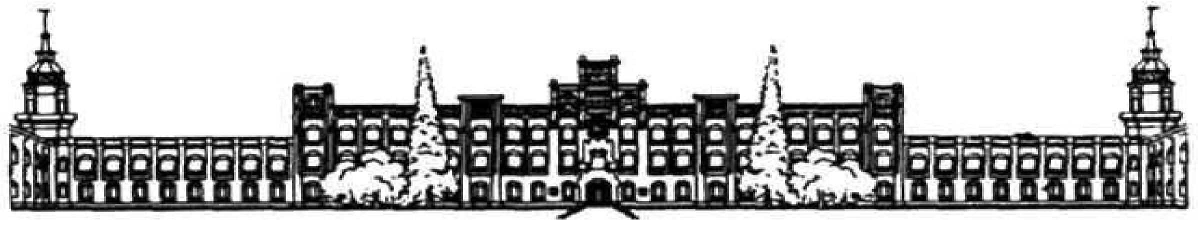

МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
НАЦІОНАЛЬНИЙ ТЕХНІЧНИЙ УНІВЕРСИТЕТ УКРАЇНИ
"КИЇВСЬКИЙ ПОЛІТЕХНІЧНИЙ ІНСТИТУТ
ІМЕНІ ІГОРЯ СІКОРСЬКОГО"

Факультет прикладної математики
Кафедра програмного забезпечення комп'ютерних систем

Лабораторна робота № 1

з дисципліни "Чисельні методи"
тема "Нелінійні рівняння з одним невідомим"

Виконав(ла)
студент(ка) ІІІ курсу
групи КП-83
Матіюк Дарина Андріївна

Перевірив
"____" "____________" 20___ р.
Онай М. В.

варіант №12

Київ 2020

Мета роботи: опанувати методи наближеного розв’язання нелінійних рівнянь.

Постановка завдання:

1. Розробити програму на мові програмування C# у середовищі розробки Visual Studio 2013 (або вище), яка буде працювати у віконному режимі та реалізовувати метод Лобачевського розв’язання алгебраїчних рівнянь і дозволяти уточнювати (точність та проміжок локалізації задаються користувачем з клавіатури) корені будь-яких нелінійних рівнянь методами, що задані за варіантом (табл. 1.1, табл. 1.4). Розроблена програма повинна виводити на екран всі проміжні результати.
2. За допомогою розробленої програми з п.1 розв'язати задані за варіантом рівняння (табл. 1.1, табл. 1.2) на заданому проміжку з точністю $\varepsilon \leq 10^{-7}$.
3. При виконанні завдання з п.2 необхідно побудувати графіки залежності наближеного значення кореня рівняння від кількості ітерацій починаючи з початкового наближення. Якщо рівняння має більше двох коренів, то побудувати графіки для двох будь-яких коренів.
4. Знайти верхню та нижню границю додатних і від’ємних коренів заданого за варіантом алгебраїчного рівняння (табл. 1.3).
5. За допомогою розробленої програми з п.1, знайти корені, заданого за варіантом алгебраїчного рівняння (табл. 1.3), методом Лобачевського та уточнити отримані корені будь-яким методом розв’язання нелінійних рівнянь.
6. Задані за варіантом, рівняння розв’язати у MatLab 7.0 (або вище) або у MathCAD 15.0 (або вище), або у Mathematica 7.0 (або вище). Задане за варіантом, алгебраїчного рівняння необхідно розв’язати, як мінімум двома функціями наявними у відповідному математичному пакеті. Наприклад, в математичному пакеті MatLab 7.0 наявна функція solve для розв’язання будь-якого нелінійного рівняння та функція roots для розв’язання алгебраїчного рівняння.

Варіант - 8.

Рівняння 1:

43	$\sqrt{5-x}\cdot\sin x + x\cos(\pi - x) = 0$	$[-15.0; 5.0)$

Метод хорд.

Рівняння 2:

47	$x\cdot\cos(\mathrm{ch}(x-\pi)) + 0.3x = 0$	$[-1.0; 5.0]$

Метод Стефенсена та метод простих ітерацій.

Рівняння 3:

$-55x^7 + 119x^6 + 280x^5 - 634x^4 - 209x^3 + 514x^2 + 131x + 3 = 0$

Метод Лобачевського.

Математичне підгрунття та основні етапи процесу локалізації коренів

У даному пункті наведене математине підгрунття для виконання лабораторної роботи, формули, що були використані під час розробки програми, а також основні етапи процесу локалізації коренів рівняння.

1. ***Проміжки локалізації:***

   Спочатку перевіряємо введений користувачем проміжок локалізації $[a;\ b]$. А саме:

   - $f(a) * f(b) < 0$ - на заданому проміжку функція обертається в нуль
   - $f'(x)$ є монотонною на проміжку $[a;\ b]$.

   При виконанні обох умов можемо бути впевненими, що функція на заданому проміжку має тільки 1 корінь.

2. ***Метод хорд:***

Вибір нерухомої точки	Якщо $f(a) * f''(a) > 0$ - рухаємо b, інакше - a
Основна ітераційна формула	$c = a - \frac{f(a)(b-a)}{f(b)-f(a)}$
Критерій зупинки	$\lvert a - b\rvert < \varepsilon$

3. ***Метод Ньютона:***

Вибір x_0	Якщо $f(a) * f''(a) > 0$ - $x_0 = a$, інакше - $x_0 = b$
Основна ітераційна формула	$x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)}$
Критерій зупинки	$\lvert a - b\rvert < \varepsilon$

4. ***Метод Стефенсена:***

Умова запуску метода	$\lvert f(x_k)\rvert$ є достатньо мала - $\lvert f(x_k)\rvert < 5 * \varepsilon$
Основна ітераційна формула	$x_{k+1} = x_k - \frac{(f(x_k))^2}{f'(x_k + f(x_k)) - f(x_k)}$
Критерій зупинки	$\lvert a - b\rvert < \varepsilon$

5. Метод простих ітерацій:

Обчислення λ та q	Якщо похідна функції монотонна можемо обчислити значення: $\alpha = min\{f'(a);\ f'(b)\}$; $\gamma = max\{f'(a);\ f'(b)\}$; $\lambda = \frac{2}{\alpha + \gamma}$; $q = \frac{\gamma - \alpha}{\gamma + \alpha}$.
Вибір x_0	За x_0 приймається будь-який з кінців проміжку, оберемо ліву межу - b
Основна ітераційна формула	$x_{k+1} = x_k - \lambda * f(x_k)$
Критерій зупинки	$\lvert x_k - x_{k+1} \rvert \leq \frac{1-q}{q} * \varepsilon$

6. Метод Лобачевського:

<table>
<tr><td>Квадрування коефіцієнтів поліному</td><td>$b_k = a_k^2 + 2 * \sum_{j=1}^{n-k} (-1)^j a_{k-j} a_{k+j},\ k = 0..n$</td></tr>
<tr><td colspan="2">Після кожного квадрування рівняння ділиться на 50 для того, щоб отримані коефіцієнти не виходили за межі цифрового формату double.</td></tr>
<tr><td>Критерій зупинки</td><td>$a_k^2 - b_k > \varepsilon$</td></tr>
<tr><td>Знаходження наближених значень коренів за наслідком з т.Вієта</td><td>$\lvert x_k \rvert = \sqrt[2^p]{\frac{b_{n+k-2}}{b_{n+k-1}}}$</td></tr>
<tr><td>Уточнення знаку кореня</td><td>Якщо $\lvert f(x_k) \rvert < \lvert f(-x_k) \rvert$ - корінь додатний, інакше - від’ємний.</td></tr>
<tr><td colspan="2">Уточнення коренів на проміжку $[x - 0.1;\ x + 0.1]$ за допомогою метода простих ітерацій.</td></tr>
</table>

Локалізація коренів рівнянь, що розв’язуються

Основні етапи локалізації:

1. Розділяємо рівняння на дві частини і будуємо графік для кожної з частин.
2. У точках, де графіки перетинаються маємо корінь.
3. Обираємо кінці проміжка локалізації. Обов’язково функція має бути монотонною на обраному проміжку.

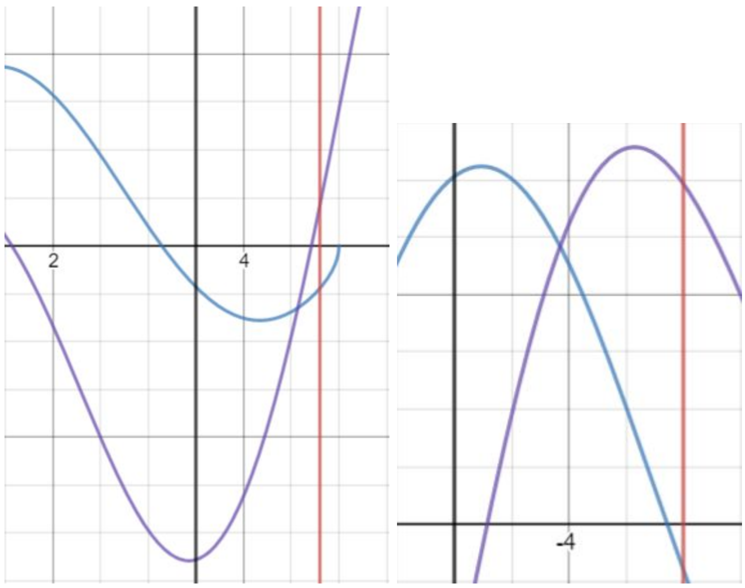

Рис. 1 та 2. Локалізація коренів для рівняння 1 - м.хорд (відповідно проміжки *[3.5; 4.8]* та *[-5; -3]*).

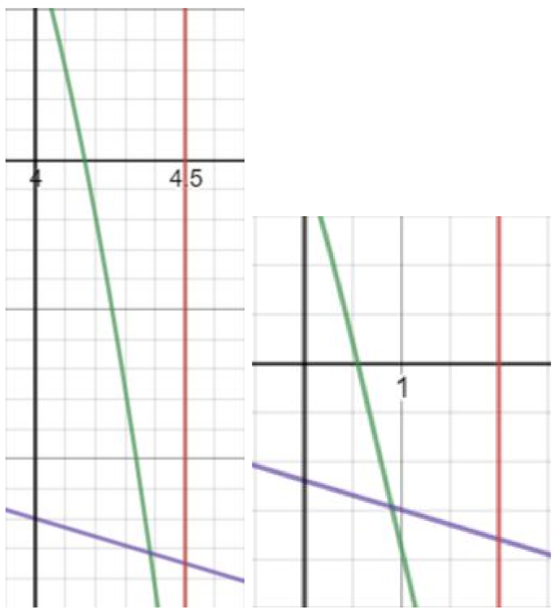

Рис. 3 та 4. Локалізація коренів для рівняння 2 - м.Стефенсена (відповідно проміжки *[4; 4.5]* та *[0.8; 1.2]*).

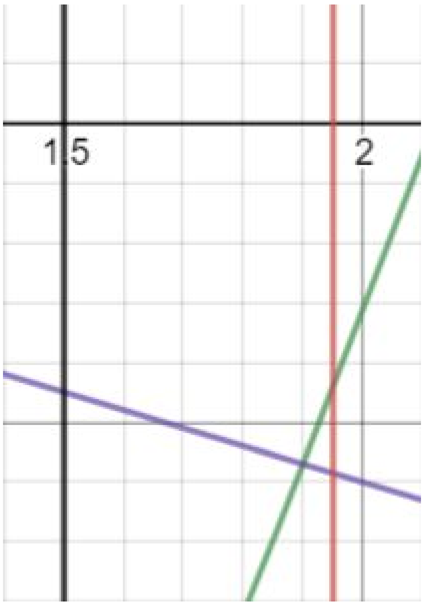

Рис. 5. Локалізація коренів для рівняння 2 - МПІ (відповідно проміжки *[1.5; 1.95]*). Локалізування першого кореня наведено вище - *рис.3*.

Значення коренів заданих за варіантом рівнянь та побудова графіків залежності наближеного значення кореня рівняння від кількості ітерацій починаючи з початкового наближення

Рівняння 1:

43	$\sqrt{5-x}\cdot\sin x + x\cos(\pi - x) = 0$	$[-15.0; 5.0)$

Метод	C#	WolframAlpha
хорд	4,569842333564864	4,56984232186295...
	-4,075878540674942	-4,07587854320397...

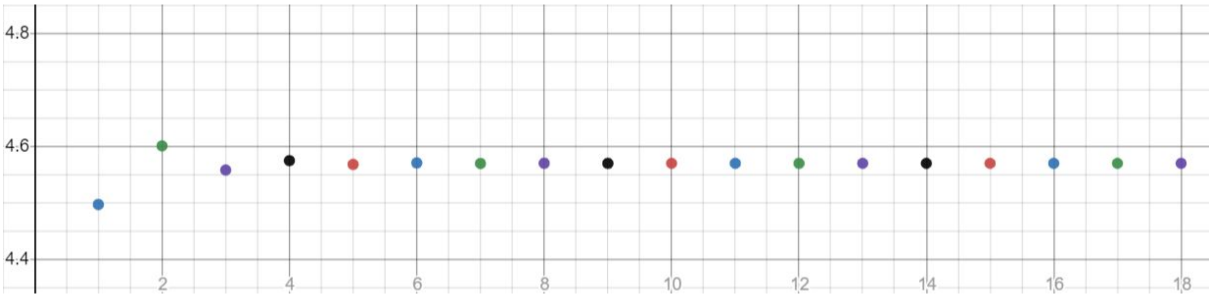

Рис. 1. Залежність наближеного значення кореня рівняння від кількості ітерацій (метод хорд, заданий проміжок - *[3.5; 4.8]*).

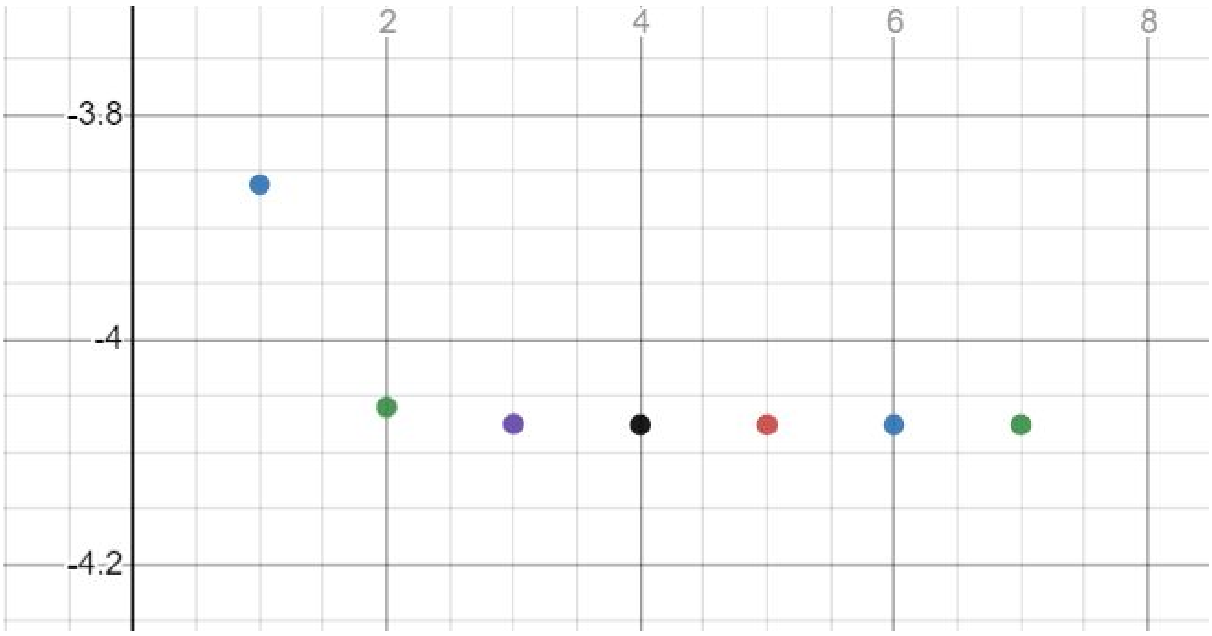

Рис. 2. Залежність наближеного значення кореня рівняння від кількості ітерацій (метод хорд, заданий проміжок - *[-5; -3]*).

Рівняння 2:

47	$x \cdot \cos(\mathrm{ch}(x-\pi)) + 0.3x = 0$	$[-1.0; 5.0]$

Метод	C#	WolframAlpha
Стефенсена	4,383479317424577	4,383479...
	0,9782171982409649	0,978217...

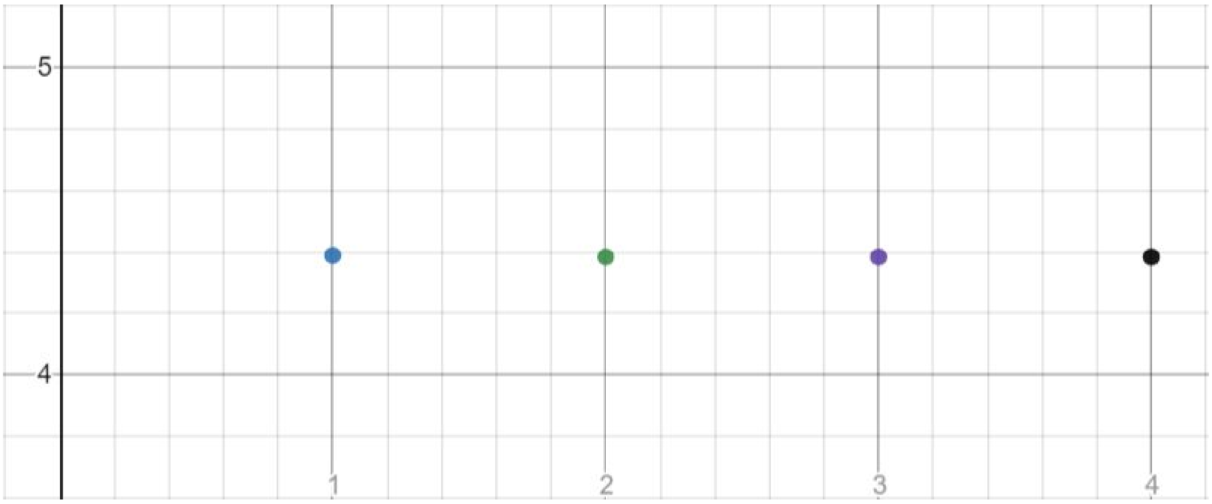

Рис. 3. Залежність наближеного значення кореня рівняння від кількості ітерацій (метод Стефенсена, заданий проміжок - *[4; 4.5]*).

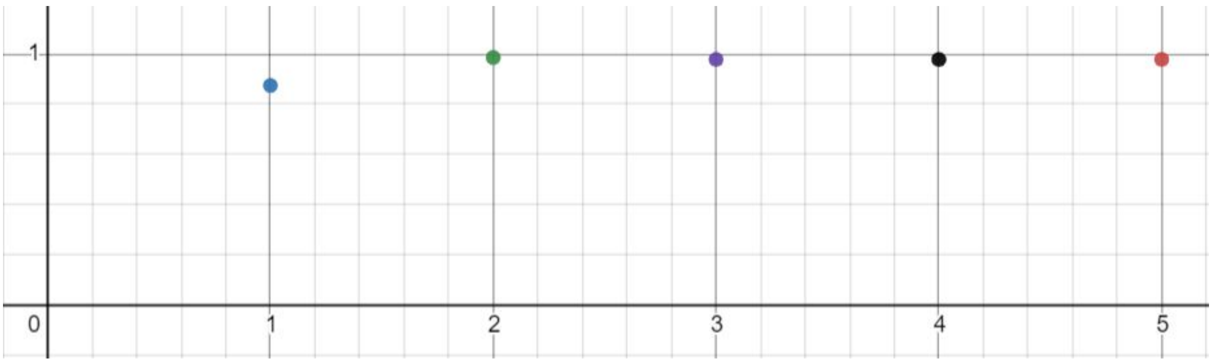

Рис. 4. Залежність наближеного значення кореня рівняння від кількості ітерацій (метод Стефенсена, заданий проміжок - *[0.8; 1.2]*).

Метод	C#	WolframAlpha
простих ітерацій	4,383479209170048	4,383479...
	1,8997059763050754	1,899706...

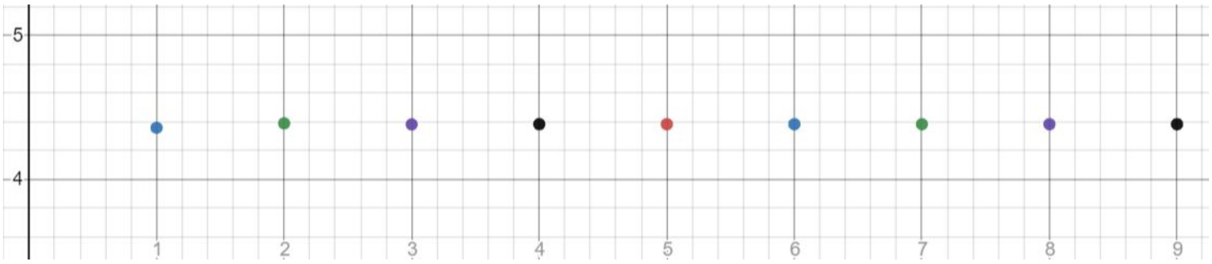

Рис. 5. Залежність наближеного значення кореня рівняння від кількості ітерацій (метод простих ітерацій, заданий проміжок - *[4; 4.5]*).

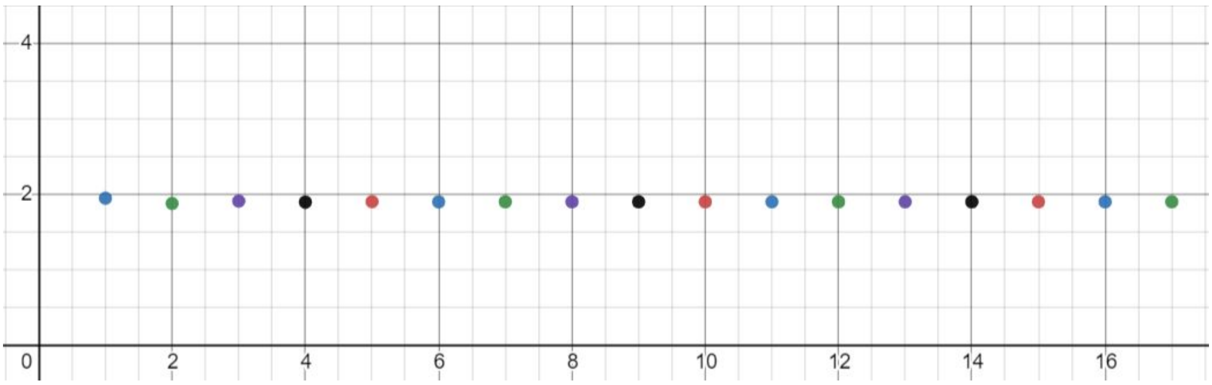

Рис. 6. Залежність наближеного значення кореня рівняння від кількості ітерацій (метод простих ітерацій, заданий проміжок - *[1.5; 1.95]*).

Процес знаходження верхньої та нижньої границі додатних і від'ємних воренів алгебраїчного рівняння

$$-55x^7 + 119x^6 + 280x^5 - 634x^4 - 209x^3 + 514x^2 + 131x + 3 = 0$$

$A = max\{|a_{n-1}|,\ |a_{n-2}|,\ ...,\ |a_1|,\ |a_0|\} = 634$
$B = max\{|a_n|,\ |a_{n-1}|,\ ...,\ |a_2|,\ |a_1|\} = 634$

Знайдемо R та r за формулами:

$$R = 1 + \frac{A}{|a_7|} = 1 + \frac{634}{-55} = \ -10,527$$

$$r = \frac{1}{1+\frac{B}{|a_0|}} = \frac{1}{1+\frac{634}{3}} = 0,0047$$

Отже, маємо $x \in (-10,527;\ -0,0047) \cup (0,0047;\ 10,527)$.

Значення коренів заданого алгебраїчного рівняння

Рівняння 3:
$-55x^7 + 119x^6 + 280x^5 - 634x^4 - 209x^3 + 514x^2 + 131x + 3 = 0$

Метод	C#	WolframAlpha
Лобачевського	2,12165306730377	-2,08219...
	-0,8479086338720461	-0,847909...
	-0,2234133931698197	-0,223413...
	-0,0254705368697803	-0,0254705...
	1,424251873362556	1.42425...
	1,7959801499744903	1,79672...
	2,121652799574613	2,12165...

В силу недостатньої точності методу Лобачевського, нам не вдається коректно визначити знаки першого і останнього кореня, за рахунок цього обидва знак коренів може бути визначений некоректно.

Висновки

У ході виконання лабораторної роботи було запрограмовано деякі методи наближеного розв’язання нелінійних рівнянь, а саме такі методи:

- хорд
- Ньютона
- Стефенсена
- простих ітерацій
- Лобачевського

Було створено консольний додаток на C#. Для обчислення заданих варіантом рівнянь, потрібно обрати певні методи, ввести точність та початок і кінець проміжка локалізації кореня. Після обрахунків у консоль виводяться проміжні результати та остаточна відповідь - певний корінь/корені рівняння.

Останнім кроком виконання роботи було порівняння отриманих результатів власного додатка із результатами математичного пакета WolframAlpha. Після чого можемо бути впевненими у коректній роботі консольного додатка.