<u>La integral de Lebesgue</u> 1

Sea $f: E \to \overline{\mathbb{R}}$ medible con E medible y $f \geq 0$. Define

$$R(f,E) =$$

$$\{(x,y) \in \mathbb{R}^{d+1} : x \in E,\ 0 \leq y \leq f(x)\}.$$

Surge la pregunta ¿es $R(f,E)$ medible?

Analicemos el caso

$$f(x) = a \quad \text{en } A \subseteq E,\ a > 0.$$

Entonces

$$\{(x,y) \in \mathbb{R}^{d+1} : x \in E,\ 0 \leq y \leq f(x)\} =$$

$$\{(x,y) \in \mathbb{R}^{d+1} : x \in A,\ 0 \leq y \leq a\}$$

$$\cup$$

$$\{(x,y) \in \mathbb{R}^{d+1} : x \in E \setminus A,\ y = 0\} =$$

$$A \times [0,a] \cup E \setminus A \times \{0\}.$$

Lema: Sea $A \subset E$ medible y $a \geq 0$. Entonces

$$A \times [0,a]$$

es medible, y $m(A \times [0,a]) = a\, m(A)$

Pba Asuma que $m(A) < \infty$

Paso 1: Sea

$$A = [a_1, b_1] \times \dots \times [a_d, b_d]$$

entonces es claro que se cumple el lema

Paso 2: Sea A abierto, entonces existen $I_k = [c_1^k, f_1^k] \times \dots \times [c_d^k, f_d^k]$

t.q.

$$A = \bigcup_{k=1}^{\infty} I_k \quad y$$

además

$$I_k^\circ \cap I_j^\circ = \phi \quad \text{si } j \neq k.$$

Entonces

$$A \times [0,a] = \bigcup_{k=1}^{\infty} I_k \times [0,a], \text{ es medible.}$$

Como $(I_k \times [0,a])^\circ \cap (I_j \times [0,a])^\circ = \phi$, para $k \neq j$. tenemos que

$$m(A \times [0,a]) = \sum_{i=1}^{\infty} m(I_i \times [0,a])$$

$$= a \sum_{i=1}^{\infty} m(I_i)$$

$$= a\, m(A).$$

Paso 3: Sea $A = \bigcap_{j=1}^{\infty} G_j$ un G_δ, con G_i abierto para $i \geq 1$, y

$$G_{i+1} \subseteq G_i$$

(¿Por qué se puede asumir esto?)

Luego

$$A \times [0,a] = \bigcap_{i=1}^{\infty} G_i \times [0,a]$$

con

$$G_{i+1} \times [0,a] \subseteq G_i \times [0,a]$$

medibles con medida finita.

Entonces.

$$m(A \times [0,a]) =$$

$$\lim_{i \to \infty} m(G_i \times [0,a]) =$$

$$\lim_{i \to \infty} a\, m(G_i) =$$

$$a\, m(A).$$

Paso 4: Sea $A = H \setminus Z$ con H de tipo G_δ y Z de medida cero. El paso anterior implica que

$$H \times [0,a] \text{ es medible}$$

y

$$m(H \times [0,a]) = a\, m(H)$$

Ejer: $m_e(Z \times [0,a]) = 0$

Entonces

$$A \times [0,a] = (H \times [0,a]) \setminus (Z \times [0,a])$$

y

$$m(A \times [0,a]) = m(H \times [0,a]) = a\, m(H) = a\, m(A)$$

4

Finalmente si $m(A)=\infty$

Sean $A_k = A \cap B(0,k)$, ent

$A = \bigcup_{k=1}^{\infty} A_k$, con $A_k \subseteq A_{k+1}$

medibles y acotados.

Por los argumentos anteriores

$A_k \times [0,a] \subseteq A_{k+1} \times [0,a]$

son medible y

$$m(A_k \times [0,a]) = a\, m(A_k)$$

Entonces

$$m(A \times [0,a]) = m\left(\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k \times [0,a]\right)$$

$$= \lim_{k\to\infty} m(A_k \times [0,a])$$

$$= \lim_{k\to\infty} a\, m(A_k)$$

$$= a\, m(A) \quad \blacksquare$$

Sea $f: E \to \mathbb{R}$ medible, con $f \geq 0$. Entonces existe una sucesión creciente de funciones simples $\{\phi_k\}_{k=1}^{\infty}$ que satisfacen

$$\lim_{k \to \infty} \phi_k(x) = f(x) \quad \text{c.p.d}$$

en E. Luego si $0 \leq y < f(x)$ existe ϕ_k simple t.q.

$$0 \leq y \leq \phi_k(x).$$

Entonces

$$R(f,E) = \bigcup_{k=1}^{\infty} R(\phi_k, E) \cup \{(x,y) \in \mathbb{R}^{d+1} : x \in E,\ f(x) = y\}$$

Concluimos que $R(f,E)$ es medible si:

(a) $R(\phi_k, E)$ es medible

(b) $\Gamma(f,E) = \{(x, f(x)) : x \in E\}$ es medible.

<u>Lema</u>: Sea $f: E \to \mathbb{R}$ medible entonces

$$m_e(\Gamma(f,E)) = 0$$

Pba: Asume que $m(E) < \infty$. Sea $\varepsilon > 0$ y

$E_n = \{x \in E : n\varepsilon \leq f(x) < (n+1)\varepsilon\}$, ent $E = \bigcup_{n=1}^{\infty} E_n$. Note que

$$\Gamma(f, E_n) \subseteq \left(E_n \times [0, (n+1)\varepsilon]\right) \setminus \left(E_n \times [0, n\varepsilon]\right).$$

Por lo tanto

$$m_e(\Gamma(f, E_n)) \leq m(E_n \times [0, (n+1)\varepsilon]) - m(E_n \times [0, n\varepsilon]) \leq \varepsilon\, m(E)$$

$$\therefore \quad m_e(\Gamma(f, E_n)) = 0$$

$$\therefore \quad m_e\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} \Gamma(f, E_n)\right) = m_e(\Gamma(f, E)) = 0$$

El resto de la prueba se deja como ejercicio. $\blacksquare$

Finalmente, si

$$\phi_n(x) = \sum_{i=1}^{m} a_i \, \mathbb{1}_{A_i}$$

con $a_i \neq a_j$, $A_i \cap A_j = \emptyset$ para $i \neq j$, y $E = \bigcup_{i=1}^{m} A_i$.

tenemos que

$$\{(x,y)\in\mathbb{R}^d : x\in E,\ 0\le y\le \phi_u(x)\}$$

$$= \bigcup_{u=1}^{m} \{(x,y)\in\mathbb{R}^d : x\in A_u,\ 0\le y\le a_u\}$$

que es un conjunto medible.

Teorema: Sea $f: E\to\mathbb{R}$ medible con E medible. Ent

$$R(f,E)\subseteq\mathbb{R}^{d+1}$$

es medible

Def: Dada $f: E\to\mathbb{R}$ medible tal que $f\ge 0$, definimos su integral de Lebesgue por

$$\int_E f\,dx = m(R(f,E)).$$

Note que si

$$\phi(x) = \sum_{i=1}^{m} a_i \mathbb{1}_{A_i} \quad \text{con } A_i\cap A_j=\emptyset$$

para $i\neq j$. Entonces, si $a_i\neq 0$,

$$\int_E f(x)\,dx = \sum_{i=1}^{m} a_i\, m(A_i).$$

pues

$$m(\{(x,y) : x\in E,\ 0 \le y \le f(x)\})$$

$$= m(\{f=0\} \times \{0\}) +$$

$$m\left(\bigcup_{i=1}^{m} \{(x,y) : x\in A_i,\ 0 \le y \le a_i\}\right)$$

$$= \sum_{i=1}^{m} m(A_i)\, a_i .$$

Propiedades de la integral

Teorema: Sean $f : E \longrightarrow [0, +\infty]$
$g : E \longrightarrow [0, +\infty]$

medibles.

(i) Si $0 \le g \le f$, entonces
$$\int_E g(x)\,dx \le \int_E f(x)\,dx .$$

(ii) Si $\int_E f(x)\,dx < \infty$, entonces
$f \neq +\infty$ c.p.d.

(iii) Si $E_1 \subseteq E_2 \subseteq E$, entonces
$$\int_{E_1} f(x)\,dx \le \int_{E_2} f(x)\,dx .$$

Pba: Dado que $0 \le g \le f$, tenemos que

$$\{(x,y) : x \in E,\ 0 \le y \le g(x)\} \subseteq \{(x,y) : x \in E,\ 0 \le y \le f(x)\}.$$

Luego

$$R(g, E) \le R(f, E).$$

Por otro lado, si $E_1 \subseteq E_2$, entonces

$$\mathbb{1}_{E_1} f \le \mathbb{1}_{E_2} f.$$

Como

$$\{(x,y) : x \in E,\ 0 \le y \le \mathbb{1}_{E_i} f\} =$$

$$(E \setminus E_i \times \{0\}) \cup$$

$$\{(x,y) : x \in E_i,\ 0 \le y \le f\}.$$

Se tiene que

$$R(\mathbb{1}_{E_i} f, E) = R(f, E_i), \text{ i.e.}$$

$$\int_{E_1} f(x)\,dx \le \int_{E_2} f(x)\,dx.$$

Por otro lado si

$$E_1 = \{f = +\infty\}$$

tome

$$g(x) = n\, \mathbb{1}_{E_1}(x)$$

ent

$$g(x) \leq f(x)$$

para todo $x \in E$. Luego

$$n\, m(E_1) \leq \int_E f(x)\,dx,$$

y por lo tanto $m(E_1) = 0$. ∎

Teorema: (T.C.M.)

Sean $\{f_k\}_{k=1}^{\infty}$ una sucesión de funciones medibles, tal que

$$f_k(x) \leq f_{k+1}(x)$$

para todo $x \in E$. Si

$$\lim_{k \to \infty} f_k(x) = f(x) \quad \text{c.p.d en } E.$$

Entonces

$$\lim_{k\to\infty} \int_E f_k(x)\,dx = \int_E f(x)\,dx$$

Pba: Recordemos que

$$R(f, E) = \Gamma(f, E) \cup \bigcup_{k=1}^{\infty} R(f_k, E)$$

Como

$$R(f_k, E) \subseteq R(f_{k+1}, E)$$

se tiene que

$$m(R(f,E)) = \lim_{k \to \infty} m(R(f_k, E))$$

$\blacksquare$

En el caso de que

$$E = \bigcup_{i=1}^{\infty} E_i$$

con $E_i \cap E_j = \phi$ si $i \neq j$.

Se tiene que

$$R(f,E) = \bigcup_{k=1}^{\infty} R(f, E_k)$$

Luego

$$\int_E f(x)\,dx = m(R(f,E)) = \sum_{k=1}^{\infty} m(R(f,E_k)) = \sum_{k=1}^{\infty} \int_{E_k} f(x)\,dx.$$

Esta formula es válida también para uniones finitas pues

$$R(f, \phi) = \phi.$$

Dada $f: E \to [0, +\infty)$ medible, definimos

$$\sum (f, \{E_i\}_{i=1}^N) = \sum_{i=1}^N (\inf_{E_i} f) \, \mathbb{1}_{E_i}$$

<u>Teorema</u>: Sea $f: E \to \mathbb{R}$ medible y no negativa. Entonces

$$\int_E f(x)\,dx = \sup_{E = \dot{\bigcup}_{i=1}^{N} E_i} \sum (f, \{E_i\}_{i=1}^N)$$

<u>Pba</u>:

Dados $E_1, \ldots, E_N$ tales que $E = \dot{\bigcup}_{i=1}^N E_i$ tenemos que

$$\sum (f, \{E_i\}_{i=1}^N) \leq f \text{, i.e.}$$

$$\sum_{i=1}^N (\inf_{E_i} f)\, m(E_i) \leq \int_E f(x)\,dx.$$

Ahora dado $k \geq 1$, si

$$E_k^0 = \{f \geq k\}$$

$$E_k^i = \{ \tfrac{i-1}{2^k} \leq f(x) < \tfrac{i}{2^k} \}$$

si $1 \leq i \leq k2^k$.

Tenemos que

$$E = \bigcup_{i=0}^{n2^n} E_n^i$$

Si

$$f_n(x) = n\, \mathbb{1}_{E_n^0} + \sum_{i=1}^{n2^n} \frac{i-1}{2^n}\, \mathbb{1}_{E_n^i}$$

Ent
- $f_n \le f_{n+1}$
- $\lim_{n\to\infty} f_n = f$

por el T.C.M

$$\lim_{n\to\infty} \int_E f_n(x)\,dx = \int_E f(x)\,dx$$

Como

$$f_n \le \sum\left(f, \{E_n^i\}_{i=1}^{n2^n}\right), \text{ ent}$$

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{i=0}^{n2^n} \left(\inf_{E_i} f\right) \mathbb{1}_{E_n^i} = \int_E f(x)\,dx \quad \blacksquare$$

Note que este lema implica

<u>Corolario</u>

Sea $f: E \to \mathbb{R}$ medible. Entonces

$$\int_E f(x)\,dx = \sup\left\{ \int_E \phi(x)\,dx : \phi \text{ es simple y } \phi \le f \text{ en } E \right\}.$$

Lema: Sea $f: E \to [0,+\infty)$, si $m(E)=0$, ent

$$\int_E f(x)\,dx = 0.$$

Pba: Sean $f_n = \sum_{i=1}^{m} a_i \mathbb{1}_{A_i}$ simples t.q.

$$\int_E f_n\,dx \xrightarrow[n\to\infty]{} \int_E f\,dx$$

Note que

$$\int_E f_n(x)\,dx = \sum_{i=1}^{m} a_i\, m(A_i)$$

Como $A_i \subset E$, tenemos que

$$m(A_i)=0$$

para todo $1 \leq i \leq m$

Teorema: Sean $f: E \to [0,+\infty)$ y $g: E \to [0,+\infty)$ tales que

$$g(x) \leq f(x)$$

c.p.d en E. Entonces

$$\int_E g(x)\,dx \leq \int_E f(x)\,dx$$

En particular, si $f=g$ c.p.d en E ent

$$\int_E g(x)\,dx = \int_E f(x)\,dx$$

Pba: Sea

$$A = \{x \in E : g(x) \leq f(x)\}$$

Entonces $E = A \cup Z$ con $m(Z)=0$

Luego

$$\int_E f(x)\,dx = \int_A f(x)\,dx + \int_Z f(x)\,dx$$

$$\geq \int_A g(x)\,dx$$

$$= \int_A g(x)\,dx + \int_Z g(x)\,dx$$

$$= \int_E f(x)\,dx.$$

Sea $\alpha > 0$, entonces

$$\alpha \, 1\!\!1_{\{f \geq \alpha\}} \leq f \, 1\!\!1_{\{f \geq \alpha\}}$$

$$\leq f$$

si $f : E \longrightarrow [0, +\infty)$

Entonces

$$\alpha \, m(\{f \geq \alpha\}) \leq$$

$$\int_{\{f \geq \alpha\}} f(x)\,dx \leq$$

$$\int_E f(x)\,dx$$

$$\boxed{m(\{f \geq \alpha\}) \leq \frac{1}{\alpha} \int_E f(x)\,dx}$$

Markov

Ahora si $f : E \to [0, +\infty)$, es medible y $\int_E f(x)\,dx = 0$, tenemos

$$m(\{f \geq \alpha\}) = 0$$

para todo $\alpha \geq 0$.

Luego

$$\{f > 0\} = \bigcup_{n=1}^{\infty} \{f \geq \tfrac{1}{n}\}$$

tiene medida cero, i.e.

$f = 0$ c.p.d.

Corolario: Sea $f : E \to [0, +\infty)$ tal que

$$\int_E f(x)\,dx = 0$$

Entonces $f = 0$ c.p.d.

Por otro lado si $c > 0$, vamos a probar que

$$\int_E (c f(x) + g(x))\,dx =$$

$$c \int_E f(x)\,dx + \int_E g(x)\,dx.$$

Sea f_n una sucesión de funciones simples t.q. $0 \leq f_n \leq f_{n+1}$

y $\lim_{n \to \infty} f_n = f$.

Si $f_n = \sum_{i=1}^{m_n} a_i \mathbb{1}_{A_i}$, tenemos que

$$c f_n = \sum_{i=1}^{m_n} c a_i \mathbb{1}_{A_i} \xrightarrow[n \to \infty]{} c f(x)$$

y $c f_n \leq c f_{n+1}$

Entonces

$$\int_E cf(x)dx = \lim_{n\to\infty} \int_E cf_n(x)\,dx$$

$$= \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{m_n} ca_i\, m(A_i)$$

$$= c \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{m_n} a_i\, m(A_i)$$

$$= c \int_E f(x)dx.$$

Teorema:

Sea $f: E \to [0,+\infty)$

$g: E \to [0,+\infty$

$c \geq 0.$

Entonces

$$\int_E (cf(x)+g(x))dx =$$

$$c\int_E f(x)dx + \int_E g(x)dx.$$

Pba: Falta mostrar la aditividad

Sea g_n una sucesión de funciones simples t.q. $g_n \leq g_{n+1}$ y

$$\lim_{n\to\infty} g_n = g$$

Ent $g_n + f_n \leq g_{n+1} + f_{n+1}$ y

$$\lim_{n\to\infty} g_n + f_n = g + f$$

H.q.m $$\int_E (g_n(x)+f_n(x))\,dx =$$

$$\int_E g_n(x)\,dx + \int_E f_n(x)\,dx$$

Si $\quad g_u = \sum_{i=1}^{l_u} b_i \mathbb{1}_{B_i}$, con

$E = \biguplus_{i=1}^{l_u} B_i = \biguplus_{j=1}^{m_u} A_j$. Tenemos

$$g_u(x) + f_u(x) =$$

$$\sum_{i=1}^{l_u} \sum_{j=1}^{m_u} (a_j + b_i) \mathbb{1}_{A_j \cap B_i}.$$

Ahora

$$\sum_{i=1}^{l_u} \sum_{j=1}^{m_u} m(A_j \cap B_i) =$$

$$\sum_{i=1}^{l_u} m\left(B_i \cap \bigcup_{j=1}^{m_u} A_j \right) =$$

$$\sum_{i=1}^{l_u} m(B_i \cap E)$$

$$= \sum_{i=1}^{l_u} m(B_i)$$

De igual forma se prueba que

$$\sum_{j=1}^{m_u} \sum_{i=1}^{l_u} m(B_i \cap A_j) =$$

$$\sum_{j=1}^{m_u} m(A_j).$$

Facilmente se deduce que.

$$\int_E (g_u(x) + f_u(x)) dx =$$

$$\int_E g_u(x) dx + \int_E f_u(x) dx.$$