Teoremas de Egorov y Luisin

Sean $f_n : E \to \mathbb{R}$ medibles, tales que $f_n \xrightarrow[n\to\infty]{} f$ c.p.d en E.

Sabemos que no se puede esperar en general que $f_n \to f$ uniformemente en compactos.

Teorema: Sea $E \subseteq \mathbb{R}^d$ con $m(E) < \infty$. Si $|f(x)| \neq +\infty$ c.p.d en E, entonces dado $\varepsilon > 0$, existe $F_\varepsilon \subseteq E$ cerrado que satisface:

(i) $m(E \setminus F_\varepsilon) < \varepsilon$

(ii) $f_n \xrightarrow[n\to\infty]{} f$ uniformemente en F_ε

(Egorov)

Comentario: Sea $E = \mathbb{R}^d$ y $f_n(x) = \mathbb{1}_{B(0,n)}(x)$, entonces

$$f_n(x) \xrightarrow[n\to\infty]{} 1$$

puntualmente.

Ahora si F no es acotado, existe x_n t.q.

$$|1 - f_n(x)| = 1$$

Si F es cerrado y $m(\mathbb{R}^d \setminus F) \neq +\infty$ ent F no es acotado

Antes de probar el Teorema de Egorov, vamos a demostrar el siguiente lema.

Lema: Dado $\varepsilon>0$ y $\eta>0$, entonces existen $F \subseteq E$ cerrado y $n_0 \geq 0$ que satisfacen ($n_0 = n_0(\varepsilon,\eta)$)

(i) $m(E \setminus F) < \eta$

(ii) $|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$ si $x \in F$ y $n \geq n_0$

Dba: Sea

$$\tilde{E} = \{x \in E : \lim_{n\to\infty} f_n = f \text{ y } |f| < \infty\}$$

Sean $\varepsilon>0$ y $\eta>0$, defina

$$E_m = \bigcap_{n=m}^{\infty} \{|f - f_n| < \varepsilon\}$$

$$= \{x \in E : |f(x) - f_n(x)| < \varepsilon, \text{ si } n \geq n_0\}$$

Ent E_m es medible y $E_m \subseteq E_{m+1}$.

Ejr: $\bigcup_{m=1}^{\infty} E_m = \tilde{E}$.

Luego $m(\tilde{E}) = \lim_{m\to\infty} m(E_m)$, i.e.

$$\lim_{m\to\infty} m(\tilde{E} \setminus E_m) = \lim_{m\to\infty} \left(m(\tilde{E}) - m(E_m)\right)$$

$$= 0.$$

Sea u_0 tal que

$$m(E \setminus E_u) < \frac{\eta}{2}, \text{ si } u \geq u_0.$$

Ahora si $x \in E_{u_0}$ tenemos que

$$|f(x) - f_u(x)| < \varepsilon$$

para $u \geq u_0$. Finalmente tome

F cerrado, $F \subseteq E_{u_0}$ que

satisface $m(E_{u_0} \setminus F) < \frac{\eta}{2}$.

Entonces

$$m(E \setminus F) \leq m(E \setminus E_{u_0}) + m(E_{u_0} \setminus F) < \eta.$$

③

Prueba Egorov

Dado $\varepsilon > 0$, existen $F_m \subseteq E$ cerrado

y K_m^ε tal que

i) $m(E \setminus F_m) < \frac{\varepsilon}{2^m}$

ii) $|f(x) - f_u(x)| < \frac{1}{m}$ para $u \geq K_m^\varepsilon$, $x \in F_m$

Sea $F = \bigcap_{m=1}^{\infty} F_m$, ent F es cerrado y

$$m(E \setminus F) = m\left(E \cap \bigcup_{m=1}^{\infty} F_m^c\right) \leq \sum_{m=1}^{\infty} m(E \setminus F_m) < \varepsilon.$$

Además si $x \in F$, dado $m \geq 1$ existe u_m

t.q. $|f(x) - f_u(x)| < \frac{1}{m}$ para todo $u \geq u_m$.

Teorema de Lusin

Una función $f: E \to \mathbb{R}$, tiene la propiedad $\mathcal{C}$ en E si dado $\varepsilon > 0$ existe $F \subseteq E$ tal que

(i) $m(E \setminus F) < \varepsilon$

(ii) f es continua relativa a F. Es decir $f: F \to \mathbb{R}$ es continua.

En este caso, si $\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \subseteq F$ con $x_n \xrightarrow[n\to\infty]{} x \in F$, ent $\lim_{n\to\infty} f(x_n) = f(x)$.

Vamos a mostrar que esta condición es equivalente a la medibilidad de f.

Lema: Sea $\phi(x)$ una función simple y medible, ent ϕ tiene la propiedad $\mathcal{C}$.

Pba:

Sea $\phi(x) = \sum_{k=1}^{m} b_k \mathbb{1}_{B_k}(x)$ con $B_i \cap B_j = \emptyset$

y $b_i \neq b_j$ si $i \neq j$.

Dado $\varepsilon > 0$, tome $F_\ell \subseteq E_\ell$ cerrado t.q. $m(E_\ell \setminus F_\ell) < \frac{\varepsilon}{m}$.

Entonces $F = \bigcup_{\ell=1}^{m} F_\ell$ es cerrado

y $m(E \setminus F) < \varepsilon$.

Sea $\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \subseteq F$ t.q.

$$x_n \xrightarrow[n\to\infty]{} y \in F_{\ell_0}.$$

Dado $\ell \neq \ell_0$, ent

$$\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \cap F_\ell$$

es finito, pues en caso contrario

existe $\{x_{n_k}\}_{k=1}^{\infty} \subseteq F_\ell$ con

$$x_{n_k} \xrightarrow[n_k\to\infty]{} y$$

i.e. $y \in F_\ell$. (5)

Por lo tanto existe n_0 tal que

$$x_n \in F_{\ell_0} \quad \text{para } n \geq n_0.$$

Ent $\quad \phi(x_n) = a_{\ell_0} = \phi(y)$. ■

Teorema: Sea $f: E \to \mathbb{R}$ con E medible. Entonces f es medible si: f tiene la propiedad $\mathcal{C}$ en E.

Pba:

Sea $f: E \to \mathbb{R}$ medible, entonces existen $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ funciones simples y medibles tales que $\lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x)$ c.p.d en E.

(6)

Sabemos que existe $F_k \subseteq E$ cerrado que satisface

(i) $m(E \setminus F_k) < \frac{\varepsilon}{2^{k+1}}$

(ii) f_k es continua relativa a F_k.

Asuma primero que $m(E) < \infty$, entonces por el Teorema de Egorov existe $F_0 \subseteq E$ t.q.

$$m(E \setminus F_0) < \frac{\varepsilon}{2}$$

y $f_k \xrightarrow[k\to\infty]{} f$ unif en F_0.

Tomando

$$F := F_0 \cap \bigcap_{k=1}^{\infty} F_k$$

Ent

$$m(E \setminus F) \leq m(E \setminus F_0) + \sum_{k=1}^{\infty} m(E \setminus F_k) < \varepsilon.$$

Como $f_k \xrightarrow[k\to\infty]{} f$ unif en F, se tiene que f es continua en F.

Ahora si $m(E) = +\infty$, sea

$$E_k = E \cap \{x \in \mathbb{R}^d : k-1 \leq |x| < k\}$$

Como $m(E_k) < \infty$, existe

$F_k \subseteq E_k$ tal que

$$m(E_k \setminus F_k) < \frac{\varepsilon}{2^k}$$

y f es continua relative a E_k.

Considere $F = \bigcup_{k=1}^{\infty} F_k$, ent

$$m(E \setminus F) \leq \sum_{k=1}^{\infty} m(E_k \setminus F)$$

$$\leq \sum_{k=1}^{\infty} m(E_k \setminus F_k)$$

$$< \varepsilon.$$

Ahora si $\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \subseteq F$ con

$$x_n \xrightarrow[n \to \infty]{} y \in F$$

Entonces existe k_0 t.q.

$$|x_k| < |y| + 1 \quad \text{para } k \geq k_0,$$

Si $m \geq |y|+1$, entonces

$$x_k \in E_m \quad \text{para } k \geq k_0.$$

y por un argumento anterior, existen

k_1 y l_1 t.q.

$$x_n \in F_{l_1} \quad \text{si } n \geq k_1$$

"$\Leftarrow$" Suponga que f tiene la propiedad $\mathcal{B}$. Entonces para $n \geq 1$ existe $F_n \subseteq E$ que satisface

(i) $m(E \setminus F_n) < \frac{1}{n}$

(ii) f es continua relativa a F_n.

Sea $H = \bigcup_{n=1}^{\infty} F_n$, ent $H \subseteq E$ y $m(E \setminus H) = 0$. (Ejr).

Finalmente

$\{x \in E : f(x) > a\} =$

$\{x \in H : f(x) > a\} \cup \{x \in Z : f(x) > a\} =$

$\bigcup_{n=1}^{\infty} \{x \in F_n : f(x) > a\} \cup$

$\{x \in Z : f(x) > a\}$

que es medible.