MA0505 - Análisis I

Lección XI: La Integral de Lebesgue IV

Pedro Méndez[1]

[1] Departmento de Matemática Pura y Ciencias Actuariales
Universidad de Costa Rica

Semestre I, 2021

Agenda

1. La Integral de Lebesgue para Funciones Medibles
   - Parte Positiva y Parte Negativa
   - Propiedades de la Integral

Sea $f : E \to \overline{\mathbb{R}}$ una función medible. Entonces $f = f^+ - f^-$ con $f^+ = \max\{\, 0, f \,\}$ y $f^- = \max\{\, 0, -f \,\}$. Sabemos que f^+ y f^- son medibles y no negativas. Entonces

$$\int_E f^+ \mathrm{d}x, \quad \int_E f^- \mathrm{d}x$$

están bien definidas. Y por tanto podemos definir

$$\int_E f \mathrm{d}x = \int_E f^+ \mathrm{d}x - \int_E f^- \mathrm{d}x.$$

Las Funciones Integrables

Decimos que f es integrable o bien que $f \in L(E)$ si

$$\int_E f^+ \mathrm{d}x, \int_E f^- \mathrm{d}x < \infty.$$

Note que

$$\left| \int_E f \mathrm{d}x \right| \leqslant \int_E f^+ \mathrm{d}x + \int_E f^- \mathrm{d}x = \int_E |f| \mathrm{d}x.$$

Si $\int_E |f| \mathrm{d}x < \infty$ entonces $f \in \mathbb{R}$ c.p.d.

Teorema

Sea $f : E \to \overline{\mathbb{R}}$ *y* $g : E \to \overline{\mathbb{R}}$ *medibles tales que* $\int\limits_E f\mathrm{d}x$ *y* $\int\limits_E g\mathrm{d}x$ *existen.*

(I) *Sea* $f \leqslant g$ *c.p.d. en* E*. Entonces* $\int\limits_E f\mathrm{d}x \leqslant \int\limits_E g\mathrm{d}x$*. En particular si* $f = g$ *c.p.d. en* E *entonces* $\int\limits_E f\mathrm{d}x = \int\limits_E g\mathrm{d}x$*.*

(II) *Si* $E_1 \subseteq E$*, entonces* $\int\limits_{E_1} f\mathrm{d}x$ *existe.*

(III) *Si* $E = \bigcup_{k=1}^{\infty} E_k$*, entonces* $\int\limits_E f\mathrm{d}x = \sum_{k=1}^{\infty} \int\limits_{E_k} f\mathrm{d}x$*.*

(IV) *Si* $E_1 \subseteq E$ *con* $m(E_1) = 0$ *entonces* $\int\limits_{E_1} f\mathrm{d}x = 0$*.*

Prueba del Teorema

Note que si $f \leqslant g$ c.p.d. entonces

$$\begin{aligned} f^+ &= \text{máx}\{\,0, f\,\} \leqslant \text{máx}\{\,0, g\,\} = g^+, \\ g^- &= \text{máx}\{\,0, -g\,\} \leqslant \text{máx}\{\,0, -f\,\} = f^-. \end{aligned}$$

Luego

$$\int_E f^+ \mathrm{d}x \leqslant \int_E g^+ \mathrm{d}x, \quad \int_E g^- \mathrm{d}x \leqslant \int_E f^- \mathrm{d}x,$$

y entonces

$$\int_E f^+ \mathrm{d}x - \int_E f^- \mathrm{d}x < \int_E g^+ \mathrm{d}x - \int_E g^- \mathrm{d}x.$$

Continuamos la Prueba

Note que

$$0 \leqslant \int_{E_1} f^+ \mathrm{d}x \leqslant \int_E f^+ \mathrm{d}x, \; 0 \leqslant \int_{E_1} f^- \mathrm{d}x \leqslant \int_E f^- \mathrm{d}x.$$

Finalmente si

$$\int_E f^+ \mathrm{d}x = \sum_{k=1}^{\infty} \int_{E_k} f^+ \mathrm{d}x < \infty, \text{ ó}$$

$$\int_E f^- \mathrm{d}x = \sum_{k=1}^{\infty} \int_{E_k} f^- \mathrm{d}x < \infty.$$

Entonces

$$\int_E f \mathrm{d}x = \sum_{k=1}^{\infty} \int_{E_k} f \mathrm{d}x.$$

Resumen

- El teorema 1 que resumen las propiedades de las integrales en general.

Ejercicios

- Lista 21
  -

Lecturas adicionales I

- S.Cambronero.
  Notas MA0505.
  20XX.
- I.Rojas
  Notas MA0505.
  2018.