La integral de Lebesgue

1

Sea $f: E \to \overline{\mathbb{R}}$ medible con E medible y $f \geq 0$. Defina

$$R(f,E) = \{(x,y) \in \mathbb{R}^{d+1} : x \in E,\ 0 \leq y \leq f(x)\}.$$

Surge la pregunta ¿es $R(f,E)$ medible?

Analicemos el caso

$$f(x) = a \quad \text{en } A \subseteq E,\ a > 0.$$

Entonces

$$\{(x,y) \in \mathbb{R}^{d+1} : x \in E,\ 0 \leq y \leq f(x)\} =$$

$$\{(x,y) \in \mathbb{R}^{d+1} : x \in A,\ 0 \leq y \leq a\}$$

$$\cup$$

$$\{(x,y) \in \mathbb{R}^{d+1} : x \in E \setminus A,\ y = 0\} =$$

$$A \times [0,a] \cup E \setminus A \times \{0\}.$$

Lema: Sea $A \subset E$ medible y $a \geq 0$. Entonces

$$A \times [0,a]$$

es medible, y $m(A \times [0,a]) = a\, m(A)$

Pba Asuma que $m(A) < \infty$

Paso 1: Sea

$$A = [a_1, b_1] \times \dots \times [a_d, b_d]$$

entonces es claro que se cumple el lema

Paso 2: Sea A abierto, entonces existen $I_k = [c_1^k, f_1^k] \times \dots \times [c_d^k, f_d^k]$

t.q.

$$A = \bigcup_{k=1}^{\infty} I_k \quad y$$

además

$$I_k^{\circ} \cap I_j^{\circ} = \emptyset \text{ si } j \neq k.$$

Entonces

$$A \times [0,a] = \bigcup_{k=1}^{\infty} I_k \times [0,a], \text{ es medible.}$$

Como $(I_k \times [0,a])^{\circ} \cap (I_j \times [0,a])^{\circ} = \emptyset$, para $k \neq j$. tenemos que

$$m(A \times [0,a]) = \sum_{i=1}^{\infty} m(I_i \times [0,a])$$

$$= a \sum_{i=1}^{\infty} m(I_i)$$

$$= a\, m(A).$$

Paso 3: Sea $A = \bigcap_{j=1}^{\infty} G_j$ un G_δ, con G_i abierto para $i \geq 1$, y

$$G_{i+1} \subseteq G_i$$

(¿Por qué se puede asumir esto?)

Luego

$$A \times [0,a] = \bigcap_{i=1}^{\infty} G_i \times [0,a]$$

con

$$G_{i+1} \times [0,a] \subseteq G_i \times [0,a]$$

medibles con medida finita.

Entonces.

$$m(A \times [0,a]) =$$

$$\lim_{i \to \infty} m(G_i \times [0,a]) =$$

$$\lim_{i \to \infty} a\, m(G_i) =$$

$$a\, m(A).$$

Paso 4: Sea $A = H \setminus Z$ con H de tipo G_δ y Z de medida cero. El paso anterior implica que

$H \times [0,a]$ es medible

y $m(H \times [0,a]) = a\, m(H)$

Ejer: $m_e(Z \times [0,a]) = 0$

Entonces

$$A \times [0,a] = (H \times [0,a]) \setminus (Z \times [0,a]).$$

y $m(A \times [0,a]) = m(H \times [0,a]) = a\, m(H) = a\, m(A)$

4

Finalmente si $m(A) = \infty$

Sean $A_k = A \cap B(0,k)$, ent

$A = \bigcup_{k=1}^{\infty} A_k$, con $A_k \subseteq A_{k+1}$

medibles y acotados.

Por los argumentos anteriores

$A_k \times [0,a] \subseteq A_{k+1} \times [0,a]$

son medible y

$$m(A_k \times [0,a]) = a\, m(A_k)$$

Entonces

$$m(A \times [0,a]) = m\left(\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k \times [0,a]\right)$$

$$= \lim_{k \to \infty} m(A_k \times [0,a])$$

$$= \lim_{k \to \infty} a\, m(A_k)$$

$$= a\, m(A) \blacksquare$$

Sea $f: E \to \mathbb{R}$ medible, con $f \geq 0$. Entonces existe una sucesión creciente de funciones simples $\{\phi_k\}_{k=1}^{\infty}$ que satisfacen

$$\lim_{k\to\infty} \phi_k(x) = f(x) \quad \text{c.p.d}$$

en E. Luego si $0 \leq y < f(x)$ existe ϕ_k simple t.q.

$$0 \leq y \leq \phi_k(x).$$

Entonces

$$R(f,E) = \bigcup_{k=1}^{\infty} R(\phi_k, E) \cup \{(x,y) \in \mathbb{R}^{d+1} : x \in E,\ f(x) = y\}$$

Concluimos que $R(f,E)$ es medible si:

(a) $R(\phi_k, E)$ es medible

(b) $\Gamma(f,E) = \{(x, f(x)) : x \in E\}$ es medible.

Lema: Sea $f: E \to \mathbb{R}$ medible entonces

$$m_e(\Gamma(f,E)) = 0$$

Pba: Asume que $m(E) < \infty$. Sea $\varepsilon > 0$ y $E_n = \{x \in E : n\varepsilon \leq f(x) < (n+1)\varepsilon\}$, ent $E = \bigcup_{n=1}^{\infty} E_n$. Note que

$$\Gamma(f, E_n) \subseteq (E_n \times [0, (n+1)\varepsilon]) \setminus (E_n \times [0, n\varepsilon]).$$

Por lo tanto

$$m_e(\Gamma(f, E_n)) \leq m(E_n \times [0, (n+1)\varepsilon]) - m(E_n \times [0, n\varepsilon]) \leq \varepsilon\, m(E)$$

$\therefore$ $m_e(\Gamma(f, E_n)) = 0$

$\therefore$ $m_e\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} \Gamma(f, E_n)\right) = m_e(\Gamma(f, E)) = 0$

El resto de la prueba se deja como ejercicio $\blacksquare$

Finalmente, si

$$\phi_n(x) = \sum_{i=1}^{m} a_i \mathbb{1}_{A_i}$$

con $a_i \neq a_j$, $A_i \cap A_j = \emptyset$ para $i \neq j$, y $E = \bigcup_{i=1}^{m} A_i$.

tenemos que

$$\{(x,y) \in \mathbb{R}^{d+1} : x \in E, 0 \leq y \leq \phi_u(x)\}$$

$$= \bigcup_{u=1}^{m} \{(x,y) \in \mathbb{R}^{d+1} : x \in A_u, 0 \leq y \leq a_u\}$$

que es un conjunto medible.

Teorema: Sea $f : E \to \mathbb{R}$ medible con E medible. Ent

$$R(f,E) \subseteq \mathbb{R}^{d+1}$$

es medible

Def: Dada $f : E \to \mathbb{R}$ medible tal que $f \geq 0$, definimos su integral de Lebesgue por

$$\int_E f \, dx = m(R(f,E)).$$

Note que si

$$f(x) = \sum_{i=1}^{m} a_i \mathbb{1}_{A_i} \quad \text{con } A_i \cap A_j = \emptyset$$

para $i \neq j$. Entonces, si $a_i \neq 0$,

$$\int_E f(x)\, dx = \sum_{i=1}^{m} a_i m(A_i).$$

pues

$$m(\{(x,y): x\in E,\ 0\le y\le f(x)\})$$

8

$$= m(\{f=0\}\times\{0\}) +$$

$$m\left(\bigcup_{i=1}^{m}\{(x,y): x\in A_i,\ 0\le y\le a_i\}\right)$$

$$= \sum_{i=1}^{m} m(A_i)\,a_i .$$

Propiedades de la integral

Teorema: Sean $f: E \to [0,+\infty]$
$g: E \to [0,+\infty]$

medibles.

(i) Si $0\le g\le f$, entonces

$$\int_E g(x)\,dx \le \int_E f(x)\,dx .$$

(ii) Si $\int_E f(x)\,dx < \infty$, entonces

$f \neq +\infty$ c.p.d.

(iii) Si $E_1 \subseteq E_2 \subseteq E$, entonces

$$\int_{E_1} f(x)\,dx \le \int_{E_2} f(x)\,dx .$$

siempre que E_i sean medibles

Pba: Dado que $0 \leq g \leq f$, tenemos que

$$\{(x,y) : x \in E, 0 \leq y \leq g(x)\} \subseteq \{(x,y) : x \in E, 0 \leq y \leq f(x)\}.$$

Luego

$$R(g, E) \leq R(f, E).$$

Por otro lado, si $E_1 \subseteq E_2$, entonces

$$\mathbb{1}_{E_1} f \leq \mathbb{1}_{E_2} f.$$

Como

$$\{(x,y) : x \in E, 0 \leq y \leq \mathbb{1}_{E_i} f\} =$$

$$\left(E \setminus E_i \times \{0\}\right) \cup$$

$$\{(x,y) : x \in E_i, 0 \leq y \leq f\}.$$

Se tiene que

$$R(\mathbb{1}_{E_i} f, E) = R(f, E_i), \text{ i.e.}$$

$$\int_{E_1} f(x)\,dx \leq \int_{E_2} f(x)\,dx.$$

Por otro lado si

$$E_1 = \{f = +\infty\}$$

tome

$$g(x) = n\, \mathbb{1}_{E_1}(x)$$

ent

$$g(x) \leq f(x)$$

para todo $x \in E$. Luego

$$n\, m(E_1) \leq \int_E f(x)\,dx,$$

y por lo tanto $m(E_1) = 0$. ∎

Teorema: (T.C.M.)

Sean $\{f_k\}_{k=1}^{\infty}$ una sucesión de funciones medibles, tal que

$$f_k(x) \leq f_{k+1}(x)$$

para todo $x \in E$. Si

$$\lim_{k\to\infty} f_k(x) = f(x) \quad \text{c.p.d en } E.$$

Entonces

$$\lim_{k\to\infty} \int_E f_k(x)\,dx = \int_E f(x)\,dx$$

Pba: Recordemos que

$$R(f,E) = \Gamma(f,E) \cup \bigcup_{k=1}^{\infty} R(f_k,E)$$

Como

$$R(f_k, E) \subseteq R(f_{k+1}, E)$$

se tiene que

$$m(R(f,E)) = \lim_{k \to \infty} m(R(f_k, E))$$

En el caso de que

$$E = \bigcup_{i=1}^{\infty} E_i \text{ , medibles}$$

con $E_i \cap E_j = \phi$ si $i \neq j$.

Se tiene que

$$R(f,E) = \dot{\bigcup_{k=1}^{\infty}} R(f, E_k)$$

Luego

$$\int_E f(x)\,dx = m(R(f,E)) = \sum_{k=1}^{\infty} m(R(f,E_k)) = \sum_{k=1}^{\infty} \int_{E_k} f(x)\,dx.$$

Esta formula es válida también para uniones finitas pues

$$R(f, \phi) = \phi.$$

Dada $f: E \to [0,+\infty)$ medible, definimos

$$\sum\left(f, \{E_i\}_{i=1}^{N}\right) = \sum_{i=1}^{N} \left(\inf_{E_i} f\right) \mathbb{1}_{E_i}$$

<u>Teorema</u>: Sea $f: E \to \mathbb{R}$ medible y no negativa. Entonces

$$\int_E f(x)\,dx = \sup_{E = \dot{\bigcup}_{i=1}^{N} E_i} \sum_{i=1}^{N} \left(\inf_{E_i} f\right) m(E_i)$$

<u>Pba</u>:

Dados $E_1, \dots, E_N$ tales que $E = \dot{\bigcup}_{i=1}^{N} E_i$ con E_i medibles. Tenemos que

$$\sum\left(f, \{E_i\}_{i=1}^{N}\right) \leq f \text{, i.e.}$$

$$\sum_{i=1}^{N} \left(\inf_{E_i} f\right) m(E_i) \leq \int_E f(x)\,dx.$$

Ahora dado $k \geq 1$, si

$$E_k^0 = \{f \geq k\}$$

$$E_k^i = \left\{ \frac{i-1}{2^k} \leq f(x) < \frac{i}{2^k} \right\}$$

si $1 \leq i \leq k2^k$.

Tenemos que

$$E = \bigcup_{i=0}^{n2^n} E_n^i$$

Si

$$f_n(x) = n \, \mathbb{1}_{E_n^0} + \sum_{i=1}^{n2^n} \frac{i-1}{2^n} \mathbb{1}_{E_n^i}$$

Ent
- $f_n \le f_{n+1}$
- $\lim_{n\to\infty} f_n = f$

por el T.C.M

$$\lim_{n\to\infty} \int_E f_n(x)\,dx = \int_E f(x)\,dx$$

Como

$$f_n \le \Sigma(f, \{E_n^i\}_{i=1}^{n2^n}) \text{ , ent}$$

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{i=0}^{n2^n} (\inf_{E_i} f) \mathbb{1}_{E_n^i} = \int_E f(x)\,dx$$

Note que este lema implica

<u>Corolario</u>

Sea $f: E \to \mathbb{R}$ medible. Entonces

$$\int_E f(x)dx = \sup\left\{ \int_E \phi(x)dx : \phi \text{ es simple y } \phi \le f \text{ en } E \right\}.$$

Lema: Sea $f: E \to [0,+\infty)$, si $m(E)=0$, ent

$$\int_E f(x)dx = 0.$$

Pba: Sean $f_n = \sum_{i=1}^{m} a_i \mathbb{1}_{A_i}$ simples y medibles, t.q.

$$\int_E f_n dx \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \int_E f dx.$$

Note que, si $A_i \cap A_j = \emptyset$ para $i \neq j$

$$\int_E f_n(x)dx = \sum_{i=1}^{m} a_i \, m(A_i)$$

Como $A_i \subset E$, tenemos que

$$m(A_i) = 0$$

para todo $1 \leq i \leq m$

Teorema: Sean $f: E \to [0,+\infty]$ y $g: E \to [0,+\infty]$ tales que

$$g(x) \leq f(x)$$

c.p.d en E. Entonces

$$\int_E g(x)\,dx \leq \int_E f(x)dx$$

En particular, si $f=g$ c.p.d en E ent

$$\int_E g(x)dx = \int_E f(x)dx.$$

Pba: Sea

$$A = \{x \in E : g(x) \leq f(x)\}.$$

Entonces $E = A \cup Z$ con $m(Z)=0$

Luego

$$\int_E f(x)\,dx = \int_A f(x)\,dx + \int_Z f(x)\,dx$$

$$\geq \int_A g(x)\,dx$$

$$= \int_A g(x)\,dx + \int_Z g(x)\,dx$$

$$= \int_E g(x)\,dx.$$

Sea $\alpha > 0$, entonces

$$\alpha\, \mathbb{1}_{\{f \geq \alpha\}} \leq f\, \mathbb{1}_{\{f \geq \alpha\}}$$

$$\leq f.$$

Si $f : E \longrightarrow [0, +\infty)$, es medible

Entonces

$$\alpha\, m(\{f \geq \alpha\}) \leq$$

$$\int_{\{f \geq \alpha\}} f(x)\,dx \leq$$

$$\int_E f(x)\,dx.$$

$$\boxed{m(\{f \geq \alpha\}) \leq \frac{1}{\alpha} \int_E f(x)\,dx}$$

Markov

Ahora si $f : E \to [0, +\infty]$, es medible

y $\int_E f(x)\,dx = 0$, tenemos

$$m(\{f \geq \alpha\}) = 0$$

para todo $\alpha \geq 0$.

Luego

$$\{f > 0\} = \bigcup_{k=1}^{\infty} \{f \geq \tfrac{1}{k}\}$$

tiene medida cero, i.e.

$f = 0$ c.p.d.

Corolario: Sea $f : E \to [0, +\infty]$ tal que

$$\int_E f(x)\,dx = 0.$$

Entonces $f = 0$ c.p.d.

Por otro lado si $c > 0$, vamos a probar que

$$\int_E (c f(x) + g(x))\,dx =$$

$$c \int_E f(x)\,dx + \int_E g(x)\,dx.$$

Sea f_n una sucesión de funciones simples t.q. $0 \leq f_n \leq f_{n+1}$

y $\lim_{n\to\infty} f_n = f$.

Si $f_n = \sum_{i=1}^{m_n} a_i \mathbb{1}_{A_i}$, tenemos que

$$c f_n = \sum_{i=1}^{m_n} c a_i \mathbb{1}_{A_i} \xrightarrow[n\to\infty]{} c f(x)$$

y $c f_n \leq c f_{n+1}$

Entonces

$$\int_E cf(x)dx = \lim_{n\to\infty} \int_E cf_n(x)\,dx$$

$$= \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{m_n} ca_i\, m(A_i)$$

$$= c\lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{m_n} a_i\, m(A_i)$$

$$= c\int_E f(x)dx.$$

Teorema:

Sea $f: E \to [0,+\infty]$

$g: E \to [0,+\infty]$

$c \geq 0.$

Entonces

$$\int_E (cf(x)+g(x))dx =$$

$$c\int_E f(x)dx + \int_E g(x)dx.$$

Pba: Falta mostrar la aditividad

Sea g_n una sucesión de funciones simples t.q. $g_n \leq g_{n+1}$ y

$$\lim_{n\to\infty} g_n = g.$$

Ent $(g_n+f_n) \leq (g_{n+1}+f_{n+1})$ y

$$\lim_{n\to\infty}(g_n+f_n) = g+f$$

H.q.m $\displaystyle\int_E (g_n(x)+f_n(x))\,dx =$

$$\int_E g_n(x)\,dx + \int_E f_n(x)\,dx$$

Si $g_u = \sum_{i=1}^{l_u} b_i \mathbb{1}_{B_i}$, con

$E = \dot{\bigcup}_{i=1}^{l_u} B_i = \dot{\bigcup}_{j=1}^{m_u} A_j$. Tenemos

$$g_u(x) + f_u(x) =$$

$$\sum_{i=1}^{l_u} \sum_{j=1}^{m_u} (a_j + b_i) \mathbb{1}_{A_j \cap B_i}.$$

Ahora

$$\sum_{i=1}^{l_u} \sum_{j=1}^{m_u} b_i m(A_j \cap B_i) =$$

$$\sum_{i=1}^{l_u} b_i m\left(B_i \cap \bigcup_{j=1}^{m_u} A_j \right) =$$

$$\sum_{i=1}^{l_u} b_i m(B_i \cap E)$$

$$= \sum_{i=1}^{l_u} m(B_i) b_i .$$

De igual forma se prueba que

$$\sum_{j=1}^{m_u} a_j \sum_{i=1}^{l_u} m(B_i \cap A_j) =$$

$$\sum_{j=1}^{m_u} m(A_j) . a_j .$$

Facilmente se deduce que.

$$\int_E (g_u(x) + f_u(x)) dx =$$

$$\int_E g_u(x) dx + \int_E f_u(x) dx.$$

Sean $f: E \to [0, +\infty)$

$g: E \to [0, +\infty]$

medibles tales que $0 \leq g \leq f$.

Entonces

$$\int_E f(x)\,dx = \int_E \left[(f(x) - g(x)) + g(x) \right] dx$$

$$= \int_E (f(x) - g(x))\,dx + \int_E g(x)\,dx.$$

Luego si $\int_E g(x)\,dx < \infty$, ent

$$\int_E (f(x) - g(x))\,dx = \int_E f(x)\,dx - \int_E g(x)\,dx$$

Sean $f_k: E \to [0, +\infty]$ medibles para $1 \leq k$. Entonces, si

$$g_m = \sum_{k=1}^{m} f_k,$$

tenemos que $0 \leq g_m \leq g_{m+1}$. Luego

$$\int_E \left(\sum_{k=1}^{\infty} f_k \right) dx = \int_E \lim_{m \to \infty} g_m(x)\,dx$$

$$= \lim_{m \to \infty} \int_E \sum_{k=1}^{m} f_k(x)\,dx$$

$$= \lim_{m \to \infty} \sum_{k=1}^{m} \int_E f_k(x)\,dx$$

$$= \sum_{k=1}^{\infty} \int_E f_k(x)\,dx$$

Sea $E = [0,1]$, defina

$$f_n(x) = \begin{cases} n & \text{si } 0 \le x \le \frac{1}{n} \\ 0 & \text{si } \frac{1}{n} \le x \le 1 \end{cases}$$

Entonces

$$\int_E f_n(x)\,dx = 1$$

pero $\lim\limits_{n\to\infty} f_n = 0$.

¿ Cuándo $\lim\limits_{n\to\infty} \int_E f_n(x)\,dx$

$= \int_E \lim\limits_{n\to\infty} f_n(x)\,dx$?

Teorema (Fatou)

Sea $f_n : E \to [0,+\infty]$ una sucesión de funciones no negativas. Entonces

$$\int_E \liminf_{n\to\infty} f_n\,dx \le \liminf_{n\to\infty} \int_E f_n\,dx.$$

Pba:

Recordemos que

$$\liminf_{n\to\infty} f_n = \sup_{n\ge 1} \inf_{m\ge n} f_m$$
$$= \lim_{n\to\infty} \inf_{m\ge n} f_m$$

Como $\inf\limits_{m\ge n} f_m = g_n$ es creciente

Entonces

$$\int_E \left(\liminf_{n\to\infty} f_n\right) dx =$$

$$\lim_{n\to\infty} \int_E \inf_{m\geq n} f_m \, dx \, .$$

Note que

$$\inf_{m\geq n} f_m \leq f_n \quad , \text{ para } n\geq 1.$$

Entonces

$$\int_E \left(\inf_{m\geq n} f_m(x)\right) dx \leq$$

$$\int_E f_n(x) \, dx \quad , \text{ para } n\geq m.$$

Entonces

$$\liminf_{n\to\infty} \int_E \left(\inf_{m\geq n} f_m\right) dx \leq$$

$$\liminf_{n\to\infty} \int_E f_n \, dx.$$

Como

$$\liminf_{n\to\infty} \int_E g_n \, dx = \lim_{n\to\infty} \int_E g_n \, dx$$

por monotonía. Entonces

$$\int_E \liminf_{n\to\infty} f_n \, dx \leq \liminf_{n\to\infty} \int_E f_n \, dx,$$

Note que si $f_n : E \to [0,+\infty]$ es medible y

$$\int_E f_n(x)\,dx \leq M$$

Entonces

$$\int_E f(x)\,dx \leq M.$$

Teorema: Convergencia Dominada

Sea $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ una sucesión de funciones medibles no negativas. Si

(a) $\lim\limits_{n\to\infty} f_n = f$ c.p.d. en E

(b) Si $0 \leq f_n \leq \phi$ c.p.d. para todo $n \geq 0$, y

$$\int_E \phi(x)\,dx < \infty$$

Entonces

$$\lim_{n\to\infty} \int_E f_n(x)\,dx = \int_E f(x)\,dx.$$

Pba: Por el Lema de Fatou.

$$\int_E f(x)dx \leq \liminf_{n\to\infty} \int_E f_n\,dx$$

Considere $h_n = \phi - f_n$, entonces

$$\int_E \liminf_{n\to\infty} (\phi - f_n)\,dx \leq$$

$$\liminf_{n\to\infty} \int (\phi - f_n)\,dx.$$

Note que

$$\liminf_{n\to\infty} (\phi - f_n) = \phi - f .$$

Por otro lado

$$\liminf_{n\to\infty} \int_E (\phi - f_n)(x)\,dx =$$

$$\liminf_{n\to\infty} \left(\int_E \phi(x)\,dx - \int_E f_n(x)\,dx \right) =$$

$$\int_E \phi(x)\,dx - \limsup_{n\to\infty} \int_E f_n(x)\,dx .$$

(¿Por qué?)

Concluimos que

$$\limsup_{n\to\infty} \int_E f_n(x)\,dx \le \int_E f(x)\,dx$$