MA0505 - Análisis I

Lección XI: La Integral de Lebesgue IV

Pedro Méndez[1]

[1] Departmento de Matemática Pura y Ciencias Actuariales
Universidad de Costa Rica

Semestre I, 2021

Agenda

1. La Integral de Lebesgue para Funciones Medibles
   - Parte Positiva y Parte Negativa
   - Propiedades de la Integral
2. Linealidad de la Integral
   - Y las Restas
   - ¿Y qué hay de Productos?
3. Los Teoremas de Convergencia

Sea $f : E \to \overline{\mathbb{R}}$ una función medible. Entonces $f = f^+ - f^-$ con $f^+ = \max\{0, f\}$ y $f^- = \max\{0, -f\}$. Sabemos que f^+ y f^- son medibles y no negativas. Entonces

$$\int_E f^+ \mathrm{d}x, \quad \int_E f^- \mathrm{d}x$$

están bien definidas. Y por tanto podemos definir

$$\int_E f \mathrm{d}x = \int_E f^+ \mathrm{d}x - \int_E f^- \mathrm{d}x.$$

Las Funciones Integrables

Decimos que f es integrable o bien que $f \in L(E)$ si

$$\int_E f^+ \mathrm{d}x, \int_E f^- \mathrm{d}x < \infty.$$

Note que

$$\left| \int_E f \mathrm{d}x \right| \leqslant \int_E f^+ \mathrm{d}x + \int_E f^- \mathrm{d}x = \int_E |f| \mathrm{d}x.$$

Si $\int_E |f| \mathrm{d}x < \infty$ entonces $f \in \mathbb{R}$ c.p.d.

Teorema

Sea $f : E \to \overline{\mathbb{R}}$ *y* $g : E \to \overline{\mathbb{R}}$ *medibles tales que* $\int\limits_E f\,dx$ *y* $\int\limits_E g\,dx$ *existen.*

(I) *Sea* $f \leqslant g$ *c.p.d. en* E*. Entonces* $\int\limits_E f\,dx \leqslant \int\limits_E g\,dx$*. En particular si* $f = g$ *c.p.d. en* E *entonces* $\int\limits_E f\,dx = \int\limits_E g\,dx$*.*

(II) *Si* $E_1 \subseteq E$*, entonces* $\int\limits_{E_1} f\,dx$ *existe.*

(III) *Si* $E = \dot{\bigcup}_{k=1}^{\infty} E_k$*, entonces* $\int\limits_E f\,dx = \sum_{k=1}^{\infty} \int\limits_{E_k} f\,dx$*.*

(IV) *Si* $E_1 \subseteq E$ *con* $m(E_1) = 0$ *entonces* $\int\limits_{E_1} f\,dx = 0$*.*

Prueba del Teorema

Note que si $f \leqslant g$ c.p.d. entonces

$$f^+ = \max\{0, f\} \leqslant \max\{0, g\} = g^+,$$
$$g^- = \max\{0, -g\} \leqslant \max\{0, -f\} = f^-.$$

Luego

$$\int_E f^+ \mathrm{d}x \leqslant \int_E g^+ \mathrm{d}x, \; \int_E g^- \mathrm{d}x \leqslant \int_E f^- \mathrm{d}x,$$

y entonces

$$\int_E f^+ \mathrm{d}x - \int_E f^- \mathrm{d}x < \int_E g^+ \mathrm{d}x - \int_E g^- \mathrm{d}x.$$

Continuamos la Prueba

Note que

$$0 \leqslant \int_{E_1} f^+ \mathrm{d}x \leqslant \int_{E} f^+ \mathrm{d}x, \; 0 \leqslant \int_{E_1} f^- \mathrm{d}x \leqslant \int_{E} f^- \mathrm{d}x.$$

Finalmente si

$$\int_{E} f^+ \mathrm{d}x = \sum_{k=1}^{\infty} \int_{E_k} f^+ \mathrm{d}x < \infty, \text{ ó}$$

$$\int_{E} f^- \mathrm{d}x = \sum_{k=1}^{\infty} \int_{E_k} f^- \mathrm{d}x < \infty.$$

Entonces

$$\int_{E} f \mathrm{d}x = \sum_{k=1}^{\infty} \int_{E_k} f \mathrm{d}x.$$

Teorema

Sean $f, g : E \to \overline{\mathbb{R}}$ *medibles tales que* $\int_E f \mathrm{d}x$ *y* $\int_E g \mathrm{d}x$ *existen.*

Entonces vale que

1. $\displaystyle\int_E cf \mathrm{d}x = c \int_E f \mathrm{d}x.$
2. *Además, si* $f, g \in L^1(E)$*, entonces*

$$\int_E (f+g) \mathrm{d}x = \int_E f \mathrm{d}x + \int_E g \mathrm{d}x.$$

Prueba del Teorema

Primero si $c \leqslant 0$ entonces

$$(cf)^+ = -cf^-, \quad (cf)^- = -cf^+.$$

Entonces vale que

$$\int_E cf\mathrm{d}x = -c\int_E f^-\mathrm{d}x + c\int_E f^+\mathrm{d}x = c\int_E f\mathrm{d}x.$$

Segunda Parte

Si f, g son integrables entonces

$$0 \leqslant \int_E |f+g| \mathrm{d}x \leqslant \int_E |f| \mathrm{d}x + \int_E |g| \mathrm{d}x < \infty.$$

Note que los siguientes conjuntos cubren E:

$$\begin{aligned}
E_1 &= \{\, f \geqslant 0,\ g \geqslant 0 \,\}, \\
E_2 &= \{\, f \leqslant 0,\ g \leqslant 0 \,\}, \\
E_3 &= \{\, f \geqslant 0,\ g < 0,\ f+g \geqslant 0 \,\}, \\
E_4 &= \{\, f < 0,\ g \geqslant 0,\ f+g \geqslant 0 \,\}, \\
E_5 &= \{\, f \geqslant 0,\ g < 0,\ f+g < 0 \,\}, \\
E_6 &= \{\, f < 0,\ g \geqslant 0,\ f+g < 0 \,\}.
\end{aligned}$$

Continuamos la Prueba

Note que

$$\int_{E_1}(f+g)\mathrm{d}x=\int_{E_1}(f^{+}+g^{+})\mathrm{d}x=\int_{E_1}f^{+}\mathrm{d}x+\int_{E_1}g^{+}\mathrm{d}x=\int_{E_1}f\mathrm{d}x+\int_{E_1}g\mathrm{d}x$$

y también

$$\begin{aligned}\int_{E_2}(f+g)\mathrm{d}x&=\int_{E_2}-(f^{-}+g^{-})\mathrm{d}x=-\int_{E_2}(f^{-}+g^{-})\mathrm{d}x\\&=-\int_{E_2}f^{-}\mathrm{d}x-\int_{E_2}g^{-}\mathrm{d}x=\int_{E_2}f\mathrm{d}x+\int_{E_2}g\mathrm{d}x.\end{aligned}$$

De esta manera

$$\int_{E_3} ((f+g)-g)\mathrm{d}x = \int_{E_3} (f+g)\mathrm{d}x + \int_{E_3} (-g)\mathrm{d}x.$$

Entonces

$$\begin{aligned}\int_{E_3} f\mathrm{d}x &= \int_{E_3} (f+g)\mathrm{d}x + \int_{E_3} (-g)\mathrm{d}x \\ &= \int_{E_3} (f+g)\mathrm{d}x - \int_{E_3} g\mathrm{d}x.\end{aligned}$$

Por lo tanto

$$\int_{E_3} (f+g)\mathrm{d}x = \int_{E_3} f\mathrm{d}x + \int_{E_3} g\mathrm{d}x.$$

Terminamos

Finalmente

$$\int_{E_5}(-(f+g)+f)\mathrm{d}x=\int_{E_5}(-g)\mathrm{d}x=\int_{E_5}-(f+g)\mathrm{d}x+\int_{E_5}f\mathrm{d}x.$$

Así tenemos que

$$\int_{E_5}f\mathrm{d}x+\int_{E_5}g\mathrm{d}x=\int_{E_5}(f+g)\mathrm{d}x.$$

Terminar el resto de la prueba es un ejercicio.

Luego si $f_1, \ldots, f_n \in L(E)$, entonces $\sum_{k=1}^{n} a_k f_k \in L(E)$ y vale que

$$\int_E \left(\sum_{k=1}^{n} a_k f_k \right) \mathrm{d}x = \sum_{k=1}^{n} a_k \int_E f_k \mathrm{d}x.$$

Ojo que en general no es cierto que

$$\int_E (f-g)\mathrm{d}x = \int_E f\mathrm{d}x - \int_E g\mathrm{d}x.$$

Por ejemplo considere $f = \mathbf{1}_{[n,\infty]}$ y $g = \mathbf{1}_{[n+1,\infty]}$.

Sin embargo si f y ϕ son medibles con $\phi \leqslant f$ c.p.d. y $\phi \in L(E)$, entonces $f^- \leqslant \phi^-$. Es decir

$$\int_E f^- \mathrm{d}x \leqslant \int_E \phi^- \mathrm{d}x < \infty$$

y por lo tanto $\int_E f \mathrm{d}x$ existe. Ahora si $\int_E f^+ = \infty$ (es decir, $f \notin L(E)$), entonces $f - \phi \notin L(E)$ y

$$\int_E (f-\phi)\mathrm{d}x = \int_E (f-\phi)^+ \mathrm{d}x = \infty.$$

El Resultado

Proposición

Si $\phi \leqslant f$ *c.p.d. y* $\phi \in L(E)$, *entonces*

$$\int_E (f-\phi)\mathrm{d}x = \int_E f\mathrm{d}x - \int_E \phi\mathrm{d}x.$$

Productos

Las condiciones para que fg sea integrable son más complejas. Por ejemplo si $f \in L(E)$ y $|g(x)| \leqslant M$ para $x \in E$, entonces $fg \in L(E)$.

Convergencia Monótona

Teorema

Sea $\{ f_k \}_{k=1}^{\infty}$ *una sucesión de funciones medibles en* E*, tales que* $\lim_{k\to\infty} f_k = f$ *c.p.d. en* E*.*

(I) *Si existe* $\phi \in L(E)$ *tal que* $\phi \leqslant f_k \leqslant f_{k+1}$ *c.p.d. para* $k \geqslant 1$*, entonces* $\lim_{k\to\infty} \int_E f_k \mathrm{d}x = \int_E f \mathrm{d}x$*.*

(II) *Si existe* $\phi \in L(E)$ *tal que* $f_{k+1} \leqslant f_k \leqslant \phi$ *c.p.d. para* $k \geqslant 1$*, entonces* $\lim_{k\to\infty} \int_E f_k \mathrm{d}x = \int_E f \mathrm{d}x$*.*

Prueba TCM

Si se cumple la primera condición entonces $f_k - \phi \geqslant 0$ y $f_{k+1} - \phi \geqslant f_k - \phi$ para $k \geqslant 1$. Entonces

$$\lim_{k \to \infty} \int_E (f_k - \phi) \mathrm{d}x = \int_E (f - \phi) \mathrm{d}x.$$

Es decir

$$\lim_{k \to \infty} \int_E f_k \mathrm{d}x - \int_E \phi \mathrm{d}x = \int_E f \mathrm{d}x - \int_E \phi \mathrm{d}x.$$

Fatou

Teorema

Sea $\{ f_k \}_{k=1}^{\infty}$ una sucesión de funciones medibles en E. Si existe $\phi \in L(E)$ tal que $f_k \geqslant \phi$ c.p.d. en E para $k \geqslant 1$, entonces

$$\int_E \left(\liminf_{k\to\infty} f_k \right) \mathrm{d}x \leqslant \liminf_{k\to\infty} \int_E f_k \mathrm{d}x.$$

Convergencia Dominada

Teorema

Sea $\{ f_k \}_{k=1}^{\infty}$ *una sucesión de funciones medibles en* E *tales que* $\lim_{k\to\infty} f_k = f$ *en* E*. Si existe* $\phi \in L(E)$ *tal que* $|f_k| \leqslant \phi$ *c.p.d. en* E *para* $k \geqslant 1$*, entonces*

$$\lim_{k\to\infty} \int\limits_E f_k \mathrm{d}x = \int\limits_E f \mathrm{d}x.$$

La prueba se basa en considerar $\phi + f_k$ y $\phi - f_k$.

Convergencia Uniforme

Teorema

Sea $f_k \in L(E)$, $k \geqslant 1$. *Si* $\lim_{k\to\infty} f_k = f$ *uniformemente en* E *con* $m(E) < \infty$, *entonces* $f \in L(E)$ *y*

$$\lim_{k\to\infty} \int_E f_k \mathrm{d}x = \int_E f \mathrm{d}x.$$

La prueba de este teorema es un ejercicio.

Observación

Note que $f_k(x) = \frac{1}{k}$ converge a cero en $\mathbb{R}$ pero $\int_{\mathbb{R}} f_k \mathrm{d}x = \infty$.

Resumen

- El teorema 1 que resumen las propiedades de las integrales en general.
- El teorema 2 sobre la linealidad de la integral en general.
- El caso de las restas 1.
- Los teoremas de convergencia: 3 (Convergencia Monótona), 4 (Fatou), 5 (Convergencia Dominada) y 6 (Convergencia Uniforme).

Ejercicios

- Lista 21
  - Concluir la prueba del teorema 2 es un ejercicio.
  - Probar el teorema 6 de convergencia uniforme es un ejercicio.

Lecturas adicionales I

- S.Cambronero.
  Notas MA0505.
  20XX.
- I.Rojas
  Notas MA0505.
  2018.