MA0505 - Análisis I

Lección XIII: La Medida de Lebesgue I

Pedro Méndez[1]

[1] Departmento de Matemática Pura y Ciencias Actuariales
Universidad de Costa Rica

Semestre I, 2021

Agenda

1. Conjuntos Medibles
2. Sigma Álgebras
3. Medida Nuevamente

Cerrados

Lema

Sea $G \subseteq \mathbb{R}^d$ abierto, entonces $G = \bigcup_{k=1}^{\infty} I_k$ con $I_k = [a_1^k, b_1^k] \times \ldots \times [a_d^k, b_d^k]$ y $I_k^o \cap I_\ell^o = \emptyset$ para $k \neq \ell$.

La prueba de este lema es un ejercicio.

Teorema

Sea $F \subseteq \mathbb{R}^d$ un cerrado, entonces F es medible.

Prueba del Teorema

Si asumimos adicionalmente que F es compacto, entonces dado $\varepsilon > 0$ existe un G abierto que satisface:

$$m_e(G) \leqslant m_e(F) + \frac{\varepsilon}{2}.$$

Note que $G \setminus F$ es abierto. Luego existen $\{ I_k \}_{k=1}^{\infty}$ cubos cerrados tales que

$$G \setminus F = \bigcup_{k=1}^{\infty} I_k.$$

Como F y $\bigcup_{k=1}^{\ell} I_k$ son cerrados disjuntos y F es compacto, entonces $d\left(F, \bigcup_{k=1}^{\ell} I_k\right) > 0$ y así

$$m_e(G) \geqslant m_e\left(F \cup \bigcup_{k=1}^{\ell} I_k\right) = m_e(F) + m_e\left(\bigcup_{k=1}^{\ell} I_k\right).$$

Terminamos la Prueba

De esta manera

$$m_e\left(\bigcup_{k=1}^{\ell} I_k\right) \leqslant m_e(G) - m_e(F) \leqslant \frac{\varepsilon}{2}$$

$$\Rightarrow \forall \ell \geqslant 1 \left(\sum_{k=1}^{\ell} m_e(I_k) \leqslant \frac{\varepsilon}{2}\right)$$

$$\Rightarrow \sum_{k=1}^{\infty} m_e(I_k) \leqslant \frac{\varepsilon}{2} \Rightarrow m_e(G \setminus F) < \varepsilon.$$

Y finalmente si F no es compacto, podemos tomar $F = \bigcup F_k$ con $F_k = F \cap \overline{B(0,k)}$ que sí es compacto. De esta manera, F es medible.

Complementos

Teorema

El complemento de un conjunto medible es medible.

Sea E medible, dado $k \geqslant 1$, existe G_k un abierto tal que

$$E \subseteq G_k, \quad m_e(G_k \setminus E) < \frac{1}{k}.$$

Note que $E \subseteq \bigcap_{k=1}^{\infty} G_k$ y que G_k^c es cerrado para $k \geqslant 1$. Así $H = \bigcup_{k=1}^{\infty} G_k^c$ es medible con

$$H = \left(\bigcap_{k=1}^{\infty} G_k \right)^c = \bigcup_{k=1}^{\infty} G_k^c \subseteq E^c.$$

Terminamos la Prueba

Ahora vale

$$E^c \setminus H \subseteq E^c \setminus G_k^c = G_k \setminus E.$$

Es decir, para $k \geqslant 1$ tenemos $m_e(E^c \setminus H) \setminus \frac{1}{k}$. Concluimos que $Z = E^c \setminus H$ tiene medida exterior cero y entonces podemos expresar

$$E^c = Z \cup H$$

de manera que E^c es medible.

Extraemos un Resultado

Si $\{ E_k \}_{k=1}^{\infty}$ es una colección de medibles, entonces

(I) $\bigcup_{k=1}^{\infty} E_k$ es medible.

(II) $\bigcup_{k=1}^{\infty} E_k^c$ es medible.

Entonces tenemos que

$$\bigcap_{k=1}^{\infty} E_k = \left(\bigcup_{k=1}^{\infty} E_k^c \right)^c$$

es medible también.
Además $E_1 \setminus E_2 = E_1 \cap E_2^c$ es medible.

Definición

Sea Ω un conjunto, una σ-álgebra $\mathcal{F}$ es un subconjunto de 2^Ω que satisface

(I) Si $E \in \mathcal{F}$, entonces $E^c \in \mathcal{F}$.

(II) $\Omega \in \mathcal{F}$.

(III) Si $\{ F_k \}_{k=1}^{\infty} \subseteq F$ entonces $\bigcup_{k=1}^{\infty} F_k \in \mathcal{F}$.

Lema

Sea $\mathcal{F}$ una σ-álgebra y $\{ E_k \}_{k=1}^{\infty} \subseteq \mathcal{F}$. Entonces

(I) $\bigcap_{k=1}^{\infty} E_k \in \mathcal{F}$.

(II) $E_1 \setminus E_2 \in \mathcal{F}$.

(III) $\emptyset \in \mathcal{F}$.

La prueba de este lema es un ejercicio.

El Conjunto de los Medibles

Sea $\mathcal{M} = \{ E \subseteq \mathbb{R}^d : E \text{ medible} \}$. Los resultados anteriores se resumen en el siguiente lema.

Lema

$\mathcal{M}$ es una σ-álgebra.

Sea $\mathcal{S} \subseteq 2^{\Omega}$, la σ-álgebra generada por $\mathcal{S}$ es

$$\sigma(\mathcal{S}) = \bigcap_{\substack{\mathcal{F}\ \sigma-\text{álg.} \\ \mathcal{S}\subseteq\mathcal{F}}} \mathcal{F}$$

y de esto se desprende que $\sigma(\mathcal{S})$ es la σ-álgebra más pequeña que contiene a $\mathcal{S}$.

Borelianos

Definición

$\mathcal{B}$ la σ-álgebra Boreliana, es la σ-álgebra generada por los abiertos de $\mathbb{R}^d$.

Al ser $\mathcal{B}$ una σ-álgebra, $\mathcal{B}$ contiene a los cerrados, G_δ, F_σ y además $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{M}$.

Los medibles se pueden definir en términos de cerrados.

Lema

Sea $E \subseteq \mathbb{R}^d$, entonces E es medible si y sólo si dado $\varepsilon > 0$, existe un $F \subseteq E$ cerrado que satisface

$$m_e(E \setminus F) < \varepsilon.$$

Sabemos que E es medible si y sólo si E^c es medible. Dado $\varepsilon > 0$, existe G abierto tal que

$$E^c \subseteq G, \quad m_e(G \setminus E^c) < \varepsilon.$$

Entonces $G^c = F \subseteq E$ y

$$m_e(E \setminus F) = m_e(E \cap G) = m_e(G \setminus E^c) < \varepsilon.$$

Es un ejercicio terminar la prueba.

Con el resultado anterior en mano procedemos a probar este:

Teorema

Sea $\{ E_k \}_{k=1}^{\infty}$ una colección contable de conjuntos disjuntos y medibles. Entonces

$$m\left(\bigcup_{k=1}^{\infty} E_k\right) = \sum_{k=1}^{\infty} m(E_k).$$

Prueba del Teorema

Comenzamos por asumir E_k es acotado.

- Sabemos que existe $F_k \subseteq E_k$ cerrado tal que $m(E_k \setminus F_k) < \frac{\varepsilon}{2^k}$.
- Dado que F_k es compacto, para $k \geqslant 1$ y $F_k \cap F_\ell = \emptyset$ se tiene que
$$m\left(\bigcup_{i=1}^{m} F_i\right) = \sum_{i=1}^{m} m(F_i).$$
- Entonces
$$\sum_{i=1}^{m} m(F_i) \leqslant m\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} E_i\right) \Rightarrow \sum_{i=1}^{\infty} m(F_i) \leqslant m\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} E_i\right).$$

Terminamos la Prueba

Ahora

$$m(E_k) = m(F_k \cup E_k \setminus F_k) \leqslant m(F_k) + m(E_k \setminus F_k) \leqslant m(F_k) + \frac{\varepsilon}{2^k}.$$

Luego

$$\sum_{i=1}^{\infty} m(E_i) - \frac{\varepsilon}{2^i} \leqslant m\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} E_i\right)$$

y por tanto

$$\sum_{i=1}^{\infty} m(E_i) \leqslant m\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} E_i\right) + \varepsilon.$$

El resto de la prueba es un ejercicio

Sea $I^k = I_1^k \times \ldots \times I_d^k$ donde I_i^k es un intervalo. Si vale que $(I^k)^o \cap (I^l)^o = \emptyset$, tenemos que:

$$m\left(\bigcup_{k=1}^{\infty}(I^k)^o\right) = \sum_{k=1}^{\infty} m((I_k)^o) = \sum_{k=1}^{\infty} m(I^k).$$

Así tenemos que

$$\sum_{k=1}^{\infty} m(I^k) \leqslant m\left(\bigcup_{k=1}^{\infty} I^k\right) \Rightarrow \sum_{k=1}^{\infty} m(I^k) = m\left(\bigcup_{k=1}^{\infty} I^k\right).$$

Sean E_1, E_2 medibles con $E_1 \subseteq E_2$. Tenemos que

$$m(E_2) = m(E_1 \cup E_2 \setminus E_1) = m(E_1) + m(E_2 \setminus E_1).$$

Si ocurre que $m(E_1) < \infty$, entonces

$$m(E_2 \setminus E_1) = m(E_2) - m(E_1).$$

Por otro lado si $\{ E_i \}_{i=1}^{\infty}$ es una sucesión de medibles tales que $E_i \subseteq E_{i+1}$, tenemos que

$$\bigcup_{i=1}^{\infty} E_i = \dot{\bigcup}_{i=1}^{\infty} E_i \setminus E_{i-1}$$

donde asumimos $E_0 = \emptyset$.

De esto tenemos que

$$m\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} E_i\right) = \sum_{i=1}^{\infty} m(E_i \setminus E_{i-1})$$
$$= \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} m(E_i) - m(E_{i-1}) = \lim_{n\to\infty} m(E_n)$$

siempre que $m(E_n) < \infty$ para $k \geqslant 1$. Note que la identidad es cierta si $m(E_k) = \infty$ para algún k.

Si asumimos ahora que $E_i \supseteq E_{i+1}$ para $i \geqslant 1$ y $m(E_1) < \infty$, entonces

$$E_1 = \bigcup_{i=1}^{\infty} E_i = \left(\bigcup_{i=1}^{\infty} E_i \setminus E_{i+1} \right) \cup E$$

con $E = \bigcap_{i=1}^{\infty} E_i$. Entonces

$$m(E_1) = \sum_{i=1}^{\infty} m(E_i \setminus E_{i+1}) + m(E).$$

Como $\sum_{i=1}^{\infty} m(E_i) - m(E_{i+1}) = \lim_{n\to\infty} m(E_1) - m(E_n)$, concluimos que

$$m(E_1) = \lim_{n\to\infty}(m(E_1) - m(E_n)) + m\left(\bigcap_{i=1}^{\infty} E_i\right)$$

$$\Rightarrow m\left(\bigcap_{i=1}^{\infty} E_i\right) = \lim_{n\to\infty} m(E_n).$$

En este caso sí es necesario asumir que $m(E_1) < \infty$.

Considere ahora $E_k = [-k, k]^c$. Entonces

$$E_{k+1} \subseteq E_k, \; m(E_k) = \infty, \; \bigcap_{k=1}^{\infty} E_k = \emptyset.$$

Teorema

Sea $\{ E_k \}_{k=1}^{\infty}$ una sucesión de conjuntos medibles:

(I) *Si $E_i \subseteq E_{i+1}$, $1 \leqslant i$, entonces*

$$m\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} E_i\right) = \lim_{k\to\infty} m(E_k).$$

(II) *Si $E_{i+1} \subseteq E_i$ y existe $i_0 \geqslant 1$ tal que $m(E_{i_0}) < \infty$, entonces*

$$m\left(\bigcap_{i=1}^{\infty} E_i\right) = \lim_{i\to\infty} m(E_i).$$

Una Generalización

El resultado previo se puede generalizar. Dados $E_k \subseteq \mathbb{R}^d$, no necesariamente medibles, que satisface $E_k \subseteq E_{k+1}$ para $k \geqslant 1$, tomemos G_k G_δ's tales que

$$E_k \subseteq G_k, \quad m_e(E_k) = m(G_k).$$

No podemos deducir que $G_k \subseteq G_{k+1}$, entonces tome $V_k = \bigcap_{j=k}^{\infty} G_j$ y así $V_k \subseteq V_{k+1}$.
Como $E_k \subseteq E_{k+\ell} \subseteq G_{k+\ell}$, tenemos que $E_k \subseteq V_k$. Y además

$$m_e(E_k) \leqslant m_e(V_k) = m(V_k)$$

y $m(V_k) \leqslant m(G_k) = m_e(E_k)$. Es decir $m_e(E_k) = m(V_k)$.

Finalmente

$$m_e(E_k) \leqslant m_e\left(\bigcup_{k=1}^{\infty} E_k\right) \leqslant m_e\left(\bigcup_{k=1}^{\infty} V_k\right) \leqslant \lim_{k\to\infty} m(V_k) = \lim_{k\to\infty} m_e(E_k).$$

Con esto tenemos el teorema

Teorema

Si $E_k \subseteq E_{k+1} \subseteq \mathbb{R}^d$, entonces

$$m_e\left(\bigcup_{k=1}^{\infty} E_k\right) = \lim_{k\to\infty} m_e(E_k).$$

Resumen

- El lema 1 sobre la caracterización de abiertos.
- Los teoremas 1 y 2 sobre cerrados y complementos medibles.
- La definición 1 y el lema 2 sobre σ-álgebras.
- Por el lema 3, el conjunto de medibles es una σ-álgebra.
- La definición 2 de la σ-álgebra Boreliana.
- La caracterización 4 de medibles por cerrados.
- El teorema 3 sobre medidas de conjuntos disjuntos.
- El teorema 5.

Ejercicios

- Lista 13
  - El lema 1 sobre la caracterización de abiertos.
  - El lema 2 sobre quienes están dentro de una σ-álgebra.
  - Terminar la prueba del lema 4.
  - Terminar la prueba del teorema 3.

Lecturas adicionales I

- S.Cambronero.
  Notas MA0505.
  20XX.
- I.Rojas
  Notas MA0505.
  2018.