

情報処理演習 II 後半 個人課題3-1

BQ23107 窪田 大輝

1. 課題内容

粘性抵抗中の振動について数学による一般解(厳密解)とプログラムによる数値解(近似解)を比較する.

2. 一般解(厳密解)

粘性抵抗中の振動について, 一般解は以下のように表される.

質量 m , ばね定数 k , 粘性抵抗 b の場合, 初期条件 $x(0) = x_0, v(0) = v_0$ のとき, 一般解は以下のように表される.

運動方程式は以下のように表される.

$$m \frac{d^2 x}{dt^2} = -kx - b \frac{dx}{dt}$$

ここで, $\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}, \gamma = \frac{b}{2\sqrt{km}}$ とおくと, 運動方程式は以下のように表される.

$$\frac{d^2 x}{dt^2} + 2\gamma \frac{dx}{dt} + \omega_0^2 x = 0$$

このとき, $x = e^{\lambda t}$ とおくと, 以下のように表される.

$$\lambda^2 + 2\gamma\lambda + \omega_0^2 = 0$$

この二次方程式の解は以下のように表される.

$$\lambda = -\gamma \pm \sqrt{\gamma^2 - \omega_0^2}$$

$$\begin{cases} \lambda_1 = -\gamma + \sqrt{\gamma^2 - \omega_0^2} \\ \lambda_2 = -\gamma - \sqrt{\gamma^2 - \omega_0^2} \end{cases}$$

c_1, c_2 を任意定数とすると

$$x = c_1 e^{\lambda_1 t} + c_2 e^{\lambda_2 t}$$

である.

この時, 質量 $m = 2\text{kg}$, バネ定数 $k = 50\text{N/m}$ とする.

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}} = 5\text{Hz}$$

$$\gamma = \frac{b}{2m} = \frac{b}{2 \times 2}$$

$\omega_0 = \gamma$ より $b = 20$ が得られる

よって $b < 20, b = 20, b > 20$ の場合について考える.

3. 数値解による手法

図1のように, 粘性抵抗中のグラフを描画するプログラムを作成した. ポインタを定義して, datファイルへの書き込みとgnuplotを用いたグラフを描画した.

```

#include <stdio.h>
#include <math.h>

int main(){
    double m, k, b, t, x, xx, vx, t0, t1, x0, vx0, dt, ddt;
    int num_i, num_p;

    m = 2; // 質量
    k = 50; // バネ定数
    b = 0; // 粘性抵抗係数を一旦ゼロ置いておく

    t0 = 0; // 初期時間
    t1 = 10; // この時間まで測定する

    x0 = 3; // 初期位置
    vx = 0; // 速度
    vx0 = 0; // 初期速度

    dt = 0.001; // 時間の刻み幅
    num_i = (t1 - t0) / dt; // 繰り返し回数の指定

    ddt = 0.01; // plotする時間間隔
    num_p = ddt / dt; // num_p毎にplotする

    int b_resistance[3] = {4, 20, 100}; // 粘性抵抗の値を3つ指定

    FILE *gp;
    gp = popen("gnuplot --persist -slow", "w");

    for (int i = 0; i < 3; i++) {
        char filename[30];
        sprintf(filename, "SpringViscosity_%d.dat", b_resistance[i]);
        FILE *fp;
        fp = fopen(filename, "w");

        t = t0; // tの初期条件
        x = x0; // x
        vx = vx0; // vx
        b = b_resistance[i]; // bの値を変更
    }
}

```

```

for (int j = 1; j <= num_i + 0.001; j++) {
    if (j % num_p == 0) { // jがnum_pで割り切れるとき
        printf("%f %f\n", t, x); // 横軸にt,縦軸にx
        fprintf(fp, "%f %f\n", t, x);
    }
    xx = x; // xxは仮変数
    x = x + dt * vx; // xの更新
    vx = vx + dt * (-k * xx - b * vx) / m; // vxの更新
    t = t + dt; // tの更新
}
fclose(fp);
}

for (int i = 0; i < 3; i++) {
    if (i == 0) {
        fprintf(gp, "plot \"SpringViscosity_%d.dat\" w l\n", b_resistance[i]);
    } else {
        fprintf(gp, "replot \"SpringViscosity_%d.dat\" w l\n", b_resistance[i]);
    }
}
fflush(gp);
pclose(gp);
return 0;
}

```

Fig.1 粘性抵抗中のグラフを描画するプログラム(vx0=0)

```

#include <stdio.h>
#include <math.h>

int main(){
    double m, k, b, t, x, xx, vx, t0, t1, x0, vx0, dt, ddt;
    int num_i, num_p;

    m = 2; // 質量
    k = 50; // ばね定数
    b = 0; // 粘性抵抗係数を一旦ゼロ置いておく

    t0 = 0; // 初期時間
    t1 = 10; // この時間まで測定する

    x0 = 3; // 初期位置
    vx = 0; // 速度
    vx0 = 100; // 初期速度

    dt = 0.001; // 時間の刻み幅
    num_i = (t1 - t0) / dt; // 繰り返し回数の指定

    ddt = 0.01; // plotする時間間隔
    num_p = ddt / dt; // num_p毎にplotする

    int b_resistance[3] = {3, 20, 100}; // 粘性抵抗の値を3つ指定

    FILE *gp;
    gp = popen("gnuplot --persist -slow", "w");

    for (int i = 0; i < 3; i++) {
        char filename[30];
        sprintf(filename, "SpringViscosity2_%d.dat", b_resistance[i]);
        FILE *fp;
        fp = fopen(filename, "w");

        t = t0; // tの初期条件
        x = x0; // x
        vx = vx0; // vx
        b = b_resistance[i]; // bの値を変更
    }
}

```

```

for (int j = 1; j <= num_i + 0.001; j++) {
    if (j % num_p == 0) { // jがnum_pで割り切れるとき
        printf("%f %f\n", t, x); // 横軸にt,縦軸にx
        fprintf(fp, "%f %f\n", t, x);
    }
    xx = x; // xxは仮変数
    x = x + dt * vx; // xの更新
    vx = vx + dt * (-k * xx - b * vx) / m; // vxの更新
    t = t + dt; // tの更新
}
fclose(fp);
}

for (int i = 0; i < 3; i++) {
    if (i == 0) {
        fprintf(gp, "plot \"SpringViscosity2_%d.dat\" w l\n", b_resistance[i]);
    } else {
        fprintf(gp, "replot \"SpringViscosity2_%d.dat\" w l\n", b_resistance[i]);
    }
}
fflush(gp);
pclose(gp);
return 0;
}

```

Fig.2 粘性抵抗中のグラフを描画するプログラム(vx0=100)

4. 実行結果

図3は、図1のプログラムを実行した結果である。

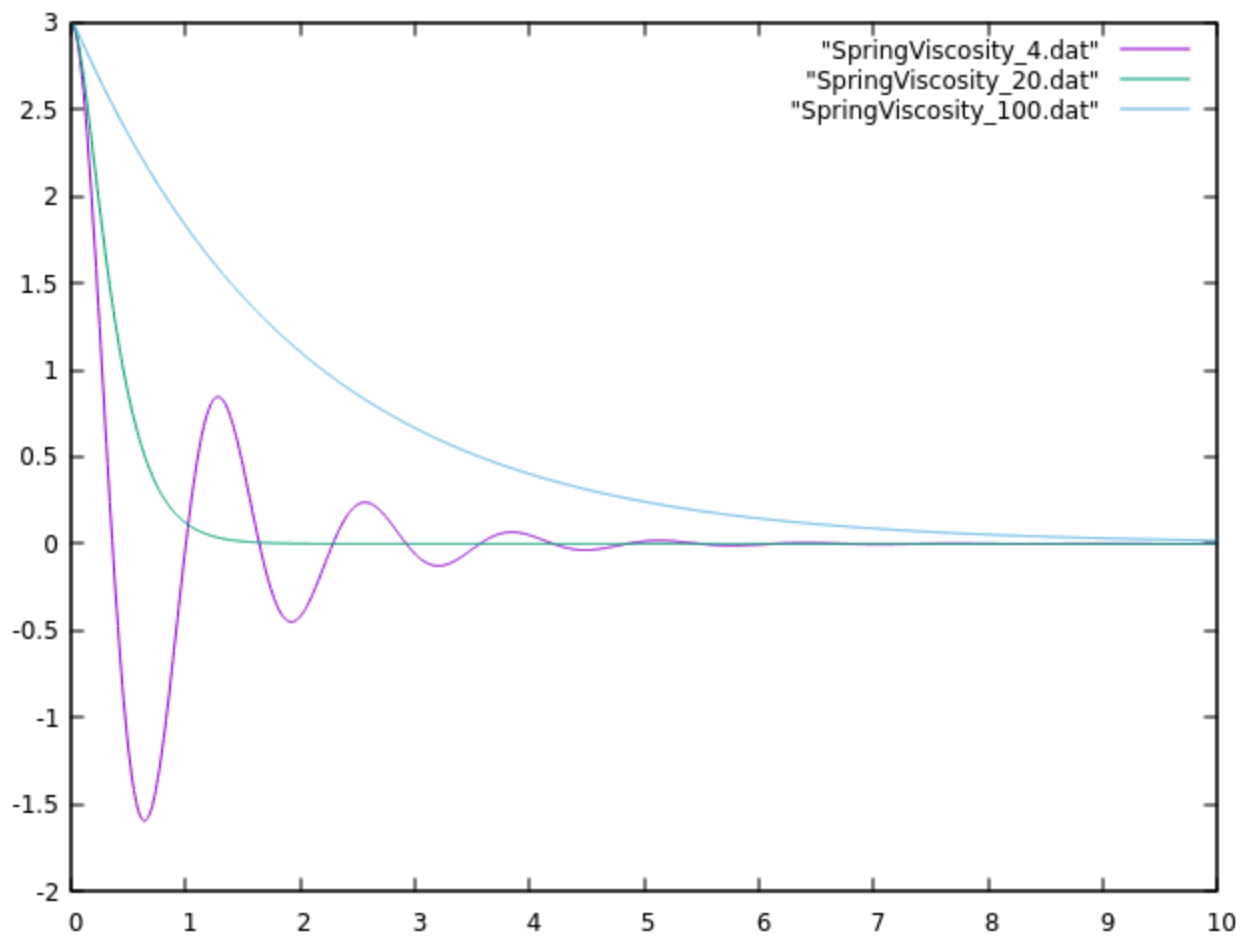


Fig.3 図1プログラムの実行結果

図4は，図2のプログラムを実行した結果である．

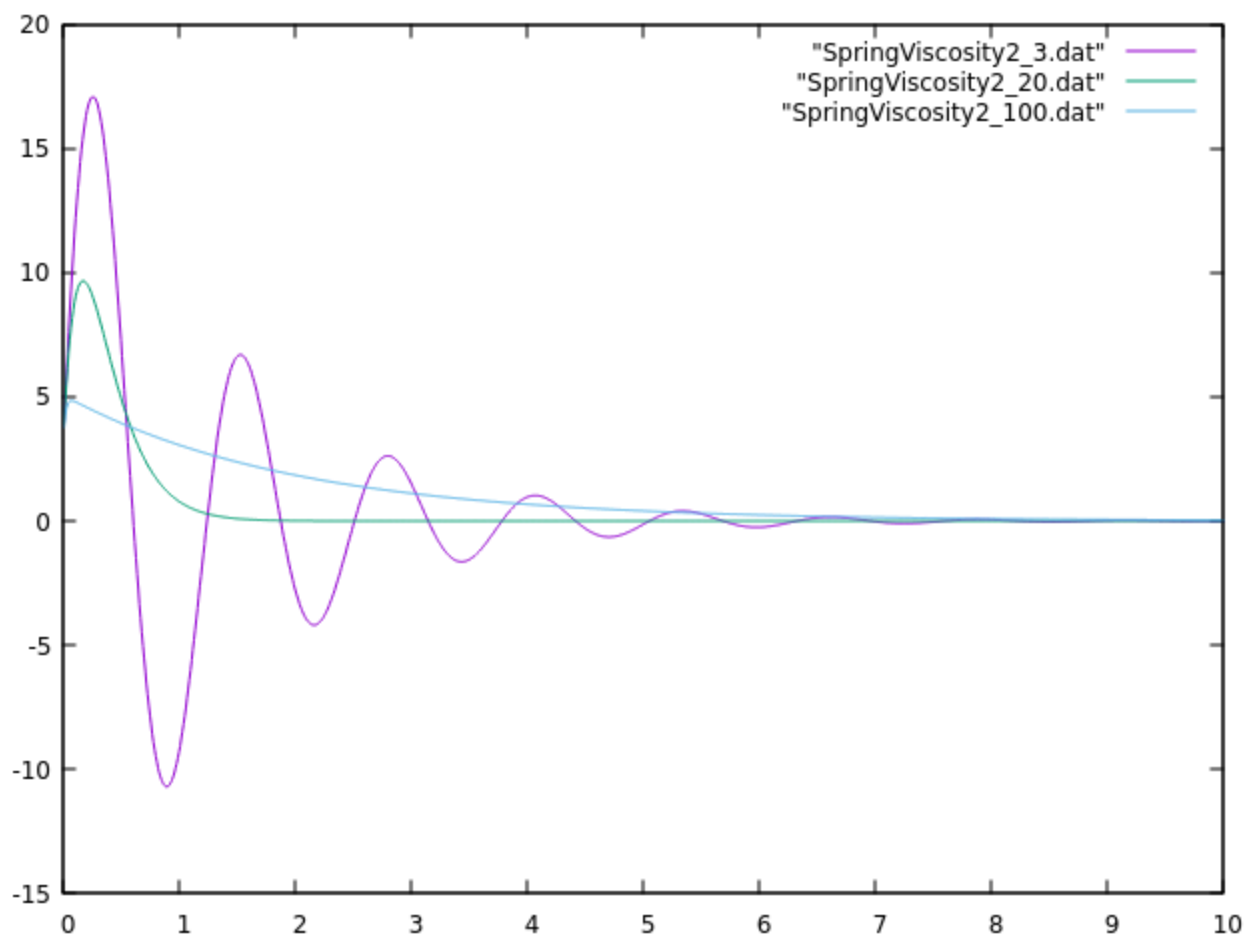


Fig.4 図1プログラムの実行結果

数学的に解いたものからも明らかなように **$b=20$** が最も減衰が早いことが2つのグラフからも読み取れる。

5. 参考文献

"KIT物理ナビゲーション". \text{\texttt{https://w3e.kanazawa-it.ac.jp/math/physics/category/mechanics/masspoint_mechanics/damped_harmonic_motion/dphm_solution.html}}. (2023/12/12アクセス)