Integral funciones medibles

Sea $f: E \to \overline{\mathbb{R}}$ una función medible. Entonces

$$f = f^+ - f^-$$

con $f^+ = \max\{0, f\}$

$f^- = \max\{0, -f\}$

Sabemos que f^+ y f^- son medibles y no negativas. Entonces podemos definir

$$\int_E f^+ dx \quad y \quad \int_E f^- dx.$$

Si al menos una de las integrales es finita, podemos definir

$$\int_E f dx = \int_E f^+ dx - \int_E f^- dx.$$

Decimos que f es integrable o $f \in L(E)$ si

$$\int_E f^+ dx < \infty \quad y \quad \int_E f^- dx < \infty.$$

Note que

$$\left| \int_E f dx \right| \leq \int_E f^+ dx + \int_E f^- dx = \int_E |f| dx$$

Note que si $\int_E |f|\,dx < \infty$

entonces $f \in \mathbb{R}$ c.p.d.

Teorema: Sea $f: E \to \overline{\mathbb{R}}$ y $g: E \to \overline{\mathbb{R}}$ funciones medibles t.q. $\int_E f\,dx$ y $\int_E g\,dx$ existen.

(i) Sea $f \leq g$ c.p.d en E. Entonces

$$\int_E f\,dx \leq \int_E g\,dx$$

En particular si $f = g$ c.p.d en E entonces

$$\int_E f\,dx = \int_E g\,dx.$$

(ii) Si $E_1 \subseteq E$, entonces $\int_{E_1} f\,dx$ existe.

(iii) Si $E = \dot{\bigcup}_{k=1}^{\infty} E_k$, entonces

$$\int_E f\,dx = \sum_{k=1}^{\infty} \int_{E_k} f\,dx.$$

(iv) Si $E_1 \subseteq E$ con $m(E_1) = 0$, entonces

$$\int_{E_1} f\,dx = 0.$$

Pba:

Note que $f \leq g$ c.p.d implica

$$f^+ = \max\{0, f\} \leq \max\{0, g\} = g^+$$

$$g^- = \max\{0, -g\} \leq \max\{0, -f\} = f^-$$

Luego

$$\int_E f^+ dx \leq \int_E g^+ dx$$

$$\int_E g^- dx \leq \int_E f^- dx$$

ent

$$\int_E f^+ dx - \int_E f^- dx \leq$$

$$\int_E g^+ dx - \int_E g^- dx.$$

Note que

$$0 \leq \int_{E_1} f^+ dx \leq \int_E f^+ dx$$

y

$$0 \leq \int_{E_1} f^- dx \leq \int_E f^- dx.$$

Finalmente si

$$\int_E f^+ dx = \sum_{u=1}^{\infty} \int_{E_u} f^+ dx < \infty$$

ó

$$\int_E f^- dx = \sum_{k=1}^{\infty} \int_{E_u} f^- dx < \infty.$$

Ent

$$\int_E f dx = \sum_{u=1}^{\infty} \int_{E_u} f dx \quad \blacksquare$$

<u>Teorema</u>: Sea $f: E \to \overline{\mathbb{R}}$ y $g: E \to \overline{\mathbb{R}}$ funciones medibles t.q. $\int_E f dx$ y $\int_E g dx$ existen.

Entonces

$$\int_E cf\,dx = c\int_E f\,dx.$$

Además si $f, g \in L^1(E)$, ent

$$\int_E (f+g)\,dx = \int_E f\,dx + \int_E g\,dx$$

Pba:

Sea $c \leq 0$, entonces

$$(cf)^+ = -cf^-$$
$$(cf)^- = -cf^+$$

Entonces

$$\int_E cf\,dx = -c\int_E f^-\,dx + c\int_E f^+\,dx$$

$$= c\int_E f\,dx.$$

Ahora si f y g son integrables

$$0 \leq \int_E |f+g|\,dx \leq \int_E |f|\,dx + \int_E |g|\,dx < \infty.$$

Defina

$E_1 = \{f \geq 0, g \geq 0\}$

$E_2 = \{f \leq 0, g \leq 0\}$

$E_3 = \{f \geq 0, g < 0, f+g \geq 0\}$

$E_4 = \{f < 0, g \geq 0, f+g \geq 0\}$

$E_5 = \{f \geq 0, g < 0, f+g < 0\}$

$E_6 = \{f < 0, g \geq 0, f+g < 0\}$

Note que $\quad E = \bigcup_{i=1}^{6} E_i$

Note que

$$\int_{E_1} (f+g)\,dx = \int_{E_1} (f^+ + g^+)\,dx$$

$$= \int_{E_1} f^+\,dx + \int_{E_1} g^+\,dx$$

$$= \int_{E_1} f\,dx + \int_{E_1} g\,dx$$

$$\int_{E_2} (f+g)\,dx = \int_{E_2} -(f^- + g^-)\,dx$$

$$= -\int_{E_2} (f^- + g^-)\,dx$$

$$= -\int_{E_2} f^-\,dx - \int_{E_2} g^-\,dx$$

$$= \int_{E_2} f\,dx + \int_{E_2} g\,dx$$

$$\int_{E_3} [(f+g) - g]\,dx =$$

$$\int_{E_3} (f+g)\,dx + \int_{E_3} (-g)\,dx =$$

Ent

$$\int_{E_3} f\,dx = \int_{E_3} (f+g)\,dx + \int_{E_3} (-g)\,dx$$

$$= \int_{E_3} (f+g)\,dx - \int_{E_3} g\,dx$$

$$\therefore \int_{E_3} (f+g)\,dx = \int_{E_3} f\,dx + \int_{E_3} g\,dx$$

$$\int_{E_5} [-(f+g)+f]\,dx = \int_{E_5} -g\,dx$$

$$= \int_{E_5} -(f+g)\,dx + \int_{E_5} f\,dx$$

Entonces

$$\int_{E_5} f\,dx + \int_{E_5} g\,dx = \int_{E_5} (f+g)\,dx$$

El resto de la prueba se deja como ejercicio. ∎

Luego si $f_1, \dots, f_N \in L(E)$. Ent

$$\sum_{k=1}^{N} a_k f_k \in L(E)$$

y

$$\int_E \left(\sum_{k=1}^{N} a_k f_k\right) dx = \sum_{k=1}^{N} a_k \int_E f_k\,dx$$

Ojo: En general no es cierto que

$$\int_E (f-g)\,dx = \int_E f\,dx - \int_E g\,dx$$

tome

$$f = \mathbb{1}_{[n,+\infty)}$$

$$g = \mathbb{1}_{[n+1,+\infty)}$$

7

Sin embargo si f y ϕ son medibles, $\phi \leq f$ c.p.d. con $\phi \in L(E)$. Entonces

$$f^- \leq \phi^-$$

i.e.

$$\int_E f^- dx \leq \int_E \phi^- dx < \infty$$

por lo tanto $\int_E f \, dx$ existe.

Ahora si

$$\int_E f^+ dx = +\infty$$

i.e. $f \notin L(E)$

Ent $f-\phi \notin L(E)$, y

$$\int_E (f-\phi) dx = \int_E (f-\phi)^+ dx = +\infty.$$

$$\boxed{\text{Si } \phi \leq f \text{ c.p.d. y } \phi \in L(E), \text{ ent } \int_E (f-\phi)\, dx = \int_E f\, dx - \int_E \phi\, dx}$$

Las condiciones para que $f \cdot g$ sea integrable son más complejas. Por ejemplo si $f \in L(E)$ y

$$|g(x)| \leq M$$

para todo $x \in E$. Ent $f \cdot g \in L(E)$

Teoremas de convergencia

Teorema: Convergencia monótona

Sea $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ una sucesión de funciones medibles en E, tales que

$$\lim_{n\to\infty} f_n = f \quad \text{c.p.d en } E.$$

(i) Si existe $\phi \in L(E)$ tal que

$$\phi \leq f_n \leq f_{n+1} \quad \text{c.p.d.}$$

para $n \geq 1$. Ent

$$\lim_{n\to\infty} \int_E f_n \, dx = \int_E f \, dx$$

(ii) Si existe $\phi \in L(E)$ tal que

$$f_{n+1} \leq f_k \leq \phi$$

para $n \geq 1$. Ent

$$\lim_{n\to\infty} \int_E f_n \, dx = \int_E f \, dx.$$

Pba: Note que si (i) se cumple

$$f_n - \phi \geq 0 \quad \text{y} \quad f_{n+1} - \phi \geq f_n - \phi$$

para cada $n \geq 1$. Entonces

$$\lim_{n\to\infty} \int_E (f_n - \phi)\, dx = \int_E (f - \phi)\, dx$$

i.e.

$$\lim_{n\to\infty} \int_E f_n \, dx - \int_E \phi \, dx = \int_E f \, dx - \int_E \phi \, dx$$

Teorema (Fatou)

Sea $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ una sucesión de funciones medibles en E. Si existe $\phi \in L(E)$ tal que $f_n \geq \phi$ c.p.d en E para $n \geq 1$. Entonces

$$\int_E \left(\liminf_{n\to\infty} f_n\right) dx \leq \liminf_{n\to\infty} \int_E f_n \, dx$$

Teorema (Convergencia dominada)

Sea $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ una sucesión de funciones medibles en E, tales que

$$\lim_{n\to\infty} f_n = f \text{ en } E.$$

Si existe $\phi \in L(E)$ t.q.

$$|f_n| \leq \phi \quad \text{c.p.d en } E$$

para $n \geq 1$. Entonces

$$\lim_{n\to\infty} \int_E f_n \, dx = \int_E f \, dx$$

Pba: Considere $\phi + f_n$ y $\phi - f_n$

Teorema: Sea $f_n \in L(E)$, $n \geq 1$

Si $\lim\limits_{n \to \infty} f_n = f$ uniformemente

en E con $m(E) < \infty$. Entonces

$f \in L(E)$ y

$$\lim_{n \to \infty} \int_E f_n \, dx = \int_E f \, dx.$$

Pba: Ej.v

Note que $f_n(x) = \frac{1}{n}$ converge a

cero en $\mathbb{R}$, pero

$$\int_{\mathbb{R}} f_n \, dx = +\infty.$$