MA0505 - Análisis I

Lección XIII: La Medida de Lebesgue II

Pedro Méndez[1]

[1] Departmento de Matemática Pura y Ciencias Actuariales
Universidad de Costa Rica

Semestre I, 2021

Agenda

Con Medida Cero

La siguiente caracterización será de mucha utilidad.

Teorema

Las siguientes condiciones son equivalentes.

(i) E *es medible.*

(ii) $E = H \setminus Z$ *donde* H *es un* G_δ *y* $m_e(Z) = 0$.

(iii) $E = H \cup Z$ *donde* H *es un* F_σ *y* $m_e(Z) = 0$.

Podemos ver claramente que $(ii) \Rightarrow (i)$ y que $(iii) \Rightarrow (i)$. Probaremos que $(i) \Rightarrow (ii)$ y la prueba del otro inciso queda asignada como ejercicio.

Prueba del Teorema

Sea E medible. Entonces existe k tal que G_k es abierto y $E \subseteq G_k$ con

$$m_e(G_k \setminus E) < \frac{1}{k}.$$

Tome $H = \bigcap_{k=1}^{\infty} G_k, entonces E \subseteq H$ y

$$m_e(H \setminus E) \leqslant m_e(G \setminus E) \leqslant \frac{1}{k}.$$

Se sigue que $m_e(H \setminus E) = 0$ y $E = H \setminus Z$ con $Z = H \setminus E$.

Otra Caracterización

Teorema

Sea $E \subseteq \mathbb{R}^d$ tal que $m_e(E) < \infty$. Entonces E es medible si y sólo si dado $\varepsilon > 0$ existen $\tilde{S}$, N_1 y N_2, que satisfacen:

1. $E = (\tilde{S} \cup N_1) \setminus N_2$.
2. $\tilde{S} = \bigcup_{k=1}^{\infty} I_k$ con $I_k \in S$.
3. $m_e(N_1) < \varepsilon$ y $m_e(N_2) < \varepsilon$.

La prueba de este teorema también es un ejercicio.

El Teorema de Carathéodory

Teorema

Sea $E \subseteq \mathbb{R}^d$. Entonces E es medible si y sólo si para todo $A \subseteq \mathbb{R}^d$ vale que:

$$m_e(A) = m_e(A \cap E) + m_e(A \setminus E).$$

$\Longrightarrow$

Asumimos que E es medible y tomamos $A \subseteq \mathbb{R}^d$. Entonces existe H de clase G_δ tal que

$$m_e(A) = m(H),\ A \subseteq H.$$

Por lo tanto

$$\begin{aligned} m(H) &= m(H \cap E) + m(H \setminus E) \\ &\geqslant m_e(A \cap E) + m_e(A \setminus E). \end{aligned}$$

Concluimos que

$$m_e(A) \geqslant m_e(A \cap E) + m_e(A \setminus E).$$

$\Leftarrow$

Tomemos E de medida exterior finita. Existe H de clase G_δ tal que

$$m_e(E) = m(H).$$

Por hipótesis tenemos que

$$m_e(H) = m_e(E) + m_e(H \setminus E)$$

y así llegamos a que $m_e(H \setminus E) = 0$ de manera que $E = H \setminus Z$ con Z de medida exterior cero.

$\Leftarrow$

Si $m_e(E) = +\infty$, defina $E_k = E \cap B(0,k)$. Así, tomemos $\{ H_k \}$ una colección de conjuntos G_δ tales que

$$m_e(E_k) = m(H_k),\ \ E_k \subseteq H_k.$$

De esta manera vale

$$\begin{aligned} m_e(H_k) &= m_e(H_k \cap E) + m_e(H_k \setminus E) \\ &\geqslant m_e(E_k) + m_e(H_k \setminus E) \end{aligned}$$

pues $E_k \subseteq H_k \cap E$. Concluimos que $m_e(H_k \setminus E) = 0$.

$\Leftarrow$

Consideremos ahora $H = \bigcup_{k=1}^{\infty} H_k$, este conjunto es medible y además vale

$$m_e(H \setminus E) = m_e\left(\bigcup_{k=1}^{\infty} H_k \setminus E\right) \leqslant \sum_{k=1}^{\infty} m_e(H_k \setminus E) = 0.$$

Por lo tanto $E = H \setminus Z$ con $Z = H \setminus E$.

Corolario

Sea E medible. Si $E \subseteq A \subseteq \mathbb{R}^d$, entonces

$$m_e(A) = m(E) + m_e(A \setminus E).$$

Si además E tiene medida finita, entonces

$$m_e(A \setminus E) = m_e(A) - m(E).$$

Un Resultado Técnico

Teorema

Sea $E \subseteq \mathbb{R}^d$. Entonces existe H de tipo G_δ tal que $E \subseteq H$ y

$$m(H \cap M) = m_e(E \cap M), \ M \text{ medible.}$$

Cuando E tiene Medida Finita

Sea H de clase G_δ que satisface $m(H) = m_e(E)$. Si M es medible entonces

$$m(H) = m(H \cap M) + m(H \setminus M)$$
$$m_e(E) = m_e(E \cap M) + m_e(E \setminus M).$$

Como vale que

$$m_e(E \cap M) \leqslant m_e(H \cap M),$$
$$m_e(E \setminus M) \leqslant m_e(H \setminus M),$$
$$\text{y } m_e(E) = m(H),$$

entonces $m(H \cap M) = m_e(E \cap M)$.

El Caso con Medida Infinita

Partimos E en $E_k = E \cap B(0,k)$. Tomamos $\{ G_k \}$ conjuntos G_δ tales que

$$m(M \cap G_k) = m_e(M \cap E_k), \; E_k \subseteq G_k.$$

Como $E_k \subseteq E_{k+\ell} \subseteq G_{k+\ell}$, enotnces

$$E_k \subseteq \bigcap_{m=k}^{\infty} G_m = H_k.$$

Estos conjuntos nos permiten tomar limites. Note que $E_k \leqslant H_k$, es decir

$$\begin{aligned} m_e(E_k \cap M) &\leqslant m_e(H_k \cap M) \\ &\leqslant m_e(G_k \cap M) \\ &= m_e(E_k \cap M) \end{aligned}$$

Por lo tanto $m_e(E_k \cap M) = m_e(H_k \cap M)$.

El Caso con Medida Infinita

Dado que

$$E_k \cap M \subseteq E_{k+1} \cap M,\ H_k \cap M \subseteq H_{k+1} \cap M,$$

obtenemos

$$\begin{aligned} m_e(E \cap M) &= m_e\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n \cap M\right) \\ &= \lim_{n\to\infty} m_e\left(E_n \cap M\right) \\ &= \lim_{n\to\infty} m_e\left(H_n \cap M\right) \\ &= m_e\left(\bigcup_{k=1}^{\infty} H_k \cap M\right). \end{aligned}$$

Concluimos la Prueba

Finalmente, note que

$$\tilde{H} = \bigcup_{k=1}^{\infty} H_k = \bigcup_{k=1}^{\infty} \bigcap_{m=n}^{\infty} G_k$$

no es necesariamente de clase G_δ. Pero como $\tilde{H}$ es medible, existe H_1 de clase G_δ y Z de medida cero tales que $\tilde{H} = H_1 \setminus Z$. Entonces

$$\begin{aligned} m_e(E \cap M) &= m_e(\tilde{H} \cap M) \\ &= m_e(H_1 \setminus Z \cap M) \\ &= m_e(H_1 \setminus Z \cap M) + m_e(H_1 \cap Z \cap M) \\ &= m_e(H_1 \cap M). \end{aligned}$$

La Definición

Considere $C_0 = [0,1]$. Dividimos C_0 en tres intervalos de misma longitud y removemos el del medio. Obtenemos

$$C_1 = C_0 \setminus \left]\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right[= \left[0, \frac{1}{3}\right] \cup \left[\frac{2}{3}, 1\right].$$

Llamemos C_2 al conjunto que obtenemos al remover los tercios del medio a los intervalos que resultaron. Obtenemos

$$C_2 = \left[0, \frac{1}{9}\right] \cup \left[\frac{2}{9}, \frac{1}{3}\right] \cup \left[\frac{6}{9}, \frac{7}{9}\right] \cup \left[\frac{8}{9}, 1\right].$$

Definimos así $C = \bigcap_{k=1}^{\infty} C_k$.

Propiedades del Conjunto

Es claro que C es cerrado y por tanto medible. Además

$$m(C_{k+1}) = \frac{2}{3}m(C_k) \Rightarrow m(C_k) = \left(\frac{2}{3}\right)^k$$

y como $C_{k+1} \subseteq C_k$, entonces

$$m(C) = m\left(\bigcap_{k=1}^{\infty} C_k\right) = \lim_{k\to\infty} m(C_k) = 0.$$

Observemos C_3, esto es:

$$\left[1, \frac{1}{27}\right] \cup \left[\frac{2}{27}, \frac{3}{27}\right] \cup \left[\frac{6}{27}, \frac{7}{27}\right] \cup \left[\frac{8}{27}, \frac{9}{27}\right]$$
$$\cup \left[\frac{18}{27}, \frac{19}{27}\right] \cup \left[\frac{20}{27}, \frac{21}{27}\right] \cup \left[\frac{24}{27}, \frac{25}{27}\right] \cup \left[\frac{26}{27}, 1\right].$$

Podemos notar que los extremos son de la forma $\frac{p}{3^k}$.

Base Tres

Para $x \in [0,1]$ consideremos su expansión en base 3:

$$x = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{n_i}{3^i}, \ \ n_i \in \{0,1,2\}.$$

Estas expansiones no son únicas puesto que

$$\frac{1}{3} = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{2}{3^i}.$$

La expansión no es única si y sólo si $x = \frac{p}{3^k}$ para $p \in \mathbb{N}$ y $k \geqslant 1$.

Base Tres

En los casos que la expansión no es única se toma la expansión sin el uno. Es decir:

Ejercicio

Sea $x = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{b_k}{3^k} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{a_k}{3^k}$ con $b_k, a_k \in \{0, 1, 2\}$. Entonces existe un k_0 tal que

(I) $a_k = b_k$ si $1 \leqslant k \leqslant k_0$.

(II) $|b_{k_0+1} - a_{k_0+1}| = 1$.

(III) Si $b_{k_0+1} > a_{k_0+1}$, entonces $b_k = 0$ para $k > k_0 + 1$ y $a_k = 2$ para $k > k_0 + 1$.

En los casos en que hay dos expansiones, tomamos la expansión dada por los a_k's.

Un Último Ejercicio de Base Tres

Ejercicio

$x \in C_k$ si y sólo si $n_k = 0$ ó $n_k = 2$. Luego $x \in C_k$ si y sólo si $n_k = 0$ ó $n_k = 2$ para todo $k \geqslant 1$.

La Función de Cantor

Considere la función

$$\Phi : C \to [0,1]\,, \;\; x \mapsto \sum_{i=0}^{\infty} \frac{n_i}{2} \frac{1}{2^i}.$$

Entonces Φ está bien definida y es sobreyectiva. Luego C es no contable, cerrado y tiene medida cero.

Vamos a construir un conjunto no medible. Primero probamos un resultado preliminar.

Lema

Sea $E \subseteq \mathbb{R}$ medible tal que $m(E) > 0$. Entonces el conjunto

$$E - E = \{ z \in \mathbb{R} : \; z = x - y, \; x, y \in E \}$$

contiene a un intervalo centrado en cero.

Prueba del Lema

Sea $\varepsilon > 0$, entonces existe G abierto tal que $E \subseteq G$ y

$$m(G) < (1+\varepsilon)m(E).$$

Sabemos que existen $\{ I_k \}_{k=1}^{\infty} \subseteq \mathcal{P}(G)$ tales que

- $I_k = [a_k, b_k]$.
- $G = \bigcup_{k=1}^{\infty} [a_k, b_k]$.
- $I_k^o \cap I_l^o = \emptyset$.

Defina $E_k = i_k \cap E$. Entonces $E_k \cap E_\ell = \emptyset$ ó $E_k \cap E_l = \{ a \}$ para algún $a \in \mathbb{R}$.

Continuamos la Prueba

Dado que

$$\sum_{k=1}^{\infty} m(I_k) = m(G) \leqslant (1+\varepsilon)m(E) = (1+\varepsilon)\sum_{k=1}^{\infty} m(E_k),$$

existe k_0 tal que

$$m(I_{k_0}) \leqslant (1+\varepsilon)m(E_{k_0}).$$

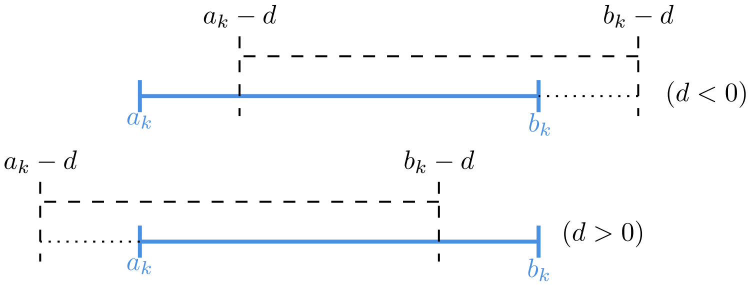
Sea $I = I_{k_0}$ y $\tilde{E} = E_{k_0}$, vamos a mostrar que si $\varepsilon = \frac{1}{3}$ y $|d| < \frac{m(I)}{2}$, entonces $(\tilde{E} - d) \cap \tilde{E} \neq \emptyset$. Note que

$$\begin{aligned} &(\tilde{E} - d) \cap \tilde{E} \neq \emptyset \\ \iff &\exists x, y \in \tilde{E}(x - d = y) \\ \iff &d \in \tilde{E} - \tilde{E} \subseteq E - E. \end{aligned}$$

Luego $\left]-\frac{1}{2}m(I), \frac{1}{2}m(I)\right[\subseteq E - E$. Asuma que $(\tilde{E} - d) \cap \tilde{E} = \emptyset$. Entonces

$$m(\tilde{E} \cup (\tilde{E} - d)) = m(\tilde{E}) + m(\tilde{E} - d) = 2m(\tilde{E}).$$

Por otro lado:



Terminamos la Prueba

Entonces ocurre uno de los siguientes escenarios:

- $\tilde{E} \cup (\tilde{E} - d) \subseteq [a_k - |d|, b_k]$.
- $\tilde{E} \cup (\tilde{E} - d) \subseteq [a_k, b_k + |d|]$.

Estos intervalos tienen medida

$$|d| + m(I) < \frac{3}{2}m(I) \Rightarrow 2m(E) < \frac{3}{2}m(I)$$
$$\iff m(E) < \frac{3}{4}m(I)$$

y esto nos lleva a una contradicción.

El Conjunto de Vitali

Definamos la relación de equivalencia sobre $\mathbb{R}$:

$$x \sim y \iff x - y \in \mathbb{Q}.$$

Llamemos E_x a la clase de equivalencia de x, este conjunto es $\{\, x + r : \ r \in \mathbb{Q} \,\}$. Note que E_x es contable y por tanto hay una cantidad no contable de clases de equivalencia. El Conjunto de Vitali es E, formado por un elemento de cada clase de equivalencia.

Propiedades

- E es no contable.
- $(E - E) \cap U = \{ 0 \}$.

Por el lema técnico 1, E es no medible o bien $m_e(E) = 0$. Pero como $\mathbb{R} = \bigcup_{r \in \mathbb{Q}} E + r$, entonces

$$m_e(E + r) = m_e(E) \neq 0.$$

Concluimos que E es no medible.

Corolario

Sea $A \subseteq \mathbb{R}$ con $m_e(A) > 0$. Entonces existe $E \subseteq A$ tal que E es no medible.

Como $\mathbb{R} = \bigcup_{r \in \mathbb{Q}} E + r$, entonces $A = \bigcup_{r \in \mathbb{Q}}((E + r) \cap A)$. Llamemos $A_q = (E + q) \cap A$, un argumento similar al anterior muestra que A_q es no medible.

Resumen

- El teorema 1 sobre una caracterización de conjuntos medibles con G_δ's y F_σ's.
- El segundo teorema 2 sobre caracterizaciones.
- El teorema 3 de Caratheódory y un corolario 1.
- El teorema 4 técnico.
- Aprendemos sobre el conjunto de Cantor 16.
- El lema 1 técnico usado para probar el resultado de Vitali. Y el corolario 2 que garantiza que hay más de un conjunto no medible.

Ejercicios

- Lista 14
  - La última parte de la prueba del teorema 1.
  - La prueba del teorema 2
  - Dos ejercicios 1 y 2 sobre base tres.

Lecturas adicionales I

- S.Cambronero.
  Notas MA0505.
  20XX.
- I.Rojas
  Notas MA0505.
  2018.