MA0505 - Análisis I

Lección XV: Funciones Medibles

Pedro Méndez[1]

[1]Departmento de Matemática Pura y Ciencias Actuariales
Universidad de Costa Rica

Semestre I, 2021

Agenda

Definición

Definición

Sea $f : E \to \overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$. Decimos que f es medible si para todo $a \in \mathbb{R}$ vale que

$$\{x \in E : \ f(x) > a\} \in \mathcal{M}.$$

De ahora en adelante

$$\{f > a\} = \{x \in E : \ f(x) > a\}.$$

Note que

$$E = \bigcup_{k=1}^{\infty} \{f > -k\} \cup \{f = -\infty\}.$$

Entonces E es medible si y sólo si $\{f = -\infty\}$ es medible. Por el resto de esta sección asumimos que E es medible.

Ejemplos

(I) Sea $f : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ continua. Entonces $\{ f > a \}$ es abierto.

(II) Si $f = \mathbf{1}_A$, entonces

$$\{ f > a \} = \begin{cases} E & \text{si } a < 0 \\ A & \text{si } 0 \leqslant a < 1 \\ \emptyset & \text{si } a \geqslant 1 \end{cases}$$

Equivalencias

Teorema

Sea $f : E \to \mathbb{R}$ con E medible. Entonces f es medible si se cumple cualquiera de los siguientes postulados para todo $a \in \mathbb{R}$.

(I) $\{ f > a \}$ *es medible.*

(II) $\{ f < a \}$ *es medible.*

(III) $\{ f \leqslant a \}$ *es medible.*

(IV) $\{ f \geqslant a \}$ *es medible.*

Prueba del Teorema

Note que

$$\{f > a\} = \bigcup_{n=1}^{\infty}\left\{f \geqslant a + \frac{1}{n}\right\} = \{f \leqslant a\}^c$$

$$\{f \geqslant a\} = \bigcap_{n=1}^{\infty}\left\{f > a - \frac{1}{n}\right\} = \{f < a\}^c$$

Si $f : E \to \mathbb{R}$ es medible, entonces los conjuntos

$$\{f > -\infty\} = \bigcup_{k=1}^{\infty} \{f > -k\},\ \{f < \infty\} = \bigcup_{k=1}^{\infty} \{f \leqslant k\},$$
$$\{f = \infty\},\ \{a \leqslant f \leqslant b\},\ \{a \leqslant f < b\}$$

son medibles.

Funciones Borel Medibles

Definición

Diremos que $f : E \to \mathbb{R}$ es Borel medible si

1. $E \in \mathcal{B}$.
2. $\{ f > a \} \in \mathcal{B}$ para $a \in \mathbb{R}$.

Esta definición nos será útil para realizar los ejercicios.

Teorema

Sea $f : E \to \mathbb{R}$. Entonces f es medible si y sólo si $f^{-1}(G)$ es medible para todo abierto G.

Prueba del Teorema

- Supongamos que la imagen inversa de abiertos es medible. Entonces si $G = \,]a, \infty[$, tenemos que

$$f^{-1}(G) = \{\, x \in E : \; f(x) > a \,\}.$$

- Por otro lado, si G es un abierto en $\mathbb{R}$, entonces $G = \bigcup_{k=1}^{\infty} \,]a_k, b_k[$. De esta manera

$$f^{-1}(G) = \bigcup_{k=1}^{\infty} f^{-1}(]a_k, b_k[) = \bigcup_{k=1}^{\infty} \{\, a_k < f < b_k \,\}.$$

Composición

Lema

Sea $f : E \to \mathbb{R}$ medible y $\phi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continua. Entonces $\phi \circ f$ es medible.

Si G es abierto, entonces

$$(\phi \circ f)^{-1}(G) = f^{-1}(\phi^{-1}(G)).$$

Como ϕ es continua, entonces $\phi^{-1}(G)$ es abierto y $f^{-1}(\phi^{-1}(G))$ es medible.
En particular si f es medible, $|f|$, $|f|^p$, e^{cf}, $f^+ = \max\{ f, 0 \}$ y $f^- = \min\{ f, 0 \}$ son medibles.

Casi Por Doquier

Definición

Diremos que una propiedad se cumple casi por doquier si se cumple excepto en un conjunto de medida cero.

Lema

Sean $f : E \to \mathbb{R}$, $g : E \to \mathbb{R}$. Si f es medible y $g = f$ casi por doquier, entonces g es medible.

Prueba del Lema

Sea $a \in \mathbb{R}$, entonces

$$\{g > a\} = (\{g > a\} \cap \{f = g\}) \cup (\{g > a\} \cap \{f \neq g\}).$$

El conjunto $\{g > a\} \cap \{f = g\} = \{f > a\} \cap \{f = g\}$ es medible y $\{f \neq g\}$ tiene medida cero de manera tal que $\{g > a\}$ es la unión de medibles.

Una Variante

Tenemos una variante del lema 1 para funciones con valores infinitos.

Lema

Sea $f : E \to \overline{\mathbb{R}}$ medible con

$$m(f = \infty) = m(f = -\infty) = 0.$$

Entonces $\phi \circ f$ es medible para ϕ continua.

Si llamamos $F = \{ x \in E : \; f \in \mathbb{R} \}$ y consideramos $f_1 = f$ cuando $x \in F$ y cero si no, entonces $\phi \circ f_1 = \phi \circ f$ c.p.d. Como $\phi \circ f_1$ es medible, entonces $\phi \circ f$ también lo es.

Un Lema Técnico

Lema

Sean $f : E \to \mathbb{R}$, $g : E \to \mathbb{R}$ medibles. Entonces $\{ f > g \}$ es medible.

Sea $\{ q_n \}_{n=1}^{\infty}$ una enumeración de $\mathbb{Q}$. Entonces

$$\{ f > g \} = \bigcup_{n=1}^{\infty} \{ f > q_n > g \} = \bigcup_{n=1}^{\infty} \{ f > q_n \} \cap \{ q_n > g \}$$

es una unión de medibles.

Espacio Vectorial de Funciones Medibles

Lema

Sean $f, g : E \to \mathbb{R}$ medibles, entonces

(I) *$f + \lambda$, λf son medibles para $\lambda \in \mathbb{R}$.*

(II) *$f + g$ es medible.*

La prueba del primer inciso es un ejercicio. Por otro lado si $\lambda \in \mathbb{R}$, entonces

$$\{ f + g > \lambda \} = \{ f > \lambda - g \}$$

es un conjunto medible.

Hay que tomar en cuenta que $f+g$ podría no estar definida en el caso que $f, g : E \to \overline{\mathbb{R}}$.

Ejercicio

El lema anterior es valido si $f+g$ está bien definida.

Corolario

Sean $f, g : E \to \overline{\mathbb{R}}$ medibles. Entonces fg es medible y $\frac{f}{g}$ es medible si $g \neq 0$.

Prueba del Corolario

Sea $F = \{ f \in \mathbb{R} \} \cap \{ g \in \mathbb{R} \}$. Entonces

$$\begin{aligned} \{ fg > a \} = {} & \{ fg > a \} \cap F \\ & \cup (\{ f = \infty \} \cap \{ g > 0 \}) \cup (\{ g = \infty \} \cap \{ f > 0 \}) \\ & \cup (\{ f = -\infty \} \cap \{ g < 0 \}) \cup (\{ g = -\infty \} \cap \{ f < 0 \}). \end{aligned}$$

Como en F vale

$$fg = \frac{1}{4}\left((f+g)^2 - (f-g)^2\right)$$

deducimos que $\{ fg > a \} \cap F$ es medible.
El resto de la prueba queda asignada como ejercicio

Teorema

Sea $\{ f_k \}_{k=1}^{\infty}$ una sucesión de funciones medibles. Entonces las siguientes son funciones medibles:

- $\sup_{k \geqslant 1} f_k(x)$.
- $\inf_{k \geqslant 1} f_k(x)$.
- $\limsup_{k \to \infty} f_k(x)$.
- $\liminf_{k \to \infty} f_k(x)$.

Prueba del Teorema

Sea $a > 0$, entonces

$$\{\, sup_{k\geqslant 1} f_k(x) > a \,\} = \bigcup_{k=1}^{\infty} \{\, f_k > a \,\}$$

es un conjunto medible. Además tenemos

- $\inf_{k\geqslant 1} f_k = -\sup_{k\geqslant 1}(-f_k)$.
- $\limsup_{k\to\infty} f_k = \inf_{k\geqslant 1} \sup_{\ell\geqslant k} f_\ell$.
- $\liminf_{k\to\infty} f_k = \sup_{k\geqslant 1} \inf_{\ell\geqslant k} f_\ell$.

La Definición

Definición

Una función ϕ es simple si existen $A_1, \ldots, A_n$ conjuntos y $a_1, \ldots, a_n$ reales tales que

$$\phi(x) = \sum_{k=1}^{m} a_k \mathbf{1}_{A_k}.$$

Una Modificación

Ejercicio

Dada ϕ simple, existen $b_1, \ldots, b_\ell \in \mathbb{R}$ y $B_1, \ldots, B_\ell$ medibles tales que

$$\phi(x) = \sum_{k=1}^{\ell} b_k \mathbf{1}_{B_k}$$

con $B_i \cap B_j = \emptyset$ y $b_i \neq b_j$ cuando $i \neq j$.

Aproximación

Sea $f \geqslant 0$, $f : E \to \mathbb{R}$. Considere

$$f_k(x) = \begin{cases} \frac{j-1}{2^k} & \text{si } \frac{j-1}{2^k} \leqslant f(x) < \frac{j}{2^k},\ 1 \leqslant j \leqslant k2^k. \\ k & \text{si } f(x) \geqslant k. \end{cases}$$

También considere

$$f_k(x) = \sum_{j=1}^{k2^k} \frac{j-1}{2^k} \mathbf{1}_{A_k^j} + k\mathbf{1}_{B_k}$$

donde

$$B_k = f^{-1}([k, \infty]),\ A_k^j = f^{-1}\left(\left[\frac{j-1}{2^k}, \frac{j}{2^k}\right]\right)$$

cuando $1 \leqslant j \leqslant k2^k$.

Es claro que

$$0 \leqslant f(x) < k \Rightarrow 0 \leqslant f(x) - f_k(x) \leqslant \frac{1}{2^k}.$$

Si $f(x) \geqslant k$, en cambio

$$0 \leqslant f(x) - f_k(x) = f(x) - k.$$

Luego si $f(x) \neq \infty$, existe k_0 tal que

$$|f(x) - f_k(x)| < \frac{1}{2^k}, \ k \geqslant k_0.$$

Además si $f(x) = \infty$, entonces

$$\lim_{k\to\infty} f_k(x) = f(x).$$

Ahora si $\frac{j-1}{2^k} \leqslant f(x) < \frac{j}{2^k}$, entonces ocurre uno de dos escenarios:

(1) $\frac{2j-2}{2^{k+1}} \leqslant f(x) < \frac{2j-1}{2^{k+1}}$.

(2) $\frac{2j-1}{2^{k+1}} \leqslant f(x) < \frac{2j-2}{2^{k+1}}$.

Si vale lo primero, $f_k = \frac{j-1}{2^k} = f_{k+1}$. Y si vale lo segundo, $f_k = \frac{j-1}{2^k}$ y $f_{k+1} = \frac{2j-1}{2^{k+1}}$. En cuyo caso $f_k \leqslant f_{k+1}$.

Hemos probado el teorema:

Teorema

Sea $f : E \to \mathbb{R}$. Entonces existe una sucesión de funciones simple ψ_k tales que

$$\lim_{k\to\infty} \psi_k = f.$$

Si $f \geqslant 0$, la sucesión puede ser tomada creciente. Si f es medible, se pueden tomar ψ_k's medibles.

Resumen

- La definición 1 de función medible y las equivalencias 1.
- La definición 2 de función Borel medible.
- La caracterización 2 de funciones medibles con abiertos.
- El lema 1 sobre la composición.
- La definición 3 de propiedades que se dan casi por doquier junto con el lema 2.
- El lema 3 que es levemente diferente del lema 1.
- El lema 4 técnico necesario para hablar del álgebra de medibles.
- El lema 5 junto con el corolario 1.
- El teorema 3 sobre supremos e ínfimos medibles.
- La definición 4 de función simple y el teorema 4 de aproximación.

Ejercicios

- Lista 15
  - El primer inciso del lema 5.
  - El ejercicio 1 sobre el caso infinito.
  - Terminar la prueba del corolario 1 es un ejercicio.
  - El ejercicio 2 sobre la modificación para tener conjuntos disjuntos.

Lecturas adicionales I

- S.Cambronero.
  Notas MA0505.
  20XX.
- I.Rojas
  Notas MA0505.
  2018.