MA0505 - Análisis I

Lección IX: Conexidad

Pedro Méndez[1]

[1] Departmento de Matemática Pura y Ciencias Actuariales
Universidad de Costa Rica

Semestre I, 2021

Agenda

1. La Definición de Conexidad
   - Conexidad en $\mathbb{R}$
2. Propiedades de los Conexos
   - Conexidad y Funciones Continuas
   - Uniones de Conexos
3. Componentes Conexos
4. Arcoconexidad

Conjuntos Disconexos

Definición

Un espacio (X, d) es disconexo si existen A, B abiertos no vacíos tales que

$$X = A \mathbin{\dot\cup} B, \quad (A \cap B = \emptyset).$$

Diremos que un espacio es conexo si no es disconexo.

Si X es conexo y $X = A \mathbin{\dot\cup} B$, con A, B abiertos, es necesario que $A = X$ ó $B = X$.

Subespacios y Conexidad

Dado $E \subseteq X$ podemos definir

$$d_E : E \times E \to \mathbb{R}, \; (x, y) \mapsto d(x, y).$$

Ejercicio

(E, d_E) es un espacio métrico. Pruebe que $D \subseteq E$ es abierto en (E, d_E) si y sólo si existe $O \subseteq X$ abierto en (X, d) tal que $D = E \cap O$.

Definición

$E \subseteq X$ es disconexo si existen A, B abiertos en (X, d) tales que

$$E = (A \cap E) \mathbin{\dot\cup} (B \cap E), \; A \cap E \neq \emptyset \neq B \cap E.$$

Un Ejemplo

Sea $I =]a, b[\subseteq \mathbb{R}$. Vamos a probar que I es conexo.

- Asumamos que I es disconexo, entonces existen A, B abiertos tales que

$$I = (I \cap A) \mathbin{\dot\cup} (I \cap B), \ \ I \cap A, \ \ I \cap B \neq \emptyset.$$

- Sean $s \in I \cap A$, $t \in I \cap B$ con $s < t$. Así $[s, t] \subseteq I$.

Continuamos con el Ejemplo

- Como $s \in A$, entonces existe δ_1 tal que
$$]s-\delta_1, s+\delta_1[\subseteq A.$$
- Como $[s, s+\delta_1] \subseteq [s, t]$ entonces
$$[s, s+\delta_1] \subseteq [s, t] \cap A.$$
- Llamemos $u = \sup\{\, x \in [s, t] \cap A \,\}$.
- De esta manera $s < u \leqslant t$.

Continuamos con el Ejemplo

- Si fuese que $u \in B$, entonces existe $\delta_2 > 0$ tal que
$$]u - \delta_2, u + \delta_2[\subseteq B.$$
- De manera análoga $]u - \delta_2, u[\subseteq [s, t]$ y por tanto
$$]u - \delta_2, u[\subseteq B \cap [s, t].$$
- Sin embargo, por propiedades del sup, existe $w \in [s, t] \cap A$ tal que
$$u - \delta_2 < w \leqslant u.$$
Esto es una contradicción.

Terminamos el Ejemplo

De forma similar se prueba que si $u \in A$, entonces existe un δ_3 tal que

$$[u, u + \delta_3] \subseteq [s, t] \cap A.$$

Funciones Continuas Preservan Conexidad

Lema

Sea $f : X \to Y$ una función continua. Si $E \subseteq X$ es conexo, entonces $f(E)$ es conexo.

Asumamos que existen $B, C \subseteq Y$ abiertos tales que

$$f(E) = (f(E) \cap C) \,\dot{\cup}\, (f(E) \cap B), \;\; f(E) \cap C \neq \emptyset \neq f(E) \cap B).$$

Terminamos la Prueba

Notemos que

$$f^{-1}(f(E) \cap C) \supseteq E \cap f^{-1}(C) \neq \emptyset,$$
$$f^{-1}(f(E) \cap B) \supseteq E \cap f^{-1}(B) \neq \emptyset.$$

Además

$$E \subseteq (E \cap f^{-1}(C)) \,\dot{\cup}\, (E \cap f^{-1}(B))$$

pues $f^{-1}(C)$ y $f^{-1}(B)$ son abiertos.

Los Reales son un Conjunto Conexo

- Supongamos que $\mathbb{R}^d = A \cup B$ con A, B abiertos no vacíos.
- Tomemos $x \in A$, $y \in B$ y consideremos

$$f : [0,1] \to \mathbb{R}^d, \;\; t \mapsto (1-t)x + ty.$$

- Como f es continua, $[x,y] = f([0,1])$. El *segmento* entre x y y es conexo.
- Pero $[x,y] = ([x,y] \cap A) \cup ([x,y] \cap B)$ con $[x,y] \cap A$ y $[x,y] \cap B$ no vacíos.

Esto es una contradicción.

Uniones

Lema

Sea $\{ E_\alpha : \alpha \in A \}$ una familia de conexos tal que $\bigcap_{\alpha \in A} E_\alpha$ es no vacío. Entonces $E = \bigcup_{\alpha \in A} E_\alpha$ es conexo.

Tomemos x en la intersección. Si fuese que E es disconexo, existen A, B tales que

$$E = (A \cap E) \dot\cup (B \cap E), \ A \cap E, \ B \cap E \neq \emptyset.$$

Terminamos la Prueba

- Asumamos que $x \in B \cap E$.
- Como $A \cap E \neq \emptyset$, existe α_0 tal que $A \cap E_{\alpha_0} \neq \emptyset$.
- Además, como $x \in B$ y $x \in \bigcap_{\alpha \in A} E_\alpha$ tenemos que $x \in B \cap E_{\alpha_0}$.
- Como $E_{\alpha_0} \cap E = E_{\alpha_0}$, entonces

$$E_{\alpha_0} = (E_{\alpha_0} \cap A) \mathbin{\dot\cup} (E_{\alpha_0} \cap B).$$

Esto es imposible pues E_{α_0} es conexo.

Definición de Componente

Definición

Sea (X, d) un espacio métrico. Dado $x \in X$, definimos la componente conexa de x como la unión de todos lo conexos que lo contienen. Es decir, si

$$\Lambda = \{\, E \subseteq X : \; E \text{ conexo}, \; x \in E \,\},$$

entonces la componente conexa de x es

$$C(x) = \bigcup_{E \in \Lambda} E.$$

Por el lema 2 anterior, $C(x)$ es conexo para todo $x \in X$.

Una Relación Útil

Podemos definir la relación de equivalencia $\mathcal{R}$ en X por medio de

$$x\mathcal{R}y \iff \exists C, \text{ conexo}(x, y \in C).$$

Ejercicio

Si $[x]$ es la clase de equivalencia de x, entonces $[x] = C(x)$.

Segmentos en Conexos

Ejemplo

Sea $E \subseteq \mathbb{R}$ conexo con $a, b \in E$. Vamos a mostrar que $[a, b] \subseteq E$.

- Asuma que $x \in [a, b] \setminus E$.
- Entonces $E = (E \cap]-\infty, x[) \cup (]x, \infty[\cap E)$. Tome $a = \inf E$ y $b =$

Ejercicio

Sea $G \subseteq \mathbb{R}$ un abierto, entonces existen $\{\,]a_i, b_i[\, \}_{i=1}^{\infty}$ tales que $G = \dot{\bigcup}_{i=1}^{\infty}]a_i, b_i[$.

Recordamos la Definición

Definición

Dado $E \subseteq \mathbb{R}^d$, diremos que E es arcoconexo si dados $x_0, x_1 \in E$, existe una curva $\gamma : [0,1] \to \mathbb{R}^d$ tal que

1. $\gamma(0) = x_0$ y $\gamma(1) = x_1$.
2. $\gamma(t) \in E$ para $t \in [0,1]$.

¿Es la arcoconexidad equivalente a la conexidad?

Respondamos la Pregunta

Considere

$$E = \{\,0\,\} \times [-1,1] \cup \{\,(x,y) : 0 < x \leqslant 1,\;\; y = \sin\left(\frac{1}{x}\right)\,\}.$$

- Sean A, B abiertos tales que $A \cap E$, $B \cap E$ y $A \cap B$ son todos no vacíos y

$$E \subseteq (A \cap E) \cup (B \cap E).$$

- Supongamos además que $(0,0) \in A$.

Primeros Pasos

1. Usando el hecho de que $\{ 0 \} \times [-1, 1]$ es conexo, muestre que está contenido en A.
2. La sucesión $\{ x_n \}_{n=1}^{\infty}$ definida por

$$x_n = \left(\frac{1}{\pi n}, \sin(\pi n) \right) = \left(\frac{1}{\pi n}, 0 \right)$$

converge a $(0, 0)$.

3. Luego existe un n_0 tal que $\left(\frac{1}{\pi n}, \sin(\pi n) \right) \in A$ para todo $n \geqslant n_0$. ¿Por qué?

Los Pasos que Siguen

4. Considere el conjunto

$$E_n = \left\{ (x, y) : \frac{1}{n\pi} \leqslant x \leqslant 1,\ y = \sin\left(\frac{1}{x}\right) \right\}.$$

5. Como

$$\gamma : \left[\frac{1}{\pi n}, 1\right] \to E_n,\ x \mapsto \left(x, \sin\left(\frac{1}{x}\right)\right),$$

tenemos que E_n es conexo. Luego $E_n \cap A$ ó $E_n \cap B$ es no vacío.

Continuamos

6. Sin perdida de generalidad $E_n \cap B = \emptyset$, entonces $E_n \subseteq A$. Entonces $\left(x, \sin\left(\frac{1}{x}\right)\right) \in A$ para $0 < x \leqslant 1$.
7. De aquí se concluye que $E \subseteq A$ y eso es imposible.
8. Asumimos pues que existe

$$\tilde{\gamma} : [0, 1] \to E$$

continua tal que

$$\tilde{\gamma}(0) = (0, 0),\ \tilde{\gamma}(1) = \left(\frac{1}{n_0 \pi}, \sin(n_0 \pi)\right).$$

Continuamos con la Respuesta

9. Si $t_n \downarrow 0$ cuando $n \to \infty$, entonces

$$\tilde{\gamma}(t_n) = (\tilde{\gamma}_1(t_n), \tilde{\gamma}_2(t_n)) \xrightarrow[n\to\infty]{} (0,0).$$

10. En particular $\tilde{\gamma}_1(t_n) \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$ y

$$\tilde{\gamma}_2(t_n) = \sin\left(\frac{1}{\tilde{\gamma}_1(t_n)}\right).$$

Es decir, existe $x_n \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$ tal que

$$\left(x_n, \sin\left(\frac{1}{x_n}\right)\right) \in \tilde{\gamma}([0,1])$$

Un Ejercicio

Ejercicio

Basado en lo anterior, pruebe que si $x_n < x_{n+1}$ entonces para $x_n \leqslant x \leqslant x_{n+1}$ vale $\left(x, \sin\left(\frac{1}{x}\right)\right) \in \tilde{\gamma}([0,1])$.
Concluya que

a) $B = \left\{ \left(x, \sin\left(\frac{1}{x}\right)\right) : \ 0 < x < \frac{1}{n_0 \pi} \right\} \subseteq \tilde{\gamma}([0,1])$.

b) Sea $t_0 = \sup_{t>0}\{\, \tilde{\gamma}(t) = (0,0)\,\}$. Entonces

$$\tilde{\gamma}([t_0, 1]) \setminus B = \{\, (0,0)\,\}.$$

c) $\tilde{\gamma}$ no es continua en t_0.

Nociones Equivalentes

Si asumimos que nuestro conjunto es abierto en $\mathbb{R}^d$ entonces las nociones son equivalentes.

Lema

Sea $E \subseteq \mathbb{R}^d$ abierto. Entonces E es conexo si y sólo si E es arcoconexo.

La prueba de este hecho es un ejercicio.

Resumen

- La defición 1 de espacios conexos.
- La defición 2 de subconjuntos disconexos.
- Las funciones continuas preservan conexidad: 1.
- Las uniones de conexos a veces son conexas: 2.
- La defición 3 de componente conexo.
- El lema 3 que garantiza equivalencia entre conexidad y arcoconexidad.

Ejercicios

- Lista 9
  - El ejercicio 1 sobre abiertos dentro de subespacios.
  - El ejercicio 2 que nos dice cuales son las clases de equivalencia en conexidad.
  - El ejercicio 3 que da una caracterización de los abiertos en $\mathbb{R}$.
  - El ejercicio 4 para terminar los detalles de la curva.

Lecturas adicionales I

S.Cambronero.
Notas MA0505.
20XX.

I.Rojas
Notas MA0505.
2018.