MA0505 - Análisis I

Lección VI: Completitud

Pedro Méndez[1]

[1] Departmento de Matemática Pura y Ciencias Actuariales
Universidad de Costa Rica

Semestre I, 2021

Agenda

Un Recordatorio. . .

A diferencia de *compacidad*, este concepto es intrínseco a los espacios métricos.
Recordemos que una sucesión $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ es de Cauchy si para $\varepsilon > 0$, existe un $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que

$$n, m \geqslant n_0 \Rightarrow d(x_n, x_m) < \varepsilon.$$

Ejercicio

- Toda sucesión convergente es de Cauchy.
- Toda sucesión de Cauchy es acotada.

La Definición

Definición

A un espacio (X, d) le llamamos completo si toda sucesión de Cauchy en X es convergente.

Como ejemplo consideremos el espacio $\{ f : [0,1] \to \mathbb{R}, \; f \text{ continua} \}$. La distancia es

$$d_\infty(f, g) = \sup_{x \in [0,1]} |f(x) - g(x)|.$$

Si $x \in [0,1]$ y $(f_n)_{n=1}^\infty$ es de Cauchy, entonces existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $d_\infty(f_n, f_m) < \frac{\varepsilon}{2}$ cuando $n, m \geqslant n_0$.

Continuamos el ejemplo

Entonces vale que

$$|f_n(x) - f_m(x)| \leqslant d_\infty(f_n, f_m) < \varepsilon$$

por lo que $(f_n(x))_{n=1}^{\infty}$ es de Cauchy en $\mathbb{R}$. Al ser $\mathbb{R}$ completo, llamemos

$$f(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x)$$

Vamos a mostrar que $f \in X$, es decir que f es continua. Para ello, si $x \in [0, 1]$, existe $m_1 \geqslant n_0$ tal que

$$m \geqslant m_1 \Rightarrow |f(x) - f_m(x)| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

¡Aquí concluimos!

Entonces

$$
\begin{aligned}
|f(x) - f_n(x)| &\leqslant |f(x) - f_{m_1}(x)| + |f_{m_1}(x) - f_n(x)| \\
&< \frac{1}{2}\varepsilon + \frac{1}{2}\varepsilon = \varepsilon
\end{aligned}
$$

cuando $n \geqslant n_0$.
Por lo tanto $f_n \xrightarrow[n\to\infty]{} f$ uniformemente y concluimos que f es continua.

Observación

Como es usual para probar que una sucesión de Cauchy converge, empezamos encontrando un candidato para el límite.

Espacios Completos y Conjuntos Cerrados

Tomemos $C \subseteq X$ cerrado y X completo. Sea $(x_n)_{n=1}^{\infty} \subseteq C \subseteq X$ de Cauchy.
Como X es completo, existe $x_0 \in X$:

$$x_n \xrightarrow[n\to\infty]{} x_0.$$

Como C es cerrado, $x_0 \in C$ y así (C, d) es un espacio completo.

El Otro Lado

Por otro lado si (C, d) es completo con $C \subseteq X$, tomemos $(x_n)_{n=1}^{\infty} \subseteq C$ y $x_0 \in \overline{C}$ tal que en X vale:

$$x_n \xrightarrow[n\to\infty]{} x_0.$$

Dado que toda sucesión convergente es de Cauchy, tenemos que para $\varepsilon > 0$, existe n_0 tal que

$$n, m \geqslant n_0 \Rightarrow d(x_n, x_m) < \varepsilon.$$

Entonces $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ es de Cauchy en (C, d) y por tanto

$$x_n \xrightarrow[n\to\infty]{} x_0' \in C \Rightarrow \overline{C} \subseteq C.$$

El Resultado

Lema

Sea (X, d) un espacio métrico, entonces

1. *Si (C, d) es completo, entonces C es cerrado en (X, d).*
2. *Si $C \subseteq X$ es cerrado, entonces (C, d) es completo.*

Analicemos los Compactos

Por otro lado si (X, d) es compacto y $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ es de Cauchy, existe $(x_{n_k})_{k=1}^{\infty} \subseteq (x_n)_{n=1}^{\infty}$ que converge a $x_0 \in X$.
Existe n_0 tal que

$$n, m \geqslant n_0 \Rightarrow d(x_n, x_m) < \frac{1}{2}\varepsilon.$$

Sea $k_0 \geqslant n_0$ tal que

$$k \geqslant k_0 \Rightarrow d(x_0, x_{n_k}) < \frac{1}{2}\varepsilon.$$

Juntamos lo Anterior

Vale que

$$\begin{aligned} d(x_n, x_0) &\leqslant d(x_n, x_{n_k}) + d(x_{n_k}, x_0) \\ &< \frac{1}{2}\varepsilon + \frac{1}{2}\varepsilon = \varepsilon \end{aligned}$$

cuando $n \geqslant n_0$.

Lema

Sea (X, d) un espacio métrico compacto. Entonces (X, d) es completo.

Observación

Compacto $\Rightarrow$ completo. Pero completo $\not\Rightarrow$ compacto. Vea por ejemplo que $\mathbb{R}$ es completo pero no compacto.

¿Completo + (Algo) $\Rightarrow$ Compacto?

La siguiente propiedad junto con completitud implica compacidad.

Definición

Llamamos a un espacio métrico totalmente acotado (o *paracompacto*) si para $\varepsilon > 0$ existen $x_1, \ldots, x_m$ tales que

$$X \subseteq \bigcup_{i=1}^{m} B(x_i, \varepsilon).$$

Note que si

$$X \subseteq \bigcup_{x \in X} B(x, \varepsilon),$$

entonces todo espacio compacto es totalmente acotado.

¿Acotado y Totalmente Acotado?

Ejemplo

Consideremos la métrica definida en $\mathbb{N}$:

$$\rho(n, m) = \begin{cases} 1, & n \neq m, \\ 0, & n = m. \end{cases}$$

Podemos ver que $\mathbb{N} = B(n, 2)$ para cualquier n. Sin embargo $B\left(n, \frac{1}{2}\right) = \{ n \}$ y por lo tanto no podemos cubrir $\mathbb{N}$ por un número finito de bolas de radio $\frac{1}{2}$.
Se sigue que $(\mathbb{N}, \rho)$ es acotado pero no totalmente acotado.

Vizlumbrando la relación

Analicemos la relación entre compacidad, completitud y ser totalmente acotado.
Tomemos $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ en (X, d) totalmente acotado.

Ejercicio

Si el conjunto $\{\, x_n : \; n \in \mathbb{N} \,\}$ es finito, entonces existe $(x_{n_k})_{k=1}^{\infty} \subseteq (x_n)_{n=1}^{\infty}$ que converge a un punto de la sucesión.

Así, asumimos que $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ tiene una cantidad infinita de puntos distintos. Vamos a ver que existe una subsucesión de Cauchy.

Como X es totalmente acotado, existen $y_1, \dots, y_m$ tales que

$$X \subseteq \bigcup_{i=1}^{m} B(y_i, 1).$$

Luego existe y_{i_1} tal que $B(y_{i_1}, 1)$ contiene una cantidad infinita de puntos de $(x_n)_{n=1}^{\infty}$. Sea $(x_{n_{k,1}})_{k=1}^{\infty}$ la subsucesión de todos los puntos dentro de $B(y_{i_1}, 1)$.

Observación

Recordemos que $n_{k,1} \leqslant n_{k+1,1}$ se cumple puesto que estamos en $\mathbb{N}$.

De igual forma existe $\tilde{y}_2 \in X$ con $B\left(\tilde{y}_2, \frac{1}{2}\right)$ que contiene infinitos puntos de $(x_{n_{k,1}})_{k=1}^{\infty}$.
Llamemos $(x_{n_{k,2}})_{k=1}^{\infty}$ a la subsucesión de estos puntos.
Iterando el proceso, existe

$$(x_{n_{k,\ell}})_{k=1}^{\infty} \subseteq B\left(\tilde{y}_\ell, \frac{1}{\ell}\right)$$

y un punto $\tilde{y}_{\ell+1}$ tal que $B\left(\tilde{y}_{\ell+1}, \frac{1}{\ell+1}\right)$ contiene una cantidad infinita de puntos de la subsucesión $(x_{n_{k,\ell}})_{k=1}^{\infty}$.

Sea $(x_{n_{k,\ell+1}})_{k=1}^{\infty}$ la subsucesión de estos puntos. Note que

$$d(x_{n_{k,\ell+1}}, x_{n_{s,\ell+1}}) < \frac{2}{\ell+1}.$$

Consideremos la subsucesión de los $x_{n_{\ell,\ell}}$. Si $\ell \leqslant s$, entonces

$$d(x_{n_{\ell,\ell}}, x_{n_{s,s}}) \leqslant \frac{2}{\ell+1}$$

lo que nos permite concluir que $(x_{n_{\ell,\ell}})_{\ell=1}^{\infty}$ es de Cauchy.

El Resultado

Lema

Un espacio (X, d) es totalmente acotado si y sólo si toda sucesión $(x_n)_{n=1}^{\infty} \subseteq X$ poseé una subsucesión de Cauchy.

Con lo anterior hemos probado una dirección, resta por ver la otra.

La Otra Dirección

En la otra dirección, supongamos que (X, d) no es totalmente acotado. Entonces existe $\varepsilon > 0$ tal que

$$X \not\subseteq \bigcup_{i=1}^{m} B(x_i, \varepsilon)$$

para cualquier conjunto $\{ x_1, \ldots, x_m \}$. Dado $x_0 \in X$, existe $x_1 \in X \setminus B(x_0, \varepsilon)$.
Iteramos y obtenemos que existe x_n:

$$x_n \in X \setminus \bigcup_{i=1}^{n-1} B(x_i, \varepsilon).$$

Así obtenemos una sucesión tal que $d(x_i, x_j) \geqslant \varepsilon$ cuando $i \neq j$.

Podemos probar que. . .

Teorema

Un espacio métrico es compacto si y sólo si es completo y totalmente acotado.

Ya sabemos que todo espacio compacto es totalmente acotado y completo.
Tomemos entonces $(x_n)_{n=1}^{\infty}$, poseé $(x_{n_k})_{k=1}^{\infty} \subseteq (x_n)_{n=1}^{\infty}$ una subsucesión de Cauchy. Esta converge al ser el espacio completo.

La Idea

Vamos a finalizar probando que dado un espacio métrico (X, d), existe un espacio métrico completo $(X^\sharp, d^\sharp)$ y una función inyectiva que preserva distancia $i: \ X \to X^\sharp$.
Note que si $X \subseteq X^\sharp$ y $(x_n)_{n=1}^\infty \subseteq X$ es de Cauchy, entonces existe $y \in X^\sharp$ tal que $x_n \xrightarrow[n\to\infty]{} y$. Esto significa que $X^\sharp$ contiene todos los posibles límites. Vamos a definir una clase de equivalencia entre sucesiones de Cauchy. Los límites serán las distintas clases de equivalencia.

El Primer Paso

Definimos una métrica entre sucesiones de Cauchy. Sean $(x_n)_{n=1}^{\infty}, (y_n)_{n=1}^{\infty}$ dos sucesiones de Cauchy. Note que

$$d(x_m, y_m) \leqslant d(x_m, x_n) + d(x_n, y_n) + d(y_n, y_m).$$

Luego

$$d(x_m, y_m) - d(x_n, y_n) \leqslant d(x_m, x_n) + d(y_m, y_n)$$

y la simetría del argumento nos muestra que

$$|d(x_m, y_m) - d(x_n, y_n)| \leqslant d(x_m, x_n) + d(y_m, y_n).$$

Una Nueva Métrica

Basado en lo anterior, existe n_0 tal que

$$n, m \geqslant n_0 \Rightarrow |d(x_m, y_m) - d(x_n, y_n)| < \varepsilon$$

y por tanto $(d(x_m, y_m))_{m=1}^{\infty}$ es una sucesión de Cauchy en $\mathbb{R}$. Definimos

$$\tilde{d}((x_n)_{n=1}^{\infty}, (y_n)_{n=1}^{\infty}) = \lim_{m \to \infty} d(x_m, y_m).$$

En efecto, sí es métrica*

Si $x_m \xrightarrow[m\to\infty]{} z$ y $y_m \xrightarrow[m\to\infty]{} z$, entonces

$$d(x_m, y_m) \leqslant d(x_m, z) + d(z, y_m)$$

converge a cero cuando $m \to \infty$. Es decir $\tilde{d}((x_n)_{n=1}^{\infty}, (y_n)_{n=1}^{\infty}) = 0$. Además como $d(x_m, y_m) = d(y_m, x_m)$, entonces

$$\tilde{d}((x_n)_{n=1}^{\infty}, (y_n)_{n=1}^{\infty}) = \tilde{d}((y_n)_{n=1}^{\infty}, (x_n)_{n=1}^{\infty}).$$

Y dada otra sucesión de Cauchy $(z_n)_{n=1}^{\infty}$, vale

$$d(x_m, y_m) \leqslant d(x_m, z_m) + d(z_m, y_m)$$

$$\Rightarrow \tilde{d}((x_n)_{n=1}^{\infty}, (y_n)_{n=1}^{\infty}) \leqslant \tilde{d}((x_n)_{n=1}^{\infty}, (z_n)_{n=1}^{\infty}) + \tilde{d}((z_n)_{n=1}^{\infty}, (y_n)_{n=1}^{\infty})$$

Una. . . semimétrica

La función $\tilde{d}$ satisface la definición de ser métrica excepto por la condición

$$\tilde{d}((x_n)_{n=1}^{\infty}, (y_n)_{n=1}^{\infty}) = 0 \iff (x_n)_{n=1}^{\infty} = (y_n)_{n=1}^{\infty}.$$

A estas funciones les llamamos semimétricas. Para obtener una métrica, diremos que $(x_n)_{n=1}^{\infty} \sim (y_n)_{n=1}^{\infty}$ cuando

$$\tilde{d}((x_n)_{n=1}^{\infty}, (y_n)_{n=1}^{\infty}) = 0.$$

El siguiente paso

Vamos a probar que si

$$X^\sharp = {\left\{ (x_n)_{n=1}^\infty \subseteq X \text{ de Cauchy} \right\}} \Big/ {\sim}$$

es el conjunto de clases de equivalencia y

$$d^\sharp(\underline{x}, \underline{y}) = \tilde{d}((x_n)_{n=1}^\infty, (y_n)_{n=1}^\infty),$$

con $\underline{x} = [(x_n)_{n=1}^\infty]$ y $\underline{y} = [(y_n)_{n=1}^\infty]$, entonces $(X^\sharp, d^\sharp)$ es el espacio buscado.

El Argumento Diagonal

$d^\sharp$ está bien definida

Tomemos $(x_n)_{n=1}^\infty, (x'_n)_{n=1}^\infty$ tales que $(x_n)_{n=1}^\infty \sim (x'_n)_{n=1}^\infty$. Entonces vale que $\lim_{m\to\infty} d(x_m, x'_m) = 0$. Dada $(y_n)_{n=1}^\infty$ sucesión de Cauchy vale que

$$d(x_m, y_m) \leqslant d(x_m, x'_m) + d(x'_m, y_m)$$

y por tanto $\lim_{m\to\infty} d(x_m, y_m) \leqslant \lim_{m\to\infty} d(x'_m, y_m)$. De igual forma probamos

$$\lim_{m\to\infty} d(x'_m, y_m) \leqslant \lim_{m\to\infty} d(x_m, y_m)$$

y así $\lim_{m\to\infty} d(x'_m, y_m) = \lim_{m\to\infty} d(x_m, y_m)$.

Paso 2: Densidad

Tomemos $x \in X$ y $x_n = x$ para $n \in \mathbb{N}$. Definimos $i(x) = [(x_n)_{n=1}^{\infty}]$ y vemos que

$$d^\sharp(i(x), i(y)) = \lim_{m \to \infty} d(x_m, y_m) = d(x, y)$$

por lo que vemos que i preserva distancias. Si $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ es de Cauchy y $\varepsilon > 0$, existe un n_0 tal que

$$n \geqslant n_0 \Rightarrow d(x_n, x_{n_0}) < \varepsilon.$$

Así $\lim_{m \to \infty} d(x_m, d_{n_0}) \leqslant \varepsilon$ por lo tanto

$$d^\sharp([(x_n)_{n=1}^{\infty}], i(x_{n_0})) \leqslant \varepsilon$$

y así $i(X)$ es denso en $X^\sharp$.

Tercero: $X^\sharp$ es completo

Tomemos $(\underline{x}^m)_{m=1}^{\infty}$ una sucesión de Cauchy de clases de equivalencia y $y_n \in X$ tal que $d^\sharp(\underline{x}^n, i(y_n)) < \frac{1}{n}$. Notemos que

$$\begin{aligned} d(y_m, y_n) &= d^\sharp(i(y_m), i(y_n)) \\ &\leqslant d^\sharp(i(y_m), \underline{x}^m) + d^\sharp(\underline{x}^m, \underline{x}^n) + d^\sharp(\underline{x}^n, i(y_n)) \\ &\leqslant \frac{1}{n} + \frac{1}{m} + d^\sharp(\underline{x}^m, \underline{x}^n) \end{aligned}$$

y con esto vemos que $(y_m)_{m=1}^{\infty}$ también es de Cauchy.

Continuamos con el Tercer Paso

Finalmente

$$
\begin{aligned}
& d^{\sharp}(\underline{x}^{m}, [(y_m)_{m=1}^{\infty}]) \\
\leqslant & d^{\sharp}(\underline{x}^{m}, i(y_m)) + d^{\sharp}(i(y_m), [(y_m)_{m=1}^{\infty}]) \\
\leqslant & \frac{1}{m} + d^{\sharp}(i(y_m), [(y_m)_{m=1}^{\infty}]).
\end{aligned}
$$

Como $i(y_\ell) \xrightarrow[\ell\to\infty]{} [(y_m)_{m=1}^{\infty}]$ entonces podemos concluir que

$$\underline{x}^{n} \xrightarrow[n\to\infty]{} [(y_m)_{m=1}^{\infty}].$$

El Resultado

Teorema

Sea (X, d) un espacio métrico. Entonces

1. *Existe un espacio métrico $(X^\sharp, d^\sharp)$ completo y una función inyectiva $i : X \to X^\sharp$ que preserva distancias.*
2. *Si (X, d) es completo, entonces $(X^\sharp, d^\sharp)$ es isométrico a (X, d).*

¡Pero falta una parte!

Falta que veamos la segunda parte: Tomemos $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ de Cauchy. Si (X, d) es completo, existe $y \in X$ tal que $x_n \xrightarrow[n\to\infty]{} y$. Dado $\varepsilon > 0$,

$$d^\sharp([(x_n)_{n=1}^{\infty}], i(y)) = \lim_{m\to\infty} d(x_m, y) = 0.$$

Por lo tanto $\underline{i}(y) = [(x_n)_{n=1}^{\infty}]$ y así i es sobreyectiva.

Lema

Sea (Y, ρ) un espacio métrico completo y $j : X \to Y$ que preserva distancias con $j(X) \subseteq Y$ denso en Y. Entonces existe $\theta : X^\sharp \to Y$, una isometría tal que $\theta \circ i = j$.

La prueba de este lema es un ejercicio.

Resumen

- Hemos recordado la definición de sucesiones de Cauchy.
- Qué era un espacio en el que todas las sucesiones Cauchy eran convergentes. 1
- El comportamiento de conjuntos cerrados respecto a completitud. 1
- Que los compactos son completos. 2
- Qué es que un conjunto sea totalmente acotado. 2
- Una caracterización de la propiedad anterior. 3
- Una equivalencia de compacidad. 4
- La existencia de un espacio completo que contiene a los espacios métricos. 5
- La propiedad universal de la compleción de un espacio. 4

Ejercicios

- Lista 6
  - Un recordatorio sobre sucesiones de Cauchy. 1
  - Un detalle sobre convergencia en sucesiones que alcanzan finitos valores. 2
  - La prueba de la propiedad universal. 4

Lecturas adicionales I

- S.Cambronero.
  Notas MA0505.
  20XX.
- I.Rojas
  Notas MA0505.
  2018.