Compacidad

Dado $C \subseteq X$, decimos que C es secuencialmente compacto si toda sucesión $\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \subseteq C$ tiene una subsucesión convergente en C.

Note que si $\{x_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$ converge a x_0, tenemos que dado $\varepsilon > 0$ existe k_0 t.q.

$$d(x_{n_k}, x_0) < \varepsilon$$

si $k \geq k_0$

Es decir,

$$x_{n_k} \in B(x_0, \varepsilon)$$

para todo $k \geq k_0$. Por lo tanto

$$B(x_0, \varepsilon) \cap \{x_m : m \geq k\} \neq \emptyset$$

para todo $k \geq 1$

$$\therefore \; x_0 \in \overline{\{x_m : m \geq k\}} \quad \forall k \geq 1.$$

$$\therefore \; x_0 \in \bigcap_{k=1}^{\infty} \overline{\{x_m : m \geq k\}}.$$

Por otro lado, sea

$$x_0 \in \bigcap_{k=1}^{\infty} \overline{\{x_m : m \geq k\}}$$

Tome

$$x_{k_1} \in B(x_0, 1) \cap \{x_m : m \geq 1\}.$$

$$x_{k_2} \in B(x_0, \tfrac{1}{2}) \cap \{x_m : m \geq k_1 + 1\}$$

$$\vdots$$

$$x_{k_n} \in B(x_0, \tfrac{1}{n}) \cap \{x_m : m \geq k_{n-1} + 1\}$$

Entonces $\displaystyle x_{k_n} \underset{n \to \infty}{\longrightarrow} x_0$

y $\{x_{k_n}\}_{n=1}^{\infty}$ es una subsucesión de $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$

Lema: Dado (X, d) e.m y $C \subseteq X$ son equivalentes

(i) C es secuencialmente compacto

(ii) $C \cap \bigcap_{k=1}^{\infty} \overline{\{x_m : m \geq k\}} \neq \emptyset$ para toda $\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \subseteq C$.

Sea $z \in \overline{C}$, entonces existe $\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \subseteq C$ t.q.

$$x_n \underset{n \to \infty}{\longrightarrow} z$$

Si C es s.compacto, existe una subsucesión $\{x_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$ que converge a un punto de C, i.e. $z \in C$.

Lema: Sea C secuencialmente compacto, ent C es cerrado y acotado.

Pba: Ej: mostrar que es acotado

Def: Una colección $\mathcal{U} = \{U_\alpha : \alpha \in \Lambda\}$ de abiertos (i.e U_α es abierto para todo α), es un recubrimiento de un conjunto A si

$$A \subseteq \bigcup_{\alpha \in \Lambda} U_\alpha$$

Lema: Sea C s.c. y $\mathcal{U}$ un recubrimiento de C. Entonces existe $\varepsilon > 0$ tal que para cada $x \in C$ existe $U_\alpha \in \mathcal{U}$ que satisface

$$B(x, \varepsilon) \subseteq U_\alpha$$

Prueba: Asuma que para todo $\varepsilon > 0$ existe $x_\varepsilon \in C$ t.q.

$$B(x_\varepsilon, \varepsilon) \subsetneq U_\alpha$$

para todo $\alpha \in \Lambda$.

En particular existe $\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \subseteq C$ t.q.

$$B(x_n, \tfrac{1}{n}) \subsetneq U_\alpha \ , \ \forall \alpha \in \Lambda$$

Como G' es s.c., existe (4)

$\{x_{n_k}\}_{k=1}^{\infty} \subseteq G'$ y $x_0 \in G'$

tal que

$$x_{n_k} \underset{k \to \infty}{\longrightarrow} x_0$$

Además, como $\mathcal{U}$ es un recubrimiento existe U_{α_0} t.q.

$$x_0 \in U_{\alpha_0}.$$

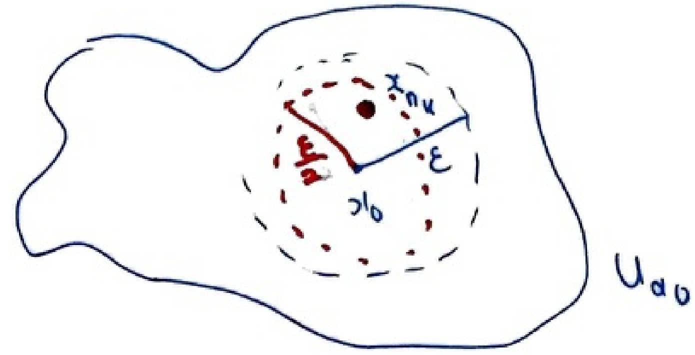
Sea $\varepsilon > 0$ t.q.

$$B(x_0, \varepsilon) \subseteq U_{\alpha_0}$$

Tome k_0 t.q.

$$d(x_{n_k}, x_0) < \frac{\varepsilon}{2}$$

si $k \geq k_0$



Utilizando los argumentos usuales podemos probar que

$$B(x_{n_k}, \tfrac{1}{n_k}) \subseteq B(x_0, \varepsilon)$$

si $\frac{1}{n_k} < \frac{\varepsilon}{2}$, i.e

$$B(x_{n_k}, \tfrac{1}{n_k}) \subseteq B(x_0, \varepsilon) \subseteq U_{\alpha_0}$$

(5)

Def: Un conjunto $G \subseteq X$ es compacto si dada una colección de abiertos $\mathcal{U}$ de X que recubre G, existen $U_{\alpha_1}, \dots, U_{\alpha_m} \in \mathcal{U}$ tales que

$$G \subseteq \bigcup_{i=1}^{m} U_{\alpha_i}$$

Es decir, dado cualquier recubrimiento por abiertos de G existe una colección finita que recubre

Teorema: Dado $G \subseteq X$. Son equivalentes

(i) G es secuencialmente compacto

(ii) G es compacto

Prueba:

"$\Longrightarrow$" Sea $\mathcal{U}$ un recubrimiento de G. Tome $x_1 \in G$, sabemos que existe $\varepsilon > 0$ y $\alpha_1 \in \Lambda$ tal que

$$B(x_1, \varepsilon) \subseteq U_{\alpha_1}.$$

Si $G \subseteq B(x_1, \varepsilon) \subseteq U_{\alpha_1}$, tenemos un recubrimiento finito. De lo contrario sea

$$x_2 \in G \setminus B(x_1, \varepsilon).$$

Entoces existe α_2 tal que

$$B(x_2, \varepsilon) \subseteq U_{\alpha_2}$$

En general, si $C \underset{\neq}{\subseteq} \bigcup_{i=1}^{m} B(x_i, \varepsilon)$

tome

$$x_{m+1} \in C \setminus \bigcup_{i=1}^{m} B(x_i, \varepsilon)$$

Note que

$$d(x_i, x_j) \geq \varepsilon$$

siempre que $i \neq j$. Por lo tanto si podemos iterar indefinidamente este procedimiento, tendriamos una sucesión $\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \subseteq C$ que satisface que cualquier subsucesión no es de Cauchy, i.e. no puede tener subsucesiones convergentes

"$\Leftarrow$" Sea $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ una sucesión en C, y considere

$$U_n = \left(\overline{\{x_m : m \geq n\}} \right)^c$$

Ent

$$X \setminus \bigcup_{n=1}^{\infty} U_n = \bigcap_{n=1}^{\infty} \overline{\{x_m : m \geq n\}}$$

Luego, si asumimos que $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ no tiene una subsucesión convergente en C, sabemos que

$$C \cap \bigcap_{n=1}^{\infty} \overline{\{x_m : m \geq n\}} = \phi$$

Entonces

$$C \subseteq \left(\bigcap_{n=1}^{\infty} \overline{\{x_m : m \geq n\}} \right)^c$$
$$= \bigcup_{n=1}^{\infty} U_n$$

Por compacidad existen $U_{\alpha_1}, \dots, U_{\alpha_n}$ tal que

$$C \subseteq \bigcup_{i=1}^{n} U_{\alpha_i}$$

En particular si $m_0 = \max_{1 \leq i \leq n} \alpha_i$ y tenemos que

$$C \subseteq \bigcup_{i=1}^{m_0} U_i = U_{m_0}$$

pues $U_\ell \subseteq U_{\ell+1}$ para todo $\ell \geq 0$.

pero

$$\{x_m : m \geq m_0\} \subseteq C$$
$$\subseteq \left(\overline{\{x_m : m \geq m_0\}} \right)^c$$

(a)

En MA-0250 aprendieron que si

$$f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$$

es continua, existen $x_1 \in [a,b]$ y $x_2 \in [a,b]$ tales que

$$f(x_1) \leq f(x) \leq f(x_2)$$

para todo $x \in [a,b]$, i.e.

$$f([a,b]) = [f(x_1), f(x_2)]$$

compacto

¿Cuál otro resultado se usa en esta conclusión?

Sea $f: X \to Y$ continua y $K \subseteq X$ compacto. Tome $K_1 = f(K)$.

Sea $\mathcal{U}_1$ una colección de abiertos $\{U_\alpha^1 : \alpha \in \Lambda_1\}$

que satisface

$$K_1 \subseteq \bigcup_{\alpha \in \Lambda_1} U_\alpha^1$$

Entonces $f^{-1}(U_\alpha^1)$ es abierto, i.e.

$$K \subseteq \bigcup_{\alpha \in \Lambda_1} f^{-1}(U_\alpha^1)$$

Entonces existe $\alpha_1, \ldots, \alpha_m$ que satisfacen

$$K \subseteq \bigcup_{i=1}^{m} f^{-1}(U_{\alpha_i}^1)$$

Luego si $x \in K$, entonces

$$f(x) \in \bigcup_{i=1}^{m} U_{\alpha_i}^1$$

$$\therefore \quad f(K) \subseteq \bigcup_{i=1}^{m} U_{\alpha_i}^1$$

Lema: Sea $f: X \to Y$ continua y $K \subseteq X$ compacto. Entonces $f(K)$ es compacto.

Sea $\{F_\alpha : \alpha \in \Lambda\}$ una colección de conjuntos cerrados tales que

$$\bigcap_{\alpha \in A} F_\alpha \neq \emptyset$$

si $A \subseteq \Lambda$ es finito. Asuma que

$$\boxed{\bigcap_{\alpha \in \Lambda} F_\alpha = \emptyset}$$

Entonces

$$X = \bigcup_{\alpha \in \Lambda} X \setminus F_\alpha$$

pero $X \neq \bigcup_{\alpha \in A_0} X \setminus F_\alpha$ para A_0 finito, pues de lo contrario

$$\bigcap_{\alpha \in A_0} F_\alpha = \emptyset$$

Es decir X no puede ser compacto.

Teorema: Sea (X, d) un espacio métrico, son equivalentes

(a) X es compacto

(b) Si $\{F_\alpha : \alpha \in \Lambda\}$ es una colección de cerrados que satisfacen

$$\bigcap_{\alpha \in A} F_\alpha \neq \emptyset$$

para todo A finito. Entonces

$$\bigcap_{\alpha \in \Lambda} F_\alpha \neq \emptyset.$$

Terminar la prueba se deja como ejercicio, (b) es llamada la propiedad de la intersección finita.

Compacidad en $\mathbb{R}^d$

Asuma que

$$C = [a_1, b_1] \times \dots \times [a_d, b_d]$$

es compacto si $a_i \leq b_i$, $1 \leq i \leq d$.

Sabemos que todo compacto es cerrado y acotado.

¿ cerrado + acotado = compacto ?

R/ No en general, pero es afirmativo en $\mathbb{R}^d$

Sea F cerrado y acotado en $\mathbb{R}^d$

Entonces existe

$$C_n = [-n, n] \times \dots \times [-n, n]$$

tal que

$$F \subseteq C_n .$$

Sea $\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \subseteq F$. Como C_n es compacto existe x_{n_k} subsucesión de $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ t.q

$$x_{n_k} \xrightarrow[n_k \to \infty]{} x_0 \in C_n$$

Como $\{x_{n_k}\}_{k=1}^{\infty} \subseteq F$, y F es cerrado, tenemos que $x_0 \in F$. Es decir F es secuencialmente compacto.

Teorema: (Heine - Borel)

Sea $C \subseteq \mathbb{R}^d$. Entonces C es compacto, con la norma euclídea, sii es cerrado y acotado.

Lema: Dados $a_i \leq b_i$, $1 \leq i \leq d$, el conjunto

$$C = [a_1, b_1] \times \dots \times [a_d, b_d]$$

es compacto en $(\mathbb{R}^d, \|\cdot\|)$.

Prueba:

Divida C en 2^d rectángulos, estos rectángulos serían de la forma

$$[c_1^i, e_1^i] \times \dots \times [c_d^i, e_d^i] = C_i$$

donde
$$c_j^i = a_j \text{ o } \frac{a_j + b_j}{2}$$
$$e_j^i = b_j \text{ o } \frac{a_j + b_j}{2}$$

Sea $\mathcal{U} = \{U_\alpha : \alpha \in \Omega\}$

un recubrimiento de G, tal que

$$G \not\subseteq \bigcup_{i=1}^{m} U_{\alpha_i}$$

para cualquier $\{\alpha_1, \dots, \alpha_m\} \subseteq \Omega$

Si dado $1 \le i \le 2^d$ existen

$\alpha_1^i, \dots, \alpha_{m_i}^i$ tal que

$$C_i \subseteq \bigcup_{j=1}^{m_i} U_{\alpha_j^i}$$

Entonces

$$G \subseteq \bigcup_{i=1}^{2^d} \bigcup_{j=1}^{m_i} U_{\alpha_j^i}$$

Es decir existe i_0 t.q.

$$C_{i_0} \not\subseteq \bigcup_{i=1}^{m} U_{\alpha_i}$$

para cualquier $\{\alpha_1, \dots, \alpha_m\} \subseteq \Omega$

Dividiendo C_{i_0} en 2^d rectángulos

obtenemos

$$C_{i_1} \subseteq C_{i_0}$$

$$C_{i_1} \not\subseteq \bigcup_{i=1}^{m} U_{\alpha_i}$$

para cualquier $\{\alpha_1, \dots, \alpha_m\} \subseteq \Omega$.

Además

$$C_{i_0} = [c_1^{i_0}, e_1^{i_0}] \times \dots \times [c_d^{i_0}, e_d^{i_0}]$$

$$C_{i_1} = [c_1^{i_1}, e_1^{i_1}] \times \dots \times [c_d^{i_1}, e_d^{i_1}]$$

con

$$[c_j^{i_1}, e_j^{i_1}] \subseteq [c_j^{i_0}, e_j^{i_0}]$$

y

$$|e_j^{i_1} - c_j^{i_1}| = \frac{1}{2}\,|e_j^{i_0} - c_j^{i_0}|$$
$$= \frac{1}{4}\,|b_j - a_j|$$

Iterando el proceso obtenemos

$$C_{i_j} = [c_1^{i_j}, e_1^{i_j}] \times \dots \times [c_d^{i_j}, e_d^{i_j}]$$

tal que

$$[c_\ell^{i_j}, e_\ell^{i_j}] \subseteq [c_\ell^{i_{j-1}}, e_\ell^{i_{j-1}}]$$

y

$$|c_\ell^{i_j} - e_\ell^{i_j}| = \frac{1}{2^j}\,|b_\ell - a_\ell|$$

Por el Teorema de los Intervalos encajados, existe $z_\ell \in \mathbb{R}$ t.q

$$\bigcap_{j=1}^{\infty} [c_\ell^{i_j}, e_\ell^{i_j}] = \{z_\ell\}, \text{ i.e.}$$

$$\bigcap_{j=1}^{\infty} C_{i_j} = \{z\}, \text{ con } z = (z_1, \dots, z_d)$$

Como $z \in C$, existe α_0 t.q $U_{\alpha_0} \in \mathcal{U}$ y $z \in U_{\alpha_0}$.

Sea $\varepsilon > 0$ t.q $B(z, \varepsilon) \subseteq U_{\alpha_0}$

Ejr: Pruebe que existe j_0 t.q

$$C_{i_j} \subseteq B(z, \varepsilon)$$

para todo $j \geq j_0$. (S).

Sea $K \subseteq X$ compacto y

$$f: X \longrightarrow \mathbb{R}$$

continua. Sabemos que $f(K)$ es compacto, i.e. es acotado.

Tome

$$a = \inf_{x \in K} f(x)$$

$$b = \sup_{x \in K} f(x)$$

¿ Se alcanzan 'a' y 'b' ?

Dado $n \in \mathbb{N}$ existe $x_n \in K$ t.q.

$$a \leq f(x_n) \leq a + \frac{1}{n} \qquad (*)$$

Como $\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \subseteq K$, existe $\{x_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$ que satisface

$$x_{n_k} \xrightarrow[n_k \to \infty]{} y_0 \in K$$

Entonces $$f(x_{n_k}) \xrightarrow[n_k \to \infty]{} f(y_0)$$

Pero de $(*)$, se tiene que

$$f(x_{n_k}) \xrightarrow[n_k \to \infty]{} a$$

$\therefore$ $a = f(y_0)$.