

情報処理演習 II 個人課題 6-1

微小角振動の場合のモード M と P の運動を再現せよ

BQ23107 窪田大輝

2024-01-09

目次

1	理論	1
1.1	一般の場合	1
1.2	微小角振動の場合	2
1.3	モード M の時	3
1.4	モード P の時	3
2	検証	3
3	結果	6
4	考察	6

1 理論

1.1 一般の場合

質点 1 の質量を m_1 としての x, z 座標をそれぞれ x_1, z_1 とする. 質点 2 の質量を m_2 としての x, z 座標はそれぞれ x_2, z_2 となる. それぞれ鉛直方向からの角度を θ_1, θ_2 とする.

座標は以下のようにとる. 運動学の関係式は

$$\begin{cases} x_1 = l_1 \sin \theta_1 \\ z_1 = -l_1 \cos \theta_1 \end{cases}$$
$$\begin{cases} x_2 = l_1 \sin \theta_1 + l_2 \sin \theta_2 \\ z_2 = -l_1 \cos \theta_1 - l_2 \cos \theta_2 \end{cases}$$

それぞれ微分すると

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = l_1 \dot{\theta}_1 \cos \theta_1 \\ \dot{z}_1 = -l_1 \dot{\theta}_1 \sin \theta_1 \end{cases}$$
$$\begin{cases} \dot{x}_2 = \dot{x}_1 + l_2 \dot{\theta}_2 \cos \theta_2 \\ \dot{z}_2 = \dot{z}_1 - l_2 \dot{\theta}_2 \sin \theta_2 \end{cases}$$

再度微分すると

$$\begin{cases} \ddot{x}_1 = -l_1 \dot{\theta}_1^2 \sin \theta_1 + l_1 \ddot{\theta}_1 \cos \theta_1 \\ \ddot{z}_1 = -l_1 \dot{\theta}_1^2 \cos \theta_1 - l_1 \ddot{\theta}_1 \sin \theta_1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \ddot{x}_2 = \ddot{x}_1 - l_2 \dot{\theta}_2^2 \sin \theta_2 + l_2 \ddot{\theta}_2 \cos \theta_2 \\ \ddot{z}_2 = \ddot{z}_1 - l_2 \dot{\theta}_2^2 \cos \theta_2 - l_2 \ddot{\theta}_2 \sin \theta_2 \end{cases}$$

運動方程式は

$$\begin{cases} m_1 \ddot{x}_1 = -T_1 \sin \theta_1 - T_2 \sin \theta_2 \\ m_1 \ddot{z}_1 = -T_1 \cos \theta_1 - T_2 \cos \theta_2 + m_1 g \end{cases} \quad \dots (e1)$$

$$\begin{cases} m_2 \ddot{x}_2 = -T_2 \sin \theta_2 \\ m_2 \ddot{z}_2 = -T_2 \cos \theta_2 + m_2 g \end{cases} \quad \dots (e2)$$

となる。

e1 に e2 を代入すると

$$\begin{cases} m_1 \ddot{x}_1 = -T_1 \sin \theta_1 + (-m_2 \ddot{x}_2) \\ m_1 \ddot{z}_1 = -T_1 \cos \theta_1 + (-m_2 \ddot{z}_2) + m_2 g + m_1 g \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m_1 \ddot{x}_1 + m_2 \ddot{x}_2 = -T_1 \sin \theta_1 \\ m_1 \ddot{z}_1 + m_2 \ddot{z}_2 - (m_2 g + m_1 g) = -T_1 \cos \theta_1 \end{cases}$$

それぞれに $\cos(\theta_1)$ と $\sin(\theta_1)$ をかけて合わせると

$$\begin{cases} \cos(\theta_1)(m_1 \ddot{x}_1 + m_2 \ddot{x}_2) = -T_1 \sin \theta_1 \cos \theta_1 \\ \sin(\theta_1)(m_1 \ddot{z}_1 + m_2 \ddot{z}_2 - (m_2 g + m_1 g)) = -T_1 \sin \theta_1 \cos \theta_1 \end{cases}$$

よって

$$\cos \theta_1 (m_1 \ddot{x}_1 + m_2 \ddot{x}_2) = \sin \theta_1 (m_1 \ddot{z}_1 + m_2 \ddot{z}_2 - (m_2 g + m_1 g))$$

を得る。

e2 を式変形したものに $\sin \theta_2$ と $\cos \theta_2$ をかけて合わせると

$$\begin{cases} \cos \theta_2 (m_2 \ddot{x}_2) = -T_2 \sin \theta_2 \cos \theta_2 \\ \sin \theta_2 (m_2 \ddot{z}_2 - m_2 g) = -T_2 \sin \theta_2 \cos \theta_2 \end{cases} \quad \dots (e3)$$

運動学の視点から求めた式に e3 を代入すると

$$\begin{cases} \ddot{\theta}_1 = \frac{m_2 l_1 l_2 \sin(\theta_1 - \theta_2) \cos(\theta_1 - \theta_2) \dot{\theta}_1 - m_2 l_2^2 \sin(\theta_1 - \theta_2) \dot{\theta}_2^2 + ((m_2 \sin(\theta_2) \cos(\theta_1 - \theta_2) - (m_1 + m_2) \sin(\theta_1) l_2 g))}{l_1 l_2 (m_1 - m_2 - m_2 \cos^2(\theta_1 - \theta_2))} \\ \ddot{\theta}_2 = \frac{(m_1 + m_2) l_1^2 \sin(\theta_1 - \theta_2) \dot{\theta}_1^2 - m_2 l_1 l_2 \sin(\theta_1 - \theta_2) \cos(\theta_1 - \theta_2) \dot{\theta}_2^2 + ((m_1 + m_2) \sin(\theta_1) \cos(\theta_1 - \theta_2) - \sin(\theta_2)) l_1 g}{l_1 l_2 (m_1 - m_2 - m_2 \cos^2(\theta_1 - \theta_2))} \end{cases}$$

一階の微分方程式に変形すると $\dot{\theta}_1 = \omega_1$ かつ $\dot{\theta}_2 = \omega_2$ とあらわせるので

$$\begin{cases} \dot{\omega}_1 = \frac{m_2 l_1 l_2 \sin(\theta_1 - \theta_2) \cos(\theta_1 - \theta_2) \omega_1^2 - m_2 l_2^2 \sin(\theta_1 - \theta_2) \omega_2^2 + ((m_2 \sin(\theta_2) \cos(\theta_1 - \theta_2) - (m_1 + m_2) \sin(\theta_1) l_2 g))}{l_1 l_2 (m_1 - m_2 - m_2 \cos^2(\theta_1 - \theta_2))} \\ \dot{\omega}_2 = \frac{(m_1 + m_2) l_1^2 \sin(\theta_1 - \theta_2) \omega_1^2 - m_2 l_1 l_2 \sin(\theta_1 - \theta_2) \cos(\theta_1 - \theta_2) \omega_2^2 + ((m_1 + m_2) \sin(\theta_1) \cos(\theta_1 - \theta_2) - \sin(\theta_2)) l_1 g}{l_1 l_2 (m_1 - m_2 - m_2 \cos^2(\theta_1 - \theta_2))} \end{cases}$$

1.2 微小角振動の場合

$$|\theta_1|, |\theta_2| \ll 1, |\dot{\theta}_1|, |\dot{\theta}_2| \ll 1$$

とする。すると、

$$\sin \theta \approx \theta \cos \theta \approx 1$$

と近似できる.

$$\begin{cases} \ddot{\theta}_1 = \frac{(m_2 \sin(\theta_2) \cos(\theta_1 - \theta_2) - (m_1 + m_2) \theta_1) l_2 g}{l_1 l_2 (m_1 - m_2 - m_2 \cos^2(\theta_1 - \theta_2))} \\ \ddot{\theta}_2 = \frac{(m_1 + m_2) (\sin(\theta_1) \cos(\theta_1 - \theta_2) - \sin(\theta_2)) l_1 g}{l_1 l_2 (m_1 + m_2 - m_2 \cos^2(\theta_1 - \theta_2))} \end{cases}$$

ここで, $m_1 = m_2 = m$, $l_1 = l_2 = l$ とすると

$$\begin{cases} \ddot{\theta}_1 = \frac{(\theta_2 - 2\theta_1)g}{l} \\ \ddot{\theta}_2 = \frac{2(\theta_1 - \theta_2)g}{l} \end{cases}$$

1.3 モード M の時

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{l}{g}} \text{ とすると}$$

$$\omega = \sqrt{2 - \sqrt{2}} \omega_0$$

となる.

初期条件は

$$\begin{cases} \theta_2(0) = \sqrt{2} \theta_1(0) \\ \omega_1(0) = \omega_2(0) = 0 \end{cases}$$

となる.

1.4 モード P の時

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{l}{g}} \text{ とすると}$$

$$\omega = \sqrt{2 + \sqrt{2}} \omega_0$$

となる.

初期条件は

$$\begin{cases} \theta_2(0) = -\sqrt{2} \theta_1(0) \\ \omega_1(0) = \omega_2(0) = 0 \end{cases}$$

となる.

2 検証

理論の章で求めた通り, 初期条件を指定して, モード M とモード P の時の運動を再現する. コード 1 が実際に作成したプログラムである.

コード 1 double_pendulum_mode.c

```
#include <stdio.h>
#include <math.h>

// シミュレーションパラメータ
const double l = 1.0; // 振り子の長さ
const double g = 9.8; // 重力加速度
```

```
// 微分方程式
double differential_equations(double theta1, double omega1, double theta2
, double omega2,
                                double *dtheta1, double *domega1, double *
                                dtheta2, double *domega2) {

    *dtheta1 = omega1;
    *domega1 = ((theta2 - 2 * theta1) * g) / l;
    *dtheta2 = omega2;
    *domega2 = (2 * (theta1 - theta2) * g) / l;
}

int main() {
    double w0, w_M, w_P;
    double theta1_0, theta2_0, omega1_0, omega2_0;
    double t0, t1, dt, ddt, t;
    double theta1, theta2, omega1, omega2;
    double k1_theta1, k1_omega1, k2_theta1, k2_omega1;
    double k1_theta2, k1_omega2, k2_theta2, k2_omega2;
    double dtheta1, domega1, dtheta2, domega2;
    int numi, nump, i;

    w0 = sqrt(1 / g);
    w_M = sqrt(2 - sqrt(2)) * w0;
    w_P = sqrt(2 + sqrt(2)) * w0;

    theta1_0 = 0.03;
    theta2_0 = sqrt(2) * theta1_0;
    omega1_0 = 0;
    omega2_0 = 0;

    t0 = 0;
    t1 = 20.0;
    theta1 = theta1_0;
    theta2 = theta2_0;
    omega1 = omega1_0;
    omega2 = omega2_0;

    dt = 0.001;
    numi = (t1 - t0) / dt;

```

```

ddt = 0.5;
nump = (t1 - t0) / ddt;

FILE *fp;
fp = fopen("data1.dat", "w");

for (i = 1; i <= numi; i++) {
    if (i % nump == 0) {
        printf("%f %f %f %f %f\n", t, theta1, theta2, omega1, omega2
        );
        fprintf(fp, "%f %f %f %f %f\n", t, theta1, theta2, omega1,
        omega2);
    }

    // 中点法
    differential_equations(theta1, omega1, theta2, omega2, &dtheta1,
        &domega1, &dtheta2, &domega2);

    double k1_theta1 = dt * dtheta1;
    double k1_omega1 = dt * domega1;
    double k1_theta2 = dt * dtheta2;
    double k1_omega2 = dt * domega2;

    differential_equations(theta1 + k1_theta1/2.0, omega1 + k1_omega1
        /2.0, theta2 + k1_theta2/2.0, omega2 + k1_omega2/2.0, &dtheta1
        , &domega1, &dtheta2, &domega2);

    double k2_theta1 = dt * dtheta1;
    double k2_omega1 = dt * domega1;
    double k2_theta2 = dt * dtheta2;
    double k2_omega2 = dt * domega2;

    theta1 = theta1 + k2_theta1;
    omega1 = omega1 + k2_omega1;
    theta2 = theta2 + k2_theta2;
    omega2 = omega2 + k2_omega2;

    t = t + dt;
}
fflush(fp);
fclose(fp);

```

```

FILE *gp;
gp = popen("gnuplot -persist", "w");
fprintf(gp, "plot \"data1.dat\" u 1:2 w l title \"theta 1\", \"data1.\n\ndat\" u 1:3 w l title \"theta 2\\\"\\n");
fflush(gp);
fclose(gp);

return 0;
}

```

3 結果

モード M の時の結果を図 1 に示す.

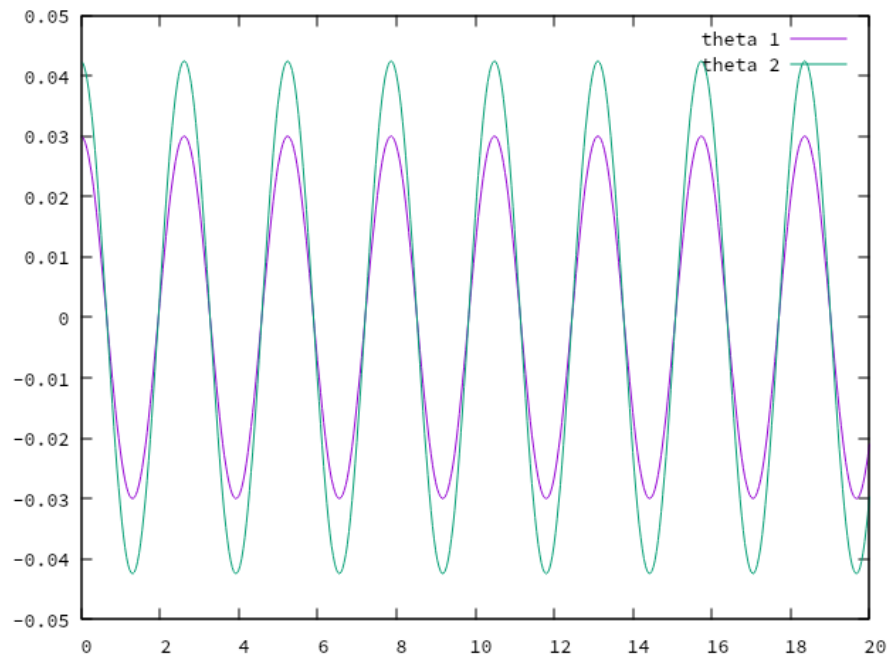


図 1 モード M の時の結果

モード P の時の結果を図 2 に示す.

4 考察

結果から明らかなように, モードの運動が再現できていると言える. 理論通りの結果が得られた.

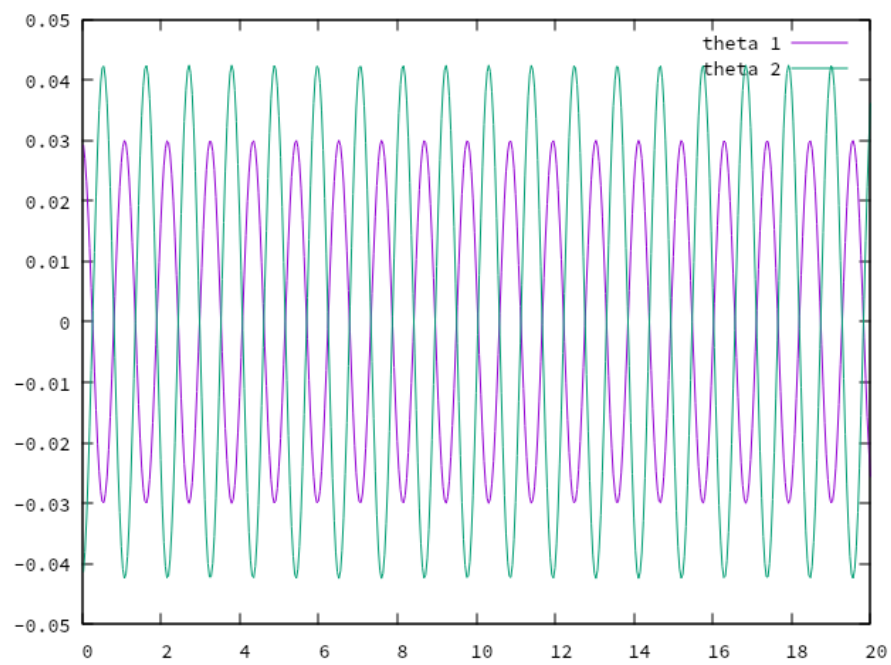


図2 モード P の時の結果