Integral de Riemann-Stieltjes

1

Sea $\phi : [a,b] \to \mathbb{R}$. Dados $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ acotada, una partición $\Pi = \{ x_0 = a < x_1 < \dots < x_n = b \}$ una partición de $[a,b]$, y

$x_{i-1} \leq \xi_i \leq x_i$ para $1 \leq i \leq n$

definimos la suma de R-S por

$$R(f, \Pi, \phi) = \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i) \left[\phi(x_i) - \phi(x_{i-1}) \right]$$

Def: Decimos que f es Riemann-Stieltjes integrable con respecto a ϕ en $[a,b]$ si existe $I \in \mathbb{R}$ que satisface: que para todo $\varepsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que si $|\Pi| < \delta$ entonces

$$| R(f, \Pi, \phi) - I | < \varepsilon$$

para cualquier escogencia de los puntos $\{\xi_1, \dots, \xi_n\}$.

Denotamos

$$I = \int_a^b f \, d\phi .$$

Dada $f: [a,b] \to \mathbb{R}$ acotada y

$\Pi = \{ x_0 = a < x_1 < \dots < x_n = b \}$,

definimos

$$m_i = \inf_{x_{i-1} \leq \xi_i \leq x_i} f(\xi) \qquad 1 \leq i \leq n$$

$$M_i = \sup_{x_{i-1} \leq \xi_i \leq x_i} f(\xi) \qquad 1 \leq i \leq n$$

De forma similar a las definiciones de la integral de Riemann, definimos

$$L(f, \Pi, \phi) = \sum_{i=1}^{n} m_i \left(\phi(x_i) - \phi(x_{i-1}) \right)$$

$$U(f, \Pi, \phi) = \sum_{i=1}^{n} M_i \left(\phi(x_i) - \phi(x_{i-1}) \right)$$

Es claro que si f es creciente tenemos

$$L(f, \Pi, \phi) \leq R(f, \Pi, \phi) \leq U(f, \Pi, \phi)$$

<u>Ojo:</u> En el caso $\phi(x) = x$ para todo $x \in [a,b]$, se obtiene la integral de Riemann.

3

Ejc: La función f es R-S integrable con respecto a ϕ sii dado $\varepsilon>0$ existe $\delta>0$ tal que si $|\Gamma|<\delta$ y $|\Gamma'|<\delta$ se tiene

$$|R(f,\Gamma,\phi)-R(f,\Gamma',\phi)|<\varepsilon.$$

Lema: Asume que existe $x_0\in[a,b]$ tal que f y ϕ son discontinuas en z_0. Ent f no es R-S integrable con respecto a ϕ.

Pba:

Caso 1: Asume $\phi(z_0)\neq \lim_{x\to z_0^+}\phi(x) = \lim_{x\to z_0^-}\phi(x)$

entonces existe $\varepsilon>0$ tal que para todo $\delta>0$ existe $\overline{x}_\delta$ y $\overline{y}_\delta$ que satisfacen $\overline{x}_\delta < z_0 < \overline{y}_\delta$

$$0<z_0-\overline{x}_\delta<\frac{\delta}{2},\quad 0<\overline{y}_\delta - z_0<\frac{\delta}{2},$$

$$|\phi(z_0)-\phi(\overline{x}_\delta)| \geq \sqrt{\varepsilon},\ y$$

$$|\phi(z_0)-\phi(\overline{y}_\delta)| \geq \sqrt{\varepsilon}$$

Además existe ξ_δ tal que

$$|\xi_\delta - z_0|<\frac{\delta_1}{2} \quad y \quad |f(\xi_\delta)-f(z_0)|\geq\sqrt{\varepsilon}$$

Donde

$$\delta_1 = \min\left\{\tfrac{1}{2}|z_0-\overline{x_\delta}|, \tfrac{1}{2}|z_0-\overline{y_\delta}|\right\}$$

Asuma que $\xi_\delta > z_0$. Tome Π una partición tal que

$$z_0 = x_{i_0} < \xi_\delta < x_{i_0+1} = \overline{y_\delta}$$

y $\quad |\Pi| < \delta$. $(\Pi = \{x_0 = a < \dots < x_n = b\})$

Considere ahora dos sumas de R-S con Π de partición y los mismos ξ_i para $i = i_0$. En el intervalo $[x_{i_0}, x_{i_0+1}]$, $R(f,\Pi,\phi)$ es la suma de R-S con punto $\xi_{i_0} = \xi_\delta$, $R'(f,\Pi,\phi)$ es la suma de R-S con $\xi_{i_0} = z_0$. Ent

$$|R(f,\Pi,\phi) - R'(f,\Pi,\phi)| =$$

$$|f(\xi_\delta) - f(z_0)|\,|\phi(x_{i_0}) - \phi(x_{i_0+1})| \geq$$

$$\varepsilon$$

El caso en que $z_0 > \xi_\delta$, se prueba de forma similar.

<u>Caso 2</u>: $\quad \lim\limits_{x\to z_0^+} \phi(x) \neq \lim\limits_{x\to z_0^-} \phi(x)$

se deja como ejercicio.

Vamos ahora a analizar las propiedades de U y L. El siguiente resultado tiene una análogo en las sumas de Darboux.

Lema: Sea $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ acotada y $\phi:[a,b]\to\mathbb{R}$ creciente.

(i) Si $P_1 \subseteq P_2$, entonces

$$L(f,P_1,\phi) \leq L(f,P_2,\phi)$$
$$U(f,P_2,\phi) \leq U(f,P_1,\phi)$$

(ii) Si P_1 y P_2 son dos particiones cualesquiera

$$L(f,P_1,\phi) \leq U(f,P_2,\phi)$$

Pba: (i)

Sean $P_1 = \{a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b\}$

$P_2 = \{a = y_0 < y_1 < \dots < y_m = b\}$

note $n \leq m$. Dado $1 \leq i \leq n$ asuma que existe y_i t.q.

$$x_i < y_i < x_{i+1}$$

Ent

$$\sup_{[x_i, y_i]} f \ , \ \sup_{[y_i, x_{i+1}]} f \leq \sup_{[x_i, x_{i+1}]} f$$

y por lo tanto

$$\sup_{[x_i, y_j]} f \, (\phi(y_j) - \phi(x_i)) +$$

$$\sup_{[y_j, x_{i+1}]} f \, (\phi(x_{i+1}) - \phi(y_j)) \leq$$

$$\sup_{[x_i, x_{i+1}]} f \, (\phi(y_j) - \phi(x_i) + \phi(x_{i+1}) - \phi(y_j))$$

$$= \sup_{[x_i, x_{i+1}]} f \, (\phi(x_{i+1}) - \phi(x_i))$$

Usando un argumento similar se prueba que si

$$x_{i-1} = y_{j-1} < y_j < y_{j+1} < \dots < x_i = y_{j+m}$$

entonces

$$\sum_{j=1}^{m} \sup_{[y_{j-1}, y_j]} f \left(\phi(y_j) - \phi(y_{j-1}) \right) \leq$$

$$\sup_{[x_{i-1}, x_i]} f \, (\phi(x_i) - \phi(x_{i-1}))$$

$\therefore \; U(f, \Pi_1, \phi) \geq U(f, \Pi_2, \phi)$

De forma similar se prueba la desigualdad para L.

(iii) Si Π_1, Π_2 son particiones, considere $\Pi = \Pi_1 \cup \Pi_2$, ent

$$L(f, \Pi_1, \phi) \leq L(f, \Pi, \phi) \leq U(f, \Pi, \phi) \leq U(f, \Pi_2, \phi).$$

Utilizando la definición es facil probar que si

$$\int_a^b f\, d\phi_1 \quad y \quad \int_a^b f\, d\phi_2$$

existen, y $\phi = \phi_1 - \phi_2$, entonces $\int_a^b f\, d\phi$ existe y además

$$\int_a^b f\, d\phi = \int_a^b f\, d\phi_1 - \int_a^b f\, d\phi_2 .$$

Luego en el caso de que ϕ sea de variación acotada, podemos reducir el problema de que f sea R-S integrable con respecto a ϕ al caso de que ϕ sea creciente y positiva

Teorema: Sea $f:[a,b] \to \mathbb{R}$ continua y $\phi:[a,b] \to \mathbb{R}$ de variación acotada en $[a,b]$. Entonces $\int_a^b f\, d\phi$ existe, y además

$$\left| \int_a^b f\, d\phi \right| \leq \left[\sup_{[a,b]} |f| \right] Var(\phi, [a,b])$$

Pba: Por los comentarios anteriores basta probar el resultado en el caso en que ϕ es creciente.

Dado $\varepsilon>0$, existe $\delta_1>0$ tal que

$$|x-y|<\delta_1 \Rightarrow |f(x)-f(y)|<\frac{\varepsilon}{2(\phi(b)-\phi(a))}$$

Paso 1: Si $|\Pi|<\delta_1$, vamos a probar que

$$U(f,\Pi,\phi)-L(f,\Pi,\phi)<\frac{\varepsilon}{2}.$$

Sea $\Pi=\{x_0=a<x_1<x_2<\dots<x_n=b\}$.

Dado que existen ξ_i y η_i que satisfacen

$$f(\xi_i)=\sup_{[x_i,x_{i+1}]} f = M_i, \quad 0\le i\le n-1$$

$$f(\eta_i)=\inf_{[x_i,x_{i+1}]} f = m_i, \quad 0\le i\le n-1$$

tenemos

$$U(f,\Pi,\phi)-L(f,\Pi,\phi)=$$

$$\sum_{i=0}^{n-1}(M_i-m_i)\,(\phi(x_{i+1})-\phi(x_i))=$$

$$\sum_{i=0}^{n-1}(f(\xi_i)-f(\eta_i))\,(\phi(x_{i+1})-\phi(x_i))\le$$

$$\frac{\varepsilon}{2}\,\frac{1}{\phi(b)-\phi(a)}\,(\phi(b)-\phi(a))$$

pues $|\xi_i-\eta_i|\le|x_{i+1}-x_i|\le|\Pi|\le\delta_1$.

<u>Paso 2</u>: Vamos a mostrar que existe I tal que para todo $\eta>0$ existe $\delta>0$ que satisface

$$|\Pi|<\delta \Rightarrow |U(f,\Pi,\phi)-I| < \frac{\varepsilon}{2}$$

Sea $\{\Pi_k\}_{k=1}^{\infty}$ una sucesión de particiones tal que

$$\lim_{k\to\infty} |\Pi_k| = 0$$

Considere $\Pi_k' = \bigcup_{j=1}^{k} \Pi_j$, entonces

$\Pi_k' \subseteq \Pi_{k+1}'$ y $\Pi_k \subseteq \Pi_k'$.

Tome $U = \inf\limits_{1\le k} U(f,\Pi_k,\phi)$

Dado que $|\Pi_k| < \delta_1$, para $k\geq k_1$,

$$U(f,\Pi_k,\phi) \leq L(f,\Pi_k,\phi) + \frac{\varepsilon}{2}$$
$$\leq U(f,\Pi_k',\phi) + \frac{\varepsilon}{2}$$

Sea $k_0 \geq k_1$ tal que

$$0 \leq U(f,\Pi_k',\phi) - U < \frac{\varepsilon}{2}$$

si $k \geq k_0$. Entonces

$|U(f,\Pi_k,\phi) - U| \leq |U(f,\Pi_k',\phi) - U| +$
$|U(f,\Pi_k,\phi) - U(f,\Pi_k',\phi)| \leq$

$\frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2}$, si $k \geq k_0$

Ahora si $\{\tilde{\Pi}_k\}_{k=1}^{\infty}$ es otra sucesión de particiones que satisface

$$\lim_{k\to\infty} |\tilde{\Pi}_k| = 0$$

10

Tome $\hat{\Pi}_k = \tilde{\Pi}_k \cup \Pi_k$ y k_0

t.q. $|\tilde{\Pi}_k| < \delta_1$, $|\Pi_k| < \delta_1$

si $k \geq k_0$. Entonces

$$U(f,\Pi_k,\phi) \leq U(f,\hat{\Pi}_k,\phi) + \frac{\varepsilon}{2}$$

$$U(f,\hat{\Pi}_k,\phi) \leq U(f,\Pi_k,\phi) + \frac{\varepsilon}{2}$$

Luego

$$-\varepsilon < U(f,\Pi_k,\phi) - U$$

$$\leq U(f,\hat{\Pi}_k,\phi) - U + \frac{\varepsilon}{2}$$

$$\leq U(f,\Pi_k,\phi) - U + \varepsilon$$

$$< 2\varepsilon$$

Finalmente

a) $R(f,\Pi,\phi) - U \leq$

$U(f,\Pi,\phi) - U \leq \frac{\varepsilon}{2}$.

b) $R(f,\Pi,\phi) - U \geq$

$L(f,\Pi,\phi) - U \geq$

$U(f,\Pi,\phi) - U - \frac{\varepsilon}{2} >$

ε

Las propiedades básicas de la integral de Riemann se mantienen

Teorema: Asuma, para $1 \le i, j \le 2$, que $f_i : [a,b] \to \mathbb{R}$ es R-S integrable con respecto a $\phi_j : [a,b] \to \mathbb{R}$

Si $c \in \mathbb{R}$, tenemos que

(a) $$\int_a^b (cf_1 + f_2)\, d\phi_1 = c\int_a^b f_1\, d\phi_1 + \int_a^b f_2\, d\phi_1.$$

(b) $$\int_a^b f_1\, d(c\phi_1) = c\int_a^b f_1\, d\phi_1$$

(c) $$\int_a^b f_1\, d(\phi_1 + \phi_2) = \int_a^b f_1\, d\phi_1 + \int_a^b f_2\, d\phi_2.$$

(d) $$\int_a^b f_1\, d\phi_1 = \int_a^c f_1\, d\phi_1 + \int_c^b f_1\, d\phi_1$$

para todo $a \le c_1 \le b$.

Pba: Ejercicio

Si $\phi : [a,b] \to \mathbb{R}$ es creciente, dado que

a) $L(f, P, \phi) \le R(f, P, \phi) \le U(f, P, \phi)$

b) $U(f, P, \phi) \le \sup_{[a,b]} f \,(\phi(b) - \phi(a))$

c) $L(f,P,\phi) \geq \inf_{[a,b]} f \,(\phi(b)-\phi(a))$

tenemos que

$$\inf_{[a,b]} f \,(\phi(b)-\phi(a)) \leq$$

$$\int_a^b f\, d\phi \qquad \leq$$

$$\sup_{[a,b]} f \,(\phi(b)-\phi(a))$$

Lema: Sea f es continua y R-S integrable con respecto a ϕ. Si además ϕ es creciente, entonces existe $\xi \in [a,b]$ que satisface

$$\int_a^b f\, d\phi = f(\xi)\,[\phi(b)-\phi(a)].$$

También tenemos el siguiente resultado de integración por partes

Teorema. Si $\int_a^b f\, d\phi$ existe, entonces $\int_a^b \phi\, df$ existe y además

$$\int_a^b f\, d\phi + \int_a^b \phi\, df = f(b)\phi(b) - f(a)\phi(a).$$

Prueba. Sea $P = \{x_0 = a < x_1 < \dots < x_n = b\}$ y $x_{i-1} \leq \xi_i \leq x_i$ para $1 \leq i \leq n$.

Defina $P' = \{a,b\} \cup \{\xi_1, \dots, \xi_n\}$, $\xi_0 = a$, $\xi_{n+1} = b$, entonces

13

$$R(f,P,\phi) = \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\left(\phi(x_i) - \phi(x_{i-1})\right)$$

$$= \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\,\phi(x_i) - \sum_{i=0}^{n-1} f(\xi_{i+1})\,\phi(x_i)$$

$$= -\sum_{i=1}^{n-1} \phi(x_i)\left[f(\xi_{i+1}) - f(\xi_i)\right]$$

$$+ f(\xi_n)\,\phi(b) - \phi(a)\,f(\xi_1)$$

$$= -\sum_{i=1}^{n-1} \phi(x_i)\left[f(\xi_{i+1}) - f(\xi_i)\right]$$

$$- \phi(a)\left(f(\xi_1) - f(\xi_0)\right)$$

$$- \phi(b)\left(f(\xi_{n+1}) - f(\xi_n)\right)$$

$$- \phi(a)f(a) + \phi(b)f(b) =$$

$$-\sum_{i=0}^{n} \phi(x_i)\left(f(\xi_{i+1}) - f(\xi_i)\right) +$$

$$\phi(b)f(b) - \phi(a)f(a).$$

Ent

$$R(f,P,\phi) = R(\phi,P',f) + f(b)\phi(b) - f(a)\phi(a).$$

El resultado se concluye al tomar límites

Considere

$$\{r_n\}_{n=1}^{\infty} = \mathbb{Q} \cap [0,1]$$

Defina

$$f_n : [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}$$, dada por

$$f_n(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x = r_1, \ldots, r_n. \\ 0 & \text{si no} \end{cases}$$

Note que $f_n \leq f_{n+1}$ y que

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in \mathbb{Q} \cap [0,1] \\ 0 & \text{si no} \end{cases}$$

Se deja al lector de ejercicio probar que

- $\int_0^1 f_n(x)\,dx = 0$, y que
- f no es Riemann integrable

Luego $\int_0^1 f(x)\,dx$ no se puede definir.

<u>Lema:</u> Sea ϕ de variación acotada. Considere $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ una sucesión de funciones R-S integrables con respecto a ϕ. Si $f_n \xrightarrow[n\to\infty]{} f$ uniformemente y f es R-S integrable con respecto a ϕ.

Ent

$$\lim_{n\to\infty} \int_a^b f_n\,d\phi = \int_c^b f\,d\phi$$