Convergencia en medida

Sean $f: E \to \overline{\mathbb{R}}$ y $f_n: E \to \overline{\mathbb{R}}$ funciones medibles. Decimos que f_n convergen en medida a f si para todo $\varepsilon > 0$

$$\lim_{n\to\infty} m\{x \in E : |f(x) - f_n(x)| > \varepsilon\} = 0$$

Notación: $f_n \xrightarrow{m} f$

Teorema Sean $f: E \to \overline{\mathbb{R}}$ y $f_n: E \to \overline{\mathbb{R}}$ medibles y finitas c.p.d. Si $f_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} f$ c.p.d en E y $m(E) < \infty$ entonces

$$f_n \xrightarrow{m} f$$

en E.

Pba: Por el Teorema de Egorov. Dados ε y η positivos, existen $F \subseteq E$ cerrado, $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que

$$m(E \setminus F) < \eta$$

y

$$|f(x) - f_m(x)| < \varepsilon$$

para todo $m \geq n_0$ y para todo $x \in F$.

Luego

$$\{x \in F : |f(x) - f_m(x)| > \varepsilon\} \subseteq E \setminus F$$

si $m \geq k_0$, i.e.

$$m(\{x \in E : |f(x) - f_m(x)| > \varepsilon\}) \leq$$

$$m(E \setminus F) <$$

$$\eta.$$

Considere

$$I_0 = [0, 1]$$

$$I_{1,1} = [0, \tfrac{1}{2}] \ , \ I_{1,2} = [\tfrac{1}{2}, 1]$$

$$I_{m,k} = \left[\frac{k}{2^m}, \frac{k+1}{2^m}\right]$$

para $k = 0, 1, 2, \ldots, 2^m - 1$

Ordene las funciones

$$g_{m,k} = \mathbb{1}_{I_{m,k}}$$

usando el orden

$$(m,k) \leq (m_1, k_1)$$

si $(m \leq m_1)$ ó $(m = m_1$ y $k \leq k_1)$,

denote a la sucesión ϕ_ℓ. Note que

$$m(I_{m,k}) = \frac{1}{2^m}$$

de esta igualdad se puede probar que la sucesión generada converge a cero en medida. Es decir, si $0 < \varepsilon < 1$,

$$m(\{x \in E : |g_{m,k}(x)| > \varepsilon\})$$

$$\leq \frac{1}{2^m}$$

Por otro lado existe dos subsucesiones ϕ_{n_k} y ϕ_{m_ℓ} tales que

- $\phi_{n_k}(x) = 1$, para todo n_k
- $\phi_{m_\ell}(x) = 0$, para todo m_ℓ.

Es decir

$$\boxed{\begin{array}{c}\text{convergencia en medida}\\ \not\Rightarrow \\ \text{convergencia c.p.d.}\end{array}}$$

Sin embargo si se puede extraer una subsucesión convergente

Teorema

Sea $f_k \xrightarrow{m} f$ en E, entonces existen una subsucesión $\{f_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$ tal que

$$f_{n_k} \xrightarrow[n_k \to \infty]{} f \quad \text{c.p.d.}$$

Pba: Dado $j \geq 1$, entonces existe k_j tal que

$$m(\{ |f - f_k| > \tfrac{1}{j} \}) < \frac{1}{2^j}$$

para $k \geq k_j$.

Tome k_j tal que $k_j \leq k_{j+1}$

4

Sea $E_j = \{ |f - f_{u_j}| > \frac{1}{j} \}$

y $H_m = \bigcup_{j=m}^{\infty} E_j$, $H_{m+1} \subseteq H_m$

Entonces

$$m(H_m) \leq \sum_{j=m}^{\infty} m(\{ |f - f_{u_j}| > \tfrac{1}{j} \})$$

$$< \frac{1}{2^{m-1}}$$

Ahora si $x \in E \setminus \bigcap_{m=1}^{\infty} H_m = \bigcup_{m=1}^{\infty} E \setminus H_m$

entonces existe m_0 que satisface

que $x \in E \setminus H_{m_0}$, i.e.

$$|f(x) - f_{u_j}(x)| \leq \frac{1}{j}$$

para $j \geq m_0$. Concluimos que

$$f_{u_j} \to f \quad \text{en} \quad E \setminus \bigcap_{m=1}^{\infty} H_m .$$

Finalmente, si

$$\tilde{E} = E \setminus \bigcap_{m=1}^{\infty} H_m = \bigcup_{m=1}^{\infty} E \setminus H_m$$

ent

$$(\tilde{E})^c = \bigcap_{m=1}^{\infty} H_m \; ; \text{ i.e}$$

$$m(\tilde{E}^c) \leq m(H_m) \leq \frac{1}{2^{m-1}}$$

para todo $m \geq 1$.