情報処理演習 II 個人課題 6-1/6-2

微小角振動の場合のモード M と P の運動を再現せよ

BQ23107 窪田大輝

2024-01-23

目次

1 理論

1.1 一般の場合

質点 1 の質量を m_1 としての x,z 座標をそれぞれ x_1, z_1 とする．質点 2 の質量を m_2 としてのx, z座標はそれぞれx__2,z__2となる。それぞれ鉛直方向からの角度を __1, __2$とする．

座標は以下のようにとる．運動学の関係式は

$$\begin{cases} x_1 = l_1 \sin\theta_1 \\ z_1 = -l_1 \cos\theta_1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_2 = l_1 \sin\theta_1 + l_2 \sin\theta_2 \\ z_2 = -l_1 \cos\theta_1 - l_2 \cos\theta_2 \end{cases}$$

それぞれ微分すると

$$\begin{cases} \dot{x_1} = l_1 \dot{\theta_1} \cos\theta_1 \\ \dot{z_1} = -l_1 \dot{\theta_1} \sin\theta_1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \dot{x_2} = \dot{x_1} + l_2 \dot{\theta_2} \cos\theta_2 \\ \dot{z_2} = \dot{z_1} - l_2 \dot{\theta_2} \sin\theta_2 \end{cases}$$

再度微分すると

$$\begin{cases} \ddot{x_1} = -l_1\dot{\theta_1}^2\sin\theta_1 + l_1\ddot{\theta_1}\cos\theta_1 \\ \ddot{z_1} = -l_1\dot{\theta_1}^2\cos\theta_1 - l_1\ddot{\theta_1}\sin\theta_1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \ddot{x_2} = \ddot{x_1} - l_2\dot{\theta_2}^2\sin\theta_2 + l_2\ddot{\theta_2}\cos\theta_2 \\ \ddot{z_2} = \ddot{z_1} - l_2\dot{\theta_2}^2\cos\theta_2 - l_2\ddot{\theta_2}\sin\theta_2 \end{cases}$$

運動方程式は

$$\begin{cases} m_1\ddot{x_1} = -T_1\sin\theta_1 - +T_2\sin\theta_2 \\ m_1\ddot{z_1} = -T_1\cos\theta_1 - +T_2\cos\theta_2 + m_1 g \end{cases} \quad \cdots(e1)$$

$$\begin{cases} m_2\ddot{x_2} = -T_2\sin\theta_2 \\ m_2\ddot{z_2} = -T_2\cos\theta_2 + m_2 g \end{cases} \quad \cdots(e2)$$

となる．

e1 に e2 を代入すると

$$\begin{cases} m_1\ddot{x_1} = -T_1\sin\theta_1 + (-m_2\ddot{(x_2)}) \\ m_1\ddot{z_1} = -T_1\cos\theta_1 + (-m_2\ddot{(z_2)} + m_2 g) + m_1 g \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m_1\ddot{x_1} + m_2\ddot{(x_2)} = -T_1\sin\theta_1 \\ m_1\ddot{z_1} + m_2\ddot{(z_2)} - (m_2 g + m_1 g) = -T_1\cos\theta_1 \end{cases}$$

それぞれに $\cos(\theta_1)$ と $\sin(\theta_1)$ をかけて合わせると

$$\begin{cases} \cos(\theta_1)(m_1\ddot{x_1} + m_2\ddot{(x_2)}) = -T_1\sin\theta_1\cos\theta_1 \\ \sin(\theta_1)(m_1\ddot{z_1} + m_2\ddot{(z_2)} - (m_2 g + m_1 g)) = -T_1\sin\theta_1\cos\theta_1 \end{cases}$$

よって

$$\cos\theta_1(m_1\ddot{x_1} + m_2\ddot{(x_2)}) = \sin\theta_1(m_1\ddot{z_1} + m_2\ddot{(z_2)} - (m_2 g + m_1 g))$$

を得る．

e2 を式変形したもに $sin\theta_2$ と $\cos\theta_2$ をかけて合わせると

$$\begin{cases} \cos\theta_2(m_2\ddot{x_2}) = -T_2\sin\theta_2\cos\theta_2 \\ \sin\theta_2(m_2\ddot{z_2} - m_2 g) = -T_2\sin\theta_2\cos\theta_2 \end{cases} \quad \cdots(e3)$$

運動学の視点から求めた式に $e3$ を代入すると

$$\begin{cases} \ddot{\theta}_1 = \frac{m_2 l_1 l_2\sin(\theta_1-\theta_2)\cos(\theta_1-\theta_2)\dot{(\theta_1)}^{-}m_2 l_2^2\sin(\theta_1-\theta_2)\dot{(\theta_2)}^2+((m_2\sin(\theta_2)\cos(\theta_1-\theta_2)-(m_1+m_2)\sin(\theta_1)l_2 g)}{l_1 l_2(m_1-m_2-m_2\cos^2(\theta_1-\theta_2))} \\ \ddot{\theta}_2 = \frac{(m_1+m_2)l_1^2\sin(\theta_1-\theta_2)\dot{(\theta_1)}^2-m_2 l_1 l_2\sin(\theta_1-\theta_2)\cos(\theta_1-\theta_2)\dot{(\theta_2)}^2+((m_1+m_2)\sin(\theta_1)\cos(\theta_1-\theta_2)-\sin(\theta_2))l_1 g}{l_1 l_2(m_1-m_2-m_2\cos^2(\theta_1-\theta_2))} \end{cases}$$

一階の微分方程式に変形すると $\dot{\theta}_1 = \omega_1$ かつ $\dot{\theta}_2 = \omega_2$ とあらわせるので

$$\begin{cases} \dot{\omega}_1 = \frac{m_2 l_1 l_2\sin(\theta_1-\theta_2)\cos(\theta_1-\theta_2)\omega_1^2-m_2 l_2^2\sin(\theta_1-\theta_2)\omega_2^2+((m_2\sin(\theta_2)\cos(\theta_1-\theta_2)-(m_1+m_2)\sin(\theta_1)l_2 g)}{l_1 l_2(m_1-m_2-m_2\cos^2(\theta_1-\theta_2))} \\ \dot{\omega}_2 = \frac{(m_1+m_2)l_1^2\sin(\theta_1-\theta_2)\omega_1^2-m_2 l_1 l_2\sin(\theta_1-\theta_2)\cos(\theta_1-\theta_2)\omega_2^2+((m_1+m_2)\sin(\theta_1)\cos(\theta_1-\theta_2)-\sin(\theta_2))l_1 g}{l_1 l_2(m_1-m_2-m_2\cos^2(\theta_1-\theta_2))} \end{cases}$$

1.2　微小角振動の場合

$$|\theta_1|, |\theta_2| \ll 1|\dot{\theta}_1|, |\dot{\theta}_2| \ll 1$$

とする．すると，

$$\sin\theta \approx \theta\cos\theta \approx 1$$

と近似できる．

$$\begin{cases}\ddot{\theta}_1 = \frac{(m_2\sin(\theta_2)\cos(\theta_1-\theta_2)-(m_1+m_2)\theta_1)l_2 g}{l_1 l_2(m_1-m_2-m_2\cos^2(\theta_1-\theta_2))} \\ \ddot{\theta}_2 = \frac{(m_1+m_2)(\sin(\theta_1)\cos(\theta_1-\theta_2)-\sin(\theta_2))l_1 g}{l_1 l_2(m_1+m_2-m_2\cos^2(\theta_1-\theta_2)}\end{cases}$$

ここで，$m_1 = m_2 = m$, $l_1 = l_2 = l$ とすると

$$\begin{cases}\ddot{\theta}_1 = \frac{(\theta_2-2\theta_1)g}{l} \\ \ddot{\theta}_2 = \frac{2(\theta_1-\theta_2)g}{l}\end{cases}$$

これは，定数係数の連立常微分方程式である．

1.3 モード M の時

$\omega_0 = \sqrt{\frac{l}{g}}$ とすると

$$\omega = \sqrt{2-\sqrt{2}\omega_0}$$

となる．

初期条件は

$$\begin{cases}\theta_2(0) = \sqrt{2}\theta_1(0) \\ \omega_1(0) = \omega_2(0) = 0\end{cases}$$

となる．

1.4 モード P の時

$\omega_0 = \sqrt{\frac{l}{g}}$ とすると

$$\omega = \sqrt{2+\sqrt{2}\omega_0}$$

となる．

初期条件は

$$\begin{cases}\theta_2(0) = -\sqrt{2}\theta_1(0) \\ \omega_1(0) = \omega_2(0) = 0\end{cases}$$

となる．

2 検証

理論の章で求めた通り，初期条件を指定して，モード M とモード P の時の運動を再現する．コード 1 が実際に作成したプログラムである．

コード 1 double_pendulum_mode.c

```
#include <stdio.h>
#include <math.h>

// シミュレーションパラメータ
const double l = 1.0;  // 振り子の長さ
```

```
const double g = 9.8;  // 重力加速度

// 微分方程式
double differential_equations(double theta1, double omega1, double theta2
    , double omega2,
                            double *dtheta1, double *domega1, double *
                               dtheta2, double *domega2) {
    *dtheta1 = omega1;
    *domega1 = ((theta2 - 2 * theta1) * g) / l;
    *dtheta2 = omega2;
    *domega2 = (2 * (theta1 - theta2) * g) / l;
}

int main() {
    double w0, w_M, w_P;
    double theta1_0, theta2_0, omega1_0, omega2_0;
    double t0, t1, dt, ddt, t;
    double theta1, theta2, omega1, omega2;
    double k1_theta1, k1_omega1, k2_theta1, k2_omega1;
    double k1_theta2, k1_omega2, k2_theta2, k2_omega2;
    double dtheta1, domega1, dtheta2, domega2;
    int numi, nump, i;

    w0 = sqrt(l / g);
    w_M = sqrt(2 - sqrt(2)) * w0;
    w_P = sqrt(2 + sqrt(2)) * w0;

    theta1_0 = 0.03;
    theta2_0 = sqrt(2) * theta1_0;
    omega1_0 = 0;
    omega2_0 = 0;

    t0 = 0;
    t1 = 20.0;
    theta1 = theta1_0;
    theta2 = theta2_0;
    omega1 = omega1_0;
    omega2 = omega2_0;

    dt = 0.001;
    numi = (t1 - t0) / dt;
```

```c
ddt = 0.5;
nump = (t1 - t0) / ddt;

FILE *fp;
fp = fopen("data1.dat", "w");

for (i = 1; i <= numi; i++) {
    if (i % nump == 0) {
        printf("%f %f %f %f %f\n", t, theta1, theta2, omega1, omega2
            );
        fprintf(fp, "%f %f %f %f %f\n", t, theta1, theta2, omega1,
            omega2);
    }

    // 中点法
    differential_equations(theta1, omega1, theta2, omega2, &dtheta1,
        &domega1, &dtheta2, &domega2);

    double k1_theta1 = dt * dtheta1;
    double k1_omega1 = dt * domega1;
    double k1_theta2 = dt * dtheta2;
    double k1_omega2 = dt * domega2;

    differential_equations(theta1 + k1_theta1/2.0, omega1 + k1_omega1
        /2.0, theta2 + k1_theta2/2.0, omega2 + k1_omega2/2.0, &dtheta1
        , &domega1, &dtheta2, &domega2);

    double k2_theta1 = dt * dtheta1;
    double k2_omega1 = dt * domega1;
    double k2_theta2 = dt * dtheta2;
    double k2_omega2 = dt * domega2;

    theta1 = theta1 + k2_theta1;
    omega1 = omega1 + k2_omega1;
    theta2 = theta2 + k2_theta2;
    omega2 = omega2 + k2_omega2;

    t = t + dt;
}
fflush(fp);
```

```
    fclose(fp);

    FILE *gp;
    gp = popen("gnuplot -persist", "w");
    fprintf(gp, "plot \"data1.dat\" u 1:2 w l title \"theta 1\", \"data1.
       dat\" u 1:3 w l title \"theta 2\"\n");
    fflush(gp);
    fclose(gp);

    return 0;
}
```

3　結果

モード M の時の結果を図 1 に示す．

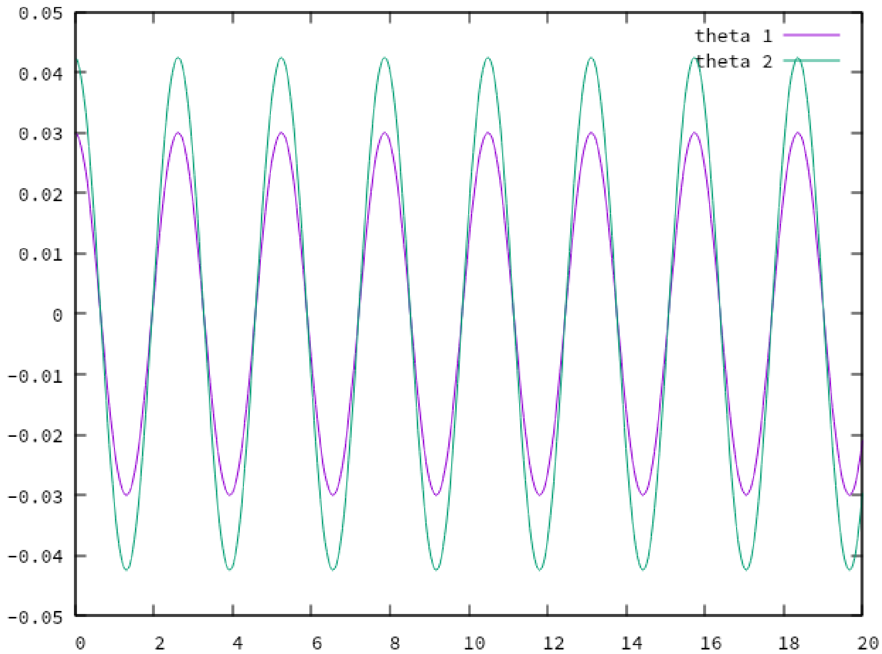

図 1　モード M の時の結果

モード P の時の結果を図 2 に示す．

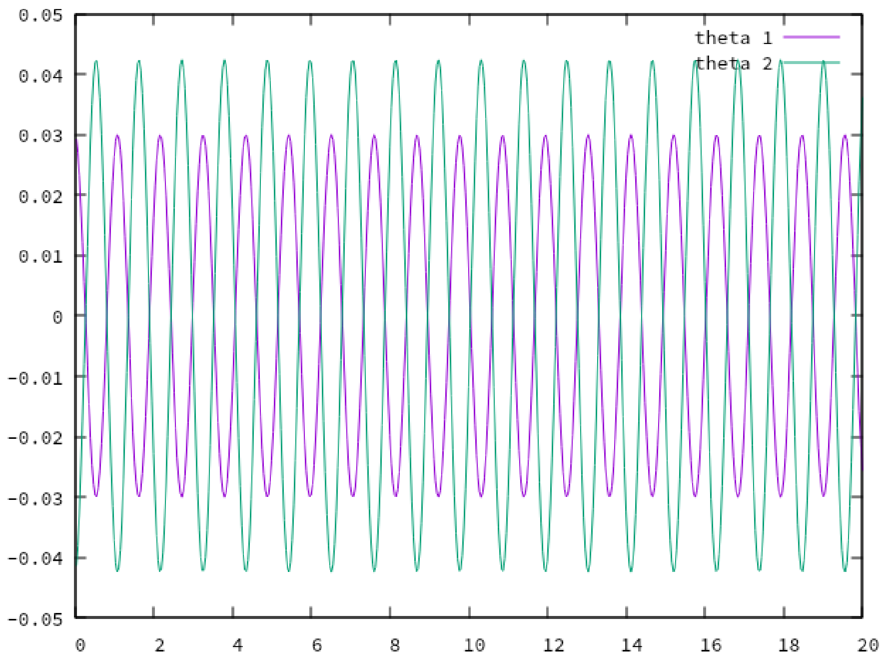

図 2　モード P の時の結果

初期条件を $\theta_1 = 2.7$,$\theta_2 = \sqrt{\theta_1}$,$\omega_1 = 1.0.\omega_2 = 1.0$ と設定したときに，カオスを観測した．その結果を図 3, 図 4 に示す．

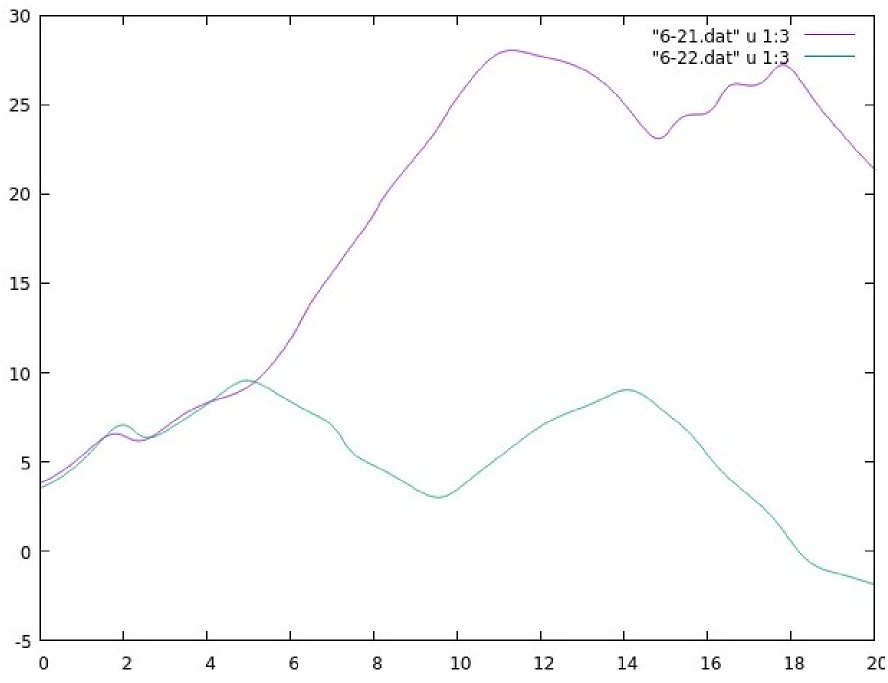

図 3　θ_1 のカオスの観測結果

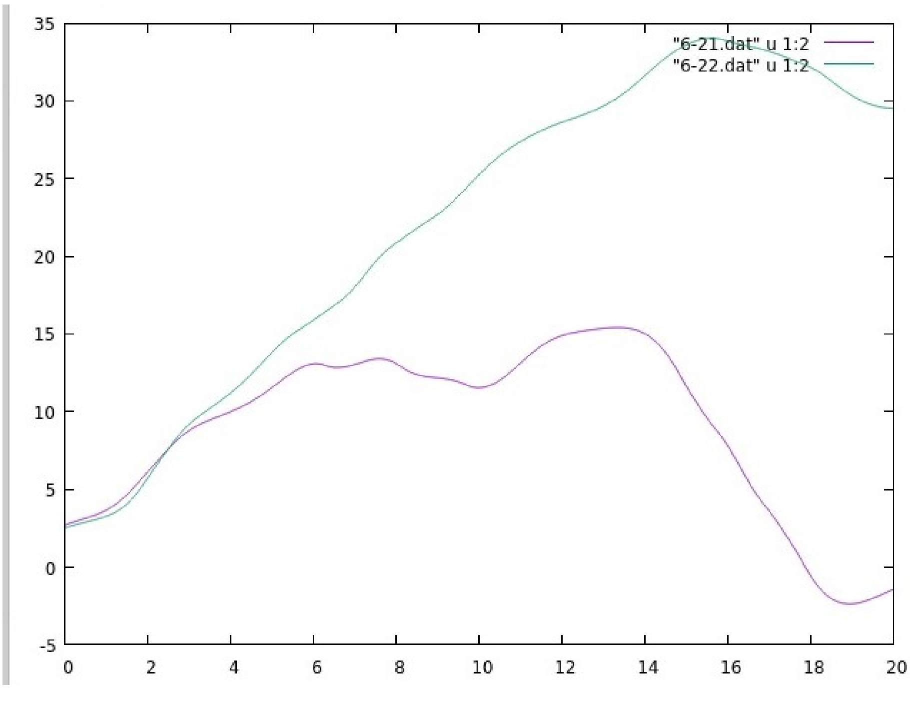

図 4　θ_2 のカオスの観測結果

4　考察

結果から明らかなように，モードの運動が再現できていると言える．また図 3, 図 4 から少しの初期条件の変化で，その後の結果が大きく変化するカオス現象が観測できたと言える．