MA0505 - Análisis I

Lección XV: Funciones Medibles

Pedro Méndez[1]

[1] Departmento de Matemática Pura y Ciencias Actuariales
Universidad de Costa Rica

Semestre I, 2021

Agenda

Definición

Definición

Sea $f : E \to \overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$. Decimos que f es medible si para todo $a \in \mathbb{R}$ vale que

$$\{x \in E : \ f(x) > a\} \in \mathcal{M}.$$

De ahora en adelante

$$\{f > a\} = \{x \in E : \ f(x) > a\}.$$

Note que

$$E = \bigcup_{k=1}^{\infty} \{f > -k\} \cup \{f = -\infty\}.$$

Entonces E es medible si y sólo si $\{f = -\infty\}$ es medible. Por el resto de esta sección asumimos que E es medible.

Ejemplos

(I) Sea $f : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ continua. Entonces $\{ f > a \}$ es abierto.

(II) Si $f = \mathbf{1}_A$, entonces

$$\{ f > a \} = \begin{cases} E & \text{si } a < 0 \\ A & \text{si } 0 \leqslant a < 1 \\ \emptyset & \text{si } a \geqslant 1 \end{cases}$$

Equivalencias

Teorema

Sea $f : E \to \mathbb{R}$ con E medible. Entonces f es medible si se cumple cualquiera de los siguientes postulados para todo $a \in \mathbb{R}$.

(I) $\{ f > a \}$ *es medible.*

(II) $\{ f < a \}$ *es medible.*

(III) $\{ f \leqslant a \}$ *es medible.*

(IV) $\{ f \geqslant a \}$ *es medible.*

Prueba del Teorema

Note que

$$\{f > a\} = \bigcup_{n=1}^{\infty} \left\{ f \geqslant a + \frac{1}{n} \right\} = \{f \leqslant a\}^c$$

$$\{f \geqslant a\} = \bigcap_{n=1}^{\infty} \left\{ f > a - \frac{1}{n} \right\} = \{f < a\}^c$$

Si $f : E \to \mathbb{R}$ es medible, entonces los conjuntos

$$\{ f > -\infty \} = \bigcup_{k=1}^{\infty} \{ f > -k \},\ \{ f < \infty \} = \bigcup_{k=1}^{\infty} \{ f \leqslant k \},$$
$$\{ f = \infty \},\ \{ a \leqslant f \leqslant b \},\ \{ a \leqslant f < b \}$$

son medibles.

Resumen

■

Ejercicios

- Lista 15
  -

Lecturas adicionales I

- S.Cambronero.
  Notas MA0505.
  20XX.
- I.Rojas
  Notas MA0505.
  2018.