Compacidad

Dado $C \subseteq X$, decimos que C es secuencialmente compacto si toda sucesión $\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \subseteq C$ tiene una subsucesión convergente

Note que si $\{x_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$ converge a x_0, tenemos que dado $\varepsilon > 0$ existe k_0 t.q.

$$d(x_{n_k}, x_0) < \varepsilon$$

si $k \geq k_0$

Es decir,

$$x_{n_k} \in B(x_0, \varepsilon)$$

para todo $k \geq k_0$. Por lo tanto

$$B(x_0, \varepsilon) \cap \{x_m : m \geq k\} \neq \emptyset$$

para todo $k \geq 1$

$$\therefore x_0 \in \overline{\{x_m : m \geq k\}} \quad \forall k \geq 1.$$

$$\therefore x_0 \in \bigcap_{k=1}^{\infty} \overline{\{x_m : m \geq k\}}.$$

Por otro lado, sea

$$x_0 \in \bigcap_{k=1}^{\infty} \overline{\{x_m : m \geq k\}}$$

Tome

$x_{k_1} \in B(x_0,1) \cap \{x_m : m \geq 1\}$.

$x_{k_2} \in B(x_0,\frac{1}{2}) \cap \{x_m : m \geq k_1+1\}$

$\vdots$

$x_{k_n} \in B(x_0,\frac{1}{n}) \cap \{x_m : m \geq k_{n-1}+1\}$

Entonces $x_{k_n} \xrightarrow[n\to\infty]{} x_0$

y $\{x_{k_n}\}_{n=1}^{\infty}$ es una subsucesión de $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$

Lema: Dado (X,d) e.m y $C \subseteq X$ son equivalentes

(i) C es secuencialmente compacto

(ii) $C \cap \bigcap_{k=1}^{\infty} \overline{\{x_m : m \geq k\}} \neq \phi$

para toda $\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \subseteq C$.

Sea $z \in \overline{C}$, entonces existe $\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \subseteq C$ t.q.

$$x_n \xrightarrow[n\to\infty]{} z$$

Si C es s.compacto, existe una subsucesión $\{x_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$ que converge a un punto de C, i.e. $z \in C$.

Lema: Sea C secuencialmente compacto, ent C es cerrado y acotado.

Pba. Ej. mostrar que es acotado

Def: Una colección $\mathcal{U} = \{U_\alpha : \alpha \in \Lambda\}$ de abiertos (i.e U_α es abierto para todo α), es un recubrimiento de un conjunto A si

$$A \subseteq \bigcup_{\alpha \in \Lambda} U_\alpha.$$

Lema: Sea C s.c. y $\mathcal{U}$ un recubrimiento de C. Entonces existe $\varepsilon > 0$ tal que para cada $x \in C$ existe $U \in \mathcal{U}$ que satisface

$$B(x, \varepsilon) \cap C \subseteq \mathcal{U}$$

Prueba: Asuma que para todo $\varepsilon > 0$ existe $x_\varepsilon \in C$ t.q.

$$B(x_\varepsilon, \varepsilon) \subsetneq U_\alpha$$

para todo $\alpha \in \Lambda$.

En particular existe $\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \subseteq C$ t.q.

$$B(x_n, \tfrac{1}{n}) \subsetneq U_\alpha \;, \; \forall \alpha \in \Lambda$$

Como G' es s.c., existe (4)

$\{x_{n_k}\}_{k=1}^{\infty} \subseteq G'$ y $x_0 \in G'$

tal que

$$x_{n_k} \xrightarrow[k\to\infty]{} x_0$$

Además, como $\mathcal{U}$ es un recubrimiento

existe U_{α_0} t.q.

$$x_0 \in U_{\alpha_0}.$$

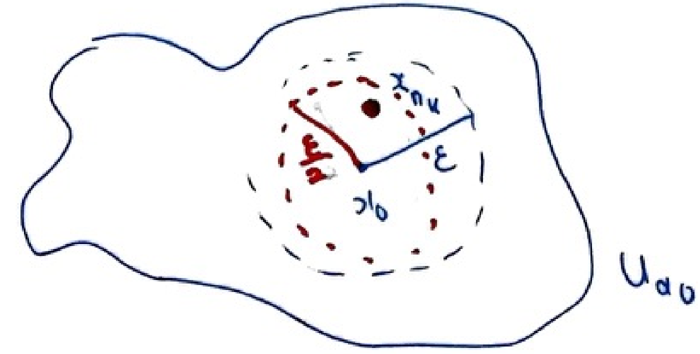
Sea $\varepsilon > 0$ t.q.

$$B(x_0, \varepsilon) \subseteq U_{\alpha_0}$$

Tome k_0 t.q.

$$d(x_{n_k}, x_0) < \frac{\varepsilon}{2}$$

si $k \geq k_0$



Utilizando los argumentos usuales podemos probar que

$$B\left(x_{n_k}, \frac{1}{n_k}\right) \subseteq B(x_0, \varepsilon)$$

si $\frac{1}{n_k} < \frac{\varepsilon}{2}$, i.e

$$B\left(x_{n_k}, \frac{1}{n_k}\right) \subseteq B(x_0, \varepsilon) \subseteq U_{\alpha_0}$$

(5)