## La integral de Riemann-Stieltjes

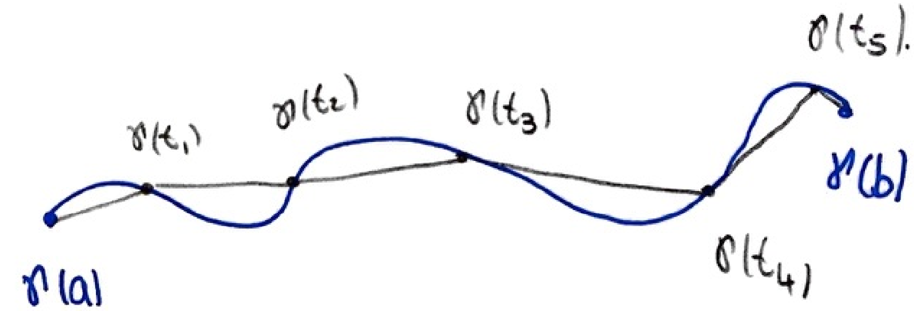
Vamos a presentar dos problemas que muestran la necesidad de extender las funciones que se pueden abordar por métodos usuales (Integral de Riemann)

Sea $\gamma : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}^2$ una función, tomamos

$$\gamma(t) = (\gamma_1(t), \gamma_2(t)).$$

Inicialmente nuestra función no es continua ni acotada.

¿Cuál es la longitud de la curva?




Una primera idea sería aproximar la curva por curvas conformadas por segmentos.

Dados $a = t_0 < t_1 < t_2 < \dots < t_n = b$, consideramos los segmentos

$$[\gamma(t_i), \gamma(t_{i+1})] \qquad 0 \leq i \leq n-1.$$

La longitud de cada segmento es

$$\left[(\gamma_2(t_i) - \gamma_1(t_{i+1}))^2 + (\gamma_2(t_i) - \gamma_2(t_{i+1}))^2\right]^{\frac{1}{2}}$$

$$= \| \gamma(t_i) - \gamma(t_{i+1}) \|$$

Entonces la longitud de la curva es

$L(\Gamma, P) =$

$$\sum_{i=1}^{n-1} \left[(\gamma(t_i) - \gamma(t_{i+1}))^2 + (\gamma_2(t_i) - \gamma_2(t_{i+1}))^2\right]^{\frac{1}{2}}$$

donde

$$P = \{t_0, t_1, \dots, t_n\}.$$

Tomando particiones cada vez mas finas esperaríamos que la longitud de las curvas poligonales aproximen la longitud de la curva.

¿Será cierto que el límite es finito?

Note que estos límites no pueden ser aproximados por la integral de Riemann a menos que

$\gamma_1$ y $\gamma_2$ sean diferenciables, pues en este caso

$$(\gamma(t_{i+1}) - \gamma(t_i)) = \gamma'(\xi_i)\,(t_{i+1} - t_i)$$

En general no es claro que el conjunto $L(\Gamma, P)$ es acotado.

Un problema similar surge si queremos medir la masa de un alambre


igual área $A$

En este caso podemos considerar

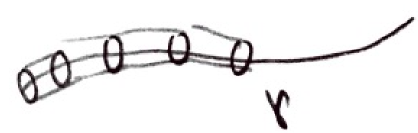
$$\sum_{i=1}^{n-1} \rho(t_i)\, A(t_i, t_{i+1})$$

Donde $\rho(t_i)$ es la densidad del alambre en el punto $t_i$, y

$A(t_i, t_{i+1}) \approx$ área


$$\approx A\,\|\gamma(t_i) - \gamma(t_{i+1})\|$$

donde



La masa se aproxima por

$$\sum_{i=1}^{n-1} \rho(t_i)\, A\, \|\gamma(t_i) - \gamma(t_{i+1})\|$$

Antes de explorar una nueva definición de integral que nos permite abordar estos problemas vamos a centrarnos en el problema de las funciones tales que existe $M \geq 0$, con

$$\sum_{i=0}^{n-1} |f(t_i) - f(t_{i+1})| \leq M$$

para toda partición

**Def:** Decimos que $f: [a,b] \to \mathbb{R}$ es de variación acotada si existe $M > 0$ tal que para toda partición

$$\Gamma = \{t_0 = a < t_1 < \dots < t_n = b\}$$

se tiene

$$\sum_{i=0}^{n-1} |f(t_{i+1}) - f(t_i)| \leq M.$$

Denotamos

$$S(f, \Gamma) = \sum_{i=0}^{n-1} |f(t_{i+1}) - f(t_i)|$$

Luego $f$ es de variación acotada si

$$\sup_{P} S(f, P) < \infty.$$

Ejemplo:

I) Sea $f$ creciente, entonces

$$\sum_{i=0}^{n-1} |f(x_i) - f(x_{i+1})| =$$

$$\sum_{i=0}^{n-1} f(x_{i+1}) - f(x_i) =$$

$$f(b) - f(a)$$

De igual forma si $f$ es decreciente

$$S(f, P) = f(a) - f(b)$$

$\therefore$ Toda función monótona es de variación acotada.

II) Sea $\phi: [0,1] \to \mathbb{R}$ dada por

$$\phi(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \in \mathbb{Q} \\ 1 & \text{si } x \notin \mathbb{Q}. \end{cases}$$

Sea $x_n: \begin{cases} x_{2u} \in \mathbb{Q} & \text{para } 0 \leq u \leq n \\ x_{2u+1} \in \mathbb{I} & \text{para } 0 \leq u \leq n-1 \end{cases}$

con $x_0 = 0$ y $x_{2n} = 1$

Entonces

$$S(\phi, P) = \sum_{i=0}^{2n-1} |\phi(x_{i+1}) - \phi(x_i)|$$
$$= n$$

$\therefore \phi$ no es de variación acotada.

Dada $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ una función de variación acotada, definimos

$$Var(f, [a,b]) = \sup_{P} S(f, P)$$

Sea $P_1 = \{x_0 = a < x_1 < \dots < x_n = x\}$ con $a < x < b$. Entonces

$$P = P_1 \cup \{b\}$$

es una partición de $[a,b]$

Note que, si $x_{n+1} = b$,

$$S(f, P) = \sum_{i=0}^{n-1} |f(x_{i+1}) - f(x_i)|$$
$$= S(f, P_1) + |f(b) - f(x)|$$

Por lo tanto $f : [a,x] \to \mathbb{R}$ es de variación acotada y

$$Var(f, [a,x]) \leq Var(f, [a,b])$$

Además

$$|f(a) - f(x)| + |f(x) - f(b)| \leq Var(f, [a,b])$$

$$\Rightarrow \quad 2|f(x)| \leq Var(f, [a,b]) + |f(a)| + |f(b)|$$

**Lema:** Sean $f: [a,b] \to \mathbb{R}$ y $g: [a,b] \to \mathbb{R}$ dos funciones de variación acotada. Ent

(i) $cf + g$ es de variación acotada para todo $c \in \mathbb{R}$

(ii) $f \cdot g$ es de variación acotada

(iii) Si existe $\varepsilon > 0$ tal que $|g(x)| \geq \varepsilon$ para todo $x \in [a,b]$. Entonces $\frac{1}{g}$ es de variación acotada

(iv) $f, g$ son acotadas

**Prueba:** Ejr

Usando los argumentos ya expuestos se prueba que si $\Gamma_1$ es una partición de $[a_1, b_1]$ con

$$a < a_1 < b_1 < b.$$

Tome

$$\Gamma = \Gamma_1 \cup \{a\} \cup \{b\}$$

Ent

$$S(f, \Gamma_1) \leq S(f, \Gamma) \leq Var[f, [a,b]]$$

$$\Rightarrow Var[f, [a_1, b_1]] \leq Var[f, [a,b]].$$

6

Sea $a < c < b$. Considere $\Gamma$ una partición de $[a,b]$, con

$$\Gamma = \{x_0 = a < x_1 < \ldots < x_n = b\}.$$

Tome $x_{m_0}$ tal que

$$x_{m_0} \leq c < x_{m_0+1}.$$

Defina $\Gamma' = \Gamma \cup \{c\}$

$$\Gamma_1 = \{x_0 = a < x_1 < \ldots \leq x_{m_0} \leq c\}$$

$$\Gamma_2 = \{c \leq x_{m_0+1} < \ldots < b = x_n\}$$

Ent

$$S(f,\Gamma) \leq S(f,\Gamma') = S(f,\Gamma_1) + S(f,\Gamma_2)$$

$$\leq Var(f,[a,c]) + Var(f,[c,b])$$

$$\therefore \; Var(f,[a,b]) \leq Var(f,[a,c]) + Var(f,[c,b])$$

Por otro lado si $\Gamma_1$ es una partición de $[a,c]$ y $\Gamma_2$ es una partición de $[c,b]$, entonces

$$\Gamma = \Gamma_1 \cup \Gamma_2$$

es una partición de $[a,b]$, i.e.

$$S(f,\Gamma_1) + S(f,\Gamma_2) = S(f,\Gamma) \leq Var(f,[a,b])$$

$\Rightarrow \sup\limits_{\Pi_1} S(f,\Pi_1) + S(f,\Pi_2) \leq$

$Var(f,[a,b])$

$\Rightarrow \sup\limits_{\Pi_1} S(f,\Pi_1) + \sup\limits_{\Pi_2} S(f,\Pi_2) \leq$

$Var(f,[a,b])$

$\Rightarrow Var(f,[a,c]) + Var(f,[c,b])$

$\leq Var(f,[a,b])$

**Lema:** Sea $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ de variación acotada. Ent

$$Var(f,[a,b]) = Var(f,[a,c]) + Var(f,[c,b])$$

Dado $x\in\mathbb{R}$ defina

$$x^+ = \begin{cases} x & \text{si } x \geq 0 \\ 0 & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

$$x^- = \begin{cases} -x & \text{si } x \leq 0 \\ 0 & \text{si } x > 0 \end{cases}$$

Ent $x^+, x^- \geq 0$, $x^+ + x^- = |x|$, $x^+ - x^- = x$.

Dada $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ y

$$\Pi = \{x_0 = a < x_1 < \dots < x_n = b\}$$

una partición,

$$P(f,\Pi) = \sum_{i=0}^{n-1} (f(x_{i+1}) - f(x_i))^+$$

$$N(f,\Pi) = \sum_{i=0}^{n-1} (f(x_{i+1}) - f(x_i))^-$$

Note que

- $S(f,\Pi) = N(f,\Pi) + P(f,\Pi)$

- $-N(f,\Pi) + P(f,\Pi) \leq$

$$\sum_{i=0}^{n-1} \left( f(x_{i+1}) - f(x_i) \right) \leq$$

$$f(b) - f(a)$$

Defina

$$P(f,[a,b]) = \sup_{\Pi} P(f,\Pi)$$

$$N(f,[a,b]) = \sup_{\Pi} N(f,\Pi)$$

Entonces

$$S(f,\Pi) = N(f,\Pi) + P(f,\Pi)$$
$$\leq N(f,[a,b]) + P(f,[a,b])$$

$\therefore$ $\mathrm{Var}(f,[a,b]) \leq$

$$N(f,[a,b]) + P(f,[a,b]).$$

Por otro lado

$$f(a) + P(f,\Pi) = f(b) + N(f,\Pi)$$

Entonces

$$f(a) + P(f,[a,b]) =$$
$$f(b) + N(f,[a,b]).$$

Además

$$N(f,\Pi) + P(f,\Pi) = S(f,\Pi)$$
$$\leq Var(f,[a,b])$$

Ent

$$f(a) - f(b) + 2P(f,\Pi) = S(f,\Pi)$$

$\Rightarrow$ $f(a) - f(b) + 2\, P(f,[a,b]) = Var(f,[a,b])$.

$\Rightarrow$ $N(f,[a,b]) + P(f,[a,b]) = Var(f,[a,b])$

**Lema** Sea $f:[a,b] \to \mathbb{R}$ de variación acotada. Entonces

$$P(f,[a,b]) - N(f,[a,b]) = f(b) - f(a)$$

$$P(f,[a,b]) + N(f,[a,b]) = Var(f,[a,b]).$$

■

Equivalentemente se tiene que

$$P = \frac{1}{2}\{Var + f(b) - f(a)\}$$
$$N = \frac{1}{2}\{Var - f(b) + f(a)\}$$

Note que

$$f(x)-f(a) = P(f,[a,x]) - N(f,[a,x])$$

Como

$$P(f,[a,x]) \quad y \quad N(f,[a,x])$$

son crecientes y positivas. Ent

$$f(x) = P(f,[a,x]) + f(a) - N(f,[a,x])$$

y por lo tanto concluimos que

**Teorema:** Sea $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ una función. Entonces $f$ es de variación acotada sii $f$ es la resta de dos funciones crecientes y positivas.

**Teorema:** Sea $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ una función de variación acotada. Entonces $f$ tiene a lo sumo un número contable de discontinuidades. Además toda discontinuidad es un salto o es removible.

Prueba: Dado que $f = f_1 - f_2$ con $f_i$, $1 \leq i \leq 2$, positive y creciente. Basta analizar las discontinuidades de funciones crecientes y positivas.

Considere

$$D_k = \left\{ x \in [a,b] : f(x_+) - f(x_-) \geq \frac{1}{k} \right\}$$

donde

$$f(x_+) = \lim_{y \to x_+} f(y)$$

$$f(x_-) = \lim_{y \to x_-} f(y)$$

De esta forma, si

$$x_0 < x_1 < \dots < x_m \in D_k$$

existen $y_i$, $z_i$ tal que

- $a = y_0 \leq x_0 < z_0 = y_1 < x_1$
- $x_{i-1} < z_{i-1} = y_i < x_i$, para $i = 1, \dots, n$
- $x_m \leq z_m = b$.

Entonces

$$f(x_i^+) - f(x_i^-) \leq f(z_i) - f(y_i) = f(y_{i+1}) - f(y_i)$$

i.e.

$$\frac{m}{k} \leq \sum_{i=1}^{m} f(z_i) - f(y_i) = f(b) - f(a)$$

Concluimos que $|D_k| < \infty$

<u>Teorema</u>: Sea $f:[a,b] \to \mathbb{R}$ una función de variación acotada y continua Entonces dado

$$M < \mathrm{Var}(f,[a,b]) = V$$

existe $\delta > 0$ que satisface

$$|\Pi| < \delta \implies M < S(f,\Pi) \le V.$$

<u>Prueba</u>:

Sea $\mu > 0$ tal que

$$M + \mu < V$$

Sea $\Pi_1$ una partición que satisface

$$M + \mu < S(f,\Pi_1)$$

con $\Pi_1 = \{\tilde{x}_0 = a < \tilde{x}_1 < \dots < \tilde{x}_k = b\}$

Al ser $f$ uniformemente continua, existe $\delta > 0$ tal que

$$|f(x) - f(y)| < \frac{\mu}{2(k+1)}$$

si $|x-y| < \delta$.

Sea $\Pi$ una partición tal que

$$|\Pi| < \frac{1}{2}\min\{\delta, |\Pi_1|\}$$

Si $\Pi = \{x_0 = a < x_1 < \ldots < x_m = b\}$

tome $\Pi_2 = \Pi \cup \Pi_1$

Vamos a mostrar que

$$S(f,\Pi_2) - \mu < S(f,\Pi)$$

Entonces

$$M < S(f,\Pi_1) - \mu \leq$$
$$S(f,\Pi_2) - \mu \leq$$
$$S(f,\Pi) -$$

Sean

$$\{\tilde{x}_{i_1}, \ldots, \tilde{x}_{i_\ell}\} = \Pi_2 \setminus \Pi$$

entonces existe $1 \leq j \leq m$ tal que

$$x_j < \tilde{x}_{i_k} < x_{j+1}.$$

Note que $1 \leq \ell \leq k+1$.

Además

$$S(f,\Pi) = \sum_{\{1 \leq j \leq m \,:\, \Pi_1 \cap (x_{j-1}, x_j) \neq \emptyset\}} |f(x_j) - f(x_{j-1})| = \Sigma''$$

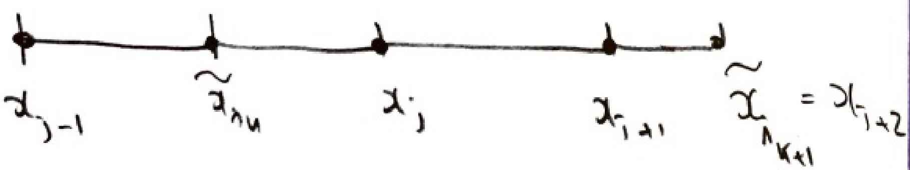
$$+$$

$$\Sigma' = \sum_{\{1 \leq j \leq m \,:\, \Pi_1 \cap (x_{j-1}, x_j) = \emptyset\}} |f(x_j) - f(x_{j-1})|$$

Como

$$P_2 = \overbrace{\{x_0 < x_1 < \dots < x_m\}}^{P} \cup \{\tilde{x}_{i_1}, \dots, \tilde{x}_{i_m}\}$$

se tiene que




$$S(f, P_2) = \sum{}' +$$

$$\sum_{\{1 \leq j \leq m \,:\, P_1 \cap (x_{i-1}, x_i) \neq \emptyset\}} |f(x_j) - f(x_{i_k})| + |f(x_{i_k}) - f(x_{j-1})|$$

$$\leq \sum{}' + \frac{2\mu}{2(k+1)} \, k+1$$

$$\leq \sum{}' + \mu$$

$$\leq S(f, P) + \mu \qquad \blacksquare$$

**Corolario:** Sea $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ tal que $f'$ es continua en $[a,b]$.

Entonces

$$\mathrm{Var}(f, [a,b]) = \int_a^b |f'(x)| \, dx$$

$$P(f, [a,b]) = \int_a^b (f'(x))^+ \, dx$$

$$N(f, [a,b]) = \int_a^b (f'(x))^- \, dx$$

**Prueba:** Ejr