La integral de Lebesgue

1

Sea $f: E \to \overline{\mathbb{R}}$ medible con E medible y $f \geq 0$. Defina

$$R(f,E) = \{(x,y) \in \mathbb{R}^{d+1} : x \in E,\ 0 \leq y \leq f(x)\}.$$

Surge la pregunta ¿es $R(f,E)$ medible?

Analicemos el caso

$$f(x) = a \quad \text{en } A \subseteq E,\ a > 0.$$

Entonces

$$\{(x,y) \in \mathbb{R}^{d+1} : x \in E,\ 0 \leq y \leq f(x)\} =$$

$$\{(x,y) \in \mathbb{R}^{d+1} : x \in A,\ 0 \leq y \leq a\}$$

$$\cup$$

$$\{(x,y) \in \mathbb{R}^{d+1} : x \in E \setminus A,\ y = 0\} =$$

$$A \times [0,a] \ \cup \ E \setminus A \times \{0\}.$$

Lema: Sea $A \subset E$ medible y $a \geq 0$. Entonces

$$A \times [0,a]$$

es medible, y $m(A \times [0,a]) = a\, m(A)$

Pba Asuma que $m(A) < \infty$

Paso 1: Sea

$$A = [a_1, b_1] \times \dots \times [a_d, b_d]$$

entonces es claro que se cumple el lema

Paso 2: Sea A abierto, entonces existen $I_k = [c_1^k, f_1^k] \times \dots \times [c_d^k, f_d^k]$

t.q. $A = \bigcup_{k=1}^{\infty} I_k$ y

además $I_k^{\circ} \cap I_j^{\circ} = \emptyset$ si $j \neq k$.

Entonces

$$A \times [0,a] = \bigcup_{k=1}^{\infty} I_k \times [0,a], \text{ es medible.}$$

Como $(I_k \times [0,a])^{\circ} \cap (I_j \times [0,a])^{\circ} = \emptyset$, para $k \neq j$. tenemos que

$$m(A \times [0,a]) = \sum_{i=1}^{\infty} m(I_i \times [0,a])$$

$$= a \sum_{i=1}^{\infty} m(I_i)$$

$$= a\, m(A).$$

Paso 3: Sea $A = \bigcap_{j=1}^{\infty} G_j$ un G_δ, con G_i abierto para $i \geq 1$, y

$$G_{i+1} \subseteq G_i$$

(¿Por qué se puede asumir esto?)

Luego

$$A \times [0,a] = \bigcap_{i=1}^{\infty} G_i \times [0,a]$$

con

$$G_{i+1} \times [0,a] \subseteq G_i \times [0,a]$$

medibles con medida finita.

Entonces.

$$m(A \times [0,a]) =$$

$$\lim_{i \to \infty} m(G_i \times [0,a]) =$$

$$\lim_{i \to \infty} a\, m(G_i) =$$

$$a\, m(A).$$

Paso 4: Sea $A = H \setminus Z$ con H de tipo G_δ y Z de medida cero. El paso anterior implica que $H \times [0,a]$ es medible y $m(H \times [0,a]) = a\, m(H)$

Ejr: $m_e(Z \times [0,a]) = 0$

Entonces

$$A \times [0,a] = (H \times [0,a]) \setminus (Z \times [0,a])$$

y $m(A \times [0,a]) = m(H \times [0,a]) = a\, m(H) = a\, m(A)$

Finalmente si $m(A)=\infty$

Sean $A_u = A \cap B(0,u)$, ent

$A = \bigcup_{u=1}^{\infty} A_u$, con $A_u \subseteq A_{u+1}$

medibles y acotados.

Por los argumentos anteriores

$A_u \times [0,a] \subseteq A_{u+1} \times [0,a]$

son medible y

$$m(A_u \times [0,a]) = a\, m(A_u)$$

Entonces

$$m(A \times [0,a]) = m\left(\bigcup_{u=1}^{\infty} A_u \times [0,a] \right)$$

$$= \lim_{u \to \infty} m(A_u \times [0,a])$$

$$= \lim_{u \to \infty} a\, m(A_u)$$

$$= a\, m(A) \quad \blacksquare$$

Sea $f: E \to \mathbb{R}$ medible, con $f \geq 0$. Entonces existe una sucesión creciente de funciones simples $\{\phi_k\}_{k=1}^{\infty}$ que satisfacen

$$\lim_{k \to \infty} \phi_k(x) = f(x) \quad \text{c.p.d}$$

en E. Luego si $0 \leq y < f(x)$ existe ϕ_k simple t.q.

$$0 \leq y \leq \phi_k(x).$$

Entonces

$$R(f,E) = \bigcup_{k=1}^{\infty} R(\phi_k, E) \cup \{(x,y) \in \mathbb{R}^{d+1} : x \in E,\ f(x) = y\}$$

Concluimos que $R(f,E)$ es medible si:

(a) $R(\phi_k, E)$ es medible

(b) $\Gamma(f,E) = \{(x, f(x)) : x \in E\}$ es medible.

Lema: Sea $f: E \to \mathbb{R}$ medible entonces

$$m_e(\Gamma(f,E)) = 0$$

Pba: Asume que $m(E) < \infty$. Sea $\varepsilon > 0$ y

$$E_n = \{x \in E : n\varepsilon \leq f(x) < (n+1)\varepsilon\},$$

ent $E = \bigcup_{n=1}^{\infty} E_n$. Note que

$$\Gamma(f, E_n) \subseteq (E_n \times [0, (n+1)\varepsilon]) \setminus (E_n \times [0, n\varepsilon]).$$

Por lo tanto

$$m_e(\Gamma(f, E_n)) \leq m(E_n \times [0, (n+1)\varepsilon]) - m(E_n \times [0, n\varepsilon]) \leq \varepsilon\, m(E)$$

$$\therefore \ m_e(\Gamma(f, E_n)) = 0$$

$$\therefore \ m_e\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} \Gamma(f, E_n)\right) = m_e(\Gamma(f, E)) = 0$$

El resto de la prueba se deja como ejercicio. $\blacksquare$

Finalmente, si

$$\phi_n(x) = \sum_{i=1}^{m} a_i \mathbb{1}_{A_i}$$

con $a_i \neq a_j$, $A_i \cap A_j = \emptyset$ para $i \neq j$, y $E = \bigcup_{i=1}^{m} A_i$.

tenemos que

$$\{(x,y) \in \mathbb{R}^d : x \in E, 0 \leq y \leq \phi_u(x)\}$$

$$= \bigcup_{u=1}^{m} \{(x,y) \in \mathbb{R}^d : x \in A_u, 0 \leq y \leq a_u\}$$

que es un conjunto medible.

Teorema: Sea $f: E \to \mathbb{R}$ medible con E medible. Ent

$$R(f,E) \subseteq \mathbb{R}^{d+1}$$

es medible

Def: Dada $f: E \to \mathbb{R}$ medible tal que $f \geq 0$, definimos su integral de Lebesgue por

$$\int_E f\,dx = m(R(f,E)).$$