 卷都答在答题卷上.

第 I 卷(选择题 共 60 分)

一、选择题: 本大题 8 个小题, 每小题 5 分, 共 40 分, 每小题只有一个选项符合要求, 答案请涂写在机读卡上.

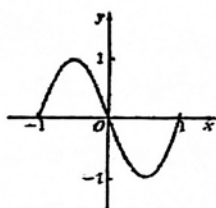
1. 已知集合 $U = \{x \in \mathbb{N}^* | x \leq 5\}$, $A = \{0, 1, 2, 3\}$, $B = \{2, 3, 5\}$, 则 $A \cap (C_U B) =$ ()

- A. \emptyset B. $\{1\}$ C. $\{1, 2\}$ D. $\{2, 3\}$

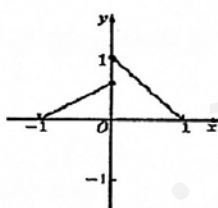
2. 命题“ $\forall x > 1, x^2 + x + 1 > 0$ ”的否定为 ()

- A. $\forall x \leq 1, x^2 + x + 1 \leq 0$ B. $\exists x \leq 1, x^2 + x + 1 \leq 0$
C. $\forall x > 1, x^2 + x + 1 \leq 0$ D. $\exists x > 1, x^2 + x + 1 \leq 0$

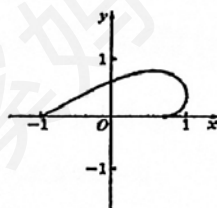
3. 已知集合 $A = \{x | -1 \leq x \leq 1\}$, $B = \{y | -1 \leq y \leq 1\}$, 则下列图象中, 能表示从集合 A 到集合 B 的一个函数的为 ()



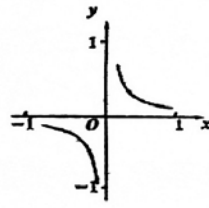
A



B



C



D

4. 设 $a \in \mathbb{R}$, 则“ $a \geq 2$ ”是“ $a^2 \geq 4$ ”的 ()

- A. 充要条件 B. 充分不必要条件
C. 必要不充分条件 D. 既不必要也不充分条件

5. 已知函数 $f(x) = x^2 + ax + 2$ 在区间 $(-\infty, -3)$ 上单调递减, 则实数 a 的取值范围为 ()

- A. $a = 3$ B. $a \leq 3$ C. $a \leq 6$ D. $a \geq 6$

6. 函数 $f(x) = x - \sqrt{2-x}$ 的值域为 ()

- A. $(-\infty, 2]$ B. $[2, +\infty)$ C. $(2, +\infty)$ D. $(-\infty, 2)$

7. 已知集合 $A = \{1, 2, 3\}$, 集合 $B = \{2, 3, 4, 5\}$, 集合 C 满足 $A \cap C \neq \emptyset$ 且 $C \subseteq B$, 则满足条件的集合 C 的个数为 ()

- A. 8 B. 12 C. 16 D. 24

8. 已知定义在 $(-8, 8)$ 上的奇函数 $f(x)$ 在 $[0, 8)$ 上单调递增, 则关于 x 的不等式

第 II 卷(非选择题 共 90 分)

三、填空题：本大题 4 个小题，每小题 5 分，共 20 分。各题答案必须填写在答题卡上相应位置（只填结果，不写过程）。

13. 为庆祝中国共产党成立 100 周年，某校举办了“永远跟党走”文艺汇演活动。已知高一（1）班参演了两个节目，20 名同学合唱了歌曲《没有共产党就没有新中国》，10 名同学表演了诗朗诵《党的赞歌》。其中，两个节目都参加的有 5 名同学。则这个班表演节目的共有_____人。

14. 已知 $a \in \mathbb{R}$, $f(x) = \begin{cases} x^2 - 9, & x > 3 \\ |x - 2| + a, & x \leq 3 \end{cases}$, 若 $f(f(2\sqrt{3})) = 5$, 则 $a =$ _____.

15. 设函数 $f(x) = \frac{x^4 - x^3 + x^2 - x + 1}{x^4 + x^2 + 1}$, 若函数 $f(x)$ 在 \mathbb{R} 上的最大值为 M , 最小值为 m , 则 $M + m =$ _____.

16. 设函数 $f(x) = x^2 + 2x + a$, 若关于 x 的不等式 $f(f(x)) < 0$ 的解集为空集, 则实数 a 的取值范围为_____.

四、解答题：本大题 6 个小题，共 70 分。各题解答必须答在答题卡上（必须写出必要的文字说明、演算步骤或推理过程）。

17. (10 分) 设全集 $U = \mathbb{R}$, 集合 $A = \{x | x^2 + 4x + a = 0\}$, $B = \{x | x^2 + bx - 2 = 0\}$.

(1) 若集合 A 恰有一个元素, 求实数 a 的值;

(2) 若 $(C_U A) \cap B = \{2\}$, $(C_U B) \cap A = \{-3\}$, 求 $A \cup B$.

18. (12 分) 集合 $A = \left\{ x \mid \frac{x-1}{x+3} < 0 \right\}$, $B = \{ x \mid |x-2| < 3 \}$, $C = \{ x \mid m < x < 2-m, m \in R \}$.

(1) 求 $A \cap B$;

(2) 现有三个条件: ① $B \cap C = C$, ② $B \cap C = \emptyset$, ③ 条件 $p: x \in C$, $q: x \in B$, 若 p 是 q 的充分不必要条件. 在这三个条件中任选一个填到横线上, 并解答本题. 选择多个条件作答时, 按第一选择给分.

已知 _____, 求实数 m 的取值范围.

19. (12 分) 已知定义在 R 上的函数 $f(x)$ 满足: $2f(x) - f(-x) = x^2 + 2$.

(1) 求函数 $f(x)$ 的表达式;

(2) 若函数 $g(x) = f(x) - ax$ ($a \in R$) 在区间 $[-1, 2]$ 上最小值为 1, 求实数 a 的值.

20. (12 分) 2019 年 7 月, 教育部出台《关于深化教育教学改革全面提高义务教育质量的意见》, 正式提出“五育并举”的教育方针, 要求各级各类学校开足开好劳动教育课. 为此, 某中学在校内开辟了种植园区, 供学生劳动使用. 为保障同学们种植的作物更好地成长, 学校准备采购一批优质种子. 某商家在售的优质种子, 原价每千克 100 元, 为了促销, 准备对购买量大的客户执行团购优惠活动. 购买量没达到 20 千克时, 依然按原单价执行; 购买量达到或超过 20 千克时, 超出部分每多一千克, 则购买的所有产品单价每千克降低 1 元. 比如购买 21.5 千克, 则所有的 21.5 千克均按 98.5 元单价执行. 另外商家规定一次性最大购买量不超过 60 千克.

(1) 求购买该种子 x 千克花费的总费用 y (元) 关于 x 的函数;

(2) 学校采购该种子时, 幸运的获得了一张 900 元代金券, 在购买产品总量不少于 20 千克时, 可用来一次性抵扣 900 元. 那么, 在购买量不超过 60 千克且花掉代金券的前提下, 采购该批种子每千克的平均花费在什么范围?

21. (12 分) 设二次函数 $f(x)$ 满足 $f(1) = -3$, 且关于 x 的不等式 $f(x) < 0$ 的解集为 $(0, 4)$.

(1) 求函数 $f(x)$ 的解析式;

(2) 若关于 x 的方程 $mf(x) - x + 1 = 0$ 在区间 $(0, 2)$ 上有解, 求实数 m 的取值范围.

22. (12 分) 已知定义在 $(0, +\infty)$ 上的函数 $f(x)$ 满足:

① $f(3) = 0$;

② $\forall x, y > 0, f(xy) = f(x) + f(y) + 2$;

③ 当 $x \in (0, 1)$ 时, $f(x) < -2$.

(1) 求 $f\left(\frac{1}{9}\right)$;

(2) 求证: 函数 $f(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 上单调递增;

(3) 若实数 $a > 0$, $f(\sqrt{x}) + f(\sqrt{a-x}) < f\left(a\sqrt{x} + a\sqrt{a-x} + \frac{1}{4}a\right) - f(9)$ 在 $x \in \left(0, \frac{a+1}{2}\right)$ 上恒成立, 求 a 的取值范围.