Dado un espacio métrico (E,d) y $A \subseteq E$, decimos que $x \in A$ es un punto interior si existe $r>0$ t.q. $B(x,r) \subseteq A$.

Definimos además A^o como el conjunto de todos los puntos interiores de A.

Note que: Si $G \subseteq A$ y G es abierto, Tome $x \in G$, entonces existe r t.q.

$$B(x,r) \subseteq G \subseteq A$$

es decir $x \in A^o$, i.e.

$$\boxed{G \subseteq A^o} \subseteq A$$

Lema: Si $G \subseteq A$, G abierto. Entonces $G \subseteq A^o$. Es decir, A^o es el abierto más grande contenido en A.

Por lo tanto, al ser $A_1^o \cap A_2^o$ abierto y $A_1^o \cap A_2^o \subseteq A_1 \cap A_2$, tenemos que

$$A_1^o \cap A_2^o \subseteq (A_1 \cap A_2)^o$$

Ojo: se usa A^o abierto. Ejr

Ahora si $x \in (A_1 \cap A_2)^0$, (2)

existe $r>0$ t.q

$$B(x,r) \subseteq A_1 \cap A_2$$

Entonces

$$B(x,r) \subseteq A_1$$
$$B(x,r) \subseteq A_2$$

Es decir. $x \in A_1^0$ y $x \in A_2^0$

$$\therefore (A_1 \cap A_2)^0 \subseteq A_1^0 \cap A_2^0$$

Lema: $A_1^0 \cap A_2^0 = (A_1 \cap A_2)^0$

Ejr: Si $A \subseteq B$ ent $A^0 \subseteq B^0$

La función distancia

Dados $A, B \subseteq E$ definimos

$$d(A,B) = \inf \{ d(x,y) : x \in A, y \in B \}.$$

Sea $x \in E$ y $A \subseteq E$ t.q

$$d(x,A) = 0$$

Luego, para todo $n \in \mathbb{N}$ existe $x_n \in A$ que satisface

$$d(x,x_n) < \frac{1}{n}$$

Es decir, la sucesión $\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \subseteq A$

y $\quad x_n \xrightarrow[n\to\infty]{} x$

Lema: Dados $x \in E$ y $A \subseteq E$, son equivalentes

(i) $d(x,A) = 0$

(ii) existe $\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \subseteq A$ t.q

$$x_n \xrightarrow[n\to\infty]{} x$$

Dado $A \subseteq E$, definimos la clausura de A como

$$\bar{A} = \{x \in E : d(x,A) = 0\}.$$

Note que $\quad A \subseteq \bar{A}$

Si $z \in \bar{A}$, z es llamado un punto de adherencia de A.

Ahora sea $z \in \bar{A}$ y $r > 0$, como

$$d(z,A) = 0$$

existe $a_r \in A$ t.q

$$d(a_r, z) < r.$$

$$\boxed{\therefore \quad a_r \in B(z,r) \cap A}$$

Sea $F \subseteq E$ t.q. $A \subseteq F$, como

$$\inf\{d(x,f) : f \in F\} \leq$$
$$\inf\{d(x,a) : a \in A\}$$

para todo $x \in E$.

Concluimos que

$$d(x,F) \leq d(x,A), \text{ i.e.}$$

$$\boxed{d(x,A)=0 \implies d(x,F)=0}$$

$$\therefore \overline{A} \subseteq \overline{F}.$$

Sea A cerrado y $x \notin A$.

Como $E \setminus A$ es abierto, existe r t.q.

$$B(x,r) \subseteq E \setminus A$$

$$\therefore B(x,r) \cap A = \phi$$

Luego, si $a \in A$

$$d(x,a) \geq r$$

$$\implies x \notin \overline{A}.$$

$$\therefore A \text{ cerrado} \implies A = \overline{A}$$

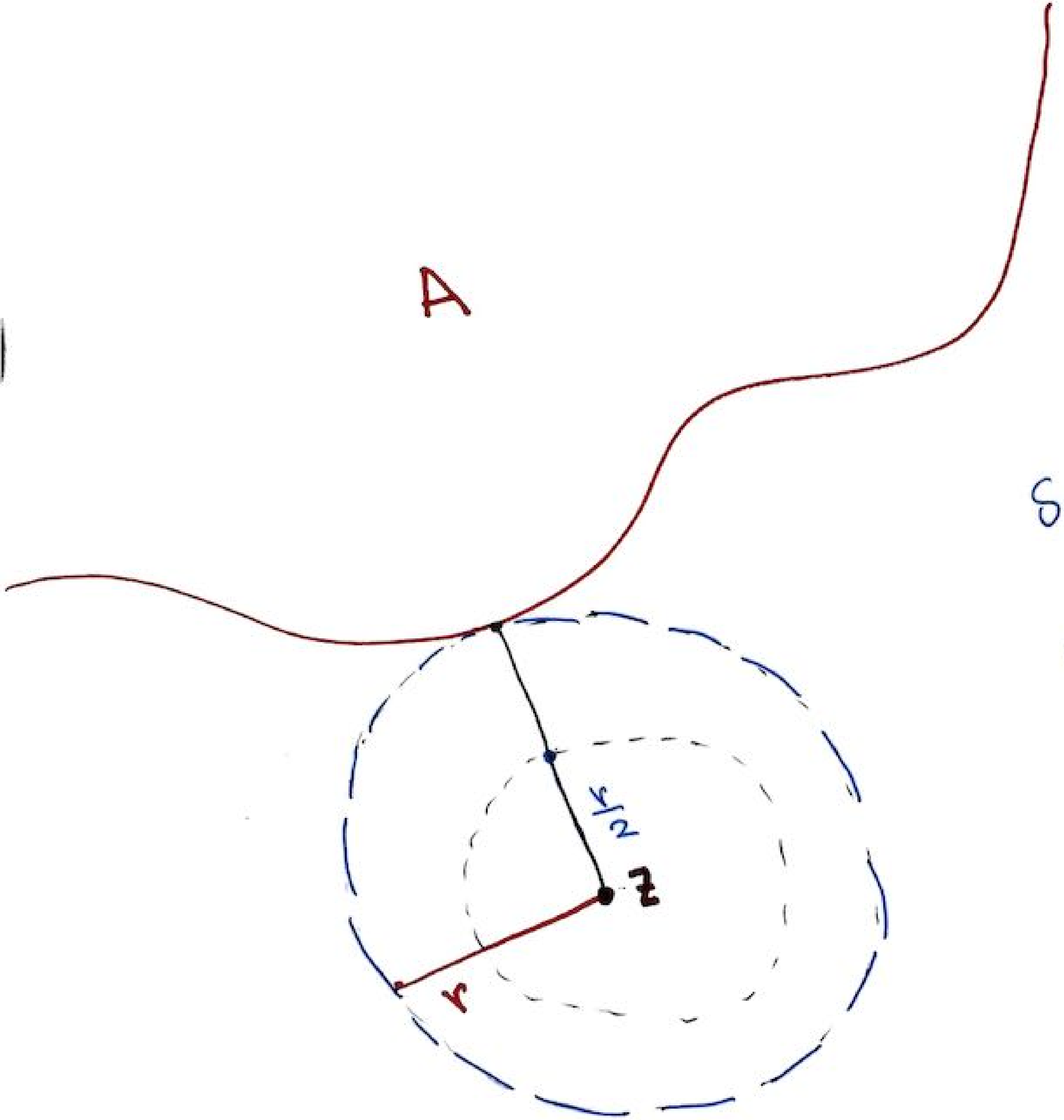
$$\boxed{\text{¿Es } \overline{A} \text{ cerrado?}}$$

Sea $z \notin \overline{A}$, entonces

$$d(z,A) = r > 0.$$

$$\implies d(z,a) \geq r \text{ para todo } a \in A.$$

5



Si $w \in B(z, \frac{r}{2})$, ent

$d(w, A) \geq \frac{r}{2}$

Vamos a mostrar que si $w \in B(z, \frac{r}{2})$ entonces

$$d(w,a) \geq \frac{r}{2}.$$

para todo $a \in A$.

Sabemos que

$$r \leq d(z,a) \leq d(z,w) + d(w,a) < \frac{r}{2} + d(w,a)$$

$$\Rightarrow \quad \frac{r}{2} < d(w,a)$$

$$\therefore \quad B(z, \tfrac{r}{2}) \subseteq E \setminus \overline{A}$$

$\therefore$ $\overline{A}$ es cerrado

Lema: Dado $A \subseteq E$, tenemos que A es cerrado sii $A = \overline{A}$.

Ejr: Dado $B \subseteq E$, entonces B es abierto sii $B = B^{o}$.

Ejr: Dados $A, B \subseteq E$, tenemos que

(i) $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cup \overline{B}$

(ii) $\overline{A \cap B} \subseteq \overline{A} \cap \overline{B}$

Def: Dado $A \subseteq E$ y $x \in E$ decimos que x es un punto de acumulación si para todo $r > 0$

$$B(x,r) \cap (A \setminus \{x\}) \neq \phi$$

Es decir $B(x,r)$ contiene puntos de $A \neq$ de x.

Ejr: Caracterize los puntos de acumulación en términos de sucesiones

Def: Dado $A \subseteq E$ y $x \in E$. Decimos que x es un punto frontera de A si para todo $r > 0$

$$B(x,r) \cap A \neq \phi$$

$$B(x,r) \cap A^c \neq \phi$$

Es decir $d(x, A) = d(x, A^c) = 0$

$$\partial A = \{\text{puntos frontera}\}$$

$$= \{x \in E : d(x,A) = d(x,A^c) = 0\}$$

Ejemplos:

a) Dado $A = \{\frac{1}{n} : n \geq 1\}$,

tenemos que

$$\overline{A} = A \cup \{0\},$$

El punto 0 es de acumulación y es el único pues

$$B\left(\frac{1}{n}, \frac{1}{(n+1)^2}\right) \cap A = \left\{\frac{1}{n}\right\}$$

si $n \geq 1$.

b) Sea $A = \{n + \frac{1}{n} : n \in \mathbb{N}\}$

$B = \{n : n \in \mathbb{N}\}$

ambos conjuntos son cerrado, pero

$$d\left(n+\frac{1}{n}, n\right) = \left|n + \frac{1}{n} - n\right| = \frac{1}{n} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$$

$$\therefore d(A,B) = 0$$

Note que

$$\mathbb{R} \setminus B = \bigcup_{n \in \mathbb{Z}} (n, n+1) \quad \text{i.e es abierto}$$

$$\mathbb{R} \setminus A = \text{?}$$

Vecindarios

Dado $x \in E$, decimos que V es un vecindario de x, si existe $r>0$ t.q.

$$B(x,r) \subseteq V.$$

De tal forma si V es abierto, tenemos que V es vecindario de todos sus puntos

Dado $A \subseteq E$, define

$$V_r(A) = \{x \in E : d(x,A) < r\}$$

Note que si $a \in A$, entonces

$$d(x,A) \leq d(x,a)$$

Luego, si $x \in B(a,r)$, ent

$$d(x,A) \leq d(x,a) < r$$

$$\therefore B(a,r) \subseteq V_r(A)$$

Ejer: Sea $x \in V_r(A)$ y $r_1 < r - d(x,A)$. Entonces

$$B(x,r_1) \subseteq V_r(A)$$

Lema: Dado $A \subseteq E$, el conjunto $V_r(A)$ es abierto para todo $r>0$.

Ahora si $x \in \bigcap_r V_r(A)$, entonces, para todo $r>0$

$$d(x,A)<r$$

Es decir $d(x,A)=0$.

$$\therefore \bar{A} = \bigcap_{r>0} V_r(A)$$

Es decir la clausura de cualquier conjunto se puede representar como intersección de abiertos.

Def: Un conjunto $A \subseteq E$ es denso en E si $\bar{A} = E$.

Un espacio (E,d) es separable si tiene un conjunto denso y numerable.

Ejm: En $(\mathbb{R}, |\cdot|)$ $\mathbb{Q}$ es denso en $\mathbb{R}$

En $(\mathbb{R}^d, \|\cdot\|)$, $\mathbb{Q}^d$ es denso en $\mathbb{R}^d$