MA0505 - Análisis I

Lección XI: La Integral de Riemann-Stieltjes

Pedro Méndez[1]

[1] Departmento de Matemática Pura y Ciencias Actuariales
Universidad de Costa Rica

Semestre I, 2021

Agenda

Las Sumas de Riemann y Stieltjes

Sea $\phi : [a, b] \to \mathbb{R}$. Dados $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ acotada, una partición $\Gamma = \{ x_0 = a < x_1 < \cdots < x_n = b \}$ de $[a, b]$ y $x_{i-1} \leqslant \xi_i \leqslant x_i$ para $1 \leqslant i \leqslant n$, definimos la suma de Riemann-Stieltjes como

$$R(f, \Gamma, \phi) = \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)[\phi(x_i) - \phi(x_{i-1})].$$

La Definición de la Integral

Definición

Decimos que f es Riemann-Stieltjes integrable con respecto a ϕ en $[a, b]$ si existe $I \in \mathbb{R}$ que satisface

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta > 0 \ (|\Gamma| < \delta \Rightarrow |R(f, \Gamma, \phi) - I| < \varepsilon)$$

para cualquier escogencia de puntos $\{ \xi_1, \ldots, \xi_n \}$.

Denotamos $I = \int_a^b f \mathrm{d}\phi$.

Sea $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ acotada y $\Gamma = \{ x_0 = a < x_1 < \cdots < x_n = b \}$, definimos

$$m_i = \inf_{x_{i-1} \leqslant \xi_i \leqslant x_i} f(\xi), \quad M_i = \sup_{x_{i-1} \leqslant \xi_i \leqslant x_i} f(\xi)$$

para $1 \leqslant i \leqslant n$. De forma similar a la integral de Riemann, definimos

- $L(f, \Gamma, \phi) = \sum_{i=1}^{n} m_i[\phi(x_i) - \phi(x_{i-1})]$.
- $U(f, \Gamma, \phi) = \sum_{i=1}^{n} M_i[\phi(x_i) - \phi(x_{i-1})]$.

Claramente si f es creciente entonces

$$L(f, \Gamma, \phi) \leqslant R(f, \Gamma, \phi) \leqslant U(f, \Gamma, \phi)$$

y caso que $\phi(x) = x$ para $x \in [a,b]$ se obtiene la integral de Riemann ordinaria.

El Criterio de Cauchy

Ejercicio

La función f es Riemann-Stieltjes integrable respecto a ϕ si y sólo si dado $\varepsilon > 0$, existe un $\delta > 0$ tal que si $|\Gamma| < \delta$ y $|\Gamma'| < \delta$, vale entonces que

$$|R(f, \Gamma, \phi) - (f, \Gamma', \phi)| < \varepsilon.$$

Lema

Asuma que existe $z_0 \in [a, b]$ tal que f y ϕ son discontinuas en z_0. Entonces f no es Riemann-Stieltjes integrable respecto a ϕ.

- Supongamos que

$$\phi(z_0) \neq \lim_{x \to z_0^+} \phi(x) = \lim_{x \to z_0^-} \phi(x).$$

- Entonces existe un $\varepsilon > 0$ tal que para $\delta > 0$, existen $\overline{x}_\delta, \overline{y}_\delta$ que satisfacen
  - $\overline{x}_\delta < z_0 < \overline{y}_\delta$.
  - $|\phi(z_0) - \phi(\overline{x}_\delta)| \geqslant \sqrt{\varepsilon}$.
  - $|\phi(z_0) - \phi(\overline{y}_\delta)| \geqslant \sqrt{\varepsilon}$.

Continuamos la Prueba

Además, existe un ξ_δ tal que

- $|\xi_\delta - z_0| < \frac{\delta_1}{2}$.
- $|f(\xi_\delta) - f(z_0)| \geqslant \sqrt{\varepsilon}$.

Donde

$$\delta_1 = \min\left\{ \frac{1}{2}|z_0 - \overline{x}_\delta|, \frac{1}{2}|z_0 - \overline{y}_\delta| \right\}.$$

Supogamos que $\xi_\delta > z_0$ y tomemos Γ una partición tal que

$$z_0 = x_{i_0} < \xi_\delta < x_{i_0+1} = \overline{y}_\delta$$

con $|\Gamma| < \delta$. ($\Gamma = \{ x_0 = a < x_1 < \cdots < x_n = b \}$).

Continuamos la Prueba

Considere ahora dos suma de R-S con Γ de partición y los mismos $\{\xi_i\}$ para $i = i_0$.
En el intervalo $[x_{i_0}, x_{i_0+1}]$ vale que

- $R(f, \Gamma, \phi)$ es la suma de R-S con punto $\xi_{i_0} = \xi_\delta$.
- $R'(f, \Gamma, \phi)$ es la suma de R-S con punto $\xi_{i_0} = z_0$.

Así

$$|R(f, \Gamma, \phi) - (f, \Gamma', \phi)| = |f(\xi_\delta) - f(z_0)||\phi(x_{i_0}) - \phi(x_{i_0+1})| \geqslant \varepsilon.$$

En el caso que $z_0 > \xi_\delta$, la prueba es similar. Y el caso en el que $\lim_{x\to z_0^+} \phi(x) \neq \lim_{x\to z_0^-} \phi(x)$ será un ejercicio

Como las Sumas de Darboux

Analizamos U y L. El resultado a continuación tiene una análogo en las sumas de Darboux.

Lema

Sea $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ acotada y $\phi : [a, b] \to \mathbb{R}$ creciente.

1. *Si $\Gamma_1 \subseteq \Gamma_2$, entonces*

$$L(f, \Gamma_1, \phi) \leqslant L(f, \Gamma_2, \phi), \quad U(f, \Gamma_1, \phi) \leqslant U(f, \Gamma_2, \phi).$$

2. *Si Γ_1, Γ_2 son dos particiones cualesquiera*

$$L(f, \Gamma_1, \phi) \leqslant U(f, \Gamma_2, \phi).$$

Primer Inciso

Sean

$$\Gamma_1 = \{ x_0 = a < x_1 < \cdots < x_n = b \},$$
$$\Gamma_2 = \{ y_0 = a < y_1 < \cdots < y_m = b \}$$

con $n \leqslant m$. Dado $1 \leqslant i \leqslant n$ asuma que existe y_i tal que $x_i < y_i < x_{i+1}$. Entonces

$$\sup_{[x_i,y_i]} f, \sup_{[y_i,x_{i+1}]} f \leqslant \sup_{[x_i,x_{i+1}} f$$

y por lo tanto

$$\sup_{[x_i,y_i]} f(\phi(y_i) - \phi(x_i)) + \sup_{[y_i,x_{i+1}]} f(\phi(x_{i+1}) - \phi(y_i))$$
$$\leqslant \sup_{[x_i,x_{i+1}]} f(\phi(y_i) - \phi(x_i) + \phi(x_{i+1}) - \phi(y_i)) = \sup_{[x_i,x_{i+1}]} f(\phi(x_{i+1}) - \phi(x_i)).$$

Terminamos el Inciso

Usando un argumento similar se prueba que si

$$y_{j-1} = x_{i-1} < y_j < y_{j+1} < \cdots < x_i = y_{j+m},$$

entonces

$$\sum_{j=1}^{m} \sup_{[y_{j-1},y_j]} f(\phi(y_j) - \phi(y_{j-1})) \leqslant \sup_{[x_{i-1},x_i]} f(\phi(x_i) - \phi(x_{i-1})).$$

Por lo tanto

$$U(f, \Gamma_1, \phi) \geqslant U(f, \Gamma_2, \phi).$$

De forma similar se prueba la desigualdad para L.

El Segundo Inciso

Si asumimos el primer inciso y tomamos Γ_1, Γ_2 particiones con $\Gamma = \Gamma_1 \cup \Gamma_2$, entonces

$$L(f, \Gamma_1, \phi) \leqslant L(f, \Gamma, \phi) \leqslant U(f, \Gamma, \phi) \leqslant U(f, \Gamma_2, \phi).$$

Utilizando la definición es fácil probar que si $\int_a^b f \mathrm{d}\phi_1$ y $\int_a^b f \mathrm{d}\phi_2$ existen, y vale $\phi = \phi_1 - \phi_2$, entonces $\int_a^b f \mathrm{d}\phi$ existe y además

$$\int_a^b f \mathrm{d}\phi = \int_a^b f \mathrm{d}\phi_1 - \int_a^b f \mathrm{d}\phi_2.$$

En el caso que ϕ sea de variación acotada, podemos reducir el problema de que f sea R-S integrable respecto a ϕ al caso que ϕ sea creciente y positiva.

Teorema

Sea $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ continua y $\phi : [a,b] \to \mathbb{R}$ de variación acotada en $[a,b]$. Entonces $\int_a^b f \mathrm{d}\phi$ existe y Además

$$\left| \int_a^b f \mathrm{d}\phi \right| \leqslant \sup_{[a,b]} |f| \operatorname{Var}(\phi, [a,b]).$$

Basta probar el resultado en el caso que ϕ es creciente. Entonces, dado $\varepsilon > 0$ existe $\delta_1 > 0$ tal que

$$|x - y| < \delta_1 \Rightarrow |f(x) - f(y)| < \frac{\varepsilon}{2(\phi(b) - \phi(a))}.$$

Primer Paso

Si $|\Gamma| < \delta_1$, vamos a probar que

$$U(f, \Gamma, \phi) - L(f, \Gamma, \phi) < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Sea $\Gamma = \{ x_0 = a < x_1 < \cdots < x_n = b \}$, como f es continua, existen ξ_i, η_i que satisfacen

- $f(\xi_i) = \sup_{[x_i, x_{i+1}]} f = M_i$ para $0 \leqslant i \leqslant n - 1$.
- $f(\eta_i) = \operatorname{ínf}_{[x_i, x_{i+1}]} f = m_i$ para $0 \leqslant i \leqslant n - 1$.

Primer Paso

Tenemos que

$$\begin{aligned}
&U(f,\Gamma,\phi) - L(f,\Gamma,\phi)\\
&= \sum_{i=0}^{n-1}(M_i - m_i)(\phi(x_{i+1}) - \phi(x_i))\\
&= \sum_{i=0}^{n-1}(f(\xi_i) - f(\eta_i))(\phi(x_{i+1}) - \phi(x_i))\\
&\leqslant \frac{\varepsilon}{2}\frac{1}{\phi(b)-\phi(a)}(\phi(b)-\phi(a))
\end{aligned}$$

puesto que

$$|\xi_i - \eta_i| \leqslant |x_{i+1} - x_i| \leqslant |\Gamma| \leqslant \delta_1$$

Segundo Paso

Vamos a mostrar que existe I tal que para $\eta > 0$, existe un $\delta > 0$ que satisface

$$|\Gamma| < \delta \Rightarrow |U(f, \Gamma, \phi) - I| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Para ese efecto, tomemos $\{\Gamma_k\}_{k=1}^{\infty}$ una sucesión de particiones tal que $\lim_{k\to\infty} |\Gamma_k| = 0$.
Considere $\Gamma'_k = \bigcup_{j=1}^{k} \Gamma_j$, entonces vale

- $\Gamma'_k \subseteq \Gamma'_{k+1}$, y
- $\Gamma_k \subseteq \Gamma'_k$.

Segundo Paso

Tomemos $U = \inf_{1 \leqslant k} U(f, \Gamma_k, \phi)$. Dado que $|\Gamma_k| < \delta_1$ para $k \geqslant k_1$,

$$U(f, \Gamma_k, \phi) \leqslant L(f, \Gamma_k, \phi) + \frac{\varepsilon}{2} \leqslant U(f, \Gamma'_k, \phi) + \frac{\varepsilon}{2}.$$

Sea $k_0 \geqslant k$, tal que

$$0 \leqslant U(f, \Gamma'_k, \phi) - U < \frac{\varepsilon}{2}$$

cuando $k \geqslant k_0$. Entonces cuando $k \geqslant k_0$ vale

$$\begin{aligned} &|U(f, \Gamma_k, \phi) - U| \\ &\leqslant |U(f, \Gamma'_k, \phi) - U| + |U(f, \Gamma_k, \phi) - U(f, \Gamma'_k, \phi)| \\ &\leqslant \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2}. \end{aligned}$$

Segundo Paso

Si $\{\tilde{\Gamma}_k\}_{k=1}^{\infty}$ es otra sucesión de particiones que satisface

$$\lim_{k\to\infty} |\tilde{\Gamma}_k| = 0.$$

Tome $\hat{\Gamma}_k = \tilde{\Gamma}_k \cup \Gamma_k$ y k_0 tal que

$$k \geqslant k_0 \Rightarrow |\tilde{\Gamma}_k| < \delta_1, \; |\Gamma_k| < \delta_1.$$

Entonces

- $U(f, \Gamma_k, \phi) \leqslant U(f, \hat{\Gamma}_k, \phi) + \frac{\varepsilon}{2}$.
- $U(f, \hat{\Gamma}_k, \phi) \leqslant U(f, \Gamma_k, \phi) + \frac{\varepsilon}{2}$.

Terminamos

Luego

$$-\varepsilon < U(f,\Gamma_k,\phi) - U \leqslant U(f,\hat{\Gamma}_k,\phi) - U + \frac{\varepsilon}{2}$$
$$\leqslant U(f,\Gamma_k,\phi) - U + \varepsilon < 2\varepsilon.$$

Finalmente

a) $R(f,\Gamma,\phi) - U \leqslant U(f,\Gamma,\phi) - U \leqslant \frac{\varepsilon}{2}$.

b) $R(f,\Gamma,\phi) - U \geqslant L(f,\Gamma,\phi) - U \geqslant U(f,\Gamma,\phi) - U - \frac{\varepsilon}{2} > \varepsilon$.

Las propiedades básicas de la integral de Riemann se mantienen. (Probar este teorema es un ejercicio).

Teorema

Asuma que para $1 \leqslant i, j \leqslant 2$, *que* $f_i : [a,b] \to \mathbb{R}$ *es R-S integrable respecto a* $\phi_j : [a,b] \to \mathbb{R}$. *Si* $c \in \mathbb{R}$, *tenemos que*

(a) $\int_a^b (cf_1 + f_2) \mathrm{d}\phi_1 = c \int_a^b f_1 \mathrm{d}\phi_1 + \int_a^b f_2 \mathrm{d}\phi_1$.

(b) $\int_a^b f_1 \, \mathrm{d}(c\phi_1) = c \int_a^b f_1 \mathrm{d}\phi_1$.

(c) $\int_a^b f_1 \, \mathrm{d}(\phi_1 + \phi_2) = \int_a^b f_1 \mathrm{d}\phi_1 + \int_a^b f_1 \mathrm{d}\phi_2$.

(d) $\int_a^b f_1 \mathrm{d}\phi_1 = \int_a^c f_1 \mathrm{d}\phi_1 + \int_b^c f_1 \mathrm{d}\phi_1$.

Valor Medio

Si $\phi : [a, b] \to \mathbb{R}$ es creciente, tenemos que

a) $L(f, \Gamma, \phi) \leqslant R(f, \Gamma, \phi) \leqslant U(f, \Gamma, \phi)$.

b) $U(f, \Gamma, \phi) \leqslant \sup_{[a,b]} f(\phi(b) - \phi(a))$.

c) $L(f, \Gamma, \phi) \geqslant \inf_{[a,b]} f(\phi(b) - \phi(a))$.

Entonces vale

$$\inf_{[a,b]} f(\phi(b) - \phi(a)) \leqslant \int_a^b f \mathrm{d}\phi \leqslant \sup_{[a,b]} f(\phi(b) - \phi(a)).$$

Valor Medio

Lema

Si f es continua y R-S integrable respecto a ϕ, creciente, entonces

$$\exists \xi \in [a,b] \left(\int_a^b f \mathrm{d}\phi = f(\xi)(\phi(b) - \phi(a)) \right).$$

Integración por Partes

Teorema

Si $\int_a^b f \mathrm{d}\phi$ *existe, entonces* $\int_a^b \phi \mathrm{d}f$ *existe y vale*

$$\int_a^b f \mathrm{d}\phi + \int_a^b \phi \mathrm{d}f = f(b)\phi(b) - f(a)\phi(a).$$

Comenzamos por tomar $\Gamma = \{ x_0 = a < x_1 < \cdots < x_n = b \}$ y $x_{i-1} \leqslant \xi_i \leqslant x_i$ para $1 \leqslant i \leqslant n$. Definimos $\Gamma' = \{ a, b \} \cup \{ \xi_1, \ldots, \xi_n \}$ y $\xi_0 = a$, $\xi_{n+1} = b$.

Así tenemos que $R(f,\Gamma,\phi)$ es

$$
\begin{aligned}
&= \sum_{n=1}^{\infty} f(xi_i)(\phi(x_i)-\phi(x_{i-1})) = \sum_{n=1}^{\infty} f(xi_i)\phi(x_i) - \sum_{i=0}^{n-1} f(\xi_{i+1})\phi(x_i) \\
&= -\sum_{i=1}^{n-1} \phi(x_i)(f(\xi_{i+1})-f(\xi_i)) + f(\xi_n)\phi(b) - \phi(a)f(\xi_1) \\
&= -\sum_{i=1}^{n-1} \phi(x_i)(f(\xi_{i+1}) - \phi(a)(f(\xi_1)-f(\xi_0)) - \phi(b)(f(\xi_{n+1})-f(\xi_n)) \\
&\quad -\phi(a)f(a)+\phi(b)f(b) \\
&= -\sum_{i=0}^{n} \phi(x_i)(f(\xi_{i+1}) + \phi(b)f(b) - \phi(a)f(a)
\end{aligned}
$$

Y por tanto $R(f,\Gamma,\phi) = R(\phi,\Gamma',f) + f(b)\phi(b) - f(a)\phi(a)$. El resultado se concluye tomando límites.

Convergencia Uniforme

Considere $\{ r_n \}_{n=1}^{\infty} = \mathbb{Q} \cap [0,1]$. Defina

$$f_n : [0,1] \to \mathbb{R}, \; x \mapsto \begin{cases} 1, & x = r_1, \ldots, r_n. \\ 0, & \text{si no.} \end{cases}$$

Note que $f_n \leqslant f_{n+1}$ y que

$$\lim_{n \to \infty} f_n = \mapsto \begin{cases} 1, & x \in \mathbb{Q} \cap [0,1]. \\ 0, & \text{si no.} \end{cases}$$

Es un ejercicio probar que

- $\int_0^1 f_n(x)\mathrm{d}x = 0.$
- f no es Riemann integrable.

Luego $\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x$ no se puede definir.

Sucesiones Uniformemente Convergentes

Lema

Sea ϕ de variación acotada y $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ una sucesión de funciones R-S integrables respecto a ϕ.
Si $f_n \xrightarrow[n\to\infty]{} f$ uniformemente y f es R-S integrable respecto a ϕ, entonces

$$\lim_{n\to\infty} \int_a^b f_n \mathrm{d}\phi = \int_a^b f \mathrm{d}\phi.$$

Resumen

- La definición 1 de funciones Riemann-Stieltjes integrables.
- El criterio 1 que nos dice cuando una función NO es R-S integrable.
- El lema 2 que resume algunas propiedades de las sumas superiores e inferiores.
- El teorema 2 sobre la linealidad de la integral.
- El lema 3 sobre la propiedad del valor medio.
- El teorema 3 de integración por partes.
- El lema 4 de convergencia uniforme de sucesiones de funciones.

Ejercicios

- Lista 11
  - El ejercicio 1 sobre el criterio de Cauchy para integrales de Riemann y Stieltjes.
  - Terminar la prueba del lema 1 es un ejercicio.
  - Realizar la prueba del teorema 2 es un ejercicio.
  - El ejercicio 27 sobre la función indicadora de los primeros n racionales en $[0, 1]$.

Lecturas adicionales I

- S.Cambronero.
  Notas MA0505.
  20XX.
- I.Rojas
  Notas MA0505.
  2018.