

# MA0505 - Análisis I

## Lección XVI: Egorov y Lusin

Pedro Méndez<sup>1</sup>

<sup>1</sup>Departamento de Matemática Pura y Ciencias Actuariales  
Universidad de Costa Rica

Semestre I, 2021

# Agenda

- 1 Dos Grandes Teoremas
  - El Teorema de Egorov
  - El Teorema de Lusin

# El Teorema

Sean  $f_k : E \rightarrow \mathbb{R}$  medibles tales que  $f_k \xrightarrow[k \rightarrow \infty]{} f$  c.p.d. en  $E$ .  
Sabemos que no se puede esperar en general que  $f_k \rightarrow f$  uniformemente en compactos.

## Teorema (Egorov)

*Sea  $E \subseteq \mathbb{R}^d$  con  $m(E) < \infty$ . Si  $|f(x)| \neq \infty$  c.p.d. en  $E$  entonces dado  $\varepsilon > 0$ , existe  $F_\varepsilon \subseteq E$  cerrado que satisface:*

- (I)  $m(E \setminus F_\varepsilon) < \varepsilon$ .
- (II)  $f_k \xrightarrow[k \rightarrow \infty]{} f$  uniformemente en  $F_\varepsilon$ .

# Un Comentario

- Sea  $E = \mathbb{R}^d$  y  $f_k = \mathbf{1}_{B(0,k)}(x)$ , entonces  $f_k \xrightarrow[k \rightarrow \infty]{} 1$  puntualmente.
- Si  $f$  no es acotado, existe  $x$  tal que  $|1 - f_k(x)| = 1$ .
- Si  $F$  es cerrado y  $m(\mathbb{R}^d \setminus F) \neq \infty$  entonces  $F$  no es acotado.

# Un Lema Previo

Antes de probar el teorema 1 de Egorov, vamos a probar el siguiente lema.

## Lema

*Dado  $\varepsilon > 0$  y  $\eta > 0$ , entonces existen  $F \subseteq E$  un cerrado y  $k_0 = k_0(\varepsilon, \eta) \geq 0$  que satisfacen:*

- (I)  $m(E \setminus F) < \eta$ .
- (II)  $|f_k(x) - f(x)| < \varepsilon$  si  $x \in F$  y  $k \geq k_0$ .

# Prueba del Lema

Llamemos

$$\tilde{E} = \{x \in E : \lim_{k \rightarrow \infty} f_k = f, |f| < \infty\}.$$

Sean  $\varepsilon > 0$  y  $\eta > 0$ , definamos

$$E_m = \bigcap_{k=m}^{\infty} \{|f - f_k| < \varepsilon\} = \{x \in E : k > k_0 \Rightarrow |f(x) - f_k(x)| < \varepsilon\}.$$

Entonces  $E_m$  es medible y  $E_m \subseteq E_{m+1}$ .

## Ejercicio

Muestre que  $\bigcup_{m=1}^{\infty} E_m = \tilde{E}$ .

# Continuamos la Prueba

- Luego  $m(\tilde{E}) = \lim_{m \rightarrow \infty} m(E_m)$ . Es decir

$$\lim_{m \rightarrow \infty} m(\tilde{E} \setminus E_m) = \lim_{m \rightarrow \infty} (m(\tilde{E}) - m(E_m)) = 0.$$

- Sea  $k_0$  tal que  $k \geq k_0 \Rightarrow m(E \setminus E_k) < \frac{\eta}{2}$ . Si  $x \in E_{k_0}$  entonces tenemos que

$$k \geq k_0 \Rightarrow |f(x) - f_k(x)| < \varepsilon.$$

- Finalmente tomemos  $F$  cerrado,  $F \subseteq E_{k_0}$  que satisfaga  $m(E_{k_0} \setminus F) < \frac{\eta}{2}$ . Entonces

$$m(E \setminus F) \leq m(E \setminus E_{k_0}) + m(E_{k_0} \setminus F) < \eta.$$

# Prueba del Teorema de Egorov

Dado  $\varepsilon > 0$  existen  $F_m \subseteq E$  cerrados y  $\kappa_m^\varepsilon$  tales que

$$(I) \quad m(E \setminus F_m) < \frac{\varepsilon}{2^m}.$$

$$(II) \quad |f(x) - f_k(x)| < \frac{1}{m} \text{ para } k \geq \kappa_m^\varepsilon \text{ y } x \in F_m.$$

Sea  $F = \bigcap_{m=1}^{\infty} F_m$ . Entonces  $F$  es cerrado y

$$m(E \setminus F) = m\left(E \cap \bigcup_{m=1}^{\infty} F_m^c\right) \leq \sum_{m=1}^{\infty} m(E \setminus F_m) < \varepsilon.$$

Además si  $x \in F$ , dado  $m \geq 1$  existe  $\kappa_m$  tal que

$$k \geq \kappa_m \Rightarrow |f(x) - f_k(x)| < \frac{1}{m}.$$



# Lusin

## Definición

Una función  $f : E \rightarrow \mathbb{R}$  tiene la **propiedad C** en  $E$  si dado  $\varepsilon > 0$ , existe un  $F \subseteq E$  tal que

1.  $m(E \setminus F) < \varepsilon$
2.  $f$  es continua relativa a  $F$ . Es decir  $f : F \rightarrow \mathbb{R}$  es continua.

En este caso si  $\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \subseteq F$  con  $x_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} x \in F$ , entonces  $\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = f(x)$ . Vamos a mostrar que esta condición es equivalente a la medibilidad de  $f$ .

# Funciones Simples

## Lema

*Sea  $\phi$  una función simple y medible. Entonces  $\phi$  tiene la propiedad C.*

- Sea  $\phi(x) = \sum_{k=1}^m b_k \mathbf{1}_{B_k}(x)$  con  $B_i \cap B_j = \emptyset$  y  $b_i \neq b_j$  si  $i \neq j$ .
- Dado  $\varepsilon > 0$ , tome  $F_\ell \subseteq E_\ell$  cerrado tal que  $m(E_\ell \setminus F_\ell) < \frac{\varepsilon}{m}$ .
- Entonces  $F = \bigcup_{\ell=1}^m F_\ell$  es cerrado y  $m(E \setminus F) < \varepsilon$ .

# Continuamos la Prueba

- Sea  $\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \subseteq F$  tal que  $x_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} y \in F_{\ell_0}$ .
- Dado  $\ell \neq \ell_0$ , entonces  $\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \cap F_{\ell}$  es finito.
- En caso contrario, existe  $\{x_{n_k}\}_{k=1}^{\infty} \subseteq F_{\ell}$  con  $x_{n_k} \xrightarrow{n_k \rightarrow \infty} y$ .  
Es decir  $y \in F_{\ell}$ , lo que nos lleva a una contradicción.
- Por lo tanto  $\exists k_0$  tal que  $x_n \in F_{\ell_0}$  para  $n \geq k_0$ . Entonces  $\phi(x_n) = a_{\ell_0} = \phi(y)$ .

# El Teorema

## Teorema (Lusin)

*Sea  $f : E \rightarrow \mathbb{R}$  con  $E$  medible. Entonces  $f$  es medible si y sólo si  $f$  tiene la propiedad C en  $E$ .*

Sea  $f : E \rightarrow \mathbb{R}$  medible, entonces existe  $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$  una sucesión de funciones simples y medibles tales que  $\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = f(x)$  c.p.d. en  $E$ .

Sabemos que existe  $F_k \subseteq E$  cerrado que satisface:

1.  $m(E \setminus F_k) < \frac{\varepsilon}{2^{k+1}}$ .
2.  $f_k$  es continua relativa a  $F_k$ .

# El Caso de Medida Finita

Si  $m(E) < \infty$ , entonces por el teorema de Egorov existe  $F_0 \subseteq E$  tal que

$$m(E \setminus F_0) < \frac{\varepsilon}{2}, \quad f_k \xrightarrow[k \rightarrow \infty]{} f \text{ (unif. en } F_0\text{)}.$$

# Resumen

- El teorema 1 de Egorov y el lema 1 para probarlo.
- La propiedad  $C_1$  y el lema 2 que garantiza que las funciones simples cumplen dicha propiedad
- El teorema 2 de Lusin

# Ejercicios

- Lista 16
  - El ejercicio 1 en medio de la prueba del lema previo a Egorov.

# Lecturas adicionales I



S.Cambronero.  
*Notas MA0505.*  
20XX.



I.Rojas  
*Notas MA0505.*  
2018.