Dado un conjunto E, 1

una métrica es una función

$$d : E \times E \longrightarrow [0, +\infty)$$

que satisface

$$\boxed{\begin{aligned} &(i) \quad d(x,y) = d(y,x) \\ &(ii) \quad d(x,y) = 0 \text{ sii } x = y. \\ &(iii) \quad d(x,y) \leq d(x,z) + d(z,y) \end{aligned}}$$

Note que (iii) es la desigualdad triangular clásica en $\mathbb{R}^d$, pues si

$$d(x,y) = \|x - y\|$$

entonces

$$d(x,y) = \|x-y\| = \|x - z + z - y\|$$

$$\leq \|x - z\| + \|z - y\|$$

$$= d(x,y) + d(z,y)$$

Recordemos que

$$B(x_0, r) = \{y \in E : d(x_0, y) < r\}$$

Decimos que D es un conjunto abierto si para todo $x_0 \in G$ existe $r > 0$ t.q

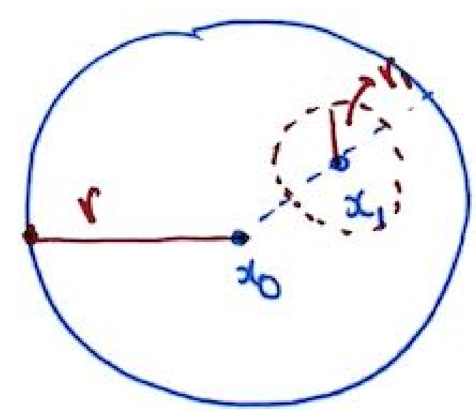
$$B(x_0, r) \subseteq D$$

Ojo: ϕ y E son abiertos

Lema: $B(x_0, r)$ es abierta para todo $x_0 \in E$ y $r > 0$.

Prueba:

Sea $x_1 \in B(x_0, r)$



Tenemos que encontrar $r_1 > 0$ t.q

$$B(x_1, r_1) \subseteq B(x_0, r)$$

Vamos a mostrar que si 3

$$r_1 < r - d(x_0, x_1)$$

(i.e. $r_1 + d(x_0, x_1) < r$)

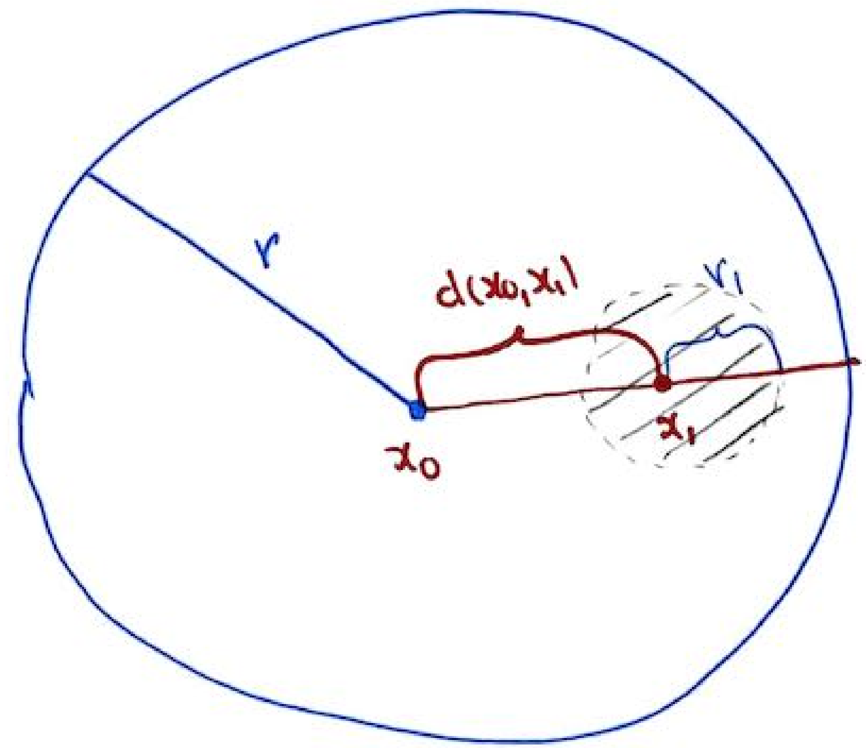
Entonces

$$B(x_1, r_1) \subseteq B(x_0, r)$$

Sea $y \in B(x_1, r_1)$, ent

$$\begin{aligned} d(x_0, y) &\leq d(x_0, x_1) + d(x_1, y) \\ &< d(x_0, x_1) + r_1 \\ &< d(x_0, x_1) + r - d(x_0, x_1) \\ &= r \end{aligned}$$

$\therefore\ y \in B(x_0, r)$



Sean G_1 y G_2 abiertos

4

Tome $x_0 \in G_1 \cap G_2$.

Entonces existen r_1 y r_2 t.q.

$$B(x_0, r_1) \subseteq G_1$$

$$B(x_0, r_2) \subseteq G_2$$

Tome $r = \min\{r_1, r_2\}$, ent

$$B(x_0, r) \subseteq B(x_0, r_1)$$

$$B(x_0, r) \subseteq B(x_0, r_2)$$

i.e

$$B(x_0, r) \subseteq G_1 \cap G_2$$

En general si $G_1, \dots, G_m$ son abiertos ent

$$\bigcap_{i=1}^{m} G_i \text{ es abierto}$$

Ejr: Rellene los detalles

Ahora, sean $\{G_i\}_{i=1}^{\infty}$ abiertos y $x_0 \in \bigcup_{i=1}^{\infty} G_i$.

Entonces existen $1 \le i_0$ t.q

$$x_0 \in G_{i_0}$$

Como G_{i_0} es abierto existe $r>0$ t.q.

$$B(x_0,r) \subseteq G_{i_0} \subseteq \bigcup_{i=1}^{\infty} G_i$$

En general

<u>Lema:</u> Dados G_λ, $\lambda \in \Lambda$, abiertos, ent

$$\bigcup_{\lambda\in\Lambda} G_\lambda \text{ es abierto}$$

5

Recordemos que F es cerrado si $E \setminus F$ es abierto.

Luego si F_λ son cerrados, tenemos que

abierto

$$E \setminus \bigcap_{\lambda\in\Lambda} F_\lambda = \bigcup_{\lambda\in\Lambda} \boxed{E \setminus F_\lambda}$$

$$\therefore \bigcap_{\lambda\in\Lambda} F_\lambda \text{ es cerrado}$$

De igual forma se prueba que si $F_1, \ldots, F_m$ son cerrados Ent $\bigcup_{i=1}^{m} F_i$ son cerrado.

6

Note que

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} \left(a-\frac{1}{n}, a+\frac{1}{n}\right) = \{a\}$$

i.e. intersección contable de abiertos no es abierto.

Además

$$(a,b) = \bigcup_{n=1}^{\infty} \left[a+\frac{1}{n}, b-\frac{1}{n}\right]$$

no es cerrado, i.e. unión contable de cerrados no es cerrado