MA0505 - Análisis I

Lección IV: Continuidad

Pedro Méndez[1]

[1] Departmento de Matemática Pura y Ciencias Actuariales
Universidad de Costa Rica

Semestre I, 2021

Agenda

Recordemos...

Si $f: \ I \to \mathbb{R}$ decimos que $\lim_{x\to a} f(x) = \ell$ si para $\varepsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que

$$|x - a| < \delta \Rightarrow |f(x) - \ell| < \varepsilon.$$

Note que $d(x, a) = |x - a|$ en el espacio de partida X. Además $|f(x) - \ell| = \rho(f(x), \ell)$ en el espacio de llegada Y. Es decir

$$d(x, a) < \delta \Rightarrow \rho(f(x), \ell) < \varepsilon.$$

La definición. . .

Sean $(X, d), (Y, \rho)$ dos espacios métricos y $f\colon X \to Y$.
Decimos que $\lim_{z\to a} f(z) = \ell$ si para $\varepsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que

$$d(z, a) < \delta \Rightarrow \rho(f(z), \ell) < \varepsilon.$$

Note que para definir el límite en de f en a no es necesario que f esté definida en a.

Definición

La función $f : X \to Y$ es continua en a si $\lim_{z\to a} f(z) = f(a)$. En general f es continua si es es continua en todo punto de X. En este caso

$$d(z, a) < \delta \Rightarrow \rho(f(z), \ell) < \varepsilon.$$

Si comenzamos con

$$\{\, z : \; d(z,a) < \delta \,\} \subseteq X$$

y aplicamos f, llegamos a

$$\{\, y : \; \rho(f(a),y) < \varepsilon \,\} \subseteq Y.$$

$\therefore f(B_x(a,\delta)) \subseteq B_y(f(a),\varepsilon).$

Ahora un ejemplo

Si (X, d) es un espacio métrico y $a \in X$, tomemos $f(x) = d(x, a)$. Sabemos que

$$|d(x, a) - d(y, a)| \leqslant d(x, y)$$

y de esta desigualdad extraemos que f es continua. Esta función de hecho es un ejemplo de una función 1-Lipschitz.

Definición

Una función $f : X \to Y$ es λ-Lipschitz si para $x, y \in X$ vale

$$\rho(f(x), f(y)) \leqslant \lambda d(x, y).$$

Ejercicio

Para $A \subseteq X$, verifique que $f(x) = d(x, A)$ es 1-Lipschitz.

No nos olvidemos de las bolas

- Sea $G \subseteq Y$ abierto y $y_0 = f(x_0) \in G$.
- Entonces existe $\varepsilon > 0$ tal que $B(y_0, \varepsilon) \subseteq G$.
- Si f es continua, existe $\delta > 0$ tal que

$$f(B_x(x_0, \delta)) \subseteq B_y(y_0, \varepsilon) \subseteq G.$$

No nos olvidemos de las bolas

- Sea $G \subseteq Y$ abierto y $y_0 = f(x_0) \in G$.
- Entonces existe $\varepsilon > 0$ tal que $B(y_0, \varepsilon) \subseteq G$.
- Si f es continua, existe $\delta > 0$ tal que

$$f(B_x(x_0, \delta)) \subseteq B_y(y_0, \varepsilon) \subseteq G.$$

No nos olvidemos de las bolas

- Sea $G \subseteq Y$ abierto y $y_0 = f(x_0) \in G$.
- Entonces existe $\varepsilon > 0$ tal que $B(y_0, \varepsilon) \subseteq G$.
- Si f es continua, existe $\delta > 0$ tal que

$$f(B_x(x_0, \delta)) \subseteq B_y(y_0, \varepsilon) \subseteq G.$$

Esclareciendo la Relación

Si $y_0 \in G$, existe $\delta > 0$ tal que si $z \in B_x(x_0, \delta)$ se tiene que $f(z) \in G$. Es decir,

$$B_X(x_0, \delta) \subseteq \{\, z \in X : \; f(z) \in G \,\} = f^{-1}(G).$$

Por tanto si $x_0 \in f^{-1}(G)$, existe $\delta > 0$ tal que

$$B_X(x_0, \delta) \subseteq f^{-1}(G).$$

Lema

Si $f : \; X \to Y$ es continua y $G \subseteq Y$ es abierto, entonces $f^{-1}(G)$ es abierto.

No Olvidemos a los Cerrados

Por otro lado si $F \subseteq Y$ es un cerrado, entonces

$$f^{-1}(Y \setminus F) = X \setminus f^{-1}(F)$$

es un abierto. Entonces $f^{-1}(F)$ es un cerrado.
En general recuerde que $f^{-1}(A \setminus B) = f^{-1}(A) \setminus f^{-1}(B)$.

El Teorema Resumen

Teorema

Sea $f\colon X \to Y$, son equivalentes:

1. *f es continua*
2. *$f^{-1}(G)$ para todo $G \subseteq Y$ abierto.*
3. *$f^{-1}(F)$ es cerrado para todo $F \subseteq Y$ cerrado.*
4. *$f(\overline{B}) \subseteq \overline{f(B)}$ para todo $B \subseteq X$. Donde la primera cerradura es respecto a X y la segunda respecto a Y.*

Probando el resultado

- La primera implicación de 1 a 2 está lista.
- ($2 \Rightarrow 1$) Dado $\varepsilon > 0$ y $a \in X$, $B(f(a), \varepsilon))$ abierto implica que $f^{-1}(B(f(a), \varepsilon))$ es abierto. Así $\exists \delta > 0$ tal que $B(a, \delta) \subseteq f^{-1}(B(f(a), \varepsilon)) \Rightarrow f(B(x_0, \delta)) \subseteq B(f(x_0), \varepsilon)$.
- Las demás equivalencias son ejercicios

Probando el resultado

- La primera implicación de 1 a 2 está lista.
- ($2 \Rightarrow 1$) Dado $\varepsilon > 0$ y $a \in X$, $B(f(a), \varepsilon))$ abierto implica que $f^{-1}(B(f(a), \varepsilon))$ es abierto. Así $\exists \delta > 0$ tal que $B(a, \delta) \subseteq f^{-1}(B(f(a), \varepsilon)) \Rightarrow f(B(x_0, \delta)) \subseteq B(f(x_0), \varepsilon)$.
- Las demás equivalencias son ejercicios

Probando el resultado

- La primera implicación de 1 a 2 está lista.
- ($2 \Rightarrow 1$) Dado $\varepsilon > 0$ y $a \in X$, $B(f(a), \varepsilon))$ abierto implica que $f^{-1}(B(f(a), \varepsilon))$ es abierto. Así $\exists \delta > 0$ tal que $B(a, \delta) \subseteq f^{-1}(B(f(a), \varepsilon)) \Rightarrow f(B(x_0, \delta)) \subseteq B(f(x_0), \varepsilon)$.
- Las demás equivalencias son ejercicios

Caracterización por sucesiones

Teorema

Sea $f\colon X \to Y$, f es continua en a si y sólo si para cualquier sucesión $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq X$ tal que $x_n \to a$ se tiene que $f(x_n) \to f(a)$.

Si f no fuese continua, existe $\varepsilon > 0$ tal que para todo δ, existe $x_\delta \in X$ que satisface

$$d(x_\delta, a) < \delta \ \wedge \ \rho(f(x_\delta), f(a)) > \varepsilon.$$

En particular si $n \in \mathbb{N}$, existe x_n tal que

$$d(x_n, a) < \frac{1}{n}, \ \rho(f(x_n), f(a)) \geqslant \varepsilon.$$

Es decir, encontramos (x_n) tal que $x_n \to a$ pero $f(x_n) \not\to a$.

Homeomorfismos

Definición

Llamamos a $f: X \to Y$ un homeomorfismo si es continua y biyectiva. Además debe cumplir que f^{-1} es continua.
En este caso diremos que X y Y son homeomorfos.

Si $A \subseteq X$ es abierto, entonces $f(A) = (f^{-1})^{-1}(A)$ es un abierto.
Es decir f envía abiertos en abiertos.

Ejercicio

En este caso muestre que $f(A^o) = (f(A))^o$.

Resumen

- Funciones continuas en espacios métricos. 1
- Funciones Lipschitz continuas. 2
- El teorema resumen sobre continuidad 1
- Equivalencia en continuidad secuencial y métrica. 2
- Definición de homeomorfismo. 3

Ejercicios

- Lista 4
  - La distancia a conjuntos es Lipschitz. 1
  - Las demás equivalencias del teorema resumen. 1
  - Interiores y homeomorfismos 2

Lecturas adicionales I

- S.Cambronero.
  Notas MA0505.
  20XX.
- I.Rojas
  Notas MA0505.
  2018.