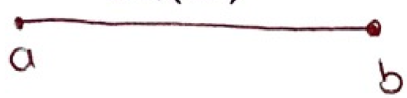
Medida exterior

Considere el segmento

$[a,b)$



La longitud del segmento es

$$b-a = \text{longitud}([a,b)) = \ell([a,b))$$

Si tenemos intervalos disjuntos

$[a_1,b_1)$ $[a_2,b_2)$ ... $[a_n,b_n)$

La longitud de los intervalos es

$$\sum_{i=1}^{n} b_i - a_i .$$

¿ Cuál es la longitud de un punto?

$$\{a\} \subseteq [a, a+\varepsilon)$$

Entonces

$$\ell(a) \leq \varepsilon \quad \text{para todo } \varepsilon > 0$$

$$\therefore \ \ell(\{a\}) = 0$$

Sea $\mathbb{Q} \cap [0,1] = \{q_n\}_{n=1}^{\infty}$.

Entonces

$$\ell\left(\bigcup_{i=1}^{n} \{q_i\}\right) = \sum_{i=1}^{n} \ell(\{q_i\})$$
$$= 0.$$

¿Cual es la longitud de $[0,1] \cap \mathbb{Q}$?

Note que

$$\int_a^b dx = b-a$$

De hecho si $[a,b) \subseteq [0,1]$, entonces

(i) $$b-a = \int_0^1 \mathbb{1}_{[a,b)}(x)\, dx$$

(ii) $$\sum_{i=1}^{n} (b_i - a_i) = \int_0^1 \sum_{i=1}^{n} \mathbb{1}_{[a_i,b_i)}(x)\, dx$$
$$= \int_0^1 \mathbb{1}_{\bigcup_{i=1}^{n}[a_i,b_i)}(x)\, dx$$

(iii) $$0 = \int_0^1 \mathbb{1}_{\{a\}}(x)\, dx.$$

Volviendo a la pregunta planteada

$$\int_0^1 \mathbb{1}_{\bigcup_{i=1}^{n}\{q_i\}}(x)\, dx = 0$$

Note que

$$\mathbb{1}_{[0,1)\cap\mathbb{Q}} = \lim_{n\to\infty} \mathbb{1}_{\bigcup_{i=1}^{n}\{q_i\}}$$

Luego si $\mathbb{1}_{[0,1)\cap\mathbb{Q}}$ fuera integrable, y se pudieran tomar límites, tenemos que

$$\int_0^1 \mathbb{1}_{\mathbb{Q}\cap[0,1]}(x)\, dx$$

$$= \lim_{n\to\infty} \int_0^1 \mathbb{1}_{\bigcup_{i=1}^{n}\{q_i\}}(x)\, dx$$

$$= 0.$$

¿Cuál es la integral usada?

Recordemos que $\mathbb{1}_{\mathbb{Q}\cap[0,1]}$ no es Riemann integrable.

Definición de medida exterior

Consideremos

$$S = \{[a,b] : a<b\} \cup \{(-\infty,b] : b\in\mathbb{R}\} \cup \{[a,+\infty) : a\in\mathbb{R}\} \cup \phi$$

$$\mathcal{A}_1 = \left\{ \bigcup_{i=1}^{n} I_i : I_i \in S, \ 1\leq i\leq n \right\}$$

Note que $[a,b] \in \mathcal{A}_1$, y que

$$\mathbb{R} = (-\infty,b] \cup [b,+\infty) \in \mathcal{A}_1.$$

Por lo tanto, dado $A \subseteq \mathbb{R}$ existe $B \in \mathcal{A}_2$ t.q. $A \subseteq B$

Definimos

$$m \quad \mathcal{A}_1 \longrightarrow \mathbb{R}, \text{ por}$$

(i) $m([a,b]) = b-a$ si $a<b$.

(ii) $m([a,+\infty)) = m((-\infty,b]) = +\infty$

(iii) $m\left(\bigcup_{i=1}^{n} I_i\right) = \sum_{i=1}^{n} b_i - a_i$

para $I_i = [a_i,b_i]$, que satisfacen $(a_i,b_i) \cap (a_j,b_j) = \phi$ si $i \neq j$.

¿Esta bien definida? Por ejemplo

$[a,b]$

$$[a,b] = \bigcup_{i=1}^{n-1} [a_i, a_{i+1}] \quad , \text{ con}$$

$$(a_i, a_{j+1}) \cap (a_i, a_{i+1}) = \phi$$

si $i \neq j$. Entonces

$$m^*\left(\bigcup_{i=1}^{n-1} [a_i, a_{i+1}]\right) = \sum_{i=1}^{n-1} a_{i+1} - a_i$$

$$= b - a$$

Note que si

$$[a,b] \subseteq [a_1, b_1] \cup [a_2, b_2]$$

pero $\quad (a_1, b_1) \cap (a_2, b_2) \neq \phi$, entonces

$$a_2 < b_1$$

$$\Rightarrow \quad b_2 - a_2 + b_1 - a_1 > b - a = b_2 - a_1$$

<u>Ejer:</u> Si $\bigcup_{i=1}^{n} I_i = \bigcup_{j=1}^{m} J_j$ son tales que $I_i^0 \cap I_j^0 = \phi$ entonces

$$\sum_{i=1}^{n} m(I_i) \leq \sum_{j=1}^{m} m(J_j)$$

¿Cómo medimos otros conjuntos?

Def: Dado $E \subseteq \mathbb{R}$, definimos

$$m_e(E) =$$

$$\inf\left\{ \sum_{i=1}^{\infty} m(I_i) : E \subseteq \bigcup_{i=1}^{\infty} I_i \, , \, I_i \in S \right\}.$$

Note que, si $E_1 \subseteq E_2$, entonces

$$m_e(E_1) \leq m_e(E_2)$$

Lema: Sea $E = [a,b]$. Entonces $m_e(E) = b-a$

Pba:

Dado que $[a,b] \in S$, tenemos que

$$m_e([a,b]) \leq b-a$$

Sean $I_i \in S$ tal que

$$[a,b] \subseteq \bigcup_{i=1}^{\infty} I_i .$$

Note que si los intervalos fueran abiertos, entonces podemos reducir la unión a una unión finita.

Sea $I_i^* = (c_i, d_i)$ tal que $I_i \subseteq I_i^*$ y $m(\overline{I}_i) \leq (1+\varepsilon)\, m(I_i)$.

Note que

$$[a,b] \subseteq \bigcup_{i=1}^{\infty} I_i^*$$

por compacidad, existe m_0 tal que

$$[a,b] \subseteq \bigcup_{i=1}^{m_0} I_i^* \subseteq \bigcup_{i=1}^{m_0} \overline{I_i^*}$$

Entonces

$$b-a \leq \sum_{i=1}^{m_0} m(\overline{I_i^*})$$

$$\leq (1+\varepsilon) \sum_{i=1}^{m_0} m(I_i)$$

$$\leq (1+\varepsilon) \sum_{i=1}^{\infty} m(I_i).$$

Luego

$$\frac{b-a}{(1+\varepsilon)} \leq \sum_{i=1}^{\infty} m(I_i)$$

$$\Rightarrow \quad \frac{b-a}{(1+\varepsilon)} \leq m_e([a,b]).$$

<u>Lema:</u> Sean $E \subseteq \mathbb{R}$ y $E_i \subseteq \mathbb{R}$ para $i \geq 1$. Si

$$E = \bigcup_{k=1}^{\infty} E_k$$

Entonces

$$m_e(E) \leq \sum_{k=1}^{\infty} m_e(E_k).$$

<u>Prueba:</u> Sin pérdida de generalidad podemos asumir que $m(E_k) < \infty$. Luego existen $\{I_i^k\}_{i=1}^{\infty}$ tal que $I_i^k \in S$ y

$$m_e(E_k) \leq \sum_{i=1}^{\infty} m(I_i^k) \leq m_e(E_k) + \frac{\varepsilon}{2^k}$$

Como

$$E \subseteq \bigcup_{k=1}^{\infty} \bigcup_{i=1}^{\infty} I_i^k \text{, concluimos}$$

que

$$m_e(E) \leq \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{i=1}^{\infty} m(I_i^k)$$

$$\leq \sum_{k=1}^{\infty} m_e(E_k) + \underbrace{\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\varepsilon}{2^k}}_{= \varepsilon} \quad \blacksquare$$

Estos resultados se pueden generalizar a varias dimensiones

Dada

$$S_d = \{ [a_1, b_1] \times \dots \times [a_d, b_d] : a_i \leq b_i,\ 1 \leq i \leq d \}$$

Dado $E \subseteq \mathbb{R}^d$, defina

$$m_e(E) := \inf \left\{ \sum_{i=1}^{\infty} m(I_i) : E \subseteq \bigcup_{i=1}^{\infty} I_i,\ I_i \in S_d \right\}$$

de forma similar se pueden probar los siguientes resultados

Lema: Sea $I = [a_1, b_1] \times \dots \times [a_d, b_d]$, entonces

$$m_e(I) = \prod_{i=1}^{d} (b_i - a_i).$$

Lema: Sea $E \subseteq \mathbb{R}^d$, $E_i \subseteq \mathbb{R}^d$ para $1 \leq i$. Entonces

$$m_e\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} E_i\right) \leq \sum_{i=1}^{\infty} m_e(E_i).$$

Ejemplos:

a) Si $m_e(E_i) = 0$, $1 \leq i$, entonces

$$m_e\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} E_i\right) \leq \sum_{i=1}^{\infty} m_e(E_i) = 0.$$

b) Sea $x = (x_1, \dots, x_d)$, entonces

$$\{x\} \subseteq [x_1, x_1+\varepsilon] \dots \times [x_d, x_d+\varepsilon].$$

Entonces

$$m_e(\{x\}) \leq \varepsilon^d$$

i.e. $m_e(\{x\}) = 0$.

Luego $m_e(\mathbb{Q}) = 0$.

La medida exterior puede ser aproximada utilizando abiertos.

Lema: Sean $E \subseteq \mathbb{R}^d$ y $\varepsilon > 0$, entonces existe $G \subseteq \mathbb{R}^d$ tal que $E \subseteq G$ y

$$m_e(E) \leq m_e(G) \leq m_e(E) + \varepsilon.$$

Este resultado no nos asegura que exista G abierto tal que $E \subseteq G$ y

$$m_e(E) = m_e(G).$$

Def: Un conjunto $H \subseteq \mathbb{R}^d$ es G_δ si existen G_k, $k \geq 1$, abiertos tales que

$$H = \bigcap_{k=1}^{\infty} G_k.$$

Lema: Sea $E \subseteq \mathbb{R}^d$, entonces existe $E \subseteq H$ conjunto G_δ tal que

$$m_e(G) = m_e(H).$$

Pba: Sabemos que dado $k \geq 1$ existe G_k tal que $E \subseteq G_k$ y

$$m_e(E) \leq m_e(G_k) \leq m_e(E) + \frac{1}{k}.$$

Considere $H = \bigcap_{k=1}^{\infty} G_k$, entonces $E \subseteq H$ y además

$$m_e(H) \leq m_e(E) + \frac{1}{k}$$

para todo $k \geq 1$.

$$\therefore\ m_e(H) = m_e(E)$$

Def: Dado $E \subseteq \mathbb{R}^d$, decimos que E es Lebesgue medible si para todo $\varepsilon > 0$ existe G abierto que satisface $E \subseteq G$ y

$$m_e(G \setminus E) < \varepsilon.$$

Si E es medible, definimos su medida de Lebesgue como

$$m(E) = m_e(E).$$

Ejm: a) Si $E = [a,b]$ entonces

$$E \subseteq (a-\varepsilon, b+\varepsilon)$$

Entonces

$$m_e(G \setminus E) = m_e\big((a-\varepsilon, a) \cup (b, b+\varepsilon)\big) \leq 2\varepsilon.$$

En general $[a,b)$, $(a,b]$, (a,b) son medibles. Note que

$$m([a,b]) = b-a.$$

b) Sea E tal que $m_e(E) = 0$, entonces existe G abierto tal que $E \subseteq G$

$$m_e(E) \leq m_e(G) < \varepsilon$$

Luego

$$m_e(G \setminus E) \leq m_e(G) < \varepsilon.$$

Teorema: Sea $\{E_i\}_{i=1}^{\infty}$ medibles. Entonces $\bigcup_{i=1}^{\infty} E_i$ es medible.

Pba:

Sea $\varepsilon > 0$, entonces existen G_i tal que $E_i \subseteq G_i$

$$m_e(G_i \setminus E_i) < \frac{\varepsilon}{2^i}$$

Entonces $G = \bigcup_{i=1}^{\infty} G_i$ es abierto, y

$$G \setminus E = \bigcup_{i=1}^{\infty} G_i \setminus E$$

$$\subseteq \bigcup_{i=1}^{\infty} G_i \setminus E_i$$

entonces

$$m_e(G \setminus E) \leq \sum_{i=1}^{\infty} m_e(G_i \setminus E_i)$$

$$\sum_{i=1}^{\infty} \frac{\varepsilon}{2^i} = \varepsilon ..$$

Se deja como ejercicio

Teorema: Sea $I_u = I_1^u \times \ldots \times I_d^u$ con I_i^u un intervalo finito. Si $I_i^0 \cap I_j^0 = \phi$, entonces

$$m_e\left(\bigcup_{j=1}^{m} I_j\right) = \sum_{j=1}^{m} m_e(I_j)$$

Lema. Si $d(E_1, E_2) > 0$, entonces

$$m_e(E_1 \cup E_2) = m_e(E_1) + m_e(E_2)$$

Pba:

Sea $\varepsilon > 0$ y $\bigcup_{i=1}^{\infty} I_i$ tal que

$$\sum_{i=1}^{\infty} m(I_i) \le \varepsilon + m_e(E_1 \cup E_2)$$

Sin perdida de generalidad podemos asumir que

$$\text{diametro } I_i \le \frac{d(E_1, E_2)}{2}$$

Note que si $E_1 \cap I_i \neq \phi$ entonces $E_2 \cap I_i = \phi$.

Luego

$$E_1 \subseteq \bigcup_{\substack{i=1 \\ I_i \cap E_1 \neq \phi}}^{\infty} I_i = \bigcup_{j=1}^{\infty} J_j$$

$$E_2 \subseteq \bigcup_{\substack{i=1 \\ I_i \cap E_2 \neq \phi}}^{\infty} I_i = \bigcup_{j=1}^{\infty} \tilde{J}_j$$

Entonces

$$m_e(E_1) \le \sum_{j=1}^{\infty} m(J_j)$$

$$m_e(E_2) \le \sum_{j=1}^{\infty} m(\tilde{J}_j)$$

$$\therefore\ m_e(E_1) + m_e(E_2) \le \sum_{i=1}^{\infty} m(I_i)$$

$$\le m_e(E_1 \cup E_2) + \varepsilon$$