MA0505 - Análisis I

Lección XV: Funciones Medibles

Pedro Méndez[1]

[1] Departmento de Matemática Pura y Ciencias Actuariales
Universidad de Costa Rica

Semestre I, 2021

Agenda

1. Funciones Lebesgue Medibles
   - Definición y Propiedades
   - Álgebra de Funciones Medibles

Definición

Definición

Sea $f : E \to \overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$. Decimos que f es medible si para todo $a \in \mathbb{R}$ vale que

$$\{x \in E : \ f(x) > a\} \in \mathcal{M}.$$

De ahora en adelante

$$\{f > a\} = \{x \in E : \ f(x) > a\}.$$

Note que

$$E = \bigcup_{k=1}^{\infty} \{f > -k\} \cup \{f = -\infty\}.$$

Entonces E es medible si y sólo si $\{f = -\infty\}$ es medible. Por el resto de esta sección asumimos que E es medible.

Ejemplos

(I) Sea $f : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ continua. Entonces $\{ f > a \}$ es abierto.

(II) Si $f = \mathbf{1}_A$, entonces

$$\{ f > a \} = \begin{cases} E & \text{si } a < 0 \\ A & \text{si } 0 \leqslant a < 1 \\ \emptyset & \text{si } a \geqslant 1 \end{cases}$$

Equivalencias

Teorema

Sea $f : E \to \mathbb{R}$ con E medible. Entonces f es medible si se cumple cualquiera de los siguientes postulados para todo $a \in \mathbb{R}$.

(I) $\{f > a\}$ *es medible.*

(II) $\{f < a\}$ *es medible.*

(III) $\{f \leqslant a\}$ *es medible.*

(IV) $\{f \geqslant a\}$ *es medible.*

Prueba del Teorema

Note que

$$\{f > a\} = \bigcup_{n=1}^{\infty}\left\{f \geqslant a + \frac{1}{n}\right\} = \{f \leqslant a\}^c$$

$$\{f \geqslant a\} = \bigcap_{n=1}^{\infty}\left\{f > a - \frac{1}{n}\right\} = \{f < a\}^c$$

Si $f : E \to \mathbb{R}$ es medible, entonces los conjuntos

$$\{ f > -\infty \} = \bigcup_{k=1}^{\infty} \{ f > -k \},\ \{ f < \infty \} = \bigcup_{k=1}^{\infty} \{ f \leqslant k \},$$
$$\{ f = \infty \},\ \{ a \leqslant f \leqslant b \},\ \{ a \leqslant f < b \}$$

son medibles.

Funciones Borel Medibles

Definición

Diremos que $f : E \to \mathbb{R}$ es Borel medible si

1. $E \in \mathcal{B}$.
2. $\{f > a\} \in \mathcal{B}$ para $a \in \mathbb{R}$.

Esta definición nos será útil para realizar los ejercicios.

Teorema

Sea $f : E \to \mathbb{R}$. Entonces f es medible si y sólo si $f^{-1}(G)$ es medible para todo abierto G.

Prueba del Teorema

- Supongamos que la imagen inversa de abiertos es medible. Entonces si $G =]a, \infty[$, tenemos que

$$f^{-1}(G) = \{\, x \in E : \; f(x) > a \,\}.$$

- Por otro lado, si G es un abierto en $\mathbb{R}$, entonces $G = \bigcup_{k=1}^{\infty}]a_k, b_k[$. De esta manera

$$f^{-1}(G) = \bigcup_{k=1}^{\infty} f^{-1}(]a_k, b_k[) = \bigcup_{k=1}^{\infty} \{\, a_k < f < b_k \,\}.$$

Composición

Lema

Sea $f : E \to \mathbb{R}$ medible y $\phi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continua. Entonces $\phi \circ f$ es medible.

Si G es abierto, entonces

$$(\phi \circ f)^{-1}(G) = f^{-1}(\phi^{-1}(G)).$$

Como ϕ es continua, entonces $\phi^{-1}(G)$ es abierto y $f^{-1}(\phi^{-1}(G))$ es medible.
En particular si f es medible, $|f|$, $|f|^p$, e^{cf}, $f^+ = \text{máx}\{ f, 0 \}$ y $f^- = \text{mín}\{ f, 0 \}$ son medibles.

Casi Por Doquier

Definición

Diremos que una propiedad se cumple casi por doquier si se cumple excepto en un conjunto de medida cero.

Lema

Sean $f : E \to \mathbb{R}$, $g : E \to \mathbb{R}$. Si f es medible y $g = f$ casi por doquier, entonces g es medible.

Prueba del Lema

Sea $a \in \mathbb{R}$, entonces

$$\{ g > a \} = (\{ g > a \} \cap \{ f = g \}) \cup (\{ g > a \} \cap \{ f \neq g \}).$$

El conjunto $\{ g > a \} \cap \{ f = g \} = \{ f > a \} \cap \{ f = g \}$ es medible y $\{ f \neq g \}$ tiene medida cero de manera tal que $\{ g > a \}$ es la unión de medibles.

Una Variante

Tenemos una variante del lema 1 para funciones con valores infinitos.

Lema

Sea $f : E \to \overline{\mathbb{R}}$ medible con

$$m(f = \infty) = m(f = -\infty) = 0.$$

Entonces $\phi \circ f$ es medible para ϕ continua.

Si llamamos $F = \{ x \in E : \ f \in \mathbb{R} \}$ y consideramos $f_1 = f$ cuando $x \in F$ y cero si no, entonces $\phi \circ f_1 = \phi \circ f$ c.p.d. Como $\phi \circ f_1$ es medible, entonces $\phi \circ f$ también lo es.

Espacio Vectorial de Funciones Medibles

Lema

Sean $f : E \to \mathbb{R}$, $g : E \to \mathbb{R}$ medibles. Entonces $\{ f > g \}$ es medible.

Sea $\{ q_n \}_{n=1}^{\infty}$ una enumeración de $\mathbb{Q}$. Entonces

$$\{ f > g \} = \bigcup_{n=1}^{\infty} \{ f > q_n > g \} = \bigcup_{n=1}^{\infty} \{ f > q_n \} \cap \{ q_n > g \}$$

es una unión de medibles.

Resumen

- La definición 1 de función medible y el teorema 1 que nos da condiciones equivalentes.
- La definición 2 de función Borel medible.
- La caracterización 2 de funciones medibles con abiertos.
- El lema 1 sobre la composición de funciones medibles con continuas.
- La definición 3 de propiedades que se dan casi por doquier junto con el lema 2.
- El lema 3 que es levemente diferente del lema 1.
- El lema 4 técnico necesario para hablar del álgebra de medibles.

Ejercicios

- Lista 15
  -

Lecturas adicionales I

- S.Cambronero.
  Notas MA0505.
  20XX.
- I.Rojas
  Notas MA0505.
  2018.