Teorema de Arzelá-Ascoli

1

Sea (X,d) un espacio métrico, tome $K \subseteq X$ con K compacto.

Definimos

$$C(K,\mathbb{R}) = \{ f: K \to \mathbb{R},\ f \text{ continua} \}$$

y

$$d_\infty(f,g) = \sup_{x \in K} \{ |f(x) - g(x)| \}$$

para $f, g \in C(K,\mathbb{R})$.

Sabemos que $(C(K,\mathbb{R}), d)$ es un espacio métrico. La convergencia en este espacio, es la convergencia uniforme de funciones continuas.

Vamos a analizar la compacidad en estos espacios. Sea

$$G \subseteq C(K,\mathbb{R})$$

compacto.

Tome $\{f_n\}_{n=1}^{\infty} \subseteq G$, vamos a probar que dados $\varepsilon > 0$ y $x_0 \in K$ existe $\delta > 0$ tal que

$$d(x_0, y) < \delta \Rightarrow |f_n(y) - f_n(x_0)| < \varepsilon$$

para todo $n \geq 1$.

Asuma que no, ent

existe $\varepsilon > 0$ y $x_0 \in K$ tal que para todo $n \in \mathbb{N}$ existen y_n y K_n que satisfacen (2)

$$d(x_0, y_n) < \frac{1}{n}$$

y $$|f_{K_n}(x_0) - f_{K_n}(y_n)| \geq \varepsilon$$

Como $\mathcal{G}$ es compacto existe $\{f_{m_n}\}_{n=1}^{\infty}$ subsucesión de $\{f_{K_n}\}_{n=1}^{\infty}$ que converge uniformemente a $f: K \to \mathbb{R}$ continua.

Al ser f continua y $y_n \xrightarrow[n\to\infty]{} x_0$ existe n_0 tal que

$$|f(x_n) - f(x_0)| < \frac{\varepsilon}{3}$$

si $n \geq n_0$. Ent

$$|f_{m_n}(x_n) - f_{m_n}(x_0)| \leq$$

$$|f_{m_n}(x_n) - f(x_n)| + |f(x_n) - f(x_0)| +$$

$$|f_{m_n}(x_0) - f(x_0)| \leq$$

$$\frac{\varepsilon}{3} + 2\, d_\infty(f_{m_n}, f) \quad (\xi)$$

Def: Dada $\{f_\alpha\}_{\alpha \in \Omega}$ una familia de funciones $f_\alpha : X \to Y$, donde (X, d) y (Y, ρ) son espacios métricos

Decimos que la familia $\{f_\alpha\}_{\alpha\in\Omega}$ es equicontinua en x_0 si para todo $\varepsilon>0$ existe $\delta>0$ que satisface

$$d(x_0,y)<\delta \implies \rho(f_\alpha(y),f_\alpha(x_0))<\varepsilon$$

si $n\geq 1$.

La familia es equicontinua, si es equicontinua en todos los puntos

Lema: Sea $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$, $f_n: X\to Y$ una familia equicontinua. Sea $K\subseteq X$ compacto t.q. $f_n(x)\xrightarrow[n\to\infty]{} f_0(x)$, con f_0 continua en K, para cada $x\in K$. Entonces $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ converge uniformemente a f_0 en K

Prueba: Dado $x\in K$ y $\varepsilon>0$, existe $\delta_x>0$ tal que

$$y\in B(x,\delta_x) \implies \rho(f_n(x),f_n(y))<\frac{\varepsilon}{3}$$

para todo $n\geq 0$.

Al ser K compacto existen $x_1,\dots,x_m$ tales que

$$K\subseteq \bigcup_{i=1}^{m} B(x_i,\delta_{x_i})$$

Tome $N_0\in\mathbb{N}$ tal que, si $n\geq N_0$

$$\rho(f_n(x_i),f_0(x_i))<\frac{\varepsilon}{3}, \quad 1\leq i\leq m$$

Sea $y \in K$, entonces existe $1 \leq i \leq m$ tal que $y \in B(x_i, \delta_{x_i})$ y entonces

$$\rho(f_n(y), f_0(y)) \leq \rho(f_n(y), f_n(x_i)) + \rho(f_n(x_i), f_0(x_i)) + \rho(f_0(x_i), f_0(y))$$

$$< \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} \quad \blacksquare$$

Este lema nos dice que la equicontinuidad nos permite pasar de convergencia puntual a convergencia uniforme

¿Qué podemos hacer si no tenemos de antemano que f es continua?

Lema: Sea $f_n : X \to Y$ una sucesión equicontinua con Y completo. Si además $\{f_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ converge para todo $x \in D \subseteq X$ con D denso en X. Entonces f_n converge en X y el límite es continuo.

Prueba: Sea $x \in X$

Vamos a probar que $\{f_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ es de Cauchy.

Por equicontinuidad existe $\delta > 0$ tal que

5

$$d(x,y) < \delta \Rightarrow \rho(f_n(x), f_n(y)) < \frac{\varepsilon}{3}$$

para todo $n \geq 1$.

Sea $y \in B(x,\delta) \cap D$, entonces existe N_0 tal que

$$\rho(f_n(y), f_m(y)) < \frac{\varepsilon}{3}$$

si $n, m \geq N_0$.

Luego

$$\rho(f_n(x), f_m(x)) \leq \rho(f_n(x), f_n(y))$$
$$+ \rho(f_n(y), f_m(y)) + \rho(f_m(y), f_m(x))$$
$$< \varepsilon$$

si $n, m \geq N_0$. Sea

$$f(x) = \lim_{n \to \infty} f_n(x)$$

Note que

$$\rho(f(x), f(y)) \leq \lim_{n \to \infty} \rho(f_n(x), f_n(y))$$
$$\leq \frac{\varepsilon}{3}$$

si $d(x,y) < \delta$.

Ojo: El resultado es válido siempre que $\overline{\{f_n(x)\}_{n=1}^{\infty}}$ sea completo, por ejemplo si el conjunto es compacto.

Lema: Sean $f_n : X \longrightarrow Y$ equicontinuas y $K \subseteq X$ compacto. Asume que $\{f_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ converge en para todo $x \in K$ a $f_0 : X \longrightarrow Y$. Entonces f_n converge uniformemente en K.

Prueba: Ejr

Teorema (Arzelà-Ascoli)

Sean $f_n : X \longrightarrow Y$ con X separable. Si $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ es equicontinua y para cada $x \in X$ $\overline{\{f_n(x)\}_{n=1}^{\infty}}$ es compacto. Entonces existe una subsucesión de $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ que converge puntualmente a una función continua $f : X \longrightarrow Y$, y la convergencia es uniforme en cada compacto $K \subseteq X$.

Prueba.

Sea $D \subseteq X$ denso y

$$D = \{x_n\}_{n=1}^{\infty}$$

Sabemos que

$$\overline{\{f_n(x_1) : n \geq 1\}} \text{ es compacto.}$$

Entonces existe una subsucesión $f^1_{n_k}$ tal que $\{f^1_{n_k}(x_1)\}_{k=1}^{\infty}$ converge. De igual forma

$$\overline{\{f^1_{n_k}(x_2) : k \geq 1\}}$$

es compacto (¿Por qué?)

entonces existe una subsucesión $f^2_{n_k}$ de $f^1_{n_k}$ que satisface que

$$\{f^2_{n_k}(x_2)\}_{k=1}^{\infty}$$

converge. Iterando el proceso dada $f^m_{n_k}$ tal que $\{f^m_{n_k}(x_m)\}_{k=1}^{\infty}$ converge existe una subsucesión

$$f^{m+1}_{n_k}$$

que satisface $\{f^{m+1}_{n_k}(x_{m+1})\}_{k=1}^{\infty}$ converge. Por construcción

$$\{f^m_{n_k}(x_l)\}_{k=1}^{\infty}$$

converge para $1 \leq l \leq m$.

Dado que, para $l \leq m$ $\{f^m_{n_m}\}_{m=l}^{\infty}$ es una subsucesión de $f^l_{n_k}$, tenemos que $\{f^m_{n_m}(x_i)\}_{m=1}^{\infty}$ converge para todo $1 \leq i \leq l$.

$\therefore$ $\{f^m_{n_m}\}_{m=1}^{\infty}$ converge para todos los puntos de D

Por los resultados anteriores, $\{f^m_{n_m}\}_{m=1}^{\infty}$ converge en X a una función continua y la convergencia es uniforme en compactos ∎

Corolario: Sea $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ una familia equicontinua de funciones

$$f_n : X \longrightarrow \mathbb{R}$$

con X separable. Sea $D \subseteq X$ denso y numerable, si:

$$\{f_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$$

es acotado, existe una subsucesión $\{f_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$ que converge a una función continua $f : X \longrightarrow \mathbb{R}$ y la convergencia es uniforme en compactos

Pba: $\overline{\{f_n(x)\}_{n=1}^{\infty}}$ es compacto.

¿Como son los compactos de $C(K, \mathbb{R})$ con K compacto?

Lema: Sea $X = C(K, \mathbb{R})$. Entonces $G \subseteq X$ es compacto en (X, d_∞) si: G es cerrado, acotado y equicontinuo.

"$\Rightarrow$" Se probó al inicio

"$\Leftarrow$" Sabemos que K es separable.

Sea $\{f_n\}_{n=1}^{\infty} \subseteq G$, como G es acotado existe $M \geq 0$ que satisface

$$d_\infty(f_n, O) \leq M$$

donde O es la función cero, i.e.

$$\|f_n\|_\infty \leq M$$

para todo $n \geq 1$. Por el Corolario anterior existe una subsucesión $\{f_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$ que converge a una función continua $f : K \to \mathbb{R}$ con $f \in G$

9

Ejm:

Sea $f_n(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } 0 \leq x \leq 1-\frac{1}{n} \\ nx-n+1 & \text{si } 1-\frac{1}{n} \leq x \leq 1 \end{cases}$

Es facil probar que

- $\|f_n\|_\infty \leq 1$
- f_n es continua

Es decir $\underline{f_n \in C([0,1], \mathbb{R})}$

y $\quad f_n \in B(0,1)$.

Ahora

$$|f_n(x) - f_n(1)| = |nx-n+1-1| = n|x-1|$$

Luego

$|f_n(x) - f_n(1)| < \varepsilon$ sii

$n|x-1| < \varepsilon$ sii

$|x-1| < \frac{\varepsilon}{n}$

Esta sucesión no es equicontinua.

$\therefore$ $\overline{B(0,1)}$ no es compacta