MA0505 - Análisis I

Lección V: Compacidad

Pedro Méndez[1]

[1]Departmento de Matemática Pura y Ciencias Actuariales
Universidad de Costa Rica

Semestre I, 2021

Agenda

La Definición de Compacidad Secuencial

Dado $C \subseteq X$, diremos que C es secuencialmente compacto si cualquier sucesión $\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \subseteq C$ poseé una subsucesión convergente.

Ahora si $\{x_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$ converge a x_0, tenemos que dado $\varepsilon > 0$, existe k_0 tal que

$$k \geqslant k_0 \Rightarrow d(x_{n_k}, x_0) < \varepsilon.$$

Analizando la definición

De lo anterior,

$$x_{n_k} \in B(x_0, \varepsilon),$$

cuando $k \geqslant k_0$. Dado que $n_k \geqslant k$

$$B(x_0, \varepsilon) \cap \{\, x_m : \; m \geqslant k \,\} \neq \emptyset,$$

para $k \geqslant 1$. Por lo tanto, para todo $k \geqslant 1$

$$x_0 \in \overline{\{\, x_m : \; m \geqslant k \,\}},$$

y en consecuencia

$$x_0 \in \bigcap_{k=1}^{\infty} \overline{\{\, x_m : \; m \geqslant k \,\}}.$$

Analizando la definición

Por otro lado, si $x_0 \in \bigcap_{k=1}^{\infty} \overline{\{\, x_m : \ m \geqslant k \,\}}$ podemos tomar iterativamente:

- $x_{k_1} \in B(x_0, 1) \cap \{\, x_m : \ m \geqslant 1 \,\}$.
- $x_{k_2} \in B\left(x_0, \frac{1}{2}\right) \cap \{\, x_m : \ m \geqslant k_1 + 1 \,\}$.

  $\vdots$
- $x_{k_{n+1}} \in B\left(x_0, \frac{1}{n}\right) \cap \{\, x_m : \ m \geqslant k_n + 1 \,\}$.

Así

$$x_{k_n} \to x_0,$$

y

$$\{x_{n_k}\}_{k=1}^{\infty} \text{ es una subsucesión de } \{x_n\}_{n=1}^{\infty}.$$

Condensamos lo anterior

Lema

Si (X, d) es un espacio métrico y $C \subseteq X$, son equivalentes

1. *C es secuencialmente compacto.*
2. *$C \cap \bigcap_{k=1}^{\infty} \overline{\{\, x_m : \ m \geqslant k \,\}} \neq \emptyset$ para toda $\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \subseteq C$.*

Propiedades

Sea $x \in \overline{C}$, entonces existe $\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \subseteq C$ tal que $x_n \to x$. Si C es *secuencialmente compacto*, existe una subsucesión $\{x_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$ que converge a un punto de C. Como el límite es único, tenemos que

$$z \in C.$$

Lema

Sea C secuencialmente compacto, entonces C es cerrado y acotado.

Ejercicio

Complete la prueba del lema anterior.

Cubrimientos por abiertos

Definición

Una colección $\mathcal{U} = \{ U_\alpha : \alpha \in \Lambda \}$ de abiertos es llamado un recubrimiento de un conjunto A si

$$A \subseteq \bigcup_{\alpha \in \Lambda} U_\alpha .$$

Lema

Sea C secuencialmente compacto y $\mathcal{U}$ un recubrimiento de C. Entonces existe $\varepsilon > 0$ tal que para todo $x \in C$, existe $U \in \mathcal{U}$ que satisface

$$B(x, \varepsilon) \subseteq U.$$

Prueba del lema

Supongamos que para todo $\varepsilon > 0$ existe $x_\varepsilon \in C$ tal que

$$B(x_\varepsilon, \varepsilon) \subsetneq U_\alpha,$$

para todo $\alpha \in \Lambda$. En particular, para todo $n \in \mathbb{N}$ existe

$$\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \subseteq C$$

tal que

$$B\left(x_n, \frac{1}{n}\right) \subsetneq U_\alpha,$$

para $\alpha \in \Lambda$.

Prueba del lema

Al ser C secuencialmente compacto, existe $\{x_{n_k}\}_{k=1}^{\infty} \subseteq C$ y $x_0 \in C$ tal que $x_{n_k} \to x_0$. Como $\mathcal{U}$ es recubrimiento, existe $U_{\alpha_0} \in \mathcal{U}$ tal que

$$x_0 \in U_{\alpha_0}.$$

Sea $\varepsilon > 0$ tal que

$$B(x_0, \varepsilon) \subseteq U_{\alpha_0}$$

y tomemos k_0 tal que

$$k \geqslant k_0 \Rightarrow d(x_{n_k}, x_0) < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Prueba del lema

Con argumentos usuales podemos probar que

$$B\left(x_{n_k}, \frac{1}{n_k}\right) \subseteq B(x_0, \varepsilon)$$

cuando $\frac{1}{n_k} < \frac{\varepsilon}{2}$. Es decir

$$\begin{aligned} B\left(x_{n_k}, \frac{1}{n_k}\right) &\subseteq B(x_0, \varepsilon) \\ &\subseteq U_{\alpha_0}. \end{aligned}$$

Compacidad

Definición

Un conjunto $C \subseteq X$ es compacto si dado un recubrimeinto $\mathcal{U} = \{\, U_\alpha : \ \alpha \in \Lambda \,\}$ de C, existen $U_{\alpha_1}, \ldots, U_{\alpha_m}$ tales que

$$C \subseteq \bigcup_{k=1}^{m} U_{\alpha_k}.$$

Es decir, dado un recubrimeinto $\mathcal{U}$ por abiertos de C, existe una colección finita de $\mathcal{U}$ que recubre a C.

Equivalencia entre ambas definiciones.

Lema

Dado $C \subseteq X$ son equivalentes:

1. *C es secuencialmente compacto.*
2. *C es compacto.*

Secuencial implica compacidad

Asuma que C es secuencialmente compacto. Sea $x_1 \in C$, sabemos que existe $\epsilon > 0$ y α_1 tal que

$$B(x_1, \varepsilon) \subseteq U_{\alpha_1}.$$

Ahora, si

$$C \subseteq B(x_1, \varepsilon) \subseteq U_{\alpha_1}$$

entonces tenemos un recubrimiento finito. De lo contrario, existe

$$x_2 \in C \setminus B(x_1, \varepsilon).$$

Secuencial implica compacidad

Entonces existe α_2 tal que

$$B(x_2, \varepsilon) \subseteq U_{\alpha_2}.$$

En general si

$$C \subsetneq \bigcup_{i=1}^{m} B(x_i, \varepsilon),$$

entonces existe

$$x_{m+1} \in C \setminus \bigcup_{i=1}^{m} B(x_i, \varepsilon).$$

Note que por construcción, si $i \neq j$

$$d(x_i, x_j) \geqslant \varepsilon.$$

Secuencial implica compacidad

Entonces existe α_2 tal que

$$B(x_2, \varepsilon) \subseteq U_{\alpha_2}.$$

En general si

$$C \subsetneq \bigcup_{i=1}^{m} B(x_i, \varepsilon),$$

entonces existe

$$x_{m+1} \in C \setminus \bigcup_{i=1}^{m} B(x_i, \varepsilon).$$

Note que por construcción, si $i \neq j$

$$d(x_i, x_j) \geqslant \varepsilon.$$

Secuencial implica compacidad

Concluimos que existe m tal que

$$C \subseteq \bigcup_{i=1}^{m} B(x_i, \varepsilon) \subseteq \bigcup_{i=1}^{m} U_{\alpha_i},$$

o existe una sucesión $\{x_k\}_{k=1}^{\infty}$ tal que, si $i \neq j$,

$$d(x_i, x_j) \geqslant \varepsilon.$$

Esta sucesión no tiene subsucesiones de Cauchy, i.e. no tiene subseciones convergentes.

Compacidad implica secuencial

Sea $\{x_m\}_{m=1}^{\infty}$ una sucesión en C y considere

$$U_n = \left(\overline{\{\, x_m : \ m \geqslant n \,\}}\right)^c .$$

Entonces

$$U_n \subset U_{n+1},$$

$$X \setminus \bigcup_{n=1}^{\infty} U_n = \bigcap_{n=1}^{\infty} \overline{\{\, x_m : \ m \geqslant n \,\}}.$$

Ahora, si $\{x_m\}_{m=1}^{\infty}$ no tiene una subsucesión convergente en C tenemos que

$$C \cap \bigcap_{k=1}^{\infty} \overline{\{\, x_m : \ m \geqslant k \,\}} = \emptyset.$$

Compacidad implica secuencial

Luego

$$C \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} \left(\overline{\{ x_m : \ m \geqslant n \}} \right)^c = \bigcup_{n=1}^{\infty} U_n.$$

Por compacidad, existe $\alpha_1, \ldots, \alpha_m$ tal que

$$C \subset \bigcup_{n=1}^{m} U_{\alpha_m}.$$

Compacidad implica secuencial

En particular

$$C \subset \bigcup_{n=1}^{m_0} U_n = U_{m_0},$$

donde $m_0 = \max\{\alpha_1, \ldots, \alpha_m\}$.
Pero

$$\{\, x_k : \ k \geqslant m_0 \,\} \subset C \subset \left(\overline{\{\, x_k : \ k \geqslant m_0 \,\}}\right)^c .$$

Compacidad y funciones continuas

Sea $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ una función continua, entonces existen $x_1, x_2 \in [a, b]$ tal que

$$f(x_1) \leqslant f(x) \leqslant f(x_2),$$

para todo $x \in [a, b]$. Por el Teorema del valor intermedio

$$f([a, b]) \leqslant [f(x_1), f(x_2)].$$

Luego el compacto $[a, b]$ es mapeado en el compacto $[f(x_1), f(x_2)]$.

Compacidad y funciones continuas

Sean $f : X \to Y$ una función continua y $K \subset X$ compacto. Tome $K_1 = f(K)$ y considere

$$\mathcal{U} = \{ U_\alpha : \ \alpha \in \Lambda_1 \}$$

un cubrimiento de K_1. Entonces

$$f(K) \subset \bigcup_{\alpha \in \Lambda_1} U_\alpha .$$

Luego

$$K_1 \subset f^{-1} \left\{ \bigcup_{\alpha \in \Lambda_1} U_\alpha \right\} .$$

Compacidad y funciones continuas

Como K es compacto, existen $\alpha_1, \ldots, \alpha_m$ tal que

$$K \subset f^{-1}\left\{\bigcup_{i=1}^{m} U_{\alpha_i}\right\}.$$

Es decir, si $x \in K$, entonces

$$f(x) \in \bigcup_{i=1}^{m} U_{\alpha_i},$$

i.e.

$$f(K) \subset \bigcup_{i=1}^{m} U_{\alpha_i}.$$

Compacidad y funciones continuas

Lema

Sean $f : X \to Y$ una función continua y $K \subset X$ compacto. Entonces $f(K)$ es compacto.

Compacidad

Sea

$$\mathcal{F} = \{\, F_\alpha : \ \alpha \in \Lambda \,\}$$

una colección de conjuntos cerrados tales que

$$\bigcap_{\alpha \in A} F_\alpha \neq \emptyset.$$

si $A \subset \Lambda$ es finito. Asuma que

$$\bigcap_{\alpha \in \Lambda} F_\alpha = \emptyset.$$

Entonces

$$X = \bigcup_{\alpha \in \Lambda} X \setminus F_\alpha.$$

Compacidad

Ahora si X es compacto, entonces existen $\alpha_1, \ldots, \alpha_m$ tal que

$$X = \bigcup_{i=1}^{m} X \setminus F_{\alpha_i},$$

i.e.

$$\emptyset = \bigcap_{i=1}^{m} F_{\alpha_i}.$$

Compacidad

Ahora si X es compacto, entonces existen $\alpha_1, \ldots, \alpha_m$ tal que

$$X = \bigcup_{i=1}^{m} X \setminus F_{\alpha_i},$$

i.e.

$$\emptyset = \bigcap_{i=1}^{m} F_{\alpha_i}.$$

Compacidad

Teorema

Sea (X, d) un espacio métrico, son equivalentes

1. *X es compacto.*
2. *Si $\mathcal{F} = \{ F_\alpha : \alpha \in \Lambda \}$ es una colección de conjuntos cerrados tales que*
$$\bigcap_{\alpha \in A} F_\alpha \neq \emptyset.$$
si $A \subset \Lambda$ es finito. Entonces
$$\bigcap_{\alpha \in \Lambda} F_\alpha \neq \emptyset.$$

La Prueba es Ejercicio

- La prueba del teorema se deja como ejercicio.
- A la segunda propiedad del teorema 1 le llamamos la propiedad de intersecciones finitas.

Compacidad en $\mathbb{R}^d$

Asuma que

$$C = [a_1, b_1] \times \ldots \times [a_d, b_d]$$

es compacto si $a_i \leqslant b_i$ para $1 \leqslant i \leqslant d$. Sabemos que en este caso todo compacto es cerrado y acotado.

¿Cerrado + Acotado = Compacto?

La respuesta general es no, ¡pero en $\mathbb{R}^d$ sí!

- Sea F cerrado y acotado en $\mathbb{R}^d$. Existe $C_n = [-n, n] \times \ldots \times [-n, n]$ tal que $F \subseteq C_n$.
- Sea $\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \subseteq F$. Como C_n es compacto, existe $\{x_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$ subsucesión de $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ tal que

$$x_{n_k} \xrightarrow[n_k \to \infty]{} x_0 \in C_n$$

Como $\{x_{n_k}\}_{k=1}^{\infty} \subseteq F$ y F es cerrado, entonces $x_0 \in F$. Es decir, F es secuencialmente compacto.

El Teorema de Heine y Borel

Teorema

Heine-Borel Sea $C \subseteq \mathbb{R}^d$. Entonces C es compacto respecto a la norma euclídea si y sólo si es cerrado y acotado.

Cajas

Lema

Dados $a_i \leqslant b_i$, $1 \leqslant i \leqslant d$, el conjunto

$$C = [a_1, b_1] \times \ldots \times [a_d, b_d]$$

es compacto en $(\mathbb{R}^d, \|\cdot\|)$.

Dividimos C en 2^d rectángulos de la forma

$$[c_1^i, e_1^i] \times \cdots \times [c_d^i, e_d^i] = C_i$$

donde $c_j^i = a_j$ ó $\frac{a_j+b_j}{2}$ y $e_j^i = b_j$ ó $\frac{a_j+b_j}{2}$.

Prueba del Lema

- Tomemos $\mathcal{U} = \{\, U_\alpha : \ \alpha \in \Omega \,\}$ es un recubrimiento de C tal que $C \subsetneq \bigcup_{m=1}^{\infty} U_{\alpha_i}$ para $\alpha_1, \ldots, \alpha_m \subseteq \Lambda$.
- Si dado $1 \leqslant i \leqslant 2^d$ existen $\alpha^i_1, \ldots, \alpha^i_{m_i}$ tal que $C_i \subseteq \bigcup_{j=1}^{m_i} U_{\alpha^i_j}$, entonces

$$C \subseteq \bigcup_{i=1}^{2^d} \bigcup_{j=1}^{m_i} U_{\alpha^i_j}.$$

Prueba del Lema

- Es decir, existe i_0 tal que

$$C_{i_0} \subsetneq \bigcup_{m=1}^{\infty} U_{\alpha_i}$$

para $\{ \alpha_1, \ldots, \alpha_m \} \subseteq \Lambda$

- Dividiendo C_{i_0} en 2^d rectángulos obtenemos

$$C_{i_1} \subseteq C_{i_0}, \;\; \text{y} \;\; C_{i_1} \subsetneq \bigcup_{m=1}^{\infty} U_{\alpha_i}$$

para cualquier $\{ \alpha_1, \ldots, \alpha_m \} \subseteq \Lambda$

Prueba del Lema - Iterando

- Además

$$[c_1^{i_0}, e_1^{i_0}] \times \cdots \times [c_d^{i_0}, e_d^{i_0}] = C_{i_0}$$
$$[c_1^{i_1}, e_1^{i_1}] \times \cdots \times [c_d^{i_1}, e_d^{i_1}] = C_{i_1},$$

con $[c_j^{i_1}, e_j^{i_1}] \subseteq [c_j^{i_0}, e_j^{i_0}]$ y

$$\begin{aligned} |e_j^{i_1} - c_j^{i_1}| &= \frac{1}{2}|e_j^{i_0} - c_j^{i_0}| \\ &= \frac{1}{4}|b_j - a_j|. \end{aligned}$$

Prueba del Lema - El caso general

Iterando el proceso obtenemos

$$[c_1^{i_j}, e_1^{i_j}] \times \cdots \times [c_d^{i_j}, e_d^{i_j}] = C_{i_j}$$

tal que

$$[c_\ell^{i_j}, e_\ell^{i_j}] \subseteq [c_\ell^{i_j - 1}, e_\ell^{i_j - 1}]$$

y

$$|c_\ell^{i_j} - e_\ell^{i_j}| = \frac{1}{2^j} |b_\ell - a_\ell|.$$

Prueba del Lema - Intervalos Encajados

Por el teorema de los Intervalos Encajados, existe z_ℓ tal que $\bigcap_{j=1}^{\infty}[c_\ell^{i_j}, e_\ell^{i_j}] = \{ z_\ell \}$. Es decir,

$$\bigcap_{j=1}^{\infty} C_{i_j} = \{ z \}, \; z = (z_1, \ldots, z_d).$$

Como $z \in C$, existe α_0 tal que $U_{\alpha_0} \in U$ y $z \in U_{\alpha_0}$. Sea $\varepsilon > 0$ tal que $B(z, \varepsilon) \subseteq U_{\alpha_0}$.

Ejercicio

Pruebe que existe j_0 tal que $C_{i_j} \subseteq B(z, \varepsilon)$ para $j \geqslant j_0$.

Valores Extremos

Si $K \subseteq X$ y $f: X \to \mathbb{R}$ es continua, entonces $f(K)$ es compacto y en particular, acotado.
Sean $a = \operatorname{ínf}_{x \in K} f(x)$ y $b = \sup_{x \in K}$, nos preguntamos:

¿Se alcanzan "a" y "b"?

Damos Respuesta

- Dado $n \in \mathbb{N}$, existe $x_n \in K$ tal que

$$a \leqslant f(x_n) \leqslant a + \frac{1}{n} \tag{2.1}$$

- Como $\{ x_n \}_{n=1}^{\infty} \subseteq K$, existe $\{ x_{n_k} \}_{k=1}^{\infty}$ que satisface
-
$$x_{n_k} \xrightarrow[n_k \to \infty]{} y_0 \in K.$$
- Entonces $f(x_{n_k}) \to f(y_0)$ cuando $n_k \to \infty$.
- De 2.1 se tiene que $f(x_{n_k}) \to a$ cuando $n_k \to \infty$. Por lo tanto $a = f(y_0)$.

Resumen

- Definición de compacidad secuencial. 3
- Equivalencia entre compacidad secuencial y la propiedad de intersección. 1.
- Compacidad secuencial implica compacidad usual. 2
- Definición de recubrimiento por abiertos. 1.
- Equivalencia entre compacidad y compacidad secuencial. 4
- Que las funciones continuas mandan compactos en compactos. 5
- El Teorema de las Intersecciones Finitas. 1
- El Teorema Heine-Borel sobre compactos en $\mathbb{R}^d$. 2
- Las cajas son compactos de $\mathbb{R}^d$. 6

Ejercicios

- Lista 5
  - Terminar el detalle en la prueba del lema de compacidad secuencial a la usual. 2.
  - El último detalle de la prueba sobre las cajas compactas. 2

Lecturas adicionales I

- S.Cambronero.
  Notas MA0505.
  20XX.
- I.Rojas
  Notas MA0505.
  2018.