Integral de Riemann-Stieltjes

1

Sea $\phi : [a,b] \to \mathbb{R}$. Dados $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ acotada, una partición $P = \{x_0 = a < x_1 < \dots < x_n = b\}$ una partición de $[a,b]$, y

$x_{i-1} \leq \xi_i \leq x_i$ para $1 \leq i \leq n$

definimos la suma de R-S por

$$R(f, P, \phi) = \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i) [\phi(x_i) - \phi(x_{i-1})]$$

Def: Decimos que f es Riemann-Stieltjes integrable con respecto a ϕ en $[a,b]$ si existe $I \in \mathbb{R}$ que satisface: que para todo $\varepsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que si $|P| < \delta$ entonces

$$|R(f, P, \phi) - I| < \varepsilon$$

para cualquier escogencia de los puntos $\{\xi_1, \dots, \xi_n\}$.

Denotamos

$$I = \int_a^b f \, d\phi .$$

Dada $f: [a,b] \to \mathbb{R}$ acotada y

$\Pi = \{x_0 = a < x_1 < \dots < x_n = b\}$,

definimos

$$m_i = \inf_{x_{i-1} \leq \xi_i \leq x_i} f(\xi) \qquad 1 \leq i \leq n$$

$$M_i = \sup_{x_{i-1} \leq \xi_i \leq x_i} f(\xi) \qquad 1 \leq i \leq n$$

De forma similar a las definiciones de la integral de Riemann, definimos

$$L(f,\Pi,\phi) = \sum_{i=1}^{n} m_i \left(\phi(x_i) - \phi(x_{i-1})\right)$$

$$U(f,\Pi,\phi) = \sum_{i=1}^{n} M_i \left(\phi(x_i) - \phi(x_{i-1})\right)$$

Es claro que si f es creciente tenemos

$$L(f,\Pi,\phi) \leq R(f,\Pi,\phi) \leq U(f,\Pi,\phi)$$

Ojo: En el caso $\phi(x) = x$ para todo $x \in [a,b]$, se obtiene la integral de Riemann.

Ejc: La función f es R-S integrable con respecto a ϕ sii dado $\varepsilon>0$ existe $\delta>0$ tal que si $|\Pi|<\delta$ y $|\Pi'|<\delta$ se tiene

$$|R(f,\Pi,\phi)-R(f,\Pi',\phi)|<\varepsilon.$$

Lema: Asume que existe $x_0 \in [a,b]$ tal que f y ϕ son discontinuas en z_0. Ent f no es R-S integrable con respecto a ϕ.

Pba:

Caso 1: Asume $\phi(z_0) \neq \lim_{x\to z_0^+} \phi(x) = \lim_{x\to z_0^-} \phi(x)$

entonces existe $\varepsilon>0$ tal que para todo $\delta>0$ existe $\overline{x_\delta}$ y $\overline{y_\delta}$ que satisfacen $\overline{x_\delta} < z_0 < \overline{y_\delta}$

$$0 < z_0 - \overline{x_\delta} < \frac{\delta}{2}, \quad 0 < \overline{y_\delta} - z_0 < \frac{\delta}{2},$$

$$|\phi(z_0) - \phi(\overline{x_\delta})| \geq \sqrt{\varepsilon}, \text{ y}$$

$$|\phi(z_0) - \phi(\overline{y_\delta})| \geq \sqrt{\varepsilon}$$

Además existe ξ_δ tal que

$$|\xi_\delta - z_0| < \frac{\delta_1}{2} \text{ y } |f(\xi_\delta) - f(z_0)| \geq \sqrt{\varepsilon}$$

Donde

$$\delta_1 = \min\left\{\tfrac{1}{2}|z_0 - \overline{x_\delta}|, \tfrac{1}{2}|z_0 - \overline{y_\alpha}|\right\}$$

Asuma que $\xi_\delta > z_0$. Tome Π una partición tal que

$$z_0 = x_{i_0} < \xi_\delta < x_{i_0+1} = \overline{y_\alpha}$$

y $\quad |\Pi| < \delta$. $(\Pi = \{x_0 = a < \dots < x_n = b\})$

Considere ahora dos sumas de R-S con Π de partición y los mismos ξ_i para $i = i_0$. En el intervalo $[x_{i_0}, x_{i_0+1}]$, $R(f,\Pi,\phi)$ es la suma de R-S con punto $\xi_{i_0} = \xi_\delta$, $R'(f,\Pi,\phi)$ es la suma de R-S con $\xi_{i_0} = z_0$. Ent

$$|R(f,\Pi,\phi) - R'(f,\Pi,\phi)| =$$

$$|f(\xi_\delta) - f(z_0)|\,|\phi(x_{i_0}) - \phi(x_{i_0+1})| \geq$$

$$\varepsilon$$

El caso en que $z_0 > \xi_\delta$, se prueba de forma similar.

<u>Caso 2:</u> $\quad \lim_{x \to z_0^+} \phi(x) \neq \lim_{x \to z_0^-} \phi(x)$

se deja como ejercicio.

Vamos ahora a analizar las propiedades de U y L. El siguiente resultado tiene una análogo en las sumas de Darboux.

Lema: Sea $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ acotada y $\phi:[a,b]\to\mathbb{R}$ creciente.

(i) Si $P_1 \subseteq P_2$, entonces

$$L(f,P_1,\phi) \leq L(f,P_2,\phi)$$
$$U(f,P_2,\phi) \leq U(f,P_1,\phi)$$

(ii) Si P_1 y P_2 son dos particiones cualesquiera

$$L(f,P_1,\phi) \leq U(f,P_2,\phi)$$

Pba: (i)

Sean $P_1 = \{a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b\}$

$$P_2 = \{a = y_0 < y_1 < \dots < y_m = b\}$$

note $n \leq m$. Dado $1 \leq i \leq n$ asuma que existe y_j t.q.

$$x_i < y_j < x_{i+1}$$

Ent

$$\sup_{[x_i,y_j]} f \ , \ \sup_{[y_j,x_{i+1}]} f \leq \sup_{[x_i,x_{i+1}]} f$$

y por lo tanto

$$\sup_{[x_i, y_j]} f \; (\phi(y_j) - \phi(x_i)) +$$

$$\sup_{[y_j, x_{i+1}]} f \; (\phi(x_{i+1}) - \phi(y_j)) \leq$$

$$\sup_{[x_i, x_{i+1}]} f \; (\phi(y_j) - \phi(x_i) + \phi(x_{i+1}) - \phi(y_j))$$

$$= \sup_{[x_i, x_{i+1}]} f \; (\phi(x_{i+1}) - \phi(x_i))$$

Usando un argumento similar se prueba que si

$$\underset{y_{j-1}}{\overset{\parallel}{x_{i-1}}} < y_j < y_{j+1} < \dots < x_i = y_{j+m}$$

entonces

$$\sum_{j=1}^{m} \sup_{[y_{j-1}, y_j]} f \left(\phi(y_j) - \phi(y_{j-1}) \right) \leq$$

$$\sup_{[x_{i-1}, x_i]} f \; (\phi(x_i) - \phi(x_{i-1}))$$

$\therefore \; U(f, \Pi_1, \phi) \geq U(f, \Pi_2, \phi)$

De forma similar se prueba la desigualdad para L.

(ii) Si Π_1, Π_2 son particiones, considere $\Pi = \Pi_1 \cup \Pi_2$, ent

$$L(f, \Pi_1, \phi) \leq L(f, \Pi, \phi) \leq$$

$$U(f, \Pi, \phi) \leq U(f, \Pi_2, \phi).$$

Utilizando la definición es facil probar que si

$$\int_a^b f\,d\phi_1 \quad y \quad \int_a^b f\,d\phi_2$$

existen, y $\phi = \phi_1 - \phi_2$, entonces $\int_a^b f\,d\phi$ existe y además

$$\int_a^b f\,d\phi = \int_a^b f\,d\phi_1 - \int_a^b f\,d\phi_2 .$$

Luego en el caso de que ϕ sea de variación acotada, podemos reducir el problema de que f sea R-S integrable con respecto a ϕ al caso de que ϕ sea creciente y positiva

Teorema: Sea $f:[a,b] \to \mathbb{R}$ continua y $\phi:[a,b] \to \mathbb{R}$ de variación acotada en $[a,b]$. Entonces $\int_a^b f\,d\phi$ existe, y además

$$\left| \int_a^b f\,d\phi \right| \leq \left[\sup_{[a,b]} |f| \right] Var(\phi, [a,b])$$