MA0505 - Análisis I

Lección II: Repaso

Pedro Méndez[1]

[1] Departmento de Matemática Pura y Ciencias Actuariales
Universidad de Costa Rica

Semestre I, 2021

Outline

1. Espacios normados
   - Normas en $\mathbb{R}^d$
2. Conexidad
   - Arcoconexidad
   - Conexidad

Las normas en $\mathbb{R}^d$

En $\mathbb{R}^d$ tenemos las normas:

1. Euclídea: $\|(x_1, \ldots, x_d)\| = (x_1^2 + \cdots + x_d^2)^{\frac{1}{2}}$.
2. $\|(x_1, \ldots, x_d)\|_\infty = \max\{\, |x_i| : \ 1 \leqslant i \leqslant d\,\}$.
3. $\|(x_1, \ldots, x_d)\|_p = (x_1^p + \cdots + x_d^p)^{\frac{1}{p}}$.
   Note que el caso de $p = 2$ coincide con la norma Euclídea.

En base a estas normas definimos:

$$B_p(x_0, r) = \{\, x \in \mathbb{R}^d : \ \|x - x_0\|_p < r\,\}.$$

Si G es un abierto respecto a la norma $\|\cdot\|$, es abierto respecto a la norma $\|\cdot\|_p$?

Estudiamos la pregunta

Si vale que para $x \in G$, existe $r > 0$ tal que $B_2(x, r) \subseteq G$, entonces es cierto que también existe $r_p > 0$ tal que $B_p(x, r_p) \subseteq G$?
Basta probar que dado $r > 0$, existe $r_p > 0$ tal que

$$B_p(x, r_p) \subseteq B_2(x, r)$$
$$\iff \{\, y \in \mathbb{R}^d : \|x - y\|_p < r_p \,\} \subseteq \{\, y \in \mathbb{R}^d : \|x - y\| < r \,\}.$$

Hay una relación entre $\|\cdot\|_p$ y $\|\cdot\|$?

Relación entre normas

Consideremos $p = \infty$, entonces

$$\begin{aligned}\|(x_1,\ldots,x_d)\| &= \sqrt{x_1^2+\cdots+x_d^2}\\ &\leqslant \left(d\max_{1\leqslant i\leqslant d}|x_i|^2\right)^{\frac{1}{2}}\\ &= \sqrt{d}\,\|(x_1,\ldots,x_d)\|_\infty\,.\end{aligned}$$

Note que $|x_i| \leqslant \|(x_1,\ldots,x_d)\|$ para $1 \leqslant i \leqslant d$. Es decir

$$\|(x_1,\ldots,x_d)\|_\infty \leqslant \|(x_1,\ldots,x_d)\|\,.$$

Ahora con p general

De igual forma

$$\left\|(x_1,\ldots,x_d)\right\|_p \leqslant d^{\frac{1}{p}} \left\|(x_1,\ldots,x_d)\right\|_\infty$$

y

$$\left\|(x_1,\ldots,x_d)\right\|_\infty \leqslant \left\|(x_1,\ldots,x_d)\right\|_p .$$

Por lo que

$$\left\|(x_1,\ldots,x_d)\right\| \leqslant \sqrt{d} \left\|(x_1,\ldots,x_d)\right\|_p .$$

Ya podemos responder la pregunta!

Si ocurre que $\|x-y\|_p < r_p$ entonces

$$\|x-y\| \leqslant \sqrt{d}\,\|x-y\|_p < \sqrt{d}r_p.$$

De manera que si tomamos $r_p = \frac{r}{\sqrt{d}}$, tenemos

$$B_p(x,r_p) = B_p\left(x, \frac{r}{\sqrt{d}}\right) \subseteq B(x,r).$$

De igual forma

$$B\left(x, \frac{r}{d^{\frac{1}{p}}}\right) \subseteq B_p(x,r).$$

Lema

Las normas $\|\cdot\|_p$ definen los mismos abiertos en $\mathbb{R}^d$.

Curvas y conjuntos arcoconexos

Una curva es un función $\gamma : \ [a, b] \to \mathbb{R}^d$ continua.

Definición

Decimos que $E \subseteq \mathbb{R}^d$ es arcoconexo si dados x_0, x_1 en E, existe γ una curva tal que $\gamma(a) = x_0, \ \gamma(b) = x$ y $\gamma(t) \in E$ para $t \in [a, b]$.

Si $\gamma : [a, b] \to \mathbb{R}^d$ es continua, entonces $\gamma_1 : [0, 1] \to \mathbb{R}^d$ dada por $\gamma_1(s) = \gamma((b - a)s + a)$ es continua. Es decir, podemos tomar $a = 0$ y $b = 1$ en la definición.

Podemos *desconectar* un arcoconexo?

Si E es arcoconexo, pueden existir G_0, G_1 abiertos no vacíos tales que

$$E = G_0 \cup G_1 \text{ y } G_0 \cap G_1 = \emptyset?$$

Tome $x_0 \in G_0$ $x_1 \in G_1$. Entonces existe $\gamma : [0, 1] \to E$ tal que $\gamma(0) = x_0$ y $\gamma(1) = x_1$.
Como G_0 es abierto, existe $r > 0$ tal que $B(x_0, r) \subseteq G_0$. Al ser γ continua, existe $\delta > 0$ tal que $\|\gamma(0) - \gamma(t)\| < r$ cuando $|t| < \delta$. Es decir $\|x_0 - \gamma(t)\| < r$ y por tanto $\gamma(t) \in B(x_0, r) \subseteq G_0$ para $0 < t < \delta$.

Un dibujo. . .

Considere

$$t_0 = \sup\{\, t > 0 : \gamma(s) \in G_0,\ 0 \leqslant s \leqslant t \,\}.$$

Noe que $\frac{\delta}{2} \leqslant t_0$. si $\gamma(t_0) \in G_0$, existe r_1 tal que $B(\gamma(t_0), r_1) \subseteq G_0$. Por continuidad, existe $\delta_1 > 0$ tal que

$$|t_0 - s| < \delta_1 \Rightarrow \|\gamma(t_0) - \gamma(s)\| < r_1.$$

Luego

$$t_0 - \delta_1 < s < t_0 + \delta_1 \Rightarrow \gamma(s) \in B(\gamma(t_0), r_1) \subseteq G_0.$$

Ejercicio

Si $s_1 < t_0$, entonces $\gamma(s) \in G_0$ para $0 < s < s_1$.

De lo anterior vale que

$$0 < s \leqslant t_0 - \frac{\delta_1}{2},\ t_0 + \frac{\delta_1}{2} \Rightarrow \gamma(s) \in G_0.$$

Esto contradice que t_0 sea el supremo por lo que
$\gamma(t_0) \in E \setminus G_0 = G_1$.
Con un argumento similar mostramos que si $\gamma(t_0) \in G_1$, existen r_2, δ_2 tales que

$$t_0 - \delta_2 < s < t_0 + \delta_2 \Rightarrow \gamma(s) \in B(\gamma(t_0), r_2) \subseteq G_1.$$

En particular $t_0 - \delta_2 < s < t_0 \Rightarrow \gamma(s) \in G_1 \setminus G_0$ lo que es una contradicción.

El resultado en cuestión

Lema

Sea G arcoconexo y abierto. Entonces no existen G_0, G_1 abiertos no vacíos tales que $G = G_0 \cup G_1$ y $G_0 \cap G_1 = \emptyset$.

Hace falta que G sea abierto?

No, pero hay que tomar $G = G \cap (G_0 \cup G_1)$.

Conjuntos conexos

Definición

G es disconexo si existen G_0, G_1 tales que

$$G_0 \cap G, G_1 \cap G \neq \emptyset = G_0 \cap G_1$$

y $G \subseteq G_0 \cup G_1$. Un conjunto se dice conexo si no es disconexo.

Teorema

1. *Si G es arcoconexo, es conexo.*
2. *Si G es abierto y conexo, es arcoconexo.*

Resumen

- Definición de normas en $\mathbb{R}^d$.
- Equivalencia de normas y su consecuencia.
- Definición de camino y arcoconexo.
- Un conjunto arcoconexo no es disconexo.
- Defínción de conexidad y resultados.

- Ejercicios
    - Detalle en prueba sobre que los arcoconexos no son disconexos.

Lecturas adicionales I

- S.Cambronero.
  Notas MA0505.
  20XX.
- I.Rojas
  Notas MA0505.
  2018.

Existen más pruebas que muestran que un arcoconexo es conexo. Investigue!