MA0505 - Análisis I

Lección XIX: La Integral de Lebesgue II

Pedro Méndez[1]

[1] Departmento de Matemática Pura y Ciencias Actuariales
Universidad de Costa Rica

Semestre I, 2021

Agenda

1. La Integral de Lebesgue
   - Teoremas de Convergencia
   - Propiedades de la Integral

Convergencia Monótona

Teorema

Sea $\{ f_k \}_{k=1}^{\infty}$ *una sucesión de funciones medibles tales que*

$$f_k(x) \leqslant f_{k+1}(x), x \in E.$$

Si vale que $\lim_{k\to\infty} f_k(x) = f(x)$ *casi por doquier en* E*, entonces*

$$\lim_{k\to\infty} \int_E f_k(x)\mathrm{d}x = \int_E f(x)\mathrm{d}x.$$

Prueba del Teorema

Recordemos que

$$R(f,E)=\Gamma(f,E)\cup\bigcup_{k=1}^{\infty}R(f_k,E).$$

Como $R(f_k,E)\subseteq R(f_{k+1},E)$ tenemos que

$$m(R(f,E))=\lim_{k\to\infty} m(R(f_k,E)).$$

En el caso que $E = \bigcup_{i=1}^{\infty} E_i$ con $E_i \cap E_j = \emptyset$ si $i \neq j$, tenemos que

$$R(f, E) = \bigsqcup_{k=1}^{\infty} R(f, E_k).$$

De esta manera

$$\int_E f(x)\mathrm{d}x = m(R(f, E)) = \sum_{k=1}^{\infty} m(R(f, E_k)) = \sum_{k=1}^{\infty} \int_{E_k} f(x)\mathrm{d}x.$$

Esta fórmula es válida también para uniones finitas pues $R(f, \emptyset) = \emptyset$.

Una Fórmula Útil

Dada $f : E \to [0, \infty[$ medible, definimos

$$\sum(f, \{ E_i \}_{i=1}^N) = \sum_{i=1}^N (\inf_{E_i} f) \mathbf{1}_{E_i}.$$

Teorema

Sea $f : E \to \mathbb{R}$ medible, no negativa. Entonces

$$\int_E f(x) \mathrm{d}x = \sup_{E = \dot{\bigcup}_{i=1}^N E_i} \sum(f, \{ E_i \}_{i=1}^N).$$

Prueba del Teorema

Dados $E_1, \ldots, E_N$ tales que $E = \biguplus_{i=1}^{N} E_i$, tenemos que

$$\sum(f, \{ E_i \}_{i=1}^{N}) \leqslant f, \text{ i.e.}$$

$$\sum_{i=1}^{N} (\inf_{E_i} f) m(E_i) \leqslant \int_E f(x)\mathrm{d}x.$$

Ahora dado $k \geqslant 1$ y $1 \leqslant i \leqslant k2^k$ diremos que

$$E_k^0 = \{ f \geqslant k \}, \; E_k^i = \left\{ \frac{i-1}{2^k} \leqslant f(x) \leqslant \frac{i}{2^k} \right\}.$$

Tenemos entonces $E = \bigcup_{i=0}^{k2^k} E_k^i$.

Continuamos la Prueba

Si $f_k(x) = k\mathbf{1}_{E_k^o} + \sum_{i=1}^{k2^k} \frac{i-1}{2^k}\mathbf{1}_{E_k^i}$, entonces

- $f_k \leqslant f_{k+1}$.
- $\lim_{k\to\infty} f_k = f$.

Por el TCM, $\int_E f_k \to \int_E f$ y como

$$f_k \leqslant \sum(f, \{\, E_k^i \,\}_{i=1}^{k2^k})$$

entonces tenemos que

$$\lim_{k\to\infty} \sum_{i=0}^{k2^k} (\inf_{E_i} f)\mathbf{1}_{E_k^i} = \int_E f(x)\mathrm{d}x.$$

Un Corolario

Note que este resultado implica lo siguiente:

Corolario

Sea $f : E \to \mathbb{R}$ medible. Entonces

$$\int_E f(x)\mathrm{d}x = \sup\left\{ \int_E \phi(x)\mathrm{d}x : \ \phi \text{ simple}, \ \phi \leqslant f \text{ en } E \right\}.$$

Medida Cero

Lema

Sea $f : E \to [0, \infty[$. Si $m(E) = 0$, entonces $\int\limits_E f(x)\mathrm{d}x = 0$.

Sean $f_k = \sum_{i=1}^m a_i \mathbf{1}_{A_i}$ funciones simples tales que

$$\int\limits_E f_k \mathrm{d}x \xrightarrow[k\to\infty]{} \int\limits_E f(x)\mathrm{d}x.$$

Note que

$$\int\limits_E f_k(x)\mathrm{d}x) \sum_{i=1}^m a_i m(A_i).$$

Pero $A_i \subseteq E$ nos dice que $m(A_i) = 0$ para $1 \leqslant i \leqslant m$.

Desigualdades

Teorema

Sean $f, g : E \to [0, \infty[$ tales que $g(x) \leqslant f(x)$ casi por doquier en E. Entonces vale que

$$\int_E g(x)\mathrm{d}x \leqslant \int_E f(x)\mathrm{d}x.$$

En particular si $f = g$ c.p.d. en E, entonces

$$\int_E g(x)\mathrm{d}x = \int_E f(x)\mathrm{d}x.$$

Prueba del Teorema

Sea $A = \{ x \in E : \; g(x) \leqslant f(x) \}$. Entonces $E = A \cup Z$ con $m(Z) = 0$. Así tenemos

$$\begin{aligned}
\int_E f(x)\mathrm{d}x &= \int_A f(x)\mathrm{d}x + \int_Z f(x)\mathrm{d}x \\
&\geqslant \int_A g(x)\mathrm{d}x \\
&= \int_A g(x)\mathrm{d}x + \int_Z Sg(x)\mathrm{d}x + \\
&= \int_E g(x)\mathrm{d}x.
\end{aligned}$$

Una Desigualdad Familiar. . .

Sea $\alpha > 0$, entonces

$$\alpha \mathbf{1}_{\{ f \geqslant \alpha \}} \leqslant f \mathbf{1}_{\{ f \geqslant \alpha \}} \leqslant f$$

cuando $f : E \to [0, \infty[$. Entonces

$$\alpha m(\{ f \geqslant \alpha \}) \leqslant \int\limits_{\{ f \geqslant \alpha \}} f(x) \mathrm{d}x \leqslant \int\limits_{E} f(x) \mathrm{d}x.$$

A la desigualdad $m(\{ f \geqslant \alpha \}) \leqslant \frac{1}{\alpha} \int\limits_{E} f(x) \mathrm{d}x$ se le conoce como desigualdad de Markov.

Ahora si $f : E \to [0, \infty[$ es medible y $\int_E f(x)\mathrm{d}x = 0$ tenemos que

$$m(\{ f \geqslant \alpha \}) = 0$$

para $\alpha \geqslant 0$. Y luego

$$\{ f \geqslant 0 \} = \bigcup_{k=1}^{\infty} \{ f \geqslant \frac{1}{k} \}$$

es un conjunto de medida cero. Es decir, $f = 0$ c.p.d.

Corolario

Sea $f : E \to [0, \infty[$ tal que $\int_E f(x)\mathrm{d}x = 0$. Entonces $f = 0$ casi por doquier.

Linealidad

Por otro lado si $c > 0$ entonces veremos que

$$\int_E (cf(x) + g(x))\mathrm{d}x = c\int_E f(x)\mathrm{d}x + \int_E g(x)\mathrm{d}x.$$

Sea f_k una sucesión de funciones simples tales que

- $0 \leqslant f_k \leqslant f_{k+1}$.
- $\lim_{k\to\infty} f_k = f$.

Si $f_k = \sum_{i=1}^{m_k} a_i \mathbf{1}_{A_i}$, tenemos que

$$cf_k = \sum_{i=1}^{m_k} ca_i \mathbf{1}_{A_i} \xrightarrow[k\to\infty]{} cf(x)$$

y $cf_k \leqslant cf_{k+1}$.

Linealidad

Entonces tenemos

$$\begin{aligned}
\int_E cf(x)\mathrm{d}x &= \lim_{k\to\infty}\int_E cf_k(x)\mathrm{d}x \\
&= \lim_{k\to\infty}\sum_{i=1}^{m_k} ca_i m(A_i) \\
&= c\lim_{k\to\infty}\sum_{i=1}^{m_k} a_i m(A_i) \\
&= c\int_E f(x)\mathrm{d}x.
\end{aligned}$$

Linealidad

Teorema

Sean $f, g : E \to [0, \infty[$ *medibles y* $c \geqslant 0$. *Entonces*

$$\int_E (cf(x) + g(x))\mathrm{d}x = c \int_E f(x)\mathrm{d}x + \int_E g(x)\mathrm{d}x.$$

Falta mostrar la aditividad. Para el efecto tomemos g_k una sucesión de funciones simples tales que

$$g_k \leqslant g_{k+1}, \quad \lim_{k\to\infty} g_k = g.$$

Entonces se sigue que

$$g_k + f_k \leqslant g_{k+1} + f_{k+1}, \quad \lim_{k\to\infty} g_k + f_k = g + f.$$

Linealidad

Debemos mostrar que

$$\int_E (g_k(x) + f_k(x))\mathrm{d}x = \int_E g_k(x)\mathrm{d}x + \int_E f_k(x)\mathrm{d}x.$$

Si $g_k = \sum_{i=1}^{\ell_k} b_i \mathbf{1}_{B_i}$, con $E = \dot{\bigcup}_{i=1}^{\ell_k} B_i = \dot{\bigcup}_{j=1}^{m_k} A_j$, entonces

$$g_k(x) + f_k(x) = \sum_{i=1}^{\ell_k} \sum_{j=1}^{m_k} (a_j + b_i)\mathbf{1}_{A_j \cap B_i}.$$

Linealidad

Ahora

$$\sum_{i=1}^{\ell_k}\sum_{j=1}^{m_k} m(A_j \cap B_i) = \sum_{i=1}^{\ell_k} m\left(B_i \cap \bigcup_{j=1}^{m_k} A_j\right)$$
$$= \sum_{i=1}^{\ell_k} m\left(B_i \cap E\right) = \sum_{i=1}^{\ell_k} m\left(B_i\right).$$

De igual forma tenemos

$$\sum_{j=1}^{m_k}\sum_{i=1}^{\ell_k} m(A_j \cap B_i) = \sum_{j=1}^{m_k} m(A_j).$$

Fácilmente deducimos que

$$\int_E (g_k(x) + f_k(x))\mathrm{d}x = \int_E g_k(x)\mathrm{d}x + \int_E f_k(x)\mathrm{d}x.$$

Resumen

- El teorema 1 de convergencia monótona.
- La fórmula 2 para la integral y su corolario 1.
- Entre la propiedades de la integral tenemos:
  - La de medida cero: 1.
  - Que preserva el orden: 3.
  - La desigualdad de Markov 13 y su corolario 2.
- La integral es un operador lineal 4.

Ejercicios

- Lista 19
  - No hay ejercicios en esta presentación.

Lecturas adicionales I

- S.Cambronero.
  Notas MA0505.
  20XX.
- I.Rojas
  Notas MA0505.
  2018.