MA0505 - Análisis I

Lección I: Repaso

Pedro Méndez[1]

[1]Departmento de Matemática Pura y Ciencias Actuariales
Universidad de Costa Rica

Semestre I, 2021

Outline

Definción de Espacios Métricos

Sea E un conjunto, una métrica es una función

$$d : E \times E \to [0, +\infty[$$

que satisface

1. $d(x, y) = d(y, x)$.
2. $d(x, y) = 0$ si y sólo si $x = y$.
3. $d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y)$.

La métrica en $\mathbb{R}^d$.

Observemos que la tercera condición es la desigualdad triangular en $\mathbb{R}^d$ pues si

$$d(x,y) = \|x-y\|$$

entonces

$$\begin{aligned} d(x,y) = \|x-y\| &= \|x-z+z-y\| \\ &\leq \|x-z\| + \|z-y\| \\ &= d(x,y) + d(z,y). \end{aligned}$$

Bolas, Unidades de la Topología Métrica.

Recordemos que

$$B(x_0, r) = \{y \in E : \ d(x_0, y) \leq r\}.$$

Diremos que $D \subseteq E$ es un conjunto abierto si para $x_0 \in D$, existe un $r > 0$ tal que

$$B(x_0, r) \subseteq D.$$

De aquí vemos que $\emptyset$ y E son abiertos.

Las Bolas Abiertas son Abiertos.

Lema

$B(x_0, r)$ es un abierto para todo $x_0 \in E$ y $r > 0$.

Sea $x_1 \in B(x_0, r)$, debemos encontrar $r_1 > 0$ tal que $B(x_1, r_1) \subseteq B(x_0, r)$. Para ese efecto veremos que si

$$r_1 < r - d(x_0, x_1),$$

(es decir, $r_1 + d(x_0, x_1) < r$), entonces $B(x_1, r_1) \subseteq B(x_0, r)$. Sean r_1 como pedimos y $y \in B(x_1, r_1)$, vale que

$$\begin{aligned} d(x_0, y) &\leq d(x_0, x_1) + d(x_1, y) \\ &< d(x_0, x_1) + r_1 \\ &< d(x_0, x_1) + r - d(x_0, x_1) = r. \end{aligned}$$

Por lo tanto $y \in B(x_0, r)$.

Intersecciones.

Supongamos que G_1, G_2 on abiertos. Si $x_0 \in G_1 \cap G_2$, entonces existen r_1, r_2 tales que

$$B(x_0, r_1) \subseteq G_1, \; B(x_0, r_2) \subseteq G_2.$$

Si $r = \text{mín}(r_1, r_2)$, entonces

$$B(x_0, r) \subseteq B(x_0, r_1) \cap B(x_0, r_2) \subseteq G_1 \cap G_2.$$

Hemos probado así que la intersección de abiertos es un abierto. Más generalmente, si $G_1, \ldots, G_m$ es una colección de abiertos, entonces $\bigcap_{i=1}^m G_i$ es un abierto. (Ejercicio)

Y ahora Uniones.

Ahora si $(G_i)_{i=1}^{\infty}$ es una colección de abiertos, tome $x_0 \in \bigcup_{i=1}^{\infty}$. Así $x_0 \in G_{i_0}$ para algún i_0. Como G_{i_0} es abierto, existe $r > 0$ tal que

$$B(x_0, r) \subseteq G_{i_0} \bigcup_{i=1}^{\infty} G_i.$$

El resultado que hemos probado es

Lema

Dados G_λ, $\lambda \in \Lambda$, abiertos vale que $\bigcup_{\lambda \in \Lambda} G_\lambda$ es abierto.

Cerrados.

Recuerde que F es cerrado si $E \setminus F$ es abierto.

1. Si (F_λ) es una colección de cerrados, entonces

$$E \setminus \bigcap_{\lambda \in \Lambda} F_\lambda = \bigcup_{\lambda \in \Lambda} E \setminus F_\lambda$$

   es una unión de abiertos. Es decir $\bigcap_{\lambda \in \Lambda} F_\lambda$ es cerrado.
2. De igual forma podemos probar que si $F_1, \ldots, F_m$ son cerrados, entonces $\bigcup_{i=1}^{m} F_i$ es un cerrado.

Un par de ejemplos.

- Podemos ver que

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} \left] a - \frac{1}{n}, a + \frac{1}{n} \right[= \{a\}$$

no es un abierto. Es decir, no vale que la intersección contable de abiertos sea un abierto.

- Además

$$]a, b[= \bigcup_{m=1}^{\infty} \left[a + \frac{1}{n}, b - \frac{1}{n} \right]$$

no es un cerrado. Así la unión contable de cerrados no es un cerrado.

Resumen

- Definición de métrica y de abiertos.
- Las bolas abiertas son abiertos.
- Definición de cerrado.
- Propiedades de abiertos y cerrados.

- Ejercicios
  - La intersección finita de abiertos es un abierto.

Lecturas adicionales I

S.Cambronero.
Notas MA0505.
20XX.

I.Rojas
Notas MA0505.
2018.