Relación entre la integral de Riemann y la integral de Lebesgue

Sea $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ acotada y

$$\Gamma_u=\{a=x_1^u<x_2^u<\dots<x_{m_u}^u=b\}.$$

Considere

a) $$l_u(x)=\sum_{i=1}^{n-1} m_i\,\mathbb{1}_{[x_{i-1},x_i)}+m_n\,\mathbb{1}_{[x_{n-1},x_n]}$$

con $m_i=\inf\{f(x): x\in[x_{i-1},x_i]\}$

b) $$u_u(x)=\sum_{i=1}^{n-1} M_i\,\mathbb{1}_{[x_{i-1},x_i)}+M_n\,\mathbb{1}_{[x_{n-1},x_n]}$$

que es M_i:

Note que

$$l_u(x)\le f(x)\le u_u(x)$$

Recordemos que si $\Gamma_u\subseteq\Gamma_{u+1}$, ent

(i) $l_u\le l_{u+1}$

(ii) $u_u\ge u_{u+1}$.

Si $|f(x)|\le M$ para todo $x\in[a,b]$, ent

$$|l_u|\le M \quad y \quad |u_u|\le M$$

en $[a,b]$.

Si

$$l = \lim_{n\to\infty} l_n$$

$$u = \lim_{n\to\infty} u_n .$$

El T.C.D implica que

$$\lim_{n\to\infty} \int_{[a,b]} l_n(x)\,dx = \int_{[a,b]} l(x)\,dx$$

$$\lim_{n\to\infty} \int_{[a,b]} u_n(x)\,dx = \int_{[a,b]} u(x)\,dx$$

Luego

$$\int_{[a,b]} u(x)\,dx = \int_{[a,b]} l(x)\,dx \iff$$

$$\int_{[a,b]} (u(x) - l(x))\,dx = 0 \iff$$

$$u = l \quad \text{c.p.d.}$$

Como

$$\int_{[a,b]} l_n(x)\,dx = \sum_{i=1}^{n} m_i (x_i - x_{i-1})$$

$$\int_{[a,b]} u_n(x)\,dx = \sum_{i=1}^{n} M_i (x_i - x_{i-1})$$

concluimos que $u = l$ c.p.d. si: las sumas inferiores y las superiores convergen al mismo punto

<u>Teorema</u> Dada $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ acotada. Entonces son equivalentes

(i) f es Riemann integrable

(ii) f es continua c.p.d.

3

"$\Rightarrow$" Sea

$$Z = \{ l \neq f \} \cap \{ l \neq u \} \cap \{ f \neq u \} \cap \bigcup_{k=1}^{\infty} \Pi_k$$

Como f es Riemann integrable

$$m(Z) = 0.$$

Ahora si $x \notin Z$, tenemos que

$$u(x) = l(x) = f(x)$$

y $x \notin \Pi_k$, $k \geq 1$.

Asuma que f no es continua en x, ent existe $\varepsilon > 0$ tal que para todo $\delta > 0$, existe x_δ que satisface

$$|x_\delta - x| < \delta \quad y \quad |f(x) - f(x_\delta)| > \varepsilon$$

Dado k, existen x_i^k, x_{i+1}^k t.q.

$$x \in (x_i^k, x_{i+1}^k).$$

Tome δ_0 t.q.

$$(x-\delta, x+\delta) \subseteq (x_i^k, x_{i+1}^k)$$

para $\delta \leq \delta_0$. Entonces

$$x_\delta \in (x_i^k, x_{i+1}^k)$$

$\Rightarrow$ $\varepsilon \leq M_i - m_i$

$\Rightarrow$ $u_k(x) - l_k(x) > \varepsilon$, para todo k

5

"$\Leftarrow$" Asuma que f es continua

c.p.d. Sea

$$Z = \{x : f(x) \text{ es discontinua en } x\}.$$

Tome $x \notin Z \cup \{a,b\}$.

Dado $\varepsilon > 0$, existe $\delta > 0$ t.q.

si $y \in (a,b)$, ent

$$|x-y| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(y)| < \frac{\varepsilon}{2}$$

Tome ahora $|\Pi_n| < \frac{\delta}{2}$. Sea

i tal que

$$x \in [x_{i-1}, x_i) \text{ para } 1 \leq i \leq n$$

Como

$$[x_{i-1}, x_i) \subseteq (x-\delta, x+\delta)$$

tenemos que

$$f(x) - \frac{\varepsilon}{2} \leq f(y) < f(x) + \frac{\varepsilon}{2}$$

para todo $y \in [x_{i-1}, x_i)$. Luego

$$f(x) - \frac{\varepsilon}{2} < m_i \leq M_i \leq f(x) + \frac{\varepsilon}{2}$$

Concluimos que si $|\Pi_n| \xrightarrow[n \to \infty]{} 0$, existe

n_0 t.q.

$$|u_n(x) - f(x)| < \frac{\varepsilon}{2}$$

$$|l_n(x) - f(x)| < \frac{\varepsilon}{2}$$

si $n \geq n_0$. Es decir

$$l_n(x) \xrightarrow[n\to\infty]{} f(x)$$

$$u_n(x) \xrightarrow[n\to\infty]{} f(x)$$

Por el T.C.D

$$\lim_{n\to\infty} \int_{[a,b]} l_n(x)\,dx = \int_{[a,b]} f(x)\,dx$$

$$\lim_{n\to\infty} \int_{[a,b]} u_n(x)\,dx = \int_{[a,b]} f(x)\,dx$$

Es decir las integrales de Riemann y Lebesgue concuerdan.