0

Sea $f: I \longrightarrow \mathbb{R}$, decimos que

$$\lim_{x \to a} f(x) = \ell$$

si para todo $\varepsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que si

$$|x-a| < \delta$$

entonces

$$|f(x) - \ell| < \varepsilon.$$

Note que

$$|x-a| = d(x,a)$$

en el espacio de partida X

Además

$$|f(x) - \ell| = d(f(x), \ell)$$

en el espacio de llegada Y

Es decir

$$d(x,a) < \delta \Rightarrow \rho(f(x), \ell) < \varepsilon.$$

Continuidad

1

Dados dos espacios métricos (X,d) y (Y,ρ), consideramos

$$f: X \longrightarrow Y$$

y decimos que

$$\lim_{z \to a} f(z) = \ell,$$

si para todo $\varepsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que

$$\rho(f(z), \ell) < \varepsilon$$

siempre que $d(z,a) < \delta$

Note que para definir el límite de f en a, no es necesario que f esté definida en "a".

Def: La función $f: X \to Y$ es continua en $a \in X$, si

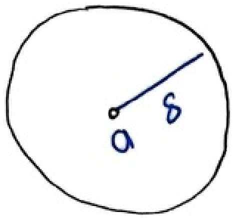
$$\lim_{z \to a} f(z) = f(a)$$

Decimos que f es continua, si es continua en todo punto de X.

En este caso

$$\boxed{d(z,a) < \delta \implies \rho(f(z), f(a)) < \varepsilon}$$

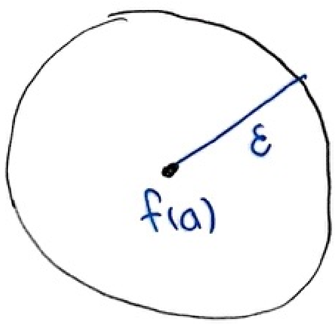
$d(a,z) < \delta \Rightarrow \rho(f(z), f(a)) < \varepsilon$ 2



$\{z : d(z,a) < \delta\} \subseteq X$

$\Big\downarrow f$

$\{y : \rho(f(a), y) < \varepsilon\} \subseteq Y$



$\therefore f(B_X(a,\delta)) \subseteq B_Y(f(a), \varepsilon)$

Ejm: Dado un e.m. (X,d) y $a \in X$ defina

$$f: X \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$x \longrightarrow d(x,a)$$

Sabemos por la lista de ejr que

$$|d(a,x) - d(a,y)| \leq d(x,y)$$

De esta desigualdad se obtiene que f es continua

Esta función es un ejemplo de una función Lipschitz

Def: Una función $f: X \to Y$ es Lipschitz de parámetro λ, si para todo $x, y \in E$ se tiene que

$$\rho(f(x), f(y)) \leq \lambda \, d(x,y).$$

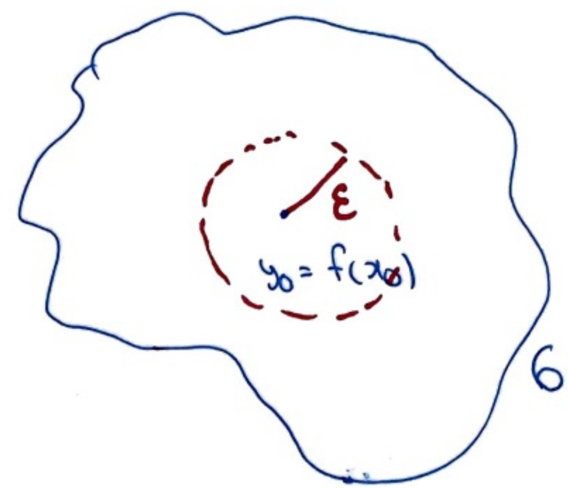
De la def se prueba fácilmente que estas funciones son continuas.

Ejr: Dado $A \subseteq E$, pruebe que

$$f(x) = d(x, A)$$

es Lipschitz de parámetro 1

Sea $G \subseteq Y$ abierto y $y_0 = f(x_0) \in G$



Entonces existe $\varepsilon > 0$ t.q.

$$B(f(x_0), \varepsilon) \subseteq G.$$

Si $f: X \to Y$ es continua, existe $\delta > 0$ t.q.

$$f(B_X(x_0, \delta)) \subseteq B_Y(f(x_0), \varepsilon) \subseteq G$$

Luego si $f(x_0) \in G$, existe $\delta > 0$ tal que si $z \in B_X(x_0, \delta)$ se tiene que

$$f(z) \in G$$

Es decir

$$B_X(x_0, \delta) \subseteq \{ z \in X : f(z) \in G \}$$
$$= f^{-1}(G)$$

$\therefore$ Si $x_0 \in f^{-1}(G)$, existe $\delta > 0$ tal que

$$B_X(x_0, \delta) \subseteq f^{-1}(G)$$

<u>Lema:</u> Sean $f : X \to Y$ continua y $G \subseteq Y$ abierto. Ent $f^{-1}(G)$ es abierto

Por otro lado si $F \subseteq Y$, F cerrado tenemos que

$$f^{-1}(Y \setminus F) = X \setminus f^{-1}(F)$$

es abierto, i.e. $f^{-1}(F)$ es cerrado

<u>Ojo:</u> en general

$$f^{-1}(A \setminus B) = f^{-1}(A) \setminus f^{-1}(B)$$

Teorema: Dada una función

$$f: X \longrightarrow Y$$

son equivalentes

(a) f es continua

(b) $f^{-1}(G)$ es abierto, para todo $G \subseteq Y$ abierto.

(c) $f^{-1}(F)$ es cerrado, para todo $F \subseteq Y$ cerrado

(d) $f(\overline{B}) \subseteq \overline{f(B)}$ para todo $B \subseteq X$.

Prueba:

(a) $\Rightarrow$ (b): listo

(b) $\Rightarrow$ (a): Sea $\varepsilon > 0$, como $B(f(a), \varepsilon)$ es abierta, tenemos que

$$f^{-1}(B(f(a), \varepsilon))$$

es abierto. Como $a \in f^{-1}(B(f(a), \varepsilon))$ existe $\delta > 0$ tal que

$$B(a, \delta) \subseteq f^{-1}(B(f(a), \varepsilon))$$

El resto de las implicaciones se deja de tarea.

También se puede caracterizar la continuidad mediante sucesiones

Teorema: Sea $f: X \to Y$ y $a \in X$

Son equivalentes

(a) f es continua en 'a'.

(b) Si $x_n \xrightarrow[n \to \infty]{} a$, entonces

$$f(x_n) \xrightarrow[n \to \infty]{} f(a) \text{ en } Y.$$

Prueba:

(b) $\Rightarrow$ (a): Asuma que f no es continua. Luego existe $\varepsilon > 0$ tal que para todo δ existe $x_\delta \in X$ que satisface

$$d(x_\delta, a) < \delta \quad y \quad \rho(f(x_\delta), f(a)) \geq \varepsilon.$$

En particular si $n \in \mathbb{N}$, existe x_n t.q

$$d(x_n, a) < \frac{1}{n} \quad y \quad \rho(f(x_n), f(a)) \geq \varepsilon$$

Es decir tenemos una sucesión $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ t.q.

(i) $x_n \xrightarrow[n \to \infty]{} a$

(ii) $f(x_n) \underset{n \to \infty}{\not\to} f(a)$

Def: Una función $f: X \longrightarrow Y$ es un homeomorfismo si es biyectiva, f es continua y f^{-1} es continua.

En este caso se dice que los espacios son homeomorfos

Luego si $A \subseteq X$ es abierto

$$f(A) = (f^{-1})^{-1}(A)$$

es abierto, i.e. f envia abiertos en abiertos

Ejv: En este caso

$$f(A^{o}) = (f(A))^{o}.$$