MA0505 - Análisis I

Lección V: Compacidad

Pedro Méndez[1]

[1]Departmento de Matemática Pura y Ciencias Actuariales
Universidad de Costa Rica

Semestre I, 2021

Agenda

La Definición de Compacidad

- Dado $C \subseteq X$, diremos que C es secuencialmente compacto si cualquier sucesión $(x_n)_{n=1}^{\infty} \subseteq C$ poseé una subsucesión convergente.
- Note que si $(x_{n_k})_{k=1}^{\infty}$ converge a x_0, tenemos que dado $\varepsilon > 0$, existe k_0 tal que

$$k \geqslant k_0 \Rightarrow d(x_{n_k}, x_0) < \varepsilon.$$

Continuando la idea. . .

- De lo anterior, $x_{n_k} \in B(x_0, \varepsilon)$ cuando $k \geqslant k_0$. Así para $k \geqslant 1$

$$B(x_0, \varepsilon) \cap \{\, x_m : \ m \geqslant k \,\} \neq \emptyset.$$

- Por lo tanto $x_0 \in \overline{\{\, x_m : \ m \geqslant k \,\}}$ para $k \geqslant 1$ y en consecuencia

$$x_0 \in \bigcap_{k=1}^{\infty} \overline{\{\, x_m : \ m \geqslant k \,\}}$$

Una nueva idea. . .

Tomemos $x_0 \bigcap_{k=1}^{\infty} \overline{\{ x_m : \ m \geqslant k \}}$ podemos tomar iterativamente:

- $x_k \in B(x_0, 1) \cap \{ x_m : \ m \geqslant 1 \}$.
- $x_{k_2} \in B\left(x_0, \frac{1}{2}\right) \cap \{ x_m : \ m \geqslant k_1 + 1 \}$.

  $\vdots$
- $x_{k_n} \in B\left(x_0, \frac{1}{n}\right) \cap \{ x_m : \ m \geqslant k_{n+1} + 1 \}$.

Así $x_{k_n} \to x_0$ y (x_{n_k}) es una subsucesión de (x_n)

Condensamos lo anterior

Lema

Si (X, d) es un espacio métrico y $C \subseteq X$, son equivalentes

1. *C es secuencialmente compacto.*
2. $C \cap \bigcap_{k=1}^{\infty} \overline{\{ x_m : \ m \geqslant k \}} \neq \emptyset$ *para toda* $(x_n)_{n=1}^{\infty} \subseteq C$.

Una conexión con lo anterior

Si $z \in \overline{C}$, existe $(x_n) \subseteq C$ tal que $x_n \to z$. Si C es *secuencialmente compacto*, existe una subsucesión $(x_{n_k})_{k=1}^{\infty}$ que converge a un punto de C. Es decir, $z \in C$.

Lema

Sea C secuencialmente compacto, entonces C es cerrado y acotado.

Ejercicio

Muestre que C es acotado cuando es secuencialmente compacto.

Cubrimientos por abiertos

Definición

A una colección $\mathcal{U} = \{\, U_\alpha : \ \alpha \in \Lambda \,\}$ de abiertos le llamamos un recubrimiento de un conjunto A si

$$A \subseteq \bigcup_{\alpha \in \Lambda} U_\alpha .$$

Lema

Si C es secuencialmente compacto y $\mathcal{U}$ es un recubrimiento de C, existe $\varepsilon > 0$ tal que para $x \in C$, existe $U \in \mathcal{U}$ tal que

$$B(x, \varepsilon) \cap C \subseteq \mathcal{U}.$$

Probemos lo anterior

Supongamos que para $\varepsilon > 0$ existe $x_\varepsilon \in C$ tal que

$$B(x_\varepsilon, \varepsilon) \subsetneq U_\alpha, \ \alpha \in \Lambda.$$

- En particular existe $(x_n)_{n=1}^{\infty} \subseteq C$ tal que $B\left(x_n, \frac{1}{n}\right) \subsetneq U_\alpha$, para $\alpha \in \Lambda$.
- Al ser C secuencialmente compacto, existe $(x_{n_k})_{k=1}^{\infty} \subseteq C$ y $x_0 \in C$ tal que $x_{n_k} \to x_0$.
- Como $\mathcal{U}$ es recubrimiento, existe U_{α_0} tal que $x_0 \in U_{\alpha_0}$.

Terminemos

Sea $\varepsilon > 0$ tal que $B(x_0, \varepsilon) \subseteq U_{\alpha_0}$ y tomemos k_0 tal que

$$k \geqslant k_0 \Rightarrow d(x_{n_k}, x_0) < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Con argumentos usuales podemos probar que $B\left(x_{n_k}, \frac{1}{n_k}\right) \subseteq B(x_0, \varepsilon)$ cuando $\frac{1}{n_k} < \frac{\varepsilon}{2}$. Es decir

$$\begin{aligned} B\left(x_{n_k}, \frac{1}{n_k}\right) &\subseteq B(x_0, \varepsilon) \\ &\subseteq U_{\alpha_0}. \end{aligned}$$

Resumen

- Definición de compacidad secuencial. 3
- Equivalencia entre compacidad secuencial y la propiedad de intersección. 1.
- Compacidad secuencial implica compacidad usual. 2
- Definición de recubrimiento por abiertos. 1 y el último lema.

Ejercicios

- Lista 5
  - Terminar el detalle en la prueba del lema de compacidad secuencial a la usual. 2.

Lecturas adicionales I

- S.Cambronero.
  Notas MA0505.
  20XX.
- I.Rojas
  Notas MA0505.
  2018.