MA0505 - Análisis I

Lección XVIII: La Integral de Lebesgue I

Pedro Méndez[1]

[1] Departmento de Matemática Pura y Ciencias Actuariales
Universidad de Costa Rica

Semestre I, 2021

Agenda

El Área Bajo la Curva

Sea $f : E \to \overline{\mathbb{R}}$ medible con E medible y $f \geqslant 0$. Definimos

$$R(f, E) = \{\, (x, y) \in \mathbb{R}^{d+1} : \; x \in E, \; 0 \leqslant y \leqslant f(x) \,\}.$$

Surge la pregunta, ¿es $R(f, E)$ medible? Analicemos el caso $f(x) = a$ dentro de $A \subseteq E$ y $a > 0$.s

Entonces ocurre que

$$
\begin{aligned}
R(f, E) &= \{ (x, y) \in \mathbb{R}^{d+1} : \; x \in E, \; 0 \leqslant y \leqslant f(x) \} \\
&= \{ (x, y) \in \mathbb{R}^{d+1} : \; x \in E, \; 0 \leqslant y \leqslant a \} \\
&\cup \{ (x, y) \in \mathbb{R}^{d+1} : \; x \in E \setminus A, \; y = 0 \} \\
&= A \times [0, a] \cup E \setminus A \times \{ 0 \}.
\end{aligned}
$$

Lema

Sea $A \subseteq E$ medible y $a \geqslant 0$. Entonces $A \times [0, a]$ es medible y su medida es $am(A)$.

Prueba del Lema

1. Sea $A = [a_1, b_1] \times \ldots \times [a_d, b_d]$. Entonces es claro que se cumple el lema.
2. Sea A un abierto, entonces existen I_k's, cajas en d dimensiones, tales que $A = \bigcup_{k=1}^{\infty} I_k$ con $I_k^o \cap I_k^o = \emptyset$ si $j \neq k$. Entonces $A \times [0, a] = \bigcup_{k=1}^{\infty} I_k \times [0, a]$ es un conjunto medible. Y como

$$(I_k \times [0, a])^o \cap (I_j \times [0, a])^o = \emptyset, \ k \neq j,$$

entonces

$$m(A \times [0, a]) = \sum_{i=1}^{\infty} (I_i \times [0, a]) = a \sum_{i=1}^{\infty} m(I_i) = am(A).$$

Prueba del Lema

1. Sea $A = [a_1, b_1] \times \ldots \times [a_d, b_d]$. Entonces es claro que se cumple el lema.
2. Sea A un abierto, entonces existen I_k's, cajas en d dimensiones, tales que $A = \bigcup_{k=1}^{\infty} I_k$ con $I_k^o \cap I_k^o = \emptyset$ si $j \neq k$. Entonces $A \times [0, a] = \bigcup_{k=1}^{\infty} I_k \times [0, a]$ es un conjunto medible. Y como

$$(I_k \times [0, a])^o \cap (I_j \times [0, a])^o = \emptyset, \;\; k \neq j,$$

entonces

$$m(A \times [0, a]) = \sum_{i=1}^{\infty} (I_i \times [0, a]) = a \sum_{i=1}^{\infty} m(I_i) = am(A).$$

Continuamos

3. Sea $A = \bigcap_{j=1}^{\infty} G_j$ un G_δ con G_i abierto para $i \geqslant 1$ y $G_{i+1} \subseteq G_i$. ¿Por qué podemos asumir esto? Luego $A \times [0,a] = \bigcap_{j=1}^{\infty} G_j \times [0,a]$ con $G_{i+1} \times [0,a] \subseteq G_i \times [0,a]$ medibles con medida finita. Entonces
$$m(A \times [0,a]) = \lim_{i\to\infty} m(G_i \times [0,a]) = \lim_{i\to\infty} am(G_i) = am(A).$$
4. Si $A = H \setminus Z$ con H G_δ y Z de medida cero, entonces por el paso anterior $H \times [0,a]$ es medible y $m(H \times [0,a]) = am(H)$. (Ej:$m_e(Z \times [0,a]) = 0$) Entonces
$$A \times [0,a] = (H \times [0,a]) \setminus (Z \times [0,a])$$
y $m(A \times [0,a]) = m(H \times [0,a]) = am(H) = am(A)$.

Terminamos

5. Finalmente si $m(A) = \infty$, entonces llamemos $A_k = A \cap B(0,k)$. De esta manera $A = \bigcup_{k=1}^{\infty} A_k$, con $A_k \subseteq A_{k+1}$ medibles y acotados. Por los argumentos anteriores

$$A_k \times [0,a] \subseteq A_{k+1} \times [0,a]$$

son conjuntos medibles tales que $m(A_k \times [0,a]) = am(A_k)$. Entonces

$$m(A \times [0,a]) = m\left(\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k \times [0,a]\right) = \lim_{k\to\infty} m(A_k \times [0,a])$$

$$= \lim_{k\to\infty} m(A_k \times [0,a]) = \lim_{k\to\infty} am(A_k) = am(A).$$

Gráficos

Sea $f : E \to \mathbb{R}$ medible con $f \geqslant 0$. Entonces existe una sucesión creciente de funciones simple $\{ \phi_k \}_{k=1}^{\infty}$ que satisfacen

$$\phi_k(x) \xrightarrow[k \to \infty]{} f(x) \text{ c.p.d.}, \ x \in E.$$

Luego si $0 \leqslant y \leqslant f(x)$, existe ϕ_k simple tal que $0 \leqslant y \leqslant \phi_k(x)$. Entonces

$$R(f, E) = \bigcup_{k=1}^{\infty} R(\phi_k, E) \cup \{ (x, y) \in \mathbb{R}^{d+1} : \ x \in E, \ f(x) = y \}.$$

Concluimos que $R(f, E)$ es medible si

(a) $R(\phi_k, E)$ es medible.

(b) $\Gamma(f, E) = \{ (x, f(x)) : \ x \in E \}$ es medible.

El Gráfico tiene Medida Cero

Lema

Sea $f : E \to \mathbb{R}$ medible, entonces $m_e(\Gamma(f, E)) = 0$.

Asumamos primero que E tiene medida finita. Sea $\varepsilon > 0$ y

$$E_k = \{\, x \in E : \; k\varepsilon \leqslant f(x) < (k+1)\varepsilon \,\},$$

entonces $E = \bigcup_{k=1}^{\infty} E_k$. Note que

$$\Gamma(f, E_k) \subseteq (E_k \times [0, (k+1)\varepsilon] \setminus (E_k \times [0, k\varepsilon])).$$

El Gráfico tiene Medida Cero

De lo anterior tenemos

$$m_e(\Gamma(f, E_k)) \leqslant m(E_k \times [0, (k+1)\varepsilon]) - m(E_k \times [0, k\varepsilon]) \leqslant \varepsilon m(E).$$

Por lo tanto vale que

$$m_e(\Gamma(f, E_k)) = 0$$

y así

$$m_E(\bigcup_{k=1}^{\infty} \Gamma(f, E_k)) = m_e(\Gamma(f, E)) = 0.$$

Ejercicio

Terminar la prueba de este lema es un ejercicio.

La Concluisión

Finalmente si

$$\phi_k(x) = \sum_{i=1}^{m} a_i \mathbf{1}_{A_i},$$

con $a_i \neq a_j$, $A_i \cap A_j = \emptyset$ para $i \neq j$ y $E = \bigcup_{i=1}^{m} A_i$, tenemos que

$$\{ (x,y) \in \mathbb{R}^d : \; x \in E, \; 0 \leqslant y \leqslant \phi_k(x) \}$$
$$= \bigcup_{k=1}^{m} \{ (x,y) \in \mathbb{R}^d : \; x \in A_k, \; 0 \leqslant y \leqslant a_k \}$$

es un conjunto medible.

Teorema

Sea $f : E \to \mathbb{R}$ medible, con E medible. Entonces $R(f,E) \subseteq \mathbb{R}^{d+1}$ es un conjunto medible.

La Definición

Definición

Dada $f : E \to \mathbb{R}$ medible tal que $f \geqslant 0$, definimos su integral de Lebesgue como

$$\int_E f \mathrm{d}x = m(R(f, E)).$$

Una Observación

Note que si $\phi(x) = \sum_{i=1}^m a_i \mathbf{1}_{A_i}$ con $A_i \cap A_j = \emptyset$ para $i \neq j$.
Entonces, si $a_i \neq 0$,

$$\int_E f(x)\mathrm{d}x = \sum_{i=1}^m a_i m(A_i)$$

pues

$$
\begin{aligned}
& m(\{\,(x,y) : x \in E,\ 0 \leqslant y \leqslant f(x)\,\}) \\
= & m(\{\,f = 0\,\} \times \{\,0\,\}) + m\left(\bigcup_{i=1}^m \{\,(x,y) :\ x \in A_j,\ 0 \leqslant y \leqslant a_i\,\}\right) \\
= & \sum_{i=1}^m a_i m(A_i).
\end{aligned}
$$

Propiedades

Teorema

Sean $f, g : E \to [0, \infty[$ *medibles.*

(I) *Si* $0 \leqslant g \leqslant f$, *entonces*

$$\int_E g(x)\mathrm{d}x \leqslant \int_E f(x)\mathrm{d}x.$$

(II) *Si* $\int_E f(x)\mathrm{d}x < \infty$, *entonces* $f \neq \infty$ *c.p.d.*

(III) *Si* $E_1 \subseteq E_2 \subseteq E$, *entonces*

$$\int_{E_1} f(x)\mathrm{d}x \leqslant \int_{E_2} f(x)\mathrm{d}x.$$

Prueba del Teorema

- Dado que $0 \leqslant g \leqslant f$, tenemos que

$$\begin{aligned}&\{\,(x,y):\ x\in E,\ 0\leqslant y\leqslant g(x)\,\}\\ \subseteq&\{\,(x,y):\ x\in E,\ 0\leqslant y\leqslant f(x)\,\}.\end{aligned}$$

  Luego $R(g,E)\subseteq R(f,E)$.
- Por otro lado si $E_1 \subseteq E_2$, entonces $\mathbf{1}_{E_1}f \leqslant \mathbf{1}_{E_2}f$. Como

$$\begin{aligned}&\{\,(x,y):\ x\in E,\ 0\leqslant y\leqslant \mathbf{1}_{E_i}f\,\}\\ =&(E\setminus E_i\times\{\,0\,\})\cup\{\,(x,y):\ x\in E_1,\ 0\leqslant y\leqslant f\,\}\end{aligned}$$

  Entonces $R(\mathbf{1}_{E_i}f,E)=R(f,E_i)$. Es decir $\int\limits_{E_i} f(x)\mathrm{d}x \leqslant \int\limits_{E_2} f(x)\mathrm{d}x$.

Terminamos la Prueba

- Por otro lado si $E_1 = \{ f = \infty \}$, tomemos $f(x) = n\mathbf{1}_{E_i}(x)$. Entonces $g(x) \leqslant f(x)$ para $x \in E$. Luego

$$nm(E_1) \leqslant \int_E f(x)\mathrm{d}x,$$

y por lo tanto $m(E_1) = 0$

Resumen

- El lema 1 sobre el área bajo la curva de una función constante.
- El lema 2 sobre medida cero del gráfico.
- El teorema 1 sobre el area bajo la curva.
- La definición 1 de la integral de Lebesgue.
- El teorema 2 sobre las propiedades de la integral de Lebesgue.

Ejercicios

- Lista 18
  - El ejercicio 7 sobre los conjuntos de medida cero.
  - Terminar la prueba del lema 2 es el ejercicio 1.

Lecturas adicionales I

S.Cambronero.
Notas MA0505.
20XX.

I.Rojas
Notas MA0505.
2018.