MA0505 - Análisis I

Lección IX: Conexidad

Pedro Méndez[1]

[1] Departmento de Matemática Pura y Ciencias Actuariales
Universidad de Costa Rica

Semestre I, 2021

Agenda

Conjuntos Disconexos

Definición

Un espacio (X, d) es disconexo si existen A, B abiertos no vacíos tales que

$$X = A \cup B, \quad (A \cap B = \emptyset).$$

Diremos que un espacio es conexo si no es disconexo.

Si X es conexo y $X = A \cup B$, con A, B abiertos, es necesario que $A = X$ ó $B = X$.

Subespacios y Conexidad

Dado $E \subseteq X$ podemos definir

$$d_E : E \times E \to \mathbb{R},\ (x, y) \mapsto d(x, y).$$

Ejercicio

(E, d_E) es un espacio métrico. Pruebe que $D \subseteq E$ es abierto en (E, d_E) si y sólo si existe $O \subseteq X$ abierto en (X, d) tal que $D = E \cap O$.

Definición

$E \subseteq X$ es disconexo si existen A, B abiertos en (X, d) tales que

$$E = (A \cap E) \,\dot\cup\, (B \cap E),\ A \cap E \neq \emptyset \neq B \cap E.$$

Un Ejemplo

Sea $I =]a, b[\subseteq \mathbb{R}$. Vamos a probar que I es conexo.

- Asumamos que I es disconexo, entonces existen A, B abiertos tales que

$$I = (I \cap A) \dot{\cup} (I \cap B), \;\; I \cap A, \;\; I \cap B \neq \emptyset.$$

- Sean $s \in I \cap A$, $t \in I \cap B$ con $s < t$. Así $[s, t] \subseteq I$.

Continuamos con el Ejemplo

- Como $s \in A$, entonces existe δ_1 tal que
$$]s-\delta_1, s+\delta_1[\subseteq A.$$
- Como $[s, s+\delta_1] \subseteq [s, t]$ entonces
$$[s, s+\delta_1] \subseteq [s, t] \cap A.$$
- Llamemos $u = \sup\{\, x \in [s, t] \cap A \,\}$.
- De esta manera $s < u \leqslant t$.

Continuamos con el Ejemplo

- Si fuese que $u \in B$, entonces existe $\delta_2 > 0$ tal que
$$]u - \delta_2, u + \delta_2[\subseteq B.$$
- De manera análoga $]u - \delta_2, u[\subseteq [s, t]$ y por tanto
$$]u - \delta_2, u[\subseteq B \cap [s, t].$$
- Sin embargo, por propiedades del sup, existe $w \in [s, t] \cap A$ tal que
$$u - \delta_2 < w \leqslant u.$$
Esto es una contradicción.

Terminamos el Ejemplo

De forma similar se prueba que si $u \in A$, entonces existe un δ_3 tal que

$$[u, u + \delta_3] \subseteq [s, t] \cap A.$$

Funciones Continuas Preservan Conexidad

Resumen

- La definción 1 de espacios conexos.
- La definción 2 de subconjuntos disconexos.

Ejercicios

- Lista 9
  - El ejercicio 1 sobre abiertos dentro de subespacios.

Lecturas adicionales I

- S.Cambronero.
  Notas MA0505.
  20XX.
- I.Rojas
  Notas MA0505.
  2018.