MA0505 - Análisis I

Lección XII: La Medida Exterior

Pedro Méndez[1]

[1] Departmento de Matemática Pura y Ciencias Actuariales
Universidad de Costa Rica

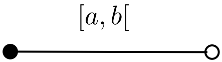
Semestre I, 2021

Agenda

1. Motivación
2. Definición de Medida Exterior
   - Medida en Dimensión 1
   - Medida en Dimensión Mayor
3. La Medida de Lebesgue
   - Conjuntos Medibles

La Longitud de un segmento

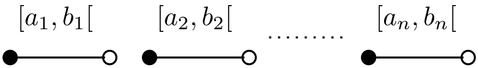
Considere el segmento



La longitud del segmento es

$$b - a = \text{longitud}([a, b[) = \ell([a, b[).$$

Si tenemos intervalos disjuntos



Entonces su longitud es $\sum_{i=1}^{n} b_i - a_i$.

¿Cuál es la Longitud de un Punto?

Si tenemos $\{ a \} \subseteq [a, a + \varepsilon[$, entonces

$$\ell(a) \leqslant \varepsilon$$

para $\varepsilon > 0$. De manera que la longitud del punto es cero.

Los Racionales

Sea $\mathbb{Q} \cap [0,1] = \{ q_n \}_{n=1}^{\infty}$, entonces

$$\ell\left(\bigcup_{i=1}^{n} \{ q_i \}\right) = \sum_{i=1}^{n} \ell(\{ q_i \}) = 0.$$

Entonces, ¿cuál es la longitud de $\mathbb{Q} \cap [0,1]$? Note que $\int_a^b \mathrm{d}x = b - a$.

Unas Observaciones

De hecho si $[a,b[\subseteq [0,1]$, entonces

(I) $b - a = \int_0^1 \mathbf{1}_{[a,b[}(x)\mathrm{d}x.$

(II) $\sum_{i=1}^n b_i - a_i = \int_0^1 \sum_{i=1}^n \mathbf{1}_{[a_i,b_i[}(x)\mathrm{d}x = \int_0^1 \mathbf{1}_{\bigcup_{i=1}^n [a_i,b_i[}(x)\mathrm{d}x.$

(III) $0 = \int_0^1 \mathbf{1}_{\{a\}}(x)\mathrm{d}x.$

Volviendo a la Pregunta

En este caso $\int_0^1 \mathbf{1}_{\bigcup_{i=1}^n \{ q_i \}}(x)\mathrm{d}x = 0$. Note que $\mathbf{1}_{[0,1[\cap\mathbb{Q}} = \lim_{n\to\infty} \mathbf{1}_{\bigcup_{i=1}^n \{ q_i \}}$.
Luego si $\mathbf{1}_{[0,1[\cap\mathbb{Q}}$ fuese integrable y se pudieren tomar límites, tenemos que

$$\int_0^1 \mathbf{1}_{\mathbb{Q}\cap[0,1]}(x)\mathrm{d}x = \lim_{n\to\infty} \int_0^1 \mathbf{1}_{\bigcup_{i=1}^n \{ q_i \}}(x)\mathrm{d}x = 0.$$

¿Qué integral estamos usando? Recordemos que $\mathbf{1}_{\mathbb{Q}\cap[0,1]}$ no es Riemann integrable.

Consideremos las familias

- $S = \{\, [a, b[:\ a < b \,\} \cup \{\,]-\infty, b] :\ b \in \mathbb{R} \,\} \cup \{\, [a, \infty[:\ a \in \mathbb{R} \,\} \cup \emptyset$.
- $\mathcal{S}_1 = \left\{ \bigcup_{i=1}^{n} I_i;\ I_i \in S,\ 1 \leqslant i \leqslant n \right\}$.

Note que $[a, b] \notin \mathcal{S}_1$, pero $\mathbb{R} = [-\infty, b[\cup]b, \infty] \in \mathcal{S}_1$. Por lo tanto, dado $A \subseteq \mathbb{R}$, existe $B \in \mathcal{S}_1$ tal que $A \subseteq B$.

La Definición

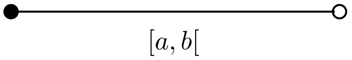
Definimos $m : \mathcal{S}_1 \to \mathbb{R}$ por:

1. $m([a, b]) = b - a$ si $a < b$.
2. $m([a, \infty[) = m(]-\infty, b]) = \infty$.
3. $m\left(\bigcup_{i=1}^{k} I_i\right) = \sum_{i=1}^{k} b_i - a_i$ para $I_i = [a_i, b_i]$ que satisface $]a_i, b_i[\cap]a_j, b_j[= \emptyset$ si $i \neq j$.

¿Está bien definida?

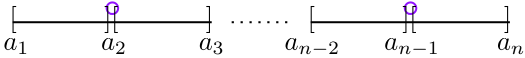
Por ejemplo

$$a = a_1 < a_2 \ldots a_{n-1} < a_n = b$$



Vale $[a, b] = \bigcup_{i=1}^{n-1} [a_i, a_{i+1}]$, con $]a_j, a_{j+1}[\cap]a_i, a_{i+1}[= d$ cuando $i \neq j$. Entonces

$$m^* \left(\bigcup_{i=1}^{n-1} [a_i, a_{i+1}] \right) = \sum_{i=1}^{n-1} a_{i+1} - a_i = b - a.$$



Note que si
$$[a, b] \subseteq [a_1, b_1] \cup [a_2, b_2]$$
pero $]a_1, b_1[\cap]a_2, b_2[\neq \emptyset$, entonces $a_2 < b_1$
$$\Rightarrow b_2 - a_2 + b_1 - a_1 > b - a = b_2 - a_1 .$$

Ejercicio

Si $\bigcup_{k=1}^{n} I_k = \bigcup_{\ell=1}^{m} J_\ell$ son tales que $I_k^o \cap I_\ell^o$, entonces
$$\sum_{k=1}^{n} m(I_k) \leqslant \sum_{\ell=1}^{m} m(J_\ell).$$

¿Cómo Medimos Otros Conjuntos?

Definición

Dado $E \subseteq \mathbb{R}$, definimos su medida exterior como

$$m_e(E) = \text{ínf}\left\{ \sum_{k=1}^{\infty} m(I_k) : \ E \subseteq \bigcup_{k=1}^{\infty} I_k, \ I_k \in S \right\}.$$

Note que, si $E_1 \subseteq E_2$, entonces $m_e(E_1) \leqslant m_e(E_2)$.

Lema

Sea $E = [a, b]$. Entonces $m_e(E) = b - a$.

Prueba del Lema

- Dado que $[a, b] \in S$, tenemos que $m_e([a, b]) \leqslant b - a$.
- Sean $I_k \in S$ tales que $[a, b] \subseteq \bigcup_{k=1}^{\infty} I_k$.
- Si los intervalos fueran abiertos, podemos reducir la unión a una unión finita.
- Sean $I_k^* =]c_k, d_k[$ tales que $I_k \subseteq I_k^*$ y $m(\bar{I}_k) \leqslant (1 + \varepsilon)m(I_k)$.
- Note que $[a, b] \subseteq \bigcup_{k=1}^{\infty} I_k^*$ y por compacidad, existe un k_0 tal que

$$[a, b] \subseteq \bigcup_{k=1}^{k_0} I_k^* \subseteq \bigcup_{k=1}^{k_0} \overline{I_k^*}.$$

Terminamos la Prueba

Entonces vale

$$b - a \leqslant \sum_{k=1}^{k_0} m(\overline{I_k^*}) \leqslant (1+\varepsilon) \sum_{k=1}^{k_0} m(I_k) \leqslant (1+\varepsilon) \sum_{k=1}^{\infty} m(I_k).$$

Por lo tanto

$$\frac{b-a}{1+\varepsilon} \leqslant \sum_{k=1}^{\infty} m(I_k) \Rightarrow \frac{b-a}{1+\varepsilon} \leqslant m_e([a,b]).$$

Subaditividad

Lema

Sean $E \subseteq \mathbb{R}$ *y* $E_i \subseteq \mathbb{R}$ *para* $i \geqslant 1$*. Si* $E = \bigcup_{k=1}^{\infty} E_k$*, entonces*

$$m_e(E) \leqslant \sum_{k=1}^{\infty} m_e(E_k).$$

Sin perdida de generalidad, supongamos que $m(E_k) < \infty$. Luego, existen $\{ I_i^k \}_{i=1}^{\infty}$ tales que $I_i^k \in S$ y

$$m_e(E_k) \leqslant \sum_{i=1}^{\infty} m(I_i^k) \leqslant m_e(E_k) + \frac{\varepsilon}{2^k}.$$

Terminamos la Prueba

Como $E \subseteq \bigcup_{k=1}^{\infty} \bigcup_{i=1}^{\infty} I_i^k$, concluimos que

$$\begin{aligned} m_e(E) &\leqslant \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{i=1}^{\infty} m(I_i^k) \\ &\leqslant \sum_{k=1}^{\infty} m_e(E_k) + \underbrace{\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\varepsilon}{2^k}}_{\varepsilon} . \end{aligned}$$

Generalización

Estos resultados se pueden generalizar a varias dimensiones. Dado

$$S_d = \{ [a_1, b_1] \times \ldots \times [a_d, b_d] : \; a_k \leqslant b_k, \; 1 \leqslant k \leqslant d \}$$

y $E \subseteq \mathbb{R}^d$, definimos

$$m_e(E) = \inf \left\{ \sum_{k=1}^{\infty} m(I_k) : \; E \subseteq \bigcup_{k=1}^{\infty} I_k, \; I_k \in S_d \right\}.$$

Resultados Análogos

De forma similar se pueden probar los siguientes resultados.

Lema

Sea $I = [a_1, b_1] \times \ldots \times [a_d, b_d]$*, entonces* $m_e(I) = \prod_{k=1}^{d}(b_k - a_k)$.

Lema

Sean $E_i \subseteq \mathbb{R}^d$ *para* $i \geqslant 1$*. Entonces*

$$m_e\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} E_i\right) \leqslant \sum_{i=1}^{\infty} m_e(E_i).$$

Ejemplos

a) Si $m_e(E_i) = 0$ para $i \geqslant 1$, entonces

$$m_e\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} E_i\right) \leqslant \sum_{i=1}^{\infty} m_e(E_i) = 0.$$

b) Sea $x = (x_1, \ldots, x_d)$, entonces $\{ x \} \subseteq [x_1, x_1 + \varepsilon] \times \ldots [x_d, x_d + \varepsilon]$. Así $m_e(\{ x \}) \leqslant \varepsilon^d$ y por lo tanto $m_e(\{ x \}) = 0$.

c) Del anterior se sigue que $m_e(\mathbb{Q}) = 0$.

Un Lema Muy Útil

La medida exterior se puede aproximar utilizando abiertos.

Lema

Sean $E \subseteq \mathbb{R}^d$ y $\varepsilon > 0$, entonces existe $G \subseteq \mathbb{R}^d$ tal que $E \subseteq G$ y

$$m_e(E) \leqslant m_e(G) \leqslant m_e(E) + \varepsilon.$$

Este resultado garantiza la existencia de G, un abierto, tal que $E \subseteq G$ y $m_e(E) = m_e(G)$.

Definición

Un conjunto $H \subseteq \mathbb{R}^d$ se dice ser G_δ si existen G_k, $k \geqslant 1$, abiertos tales que $H = \bigcap_{k=1}^{\infty} G_k$.

Lema

Sea $E \subseteq \mathbb{R}^d$, *entonces existe* $E \subseteq H$, *un conjunto* G_δ *tal que* $m_e(E) = m_e(H)$.

Prueba del Lema

En efecto, para $k \geqslant 1$, existe G_k tal que $E \subseteq G_k$ y

$$m_e(E) \leqslant m_e(G_k) \leqslant m_e(E) + \frac{1}{k}.$$

Considere $H = \bigcap_{k=1}^{\infty} G_k$, entonces $E \subseteq H$ y además

$$m_e(H) \leqslant m_e(E) + \frac{1}{k}$$

para $k \geqslant 1$. Por lo tanto $m_e(H) = m_e(E)$.

Definición

Llamamos a $E \subseteq \mathbb{R}^d$ Lebesgue medible si para $\varepsilon > 0$, existe G abierto tal que $E \subseteq G$ y $m_e(G \setminus E) < \varepsilon$.
Si E es (Lebesgue) medible, definimos su medida de Lebesgue como $m(E) = m_e(E)$.

Un Par de Ejemplos

a) Por ejemplo si $E = [a, b]$, entonces $E \subseteq]a - \varepsilon, b + \varepsilon[$. Entonces

$$m_e(G \setminus E) = m_e(]a - \varepsilon, a[\cup]b, b + \varepsilon[) \leqslant 2\varepsilon.$$

En general $[a, b[\,,]a, b]$ y $]a, b[$ son medibles y $m([a, b]) = b - a$.

b) Si tenemos E tal que $m_e(E) = 0$, entonces existe G un abierto tal que $E \subseteq G$ y

$$m_e(E) \leqslant m_e(G) < \varepsilon.$$

Luego

$$m_e(G \setminus E) \leqslant m_e(G) < \varepsilon.$$

Uniones

Teorema

Sea $\{ E_i \}_{i=1}^{\infty}$ *una familia de conjuntos medibles. Entonces* $\bigcup_{i=1}^{\infty} E_i$ *es medible.*

- Sea $\varepsilon > 0$, entonces existen G_i abiertos tales que $E_i \subseteq G_i$ y $m_e(G_i \setminus E_i) < \frac{\varepsilon}{2^i}$.
- Luego, $G = \bigcup_{i=1}^{\infty} G_i$ es abierto y

$$G \setminus E = \bigcup_{i=1}^{\infty} G_i \setminus E \subseteq \bigcup_{i=1}^{\infty} G_i \setminus E_i.$$

- Se sigue que

$$m_e(G \setminus E) \leqslant \sum_{i=1}^{\infty} m_e(G_i \setminus E_i) < \sum_{i=1}^{\infty} \frac{\varepsilon}{2^i} = \varepsilon.$$

La Unión de Cajas

Teorema

Sea $I_k = I_1^k \times \ldots \times I_d^k$ *con* I_i^k *un intervalo finito. Si* $I_i^o \cap I_j^o = \emptyset$, *entonces*

$$m_e\left(\bigcup_{j=1}^{m} I_j\right) = \sum_{j=1}^{m} m_e(I_j).$$

Ejercicio

Pruebe el teorema anterior.

Lema

Si $d(E_1, E_2) > 0$ *entonces*

$$m_e(E_1 \cup E_2) = m_e(E_1) + m_e(E_2).$$

Tomemos $\varepsilon > 0$ y $\bigcup_{k=1}^{\infty} I_k$ tal que

$$\sum_{k=1}^{\infty} m(I_k) \leqslant \varepsilon + m_e(E_1 \cup E_2).$$

Sin perdida de generalidad asumimos que

$$\mathrm{diam}(I_k) \leqslant \frac{1}{2} d(E_1, E_2)$$

Note que si $E_1 \cap I_k \neq \emptyset$, entonces $E_2 \cap I_k = \emptyset$. Luego

$$E_1 \subseteq \bigcup_{\substack{k=1 \\ I_k \cap E_1 \neq \emptyset}}^{\infty} I_k = \bigcup_{\ell=1}^{\infty} J_\ell, \quad E_2 \subseteq \bigcup_{\substack{k=1 \\ I_k \cap E_2 \neq \emptyset}}^{\infty} I_k = \bigcup_{\ell=1}^{\infty} \tilde{J}_\ell.$$

De aquí que

$$m_e(E_1) \leqslant \sum_{\ell=1}^{\infty} m(J_\ell), \quad m_e(E_2) \leqslant \sum_{\ell=1}^{\infty} m(\tilde{J}_\ell).$$

Por lo tanto

$$m_e(E_1) + m_e(E_2) \leqslant sum_{k=1}^{\infty} m(I_k) \leqslant m_e(E_1 \cup E_2) + \varepsilon.$$

Resumen

- Una definición de longitud de intervalo que nos lleva a preguntas nuevas.
- La primera definición de medida 9.
- La verdadera definición 1 de medida exterior.
- El lema 1 que nos dice cuanto mide un intervalo.
- El lema 2 sobre la subadivitidad de la medida exterior.
- La generalización de medida a varias dimensiones: el lema 3 y el lema 4.
- El lema 5 sobre aproximar con abiertos.
- La definición 2 de conjuntos G_δ y el lema 6 para aproximar.
- La definición 3 de conjuntos Lebesgue medibles y los resultados 1, 2 y 7 sobre conjuntos medibles.

Ejercicios

- Lista 12
  - El ejercicio 1 sobre la relación entre medidas de intervalos.
  - La prueba del teorema 2 es un ejercicio.

Lecturas adicionales I

S.Cambronero.
Notas MA0505.
20XX.

I.Rojas
Notas MA0505.
2018.