MA0505 - Análisis I

Lección VI: Completitud

Pedro Méndez[1]

[1]Departmento de Matemática Pura y Ciencias Actuariales
Universidad de Costa Rica

Semestre I, 2021

Agenda

1 Definición de Completitud

Un Recordatorio. . .

A diferencia de *compacidad*, este concepto es intrínseco a los espacios métricos.
Recordemos que una sucesión $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ es de Cauchy si para $\varepsilon > 0$, existe un $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que

$$n, m \geqslant n_0 \Rightarrow d(x_n, x_m) < \varepsilon.$$

Ejercicio

- Toda sucesión convergente es de Cauchy.
- Toda sucesión de Cauchy es acotada.

La Definición

Definición

A un espacio (X, d) le llamamos completo si toda sucesión de Cauchy en X es convergente.

Como ejemplo consideremos el espacio $\{ f : [0,1] \to \mathbb{R}, \ f \text{ continua} \}$. La distancia es

$$d_\infty(f,g) = \sup_{x \in [0,1]} |f(x) - g(x)|.$$

Si $x \in [0,1]$ y $(f_n)_{n=1}^\infty$ es de Cauchy, entonces existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $d_\infty(f_n, f_m) < \frac{\varepsilon}{2}$ cuando $n, m \geqslant n_0$.

Resumen

-

Ejercicios

- Lista 5
    -

Lecturas adicionales I

- S.Cambronero.
  Notas MA0505.
  20XX.
- I.Rojas
  Notas MA0505.
  2018.