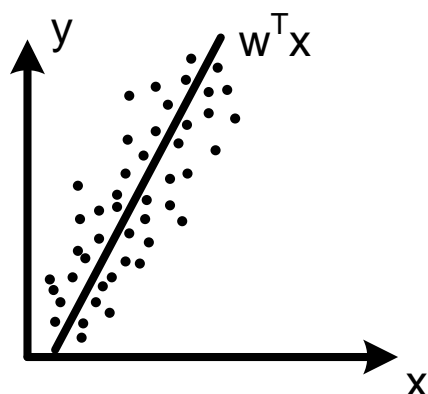


前情提要(LSE)



\mathbf{w} 是我們想要得到最 fit 直線的參數，在 LSE 時我們也提過，給定許多資料點，我們希望得到 $y = w_0 + w_1x + w_2x^2 + \dots + w_kx^k$ 中每點代入 x 配上適當的 w_i ，能得到最接近的 y ，這裡我們使用的 design matrix 為 $[1 \ x \ x^2 \ \dots \ x^k]$ ， k 是自己定義的，而在 lesson1 時我們使用二維空間來做說明，在這

裡 x 不一定只是一維向量，可能是一個多維(假設為 D 維)的向量 $\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_D \end{bmatrix}$ ，如果用之前的 design

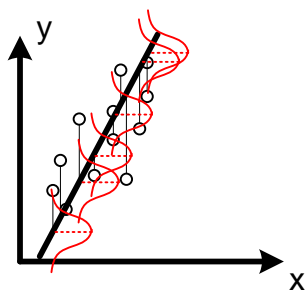
matrix, x 為
$$\begin{bmatrix} 1 & x_1 & x_1^2 & x_1^k \\ 1 & x_2 & x_2^2 & x_2^k \\ 1 & \dots & \dots & \dots \\ 1 & x_D & x_D^2 & x_D^k \end{bmatrix}$$

之前 LSE 時我們是找 $\|A\hat{x} - \bar{b}\|^2$ 的最小值，這裡的 \hat{x} 就是對應到剛剛提到的 \mathbf{w} ， A 是用我們現有的 input 做成的 design matrix，假設為 X 。

data: $\{(x_1, y_1), (x_2, y_2), \dots, (x_n, y_n)\}$

$$\text{則 } \mathbf{y} = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \dots \\ y_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a + bx_1 + cx_1^2 + \dots \\ a + bx_2 + cx_2^2 + \dots \\ \dots \\ a + bx_n + cx_n^2 + \dots \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & x_1 & x_1^2 & \dots \\ 1 & x_2 & x_2^2 & \dots \\ 1 & \dots & \dots & \dots \\ 1 & x_D & x_D^2 & \dots \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \\ \dots \end{bmatrix} = X\mathbf{w}$$

每個 x 值上都會有一個 Gaussian distribution 對應，就像是上一個 lesson 最後一張圖一樣



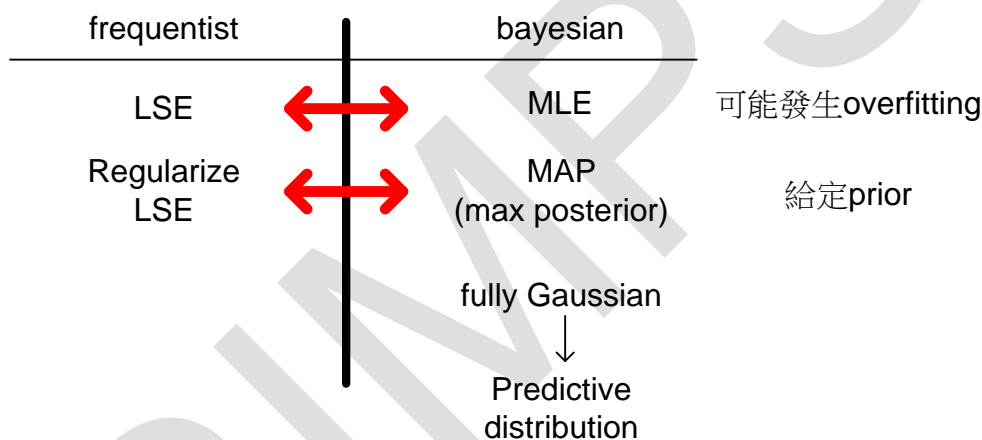
但是這裡每個 x 值中 Gaussian distribution 的 mean 和 variance 都是不一樣的，mean 就是我們想要 fit 直線的那一點，variance 則是我們自己給定，每個 x 值可有不同的 variance。則

$$y_i \sim N(X\mathbf{w}, \sigma_i^2)$$

直至目前為止，我們都還是在做 LSE，只是我們“距離”的概念變了而已，本來離 mean 越遠，距離越大，但是在這裡，離 mean 越近，機率(距離)越大，故本來的 LSE 是找最小值，若我們用 Gaussian distribution 來表示距離，我們就是找最大值(代表機率最大)

note:這裡和上課用的記號有些不一樣，但我覺得我寫的也 OK，後面的推導才會比較順暢

接下來，我們就要說明這兩條紅線的對應關係



MLE

一樣的，我們想找出“給定一組參數 \mathbf{w} ，能得到目前看到的 data 的機率是多少”，想找出這種機率最大時，參數 \mathbf{w} 為何

$$P(D | \mathbf{w}) \text{ or } P(D_y | D_x, \mathbf{w})$$

$$= \prod_i \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_i} e^{\frac{-1}{2\sigma_i^2}(y_i - X_i \mathbf{w})^2} \propto e^{\sum_i \frac{-1}{2\sigma_i^2}(y_i - X_i \mathbf{w})^2}$$

若要找最大值，由於需要使用微分，連乘的方式不好使用微分，故我們一樣使用 \log 的技巧

$$\log P(D | \mathbf{w}) = \sum_i \log\left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_i}\right) + \sum_i \frac{-1}{2\sigma_i^2}(y_i - X_i \mathbf{w})^2$$

我們之後會需要對 \mathbf{w} 做微分，等是右方的第一項會為 0，第二項的係數並不會影響我們找出此多項式最大值，故我們在求的是 $\sum_i (y_i - X_i \mathbf{w})^2$ 的最大值， $\sum_i (y_i - X_i \mathbf{w})^2 = \sum_i (X_i \mathbf{w} - y_i)^2$ ，和 LSE 的形式

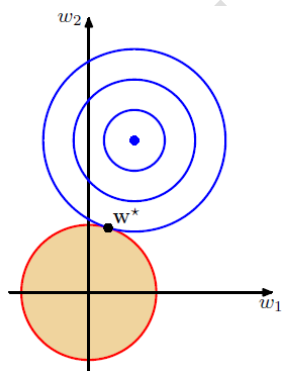
$\|\tilde{A}\mathbf{x} - \tilde{b}\|^2$ 是一樣的

MAP

接下來我們要看是否 regularize LSE (rLSE) 其實就是 frequentist 版的 maximum posterior，還記得 rLSE 吧！因為 LSE 很有可能會發生 overfitting 的現象，而發生 overfitting 時通常參數 \mathbf{w} 都會很大，故我們在 LSE 後面加上一項懲罰項避免參數太大，形式為

$$\min_{\mathbf{w}} \tilde{E}(\mathbf{w}) = \sum_{n=1}^N \{(y(x_n, \mathbf{w}) - t_n)^2 + \lambda \|\mathbf{w}\|^2\}$$

用圖來說就是



詳細的就請看 lesson1 了！

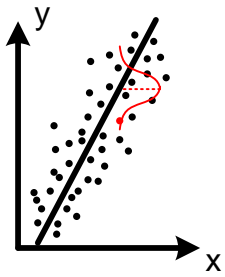
而 MAP 和 MLE 不一樣的就是會給予一個 prior，之後找出哪個參數 \mathbf{w} 擁有最大的 posterior，我們在這裡就是要說明 rLSE 後面那懲罰項 $\lambda \|\mathbf{w}\|^2$ 其實就是 LSE 的 prior。

$$\text{data } D = \{(x_1, y_1), (x_2, y_2), \dots, (x_n, y_n)\}$$

$y_i \sim N(Xw, \sigma_i^2)$ ，還記得做 LSE 或是 rLSE 時，每個 x 值我們計算距離時，使用的距離公式都是一樣的，故為了和 rLSE 的形式一樣，我們假設每個 x 值對應的 y 值得 Gaussian distribution 的所計算的距離公式中的各個維度 variance 都相同且獨立。故

$$y_i \sim N(Xw, \sigma^2) = N(Xw, a^{-1})$$

這裡的 a^{-1} 只是為了未來計算好看用，且注意，這裡的 y 是 univariate Gaussian distribution，因為這裡的維度只有一維



note: 其實每個 x 值的 variance 可以不同，指是為了對齊 rLSE 才有這種假設

$$\text{posterior } P(\mathbf{w} | D) = \frac{P(D | \mathbf{w})P(\mathbf{w})}{P(D)}, \text{ 故我們也要給予 prior } P(\mathbf{w})$$

而為了對齊 rLSE 的 prior 項，可以看一下上面那張圖，所增加的懲罰項的 contour 是由原點向外擴展的完美正圓，故我們假設我們的 prior 為

$$P(\mathbf{w}) \sim N(0, b^{-1}I)$$

$$\text{而 } b^{-1} = \begin{bmatrix} \sigma^2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \sigma^2 & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \sigma^2 \end{bmatrix}, \text{ b 為 covariance matrix 的逆矩陣，又稱為 precision matrix}$$

note: 這裡的 prior 是 multivariate Gaussian distribution，因為不同的資料就會有自己的 Gaussian distribution，joint 起來就會是 multivariate Gaussian distribution

b 為 design matrix 對應的 w 的 covariance matrix

e.g

舉例來說，若 design matrix 為 $\begin{bmatrix} 1 & x & x^2 \end{bmatrix}$ ，方程式為 $y = w_0 + w_1x + w_2x^2 = \mathbf{X}\mathbf{w}$ ，而

$$b^{-1} = \begin{bmatrix} \sigma_{w_1}^2 & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_{w_2}^2 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_{w_3}^2 \end{bmatrix}$$

在這裡我們假設 **design matrix** 各項彼此為獨立，故只有主對角項有值，若其餘項有值，就是 **Gaussian process**，之後會提到

有了 **prior** 後，我們就可以將 **posterior** 的形式寫出來，而分母的 **margin** 因為和參數 **w** 無關，故 **margin** 並不會影響我們找最大的 **posterior**(微分=0，若微分前多項式只有一項，前面的係數並不重要)，故我們就只專注於找 $P(D|\mathbf{w})P(\mathbf{w})$ 的最大值

前面推導過， $P(D|\mathbf{w}) \propto e^{\frac{-1}{2\sigma_i^2} \sum_i (y_i - X_i \mathbf{w})^2}$

故(因為 **prior** 的 **precision matrix** 中的對角項都一樣，我們直接將 **b** 視為純量，為 **variance** 的倒數)

$$\begin{aligned} P(\mathbf{w}|D) &\propto P(D|\mathbf{w})P(\mathbf{w}) \propto e^{\frac{-1}{2\sigma_a^2} \sum_i (y_i - X_i \mathbf{w})^2} e^{\frac{-1}{2} \mathbf{w}^T b \mathbf{w}} = e^{\frac{-a}{2} \sum_i (y_i - X_i \mathbf{w})^2 + \frac{-1}{2} \mathbf{w}^T b \mathbf{w}} \\ &= e^{\frac{-a}{2} \sum_i (y_i - X_i \mathbf{w})^2 + \frac{-b}{2} \mathbf{w}^T \mathbf{w}} \end{aligned}$$

我們要找上式的最大值的 **w**，一樣的我們取 **log**

$$\log(P(D|\mathbf{w})P(\mathbf{w})) \propto \frac{-a}{2} \sum_i (y_i - X_i \mathbf{w})^2 + \frac{-b}{2} \mathbf{w}^T \mathbf{w}$$

寫成 **matrix form**

$$\begin{aligned} \frac{-a}{2} \sum_i (y_i - X_i \mathbf{w})^2 + \frac{-b}{2} \mathbf{w}^T \mathbf{w} &= \frac{-a}{2} \|X\mathbf{w} - \mathbf{y}\|^2 + \frac{-b}{2} \mathbf{w}^T \mathbf{w} \\ &= \frac{-a}{2} (\|X\mathbf{w} - \mathbf{y}\|^2 + \frac{b}{a} \mathbf{w}^T \mathbf{w}) \end{aligned}$$

我們可以觀察一下，一樣的前面的係數不重要，和 **rLSE** 形式比較， $\frac{b}{a}$ 就是 **rLSE** 的 λ

接下來，我們要推導，若是 **prior** 是 **multivariate**，**likelihood** 是 **univariate**，得出來的 **posterior** 是 **multivariate**

我們還是使用和前面一樣的方法，我們不重視 **exponential** 前面的係數項，因為那是最後 **normalize** 會將係數都處理掉，我們重視的是指數項是不是 **quadratic form** $(\mathbf{w} - \boldsymbol{\mu})^T \Lambda (\mathbf{w} - \boldsymbol{\mu})$

$$a \|X\mathbf{w} - \mathbf{y}\|^2 + b\mathbf{w}^T \mathbf{w} = a(X\mathbf{w} - \mathbf{y})^T (X\mathbf{w} - \mathbf{y}) + b\mathbf{w}^T \mathbf{w}$$

$$\begin{aligned} \text{指數項} &:= a(\mathbf{w}^T X^T X \mathbf{w} - 2\mathbf{w}^T X^T \mathbf{y} + \mathbf{y}^T \mathbf{y}) + b\mathbf{w}^T \mathbf{w} \\ &= \mathbf{w}^T (aX^T X + bI) \mathbf{w} - 2a\mathbf{w}^T X^T \mathbf{y} + a\mathbf{y}^T \mathbf{y} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{對應的 quadratic form} &: (\mathbf{w} - \boldsymbol{\mu})^T \Lambda (\mathbf{w} - \boldsymbol{\mu}) \\ &= \mathbf{w}^T \Lambda \mathbf{w} - 2\mathbf{w}^T \Lambda \boldsymbol{\mu} + \boldsymbol{\mu}^T \boldsymbol{\mu} \end{aligned}$$

後面的常數項其實不重要，因為常數項可以放到 exponential 前面做為係數，最後的 normalize (marginalize) 會幫我們修正，所以常數項不重要

用數學式子敘述剛剛的概念一次：

$$\begin{aligned} e^{\mathbf{w}^T (aX^T X + bI) \mathbf{w} - 2a\mathbf{w}^T X^T \mathbf{y} + a\mathbf{y}^T \mathbf{y}} &= e^{\mathbf{w}^T (aX^T X + bI) \mathbf{w} - 2a\mathbf{w}^T X^T \mathbf{y} + a\mathbf{y}^T \mathbf{y}} = e^{(\mathbf{w}^T \Lambda \mathbf{w} - 2\mathbf{w}^T \Lambda \boldsymbol{\mu} + \boldsymbol{\mu}^T \boldsymbol{\mu}) - \boldsymbol{\mu}^T \boldsymbol{\mu} + a\mathbf{y}^T \mathbf{y}} \\ &= e^{-\boldsymbol{\mu}^T \boldsymbol{\mu} + a\mathbf{y}^T \mathbf{y}} e^{\mathbf{w}^T \Lambda \mathbf{w} - 2\mathbf{w}^T \Lambda \boldsymbol{\mu} + \boldsymbol{\mu}^T \boldsymbol{\mu}} = A e^{(\mathbf{w} - \boldsymbol{\mu})^T \Lambda (\mathbf{w} - \boldsymbol{\mu})} \end{aligned}$$

注意，這裡我們的變數只有 \mathbf{w} ，其餘都視為常數

則只要令 $\Lambda = aX^T X + bI$ ，指數項就可以變成 quadratic form，我們就可以得到 posterior 為 $\boldsymbol{\mu} = a\Lambda^{-1} X^T \mathbf{y}$

multivariate Gaussian distribution

$$P(\mathbf{w} | D) \sim N(a\Lambda^{-1} X^T \mathbf{y}, (aX^T X + bI)^{-1})$$

而 posterior 的 mean 就是我們想要求的最佳回歸直線的其中一點

$$\text{mean} = a\Lambda^{-1} X^T \mathbf{y} = a(aX^T X + bI)^{-1} X^T \mathbf{y} = \left(\frac{a}{a} X^T X + \frac{b}{a} I\right) X^T \mathbf{y} = (X^T X + \lambda I) X^T \mathbf{y}$$

和 rLSE 微分得出來的形式是一樣的，故 rLSE 也就是 frequentist 版的 MAP

note(作業第三題需要):

我們可以用這樣的概念去做 online learning，因為我們的 prior 和 posterior 的形式都是 multivariate Gaussian distribution，所以我們只需要找出拿到新 data 後，前一次的 posterior 的 mean, covariance 和下一次的 mean, covariance 是甚麼關係即可。

我們在做第一次的 iteration 時，我們的 prior 的 mean 是 0，covariance 是任意給定的值(課本假設為無限大，反正做越多次 iteration 會越來越小，所以無論選甚麼 covariance 值都沒關係)，我們會

得到 posterior 的 mean 和 covariance matrix，也就是前面推導過的

$$\Lambda = aX^T X + bI$$

$$\mu = a\Lambda^{-1} X^T y$$

若我們要做第二次 iteration，前一個，也就是第一次的 posterior 的 mean 不為零向量，covariance matrix 也不一定是對角矩陣，故公式需要做修正，還記得吧！本來我們推導的式子是這樣

$$P(\mathbf{w} | D) \propto P(D | \mathbf{w})P(\mathbf{w}) \propto e^{-\frac{a}{2} \sum_i (y_i - X_i \mathbf{w})^2 - \frac{1}{2} (\mathbf{w} - \mathbf{0})^T bI (\mathbf{w} - \mathbf{0})} = e^{-\frac{a}{2} \sum_i (y_i - X_i \mathbf{w})^2 - \frac{b}{2} \mathbf{w}^T \mathbf{w}}$$

紅圓圈的地方是我們假設 mean 為零向量，covariance matrix 為對角矩陣，故公式需重新推導，假設 prior 的 mean 為 \mathbf{m} ，covariance matrix 的 inverse 為 S

$$P(\mathbf{w} | D) \propto P(D | \mathbf{w})P(\mathbf{w}) \propto e^{-\frac{a}{2} \sum_i (y_i - X_i \mathbf{w})^2 - \frac{1}{2} (\mathbf{w} - \mathbf{m})^T S (\mathbf{w} - \mathbf{m})} = e^{-\frac{a}{2} \sum_i (y_i - X_i \mathbf{w})^2 - \frac{1}{2} (\mathbf{w} - \mathbf{m})^T S (\mathbf{w} - \mathbf{m})}$$

寫成矩陣表示式為

$$\begin{aligned} & -\frac{a}{2} \sum_i (y_i - X_i \mathbf{w})^2 + \frac{1}{2} (\mathbf{w} - \mathbf{m})^T S (\mathbf{w} - \mathbf{m}) = \frac{a}{2} \| X\mathbf{w} - \mathbf{y} \|^2 + \frac{1}{2} (\mathbf{w} - \mathbf{m})^T S (\mathbf{w} - \mathbf{m}) \\ & = \frac{a}{2} (\| X\mathbf{w} - \mathbf{y} \|^2 + \frac{1}{a} (\mathbf{w} - \mathbf{m})^T S (\mathbf{w} - \mathbf{m})) \end{aligned}$$

忽略係數，整理得

$$\begin{aligned} & a \| X\mathbf{w} - \mathbf{y} \|^2 + (\mathbf{w} - \mathbf{m})^T S (\mathbf{w} - \mathbf{m}) = a (X\mathbf{w} - \mathbf{y})^T (X\mathbf{w} - \mathbf{y}) + (\mathbf{w} - \mathbf{m})^T S (\mathbf{w} - \mathbf{m}) \\ & = a (\mathbf{w}^T X^T X \mathbf{w} - 2\mathbf{w}^T X^T \mathbf{y} + \mathbf{y}^T \mathbf{y}) + (\mathbf{w}^T S \mathbf{w} - 2\mathbf{w}^T S \mathbf{m} + \mathbf{m}^T S \mathbf{m}) \\ & = \mathbf{w}^T (aX^T X + S) - 2\mathbf{w}^T (aX^T \mathbf{y} + S\mathbf{m}) + a\mathbf{y}^T \mathbf{y} + \mathbf{m}^T S \mathbf{m} \end{aligned}$$

和 quartic form 比較

$$\begin{aligned} & (\mathbf{w} - \mu)^T \Lambda (\mathbf{w} - \mu) \\ & = \mathbf{w}^T \Lambda \mathbf{w} - 2\mathbf{w}^T \Lambda \mu + \mu^T \mu \end{aligned}$$

得

$$\begin{aligned} \Lambda &= aX^T X + bI \\ \mu &= \Lambda^{-1} (aX^T \mathbf{y} + S\mathbf{m}) \end{aligned}$$

我們就推導出 posterior 的 mean vector 和 covariance matrix 了！