Lema: Sea $G \subseteq \mathbb{R}^d$ abierto.

Entonces existen

$$I_k = [a_1^k, b_1^k] \times \dots \times [a_d^k, b_d^k]$$

tal que $I_k^0 \cap I_\ell^0 = \emptyset$ y

$$G = \bigcup_{k=1}^{\infty} I_k .$$

Pb: Ejercicio

Teorema: Sea $F \subseteq \mathbb{R}^d$ cerrado.

Entonces E es medible.

Pba: Asuma que F es compacto

Dado $\varepsilon > 0$ existe G abierto

que satisface

$$m_e(G) \leq m_e(F) + \frac{\varepsilon}{2}$$

Note que $G \setminus F$ es abierto. Luego existen $\{I_k\}_{k=1}^{\infty}$ cubos cerrados t.q.

$$G \setminus F = \bigcup_{k=1}^{\infty} I_k$$

Como F y $\bigcup_{k=1}^{\ell} I_k$ son cerrados disjuntos y F es compacto tenemos que

$$d(F, \bigcup_{k=1}^{\ell} I_k) > 0 .$$

Entonces

$$m_e(G) \geq m_e(F \cup \bigcup_{k=1}^{\ell} I_k)$$
$$= m_e(F) + m_e(\bigcup_{k=1}^{\ell} I_k).$$

Entonces

$$m_e\left(\bigcup_{k=1}^{\ell} I_k\right) \leq m_e(G) - m_e(F)$$
$$\leq \frac{\varepsilon}{2}$$

$$\therefore \sum_{k=1}^{\ell} m_e(I_k) \leq \frac{\varepsilon}{2}, \text{ para todo } \ell \geq 1$$

$$\therefore \sum_{k=1}^{\infty} m_e(I_k) \leq \frac{\varepsilon}{2}$$

$$\therefore m_e(G \setminus F) < \varepsilon$$

Si F no es compacto, tenemos que $F = \bigcup_{k=1}^{\infty} F_k$, con

$$F_k = F \cap \overline{B(0,k)}$$

como F_k es compacto, F es medible.

Teorema: El complemento de un conjunto medible es medible.

Pba: Sea E medible. Dado $k \geq 1$ existe G_k abierto t.q.

- $E \subseteq G_k$
- $m_e(G_k \setminus E) < \frac{1}{k}$

Note que $E \subseteq \bigcap_{k=1}^{\infty} G_k$, G_k^c es cerrado para todo $k \geq 1$. Ent

$$H = \bigcup_{k=1}^{\infty} G_k^c \text{ es medible}$$

y

$$H = \left(\bigcap_{n=1}^{\infty} G_n\right)^c = \bigcup_{n=1}^{\infty} G_n^c \subseteq E^c$$

Ahora

$$E^c \setminus H \subseteq E^c \setminus G_n^c = G_n \setminus E$$

i.e.

$$m_e(E^c \setminus H) \leq \frac{1}{n}$$

para todo $n \geq 1$.

Concluimos que $Z = E^c \setminus H$ tiene medida exterior cero. Como

$$E^c = Z \cup H,$$

E^c es medible ■

16

Sean $\{E_n\}_{n=1}^{\infty}$ medibles, ent

(i) $\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n$ es medible.

(ii) $\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n^c$ es medible.

Entonces

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} E_n = \left(\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n^c\right)^c$$

es medible. Además

$$E_1 \setminus E_2 = E_1 \cap E_2^c$$

es medible.

Def: Sea Ω un conjunto, una σ-álgebra $\mathcal{F}$ es un subconjunto de 2^{Ω} que satisface

(i) Si $E \in \mathcal{F}$, ent $E^c \in \mathcal{F}$

(ii) $\Omega \in \mathcal{F}$

(iii) Si $\{F_u\}_{u=1}^{\infty} \subseteq \mathcal{F}$ ent $\bigcup_{u=1}^{\infty} F_u \in \mathcal{F}$

Lema: Sea $\mathcal{F}$ una σ-álgebra, y $\{E_u\}_{u=1}^{\infty} \subseteq \mathcal{F}$. Entonces

(i) $\bigcap_{u=1}^{\infty} E_u \in \mathcal{F}$

(ii) $E_1 \setminus E_2 \in \mathcal{F}$

(iii) $\phi \in \mathcal{F}$

Pba: ejercicio.

Sea $\mathcal{M}_0 = \{E \subseteq \mathbb{R}^d : E \text{ medible}\}$, los resultados anteriores se resumen en el siguiente lema.

Lema: $\mathcal{M}_0$ es una σ-álgebra.

Sea $\mathcal{A} \subseteq 2^{\Omega}$, la σ-álgebra generada por $\mathcal{A}$ es

$$\sigma(\mathcal{A}) = \bigcap_{\substack{\mathcal{F}\ \sigma\text{-álgebra} \\ \mathcal{A} \subseteq \mathcal{F}}} \mathcal{F}$$

Note que 2^{Ω} es una σ-álgebra t.q $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{F}$.

De la definición se desprende que $\sigma(\mathcal{A})$ es la σ-álgebra más pequeña que contiene a $\mathcal{A}$.

Def: $\mathcal{B}$ la σ-álgebra Boreliana es la σ-álgebra generada por los abiertos de $\mathbb{R}^d$.

Al ser $\mathcal{B}$ una σ-álgebra, $\mathcal{B}$ contiene a los cerrados, G_δ, F_σ ...

Además
$$\mathcal{B} \subseteq \mathcal{M}.$$

Los conjuntos medibles se pueden definir en términos de cerrados

Lema: Sea $E \subseteq \mathbb{R}^d$ entonces E es medible sii dado $\varepsilon > 0$ existe $F \subseteq E$ cerrado que satisface
$$m_e(E \setminus F) < \varepsilon$$

Pba: Sabemos que E es medible sii E^c es medible.

Dado $\varepsilon > 0$ existe G abierto tal que

- $E^c \subseteq G$
- $m_e(G \setminus E^c) < \varepsilon.$

Ent $G^c := F \subset E$, y

19

$$m_e(E \setminus F) = m_e(E \cap G)$$
$$= m_e(G \setminus E^c)$$
$$< \varepsilon.$$

Se deja de ejercicio completar la prueba.

Con este resultado podemos probar.

Teorema: Sea $\{E_k\}_{k=1}^{\infty}$ una colección contable de conjuntos disjuntos y medibles. Ent

$$m\left(\bigcup_{k=1}^{\infty} E_k\right) = \sum_{k=1}^{\infty} m(E_k)$$

Pba:

Asuma que E_k es acotado. Sabemos que existe $F_k \subseteq E_k$ cerrado t.q.

$$m(E_k \setminus F_k) < \frac{\varepsilon}{2^k}$$

Dado que F_k es compacto, para cada $k \geq 1$, y $F_k \cap F_\ell = \emptyset$, tenemos que

$$m\left(\bigcup_{n=1}^{m} F_n\right) = \sum_{n=1}^{m} m(F_n)$$

Ent

$$\sum_{n=1}^{m} m(F_n) \leq m\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n\right)$$

$$\Rightarrow \quad \sum_{n=1}^{\infty} m(F_n) \leq m\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n\right)$$

Ahora

$$m(E_k) = m(F_k \cup E_k \setminus F_k)$$
$$\leq m(F_k) + m(E_k \setminus F_k)$$
$$\leq m(F_k) + \frac{\varepsilon}{2^k}$$

Luego

$$\sum_{i=1}^{\infty} m(E_i) - \frac{\varepsilon}{2^i} \leq$$

$$m\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} E_i\right)$$

$$\therefore \sum_{i=1}^{\infty} m(E_i) \leq m\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} E_i\right) + \varepsilon$$

El resto de la prueba se deja de ejercicio. $\blacksquare$

Sea $I^k = I_1^k \times \dots \times I_d^k$ donde I_i^k es un intervalo. Si

$$(I^k)^o \cap (I^l)^o = \phi,$$

tenemos

$$m\left(\bigcup_{k=1}^{\infty} (I^k)^o\right) = \sum_{k=1}^{\infty} m((I^k)^o)$$
$$= \sum_{k=1}^{\infty} m(I^k)$$

$$\therefore \sum_{k=1}^{\infty} m(I^k) \leq m\left(\bigcup_{k=1}^{\infty} I^k\right)$$

$$\therefore \sum_{k=1}^{\infty} m(I^k) = m\left(\bigcup_{k=1}^{\infty} I^k\right).$$

21

Sean E_1, E_2 medibles.

Si $E_1 \subseteq E_2$, tenemos que

$$m(E_2) = m(E_1 \cup E_2 \setminus E_1)$$
$$= m(E_1) + m(E_2 \setminus E_1)$$

Si $m(E_1) < \infty$, ent

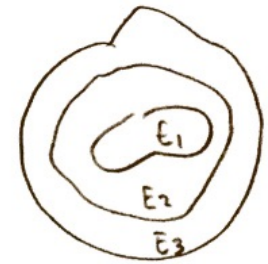
$$\boxed{\therefore\ m(E_2 \setminus E_1) = m(E_2) - m(E_1)}$$

Por otro lado si $\{E_i\}_{i=1}^{\infty}$ es una sucesión de conjuntos medibles que satisfacen

$$E_i \subseteq E_{i+1}$$

para $i \geq 1$, se tiene

$$\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n = \bigcup_{i=1}^{\infty} E_i \setminus E_{i-1}$$



donde $E_0 = \emptyset$. Entonces

$$m\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n\right) = \sum_{u=1}^{\infty} m(E_i \setminus E_{i-1})$$
$$= \lim_{n\to\infty} \sum_{u=1}^{n} m(E_i) - m(E_{i-1})$$
$$= \lim_{n\to\infty} m(E_n)$$

siempre que $m(E_u) < \infty$ para $u \geq 1$.

Note que la identidad es cierta si $m(E_u) = \infty$ para algún K

Asuma ahora que

$$E_i \supseteq E_{i+1}$$

para $i \geq 1$. Si $m(E_1) < \infty$, ent

$$E_1 = \bigcup_{i=1}^{\infty} E_i = \left(\bigcup_{i=1}^{\infty} E_i \setminus E_{i+1}\right) \cup E$$

con $E = \bigcap_{i=1}^{\infty} E_i$

Entonces

$$m(E_1) = \sum_{i=1}^{\infty} m(E_i \setminus E_{i+1}) + m(E)$$

Como

$$\sum_{i=1}^{\infty} m(E_i \setminus E_{i+1}) = \sum_{i=1}^{\infty} m(E_i) - m(E_{i+1}) =$$

$$\lim_{n\to\infty} m(E_1) - m(E_n)$$

Concluimos que

$$m(E_1) = \lim_{n\to\infty} (m(E_1) - m(E_n)) + m\left(\bigcap_{i=1}^{\infty} E_i\right)$$

$$\therefore \quad m\left(\bigcap_{i=1}^{\infty} E_i\right) = \lim_{n\to\infty} m(E_n)$$

En este caso si es necesario que $m(E_1) < \infty$.

Considere

$$E_k = [-k,k]^c$$

Ent
- $E_{k+1} \subseteq E_k$
- $m(E_k) = +\infty$
- $\bigcap_{k=1}^{\infty} E_k = \emptyset$

Teorema: Sea $\{E_k\}_{k=1}^{\infty}$ una sucesión de conjuntos medibles.

(i) Si $E_i \subseteq E_{i+1}$, $1 \leq i$, entonces

$$m\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} E_i\right) = \lim_{k \to \infty} m(E_k)$$

(ii) Si $E_{i+1} \subseteq E_i$ y existe $i_0 \geq 1$ t.q. $m(E_{i_0}) < \infty$. Entonces

$$m\left(\bigcap_{i=1}^{\infty} E_i\right) = \lim_{i \to \infty} m(E_i)$$

Este resultado puede ser generalizado. Dados $E_k \subseteq \mathbb{R}^d$, no necesariamente medible, que satisface

$$E_k \subseteq E_{k+1}$$

para $k \geq 1$.

Sea G_k un conjunto G_δ que satisface
- $E_k \subseteq G_k$
- $m_e(E_k) = m(G_k)$.

Note que no se puede deducir que

$$G_u \subseteq G_{u+1}.$$

Tome

$$V_u = \bigcap_{j=u}^{\infty} G_j$$

ent $V_u \subseteq V_{u+1}$.

Como $E_u \subseteq E_{u+\ell} \subseteq G_{u+\ell}$,

se tiene que

$$E_u \subseteq V_u$$

Además

$$\begin{aligned} m_e(E_u) &\leq m_e(V_u) \\ &= m(V_u) \end{aligned}$$

y

$$m(V_u) \leq m(G_u) = m_e(E_u)$$

i.e. $m_e(E_u) = m(V_u)$.

Finalmente

$$\begin{aligned} m_e(E_u) &\leq m_e\left(\bigcup_{u=1}^{\infty} E_u\right) \\ &\leq m_e\left(\bigcup_{u=1}^{\infty} V_u\right) \\ &\leq \lim_{u \to \infty} m(V_u) \\ &= \lim_{u \to \infty} m_e(E_u) \end{aligned}$$

Teorema: Si $E_u \subseteq E_{u+1} \subseteq \mathbb{R}^d$. Ent

$$m_e\left(\bigcup_{u=1}^{\infty} E_u\right) = \lim_{u \to \infty} m_e(E_u).$$