А. В. Рассоха, А. А. Шананин, Обратные задачи анализа межотраслевых балансов, *Матем. моделирование*, 2021, том 33, номер 3, 39–58

DOI: https://doi.org/10.20948/mm-2021-03-03

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ 2021 год, том 33, номер 3, стр. 39-58

# ОБРАТНЫЕ ЗАДАЧИ АНАЛИЗА МЕЖОТРАСЛЕВЫХ БАЛАНСОВ



***А.В. Рассоха*[1], *А.А. Шананин*[1,2]**

[1] Московский физико-технический институт (национальный исследовательский университет)
[2] Федеральный исследовательский центр информатики и управления РАН

alexshan@yandex.ru, arta13@list.ru

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ: проект 20-07-00285а.

DOI: 10.20948/mm-2021-03-03

Предлагается модификация подхода к анализу межотраслевого баланса. Вместо предположения В.В. Леонтьева о постоянстве норм затрат производственных факторов используется более реалистичное в современных условиях предположение о постоянстве пропорций межотраслевых денежных потоков. Предложен алгоритм решения обратной задачи, которая позволяет идентифицировать модель нелинейного межотраслевого баланса с функцией полезности и производственными функциями Кобба-Дугласа по данным симметричной таблицы затраты-выпуск. На основе использования преобразования Янга и двойственности по Фенхелю разработана технология анализа межотраслевых связей с помощью этой модели. Технология опробована на данных экономической статистики России.

Ключевые слова: обратная задача, симметричная таблица межотраслевого баланса, множители Лагранжа, двойственность по Фенхелю, преобразование Янга.

**INVERSE PROBLEMS OF THE ANALYSIS OF INPUT-OUTPUT BALANCES**

***A.V. Rassokha*[1], *A.A. Shananin*[1,2]**

[1] Moscow Institute of Physics and Technology (National Research University)
[2] Federal Research Center “Computer Science and Control” of RAS

The paper proposes a modification of the approach to the analysis of inter-sectoral balance. Instead of V.V. Leontiev's assumption about the constancy of the cost rates of production factors, a more realistic assumption about the constancy of the proportions of inter-industry cash flows is used in modern conditions. We propose an algorithm for solving the inverse problem that allows us to identify a model of nonlinear inter-industry balance with a utility function and production functions of Cobb-Douglas type based on the data of the symmetric input-output table. Based on the use of the Young transform and Fenchel duality, a technology for analyzing inter-sectoral relationships using this model has been developed. The technology has been tested on the data of economic statistics of Russia.

Keywords: inverse problem, symmetric table of intersectoral balance, Lagrange multipliers, Fenchel duality, Young transform.

## 1. Введение

Естественным способом освоения (усвоения) информации о межотраслевых потоках товаров и услуг является математическое моделирование. Именно математическое моделирование позволяет проанализировать скрытые причинно-следственные связи и системность имеющейся информации. Первым этапом освоения экономической информации о производственной деятельности является анализ финансовых потоков между отраслями на основе моделирования финансовых балансов. Модель должна воспроизводить исходную информацию, т.е. наблюдаемые финансовые потоки как результат решения экстремальной задачи или вариационного неравенства. С математической точки зрения построение модели является решением обратной задачи. Модель позволит анализировать изменения финансовых потоков при корректировке спроса на товары и услуги конечных потребителей (государственного заказа, экспорта, поставок товаров народного потребления). Развитие методов решения таких обратных задач применительно к материальным и финансовым балансам в XX веке связано с работами В.В. Леонтьева [1,2]. Метод межотраслевого баланса В.В. Леонтьева был удостоен премии имени Нобеля по экономике и успешно использовался в XX веке для анализа экстенсивного восстановительного роста экономики в США после великой экономической депрессии и экономик европейских стран и Японии в послевоенное тридцатилетие. Модели межотраслевого баланса позволяли строить мультипликаторы, выявлять узкие места экономической динамики, определять драйверы экономического роста. В основу метода В.В. Леонтьева была положена система материальных балансов и гипотеза о постоянстве норм затрат на выпуск продукции в процессе межотраслевого взаимодействия. Однако в 90-е годы в развитых капиталистических странах изменился характер экономической динамики: экстенсивное увеличение объёмов производства сменилось ростом разнообразия и качества товаров и услуг. В этих условиях гипотеза В.В. Леонтьева о постоянстве норм затрат перестала соответствовать возросшей взаимозаменяемости товаров и услуг. В результате модели межотраслевого баланса в этот период утратили прежнюю популярность. Их стали вытеснять модели, в которых игнорировалась отраслевая специфика, а экономическая динамика описывалась как воспроизводство валового внутреннего продукта (см., например, [3,4]). Однако мировые экономические кризисы конца XX века и начала XXI века вновь актуализировали модели межотраслевых балансов как инструмент исследования структурных диспропорций. Стали разрабатываться сетевые модели межотраслевых связей для экономики США (см., например, [5]). В [5] гипотеза В.В. Леонтьева о постоянстве норм материальных затрат заменена гипотезой о постоянстве структуры финансовых затрат в процессе производства товаров и услуг с учётом их отраслевой дифференциации. Эта гипотеза соответствует предположению о том, что производитель фиксирует пропорции своих расходов, в рамках которых в зависимости от ценовой конъюнктуры осуществляет материальные затраты, варьируя качество приобретаемых товаров и услуг. Такая гипотеза представляется более адекватной, чем гипотеза В.В. Леонтьева. Вместо леонтьевских отраслевых производственных функций с постоянными пропорциями ей соответствуют производственные функции Кобба-Дугласа. В данной работе рассматриваются возникшие математические задачи агрегирования и калибровки моделей нелинейного межотраслевого баланса (см. также [6]).

## 2. Исходная информация: симметричная таблица межотраслевого баланса

Абстрагируясь от содержательного смысла отраслей производства, перенумеруем их и будем различать по номерам $\{1,...,m\}$. В своей деятельности отрасли пользуются услугами и затрачивают продукцию других отраслей и получают за это оплату. Обозначим $Z_i^j$ денежную сумму, полученную $i$-й отраслью от $j$-й отрасли за выполненные для неё работы. Здесь $i$ и $j$ принимают значения из $\{1,...,m\}$. Матрица $[Z_i^j]_{i=1,...,m}^{j=1,...,m}$ образует первый квадрант симметричной таблицы межотраслевого баланса. Второй квадрант $[Z_i^j]_{i=1,...,m}^{j=m+1,...,m+k}$ образуют $m$–мерные столбцы оплаты продукции и услуг отраслей конечными потребителями (государственный заказ, экспорт, поставки товаров народного потребления). Здесь $k$ – число выделенных конечных потребителей. В процессе своей деятельности отрасли используют первичные ресурсы, т.е. товары и услуги, не производимые внутри рассматриваемой группы отраслей, например, трудовые услуги, импортные комплектующие. Соответствующие $m$-мерные строки вместе со строками уплаченных налогов и прибылей образуют третий квадрант таблицы $[Z_i^j]_{i=m,...,m+n}^{j=1,...,m}$.

Тест на проверку системности собранной информации заключается в проверке равенства суммы элементов $i$-й строки сумме элементов $i$-го столбца для любого $i \in \{1,...,m\}$:

$$\sum_{i=1}^{m+n} Z_i^j = \sum_{i=1}^{m+k} Z_j^i, \quad j = 1,...,m .$$

Будем предполагать, что это условие выполнено. Отметим, что

$$\sum_{j=1}^{m}\sum_{i=m+1}^{m+n} Z_i^j = \sum_{j=1}^{m}\sum_{i=m+1}^{m+k} Z_j^i.$$

Обратная задача заключается в том, чтобы на основе нелинейного межотраслевого баланса построить модель распределения ресурсов в форме задачи выпуклого программирования или вариационного неравенства, решение которой воспроизводит исходную симметричную таблицу межотраслевого баланса.

## 3. Модель оптимального распределения ресурсов

Опишем модель оптимального распределения ресурсов на основе нелинейного межотраслевого баланса. Рассмотрим группу из $m$ чистых отраслей, связанных взаимными поставками продукции в качестве производственных факторов (ПФ). Обозначим через $X_i^j$ объём продукции $i$-й отрасли, который используется в качестве ПФ в процессе производства в $j$-й отрасли, а через $X^j=(X_1^j,...,X_m^j)$ – затраты $j$-й отраслью ПФ, производимых рассматриваемой группой отраслей. Будем также предполагать, что в процессе производства отрасли затрачивают в качестве ПФ первичные ресурсы ($n$ видов). Обозначим через $l^j=(l_1^j,...,l_n^j)$ вектор затрат первичных ресурсов $j$-й отраслью, а через $F_j(X^j,l^j)$ – производственную функцию $j$-й отрасли, т.е. зависимость выпуска $j$-й отрасли от затрат ПФ. Будем предполагать, что производственные функции отраслей обладают неоклассическими свойствами, т.е. являются вогнутыми, монотонно неубывающими, непрерывными функциями на $R_+^{m+n}$, обращающимися в нуле в нуль. Кроме того, будем считать, что $F_j(X^j,l^j)$ являются положительно однородными функциями первой степени. Будем говорить, что такие функции принадлежат классу $\Phi_{m+n}$.

Обозначим через $X^0=(X_1^0,...,X_m^0)$ объёмы поставок производимой рассматриваемыми отраслями продукции внешним потребителям. Будем считать, что спрос внешних потребителей описывается с помощью функции полезности $F_0(X^0)$. Предположим, что функция $F_0(X^0)\in\Phi_m$. Предположим, что предложение первичных ресурсов рассматриваемой группе отраслей ограничено объёмами $l=(l_1,...,l_n)\geq 0$, и рассмотрим задачу об оптимальном распределении этих ресурсов между отраслями в целях максимизации функции полезности внешних потребителей при балансовых ограничениях по первичным ресурсам и выпускаемой отраслями продукции:

$$F_0(X^0)\to\max, \tag{1}$$

$$F_j(X^j,l^j)\ge\sum_{i=0}^{m}X_j^i,\quad j=1,...,m; \tag{2}$$

$$\sum_{j=1}^{m}l^j\le l; \tag{3}$$

$$X^0\ge 0,\quad X^1\ge 0,...,X^m\ge 0,\quad l^1\ge 0,...,l^m\ge 0. \tag{4}$$

Будем считать, что рассматриваемая группа отраслей продуктивна, т.е. существуют $\hat{X}^1\ge 0,...,\hat{X}^m\ge 0$, $\hat{l}^1\ge 0,...,\hat{l}^m\ge 0$ такие, что

$$F_j(\hat{X}^j,\hat{l}^j)>\sum_{i=0}^{m}\hat{X}_j^i,\quad j=1,...,m.$$

Нетрудно доказать, что если группа отраслей продуктивна и $l=(l_1,...,l_n)>$ $>0$, то задача оптимизации (1)-(4) удовлетворяет условиям Слейтера.

***Предложение 1.*** *Для того чтобы набор векторов* $\{\hat{X}^0,\hat{X}^1,...,\hat{X}^m,\ \hat{l}^1,$ $...,\hat{l}^m\}$, *удовлетворяющих ограничениям* (2)-(4), *являлся решением задачи оптимизации* (1)-(4), *необходимо и достаточно, чтобы существовали множители Лагранжа* $p_0>0$, $p=(p_1,...,p_m)\ge 0$, $s=(s_1,...,s_n)\ge 0$ *такие, что*

$$(\hat{X}^j,\hat{l}^j)\in\operatorname{Arg}\max\left\{p_jF_j(X^j,l^j)-pX^j-sl^j\,\middle|\,X^j\ge 0,l^j\ge 0\right\},\ \ j=1,...,m; \tag{5}$$

$$p_j\left(F_j(\hat{X}^j,\hat{l}^j)-\hat{X}_j^0-\sum_{i=1}^{m}\hat{X}_j^i\right)=0,\quad j=1,...,m; \tag{6}$$

$$s_k\left(l_k-\sum_{j=1}^{m}\hat{l}_k^j\right)=0,\ \ k=1,...,n; \tag{7}$$

$$\hat{X}^0\in\operatorname{Arg}\max\left\{p_0F_0(X^0)-pX^0\,\middle|\,X^0\ge 0\right\}. \tag{8}$$

***Доказательство.*** Функция Лагранжа задачи (1)-(4) равна

$$\begin{aligned}&L(X^0,...,X^m,l^1,...,l^m,p_0,p,s)=\\&=p_0F_0(X^0)+\sum_{j=1}^{m}p_j\left(F_j(X^j,l^j)-\sum_{i=0}^{m}X_j^i\right)+\sum_{t=1}^{n}s_t\left(l_t-\sum_{i=1}^{m}l_t^i\right)=\\&=sl+\left(p_0F_0(X^0)-pX^0\right)+\sum_{j=1}^{m}\left(p_jF_j(X^j,l^j)-pX^j-sl^j\right).\end{aligned}$$

По теореме Куна-Таккера, для того, чтобы набор векторов $\{\hat{X}^0,\hat{X}^1,...,\hat{X}^m,$

$\hat{l}^1,...,\hat{l}^m\}$, удовлетворяющих ограничениям (2)-(4), являлся решением задачи оптимизации (1)-(4), необходимо и достаточно, чтобы существовали множители Лагранжа $p_0 > 0$, $p = (p_1,...,p_m) \geq 0$, $s = (s_1,...,s_n) \geq 0$ такие, что выполняются условия дополняющей нежёсткости (6), (7) и функция Лагранжа достигает максимума по переменным $\{X^0, X^1,...,X^m, l^1,...,l^m\}$ на наборе векторов $\{\hat{X}^0, \hat{X}^1,...,\hat{X}^m, \hat{l}^1,...,\hat{l}^m\}$. В силу второго выражения для функции Лагранжа последнее условие эквивалентно выполнению соотношений (5) и (8). Предложение 1 доказано. ■

Будем интерпретировать множители Лагранжа $p$=$(p_1,...,p_m)$ к балансовым ограничениям по выпускаемым отраслями продуктам как цены на эти продукты, а множители Лагранжа $s$=$(s_1,...,s_n)$ к балансовым ограничениям по первичным ресурсам – как цены на первичные ресурсы. Тогда соотношение (5) означает, что предложение продукции отраслями и их спрос на ПФ определяется из максимизации прибыли при ценах $(p,s)$. Соотношение (8) описывает спрос репрезентативного рационального конечного потребителя с функцией полезности $F_0(X^0)$ при ценах $p$ и, кроме того, $p_0 = q_0(p)$, где функция $q_0(p)$ является преобразованием Янга функции $F_0(X^0)$, т.е.

$$q_0(q) = \inf\left\{\frac{qX^0}{F_0(X^0)}\middle| X^0 \geq 0, F_0(X^0) > 0\right\}.$$

Соотношения (2) и (6), (3) и (7) означают, что цены $q$=$(q_1,\dots,q_m)$ и $s$=$(s_1, \dots,s_n)$ равновесные. Таким образом, оптимальными механизмами распределения являются равновесные рыночные механизмы. Двойственным описанием технологии производства $j$-й отрасли является функция себестоимости

$$q_j(p,s) = \inf\left\{\frac{pX^j + sl^j}{F_j(X^j, l^j)}\middle| X^j \geq 0,\ l^j \geq 0,\ F_j(X^j, l^j) > 0\right\}.$$

Функция себестоимости $q_j(p,s)$ является преобразованием Янга производственной функции $F_j(X^j, l^j)$.

### 4. Идентификация модели: решение обратной задачи

В качестве исходной информации для идентификации модели нелинейного межотраслевого баланса будем использовать симметричную таблицу межотраслевого баланса. Построим $m$-мерный вектор

$$Z^0 = (Z_1^0,...,Z_m^0), \quad Z_i^0 = \sum_{j=m+1}^{m+k} Z_i^j .$$

Вычислим сумму элементов этого вектора:

$$A_0 = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=m+1}^{m+k} Z_i^j$$

и сумму элементов $j$-го столбца таблицы:

$$A_j = \sum_{i=1}^{m} Z_i^j, \quad j = 1,...,m.$$

Положим

$$a_i^j = Z_i^j \Big/ A_j, \ \ i = 1,...,m; \ j = 1,...,m; \quad b_i^j = Z_{m+i}^j \Big/ A_j, \ \ i = 1,...,n; \ j = 1,...,m;$$

$$a_i^0 = Z_i^0 \Big/ A_0, \quad i = 1,...,m.$$

Очевидно, что $\sum_{i=1}^m a_i^j + \sum_{t=1}^n b_t^j = 1$, $\alpha_i^j \ge 0$, $b_t^j \ge 0$, $j = 1,...,m$, $i = 1,...,m$, $t = 1,...,n$; $\sum_{i=1}^m a_i^0 = 1$, $a_i^0 \ge 0$, $i = 1,...,m$. Предположим, что неотрицательная матрица $\left\| a_i^j \right\|_{i=1,...,m}^{j=1,...,m}$ является продуктивной. Это предположение заведомо выполняется, если вектор $Z^0 > 0$.

Определим производственную функцию $j$-й отрасли как функцию Кобба-Дугласа

$$F_j(X^j, l^j) = A_j \left( \prod_{i=1}^{m} \left( X_i^j \Big/ Z_i^j \right)^{a_i^j} \right) \left( \prod_{i=1}^{n} l_i^j \Big/ Z_{m+i}^j \right)^{b_i^j}, \quad j = 1,...,m;$$

функцию полезности конечных потребителей как функцию Кобба-Дугласа

$$F_0(X^0) = \prod_{i=1}^{m} (X_i^0)^{a_i^0},$$

вектор предложения первичных ресурсов как

$$l = (l_1,...,l_n), \quad l_i = \sum_{j=1}^{m} Z_{m+1}^j, \quad i = 1,...,n.$$

***Предложение 2.*** *Набор значений переменных*

$$\left\{ \hat{X}_i^0 = Z_i^0, i = 1,...,m; \ \hat{X}_i^j = Z_i^j, j = 1,...,m, \ i = 1,...,m; \ \hat{l}_t^j = Z_{m+t}^j, j = 1,...,m, \ t = 1,...,n \right\}$$

*является решением задачи выпуклого программирования* (1)-(4).

***Доказательство.*** Полагая $p_1 = ... = p_m = s_1 = ... = s_n = 1$, $p_0 = q_0(p)$, заметим, что набор векторов

$$\left\{\hat{X}_i^0 = Z_i^0, i=1,...,m; \hat{X}_i^j = Z_i^j, j=1,...,m, i=1,...,m;\ \hat{l}_t^j = Z_{m+t}^j, j=1,...,m,\ t=1,...,n\right\}$$

удовлетворяет условиям (5)-(8) и, значит, в силу предложения 1 он является решением задачи выпуклого программирования (1)-(4). Предложение 2 доказано. ■

Таким образом, построенная задача (1)-(4) объясняет наблюдаемые исходные данные (симметричную таблицу межотраслевых связей).

## 5. Агрегированные производственная функция и функция себестоимости

Рассмотрим задачу агрегирования межотраслевого баланса (2)-(4) с помощью функции полезности $F_0(X^0)$. Обозначим через $F^A(l)$ оптимальное значение функционала в задаче (1)-(4) в зависимости от вектора предложения первичных ресурсов $l$ в правой части балансового ограничения (3). Функция $F^A(l) \in \Phi_n$ и интерпретируется как агрегированная производственная функция. Агрегированной производственной функции $F^A(l)$ соответствует двойственная агрегированная функция себестоимости

$$q_A(s) = \inf\left\{ sl/F^A(l) \middle| \ l \ge 0,\ F^A(l) > 0 \right\}. \tag{9}$$

Функция себестоимости $q_A(s) \in \Phi_n$. Кроме того, справедливо

$$F^A(l) = \inf\left\{ sl/q_A(s) \middle| \ s \ge 0,\ q_A(s) > 0 \right\}.$$

В силу двойственности между производственными функциями и функциями себестоимости, например, производственной функции CES

$$\left( \left(X_1/w_1\right)^{-\rho} + \left(X_2/w_2\right)^{-\rho} + \left(X_n/w_n\right)^{-\rho} \right)^{-1/\rho},$$

где $\rho \in [-1,0) \cup (0,+\infty]$, $w_1 > 0,...,w_n > 0$, в силу преобразования Янга соответствует CES-функция себестоимости, положительно однородная, вогнутая, непрерывная на множестве $R_+^n$, принимающая положительные значения на множестве $\operatorname{int} R_+^n$, $\left((s_1 w_1)^{-\sigma} + (s_2 w_2)^{-\sigma} + (s_n w_n)^{-\sigma}\right)^{-1/\sigma}$, где $\sigma = -\rho/(1+\rho)$. Производственной функции Кобба-Дугласа (предельный случай при $\rho \to 0$) $F_{KD}(X_1,...,X_n) = AX_1^{\alpha_1}...X_n^{\alpha_n}$, где $A > 0$, $\alpha_1 > 0,...,\alpha_n > 0$, $\alpha_1 + ... + \alpha_n = 1$, в силу преобразования Янга соответствует функция себестоимости

$$q_{KD}(p_1,...p_n) = \frac{1}{F_{KD}(\alpha_1,...,\alpha_n)} p_1^{\alpha_1}...p_n^{\alpha_n}.$$

***Теорема 1* (см. [7]).** *Агрегированная функция себестоимости представима в виде*

$$q_A(s) = \sup\left\{q_0(p) \middle| p = (p_1,\dots,p_m) \ge 0, q_j(p,s) \ge p_j, j = 1,\dots,m\right\}. \qquad (10)$$

***Определение 1.*** *Будем называть задачу* (10) *двойственной по Янгу к задаче* (1)-(4).

***Предложение 3* (см. [7]).** *Если множители Лагранжа* $\widehat{p} = (\widehat{p}_1,\dots,\widehat{p}_m) \ge$ $\ge 0$, $\widehat{s} \ge 0$ *к задаче* (1)-(4) *удовлетворяют*

$$(\hat{X}^j, \hat{l}^j) \in \operatorname{Arg}\max\left\{\widehat{p}_j F_j(X^j, l^j) - \widehat{p}X^j - \widehat{s}l^j \middle| X^j \ge 0, l^j \ge 0\right\}, \quad j = 1,\dots,m,$$

*то* $\widehat{p} = (\widehat{p}_1,\dots,\widehat{p}_m) \ge 0$ *является решением задачи* (10) *для фиксированных значений* $\widehat{s} \ge 0$.

Рассмотрим случай, когда функция полезности и производственные функции являются функциями Кобба-Дугласа:

$$F_0(X) = \alpha_0 X_1^{a_1^0}\dots X_m^{a_m^0}, \quad F_j(X,l) = \alpha_j X_1^{a_1^j}\dots X_m^{a_m^j} l_1^{b_1^j}\dots l_n^{b_n^j}, \quad j = 1,\dots,m;$$

$$\widehat{p}_j\left(F_j(\hat{X}^j, \hat{l}^j) - \hat{X}_j^0 - \sum_{i=1}^m \hat{X}_j^i\right) = 0, \quad j = 1,\dots,m;$$

$$\widehat{s}_k\left(l_k - \sum_{j=1}^m \hat{l}_k^j\right) = 0, \quad k = 1,\dots,n; \qquad \hat{X}^0 \in \operatorname{Arg}\max\left\{F_0(X^0) - \widehat{p}X^0 \middle| X^0 \ge 0\right\},$$

где

$$\alpha_0 > 0, \quad \sum_{i=1}^m a_i^0 = 1, \quad a_i^0 \ge 0, \quad i = 1,\dots,m;$$

$$\sum_{i=1}^m a_i^j + \sum_{k=1}^n b_k^j = 1, \quad j = 1,\dots,m; \quad \alpha_j > 0, \quad a_i^j \ge 0, \quad i = 1,\dots,m; \quad j = 1,\dots,m;$$

$$b_k^j \ge 0, \quad k = 1,\dots,n; \quad j = 1,\dots,m.$$

Будем предполагать, что каждая отрасль использует хотя бы один вид первичных ресурсов, т.е. $\sum_{k=1}^n b_k^i > 0$, $i = 1,\dots,m$. Рассмотрим матрицы $A = \left\|a_i^j\right\|_{j=1,\dots,m}^{i=1,\dots,m}$, $B = \left\|b_k^j\right\|_{k=1,\dots,n}^{j=1,\dots,m}$ и $E$ – единичную матрицу $(m \times m)$. Обозначим

$$a^0 = (a_1^0,\dots,a_m^0)^*, \quad a^j = (a_1^j,\dots,a_m^j)^*, \quad b^j = (b_1^j,\dots,b_n^j)^*, \quad j = 1,\dots,m.$$

Поскольку $\sum_{i=1}^{m} a_i^j < 1$, $j = 1,...,m$, неотрицательная матрица $A$ является продуктивной.

В силу преобразования Янга индекс потребительских цен равен

$$q_0(p) = \frac{1}{F_0(a^0)} p_1^{a_1^0} ... p_m^{a_m^0},$$

функция себестоимости $j$-й отрасли равна

$$q_j(p,s) = \frac{1}{F_j(a^j, b^j)} p_1^{a_1^j} ... p_m^{a_m^j} s_1^{b_1^j} ... s_n^{b_n^j}.$$

Обозначим

$$d = \left[ \ln(F_1(a^1, b^1)), ..., \ln(F_m(a^m, b^m)) \right]^*,$$

$$\mu = (\mu_1, ..., \mu_m) = -(E - A^*)^{-1} d, \quad \lambda = q_0(e^{\mu_1}, ..., e^{\mu_m}).$$

***Предложение 4.*** *Пусть матрица A продуктивна. Тогда задача*

$$q_0(p) \to \max \tag{11}$$

$$q_j(p,s) \ge p_j \ge 0, \quad j = 1,...,m, \tag{12}$$

*имеет решение вида* $p_j = e^{\mu_j} s_1^{c_1^j} ... s_n^{c_n^j}$, $j = 1,...,m$, *где матрица* $C = \left\| c_k^j \right\|_{j=1,...,m}^{k=1,...,n} =$ $= (E - A^*)^{-1} B^*$.

*Агрегированная функция себестоимости и агрегированная производственная функция имеют вид* $q_A(s) = \lambda s_1^{\gamma_1} ... s_n^{\gamma_n}$, $F^A(l) = \left(1/q_A(\gamma)\right) l_1^{\gamma_1} ... l_n^{\gamma_n}$, *где* $\gamma = (\gamma_1, ..., \gamma_n)^* = C^* a^0$, *причём* $\gamma_1 + ... + \gamma_n = 1$.

***Доказательство.*** Введём новые переменные:

$$P_j = \ln p_j, \; j = 1,...,m; \quad S_i = \ln s_i, \; i = 1,...,n.$$

Задача выпуклого программирования (11), (12) эквивалентна задаче линейного программирования

$$\sum_{i=1}^{m} a_i^0 P_i \to \max_{\{P_i | i=1,...,m\}}, \qquad \sum_{i=1}^{m} a_i^j P_i + \sum_{t=1}^{n} b_t^j S_t - d_j \ge P_j, j = 1,...,m.$$

Поскольку оптимальное значение функционала в задаче линейного программирования достигается в крайней точке допустимого множества, имеем, что

$$\sum_{i=1}^{m} a_i^j P_i + \sum_{t=1}^{n} b_t^j S_t - d_j = P_j, \quad j = 1,...,m.$$

Отсюда следует, что вектор $P=(P_1,\ldots,P_m)$ находится из уравнения $P=A^*P+$ $+B^*S-d$, где $S=(S_1,...,S_n)^*$, и, значит, $P=(E-A^*)^{-1}B^*S+\mu$. Переходя к исходным переменным задачи (11), (12), получаем, что $p_j = e^{\mu_j} s_1^{c_1^j} ... s_n^{c_n^j}$, $j$=1, …,$m$. Подставляя найденные значения $p$ в функционал (11), получаем, что $q_A(s)=\lambda s_1^{\gamma_1}...s_n^{\gamma_n}$. С помощью преобразования Янга находим $F^A(l)=$ $=\left(1/q_A(\gamma)\right) l_1^{\gamma_1}...l_n^{\gamma_n}$. Предложение 4 доказано.■

**6. Примеры анализа межотраслевых связей**

Модель оптимального распределения ресурсов позволяет анализировать межотраслевые финансовые потоки оплаты товаров и услуг при различных сценариях изменения внешних условий.

**Сценарий 1 (изменение цен на импортные товары и услуги (комплектующие))**. Изменение внутренних цен на импортные товары и услуги может произойти в результате изменения курса иностранной валюты, изменения цен на мировом рынке или в результате возрастания транзакционных издержек при покупке необходимых импортных товаров и услуг в условиях санкционных ограничений. Рассмотрим сценарий, в котором в результате изменения цен на импортные товары и услуги вектор индексов цен на первичные ресурсы принимает значение $s$, а планы расходов конечных потребителей остаются неизменными. Из решения задачи выпуклого программирования (10) находим вектор индексов цен продукции отраслей $p=(p_1,\ldots,p_m)$. В силу предложения 4 имеем, что $p_j = e^{\mu_j} s_1^{c_1^j} ... s_n^{c_n^j}$, $j=1,...,m$. Используя предложения 1 и 2, получаем, что финансовые потоки в изменившихся ценах останутся такими же, как в исходной симметричной таблице межотраслевого баланса, а в исходных ценах будут равны

$$X_i^0 = Z_i^0 / p_i,\ X_i^j = Z_i^j / p_i,\ l_t^j = Z_{m+t}^j / s_t,\ \ i = 1,...,m;\ j = 1,...,m;\ t = 1,...,n.$$

**Сценарий 2 (изменение расходов конечных потребителей).** Изменение плана денежных расходов конечных потребителей может произойти в результате корректировки государственного заказа, изменения доходов от экспорта товаров и услуг и изменения доходов от реализации товаров народного потребления. В терминах модели эти изменения выражаются в изменении вектора денежных расходов $\hat{Z}^0=(\hat{Z}_1^0,...,\hat{Z}_m^0)$. Будем считать, что внутренние цены на первичные ресурсы останутся прежними. Суммарные денежные расходы потребителей принимают новое значение $\hat{A}_0 = \sum_{i=1}^{m} \hat{Z}_i^0$, а их функция полезности – новый вид

$$\hat{F}_0(X^0) = \sum_{i=1}^{m} \hat{Z}_i^0 \left( X_1^0 / \hat{Z}_1^0 \right)^{\hat{a}_1^0} \ldots \left( X_m^0 / \hat{Z}_m^0 \right)^{\hat{a}_m^0}, \text{ где } \hat{a}_i^0 = \hat{Z}_i^0 / \hat{A}_0, \quad i = 1,\ldots,m.$$

Из предложения 4 следует, что внутренние цены на продукцию отраслей $p$ не изменятся. Из предложения 1 следует, что новые значения симметричной таблицы межотраслевого баланса равны

$$\hat{Z}_i^j = a_i^j \hat{Y}^j, \quad \hat{Z}_{m+t}^j = b_t^j \hat{Y}^j, \quad j = 1,\ldots,m, \quad i = 1,\ldots,m, \quad t = 1,\ldots,n,$$

где $\hat{Y}^j$ – стоимость произведённой $j$-й отраслью продукции. Вектор выпусков $\hat{Y} = (\hat{Y}_1,\ldots,\hat{Y}_m)$ удовлетворяет балансовому уравнению $\hat{Y} = A\hat{Y} + \hat{Z}^0$ и, значит, $\hat{Y} = (E - A)^{-1} \hat{Z}^0$.

**Сценарий 3 (изменение валютного курса или иные комплексные изменения).** Валютный курс оказывает влияние на внутренние цены импортных товаров и услуг, а также на доходы от экспорта. В результате изменения цен на импортные товары и услуги вектор индексов цен на первичные ресурсы принимает значение $\hat{s}$, а изменения доходов от экспорта товаров в терминах модели выражаются в изменении вектора денежных расходов $\hat{Z}^0 = (\hat{Z}_1^0,\ldots,\hat{Z}_m^0)$. Суммарные денежные расходы потребителей принимают новое значение $\hat{A}_0 = \sum_{i=1}^{m} \hat{Z}_i^0$, а их функция полезности – новый вид:

$$\hat{F}_0(X^0) = \sum_{i=1}^{m} \hat{Z}_i^0 \left( X_1^0 / \hat{Z}_1^0 \right)^{\hat{a}_1^0} \ldots \left( X_m^0 / \hat{Z}_m^0 \right)^{\hat{a}_m^0}, \text{ где } \hat{a}_i^0 = \hat{Z}_i^0 / \hat{A}_0, \quad i = 1,\ldots,m.$$

В силу преобразования Янга индекс потребительских цен имеет новый вид:

$$\hat{q}_0(p) = \left( 1 / \hat{F}_0(\hat{a}^0) \right) p_1^{\hat{a}_1^0} \ldots p_m^{\hat{a}_m^0}.$$

Вектор индексов цен продукции отраслей $\hat{p} = (\hat{p}_1,\ldots,\hat{p}_m)$ находится из решения задачи выпуклого программирования

$$\hat{q}_0(p) \to \max, \qquad q_j(p,\hat{s}) \ge p_j \ge 0, \quad j = 1,\ldots,m.$$

Из предложения 4 следует, что $p_j = e^{\mu_j} \hat{s}_1^{c_1^j} \ldots \hat{s}_n^{c_n^j}$, $j = 1,\ldots,m$. Из предложения 1 следует, что новые значения симметричной таблицы межотраслевого баланса равны

$$\hat{Z}_i^j = a_i^j \hat{Y}^j, \quad \hat{Z}_{m+t}^j = b_t^j \hat{Y}^j, \quad j = 1,...,m; \quad i = 1,...,m; \quad t = 1,...,n,$$

где $\hat{Y}^j$ – стоимость произведённой $j$-й отраслью продукции, а вектор выпусков $\hat{Y} = (\hat{Y}_1,...,\hat{Y}_m)$ определяется из соотношения $\hat{Y} = (E - A)^{-1} \hat{Z}^0$. Потоки материальных товаров и услуг в исходных ценах определяются из соотношений

$$\hat{X}_i^0 = \hat{Z}_i^0 / p_i, \ \hat{X}_i^j = \hat{Z}_i^j / p_i, \ \hat{l}_t^j = \hat{Z}_{m+t}^j / \hat{s}_t, \quad i = 1,...,m; \quad j = 1,...,m; \quad t = 1,...,n.$$

Обозначим $\hat{X}^0 = (\hat{X}_1^0,...,\hat{X}_m^0)$, $\hat{l} = \left(\sum_{j=1}^m \hat{l}_1^j,...,\sum_{j=1}^m \hat{l}_n^j\right)$. Отметим, что

$$\sum_{t=1}^n \hat{s}_t \hat{l}_t = \sum_{j=1}^m \hat{Z}_j^0, \quad F_0(\hat{X}^0) = F^A(\hat{l}) = \hat{s}\hat{l} / q_A(\hat{s}) = \sum_{j=1}^m \hat{Z}_j^0 \Big/ q_A(\hat{s}).$$

Анализ экономических последствий изменений внешних условий предполагает сопоставление исходных данных (базового сценария) с рассчитанными данными сценария, имитирующего изменения внешних условий. В качестве изменений внешних условий будем рассматривать замену исходного вектора цен на первичные ресурсы $s$ на вектор $\hat{s}$ и исходного вектора внешнего спроса $Z^0$ на вектор $\hat{Z}^0$. Большие размеры симметричной таблицы межотраслевого баланса затрудняют содержательное сопоставление сценариев. Инструментом этого анализа является агрегирование таблиц.

Предположим, что множество номеров отраслей и выпускаемых ими продуктов $\{1,...,m\}$ разбито на непересекающиеся подмножества $\{I_\alpha | \alpha = 1,...,\nu\}$. Положим

$$\hat{W}_\beta^0 = \sum_{j \in I_\beta} \hat{Z}_j^0, \quad \hat{W}_\beta^\alpha = \sum_{j \in I_\alpha} \sum_{i \in I_\beta} \hat{Z}_i^j,$$

$$\hat{W}_k^\alpha = \sum_{j \in I_\alpha} \hat{Z}_k^j, \quad \alpha = 1,...,\nu; \quad \beta = 1,...,\nu; \quad k = m+1,...,m+n.$$

Аналогично по исходной таблице $\left\{Z_t^0, Z_i^j \,|\, j{=}1,...,m;\ i{=}1,...,m{+}n;\ \ t{=}1,...,m\right\}$ строится агрегированная таблица

$$\left\{W_\beta^0, W_\beta^\alpha, W_k^\alpha \,|\alpha{=}1,...,\nu; \beta{=}1,...,\nu; k{=}m{+}1,...,m{+}n\right\}.$$

Рассмотрим вопрос о построении вектора агрегированных индексов цен $\hat{P} = (\hat{P}_1,...,\hat{P}_\nu)$. Зафиксируем $\alpha \in \{1,...,\nu\}$. Обозначим

$$a_j^\alpha = \hat{Z}_j^0 \Big/ \sum_{i \in I_\alpha} \hat{Z}_i^0, \quad j \in I_\alpha; \quad F^\alpha(Z_j^0 | j \in I_\alpha) = \left(\sum_{i \in I_\alpha} \hat{Z}_i^0\right) \prod_{j \in I_\alpha} \left(Z_j^0 / Z_j^0\right)^{a_j^\alpha};$$

$$Q^{\alpha}(p_j \,|\, j \in I_{\alpha}) = \left(1 \big/ F^{\alpha}(a_j^{\alpha} \,|\, j \in I_{\alpha})\right) \prod_{j \in I_{\alpha}} (p_j)^{a_j^{\alpha}}.$$

Положим $\hat{P}_{\alpha}$ равным оптимальному значению функционала в задаче выпуклого программирования

$$Q^{\alpha}(p_j \,|\, j \in I_{\alpha}) \to \max_{\{p_j | j \in I_{\alpha}\}}, \qquad q_j(\tilde{p}, \hat{s}) \geq p_j \geq 0, \quad j \in I_{\alpha}.$$

Здесь $\tilde{p} = (\tilde{p}_1, ..., \tilde{p}_m)$, где

$$\tilde{p}_j = \begin{cases} p_j, & \text{если} \quad j \in I_{\alpha}, \\ \hat{p}_j, & \text{если} \quad j \notin I_{\alpha}, \end{cases}$$

$j = 1, ..., m$. Аналогично для исходного сценария строятся агрегированные индексы цен $P = (P_1, ..., P_{\nu})$.

## 7. Анализ межотраслевых связей в экономике России

Симметричные таблицы межотраслевого баланса строятся Росстатом с периодичностью раз в пять лет. В настоящее время доступны таблицы за 2011 и 2016 годы ([8], раздел «Таблицы “затраты-выпуск”», файлы «Базовые таблицы «затраты-выпуск» за 2016 год» и «Базовые таблицы «затраты-выпуск» за 2011 год в номенклатуре базовых таблиц за 2016 год»), в которых выделены 98 чистых отраслей производства. Для анализа будем использовать симметричные таблицы, в которых импорт выделен в отдельную строку, а в первом квадранте присутствуют данные потребления отечественными отраслями продукции других отечественных отраслей (в соответствующих файлах эти таблицы обозначены как «Симм отеч»). Сопоставляя эти таблицы, нужно, прежде всего, учитывать изменение внешнеэкономических условий.

Ключевым для рассматриваемого метода анализа межотраслевых связей является вопрос о том, с какой точностью по исходным данным за 2011 год можно было предвидеть влияние изменения внешних условий на состояние экономики России в 2016 году. Если эта точность достаточно велика, можно считать, что предложенный метод позволяет оценить влияние совокупного изменения внешних факторов – как неуправляемых изменений внешних условий, так и результатов политики, проводимой государством. Такие оценки, в свою очередь, помогут определить оптимальную реакцию государства на изменение внешних факторов.

Характеризуя изменения внешних условий в 2016 году по сравнению с

2011 годом, отметим, что существенно изменились пропорции цен на импортные и отечественные товары. Индекс потребительских цен вырос в 1.503 раза, тогда как курс бивалютной корзины увеличился в 2.033 раза. Поэтому сагрегируем третий квадрант симметричной таблицы межотраслевого баланса в две строки, т.е. выделим два типа первичных ресурсов. Первый ресурс – импорт. Эта строка присутствует в таблицах межотраслевого баланса. Вторым первичным ресурсом будем считать добавленную стоимость. Для этого сагрегируем соответствующие строки третьего квадранта. Второй квадрант симметричной таблицы межотраслевого баланса сагрегируем в столбец конечного потребления продукции отраслей, сложив столбцы потребления домашних хозяйств, экспорта, государственного потребления и увеличения капитальных фондов и запасов.

Номинальная стоимость конечного потребления в 2016 г. выросла по сравнению с 2011 годом в 1.48 раза с 58.5 трлн руб. до 86.6 трлн руб. Для оценки изменения конечного потребления в сопоставимых ценах необходимо определить значение дефлятора. Используем в качестве дефлятора. значение функции себестоимости $q_A(s)$, оцененной по данным 2011 г., на векторе индексов цен первичных ресурсов $s=(1.503, 2.033)$. Это значение равно 1.55 и, значит, конечное потребление в ценах базового 2011 г. сократилось в 2016 г. до 55.9 трлн руб., т.е. на 4.5% по сравнению с 2011 г.

Одной из возможных причин сокращения конечного потребления является изменение условий экспорта и импорта из-за роста транзакционных издержек, вызванных экономическими санкциями, и падения курса рубля. Отношение стоимости импорта производственного назначения к суммарной добавленной стоимости в номинальном выражении незначительно увеличилось с 0.103 в 2011 году до 0.107 в 2016 году, однако с учетом различия в росте индекса потребительских цен 1.503 и роста стоимости бивалютной корзины 2.033 в «реальном» выражение отношение уменьшилось в 2016 году до 0.079. Отметим, что эти изменения с высокой точностью прогнозируются по технологии, описанной в сценарии 3: суммарный импорт производственного назначения прогнозируется с точностью 2.7%, а суммарная добавленная стоимость с точностью 0.3%. С такой же точностью (2.6%) прогнозируются валовые объемы производства.

Изменение соотношения цен на отечественные и импортные товары производственного назначения и секторальные ограничения изменили экономическое положение отраслей производства. Это находит отражение в изменении структуры вектора добавленных стоимостей отраслей производства, вектора потребления импортных товаров производственного назначения, вектора валовых объемов производства. После приведения показателей отраслей к ценам базового 2011 года для оценки изменения их структуры будем вычислять величину

$$\delta(x, y) = \sum_{j=1}^{m} \left| x_j - y_j \right| \Big/ \sum_{j=1}^{m} \left| x_j \right|,$$

где $x = (x_1, ..., x_m)$ – вектор соответствующих показателей в базовом 2011 г., а $y = (y_1, ..., y_m)$ – вектор аналогичных показателей в 2016 г., приведенных к ценам 2011 г.

Приведём компоненты векторов добавленной стоимости отраслей в 2016 году и прогноза этого вектора по данным 2011 года к ценам 2011 года, поделив их на индекс потребительских цен 1.503. Изменение структуры вектора добавленной стоимости отраслей в 2016 году по отношению к вектору 2011 года составляет 0.17, отклонение структуры вектора прогноза добавленной стоимости 2016 года к вектору добавленной стоимости 2016 года равно 0.12.

Приведём компоненты векторов потребления отраслями импортных товаров в 2016 году и прогноза этого вектора по данным 2011 года к ценам 2011 года, поделив их на изменение курса бивалютной корзины 2.033. Изменение структуры вектора потребления отраслями импорта в 2016 году по отношению к вектору 2011 года составляет 0.38, отклонение структуры вектора прогноза потребления отраслями импорта 2016 года к вектору фактического потребления импорта 2016 года равно 0.16.

Для приведения вектора валовых объёмов производства отраслей в 2016 году и прогноза этого вектора по данным 2011 года необходим вектор индексов цен на продукцию отраслей 2016 году по отношению к базовому 2011 году. Такая информация не опубликована Росстатом, поэтому будем моделировать вектор индексов, вычисляя множители Лагранжа из решения двойственной задачи. Изменение структуры вектора валовых объемов производства в 2016 году по отношению к аналогичному вектору 2011 года составляет 0.12, отклонение вектора прогнозов объемов производства в 2016 году по отношению к вектору фактических валовых объемов производства 2016 года равно 0.06.

Таким образом, изменение внешних экономических условий существенно повлияло на показатели деятельности отраслей производства и их экономическое положение. Это проявилось в снижении точности прогнозов, однако модельные прогнозы значительно точнее прогноза на основе «сохранения тенденций». Снижение точности прогноза нуждается в объяснении. По-видимому, основной причиной структурных изменений является введение санкций против России и падение курса рубля. Эти изменения оказали влияние не только на стоимость импорта и экспорта, но и на доступность некоторых импортных товаров. В этот же период начала действовать государственная политика, направленная на вытеснение импорта. Эти изменения во "внешней среде" изменили соотношение потребляемых импортных и отечественных производственных факторов. Использование функций Кобба-Дугласа в качестве производственных функций и функции полезности является модельным, и можно предположить, что в некоторых отраслях замещение импорта оказалось более проблематичным, чем в остальных.

Поскольку основные изменения произошли из-за изменения внешних экономических условий, распределим все отрасли по группам в зависимости от их положения в экспортно-импортных отношениях и возможностей адаптироваться к их изменениям. Выделим четыре таких группы – комплекса отраслей. К первому комплексу отнесем экспортно-ориентированные отрасли добывающей промышленности, такие как нефтегазовая отрасль, металлургия, производство минеральных удобрений. Ко второму комплексу отнесём отрасли, продукция которых конкурирует с импортом на отечественном рынке, такие как машиностроение, пищевая промышленность и сельское хозяйство. К третьему комплексу отнесём отрасли услуг естественных монополий, продукция которых не имеет экспортного потенциала и не конкурирует с импортом, такие как электроэнергетика, транспорт, связь. В четвертый комплекс попадают отрасли сферы услуг, такие как торговля и ЖКХ.

Приведём компоненты векторов добавленной стоимости отраслей в 2016 году и прогноза этого вектора по данным 2011 года к ценам 2011 года, поделив их на индекс потребительских цен 1.503. Изменение структуры вектора добавленной стоимости комплексов в 2016 году по отношению к аналогичному вектору 2011 года составляет 0.034, а отклонение вектора прогноза добавленной стоимости комплексов 2016 года от аналогичного вектора добавленной стоимости 2016 года равно 0.010.

Приведём компоненты векторов потребления отраслями импортных товаров в 2016 году и прогноза этого вектора по данным 2011 года к ценам 2011 года, поделив их на изменение курса бивалютной корзины 2.033. Изменение структуры вектора потребления комплексами импорта в 2016 году по отношению к вектору 2011 года составляет 0.25, отклонение структуры вектора прогноза потребления отраслями импорта 2016 года по отношению к вектору фактического потребления импорта 2016 года равно 0.037.

Для приведения вектора валовых объемов производства комплексов в

2016 году и прогноза этого вектора по данным 2011 года необходимо смоделировать вектор индексов цен на продукцию отраслей 2016 году по отношению к базовому 2011 году. Воспользуемся процедурой агрегирования, описанной в сценарии 3, и сагрегируем имеющиеся у нас данные по описанным четырём комплексам. Смоделировать вектор агрегированных цен можно двумя способами: применив предложение 4 к агрегированной таблице данных 2011 года или воспользовавшись процедурой, описанной в сценарии 3. Отличие в структуре векторов агрегированных цен, построенных различными способами, составляет менее 0.001. Точно так же двумя способами можно вычислить агрегированную симметричную таблицу межотраслевого баланса, построив прогноз по агрегированной таблице 2011 года, или агрегируя таблицу прогноза в исходной номенклатуре. Поэтому можно утверждать, что выбор модели для вектора цен комплексов не скажется существенным образом на результатах, и в качестве вектора агрегированных цен мы выберем вектор, построенный с помощью процедуры, описанной в сценарии 3. Изменение структуры валовых объёмов производства комплексов в 2016 году по отношению к аналогичному вектору 2011 года составляет 0.031, отклонение вектора прогнозов объёмов производства в 2016 году по отношению к вектору фактических валовых объемов производства 2016 года равно 0.027. Отметим, что прогноз по агрегированной симметричной таблице межотраслевого баланса имеет большее отклонение – 0.031.

Точность прогноза в номенклатуре комплексов отраслей оказалась существенно лучше, чем в исходной номенклатуре. Наименьшая точность попрежнему наблюдается для прогноза потребления комплексами отраслей импортных производственных факторов.

Рассмотрим более подробно изменения в структуре производства. Для этого в агрегированной таблице затрат-выпусков разделим каждый элемент таблицы на сумму элементов соответствующего столбца. Таким образом, в ячейке, стоящей на пересечении $i$-й строки и $j$-го столбца ($i$=1,…,6, $j$=1,…,4) будет находиться число, показывающее, какая доля средств тратится $j$-й отраслью на продукцию $i$-й отрасли (для $i = 1,...,4$), импорт ($i$=5) или добавленную стоимость ($i$=6). Элементы 5-го столбца показывают долю, затрачиваемую конечными потребителями на продукцию соответствующей отрасли. Отметим, что таковые коэффициенты являются степенями для функций Кобба-Дугласа, являющихся производственными функциями отраслей и функцией полезности конечного потребителя. В качестве таблицы прогноза возьмём таблицу, получающуюся агрегированием прогнозной таблицы в подробной номенклатуре.

**Таблица 1.** Данные прогноза.

| | 1 | 2 | 3 | 4 | Потребление |
|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 0.2528 | 0.0730 | 0.0633 | 0.0136 | 0.1322 |
| 2 | 0.0336 | 0.2699 | 0.0533 | 0.0326 | 0.1853 |
| 3 | 0.1226 | 0.0699 | 0.2152 | 0.0990 | 0.2520 |
| 4 | 0.0830 | 0.1325 | 0.1312 | 0.1556 | 0.4305 |
| Импорт | 0.0364 | 0.1164 | 0.0525 | 0.0334 | |
| Добавленная стоимость | 0.4716 | 0.3383 | 0.4844 | 0.6659 | |

**Таблица 2.** Данные 2016 года.

| | 1 | 2 | 3 | 4 | Потребление |
|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 0.2815 | 0.0635 | 0.0698 | 0.0075 | 0.1322 |
| 2 | 0.0379 | 0.3050 | 0.0585 | 0.0323 | 0.1853 |
| 3 | 0.1346 | 0.0674 | 0.2040 | 0.0946 | 0.2520 |
| 4 | 0.0793 | 0.1274 | 0.1364 | 0.1728 | 0.4305 |
| Импорт | 0.0319 | 0.1147 | 0.0514 | 0.0344 | |
| Добавленная стоимость | 0.4348 | 0.3220 | 0.4799 | 0.6584 | |

При рассмотрении таблиц можно выделить несколько тенденций. Так, например, заметим, что доля добавленной стоимости среди расходов в реальности снизилась относительно прогнозируемого значения для всех комплексов отраслей, доля импорта – для всех комплексов отраслей, кроме комплекса сферы услуг (4-я отрасль). Снижение общей доли импорта можно объяснить тем, что его стоимость выросла сильнее, чем стоимость остальных товаров и услуг, что вкупе с политикой импортозамещения вызвало частичную замену импортных производственных факторов на отечественные. Однако рост доли импорта для 4-го комплекса отраслей может означать, что при закупке по крайней мере некоторых категорий импортных товаров выросла доля посредничества. Более подробное рассмотрение столбца расходов для сферы услуг подтверждает это предположение: для 4-го комплекса отраслей выросли доли расходов на импорт и на собственную продукцию, доли остальных категорий расходов снизились.

Доля, затрачиваемая отраслями на продукцию 2-й группы отраслей (т.е. отраслей, чья продукция конкурирует с импортом), выросла для всех комплексов отраслей, кроме 4-го, что также может говорить о вытеснении импорта в течение рассматриваемого периода. Для группы экспортно-ориентированных отраслей изменение долей потребления было наиболее существенным среди всех комплексов. Его затраты на продукцию всех отраслей, кроме сферы услуг, заметно выросли, а затраты на услуги, импорт и добавленная стоимость, напротив, снизились. Это может быть объяснено тем, что из-за введения санкций отрасли 1 группы также были вынуждены замещать импортные производственные факторы отечественными. Из-за этого снизились как непосредственно затраты на их покупку (снижение импорта), так и затраты на различного рода транзакционные издержки (снижение расходов на услуги).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *В.В. Леонтьев.* Экономические эссе. – М.: Политиздат, 1990, 404 с.
   *W. Leontief.* Essays in Economics. Theories, Theorizing, Facts and Policies. – Routledge, 1985, 424 p.
2. *И.Д. Масакова.* Российская практика составления таблиц затраты выпуск: проблемы и перспективы развития // Проблемы прогнозирования, 2019, №2, с.14-26;
   англ. пер.: *I.D. Masakova.* The Russian Practice of Compiling Input-Output Tables: Problems and Prospects of Development // Studies on Russian Economic Development, 2019, v. 30, №2, p. 119-128.
3. *Р.Д. Барро, Х. Сала-и-Мартин.* Экономический рост. – М.: БИНОМ, Лаборатория знаний, 2017, 824 с.
   *R.J. Barro, X. Sala-i-Martin.* Economic Growth. – Massachusetts: The MIT Press, 2003, 672p.
4. *Д. Асемоглу.* Введение в теорию современного экономического роста: в 2 кн. – М.: Издательский дом «Дело», РАНХ и ГС, 2018, 1624 с.
   *D. Acemoglu.* Introduction to Modern Economic Growth. – Princeton University Press, 2009, 1008.
5. *D. Acemoglu, A. Ozdaglar, A. Tahbaz-Salehi.* The network origins of aggregate fluctuations // Econometrica, 2012, v.80, №5, 1977-2016 p.
6. *А.А. Шананин.* Двойственность по Янгу и агрегирование балансов // Доклады РАН. Математика, информатика, процессы управления, 2020, т.493, с.81-85. DOI: 10.31857 /S2686954320040177
   англ. пер.: *A.A. Shananin.* Young Duality and Aggregation of Balances // Doklady Mathematics, 2020, v.102, № 1, p.330–333.
7. *А.А. Шананин.* Задача агрегирования межотраслевого баланса и двойственность // Журнал вычислительной математики и математической физики, 2021, №1. (в печати)
   *A.A. Shananin*. Zadacha agregirovsniia mezhotraslevogo balansa i dvoistvennost // Zhurnal vychislitelnoi matematiki i matematicheskoi fiziki, 2021, №1 (v pechati)
8. Url: https://rosstat.gov.ru/accounts

Поступила в редакцию 21.09.2020
После доработки 21.09.2020
Принята к публикации 26.10.2020