MA0505 - Análisis I

Lección XX: La Integral de Lebesgue III

Pedro Méndez[1]

[1] Departmento de Matemática Pura y Ciencias Actuariales
Universidad de Costa Rica

Semestre I, 2021

Agenda

1. La Integral de Lebesgue
   - Resta de Integrales
   - El Lema de Fatou
   - Convergencia Dominada

Si $f, g : E \to [0, \infty]$ son medibles tales que $0 \leqslant g \leqslant f$, entonces

$$\int_E f(x)\mathrm{d}x = \int_E ((f(x) - g(x)) + g(x))\,\mathrm{d}x$$
$$= \int_E (f(x) - g(x))\,\mathrm{d}x + \int_E g(x)\mathrm{d}x.$$

Luego si $\int_E g(x)\mathrm{d}x < \infty$, entonces

$$\int_E (f(x) - g(x))\,\mathrm{d}x = \int_E f(x)\mathrm{d}x - \int_E g(x)\mathrm{d}x$$

Un Ejemplo

Sean $f_k : E \to [0, \infty]$ medibles para $1 \leqslant k$. Entonces si llamamos

$$g_m = \sum_{k=1}^{m} f_k,$$

tenemos que $0 \leqslant g_m \leqslant g_{m+1}$. Y luego

$$\int_E \left(\sum_{k=1}^{\infty} f_k \right) \mathrm{d}x = \int_E \lim_{m\to\infty} g_m(x)\mathrm{d}x = \lim_{m\to\infty} \int_E \sum_{k=1}^{m} f_k(x)\mathrm{d}x$$

$$= \lim_{m\to\infty} \sum_{k=1}^{m} \int_E f_k(x)\mathrm{d}x = \sum_{k=1}^{\infty} \int_E f_k(x)\mathrm{d}x.$$

Sea $E = [0, 1]$, definimos

$$f_k(x) = \begin{cases} k & \text{si } 0 \leqslant x \leqslant \frac{1}{k}. \\ 0 & \text{si } \frac{1}{k} \leqslant x \leqslant 1. \end{cases}$$

Entonces vale que $\int\limits_E f_k(x)\mathrm{d}x = 1$, pero $\lim_{k\to\infty} f_k = 0$. Nos preguntamos:

$$¿\text{Cuándo } \lim_{k\to\infty} \int\limits_E f_k(x)\mathrm{d}x = \int\limits_E \lim_{k\to\infty} f_k(x)\mathrm{d}x?$$

Fatou

Teorema (Fatou)

Sea $f_k : E \to [0, \infty]$ una sucesión de funciones no negativas. Entonces

$$\int_E \liminf_{k\to\infty} f_k \mathrm{d}x \leqslant \liminf_{k\to\infty} \int_E f_k \mathrm{d}x.$$

Recordemos que

$$\liminf_{k\to\infty} f_k = \sup_{k\geqslant 1} \inf_{m\geqslant k} f_m = \lim_{k\to\infty} \inf_{m\geqslant k} f_m.$$

Como $g_k = \inf_{m\geqslant k} f_m$ es creciente, entonces

$$\int_E (\liminf_{k\to\infty} f_k)\mathrm{d}x = \lim_{k\to\infty} \int_E \inf_{m\geqslant k} f_m \mathrm{d}x.$$

Prueba de Fatou

Note que $\inf_{m \geqslant k} f_m \leqslant f_k$ para $k \geqslant 1$. Entonces para $k \geqslant m$

$$\int_E (\inf_{m \geqslant k} f_m(x))\mathrm{d}x \leqslant \int_E f_k(x)\mathrm{d}x.$$

Entonces

$$\liminf_{k \to \infty} \int_E (\inf_{m \geqslant k} f_m(x))\mathrm{d}x \leqslant \liminf_{k \to \infty} \int_E f_k(x)\mathrm{d}x.$$

Por monotonía vale $\liminf_{k \to \infty} \int_E g_k \mathrm{d}x = \lim_{k \to \infty} \int_E g_k \mathrm{d}x$.

Entonces concluimos que

$$\int_E \liminf_{k \to \infty} f_k \mathrm{d}x \leqslant \liminf_{k \to \infty} \int_E f_k \mathrm{d}x.$$

Note que si $f_k : E \to [0, \infty]$ es medible y $\int_E f_k(x)\mathrm{d}x \leqslant M$, entonces $\int_E f(x)\mathrm{d}x \leqslant M$.

Teorema (Convergencia Dominada)

Sea $\{ f_k \}_{k=1}^{\infty}$ una sucesión de funciones medibles no negativas. Si valen

1. $\lim_{k\to\infty} f_k = f$ *c.p.d. en* E.
2. *Si* $0 \leqslant f_k \leqslant \phi$ *c.p.d. para* $k \geqslant 0$ *y* $\int_E \phi(x)\mathrm{d}x < \infty$.

Entonces

$$\lim_{k\to\infty} \int_E f_k(x)\mathrm{d}x = \int_E f(x)\mathrm{d}x.$$

Prueba TCD

- Primero por Fatou: $\int\limits_E f(x)\mathrm{d}x \leqslant \liminf\limits_{k\to\infty} \int\limits_E f_k \mathrm{d}x$.
- Considere así $h_k = \phi - f_k$, entonces

$$\int\limits_E \liminf_{k\to\infty}(\phi - f_k)\mathrm{d}x \leqslant \liminf_{k\to\infty} \int (\phi - f_k)\mathrm{d}x.$$

- Note que $\liminf\limits_{k\to\infty}(\phi - f_k) = \phi - f$.

Continuamos la Prueba

Por otro lado tenemos que

$$\liminf_{k\to\infty}\int_E(\phi - f_k)(x)\mathrm{d}x = \liminf_{k\to\infty}\left(\int_E \phi(x)\mathrm{d}x - \int_E f_k(x)\mathrm{d}x\right)$$
$$= \int_E \phi(x)\mathrm{d}x - \limsup_{k\to\infty}\int_E f_k(x)\mathrm{d}x.$$

¿Por qué vale la última igualdad? Así concluimos que

$$\limsup_{k\to\infty}\int_E f_k(x)\mathrm{d}x \leqslant \int_E f(x)\mathrm{d}x.$$

Resumen

- La linealidad de la integral con restas.
- El lema 1 de Fatou.
- El teorema 2 de Convergencia Dominada.

Ejercicios

- Lista 20
  - El detalle en la prueba del teorema 2 de Convergencia Dominada.

Lecturas adicionales I

S.Cambronero.
Notas MA0505.
20XX.

I.Rojas
Notas MA0505.
2018.