# MA0505 - Análisis I

## Lección VII: Arzelà-Ascoli

Pedro Méndez[1]

[1] Departmento de Matemática Pura y Ciencias Actuariales
Universidad de Costa Rica

Semestre I, 2021

# Agenda

# El Espacio de Funciones Continuas

- Sea $(X, d)$ un espacio métrico y $K \subseteq X$ un compacto. Definimos

$$\mathcal{C}(K, \mathbb{R}) = \{\, f : \ K \to \mathbb{R}, \ f \text{ continua} \,\}$$

  y $d_\infty(f, g) = \sup_{x \in K}\{\, |f(x) - g(x)| \,\}$ para $f, g \in \mathcal{C}(K, \mathbb{R})$.
- Sabemos que $(\mathcal{C}(K, \mathbb{R}), d_\infty)$ es un espacio métrico. La convergencia en este espacio, es la convergencia uniforme de funciones continuas.

# Compacidad en este Espacio

- Vamos a analizar la compacidad en estos espacios. Tomemos $C \subseteq \mathcal{C}(K, \mathbb{R})$ un compacto.
- Si $\{ f_n \}_{n=1}^{\infty} \subseteq C$ vamos a probar que dados $\varepsilon > 0$ y $x_0 \in K$, existe un $\delta > 0$ tal que

  $$d(x_0, y) < \delta \Rightarrow |f_n(y) - f_n(x_0)| < \varepsilon$$

  para $n \geqslant 1$.

# Probamos esto...

- Asumamos por el contrario que no, entonces existe un $\varepsilon > 0$ y $x_0 \in K$ tales que para $n \in \mathbb{N}$ existen $y_n, k_n$ que satisfacen

$$d(x_0, y_n) < \frac{1}{n} \ \wedge \ |f_{k_n}(x_0) - f_{k_n}(y_n)| \geqslant \varepsilon.$$

- Como $C$ es compacto, existe $\{ f_{m_n} \}_{n=1}^{\infty}$ subsucesión de $\{ f_{k_n} \}_{n=1}^{\infty}$ que converge uniformemente a $f : K \to \mathbb{R}$ continua.
- Al ser $f$ continua y $y_n \xrightarrow[n\to\infty]{} x_0$ existe un $n_0$ tal que

$$n \geqslant n_0 \Rightarrow |f(x_n) - f(x_0)| < \frac{\varepsilon}{3}.$$

# Terminamos la Prueba...

De esta manera

$$\begin{aligned}
&|f_{m_n}(x_n) - f_{m_n}(x_0)| \\
\leqslant &|f_{m_n}(x_n) - f(x_n)| + |f(x_n) - f(x_0)| + |f_{m_n}(x_0) - f(x_0)| \\
\leqslant &\frac{\varepsilon}{3} + 2d_\infty(f_{m_n}, f)
\end{aligned}$$

y esto resulta ser una contradicción.

# Equicontinuidad

## Definición

Sea $\{ f_\alpha \}_{\alpha\in\Omega}$ una familia de funciones $f_\alpha : X \to Y$ con $(X, d), (Y, \rho)$ espacios métricos.
Diremos que $\{ f_\alpha \}_{\alpha\in\Omega}$ es equicontinua en $x_0$ si para $\varepsilon > 0$, existe $\delta > 0$ que satisface

$$d(x_0, y) < \delta \Rightarrow \rho(f_\alpha(y), f_\alpha(x_0)) < \varepsilon$$

si $\alpha \in \Omega$.
La familia entera es equicontinua si lo es en todos los puntos.

# Un Lema Útil

## Lema

*Sea* $\{ f_n \}_{n=1}^{\infty}$, $f_n : X \to Y$ *una familia equicontinua. Sea* $K \subseteq X$ *un compacto tal que* $f_n(x) \xrightarrow[n \to \infty]{} f_0(x)$ *con* $f_0$ *continua en* $K$. *Entonces* $\{ f_n \}_{n=1}^{\infty}$ *converge uniformemente a* $f_0$ *en* $K$.

# Probamos el Lema

- Dado $x \in K$ y $\varepsilon > 0$, existe $\delta_x > 0$ tal que
$$y \in B(x, \delta_x) \Rightarrow \rho(f_n(x), f_n(y)) < \frac{\varepsilon}{3}$$
para $n \geqslant 0$.
- Al ser $K$ compacto, existen $x_1, \ldots, x_m$ tales que
$$K \subseteq \bigcup_{m=1}^{\infty} B(x_i, \delta_{x_i}).$$
- Tome $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que para $1 \leqslant i \leqslant m$ valga
$$\rho(f_n(x_i), f_0(x_i)) < \frac{\varepsilon}{3}.$$

# Terminamos la Prueba

Sea $y \in K$, entonces existe $1 \leqslant i \leqslant m$ tal que $y \in B(x_i, \delta_{x_i})$ y así

$$\begin{aligned}
&\rho(f_n(y), f_0(y)) \\
\leqslant&\rho(f_n(y), f_n(x_i)) + \rho(f_n(x_i), f_0(x_i)) + \rho(f_0(x_i), f_0(y)) \\
<&\frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3}.
\end{aligned}$$

En esencia, este lema nos dice que la equicontinuidad nos permite pasar de convergencia puntual a uniforme.
*¿Qué hacemos si no tenemos de antemano que $f$ es continua?*

# Solventando el Problema

## Lema

*Sea $f_n : X \to Y$ una sucesión equicontinua con $Y$ completo. Suponga que además $\{ f_n \}_{n=1}^{\infty}$ converge para $x \in D \subseteq X$ con $D$ denso en $X$.*
*Entonces $f_n$ converge en $X$ y su límite es continuo.*

# Probamos el Lema

Sea $x \in X$ vamos a probar que $\{ f_n(x) \}_{n=1}^{\infty}$ es de Cauchy.

- Por equicontinuidad existe $\delta > 0$ tal que para $n \geqslant 1$ vale

$$d(x, y) < \delta \Rightarrow \rho(f_n(x), f_n(y)) < \frac{\varepsilon}{3}.$$

- Sea $y \in B(x, \delta) \cap D$, así existe $n_0$ tal que

$$n, m \geqslant n_0 \Rightarrow \rho(f_n(y), f_m(y)) < \frac{\varepsilon}{3}.$$

# Terminamos la Prueba

Así, cuando $n, m \geqslant 0$ vale que

$$\begin{aligned}&\rho(f_n(x), f_m(x))\\ \leqslant&\rho(f_n(x), f_n(y)) + \rho(f_n(y), f_m(y)) + \rho(f_m(y), f_m(x)) < \varepsilon.\end{aligned}$$

Sea $f(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x)$, note que

$$\rho(f(x), f(y)) \leqslant \lim_{n\to\infty} \rho(f_n(x), f_n(y)) \leqslant \frac{\varepsilon}{3}$$

cuando $d(x, y) < \delta$.

## Observación

El resultado es válido siempre que $\overline{\{ f_n(x) \}_{n=1}^{\infty}}$ sea completo. Por ejemplo, cuando el conjunto es compacto.

# Otro Lema, pero de Ejercicio

## Lema

*Sea* $f_n : X \to Y$ *una familia equicontinua y* $K \subseteq X$ *compacto. Asuma que* $\{ f_n(x) \}_{n=1}^{\infty}$ *converge para* $x \in K$ *a* $f_0 : X \to Y$*. Entonces* $f_n$ *converge uniformemente en* $K$*.*

## Ejercicio

¡Pruebe el lema!

# El Teorema de Arzelà-Ascoli

## Teorema

*Sea $\{ f_n \}_{n=1}^{\infty}$ una familia equicontinua con $f_n : X \to Y$ y $X$ separable. Supongamos que $\overline{\{ f_n(x) \}_{n=1}^{\infty}}$ es compacto. Entonces existe una subsucesión de $\{ f_n \}_{n=1}^{\infty}$ que converge puntualmente a una función continua $f : X \to Y$ y la convergencia es uniforme para cada compacto $K \subseteq X$.*

# La Prueba del Teorema

- Sea $\{ x_n \}_{n=1}^{\infty} = D \subseteq X$ denso, que existe por separabilidad.
- Sabemos que $\overline{\{ f_n(x_1) : n \geqslant 1 \}}$ es compacto.
- Entonces existe una subsucesión $f_{n_k}^1$ tal que $\{ f_{n_k}^1(x_1) \}_{k=1}^{\infty}$ converge.
- De igual forma $\overline{\{ f_{n_k}^1(x_2) : n \geqslant 1 \}}$ es compacto. ¿Por qué?
- Entonces existe una subsucesión $f_{n_k}^2$ de $f_{n_k}^1$ que satisface que $\{ f_{n_k}^2(x_2) \}_{k=1}^{\infty}$ converge.

# Continuamos la Prueba

- Iterando, dado $f_{n_k}^{m}$ tal que $\{ f_{n_k}^{m}(x_m) \}_{k=1}^{\infty}$ converge, existe una subsucesión $f_{n_k}^{m+1}$ que satisface que $\{ f_{n_k}^{m+1}(x_{m+1}) \}_{k=1}^{\infty}$ converge.
- Por construcción $\{ f_{n_k}^{m}(x_\ell) \}_{k=1}^{\infty}$ convergencia para $1 \leqslant \ell \leqslant m$.
- Dado que para $\ell \leqslant m$, $\{ f_{n_m}^{m} \}_{m=\ell}^{\infty}$ es una subsucesión de $f_{n_k}^{\ell}$, tenemos que $\{ f_{n_m}^{m}(x_i) \}_{m=1}^{\infty}$ converge para $1 \leqslant i \leqslant \ell$.

# Terminamos la Prueba

Por lo tanto $\{ f_{n_m}^m \}_{m=1}^{\infty}$ converge para todos los puntos de $D$.
Por los resultados anteriores, $\{ f_{n_m}^m \}_{m=1}^{\infty}$ converge en $X$ a una función continua y la convergencia es uniforme en compactos.

# Un Corolario

## Corolario

*Sea $\{ f_n \}_{n=1}^{\infty}$ una familia equicontinua de funciones $f_n : X \to \mathbb{R}$ con $X$ separable. Si $D$ es denso y numerable y $\{ f_n(x) \}_{n=1}^{\infty}$ es acotado, entonces existe una subsucesión $\{ f_{n_k} \}_{k=1}^{\infty}$ que converge a una función continua $f : X \to \mathbb{R}$ y la convergencia es uniforme en compactos.*

Note que $\overline{\{ f_n(x) \}_{n=1}^{\infty}}$ es compacto.

# Compactos de $\mathcal{C}(K, \mathbb{R})$

## Lema

*Sea $X = \mathcal{C}(K, \mathbb{R})$. Entonces $C \subseteq X$ es compacto en $(X, d_\infty)$ si y sólo si $C$ es cerrado, acotado y equicontinuo.*

Ya vimos que los compactos de $\mathcal{C}(K, \mathbb{R})$ cumplen lo pedido. Vamos a probar la otra dirección a continuación.

# Prueba del Lema

Sea $\{ f_n \}_{n=1}^{\infty} \subseteq C$.

- Como $C$ es acotado, existe $M \geqslant 0$ que satisface
$$d_\infty(f_n, 0) \leqslant M$$
con 0 la función idénticamente cero. Es decir $\|f_n\|_\infty \leqslant M$ para $n \geqslant 1$.
- Por el corolario 1 anterior, existe $\{ f_{n_k} \}_{k=1}^{\infty}$ que converge a $f : K \to \mathbb{R}$ continua con $f \in C$.

# Un Ejemplo

Si

$$f_n(x) = \begin{cases} 0, \; 0 \leqslant x \leqslant 1 - \frac{1}{n}. \\ nx - n + 1, \; 1 - \frac{1}{n} \leqslant x \leqslant 1. \end{cases}$$

Podemos probar que

- $\|f_n\|_\infty \leqslant 1.$
- $f_n$ es continua.

Es decir, $f_n \in \mathcal{C}([0,1], \mathbb{R})$ y $f_n \in \overline{B(0,1)}$. Y ahora,

$$|f_n(x) - f_n(1)| = |nx - n + 1 - 1| = n|x - 1|.$$

Finalmente

$$
\begin{aligned}
&|f_n(x) - f_n(1)| < \varepsilon \\
\iff\ & n|x-1| < \varepsilon \\
\iff\ & |x-1| < \frac{\varepsilon}{n}
\end{aligned}
$$

Así esta sucesión no es equicontinua y por tanto $\overline{B(0,1)}$ no es compacta en $\mathcal{C}([0,1],\mathbb{R})$.

# Resumen

- La definición 1 de equicontinuidad.
- El primer lema 1 sobre convergencia uniforme.
- Qué pasaba en el caso no continuo. 2
- El teorema 2 de Arzelà-Ascoli.
- Un corolario 1 al teorema de Arzelà-Ascoli.

# Ejercicios

- Lista 7
  - A probar el lema 3

# Lecturas adicionales I


- S.Cambronero.
  *Notas MA0505*.
  20XX.
- I.Rojas
  *Notas MA0505*.
  2018.