А. А. Шананин, Двойственность по Янгу и агрегирование балансов, *Докл. РАН. Матем., информ., проц. упр.*, 2020, том 493, 81–85

DOI: https://doi.org/10.31857/S2686954320040177

ДОКЛАДЫ РОССИЙСКОЙ АКАДЕМИИ НАУК. МАТЕМАТИКА, ИНФОРМАТИКА, ПРОЦЕССЫ УПРАВЛЕНИЯ, 2020, том 493, с. 81–85

ИНФОРМАТИКА

УДК 519.863

ДВОЙСТВЕННОСТЬ ПО ЯНГУ И АГРЕГИРОВАНИЕ БАЛАНСОВ

 Член-корреспондент РАН А. А. Шананин[1,2,3,4,*]

Поступило 21.04.2020 г.
После доработки 21.04.2020 г.
Принято к публикации 02.05.2020 г.

С помощью преобразования Янга и теоремы двойственности Фенхеля в работе построено обобщение операции конволюции. На ее основе предложена процедура агрегирования модели нелинейного межотраслевого баланса с вогнутыми положительно однородными производственными функциями.

Ключевые слова: модель нелинейного межотраслевого баланса, преобразование Янга, задача о слабой отделимости, функция Кобба–Дугласа

DOI: 10.31857/S2686954320040177

Метод межотраслевого баланса В.В. Леонтьева был удостоен премии имени Нобеля по экономике и успешно использовался в XX веке для анализа экстенсивного восстановительного роста. В основу метода Леонтьева была положена система материальных балансов и гипотеза о постоянстве норм затрат на выпуск продукции в процессе межотраслевого взаимодействия. В 1990-е годы в развитых капиталистических странах изменился характер экономической динамики: экстенсивное увеличение объемов производства сменилось ростом разнообразия и качества товаров и услуг. В этих условиях гипотеза Леонтьева о постоянстве норм затрат перестала соответствовать возросшей взаимозаменяемости товаров и услуг. Мировые экономические кризисы конца XX–начала XXI века актуализировали модели межотраслевых балансов как инструмент исследования структурных диспропорций. Стали разрабатываться сетевые модели межотраслевых связей для экономики США (см., например, [1]). В [1] гипотеза В.В. Леонтьева о постоянстве норм материальных затрат заменена гипотезой о постоянстве структуры финансовых затрат в процессе производства товаров и услуг с учетом их отраслевой дифференциации. В современных экономических условиях такая гипотеза представляется более адекватной, чем гипотеза В.В. Леонтьева, и ей соответствуют производственные функции Кобба–Дугласа. В данной работе рассматриваются возникшие математические задачи агрегирования и калибровки моделей нелинейного межотраслевого баланса.

1. НЕЛИНЕЙНЫЙ МЕЖОТРАСЛЕВОЙ БАЛАНС

Рассмотрим группу из m чистых отраслей, связанных взаимными поставками продукции в качестве производственных факторов (ПФ). Обозначим через X_i^j объем продукции i-й отрасли, который используется в качестве ПФ в процессе производства в j-й отрасли, а через $X^j = (X_1^j, \ldots, X_m^j)$ – вектор затрат j-й отраслью ПФ, производимых рассматриваемой группой отраслей. Будем также предполагать, что в процессе производства отрасли затрачивают в качестве ПФ первичные ресурсы (n видов), т.е. продукты, не производимые рассматриваемой группой отраслей. Обозначим через $l^j = (l_1^j, \ldots, l_n^j)$ вектор затрат j-й отраслью первичных ресурсов, а через $F_j(X^j, l^j)$ – производственную функцию j-й отрасли, т.е. зависимость выпуска j-й отрасли от затрат ПФ. Будем предполагать, что производственные функции отраслей обладают неоклассическими свойствами, т.е. являются вогнутыми, монотонно неубывающими, непрерывными функциями на R_+^{m+n}, обращающимися в нуле в нуль. Кроме того,

[1] *Московский физико-технический институт (национальный исследовательский университет), Долгопрудный, Московская обл., Россия*
[2] *Федеральный исследовательский центр “Информатика и управление” Российской академии наук, Москва, Россия*
[3] *Московский государственный университет имени М.В. Ломоносова, Москва, Россия*
[4] *Российский университет дружбы народов, Москва, Россия*
**E-mail: alexshan@yandex.ru*

будем считать, что $F_j(X^j, l^j)$ являются функциями, положительно однородными первой степени. Будем говорить, что такие функции принадлежат классу Φ_{m+n}.

Обозначим через $X^0 = (X_1^0, \ldots, X_m^0)$ объемы поставок производимой рассматриваемыми отраслями продукции внешним потребителям. Будем считать, что спрос внешних потребителей описывается с помощью функции полезности $F_0(X^0) \in \Phi_m$. Предположим, что предложение первичных ресурсов рассматриваемой группе отраслей ограничено объемами $l = (l_1, \ldots, l_n) \geq 0$, и рассмотрим задачу об оптимальном распределении этих ресурсов между отраслями в целях максимизации функции полезности внешних потребителей при балансовых ограничениях по первичным ресурсам и выпускаемой отраслями продукции:

$$F_0(X^0) \to \max, \tag{1}$$

$$F_j(X^j, l^j) \geq \sum_{i=0}^{m} X_j^i, \quad j = 1, \ldots, m; \tag{2}$$

$$\sum_{j=1}^{m} l^j \leq l; \tag{3}$$

$$\begin{gathered} X^0 \geq 0, \quad X^1 \geq 0, \ldots, X^m \geq 0, \\ l^1 \geq 0, \ldots, l^m \geq 0. \end{gathered} \tag{4}$$

Будем считать, что рассматриваемая группа отраслей продуктивна, т.е. существуют $\hat{X}^1 \geq 0$, ..., $\hat{X}^m \geq 0$, $\hat{l}^1 \geq 0, \ldots, \hat{l}^m \geq 0$, такие, что

$$F_j(\hat{X}^j, \hat{l}^j) > \sum_{i=0}^{m} \hat{X}_j^i, \quad j = 1, \ldots, m.$$

Нетрудно доказать, что если группа отраслей продуктивна и $l = (l_1, \ldots, l_n) > 0$, то задача оптимизации (1)–(4) удовлетворяет условиям Слейтера.

Предложение 1 (см. [2]). *Для того чтобы набор векторов* $\{\hat{X}^0, \hat{X}^1, \ldots, \hat{X}^m, \hat{l}^1, \ldots, \hat{l}^m\}$, *удовлетворяющих ограничениям* (2)–(4), *являлся решением задачи оптимизации* (1)–(4), *необходимо и достаточно, чтобы существовали множители Лагранжа* $p_0 > 0$, $q = (q_1, \ldots, q_m) \geq 0$, $s = (s_1, \ldots, s_n) \geq 0$ *такие, что*

$$\begin{gathered} (\hat{X}^j, \hat{l}^j) \in \operatorname{Arg}\max\{q_j F_j(X^j, l^j) - \\ - qX^j - sl^j \,\big|\, X^j \geq 0, l^j \geq 0\}, \\ j = 1, \ldots, m; \end{gathered} \tag{5}$$

$$\begin{gathered} q_j\left(F_j(\hat{X}^j, \hat{l}^j) - \hat{X}_j^0 - \sum_{i=1}^{m} \hat{X}_j^i\right) = 0, \\ j = 1, \ldots, m; \end{gathered} \tag{6}$$

$$s_k\left(l_k - \sum_{j=1}^{m} \hat{l}_k^j\right) = 0, \quad k = 1, \ldots, n; \tag{7}$$

$$\hat{X}^0 \in \operatorname{Arg}\max\{p_0 F_0(X^0) - qX^0 \,\big|\, X^0 \geq 0\}. \tag{8}$$

Будем интерпретировать множители Лагранжа $q = (q_1, \ldots, q_m)$ к балансовым ограничениям по выпускаемым отраслями продуктам как цены на эти продукты, а множители Лагранжа $s = (s_1, \ldots, s_n)$ к балансовым ограничениям по первичным ресурсам как цены на первичные ресурсы. Тогда соотношение (5) означает, что предложение продукции отраслями и их спрос на производственные факторы текущего пользования определяется из максимизации прибыли при ценах (q, s). Соотношение (8) описывает спрос при ценах q репрезентативного рационального конечного потребителя с функцией полезности $F_0(X^0)$, и, кроме того, $p_0 = q_0(q)$, где функция $q_0(q)$ является преобразованием Янга функции $F_0(X^0)$, т.е.

$$q_0(q) = \inf\left\{\frac{qX^0}{F_0(X^0)} \,\bigg|\, X^0 \geq 0,\ F_0(X^0) > 0\right\}.$$

Соотношения (2) и (6), (3) и (7) означают, что цены $q = (q_1, \ldots, q_m)$ и $s = (s_1, \ldots, s_n)$ равновесные. Таким образом, оптимальными механизмами распределения являются равновесные рыночные механизмы. Двойственным описанием технологии производства j-й отрасли является функция себестоимости

$$q_j(q, s) = \\ = \inf\left\{\frac{qX^j + sl^j}{F_j(X^j, l^j)} \,\bigg|\, X^j \geq 0,\ l^j \geq 0,\ F_j(X^j, l^j) > 0\right\}.$$

Функция себестоимости $q_j(q, s)$ является преобразованием Янга производственной функции $F_j(X^j, l^j)$.

2. ЗАДАЧА ОБ АГРЕГИРОВАННОМ ОПИСАНИИ ГРУППЫ ОТРАСЛЕЙ

Рассмотрим задачу агрегирования межотраслевого баланса (2)–(4) с помощью функции полезности $F_0(X^0)$. Обозначим через $F^A(l)$ оптимальное значение функционала в задаче (1)–(4) в зависимости от вектора предложения первичных ресурсов l в правой части балансового ограничения (3). Функция $F^A(l) \in \Phi_n$ и интерпретируется как агрегированная производственная функция. Агрегированной производственной функции $F^A(l)$ соответствует двойственная агрегированная функция себестоимости

$$q_A(s) = \inf\left\{\frac{sl}{F^A(l)}\middle|\, l \geq 0,\, F^A(l) > 0\right\}. \qquad (9)$$

Функция себестоимости $q_A(s) \in \Phi_n$, кроме того, справедливо

$$F^A(l) = \inf\left\{\frac{\mathrm{sl}}{q_A(s)}\middle| s \geq 0, q_A(s) > 0\right\}.$$

В силу преобразования Янга производственной функции CES $\left(\left(\frac{X_1}{w_1}\right)^{-\rho} + \left(\frac{X_2}{w_2}\right)^{-\rho} + \left(\frac{X_n}{w_n}\right)^{-\rho}\right)^{-\frac{1}{\rho}}$, где $\rho \in [-1, 0) \cup (0, +\infty]$, $w_1 > 0, \ldots, w_n > 0$, соответствует CES-функция себестоимости $((s_1w_1)^{-\sigma} + (s_2w_2)^{-\sigma} + (s_nw_n)^{-\sigma})^{-\frac{1}{\sigma}}$, где $\sigma = -\frac{\rho}{1+\rho}$, а производственной функции Кобба–Дугласа (предельный случай при $\rho \to 0$) $F_{KD}(X_1, \ldots, X_n) = AX_1^{\alpha_1} \ldots X_n^{\alpha_n}$, где $A > 0$, $\alpha_1 > 0, \ldots, \alpha_n > 0$, $\alpha_1 + \ldots + \alpha_n = 1$, соответствует функция себестоимости

$$q_{KD}(p_1, \ldots p_n) = \frac{1}{F_{KD}(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)} p_1^{\alpha_1} \ldots p_n^{\alpha_n}.$$

Т е о р е м а 1. *Агрегированная функция себестоимости представима в виде*

$$q_A(s) = \sup\{q_0(p) \mid p = (p_1, \ldots, p_m) \geq 0,\, q_j(s, p) \geq p_j,\, j = 1, \ldots, m\}. \qquad (10)$$

Доказательство теоремы 1 основано на применении теоремы двойственности Фенхеля к задаче оптимизации (1)–(4). Отметим, что формула (10) является обобщенным аналогом известной в выпуклом анализе операции конволюции.

О п р е д е л е н и е 1. Будем называть задачу (10) д в о й с т в е н н о й п о Я н г у к задаче (1)–(4).

П р е д л о ж е н и е 2. *Если множители Лагранжа* $\hat{p} = (\hat{p}_1, \ldots, \hat{p}_m) \geq 0$, $\hat{s} \geq 0$ *к задаче* (1)–(4) *удовлетворяют условиям*

$$(\hat{X}^j, \hat{l}^j) \in \operatorname{Arg\,max}\{\hat{p}_j F_j(X^j, l^j) - \hat{p}X^j - \hat{s}l^j \mid X^j \geq 0,\, l^j \geq 0\},$$
$$j = 1, \ldots, m;$$

$$\hat{p}_j\left(F_j(\hat{X}^j, \hat{l}^j) - \hat{X}_j^0 - \sum_{i=1}^m \hat{X}_j^i\right) = 0,$$
$$j = 1, \ldots, m;$$

$$\hat{s}_k\left(l_k - \sum_{j=1}^m \hat{l}_k^j\right) = 0, \quad k = 1, \ldots, n;$$

$$\hat{X}^0 \in \operatorname{Arg\,max}\left\{F_0(X^0) - \hat{p}X^0 \middle| X^0 \geq 0\right\},$$

то $\hat{p} = (\hat{p}_1, \ldots, \hat{p}_m) \geq 0$, $\hat{s} \geq 0$ *являются решением задачи* (10).

3. АГРЕГИРОВАНИЕ МЕЖОТРАСЛЕВОГО БАЛАНСА

Рассмотрим вопрос об агрегировании межотраслевого баланса (1)–(4). Предположим, что множество номеров отраслей и выпускаемых ими продуктов $\{1, \ldots, m\}$ разбито на непересекающиеся подмножества $\{I_\alpha \mid \alpha = 1, \ldots, \nu\}$. Обозначим $Z^\alpha = (X_j^0 \mid j \in I_\alpha)$, где $\alpha = 1, \ldots, \nu$. Предположим, что функция полезности внешних потребителей имеет структуру $F_0(X^0) = G_0(G_1(Z^1), \ldots, G_\nu(Z^\nu))$, где функции $G_\alpha \in \Phi_{|I_\alpha|}$, $\alpha = 1, \ldots, \nu$.

Л е м м а 1. *Пусть* $G_1(Z^1), \ldots, G_\nu(Z^\nu)$ – *положительно однородные, вогнутые, непрерывные функции, принимающие положительные значения при положительных значениях аргументов, а функция* $G_0(Y_1, \ldots, Y_\nu) \in \Phi_\nu$. *Пусть функции*

$$h_\alpha(p^\alpha) = \inf_{\{Z^\alpha \geq 0 | G_\alpha(Z^\alpha) > 0\}} \frac{p^\alpha Z^\alpha}{G_\alpha(Z^\alpha)},$$
$$\alpha = 1, \ldots, \nu,$$
$$h_0(\beta_1, \ldots, \beta_\nu) = \inf_{\{Y_1 \geq 0, \ldots, Y_\nu \geq 0 | G_0(Y_1, \ldots, Y_\nu) > 0\}} \frac{\beta_1 Y_1 + \ldots + \beta_\nu Y_\nu}{G_0(Y_1, \ldots, Y_\nu)}$$

являются их преобразованиями Янга. Тогда

$$\inf_{\{Z^1 \geq 0, \ldots, Z^\nu \geq 0 | G_0(G_1(Z^1), \ldots, G_\nu(Z^\nu)) > 0\}} \frac{p^1 Z^1 + \ldots + p^\nu Z^\nu}{G_0(G_1(Z^1), \ldots, G_\nu(Z^\nu))} = h_0(h_1(p^1), \ldots, h_\nu(p^\nu)),$$

Здесь $Z^\alpha = (X_j^0 \mid j \in I_\alpha)$, $p^\alpha = (p_j \mid j \in I_\alpha)$, $\alpha = 1, \ldots, \nu$.

По лемме 1 функция $h_0(h_1(p^1), \ldots, h_\nu(p^\nu))$ в силу преобразования Янга будет двойственной к функции $F_0(X^0) = G_0(G_1(Z^1), \ldots, G_\nu(Z^\nu))$.

Рассмотрим вспомогательную задачу

$$H^\alpha(p^1, \ldots, p^{\alpha-1}, p^{\alpha+1}, \ldots, p^\nu, s) = \sup\{h_\alpha(p^\alpha) \mid p^\alpha \geq 0,\, q_j(p, s) \geq p_j,\, j \in I_\alpha\}.$$

Т е о р е м а 2. *Пусть*

$$H^\alpha(p^1, \ldots, p^{\alpha-1}, p^{\alpha+1}, \ldots, p^\nu, s) = r^\alpha(h_1(p^1), \ldots, h_{\alpha-1}(p^{\alpha-1}), h_{\alpha+1}(p^{\alpha+1}), \ldots, h_\nu(p^\nu), s), \qquad (11)$$
$$\alpha = 1, \ldots, \nu,$$

где $r^\alpha(h_1, \ldots, h_{\alpha-1}, h_{\alpha+1}, \ldots, h_\nu, s)$ – *положительно однородные, вогнутые, непрерывные функции, принимающие поSложительные значения при положи-*

тельных значениях аргументов. Тогда

$$q_A(s) = \sup\{h_0(h_1,\dots,h_\nu) \mid r^\alpha(h_1,\dots,h_{\alpha-1},h_{\alpha+1},\dots,h_\nu,s) \ge h_\alpha \ge 0, \quad \alpha = 1,\dots,\nu\}. \tag{12}$$

Кроме того, если $\hat{p} = (\hat{p}^\alpha \mid \alpha = 1,\dots,\nu)$ *– решение задачи* (10), *то* $\{\hat{h}_\alpha = h^\alpha(\hat{p}^\alpha) \mid \alpha = 1,\dots,\nu\}$ *– решение задачи* (12).

Теорема 3. *Пусть*

$$R^\alpha(Y_1,\dots,Y_{\alpha-1},Y_{\alpha+1},\dots,Y_\nu,l) = \inf_{\{h_1\ge 0,\dots,h_{\alpha-1}\ge 0,\dots,h_\nu\ge 0 \mid r^\alpha(h_1,\dots,h_{\alpha-1},h_{\alpha+1},\dots,h_\nu,s)\}} \frac{h_1Y_1+\dots+h_{\alpha-1}Y_{\alpha-1}+h_{\alpha+1}Y_{\alpha+1}+\dots+h_\nu Y_\nu+sl}{r^\alpha(h_1,\dots,h_{\alpha-1},h_{\alpha+1},\dots,h_\nu,s)},$$

а $\{\hat{X}^0,\dots,\hat{X}^m,\hat{l}^1,\dots,\hat{l}^m\}$ *– решение задачи* (1)–(4). *Положим*

$$\hat{L}^\alpha = \sum_{j\in I^\alpha}\hat{l}^j;$$

$$\hat{Y}^0_\beta = G_\beta(\hat{X}^0_i \mid i\in I^\beta), \quad \beta = 1,\dots,\nu;$$

$$\hat{Y}^\alpha_\beta = G_\beta\left(\sum_{j\in I^\alpha}\hat{X}^j_i \,\middle|\, i\in I^\beta\right), \quad \alpha\ne\beta, \quad \alpha = 1,\dots,\nu, \quad \beta = 1,\dots,\nu.$$

Тогда $\{\hat{Y}^0_\beta,\hat{Y}^\alpha_\beta,\hat{L}^\alpha \mid \alpha = 1,\dots,\nu;\beta = 1,\dots,\nu\}$ *является решением задачи*

$$G_0(Y^0_1,\dots,Y^0_\nu)\to\max$$

$$R^\alpha(Y^\alpha_1,\dots,Y^\alpha_{\alpha-1},Y^\alpha_{\alpha+1},\dots,Y^\alpha_\nu,L^\alpha) \ge \ge Y^0_\alpha + \sum_{\beta\ne\alpha}Y^\beta_\alpha, \quad \alpha = 1,\dots,\nu; \tag{13}$$

$$\sum_{\alpha=1}^{\nu}L^\alpha \le l; \quad Y^0_\beta\ge 0, \quad Y^\alpha_\beta \ge 0,$$

$$\beta = 1,\dots,\nu, \beta\ne\alpha; \quad L^\alpha\ge 0, \quad \alpha = 1,\dots,\nu.$$

Замечание. Агрегированные балансы (13) не зависят от конкретного вида функции G_0, описывающей спрос внешнего потребителя. Поэтому конструкцию построения балансов (13) можно рассматривать как агрегирование межотраслевых балансов (2). Будем называть условия (11) из теоремы 2 условиями агрегирования балансов.

4. АГРЕГИРОВАНИЕ В СЛУЧАЕ ФУНКЦИЙ КОББА–ДУГЛАСА

Предположим, что функции $F_0(X) = \alpha_0 X_1^{\lambda_1}\dots X_m^{\lambda_m}$, $F_j(X,l) = \alpha_j X_1^{a_1^j}\dots X_m^{a_m^j} l_1^{b_1^j}\dots l_n^{b_n^j}$, $j = 1,\dots,m$, где

$$\alpha_0 > 0, \quad \sum_{i=1}^m \lambda_i = 1, \quad \lambda_i\ge 0, \quad i = 1,\dots,m;$$

$$\sum_{i=1}^m a_i^j + \sum_{k=1}^n b_k^j = 1, \quad j = 1,\dots,m; \quad \alpha_j > 0,$$

$$a_i^j \ge 0, \quad i = 1,\dots,m; \quad j = 1,\dots,m;$$

$$b_k^j \ge 0, \quad k = 1,\dots,n; \quad j = 1,\dots,m.$$

Будем предполагать, что каждая отрасль использует хотя бы один вид первичных ресурсов, т.е.

$$\sum_{k=1}^n b_k^i > 0, \quad i = 1,\dots,m.$$

Рассмотрим матрицы $A = \|a_i^j\|^{i=1,\dots,m}_{j=1,\dots,m}$, $B = \|b_k^j\|^{j=1,\dots,m}_{k=1,\dots,n}$ и E – единичную матрицу $(m\times m)$. Обозначим $a^0 = (a_1^0,\dots,a_m^0)^*$. Поскольку

$$\sum_{i=1}^m a_i^j < 1, \quad j = 1,\dots,m,$$

неотрицательная матрица A является продуктивной.

Следствие 2. *Задача*

$$\max\{q_0(p) \mid q_j(p,s)\ge p_j\ge 0, j = 1,\dots,m\}$$

имеет решение вида $p_j = \beta_j s_1^{c_1^j}\dots s_n^{c_n^j}$, $j = 1,\dots,m$, *где матрица*

$$C = \left\|c_k^j\right\|^{k=1,\dots,n}_{j=1,\dots,m} = (E-A)^{-1}B.$$

Агрегированная функция себестоимости и агрегированная производственная функция имеют вид

$$q_A(s) = \lambda s_1^{\gamma_1}\dots s_n^{\gamma_n}, \; F^A(l) = \mu l_1^{\gamma_1}\dots l_n^{\gamma_n},$$

где $\gamma = (\gamma_1,\dots,\gamma_n)^* = C^*a^0$, *причем* $\gamma_1+\dots+\gamma_n = 1$.

Рассмотрим агрегирование межотраслевого баланса в случае функций Кобба–Дугласа. Как и в разделе 4, предположим, что множество номеров отраслей и выпускаемых ими продуктов $\{1,\dots,m\}$ разбито на непересекающиеся подмножества $\{I_\alpha \mid \alpha = 1,\dots,\nu\}$. Будем искать агрегирующие функции также в классе функций Кобба–Дугласа

$$G_\alpha(X_j \mid j \in I^\alpha) = \prod_{j \in I^\alpha} X_j^{\lambda_j^\alpha}, \quad \text{где} \quad \lambda_j^\alpha \geq 0, \quad j \in I^\alpha; \quad \sum_{j \in I^\alpha} \lambda_j^\alpha = 1, \quad \alpha = 1,\ldots,\nu. \tag{14}$$

Обозначим через $A_{\alpha\beta} = (a_i^j)_{j \in I^\alpha}^{i \in I^\beta}$, $\lambda^\alpha = (\lambda_j^\alpha \mid j \in I^\alpha)$, $\alpha = 1,\ldots,\nu$, а через $E_{\alpha\alpha}$ – единичную матрицу, у которой $|I^\alpha|$ строк.

Следствие 3. *Для того чтобы функции* (14) *удовлетворяли условиям агрегирования балансов* (11), *необходимо и достаточно*, *чтобы для любой упорядоченной пары* (α, β), *где* $\alpha = 1,\ldots,\nu$, $\beta = 1,\ldots,\nu$, $\beta \neq \alpha$, существовало число $\mu_{\beta\alpha} \geq 0$, такое, что выполняется равенство

$$A_{\alpha\beta}^*(E_{\alpha\alpha} - A_{\alpha\alpha}^*)^{-1}\lambda^\alpha = \mu_{\alpha\beta}\lambda^\beta. \tag{15}$$

Замечание. Из (15) следует, что вектор λ^α должен быть собственным вектором матрицы $A_{\beta\alpha}^*(E_{\beta\beta} - A_{\beta\beta}^*)^{-1}A_{\alpha\beta}^*(E_{\alpha\alpha} - A_{\alpha\alpha}^*)^{-1}$. По теореме Фробениуса–Перрона такой неотрицательный собственный вектор существует. Более того, если $\mu_{\alpha\beta} > 0$, то неотрицательный вектор $\lambda^\beta = \frac{1}{\mu_{\alpha\beta}} A_{\alpha\beta}^*(E_{\alpha\alpha} - A_{\alpha\alpha}^*)^{-1}\lambda^\alpha$ является собственным вектором матрицы

$$A_{\alpha\beta}^*(E_{\alpha\alpha} - A_{\alpha\alpha}^*)^{-1}A_{\beta\alpha}^*(E_{\beta\beta} - A_{\beta\beta}^*)^{-1},$$

при этом выполняются соотношения (13) для пар (α, β) и (β, α).

ИСТОЧНИКИ ФИНАНСИРОВАНИЯ

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского научного фонда, проект 16-01-10246.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Acemoglu D., Ozdaglar A., Tahbaz-Salehi A.* The Network Origins of Aggregate Fluctuations // Econometrica. 2012. V. 80. № 5. P. 1977–2016.
2. *Agaltsov A.D., Molchanov E.G., Shananin A.A.* Inverse Problems in Models of Resource Distribution // J. Geometric Analysis. 2018. V. 28. № 1. P. 726–765.

THE YANG'S DUALITY AND TO AGGREGATION OF THE BALANCES

Corresponding Member of the RAS A. A. Shananin[a,b,c,d]

[a] *Moscow Institute Physics and Technology (National Research University), Moscow, Russian Federation*
[b] *Federal Research Center "Computer Science and Control", Russian Academy of Sciences, Moscow, Russian Federation*
[c] *Lomonosov Moscow State University, Moscow, Russian Federation*
[d] *Peoples' Friendship University of Russia, Moscow, Russian Federation*

Using the Yang transform and the Fenchel duality theorem, the paper proposes an operation generalizing convolution, and constructs an aggregation model of an intersectoral balance with concave positively homogeneous production functions

Keywords: the model of nonlinear input-output balance, Yang's transform, the problem of weak separability, Cobb–Douglas function