Московский государственный университет имени М. В. Ломоносова

Факультет вычислительной математики и кибернетики

Кафедра системного анализа

Выпускная квалификационная работа

Сетевые модели экономического роста

Студентка 415 группы

Е. Д. Акимова

Научный руководитель

чл.-кор. РАН, д.ф.-м.н., профессор А. А. Шананин

Москва, 2021

Содержание

1 Введение

При рассмотрении экономических аспектов производственной деятельности первоначально проводится анализ финансовых потоков между отраслями на основе моделирования финансовых балансов. С математической точки зрения построение модели означает решение обратной задачи. Развитие методов решения таких задач в XX веке связано с работами нобелевского лауреата В.В. Леонтьева. Однако его гипотеза о постоянстве норм затрат на выпуск продукции в связи с ростом взаимозаменяемости товаров перестала быть актуальной. В современных реалиях активно используется гипотеза о постоянстве структуры финансовых затрат. Это предположение соответствует допущению, что производитель фиксирует пропорции своих расходов, в рамках которых он варьирует качество в зависимости от цен. Такой модели соответствуют производственные функции Кобба-Дугласа. В связи с рассмотрением нелинейного межотраслевого баланса возникает понятие центральности. Отрасль является центральной, если она оказывает значительное влияние на экономическую систему. Однако критерии центральности могут определяться, исходя из разных предположений. В иностранной литературе уделяется большое внимание конкретизации понятия центральности, а также выявлению ключевых отраслей на основе этой концепции. Например, в статье [3] авторы рассматривают два способа выявления центральных отраслей:

- С помощью графов, в которых вершины обозначают акторов, а дуги-связи между ними. В терминах экономической системы акторами являются отрасли, а дугами - поставки между отраслями. Вопрос центральности акторов на графе освещается, например, в [5]. В ней автор рассматривает не только количество связей определенной отрасли с другими отраслями, но и учитывает число вершин в окрестности второго порядка относительно нее.

- С помощью модели межотраслевого баланса путем изменений производственных функций. В данном случае отрасли являются центральными, если оказывают наиболее сильное влияние на ВВП.

Целью данной работы является провести схожий анализ, но для российской экономики на основе матрицы межотраслевых связей России за 2016 год[7]. При поиске центральных отраслей, как и в статье [3], нужно было использовать два метода, а затем провести сравнение результатов их работы:

- Построение графа и поиск центральных отраслей с точки зрения связей первого и второго порядка.
- С использованием межотраслевого баланса и производственных функций оценить влияние изменений в каждой отрасли на ВВП.

Затем, используя межотраслевой баланс, нужно было выделить ключевой комплекс отраслей.

2 Используемые исходные данные

Пусть имеется m отраслей, n первичных ресурсов и k конечных потребителей. В качестве матрицы межотраслевого баланса используется таблица, опубликованная в 2019 году Росстатом с данными за 2016 год ([7], раздел «Таблицы “затраты-выпуск”», файлы «Базовые таблицы «затраты-выпуск» за 2016 год», таблица «Симм отеч.»). В ней выделены 98 чистых отраслей производства. В качестве отдельного первичного ресурса был выделен импорт, а остальные были объединены в одну строку (просуммированы по столбцам). Все столбцы, характеризующие конечных потребителей, были объединены в один столбец (с помощью суммирования соответствующих строк). Таким образом, в данном случае $m = 98, n = 2, k = 1$. Далее будем рассматривать задачу в общем виде.

Обозначим данную матрицу чистых отраслей как $[Z^i_j]^{i=1,...,m}_{j=1,...,m}$, тогда $[Z^i_j]^{i=m+1,...,m+k}_{j=1,...,m}$ образуют m –мерные столбцы оплаты продукции и услуг отраслей конечными потребителями (государственный заказ, экспорт и пр.), а $[Z^i_j]^{i=1,...,m}_{j=m+1,...,m+n}$ обозначает первичные ресурсы (товары и услуги, не производимые внутри рассматриваемых групп отраслей). В данном контексте Z^i_j обозначает денежную сумму, полученную i -й отраслью от j -й отрасли за выполненные для неё работы. Тест на проверку системности собранной информации заключается в проверке равенства суммы элементов i -й строки сумме элементов i -го столбца для любого $i \in \{1, \ldots m\}$:

$$\sum_{j=1}^{m+n} Z^i_j = \sum_{j=1}^{m+k} Z^j_i$$

Предполагается, что это условие выполнено.

3 Основные теоретические сведения

Обратная задача заключается в построении на основе нелинейного межотраслевого баланса модели распределения ресурсов в форме задачи выпуклого программирования или вариационного неравенства, решение которой воспроизводит симметричную таблицу межотраслевого баланса. Данные построения подробно были рассмотрены в [1]. Ниже приведены ключевые результаты, необходимые для реализации целей данной работы.

Введем несколько обозначений:

$X^j = (X_1^j, \ldots, X_m^j)$ - затраты j-ой отраслью производственных факторов, производимых рассматриваемой группой отраслей.

$\ell^j = (\ell_1^j, \ldots, \ell_n^j)$- вектор затрат первичных ресурсов j-ой отраслью.

$F_j(X^j, \ell^j)$ - производственная функция, т.е. зависимость объема выпуска от затрат производственных факторов.

$X^0 = (X_1^0, \ldots, X_m^0)$-объемы поставок продукции соответствующих отраслей конечным потребителям.

$F_0(X_0)$-функция полезности, описывающая спрос внешних потребителей.

Предполагаем, что производственные функции и функция полезности обладают неоклассическими свойствами, т.е. они вогнутые, монотонно неубывающие, непрерывные на $\mathbb{R}_+^{m+n}$ и в нуле равны нулю. Кроме того, производственные функции являются положительно однородными первой степени. Будем обозначать класс таких функций через Φ_{m+n}.

Пусть предложение первичных ресурсов ограничено объемами $\ell = (\ell_1, \ldots, \ell_n) \geq 0$, тогда рассмотрим задачу об оптимальном распределении ресурсов в целях максимизации функции полезности внешних потребителей при балансовых ограничениях по первичным ресурсам и выпускаемой отраслями продукции:

$$F_0(X_0) \to \max \tag{1}$$

$$F_j(X^j, \ell^j) \geq \sum_{i=0}^{m} X_j^i \tag{2}$$

$$\sum_{j=1}^{m} \ell_j \leq \ell \tag{3}$$

$$X^0 \geq 0, \ldots, X^m \geq 0, \ell^1 \geq 0, \ldots, \ell^n \geq 0 \tag{4}$$

Считаем, что рассматриваемая группа отраслей продуктивна, т.е. $\exists \hat{X}^j \geq 0, \hat{\ell}^j \geq 0 : F_j > \sum\limits_{i=0}^{m} X_j^i$.

Нетрудно показать, что если группа отраслей продуктивна и $\ell > 0$, то задача максимизации $(1) - (4)$ удовлетворяет условиям Слейтера.

Теорема 1. *Векторы* $\hat{X}^0, \hat{X}^j, \hat{\ell}^j$, *удовлетворяющие ограничениям* $(2) - (4)$, *являются решением задачи максимизации* $(1) - (4)$ *тогда и только тогда, когда существуют множители Лагранжа* $p_0 > 0, p = (p_1, \ldots, p_m) \geq 0, s = (s_1, \ldots, s_n) \geq 0$*:*

$$(\hat{X}^j, \hat{\ell}^j) \in \text{Argmax}\{p_j F_j(X^j, \ell^j) - pX^j - s\ell^j\} \tag{5}$$

$$p_j(F_j(X^j, \ell^j) - X_j^0 - \sum_{i=1}^{m} X_j^i) = 0 \tag{6}$$

$$s_k(\ell_k - \sum_{j=1}^{m} \ell_k^j) = 0 \tag{7}$$

$$\hat{X}^0 \in \text{Argmax}\{p_0 F_0(X^0) - pX^0\} \tag{8}$$

Будем интерпретировать множители Лагранжа p к балансовым ограничениям по выпускаемым отраслями продуктам как цены на эти продукты, а множители Лагранжа s к балансовым ограничениям по первичным ресурсам – как цены на первичные ресурсы. Тогда соотношение (5) означает, что спрос и предложение определяется из максимизации прибыли при ценах (p, s). Соотношение (8) описывает спрос при ценах p репрезентативного рационального конечного потребителя с функцией полезности $F_0(X^0)$, и, кроме того, $p_0 = q_0(p)$, где функция $q_0(p)$ является преобразованием Янга $F_0(X^0)$, т.е.

$q_0(q) = \inf\left\{\frac{qX^0}{F_0(X^0)} | X^0 \geq 0, F_0(X^0) > 0\right\}$

Соотношения (2) и (6), (3) и (7) означают, что цены p, s равновесные. Таким образом, оптимальными механизмами распределения являются равновесные рыночные механизмы. Двойственным описанием технологии производства j -й отрасли является функция себестоимости

$q_j(p, s) = \inf\left\{\frac{pX^j + s\ell^j}{F_j(X^j, \ell^j)} | X^j \geq 0, \ell^j \geq 0, F_j(X^j, \ell^j) > 0\right\}$

Она является преобразованием Янга производственной функции.

Далее рассмотрим задачу агрегирования межотраслевого баланса $(2) - (4)$ с помощью функции полезности $F_0(X^0)$. Пусть $F_A(\ell)$ оптимальное значение функционала в задаче $(1) - (4)$ в зависимости от вектора предложения первичных ресурсов ℓ в правой части балансового ограничения (3). Функция $F_A(\ell)$ интерпретируется как агрегированная производственная функция и ей соответствует двойственная агрегированная функция себестоимости $q_A(s)$:

$q_A(s) = \inf\left\{\frac{s\ell}{F_A(\ell)}|\ell \geq 0, F_A(\ell) > 0\right\}$

Стоит отметить, что

$F_A(\ell) \in \Phi_n, q_A(s) \in \Phi_n$, причем выполнено:

$F_A(\ell) = \inf\left\{\frac{s\ell}{q_A(s)}|s \geq 0, q_A(s) > 0\right\}$

В случае производственной функции Кобба-Дугласа F_{KD} функция себестоимости имеет следующий вид:

$q_{KD} = \frac{1}{F_{KD}(\alpha_1,\ldots,\alpha_n)}p_1^{\alpha_1}\ldots p_n^{\alpha_n}$

Теорема 2. *Агрегированная функция себестоимости представима в виде:*

$$q_A(s) = \sup\{q_0(p)|p \geq 0, q_j(p,s) \geq p_j, j = \overline{1,m}\} \tag{9}$$

Будем называть задачу (9) двойственной по Янгу к задаче (1) − (4).

Вернемся к матрице межотраслевых балансов. Будем предполагать, что каждая отрасль использует хотя бы один вид первичных ресурсов, т.е. $\sum\limits_{k=1}^{n} b_{ki} > 0$. Рассмотрим матрицы $A = \left\|a_{ij}\right\|_{i=1,\ldots,m}^{j=1,\ldots,m}$, $B = \left\|b_{kj}\right\|_{k=1,\ldots,n}^{j=1,\ldots,m}$, E - единичная матрица, $E \in \mathbb{R}^{m\times m}$.

Обозначим $a^0 = (a_1^0,\ldots,a_m^0)^T, a^j = (a_1^j,\ldots,a_m^j)^T, b^j = (b_1^j,\ldots,b_n^j)^T, j = \overline{1,m}.$

Так как $\sum\limits_{i=1}^{m} a_{ij} < 1$, то неотрицательная матрица A будет продуктивной. В силу преобразования Янга индекс потребительских цен и функция себестоимости равны:

$$q_0(p) = \frac{1}{F_0(a_0)}p_1^{a_1^0}\ldots p_m^{a_m^0}$$
$$q_j(p,s) = \frac{1}{F_j(a_j,b_j)}p_1^{a_{1j}}\ldots p_m^{a_{mj}}s_1^{b_{1j}}\ldots s_n^{b_{nj}}$$

Теорема 3. *Пусть неотрицательная матрица A продуктивна, а $s \geq 0$ - фиксированный вектор, тогда задача максимизации*

$$\begin{cases} q_0(p) \to \max \\ q_j(p,s) \geq p_j \end{cases} \tag{10}$$

имеет решение:

$$p_j = e^{\mu_j}s_1^{c_{1j}}\ldots s_n^{c_{nj}}$$

, где

$$
\begin{aligned}
&C = \left\| c_{kj} \right\|_{j=1,\dots,m}^{k=1,\dots,n} = (E - A^T)^{-1} B^T \\
&d = (\ln(F_1(a_1, b_1)), \dots, \ln(F_m(a_m, b_m)))^T \\
&\mu = -(E - A^T)^{-1} d
\end{aligned}
$$

При этом

$$
\begin{aligned}
&q_A(s) = \lambda s_1^{\gamma_1} \dots s_n^{\gamma_n} \\
&F_A(l) = \frac{1}{q_A(\gamma)} l_1^{\gamma_1} \dots l_n^{\gamma_n}
\end{aligned}
$$

,

где

$$
\begin{aligned}
&\gamma = C^T a_0, \gamma_1 + \ldots + \gamma_n = 1 \\
&\lambda = q_0(e^{\mu_1}, \dots, e^{\mu_m})
\end{aligned}
$$

4 Решение поставленной задачи

Построим на основе симметричной матрицы межотраслевого баланса Z несколько вспомогательных векторов:

$Z^0 = (Z_1^0, \dots, Z_m^0), Z_i^0 = \sum\limits_{j=m+1}^{k} Z_i^j$

Вычислим сумму элементов этого вектора:

$A_0 = \sum\limits_{i=1}^{m} \sum\limits_{j=m+1}^{m+k} Z_i^j$

и сумму элементов j-го столбца:

$A_j = \sum\limits_{i=1}^{m+n} Z_i^j$

Пусть $a_{ij} = \frac{Z_i^j}{A_j}, b_{ij} = \frac{Z_{m+i}^j}{A_j}, a_i^0 = \frac{Z_i^0}{A_0}$

Очевидно, что $\sum\limits_{i=1}^{m} a_{ij} + \sum\limits_{t=1}^{n} b_{tj} = 1, \sum\limits_{i=1}^{m} a_i^0 = 1$. Пусть неотрицательная матрица $\left\| a_{ij} \right\|_{i=1,\dots,m}^{j=1,\dots,m}$ является продуктивной. Это заведомо выполнено, если $Z^0 > 0$.

Вектор предложения первичных ресурсов равен $\ell = (\ell_1, \dots, \ell_n), \ell_i = \sum\limits_{j=1}^{m} Z_{m+i}^j, i = \overline{1, n}$.

Теорема 4. *Набор значений* $\{\hat{X}_i^{\,0} = Z_i^0, \hat{X}_i^{\,j} = Z_i^j, \hat{\ell}_t^{\,j} = Z_{m+t}^j\}$ *является решением задачи* $(1)-(4)$.

Таким образом, построенная задача $(1)-(4)$ объясняет наблюдаемые исходные данные (симметричную таблицу межотраслевых связей).

В данной работе используются производственные функции Кобба-Дугласа:

$$F_i(X^i, \ell^i) = A_i\left(\prod_{j=1}^{m}\left(\frac{X_j^i}{Z_j^i}\right)^{a_{ji}}\right)\left(\prod_{j=1}^{n}\left(\frac{\ell_j^i}{Z_{m+j}^i}\right)^{b_{ji}}\right)=$$

$$= \alpha_i(X_1^i)^{a_{1i}}\dots(X_m^i)^{a_{mi}}(\ell_1^i)^{b_{1i}}\dots(\ell_n^i)^{b_{ni}}, i = \overline{0,m} \quad (11)$$

4.1 Поиск центральных отраслей

4.1.1 Построение графа

Для того, чтобы грамотно построить граф, необходимо задать условие наличия ориентированного ребра. Рассмотрим матрицу A. В ней заданы затраты каждой из отраслей. Отнормируем каждый элемент этой матрицы и сравним его с пороговым значением η. То есть, если

$$\frac{a_{ji}}{\sum\limits_{k=1}^{m} a_{ki}} > \eta$$

то проводим дугу из j-ой отрасли в i-ую.

Порог выбирается из следующих соображений:

- Граф не должен быть полным
- Граф не должен состоять по большей части из изолированных вершин

В данной работе было взято значение $\eta = 0.2$. При нем выполняются оба условия. Для более точного выделения центральных отраслей мною были рассмотрены два вида связей. Связи первого порядка эквивалентны степени полуисхода вершины, а второго порядка сумме степеней полуисхода всех вершин, с которыми связана данная вершина. На рис.1 показан граф, соответсвующий исходным 98 отраслям. Синим цветом выделены наиболее значимые отрасли с точки зрения окрестности первого порядка, красным с точки зрения окрестности второго порядка и зеленым выделены те отрасли, которые являются центральными с точки зрения обоих критериев.

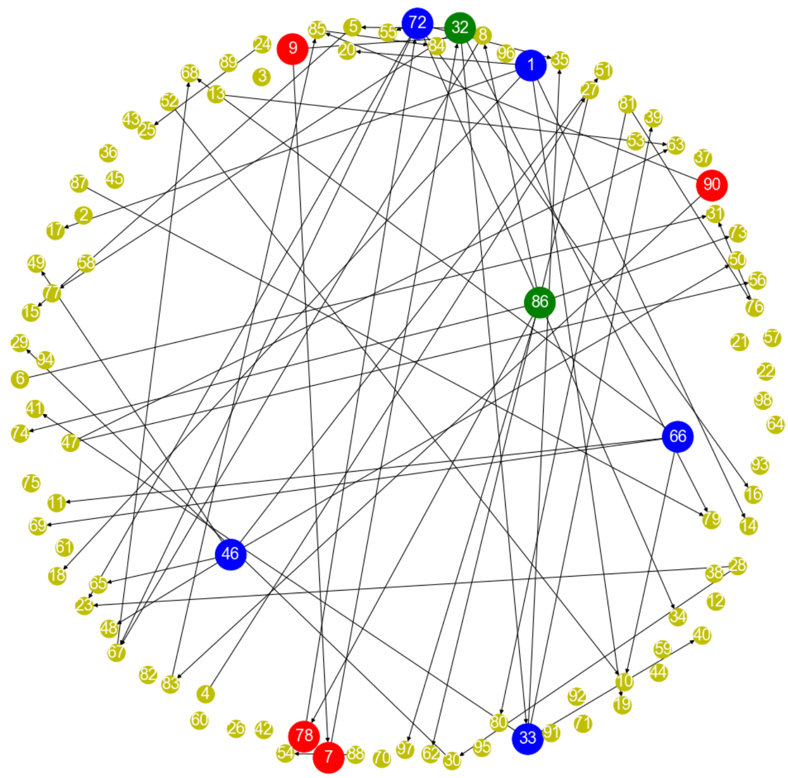

Рис.1 Граф экономической системы при $\eta = 0.2$

Таким образом, центральными отраслями являются:

- **32** Нефтепродукты
- **86** Услуги, связанные с недвижимым имуществом

Центральными отраслями с точки зрения связей первого порядка являются (по убыванию степени):

- **72** Услуги по оптовой торговле, включая торговлю через агентов, кроме услуг по торговле автотранспортными средствами и мотоциклами
- **1** Продукция сельского хозяйства
- **46** Железо, чугун, сталь и ферросплавы, трубы и элементы трубопроводные соединительные, продукция первичной обработки черных металлов прочая
- **86** Услуги, связанные с недвижимым имуществом

- **32** Нефтепродукты
- **33** Вещества химические основные
- **66** Услуги по производству, передаче и распределению электроэнергии

Центральными отраслями с точки зрения связей второго порядка являются (по убыванию степени):

- **78** Услуги транспортирования по трубопроводам
- **32** Нефтепродукты
- **7** Нефть, включая нефть, получаемую из битуминозных минералов; сланцы горючие (битуминозные) и песчаники битуминозные
- **9** Услуги, связанные с добычей нефти и горючего природного газа, кроме геологоразведочных работ
- **86** Услуги, связанные с недвижимым имуществом
- **90** Прочие услуги, связанные с предпринимательской деятельностью

4.1.2 Анализ матрицы межотраслевых связей

Рассмотрим производственные функции Кобба-Дугласа:

$F_i(X^i, l^i) = \alpha_i (X_1^i)^{a_{1i}} \dots (X_m^i)^{a_{mi}} (l_1^i)^{b_{1i}} \dots (l_n^i)^{b_{ni}}$, где $\alpha_j = A_j \left(\prod_{i=1}^{m} \frac{1}{Z_i^j} \right)^{a_i^j} \left(\prod_{i=1}^{n} \frac{1}{Z_{m+i}^j} \right)^{b_i^j}$ и $\alpha_0 = A_0 \left(\prod_{i=1}^{m} \frac{1}{Z_i^0} \right)^{a_i^0}$

a) Случай фиксированного шока.

Пусть в i-ом секторе произошел рост на 10%, тогда коэффициент при соответствующей производственной функции увеличится на 10%:

$$F_i(X^i, l^i) = 1.1 \alpha_i (X_1^i)^{a_{1i}} \dots (X_m^i)^{a_{mi}} (l_1^i)^{b_{1i}} \dots (l_n^i)^{b_{ni}}$$

Для анализа влияния одного сектора на экономику рассматривается изменение показателя ВВП, отвечающего в данном случае за общий выпуск. Мною был рассмотрен случай замкнутой системы, т.е. цены на первичные ресурсы s фиксированы, а вектор предложения ℓ может меняться. Так как данные рассматриваются в ценах базового года, то s принимается равным 1.

$$GDP = \frac{A_0}{q_A(s)} = \frac{A_0}{\lambda} \tag{12}$$

По теореме 3 $\lambda = \frac{1}{F_0(a_0)} e^{\mu_1 a_1^0 + \ldots + \mu_m a_m^0}$, а μ_i в свою очередь зависят от производственных функций, в которых произошли изменения.

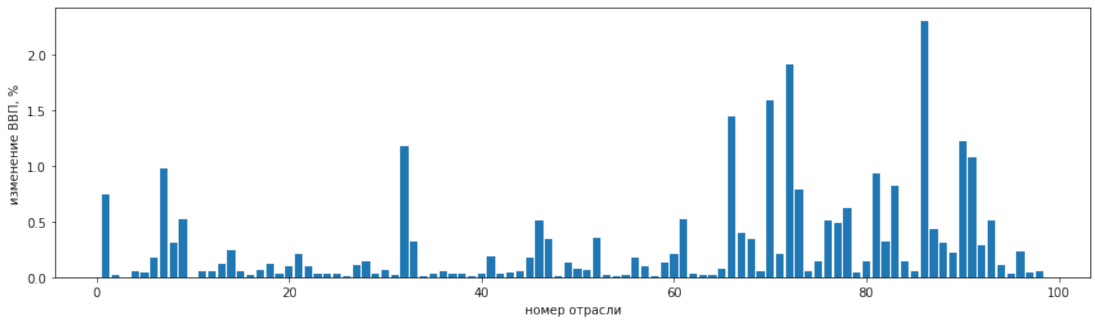

Рис.2 Изменение ВВП в зависимости от роста каждого сектора на 10%

На данном графике можно заметить, что сильнее всего влияют на ВВП следующие секторы (по убыванию степени влияния):

- **86** Услуги, связанные с недвижимым имуществом
- **72** Услуги по оптовой торговле, включая торговлю через агентов, кроме услуг по торговле автотранспортными средствами и мотоциклами
- **66** Услуги по производству, передаче и распределению электроэнергии
- **90** Прочие услуги, связанные с предпринимательской деятельностью
- **7** Нефть, включая нефть, получаемую из битуминозных минералов; сланцы горючие (битуминозные) и песчаники битуминозные
- **80** Услуги воздушного и космического транспорта

b) Рассмотрим влияние случайного шока

Пусть нестабильным является i-ый сектор. Для введения нестабильности умножим коэффициент α_i на случайную величину, имеющую логнормальное распределение.

Пусть $\ln \epsilon \sim N(p_0, \sigma_0^2)$ и $\alpha_i' = \alpha_i \epsilon$

$\lambda = \frac{1}{F_0(a_0)} e^{\mu_1 a_1^0 + \ldots + \mu_m a_m^0}$

Обозначим $-(E-A^T)^{-1} \equiv G$, тогда $\mu = Gd$ и

$\mu_j = \sum\limits_{i=1}^{m} G_{ji} d_i = \sum\limits_{i=1}^{m} G_{ji} \ln(F_i(a_i, b_i)) = \sum\limits_{i=1}^{m} G_{ji} \ln(\alpha_i a_{1i}^{a_{1i}} \dots b_{ni}^{b_{ni}})$

Так как ϵ имеет логнормальное распределение, то и μ_j имеют логнормальные распределения.

$\mathbb{E}\mu_j = \sum\limits_{i=1}^{m} G_{ji} \ln(\alpha_i a_{1i}^{a_{1i}} \dots b_{ni}^{b_{ni}}) + G_{ji} p_0 \equiv G_{ji} p_0 + k$, где k - некоторая константа.

$\mathbb{D}\mu_j = (G_{ji}\sigma_0)^2$

Обозначим случайную величину $\sum\limits_{i=1}^{m} \mu_i a_i^0 = \xi$ и найдем ее дисперсию и мат.ожидание:

$\mathbb{E}\xi = \sum\limits_{j=1}^{m} a_j^0 \mathbb{E}\mu_j = v_1 p_0 + r \equiv p$

$\mathbb{D}\xi = \sigma_0^2 \sum\limits_{j=1}^{m} (a_j^0 G_{ji})^2 = v_2 \sigma_0^2 \equiv \sigma^2,$

где v_1, v_2, r - некоторые константы.

Таким образом, $\lambda = \phi(\xi)$, где $\phi(x) = \frac{1}{F_0(a_0)} e^x$

Найдем числовые характеристики случайной величины λ:

$$\mathbb{E}\lambda = \int\limits_{-\infty}^{\infty} \phi(x) \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{(x-p)^2}{2\sigma^2}} dx = \frac{1}{F_0(a_0)\sqrt{2\pi\sigma^2}} \int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{1}{2\sigma^2}(x-(\sigma^2+p))^2 + \frac{\sigma^2}{2} + p} dx = \frac{1}{F_0(a_0)} e^{\frac{\sigma^2}{2}+p} =$$

$$= \frac{1}{F_0(a_0)} e^{\frac{v_2\sigma_0^2}{2} + v_1 p_0 + r}$$

$$\mathbb{D}\lambda = \int\limits_{-\infty}^{\infty} (\phi(x) - \mathbb{E}\lambda)^2 \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{(x-p)^2}{2\sigma^2}} dx =$$

$$= \frac{1}{F_0(a_0)^2\sqrt{2\pi\sigma^2}} \left(\int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{2x - \frac{(x-p)^2}{2\sigma^2}} dx - 2\int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{x + \frac{\sigma^2}{2} - \frac{(x-p)^2}{2\sigma^2}} dx + \int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{\sigma^2 + 2p - \frac{(x-p)^2}{2\sigma^2}} dx \right) =$$

$$= \frac{1}{F_0(a_0)^2}(e^{2\sigma^2+2p} - e^{\sigma^2+2p}) = \frac{1}{F_0(a_0)^2}(e^{2(v_2\sigma_0^2 + v_1 p_0 + r)} - e^{v_2\sigma_0^2 + 2(v_1 p_0 + r)})$$

$GDP = \frac{A_0}{\lambda} = \frac{A_0 F_0(a_0)}{e^{\xi}} = \phi(\xi), \xi \sim N(p, \sigma^2)$

$$\mathbb{E}GDP = \int\limits_{-\infty}^{\infty} \phi(x) \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{(x-p)^2}{2\sigma^2}} dx = \frac{A_0 F_0(a_0)}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{-x - \frac{(x-p)^2}{2\sigma^2}} dx = \frac{A_0 F_0(a_0) e^{-\frac{p^2}{2\sigma^2}}}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2} - 2\frac{(\sigma^2 \dots}{2 \dots}}$$

$$= A_0 F_0(a_0) e^{\frac{\sigma^2}{2} - p} = A_0 F_0(a_0) e^{\frac{v_2\sigma_0^2}{2} - v_1 p_0 - r}$$

Так как $\ln \mathbb{E}GDP$ представляет собой линейную зависимость от σ_0^2, то можно построить гистограмму зависимости системы от каждого сектора по углу наклона прямой. Рассмотрим случайную величину с дисперсией от 0.9 до 1.1, что коррелирует с 1 подпунктом.

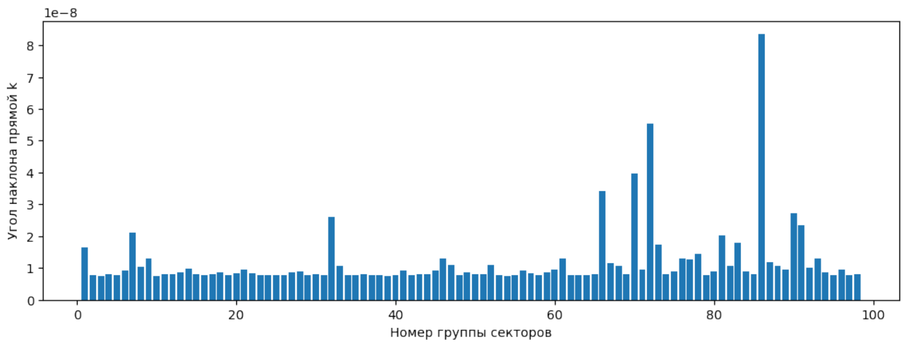

Рис.3 Степень зависимости системы от каждого сектора при $p_0 = 0$

При таком подсчете выделяются следующие секторы:

– **86** Услуги, связанные с недвижимым имуществом

– **72** Услуги по оптовой торговле, включая торговлю через агентов, кроме услуг по торговле автотранспортными средствами и мотоциклами

– **70** Работы строительные

– **66** Услуги по производству, передаче и распределению электроэнергии

– **90** Прочие услуги, связанные с предпринимательской деятельностью

– **32** Нефтепродукты

– **91** Услуги в сфере государственного управления, обеспечения военной безопасности и социального обеспечения

В Табл.1 представлены центральные отрасли, полученные рассмотренными тремя способами:

Граф	Фиксированный шок	Случайный шок
32 Нефтепродукты	86 Недвижимость	86 Недвижимость
86 Недвижимость	72 Оптовая торговля	72 Оптовая торговля
	66 Услуги электроэнергии	70 Работы строительные
Первоочередные связи	90 Предпринимательство	66 Услуги электроэнергии
	7 Нефть	90 Предпринимательство
72 Оптовая торговля	32 Нефтепродукты	32 Нефтепродукты
1 Сельское хозяйство	80 Услуги воздушного и космического транспорта	91 Государственное управление
46 Железо, чугун, сталь		
33 Вещества химические основные		
66 Услуги электроэнергии		
Второочередные связи		
78 Услуги транспортирования по трубопроводам		
7 Нефть		
9 Услуги, связанные с добычей нефти и газа		
90 Предпринимательство		

Табл.1 Центральные отрасли

Можно заметить, что при использовании данных методов получились непротиворечащие друг другу результаты, однако есть и некоторые различия. Например, отрасль нефтепродуктов потеряла долю своей влиятельности при рассмотрении межотраслевого баланса. Также в графе в качестве центральной отрасли с точки зрения связей второго порядка были выделены услуги транспортирования по трубопроводам, однако в случае использования производственных функций эта отрасль отсутствует. Это говорит о том, что при поиске ключевых отраслей немаловажными являются выбранные критерии центральности.

4.2 Поиск наиболее влиятельного комплекса отраслей

Разобьем все секторы на 4 группы:

- секторы с экспортным потенциалом (нефть, каменный уголь и пр.)
- секторы, конкурирующие с импортом (автомобилестроение, текстиль, изделия из кожи и пр.)
- инфраструктурные секторы (услуги по распространению электроэнергии, тепловая энергия, услуги по распределению воды и пр.)
- сфера услуг(торговля, услуги почты, образования и пр.)

При рассмотрении комплекса отраслей неприменим метод графов, поэтому используюся только производственные функции.

a) Случай фиксированного шока

Рассмотрим изменение комплекса отраслей на 10%. Для этого в каждой группе аналогично случаю a) по очереди производится изменение коэффициента α. После этого по формуле (12) рассчитывается ВВП.

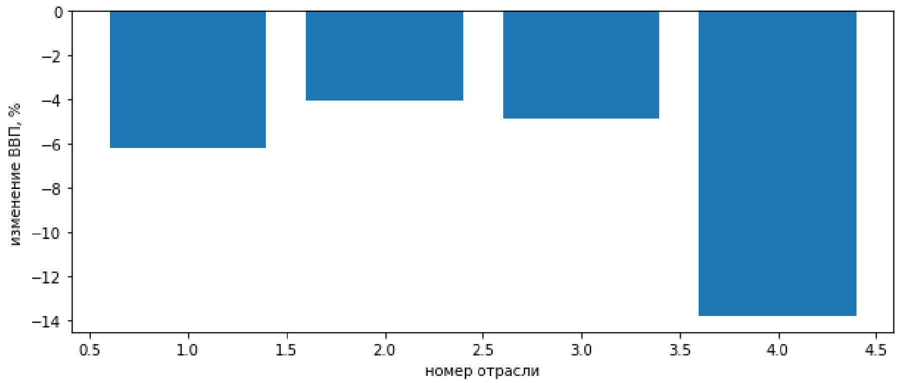

Рис.4 Изменение ВВП в зависимости от спада производства в каждой группе секторов на 10%

Можно заметить, что наиболее сильное влияние оказывает сфера услуг (спад на 14%). На практике такая цифра запредельно большая, однако сфера услуг содержит около 40 отраслей и вероятность упадка каждого ее сектора на 10% крайне мала. Второй по влиянию оказывается комплекс экспортоориентированных отраслей (спад на 6%).

b) Добавим случайный шок в группу отраслей.

Рассмотрим несколько секторов, в которые будем добавлять шоки: $I = \{i_1, \ldots, i_n\}$

и векторы соответствующих им дисперсий и мат.ожиданий:

$p_0 = (p_{01}, \ldots, p_{0n})$

σ_0^2 одинакова для всех отраслей.

Формулы для числовых характеристик записываются аналогично случаю с одним нестабильным сектором:

$$\mathbb{E}\mu_j = \sum_{i=1}^{m} G_{ji} \ln(\alpha_i a_{1i}^{a_{1i}} \ldots b_{ni}^{b_{ni}}) + \sum_{i \in I} G_{ji} p_{0i}$$

$$\mathbb{D}\mu_j = \sigma_0^2 \sum_{i \in I} (G_{ji})^2$$

$$\mathbb{E}\xi = \sum_{j=1}^{m} a_j^0 \mathbb{E}\mu_j \equiv p$$

$\mathbb{D}\xi = v^2 \sum_{j=1}^{m} a_j^0 \sum_{i \in I} G_{ji}^2 \equiv \sigma^2$

Как и в первом подпункте, рассматривается случай с мат.ожиданием $p_{0i} = 0, \forall i$

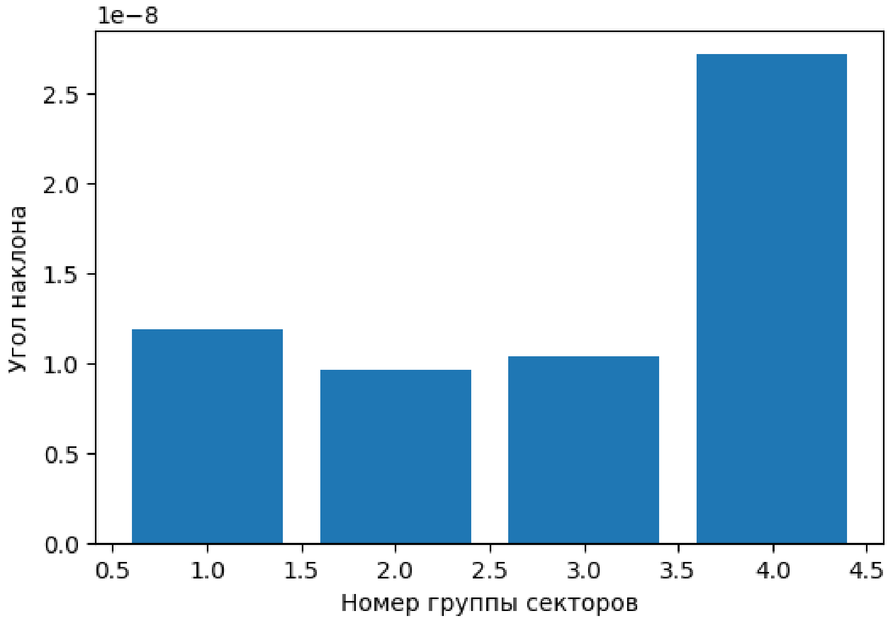

Рис.5 Степень зависимости системы от комплекса секторов при $p_0 = 0$

Как и в случае фиксированного шока наиболее влиятельной является сфера услуг, а вторая по величина сфера экспортоориентированных отраслей.

5 Вывод

В данной работе мною были рассмотрены два метода нахождения ключевых отраслей экономики: метод графов и метод производственных функций.

Плюсом метода графов является возможность рассмотрения понятия центральности с точки зрения связей второго порядка.

Тем не менее использование производственных функций позволяет существенно увеличить объем исследований. С их помощью можно

- регулировать масштаб изменений каждой отрасли
- рассматривать агрегированные группы отраслей

Таким образом, оба метода представляют непротиворечащие друг другу данные, однако, конкретизируя критерии центральности, можно получить различные ключевые отрасли.

6 Заключение

В дальнейшем планируется рассмотреть несколько связанных с этой темой задач:

- Проанализировать более общий случай с производственной функцией CES и оценить влияние ее эластичности замещения на экономическую систему.
- Рассмотреть случай замкнутой системы, в которой фиксировано предложение первичных ресурсов, а индексы цен могут меняться
- Оценить влияние каждой из четырех групп отраслей на систему при условии различия дисперсий в зависимости от группы.

Список литературы

[1] А. В. Рассоха, А. А. Шананин, “Обратные задачи анализа межотраслевых балансов”, Матем. моделирование, 33:3 (2021), 39–58

[2] А. А. Шананин. Двойственность по Янгу и агрегирование балансов // Доклады РАН. Математика, информатика, процессы управления, 2020, т.493, с.81-85. DOI: 10.31857 /S2686954320040177

[3] D. Acemoglu, A. Ozdaglar, A. Tahbaz-Salehi. The network origins of aggregate fluctuations. // Econometrica, 2012, v.80, №5, 1977-2016 p.

[4] А. А. Шананин. Задача агрегирования межотраслевого баланса и двойственность // Журнал вычислительной математики и математической физики, 2021, №1

[5] Phillip Bonacich. Power and Centrality: A Family of Measures. American Journal of Sociology, Vol. 92, No. 5 (Mar., 1987), pp. 1170-1182

[6] Ж.— П. Обен. Нелинейный анализ и его экономические приложения. Издательство ’Мир’, 1988г.

[7] Url: https://rosstat.gov.ru/accounts