Medida exterior

1

Considere el segmento

$[a,b)$

La longitud del segmento es

$$b-a = \text{longitud}\,([a,b)) = \ell\,([a,b))$$

Si tenemos intervalos disjuntos

$[a_1,b_1)$ $[a_2,b_2)$ ... $[a_n,b_n)$

La longitud de los intervalos es

$$\sum_{i=1}^{n} b_i - a_i .$$

¿Cuál es la longitud de un punto?

$\{a\} \subseteq [a, a+\varepsilon)$

Entonces

$\ell(a) \leq \varepsilon$ para todo $\varepsilon > 0$

$\therefore$ $\ell(\{a\}) = 0$

Sea $\mathbb{Q} \cap [0,1] = \{q_n\}_{n=1}^{\infty}$.

Entonces

$$\ell\left(\bigcup_{i=1}^{n} \{q_i\}\right) = \sum_{i=1}^{n} \ell(\{q_i\})$$

$$= 0.$$

¿Cuál es la longitud de $[0,1] \cap \mathbb{Q}$?

Note que

$$\int_a^b dx = b-a$$

De hecho si $[a,b) \subseteq [0,1]$, entonces

(i) $$b-a = \int_0^1 \mathbb{1}_{[a,b)}(x)\, dx$$

(ii) $$\sum_{i=1}^{n} (b_i - a_i) = \int_0^1 \sum_{i=1}^{n} \mathbb{1}_{[a_i,b_i)}(x)\, dx$$

$$= \int_0^1 \mathbb{1}_{\bigcup_{i=1}^{n} [a_i,b_i)}(x)\, dx$$

(iii) $$0 = \int_0^1 \mathbb{1}_{\{a\}}(x)\, dx.$$

Volviendo a la pregunta planteada

$$\int_0^1 \mathbb{1}_{\bigcup_{i=1}^{n}\{q_i\}}(x)\,dx = 0$$

Note que

$$\mathbb{1}_{[0,1)\cap\mathbb{Q}} = \lim_{n\to\infty} \mathbb{1}_{\bigcup_{i=1}^{n}\{q_i\}}$$

Luego si $\mathbb{1}_{[0,1)\cap\mathbb{Q}}$ fuera

integrable, y se pudieran tomar

límites, tenemos que

$$\int_0^1 \mathbb{1}_{\mathbb{Q}\cap[0,1]}(x)\,dx$$

$$= \lim_{n\to\infty} \int_0^1 \mathbb{1}_{\bigcup_{i=1}^{n}\{q_i\}}(x)\,dx$$

$$= 0.$$

¿Cuál es la integral usada?

Recordemos que $\mathbb{1}_{\mathbb{Q}\cap[0,1]}$

no es Riemann integrable.

Definición de medida exterior

Consideremos

$S = \{ [a,b) : a<b \} \cup \{ (-\infty, b] : b \in \mathbb{R} \}$

$\cup \{ [a,+\infty) : a \in \mathbb{R} \}$

$$\mathcal{A}_1 = \left\{ \bigcup_{i=1}^{n} I_i : 1 \le i \le n \right\}$$

Note que $[a,b] \notin \mathcal{A}_1$, pero

$\mathbb{R} = (-\infty, b] \cup [b, +\infty) \in \mathcal{A}_1$.

Por lo tanto, dado $A \subseteq \mathbb{R}$

existe $B \in \mathcal{A}_2$ t.q. $A \subseteq B$

Definimos

$$m^* : \mathcal{A}_1 \longrightarrow \mathbb{R} \text{, por}$$

(i) $m^*([a,b)) = b-a$ si $a<b$.

(ii) $m^*([a,+\infty)) = m^*((-\infty,b))$

$= +\infty$

(iii) $m^*\left(\bigcup_{i=1}^{n} I_i \right) = \sum_{i=1}^{n} b_i - a_i$

si $I_i = [a_i, b_i)$

¿Esta m^* bien definida?