Conjuntos medibles

La siguientes caracterizacciones serán de mucha utilidad.

Teorema: Las siguientes condiciones son equivalentes:

(i) E es medible

(ii) $E = H \setminus Z$ donde H es de tipo G_δ y $m_e(Z) = 0$

(iii) $E = H \cup Z$ donde H es de tipo F_σ y $m_e(Z) = 0$

Pba.: Es claro que (ii) $\Rightarrow$ (i) y (iii) $\Rightarrow$ (i).

(i) $\Rightarrow$ (ii):

Sea E medible. Dado k existe G_k abierto tal que $E \subseteq G_k$ y

$$m_e(G_k \setminus E) < \frac{1}{k}.$$

Tome $H = \bigcap_{k=1}^{\infty} G_k$, entonces $E \subseteq H$ y

$$m_e(H \setminus E) \leq m_e(G_k \setminus E) \leq \frac{1}{k}$$

Luego $m_e(H \setminus E) = 0$, y

$$E = H \setminus Z$$

con $Z = H \setminus E$.

El resto de la prueba se deja de ejercicio.

El siguiente resultado se deja de ejercicio (2)

Teorema: Sea $E \subseteq \mathbb{R}^d$ tal que $m_e(E) < \infty$. Entonces E es medible si: dado $\varepsilon > 0$ existen $\tilde{S}, N_1$ y N_2 que satisfacen

i) $E = (\tilde{S} \cup N_1) \setminus N_2$

ii) $\tilde{S} = \bigcup_{k=1}^{\infty} I_k$ con $I_k \in S$.

iii) $m_e(N_1) < \varepsilon$ y $m_e(N_2) < \varepsilon$.

Teorema: (Carathéodory)

Sea $E \subseteq \mathbb{R}^d$. Entonces E es medible si: para todo $A \subseteq \mathbb{R}^d$ se tiene

$$m_e(A) = m_e(A \cap E) + m_e(A \setminus E)$$

Pba:

"$\Rightarrow$" Sea E medible y $A \subseteq \mathbb{R}^d$. Entonces existe H un G_δ que satisface

$$m_e(A) = m(H).$$

y $A \subseteq H$.

Por lo tanto

$$m(H) = m(H \cap E) + m(H \setminus E)$$
$$\geq m_e(A \cap E) + m_e(A \setminus E)$$

Concluimos que 3

$$m_e(A) \geq m_e(A \cap E) + m_e(A \setminus E)$$

"$\Leftarrow$" Asuma que $m_e(E) < \infty$, entonces existe H de tipo G_δ que satisface

$$m_e(E) = m(H).$$

Por hipótesis tenemos que

$$m_e(H) = m_e(E) + m_e(H \setminus E),$$

i.e. $m_e(H \setminus E) = 0$

$\therefore$ $E = H \setminus Z$ con Z de medida exterior cero

Ahora si $m_e(E) = +\infty$, defina

$$E_k = E \cap B(0,k).$$

Tome H_k de tipo G_δ tal que $E_k \subseteq H_k$ y $m_e(E_k) = m(H_k)$

Entonces

$$m_e(H_k) = m_e(H_k \cap E) + m_e(H_k \setminus E)$$
$$\geq m_e(E_k) + m_e(H_k \setminus E)$$

pues $E_k \subseteq H_k \cap E$.

$\therefore$ $m_e(H_k \setminus E) = 0$.

Considere

$$H = \bigcup_{k=1}^{\infty} H_k,$$

es claro que H es medible

Además

$$m_e(H \setminus E) =$$

$$m_e\left(\bigcup_{u=1}^{\infty} H_u \setminus E\right) \leq$$

$$\sum_{u=1}^{\infty} m_e(H_u \setminus E) = 0$$

$\therefore \quad E = H \setminus Z$ con

$Z = H \setminus E$. $\blacksquare$

Corolario: Sea E medible. Si $E \subseteq A \subseteq \mathbb{R}^d$, entonces

$$m_e(A) = m(E) + m_e(A \setminus E)$$

Si además $m(E) < \infty$, ent

$$m_e(A \setminus E) = m_e(A) - m(E)$$

Finalmente probaremos un resultado técnico que utilizaremos posteriormente.

Teorema Sea $E \subseteq \mathbb{R}^d$. Entonces existe H de tipo G_δ tal que $E \subseteq H$ y

$$m(H \cap M) = m_e(E \cap M)$$

para todo medible M.

Pba: Asuma que $m_e(E) < \infty$.

Sea H de tipo G_δ que satisface

$$m(H) = m_e(E).$$

Ahora si M es medible.

$$m(H) = m(H \cap M) + m(H \setminus M)$$

$$m_e(E) = m_e(E \cap M) + m_e(E \setminus M).$$

Como

$$m_e(E \cap M) \leq m_e(H \cap M)$$

$$m_e(E \setminus M) \leq m_e(H \setminus M)$$

$$m_e(E) = m(H)$$

Si tiene que

$$m(H \cap M) = m_e(E \cap M)$$

Por otro lado si $m_e(E) = +\infty$,

sea

$$E_k = E \cap B(0,k).$$

Tome G_k de tipo G_δ tal que

$$m(M \cap G_k) = m_e(M \cap E_k)$$

y $G_k \supseteq E_k$.

Como $E_k \subseteq E_{k+l} \subseteq G_{k+l}$,

se tiene que

$$E_k \subseteq \bigcap_{m=k}^{\infty} G_m = H_k$$

Estos conjuntos nos permitiran tomar límites.

Note que $E_n \subseteq H_n$, i.e

$$m_e(E_n \cap M) \leq m_e(H_n \cap M) \leq m_e(G_n \cap M) = m_e(E_n \cap M)$$

$\therefore$ $m_e(E_n \cap M) = m_e(H_n \cap M)$.

Dado que

$$E_n \cap M \subseteq E_{n+1} \cap M$$
$$H_n \cap M \subseteq H_{n+1} \cap M$$

obtenemos

$$m_e(E \cap M) = m_e\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n \cap M\right) = \lim_{n\to\infty} m_e(E_n \cap M) = \lim_{n\to\infty} m_e(H_n \cap M) = m_e\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} H_n \cap M\right).$$

Finalmente note que

$$\tilde{H} = \bigcup_{n=1}^{\infty} H_n = \bigcup_{n=1}^{\infty} \bigcap_{m=n}^{\infty} G_n$$

no es necesariamente de tipo G_δ.

Como $\tilde{H}$ es medible, existe H de tipo G_δ y Z de medida cero t.q

$\widetilde{H} = H_1 \setminus Z$.

7

Entonces

$m_e(E \cap M) = m_e(\widetilde{H} \cap M) =$

$m_e(H_1 \setminus Z \cap M) =$

$m_e(H_1 \setminus Z \cap M) + m_e(H_1 \cap Z \cap M) =$

$m_e(H_1 \cap M)$.

$\blacksquare$

El conjunto de Cantor

Considere $C_0 = [0,1]$. Divide C_0 en tres intervalos de igual longitud y remueva el intervalo abierto del centro, se obtiene

$$C_1 = C_0 \setminus \left(\tfrac{1}{3}, \tfrac{2}{3}\right) = [0, \tfrac{1}{3}] \cup [\tfrac{2}{3}, 1]$$

Sea C_2 el conjunto que se obtiene al remover el intervalo central de tamaño un tercio a los intervalos resultantes entonces

$$C_2 = [0, \tfrac{1}{9}] \cup [\tfrac{2}{9}, \tfrac{1}{3}] \cup [\tfrac{6}{9}, \tfrac{7}{9}] \cup [\tfrac{8}{9}, 1].$$

Iterando este proceso se obtiene C_k, y se define.

$$C = \bigcap_{k=1}^{\infty} C_k$$

Es claro que C es cerrado, y por lo tanto medible. Además

$$m(C_{k+1}) = \frac{2}{3} m(C_k)$$

i.e. $m(C_k) = \left(\frac{2}{3}\right)^k.$

Como $C_{k+1} \subseteq C_k$

Concluimos que

$$m(C) = m\left(\bigcap_{k=1}^{\infty} C_k\right)$$

$$= \lim_{k \to \infty} m(C_k)$$

$$= 0.$$

Note que

$$C_3 = \left[1, \tfrac{1}{27}\right] \cup \left[\tfrac{2}{27}, \tfrac{3}{27}\right] \cup \left[\tfrac{6}{27}, \tfrac{7}{27}\right] \cup$$

$$\left[\tfrac{8}{27}, \tfrac{9}{27}\right] \cup \left[\tfrac{18}{27}, \tfrac{19}{27}\right] \cup \left[\tfrac{20}{27}, \tfrac{21}{27}\right]$$

$$\cup \left[\tfrac{24}{27}, \tfrac{25}{27}\right] \cup \left[\tfrac{26}{27}, 1\right]$$

Los extremos son de la forma

$$\frac{p}{3^k}$$

Considere la expansión en base 3 de $x \in [0,1]$, ent

$$x = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{n_i}{3^i}$$

para $n_i = \{0,1,2\}$.

Estas expansiones no son únicas pues

$$\frac{1}{3} = \sum_{i=2}^{\infty} \frac{2}{3^i}$$

De hecho la expansión no es única sii

$x = \dfrac{p}{3^k}$ para $p \in \mathbb{N}$ y $k \geq 1$.

En los casos que la expansión no es única se toma la expansión sin 1, es decir

Ejr: Sea $x = \sum_{u=1}^{\infty} \frac{b_u}{3^u}$

$$= \sum_{u=1}^{\infty} \frac{a_u}{3^u}$$

con $b_u, a_u \in \{0,1,2\}$. Entonces existe u_0 tal que

(i) $a_u = b_u$ si $1 \leq u \leq u_0$

(ii) $|b_{u_0+1} - a_{u_0+1}| = 1$

(iii) Si $b_{u_0+1} > a_{u_0+1}$, ent

$b_u = 0$ para $u > u_0+1$

$a_u = 2$ para $u > u_0+1$

En los casos en que hay dos expansiones tomamos la expansión dada por los a_u

Ejr: $x \in C_u$ sii $n_u = 0$ ó $n_u = 2$

Luego $x \in C_u$ sii $n_u = 0$ ó $n_u = 2$ para todo $u \geq 1$.

Considere la función

$$\Phi : C \longrightarrow [0,1]$$
$$x \longrightarrow \sum_{i=0}^{\infty} \frac{n_u}{2} \frac{1}{2^u}$$

entonces Φ está bien definida y es sobreyectiva. Luego C es no contable, cerrado y tiene medida cero.

El ejemplo de Vitali

En esta sección vamos a construir un conjunto no medible. Primero probaremos un resultado preliminar

Lema: Sea $E \subseteq \mathbb{R}$ medible tal que $m(E) > 0$. Entonces

$$E - E = \{ z \in \mathbb{R} : z = x - y,\ x \in E,\ y \in E \}$$

contiene un intervalo centrado en 0.

Pba: Sea $\varepsilon > 0$, entonces existe G abierto tal que $E \subseteq G$ y

$$m(G) < (1+\varepsilon)\, m(E).$$

Sabemos que existen $\{I_u\}_{u=1}^{\infty} \subseteq G$ t.q.

- $I_u = [a_u, b_u]$
- $G = \bigcup_{u=1}^{\infty} [a_u, b_u]$
- $I_u^{o} \cap I_e^{o} = \emptyset$

Defina $E_u = I_u \cap E$, entonces

$E_u \cap E_e = \emptyset$ ó $E_u \cap E_e = \{a\}$

para algún $a \in \mathbb{R}$

Dado que

$$\sum_{u=1}^{\infty} m(I_u) = m(G) \leq (1+\varepsilon)\, m(E) = (1+\varepsilon) \sum_{u=1}^{\infty} m(E_u)$$

tenemos que existe u_0 t.q.

$$m(I_{u_0}) \leq (1+\varepsilon)\, m(E_{u_0})$$

Sea $I = I_{u_0}$ y $\tilde{\hat{E}} = E_{u_0}$, vamos a mostrar que si $\varepsilon = \frac{1}{3}$ y $|d| < \frac{m(I)}{2}$ entonces

$$(\tilde{\hat{E}} - d) \cap \tilde{\hat{E}} \neq \phi.$$

Note que

$$(\tilde{\hat{E}} - d) \cap \tilde{\hat{E}} \neq \phi \iff$$

existen $x, y \in \tilde{\hat{E}}$ tal que

$$x - d = y \iff$$

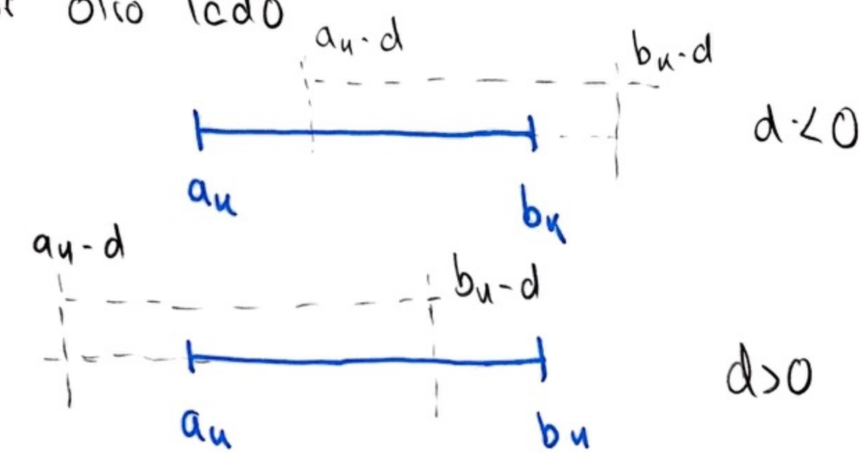
$$d \in \tilde{\hat{E}} - \tilde{\hat{E}} \subseteq E - E.$$

Luego $\left(-\frac{m(I)}{2}, \frac{m(I)}{2}\right) \subseteq E - E$.

Asuma que $(\tilde{\hat{E}} - d) \cap \tilde{\hat{E}} = \phi$. Ent

$$m(\tilde{\hat{E}} \cup (\tilde{\hat{E}} - d)) = m(\tilde{\hat{E}}) + m(\tilde{\hat{E}} - d)$$
$$= 2\, m(\tilde{\hat{E}})$$

Por otro lado



Entonces

$$\tilde{E} \cup (\tilde{E}-d) \subseteq$$

$$[a_u - |d|, b_u]$$

ó

$$\tilde{E} \cup (\tilde{E}-d) \subseteq$$

$$[a_u, b_u + |d|]$$

Estos intervalos tienen medida

$$|d| + m(I) < \frac{3}{2} m(I)$$

$$\therefore \quad 2m(E) < \frac{3}{2} m(I)$$

$$\Leftrightarrow \quad m(E) < \frac{3}{4} m(I)$$

(S)

Defina la relación de equivalencia

$$x \sim y \quad \text{sii} \quad x - y \in \mathbb{Q}.$$

Sea E_x la clase de equivalencia de x. Ent

$$E_x = \{x + r : r \in \mathbb{Q}\}$$

Note que E_x es contable, y por lo tanto existe una cantidad no contable de clases de equivalencia.

Sea $\tilde{E}$ el conjunto formado por exactamente un elemento de cada clase

Entonces E es incontable, y

$$(E-E)\cap\mathbb{Q}=\{0\}$$

Por el lema anterior, E es no medible o $m_e(E)=0$.

Dado que

$$\mathbb{R}=\bigcup_{q\in\mathbb{Q}} E+q$$

se tiene que $m_e(E+q)=m_e(E)\neq 0$.

$$\boxed{E \text{ no es medible}}$$

Corolario: Sea $A\subseteq\mathbb{R}$ con $m_e(A)>0$. Entonces existe $E\subseteq A$ tal que E no es medible.

Pba: Como $\mathbb{R}=\bigcup_{q\in\mathbb{Q}} E+q$, tenemos que

$$A=\bigcup_{q\in\mathbb{Q}}(E_q\cap A)$$

Sea $A_q=E_q\cap A$, un argumento similar muestra que A_q no es medible.