Categoría

Dado un espacio métrico (X,d), decimos que $A \subseteq X$ es denso en ninguna parte si

$$(\bar{A})^c \text{ es denso .}$$

Note que $(\bar{A})^c$ es denso $\iff$

$(\bar{A})^c \cap B(x,r) \neq \phi$ para todo $x \in E$ y $r>0$ $\iff$

$$(\bar{A})^o = \phi .$$

Un conjunto A es de primera categoría o magro, si A es la unión contable de conjuntos densos en ninguna parte.

Un conjunto A es de segunda categoría, si A no es de primera categoría.

Teorema (Categoría de Baire)

Sea (X,d) un espacio completo, Si $G \subseteq X$ es abierto y no vacío, entonces G es de segunda categoría.

Antes de probar este teorema probaremos el siguiente resultado

Teorema (Baire)

Sea (X,d) completo. Si $\{G_n\}_{n=1}^{\infty}$ es una sucesión de conjuntos abiertos y densos en X. Entonces

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} G_n \text{ es denso en } X.$$

Prueba: Sea $A \subseteq X$ abierto

Como G_1 es denso, existe $x_1 \in G_1$ t.q. $x_1 \in A$, i.e.

$$x_1 \in A \cap G_1.$$

Como $A \cap G_1$ es abierto existe $r_1 > 0$ t.q.

$$B(x_1, r_1) \subseteq A \cap G_1$$

Sea $B_1 = B(x_1, \frac{r_1}{2})$, ent

$$\overline{B_1} \subseteq A \cap G_1$$

De igual forma al ser G_2 denso y abierto existen $x_2 \in G_2$ y $r_2 > 0$ t.q.

$$B(x_2, r_2) \subseteq B_1 \cap G_2 \subseteq A \cap G_1 \cap G_2$$

Sea $B_2 := B(x_2, \frac{r_2}{2})$, ent

$$\overline{B_2} \subseteq B_1 \cap G_2$$
$$\subseteq A \cap G_1 \cap G_2$$

Iterando el proceso existe $x_n \in G_n$ y $r_n < \frac{r_{n-1}}{2} \leq \frac{r_1}{2^n}$ tal que

$$B(x_n, r_n) \subseteq B_{n-1} \cap G_n$$
$$\subseteq A \cap \bigcap_{i=1}^{n} G_i ,$$

sea $B_n := B(x_n, \frac{r_n}{2})$. Ent

$$\overline{B_n} \subseteq B_{n-1} \cap G_n$$

Note que si $n \geq m$, ent

$$B_n \subseteq B_m$$
$$\Rightarrow x_n, x_m \in B_m$$
$$\Rightarrow d(x_n, x_m) < \frac{r_1}{2^m}$$

Luego $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ es de Cauchy.

Tome $x = \lim_{n \to \infty} x_n$, como

$$\{x_n\}_{n=m}^{\infty} \subseteq B_m$$

tenemos que $x \in \overline{B_m}$

$\therefore$ $x \in A \cap \bigcap_{i=1}^{m} G_i$ para todo $m \geq 1$.

$\therefore x \in A \cap \bigcap_{i=1}^{\infty} G_i$

$\therefore \bigcap_{i=1}^{\infty} G_i$ es denso $\blacksquare$

Ahora probamos el Teorema de la Categoría de Baire.

Sea G abierto. Asuma que G es de primera categoría, entonces existen A_n densos en ninguna parte tal que

$$G = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$$

Sea $G_n = (\overline{A_n})^c$ entonces G_n es abierto y denso. Luego

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} (\overline{A_n})^c \text{ es denso.}$$

Como

$$\left(\overline{\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n}\right)^c = \left(\bigcup_{n=1}^{\infty} \overline{A_n}\right)^c = \bigcap_{n=1}^{\infty} (\overline{A_n})^c$$

es denso, se tiene que

$$G \cap \left(\overline{\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n}\right)^c \neq \phi$$