En $\mathbb{R}^d$ tenemos las normas

1

(i) Euclídea:

$$\|(x_1,\dots,x_d)\| = (x_1^2+\dots+x_d^2)^{\frac{1}{2}}$$

(ii) $\|(x_1,\dots,x_d)\|_\infty = \max\{|x_i| : 1 \leq i \leq d\}$

(iii) $\|(x_1,\dots,x_d)\|_p = (|x_1|^p+\dots+|x_d|^p)^{\frac{1}{p}}$

note $p=2$, es la norma euclídea

En base a estas normas definimos

$$B_p(x_0,r) = \{x\in\mathbb{R}^d : \|x-x_0\|_p < r\}$$

¿Si $G$ es abierto en la norma $\| \ \|$ es abierto en la norma $\| \ \|_p$?

2

<u>Es decir:</u>

Si $G$ es tal que para todo $x \in G$ existe $r>0$ que satisface

$$B_2(x,r) \subseteq G$$

Es cierto que también existe $r_p>0$ t.q.

$$B_p(x,r_p) \subseteq G$$

Basta probar que dado $r>0$ existe $r_p>0$ t.q.

$$B_p(x,r_p) \subseteq B_2(x,r)$$

$$\Leftrightarrow \quad \{y \in \mathbb{R}^d : \|x-y\|_p < r_p\}$$

$$\subseteq \quad \{y \in \mathbb{R}^d : \|x-y\| < r\}$$

¿Hay una relación entre $\| \ \|_p$ y $\| \ \|$?

Primero consideremos $p = \infty$,

ent

$$\|(x_1,\dots,x_d)\| = \sqrt{x_1^2+\dots+x_d^2}$$

$$\leq \left(d \max_{1\leq i\leq d}\{|x_i|^2\}\right)^{\frac{1}{2}}$$

$$= \sqrt{d}\ \|(x_1,\dots,x_d)\|_\infty$$

Note que

$$|x_i| \leq \|(x_1,\dots,x_d)\|$$

para todo $1\leq i\leq d$, i.e

$$\|(x_1,\dots,x_d)\|_\infty \leq$$

$$\|(x_1,\dots,x_d)\|$$

De igual forma

$$\|(x_1,\dots,x_d)\|_p \leq$$

$$(d)^{\frac{1}{p}}\ \|(x_1,\dots,x_d)\|_\infty$$

y

$$\|(x_1,\dots,x_d)\|_\infty \leq \|(x_1,\dots,x_d)\|_p$$

$$\therefore\ \|(x_1,\dots,x_d)\| \leq$$

$$\sqrt{d}\ \|(x_1,\dots x_d)\|_p$$

Luego si

$$\|x-y\|_p < r_p$$

$$\Rightarrow \quad \|x-y\| \leq \sqrt{d}\,\|x-y\|_p < \sqrt{d}\, r_p$$

Es decir, si $r_p = \frac{r}{\sqrt{d}}$

tenemos que

$$B_p(x, r_p) \subseteq B(x, r)$$
$$\|$$
$$B_p\left(x, \frac{r}{\sqrt{d}}\right)$$

De igual forma se prueba que

$$B\left(x, \frac{r}{(d)^{\frac{1}{p}}}\right) \subseteq B_p(x, r)$$

<u>Lema:</u> Las normas $\| \ \|$ $\| \ \|_p$ en $\mathbb{R}^d$ definen los mismos abiertos.

## Arco conexidad

Una curva, es una función

$$\gamma : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}^d$$

continua.

**Def:** Decimos que $E \subset \mathbb{R}^d$ es arco conexo si dados $x_0$ y $x_1$ en $E$ existe $\gamma$ una curva t.q.

$$\gamma(a) = x_0 \quad y \quad \gamma(b) = x_1$$

y $\gamma(t) \in E$ para todo $t$ en $[a,b]$.

Ojo: si $\gamma : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}^d$ es continua

$$\gamma_1 : [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}^d$$

dada por

$$\gamma_1(s) = \gamma((b-a)s + a)$$

es continua, i.e. podemos tomar $a=0$ y $b=1$ en la definición

6.1

Dado $E$ arco conexo.

¿Es cierto que existen $G_1, G_0$ abiertos no vacíos t.q.

$$\boxed{\begin{array}{c} E = G_0 \cup G_1 \\ \text{y} \quad G_0 \cap G_1 = \emptyset \end{array}}$$

Tome $x_0 \in G_0$ y $x_1 \in G_1$

Entonces existe $\gamma : [0,1] \to E$ t.q.

$$\gamma(0) = x_0 \in G_0$$

$$\gamma(1) = x_1 \in G_1$$

Como $G_0$ es abierto, existe $r>0$ t.q.

$$B(x_0, r) \subseteq G_0$$

Ahora al ser $\gamma$ continua existe $\delta>0$ t.q.

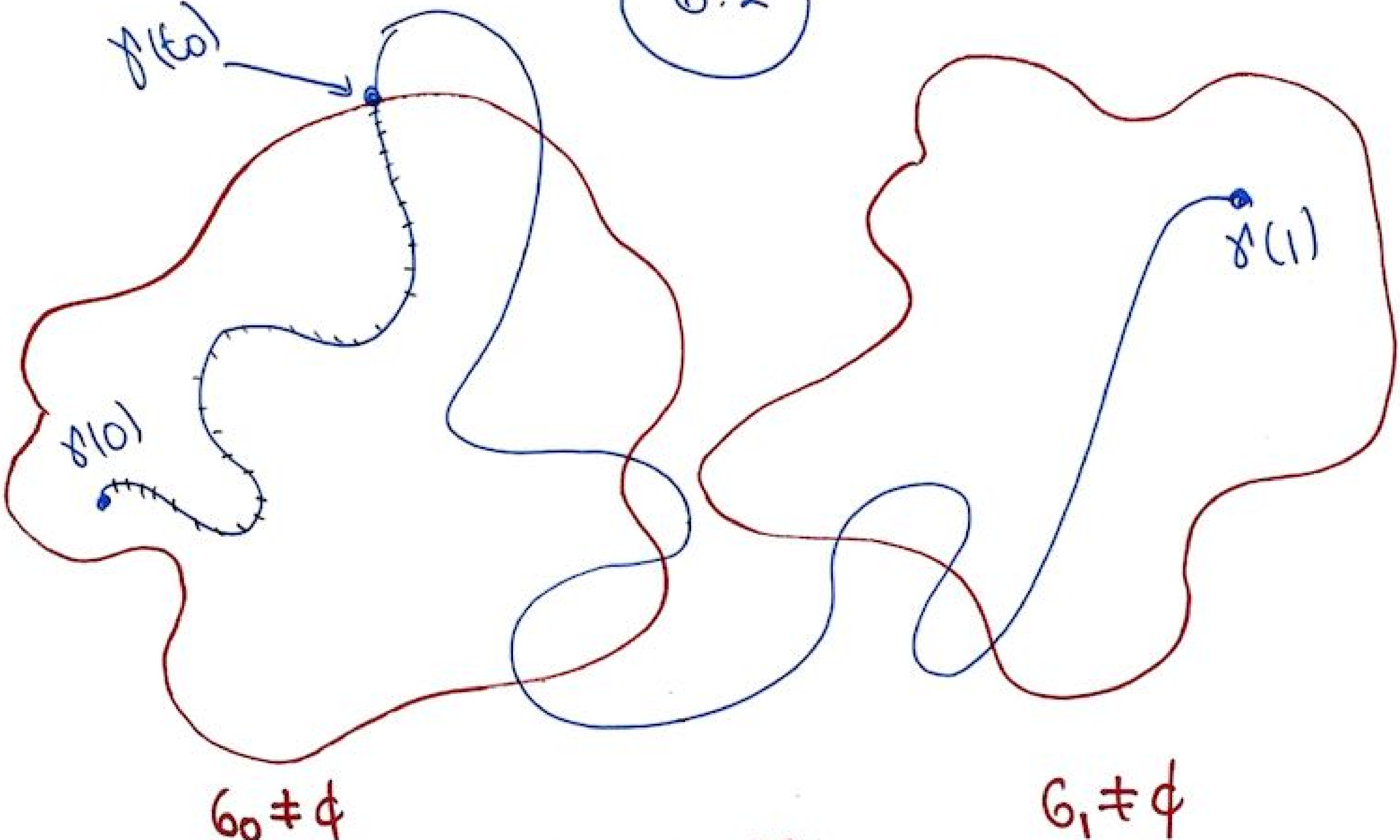
$$\| \gamma(0) - \gamma(t) \| < r$$

si $|t| < \delta$, i.e. $\| x_0 - \gamma(t) \| < r$.

$\therefore$ $\gamma(t) \in B(x_0, r) \subseteq G_0$

para todo $0 < t < \delta$.

6.2




$E = G_0 \cup G_1$

$\phi = G_0 \cap G_1$

Considere

$$t_0 = \sup\{t>0 : \gamma(s) \in G_0 \text{ si } 0 \le s \le t\}$$

Note que $\frac{\delta}{2} \le t_0$.

Ahora si $\gamma(t_0) \in G_0$, sabemos que existe $r_1$ t.q.

$$B(\gamma(t_0), r_1) \subseteq G_0$$

Por continuidad existe $\delta_1 > 0$ t.q. $|t_0 - s| < \delta_1$

$$\Rightarrow \quad \|\gamma(t_0) - \gamma(s)\| < r_1$$

Luego

$$\gamma(s) \in B(\gamma(t_0), r_1) \subseteq G_0$$

si $t_0 - \delta_1 < s < t_0 + \delta_1$.

**Ejr:** Si $s_1 < t_0$, ent $\gamma(s) \in G_0$ para todo $0 < s < s_1$.

$\therefore$ $\gamma(s) \in G_0$ si $0 < s \le t_0 - \frac{\delta_1}{2}$

$\therefore$ $\gamma(s) \in G_0$ si $0 < s \le t_0 + \frac{\delta_1}{2}$

$(\mathcal{S})$ $t_0$ es el sup.

Concluimos que $\gamma(t_0) \in E \setminus G_0 = G_1$

Ahora si $\gamma(t_0) \in G_1$, (8)

un argumento similar muestra que existen $r_2$ y $\delta_2$ tales que

$$\gamma(s) \in B(\gamma(t_0), r_2) \subseteq G_1$$

para todo $t_0 - \delta_2 < s < t_0 + \delta_2$.

En particular si $t_0 - \delta_2 < s < t_0$

ent

$$\gamma(s) \in G_1 \setminus G_0. \quad (\S)$$

**Lema:** Sea $G$ arco conexo y abierto. Entonces, no existen $G_0, G_1$ abiertos no vacíos t.q

$$G = G_0 \cup G_1 \text{ y}$$
$$\phi = G_0 \cap G_1$$

$$\boxed{\text{¿ Hace falta que } G \text{ sea abierto?}}$$

R/ No, pero hay que tomar

$$G = (G_0 \cap G) \cup (G_1 \cap G)$$

**Def:** $G$ es disconexo si existen $G_0$ y $G_1$ abiertos t.q.

$$G_0 \cap G \neq \emptyset$$
$$G_1 \cap G \neq \emptyset$$
$$G_0 \cap G_1 = \emptyset$$
$$G \subseteq G_0 \cup G_1.$$

Un conjunto $G$ en conexo si no es disconexo.

**Teorema:** Sea $G \subseteq \mathbb{R}^d$ arco conexo. Ent $G$ es conexo

**Teorema:** Sea $G \subseteq \mathbb{R}^d$, abierto y conexo. Ent $G$ es arco conexo.