

**«Разработка комбинированной математической модели распространения  
COVID-19 с учетом экономических агентов»**

Воробьева Ирина

## **1 Комбинированная модель распространения COVID-19 с учетом экономических агентов**

В рамках разрабатываемой модели предполагается объединить две модели: агентную модель распространения COVID-19 и модель распространения шоков в экономике. Первая модель позволяет моделировать распространение вируса «снизу-вверх», учитывая взаимодействие агентов, их принадлежность к различным социальным группам и внешнее взаимодействие в виде локдаунов или дистанционного обучения. Вторая модель позволяет изучить влияние шоков, воздействующих на отдельные отрасли или комплексы отраслей, на экономическую систему в целом.

### **1.1 Модель распространения шоков в экономике**

Данная модель уходит корнями к теории межотраслевых балансов Леонтьева [4]. В рамках данной модели предполагалось постоянство норм затрат на выпуск продукции в процессе межотраслевого взаимодействия. Со временем, теория Леонтьева потеряла свою актуальность в связи с возросшей взаимозаменяемостью товаров и услуг. Однако идея изучения взаимосвязей между отраслями не потеряла своей популярности, а гипотеза постоянства норм затрат преобразовалась в предположение о постоянстве структуры финансовых затрат в процессе производства товаров и услуг с учетом их отраслевой дифференциации. При использовании данного подхода рассматриваются производственные функции Кобба–Дугласа. В работах [1], [2] рассматриваются вопросы, посвященные поиску экономического равновесия в системах, описываемых матрицами межотраслевых затрат. В работе [3] проводится выявление отраслей-драйверов для экономики Российской Федерации и их влияние на ВВП страны.

#### **1.1.1 Таблица выпусков и затрат**

Рассмотрим матрицу  $Z = \{Z_i^j\}_{i=1, \dots, m+k}^{j=1, \dots, m+n}$  — матрицу межотраслевого взаимодействия, где  $Z_i^j$  при  $i = 1, \dots, m$ ,  $j = 1, \dots, m$  — денежная сумма, полученная  $i$ -й отраслью от  $j$ -й

отрасли за выполнение работы,  $m$  — количество отраслей,  $n$  — количество первичных ресурсов,  $k$  — количество конечных потребителей.

Обратной задачей в данном случае является построение модели распределения ресурсов в виде задачи выпуклого программирования, решение которой воспроизводит такую матрицу.

### 1.1.2 Модель оптимального распределения ресурсов

Рассмотрим группу из  $m$  чистых отраслей, связанных через производственные факторы (ПФ). Обозначим  $X_i^j$  объем продукции  $i$ -й отрасли, необходимый для производства в  $j$ -й отрасли. Тогда  $X^j = (X_1^j, \dots, X_m^j)$  — затраты  $j$ -й отрасли на производство. Обозначим через  $l^j = (l_1^j, \dots, l_n^j)$  — вектор первичных ресурсов, используемых  $j$ -й отраслью, всего первичных ресурсов  $n$  видов.

Производственные функции отраслей  $F_j(X^j, l^j)$  зависят от используемых в отрасли производственных факторов и первичных ресурсов. Будем считать, что производственные функции удовлетворяют неоклассическим предположениям: являются вогнутыми, монотонно неубывающими, непрерывными на  $\mathbb{R}_+^{m+n}$  и равными нулю в нуле.

Внешние потребители получают объемы поставок  $X^0 = (X_1^0, \dots, X_m^0)$  от всех отраслей и имеют функцию полезности  $F_0(X^0)$  также удовлетворяющую неоклассическим предположениям.

Тогда, можно поставить следующую задачу выпуклой оптимизации:

$$\begin{aligned} F_0(X^0) &\rightarrow \max; \\ F_j(X^j, l^j) &\geq \sum_{i=0}^m X_j^i, j = 1, \dots, m; \\ \sum_{j=1}^m l^j &\leq l; \\ X^0 &\geq 0, \dots, X^m \geq 0, l^1 \geq 0, \dots, l^n \geq 0. \end{aligned} \tag{1}$$

Для того, чтобы набор векторов  $\{\hat{X}^0, \hat{X}^1, \dots, \hat{X}^m, \hat{l}^1, \dots, \hat{l}^n\}$ , удовлетворяющий ограничениям (1), являлся решением задачи оптимизации, необходимо и достаточно, чтобы существовали множители Лагранжа,  $p_0 > 0$ ,  $p = (p_1, \dots, p_m) \geq 0$  и  $s = (s_1, \dots, s_n) \geq 0$ ,

такие, что:

$$\begin{aligned}
& (\hat{X}^j, \hat{l}^j) \in \text{Argmax} \left\{ p_j F_j(X^j, l^j) - pX^j - sl^j \mid X^j \geq 0, l^j \geq 0 \right\}, \quad j = 1, \dots, m; \\
& p_j \left[ F_j(\hat{X}^j, \hat{l}^j) - \hat{X}^0 - \sum_{i=1}^m \hat{X}_j^i \right] = 0; \quad j = 1, \dots, m \\
& s_k \left[ l_k - \sum_{j=1}^m \hat{l}_k^j \right] = 0, \quad k = 1, \dots, n; \\
& \hat{X}^0 \in \text{Argmax} \{ p_0 F_0(X^0) - pX^0 \}.
\end{aligned} \tag{2}$$

Будем интерпретировать множители Лагранжа как цены:  $p$  — вектор цен на продукцию отраслей, а  $s$  — вектор цен на первичные ресурсы. Из первого условия системы (2) видно, что спрос и предложение в отраслях определяется из максимизации прибыли при установившихся наборах цен  $(p, s)$ .

В работе [1] подробно описаны способы получения балансовых значений цен и формирования ВВП в рамках данной модели.

### 1.1.3 Решение обратной задачи

В данном разделе мы определим

Введем следующие обозначения:  $Z^0 = (Z_1^0, \dots, Z_m^0)$ , где  $Z_i^0 = \sum_{i=m+1}^{m+k} X_i^j$  — конечное потребление продукта  $i$ -й отрасли. Суммарную стоимость продуктов всех отраслей обозначим  $A_0 = \sum_{i=1}^m Z_i^0$ , а сумму затрат  $j$ -й отрасли на производство через  $A_j = \sum_{i=1}^m Z_i^j$ ,  $j = 1, \dots, m$ .

Положим

- $a_i^j = \frac{Z_i^j}{A_j}$ ,  $i = 1, \dots, m$ ,  $j = 1, \dots, m$  — долю затрат  $j$ -й отрасли на продукцию  $i$ -й отрасли;
- $b_i^j = \frac{Z_{m+i}^j}{A_j}$ ,  $i = 1, \dots, n$ ,  $j = 1, \dots, m$  — долю затрат на  $j$ -й отрасли на  $m + i$ -й первичный ресурс;
- $a_i^0 = \frac{Z_i^0}{A_0}$ ,  $i = 1, \dots, m$  — долю  $i$ -й отрасли в совокупном выпуске.

В работе [1] показано, что при выборе в качестве производственных функций и функции полезности функции Кобба–Дугласа вида:

$$F_i(X^i, l^i) = \alpha_i (X_1^i)^{a_1^i} \dots (X_m^i)^{a_m^i} (l_1^i)^{b_1^i} \dots (l_n^i)^{b_n^i}, \quad i = 1, \dots, m$$

при  $\alpha_0 = A_0 \left[ \prod_{i=1}^m \frac{1}{Z_i^0} \right]^{a_i^0}$  и  $\alpha_j = A_j \left[ \prod_{i=1}^m \frac{1}{Z_i^j} \right]^{a_i^j} \left[ \prod_{i=1}^n \frac{1}{Z_{m+i}^j} \right]^{b_i^j}$  набор значений  $\{\hat{X}_i^0 = Z_i^0, \hat{X}_i^j = Z_i^j, l_{m+t}^j\}$  является решением задачи (1), а значит, модель корректно объясняет исходные данные.

В таком случае, ВВП рассматриваемой экономики можно записать следующим образом:

$$GDP = \frac{A_0}{\lambda},$$

где  $\lambda = \frac{1}{F_0(a_0)e^{\mu_1 a_1^0 + \dots + \mu_m a_m^0}}$ .

Для описания шоков в модели необходимо домножить производственную функцию соответствующей отрасли на долю, характеризующую изменения.

## 1.2 Агентная модель распространения COVID-19

Рассматриваемая агентная модель описана в работе [5] и реализована в среде COVASIM в репозитории [6]. В рамках данной модели рассматривается группа агентов, каждый из которых имеет свой возраст, пол и принадлежность неким социальным группам и институтам. Агенты поделены на группы по возрастам (по 10 лет) и могут взаимодействовать в рамках домохозяйств, работы или учебы (в зависимости от возраста), или общественных местах. При близком контакте инфицированного агента со здоровым, с заданной вероятностью происходит заражение. Каждый день моделируется взаимодействие агентов между собой и их состояние здоровья.

Такая модель позволяет учитывать социальную составляющую заболевания, меры предосторожности такие как самоизоляция, локдауны и дистанционное обучение.

## 1.3 Модификации в моделях

Для оценки влияния пандемии COVID-19 на экономику выбранного региона необходимо внести в модели следующие изменения.

Основным изменением является добавление в агентную модель распространения COVID-19 новый параметр для агентов: отрасль, в которой он работает. Данная модификация позволит учитывать влияние распространения коронавирусной инфекции на отдельные отрасли с учетом их специфики. Так, в отраслях, входящих в сферу услуг заражаемость может быть выше, а ограничения типа локдауна или самоизоляции клиентов приведет к серьезным шокам, а ограничение перемещений может оказать существенное влияние на транспортную отрасль.

В качестве макроэкономических параметров, изменение которых планируется наблюдать рассматривается валовый региональный продукт (ВРП), формирующийся аналогично ВВП в модели межотраслевых балансов.

Шоки в экономической составляющей модели могут быть сформированы через уменьшение работников в отраслях (в связи с болезнью или смертью), уменьшение спроса на соответствующие товары (сфера услуг и транспорт).

## 1.4 Алгоритм взаимодействия моделей

В агентной модели распространения коронавирусной инфекции изменение состояний агентов рассчитывается каждый день.

Для определения шоков предполагается отслеживать изменение количества трудоспособных агентов в каждой из отраслей в течение 30 дней, рассматривать средневзвешенные (с течением времени, большие веса ближе к концу периода в 30 дней) значения отношения доли работников в отрасли к доковидным значениям. Далее, на основе полученных значений формировать шоки в производственных функциях. Для отдельных отраслей (таких как транспорт или сфера услуг) при расчете шоков также необходимо учитывать показатели, характеризующие стремление агентов к самоизоляции на рассматриваемом периоде в 30 дней.

В результате, для каждого периода в 30 дней рассчитываются значения шоков, а на их основе моделируются новые значения ВВП при обновленной структуре издержек. Такой подход позволяет наблюдать ежемесячные изменения в экономической ситуации в регионе. На основе полученных значений ВВП также можно построить значения ВВП на душу населения.

## 2 Необходимая статистика

Для реализации данной модели необходимы следующие статистические данные:

- Таблица "затраты-выпуск" есть для РФ для 2016, [8];
- Таблица долей отраслей в ВРП по регионам, есть за 2021 год, [7];
- Распределение работников по видам деятельности внутри регионов, есть за 2021 год, [7]
- Статистика заболевших по видам деятельности, **данных нет**

## 2.1 Недостающие данные

На данном этапе работы не удалось получить данные о распределении зараженных граждан по отраслям или группам отраслей, в которых они работают.

Необходимо собрать данные о количестве заболевших в регионе по отдельным отраслям или данные о доле заболевших в конкретных отраслях внутри региона по следующим группам видов деятельности:

- производство;
- сфера услуг;
- торговля;
- перевозки;
- работа в офисах;
- строительство;
- образование.

Полный список видов экономической деятельности приложен далее [7], более подробная статистика о заболеваемости по представленным ниже видам деятельности также представляет интерес:

- Сельское, лесное хозяйство, охота, рыболовство и рыбоводство;
- Добыча полезных ископаемых;
- Обрабатывающие производства;
- Обеспечение электрической энергией, газом и паром; кондиционирование воздуха;
- Водоснабжение; водоотведение, организация сбора и утилизации отходов, деятельность по ликвидации загрязнений;
- Строительство;
- Торговля оптовая и розничная; ремонт автотранспортных средств и мотоциклов;
- Транспортировка и хранение;
- Деятельность гостиниц и предприятий общественного питания;

- Деятельность в области информации и связи;
- Деятельность по операциям с недвижимым имуществом;
- Образование;
- Деятельность в области здравоохранения и социальных услуг;
- Другие виды деятельности.

### 3 Планы и задачи

В дальнейшем планируется построить алгоритм преобразования матрицы межотраслевого баланса для всей страны к матрице межотраслевого баланса для отдельных регионов по данным статистики о влиянии отдельных отраслей на ВРП выбранного региона. Также необходимо ввести описанные ранее изменения в агентную модель распространения коронавирусной инфекции на основе данных о распределении агентов по отраслям внутри региона и исследованиях о заболеваемости работников в зависимости от отраслей.

### Список литературы

- [1] Россоха А. В., Шананин А. А, «Обратные задачи анализа межотраслевых балансов», Матем. моделирование, 33:3 (2021), 39 – 58.
- [2] Шананин А. А. Двойственность по Янгу и агрегирование балансов // Доклады РАН. Математика, информатика, процессы управления, 2020, т.493, с.81-85.
- [3] Акимова Е. Д. Выпускная квалификационная работа «Сетевые модели экономического роста», Москва, 2021.
- [4] Леонтьев В. В. Экономические эссе. – М.: Политиздат, 1990, 404 с.
- [5] Криворотько О.И., Кабанихин С.И., Сосновская М.И., Андорная Д.В. Анализ чувствительности и идентифицируемости математических моделей распространения эпидемии COVID-19. Вавиловский журнал генетики и селекции, **25**(1), 82–91 (2021).
- [6] COVID-19 Agent-based Simulator <https://github.com/InstituteForDiseaseModeling/covasim>

- [7] Регионы России. Социально-экономические показатели - 2021 год  
[https://gks.ru/bgd/regl/b21\\_14p/Main.htm](https://gks.ru/bgd/regl/b21_14p/Main.htm)
- [8] Росстат, таблицы «затраты-выпуск» — 2016 год  
<https://rosstat.gov.ru/statistics/accounts>