MA0505 - Análisis I

Lección XII: La Medida Exterior

Pedro Méndez[1]

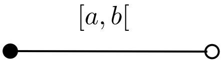
[1]Departmento de Matemática Pura y Ciencias Actuariales
Universidad de Costa Rica

Semestre I, 2021

Agenda

La Longitud de un segmento

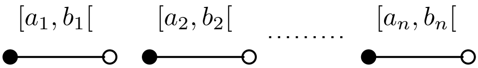
Considere el segmento



La longitud del segmento es

$$b - a = \text{longitud}([a, b[) = \ell([a, b[).$$

Si tenemos intervalos disjuntos



Entonces su longitud es $\sum_{i=1}^{n} b_i - a_i$.

¿Cuál es la Longitud de un Punto?

Si tenemos $\{ a \} \subseteq [a, a + \varepsilon[$, entonces

$$\ell(a) \leqslant \varepsilon$$

para $\varepsilon > 0$. De manera que la longitud del punto es cero.

Los Racionales

Sea $\mathbb{Q} \cap [0,1] = \{ q_n \}_{n=1}^{\infty}$, entonces

$$\ell\left(\bigcup_{i=1}^{n} \{ q_i \}\right) = \sum_{i=1}^{n} \ell(\{ q_i \}) = 0.$$

Entonces, ¿cuál es la longitud de $\mathbb{Q} \cap [0,1]$? Note que $\int_a^b \mathrm{d}x = b - a$.

Unas Observaciones

De hecho si $[a,b[\subseteq[0,1]$, entonces

(I) $b-a=\int_0^1 \mathbf{1}_{[a,b[}(x)\mathrm{d}x.$

(II) $\sum_{i=1}^{n} b_i-a_i=\int_0^1 \sum_{i=1}^{n}\mathbf{1}_{[a_i,b_i[}(x)\mathrm{d}x=\int_0^1 \mathbf{1}_{\bigcup_{i=1}^{n}[a_i,b_i[}(x)\mathrm{d}x.$

(III) $0=\int_0^1 \mathbf{1}_{\{\,a\,\}}(x)\mathrm{d}x.$

Volviendo a la Pregunta

En este caso $\int_0^1 \mathbf{1}_{\bigcup_{i=1}^n \{q_i\}}(x)\mathrm{d}x = 0$. Note que $\mathbf{1}_{[0,1[\cap\mathbb{Q}} = \lim_{n\to\infty} \mathbf{1}_{\bigcup_{i=1}^n \{q_i\}}$.
Luego si $\mathbf{1}_{[0,1[\cap\mathbb{Q}}$ fuese integrable y se pudieren tomar límites, tenemos que

$$\int_0^1 \mathbf{1}_{\mathbb{Q}\cap[0,1]}(x)\mathrm{d}x = \lim_{n\to\infty} \int_0^1 \mathbf{1}_{\bigcup_{i=1}^n \{q_i\}}(x)\mathrm{d}x = 0.$$

¿Qué integral estamos usando? Recordemos que $\mathbf{1}_{\mathbb{Q}\cap[0,1]}$ no es Riemann integrable.

Consideremos las familias

- $S = \{\, [a,b[\,:\; a < b \,\} \cup \{\,]-\infty, b] \,:\; b \in \mathbb{R} \,\} \cup \{\, [a,\infty[\,:\; a \in \mathbb{R} \,\} \cup \emptyset$.
- $\mathcal{S}_1 = \left\{ \bigcup_{i=1}^{n} I_i;\; I_i \in S,\; 1 \leqslant i \leqslant n \right\}$.

Note que $[a,b] \notin \mathcal{S}_1$, pero $\mathbb{R} = [-\infty, b[\cup]b, \infty] \in \mathcal{S}_1$. Por lo tanto, dado $A \subseteq \mathbb{R}$, existe $B \in \mathcal{S}_1$ tal que $A \subseteq B$.

La Definición

Definimos $m : \mathcal{S}_1 \to \mathbb{R}$ por:

1. $m([a,b]) = b - a$ si $a < b$.
2. $m([a,\infty[) = m(]-\infty,b]) = \infty$.
3. $m\left(\bigcup_{i=1}^{k} I_i\right) = \sum_{i=1}^{k} b_i - a_i$ para $I_i = [a_i, b_i]$ que satisface $]a_i, b_i[\cap]a_j, b_j[= \emptyset$ si $i \neq j$.

¿Está bien definida?

Resumen

- Una definición de longitud de intervalo que nos lleva a preguntas nuevas.
- La primera definición de medida 9.

Ejercicios

- Lista 12
  -

Lecturas adicionales I

- S.Cambronero.
  Notas MA0505.
  20XX.
- I.Rojas
  Notas MA0505.
  2018.