

Medida exterior

(1)

Considere el segmento



La longitud del segmento es

$$b-a = \text{longitud}([a, b]) \\ = \lambda([a, b])$$

Si tenemos intervalos disjuntos

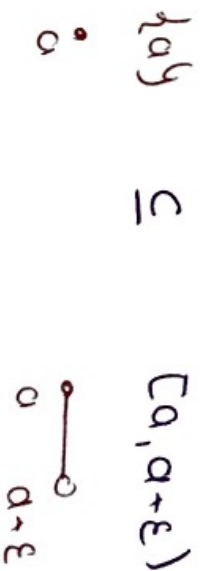
$$[a_1, b_1] \quad [a_2, b_2] \quad \dots \quad [a_n, b_n]$$



La longitud de los intervalos es

$$\sum_{i=1}^n b_i - a_i.$$

¿Cuál es la longitud de un punto?

$$[a] \subseteq [a, a+\varepsilon]$$


Entonces

$$\lambda([a]) \leq \varepsilon \quad \text{para todo } \varepsilon > 0$$

$$\therefore \lambda(\{a\}) = 0$$

(2)

Sea $\emptyset \cap [0, 1] = \{q_n\}_{n=1}^{\infty}$.

Entonces

$$\begin{aligned} \lambda\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} \{q_n\}\right) &= \sum_{n=1}^{\infty} \lambda(\{q_n\}) \\ &= 0. \end{aligned}$$

¿ Cuáles la longitud
de $[0, 1] \cap Q$?

Note que

$$\int_0^b dx = b - a$$

De hecho si $[a, b] \subseteq [0, 1]$,
entonces

$$(i) \quad b - a = \int_0^1 \mathbb{1}_{[a, b]}(x) \, dx$$

$$(ii) \quad \sum_{n=1}^{\infty} (b_n - a_n) = \int_0^1 \sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{1}_{[a_n, b_n]}(x) \, dx$$

$$= \int_0^1 \mathbb{1}_{\bigcup_{n=1}^{\infty} [a_n, b_n]}(x) \, dx$$

$$(iii) \quad 0 = \int_0^1 \mathbb{1}_{\{0\}}(x) \, dx.$$

Volviendo a la pregunta planteada. 3

$$\int_0^1 \mathbb{1}_{\bigcup_{k=1}^n [q_{k-1}, q_k)}(x) dx = 0$$

Note que

$$\mathbb{1}_{[0,1) \cap \mathbb{Q}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{1}_{\bigcup_{k=1}^n [q_{k-1}, q_k)}$$

Luego si $\mathbb{1}_{[0,1) \cap \mathbb{Q}}$ fuera

integrable, y se pudieran tomar

límites, tenemos que

$$\int_0^1 \mathbb{1}_{\mathbb{Q} \cap [0,1]}(x) dx$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^1 \mathbb{1}_{\bigcup_{k=1}^n [q_{k-1}, q_k)}(x) dx$$

$$= 0.$$

¿Cuál es la integral usada?

Recordemos que $\mathbb{1}_{\mathbb{Q} \cap [0,1]}$

no es Riemann integrable.

(4)

Definición de medida exterior

Consideremos

$$S = \{ [a, b) : a < b \} \cup \{ (-\infty, b) : b \in \mathbb{R} \} \\ \cup \{ (a, +\infty) : a \in \mathbb{R} \}$$

$$\mathcal{M}_1 = \left\{ \bigcup_{n=1}^{\infty} I_n : 1 \leq n < \infty \right\}$$

Note que $[a, b] \notin \mathcal{M}_1$, pero

$$\mathbb{R} = (-\infty, b] \cup [b, +\infty) \in \mathcal{M}_1.$$

Por lo tanto, dado $A \subseteq \mathbb{R}$,
existe $B \in \mathcal{M}_1$ t.q. $A \subseteq B$

Definimos

$$m^* : \mathcal{M}_1 \longrightarrow \mathbb{R}, \text{ por}$$

$$(1) \quad m^*([a, b]) = b - a \quad \text{si } a < b.$$

$$(2) \quad m^*([a, +\infty)) = m^*((-\infty, b]) \\ = +\infty$$

$$(3) \quad m^*\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} I_i\right) = \sum_{i=1}^{\infty} b_i - a_i$$

$$\text{Si } I_i = [a_i, b_i)$$

¿Esta m^* bien definida?