

MA0505 - Análisis I

Lección VII: Arzelà-Ascoli

Pedro Méndez¹

¹Departamento de Matemática Pura y Ciencias Actuariales
Universidad de Costa Rica

Semestre I, 2021

Agenda

1 El Teorema de Arzelà-Ascoli

El Espacio de Funciones Continuas

- Sea (X, d) un espacio métrico y $K \subseteq X$ un compacto. Definimos

$$\mathcal{C}(K, \mathbb{R}) = \{ f : K \rightarrow \mathbb{R}, f \text{ continua} \}$$

y $d_\infty(f, g) = \sup_{x \in K} \{ |f(x) - g(x)| \}$ para $f, g \in \mathcal{C}(K, \mathbb{R})$.

- Sabemos que $(\mathcal{C}(K, \mathbb{R}), d_\infty)$ es un espacio métrico. La convergencia en este espacio, es la convergencia uniforme de funciones continuas.

Compacidad en este Espacio

- Vamos a analizar la compacidad en estos espacios.
Tomemos $C \subseteq \mathcal{C}(K, \mathbb{R})$ un compacto.
- Si $\{f_n\}_{n=1}^{\infty} \subseteq C$ vamos a probar que dados $\varepsilon > 0$ y $x_0 \in K$, existe un $\delta > 0$ tal que

$$d(x_0, y) < \delta \Rightarrow |f_n(y) - f_n(x_0)| < \varepsilon$$

para $n \geq 1$.

Probamos esto...

- Asumamos por el contrario que no, entonces existe un $\varepsilon > 0$ y $x_0 \in K$ tales que para $n \in \mathbb{N}$ existen y_n, k_n que satisfacen

$$d(x_0, y_n) < \frac{1}{n} \wedge |f_{k_n}(x_0) - f_{k_n}(y_n)| \geq \varepsilon.$$

- Como C es compacto, existe $\{f_{m_n}\}_{n=1}^{\infty}$ subsucesión de $\{f_{k_n}\}_{n=1}^{\infty}$ que converge uniformemente a $f : K \rightarrow \mathbb{R}$ continua.
- Al ser f continua y $y_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} x_0$ existe un n_0 tal que

$$n \geq n_0 \Rightarrow |f(x_n) - f(x_0)| < \frac{\varepsilon}{3}.$$

Terminamos la Prueba...

De esta manera

$$\begin{aligned} & |f_{m_n}(x_n) - f_{m_n}(x_0)| \\ & \leq |f_{m_n}(x_n) - f(x_n)| + |f(x_n) - f(x_0)| + |f_{m_n}(x_0) - f(x_0)| \\ & \leq \frac{\varepsilon}{3} + 2d_\infty(f_{m_n}, f) \end{aligned}$$

y esto resulta ser una contradicción.

Equicontinuidad

Definición

Sea $\{f_\alpha\}_{\alpha \in \Omega}$ una familia de funciones $f_\alpha : X \rightarrow Y$ con $(X, d), (Y, \rho)$ espacios métricos.

Diremos que $\{f_\alpha\}_{\alpha \in \Omega}$ es **equicontinua** en x_0 si para $\varepsilon > 0$, existe $\delta > 0$ que satisface

$$d(x_0, y) < \delta \Rightarrow \rho(f_\alpha(y), f_\alpha(x_0)) < \varepsilon$$

si $\alpha \in \Omega$.

La familia entera es equicontinua si lo es en todos los puntos.

Un Lema Útil

Lema

Sea $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$, $f_n : X \rightarrow Y$ una familia equicontinua. Sea $K \subseteq X$ un compacto tal que $f_n(x) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} f_0(x)$ con f_0 continua en K . Entonces $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ converge uniformemente a f_0 en K .

Probamos el Lema

- Dado $x \in K$ y $\varepsilon > 0$, existe $\delta_x > 0$ tal que

$$y \in B(x, \delta_x) \Rightarrow \rho(f_n(x), f_n(y)) < \frac{\varepsilon}{3}$$

para $n \geq 0$.

- Al ser K compacto, existen x_1, \dots, x_m tales que

$$K \subseteq \bigcup_{m=1}^{\infty} B(x_i, \delta_{x_i}).$$

- Tome $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que para $1 \leq i \leq m$ valga

$$\rho(f_n(x_i), f_0(x_i)) < \frac{\varepsilon}{3}.$$

Terminamos la Prueba

Sea $y \in K$, entonces existe $1 \leq i \leq m$ tal que $y \in B(x_i, \delta_{x_i})$ y así

$$\begin{aligned} & \rho(f_n(y), f_0(y)) \\ & \leq \rho(f_n(y), f_n(x_i)) + \rho(f_n(x_i), f_0(x_i)) + \rho(f_0(x_i), f_0(y)) \\ & < \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3}. \end{aligned}$$

En esencia, este lema nos dice que la equicontinuidad nos permite pasar de convergencia puntual a uniforme.

¿Qué hacemos si no tenemos de antemano que f es continua?

Solventando el Problema

Lema

*Sea $f_n : X \rightarrow Y$ una sucesión equicontinua con Y completo.
Suponga que además $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ converge para $x \in D \subseteq X$ con D denso en X .
Entonces f_n converge en X y su límite es continuo.*

Probamos el Lema

Sea $x \in X$ vamos a probar que $\{f_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ es de Cauchy.

- Por equicontinuidad existe $\delta > 0$ tal que para $n \geq 1$ vale

$$d(x, y) < \delta \Rightarrow \rho(f_n(x), f_n(y)) < \frac{\varepsilon}{3}.$$

- Sea $y \in B(x, \delta) \cap D$, así existe n_0 tal que

$$n, m \geq n_0 \Rightarrow \rho(f_n(y), f_m(y)) < \frac{\varepsilon}{3}.$$

Terminamos la Prueba

Así, cuando $n, m \geq 0$ vale que

$$\begin{aligned} & \rho(f_n(x), f_m(x)) \\ & \leq \rho(f_n(x), f_n(y)) + \rho(f_n(y), f_m(y)) + \rho(f_m(y), f_m(x)) < \varepsilon. \end{aligned}$$

Sea $f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x)$, note que

$$\rho(f(x), f(y)) \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \rho(f_n(x), f_n(y)) \leq \frac{\varepsilon}{3}$$

cuando $d(x, y) < \delta$.

Observación

El resultado es válido siempre que $\overline{\{f_n(x)\}_{n=1}^{\infty}}$ sea completo. Por ejemplo, cuando el conjunto es compacto.

Otro Lema, pero de Ejercicio

Lema

Sea $f_n : X \rightarrow Y$ una familia equicontinua y $K \subseteq X$ compacto. Asuma que $\{f_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ converge para $x \in K$ a $f_0 : X \rightarrow Y$. Entonces f_n converge uniformemente en K .

Ejercicio

¡Pruebe el lema!

El Teorema de Arzelà-Ascoli

Teorema

Sea $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ una familia equicontinua con $f_n : X \rightarrow Y$ y X separable. Supongamos que $\overline{\{f_n(x)\}_{n=1}^{\infty}}$ es compacto. Entonces existe una subsucesión de $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ que converge puntualmente a una función continua $f : X \rightarrow Y$ y la convergencia es uniforme para cada compacto $K \subseteq X$.

La Prueba del Teorema

- Sea $\{x_n\}_{n=1}^{\infty} = D \subseteq X$ denso, que existe por separabilidad.
- Sabemos que $\overline{\{f_n(x_1) : n \geq 1\}}$ es compacto.
- Entonces existe una subsucesión $f_{n_k}^1$ tal que $\{f_{n_k}^1(x_1)\}_{k=1}^{\infty}$ converge.
- De igual forma $\overline{\{f_{n_k}^1(x_2) : n \geq 1\}}$ es compacto. ¿Por qué?
- Entonces existe una subsucesión $f_{n_k}^2$ de $f_{n_k}^1$ que satisface que $\{f_{n_k}^2(x_2)\}_{k=1}^{\infty}$ converge.

Continuamos la Prueba

- Iterando, dado $f_{n_k}^m$ tal que $\{f_{n_k}^m(x_m)\}_{k=1}^{\infty}$ converge, existe una subsucesión $f_{n_k}^{m+1}$ que satisface que $\{f_{n_k}^{m+1}(x_{m+1})\}_{k=1}^{\infty}$ converge.
- Por construcción $\{f_{n_k}^m(x_\ell)\}_{k=1}^{\infty}$ convergencia para $1 \leq \ell \leq m$.
- Dado que para $\ell \leq m$, $\{f_{n_m}^m\}_{m=\ell}^{\infty}$ es una subsucesión de $f_{n_k}^\ell$, tenemos que $\{f_{n_m}^m(x_i)\}_{m=1}^{\infty}$ converge para $1 \leq i \leq \ell$.

Terminamos la Prueba

Por lo tanto $\{f_{n_m}^m\}_{m=1}^{\infty}$ converge para todos los puntos de D .
Por los resultados anteriores, $\{f_{n_m}^m\}_{m=1}^{\infty}$ converge en X a una función continua y la convergencia es uniforme en compactos.

Resumen

- La definición 1 de equicontinuidad.
- El primer lema 1 sobre convergencia uniforme.
- Qué pasaba en el caso no continuo. 2
- El teorema 2 de Arzelà-Ascoli.

Ejercicios

- Lista 7
 - A probar el lema 3

Lecturas adicionales I



S.Cambronero.
Notas MA0505.
20XX.



I.Rojas
Notas MA0505.
2018.