# Completitud



Este concepto, a diferencia del concepto de compacidad, es intrínseco a los espacios métricos.

Recordemos que una sucesión $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ es de Cauchy si dado $\varepsilon > 0$ existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que

$$d(x_n, x_m) < \varepsilon$$

para todo $n, m \geq n_0$.

De forma similar a $\mathbb{R}$, se prueba que

**Ejr:** (a) Toda sucesión convergente es de Cauchy

(b) Toda sucesión de Cauchy es acotada.

**Def:** Un espacio $(X, d)$ es completo si toda sucesión de Cauchy en $X$ es convergente en $X$.

Ejm: Sea

$$X = \{ f : [0,1] \to \mathbb{R} \text{ , } f \text{ continua} \}$$

con la distancia

$$d_\infty(f,g) = \sup_{x \in [0,1]} |f(x) - g(x)|$$

Dados $x \in [0,1]$, y $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ de Cauchy. Tome $\varepsilon > 0$, entonces existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que

$$d_\infty(f_n, f_m) < \frac{\varepsilon}{2}$$

para todo $n, m \geq n_0$.

Entonces

$$|f_n(x) - f_m(x)| \leq d_\infty(f_n, f_m) < \varepsilon.$$

Es decir $\{f_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ es de Cauchy en $\mathbb{R}$. Defina

$$f(x) = \lim_{n \to \infty} f_n(x)$$

Vamos a mostrar que $f \in X$, i.e. que $f$ es continua. Ahora $x \in [0,1]$, existe $m_1 \geq n_0$ t.q.

$$|f(x) - f_m(x)| < \frac{\varepsilon}{2}$$

para $m \geq m_1$.

Entonces

$$|f(x)-f_n(x)| \leq |f(x)-f_{m_1}(x)| + |f_{m_1}(x)-f_n(x)|$$

$$< \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2}$$

si $n \geq n_0$.

$\therefore f_n \xrightarrow[n\to\infty]{} f$ unif

$\therefore f$ es continua

Como es usual para probar que una sucesión de Cauchy converge se empieza por encontrar el posible límite

Sea $C \subseteq X$ con $C$ cerrado y $X$ completo. Si $\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \subseteq C \subseteq X$ es de Cauchy, existe $x_0 \in X$ t.q

$$x_n \xrightarrow[n\to\infty]{} x_0 \quad \text{(completitud)}$$

Dado que $C$ es cerrado, $x_0 \in C$.

$\therefore (C,d)$ es completo.

Por otro lado, si $(C,d)$ es completo con $C \subseteq X$. Tome $\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \subseteq C$ y $x_0 \in \overline{C}$ tal que

$$x_n \xrightarrow[n\to\infty]{} x_0 \quad \text{en } X$$

Dado que toda sucesión convergente es de Cauchy en $X$.

4

Tenemos que dado $\varepsilon>0$ existe $n_0$ t.q

$$d(x_n, x_m) < \varepsilon$$

si $n, m \geq n_0$. Ent $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ es de Cauchy en $(C, d)$, entonces

$$x_n \xrightarrow[n\to\infty]{} x_0'$$

con $x_0' \in C$, i.e. $x_0 = x_0' \in C$

$\therefore$ $\overline{C_1} \subseteq C$

$\therefore$ $C$ es cerrado

**<u>Lema:</u>** Sea $(X, d)$ un espacio métrico, ent

(a) Si $(C, d)$ es completo, ent $C$ es cerrado en $(X, d)$

(b) Si $C \subseteq X$ es cerrado, ent $(C, d)$ es completo.

Por otro lado si $(X, d)$ es compacto y $\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \subseteq X$ es de Cauchy, existe $\{x_{n_k}\}_{n=1}^{\infty}$ subsucesión de $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ que converge a $x_0 \in X$

Sabemos que existe $n_0$ tal que

$$d(x_n, x_m) < \frac{\varepsilon}{2}$$

si $n, m \geq n_0$. Sea $k_0 \geq n_0$ tal que

$$d(x_0, x_{n_k}) < \frac{\varepsilon}{2}$$

si $k \geq k_0$. Entonces

$$d(x_n, x_0) \leq d(x_n, x_{n_k}) + d(x_{n_k}, x_0) < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2}$$

siempre que $n \geq n_0$.

**Lema:** Sea $(X,d)$ un espacio métrico compacto. Ent $(X,d)$ es completo.

$$\boxed{\begin{array}{c} (X,d) \text{ compacto} \\ \Downarrow \quad \not\Uparrow \\ (X,d) \text{ completo} \end{array}}$$

Note que $\mathbb{R}$ es completo pero no es compacto

Existe una propiedad que junto con completitud implica que $(X,d)$ es compacto

**Def:** Un espacio métrico $(X,d)$ es totalmente acotado (o precompacto) si para todo $\varepsilon>0$ existen $x_1,\dots,x_m$ tal que

$$X \subseteq \bigcup_{i=1}^{m} B(x_i,\varepsilon)$$

Dado que

$$X \subseteq \bigcup_{x\in X} B(x,\varepsilon)$$

tenemos que todo espacio compacto es totalmente acotado.

**Ejm:** Define en $\mathbb{N}$ la métrica

$$\rho(n,m)=\begin{cases} 1 & \text{si } n\neq m \\ 0 & \text{si } n=m \end{cases}$$

Es claro que

$$B(n,2)=\mathbb{N}$$

para todo $n\in\mathbb{N}$. Sin embargo

$$B(n,\tfrac{1}{2})=\{n\}$$

y por lo tanto no se puede cubrir a $\mathbb{N}$ por un # finito de bolas de radio $\frac{1}{2}$.

$\therefore$ $(\mathbb{N},\rho)$ es acotado pero no totalmente acotado.

Vamos a analizar la relación entre compacidad, completitud y totalmente acotado.

Sea $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ una sucesión en $(X,d)$ espacio totalmente acotado.

**Ejr:** Si el conjunto $\{x_n \; n \in \mathbb{N}\}$ es finito, ent existe una subsucesión $\{x_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$ que converge a un punto de la sucesión

Asumamos entonces que $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ tiene una cantidad infinita de puntos diferentes.

Vamos a mostrar que existe una subsucesión de Cauchy

Sabemos que existen $y_1, \dots, y_m$ t.q.

$$X \subseteq \bigcup_{i=1}^{m} B(y_i, 1)$$

Luego existe $y_{i_1}$ t.q.

$$B(y_{i_1}, 1)$$

contiene una cantidad infinita de puntos de $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$. Sea $\{x_{n_{k,1}}\}_{k=1}^{\infty}$ la subsucesión de todos los puntos en

$$B(y_{i_1}, 1)$$

Recordemos que se debe cumplir que

$$n_{k,1} \leq n_{k+1,1}$$

Esto se puede hacer siempre en $\mathbb{N}$.

De igual forma existe $\tilde{y}_2 \in X$ tal que $B(\tilde{y}_2, \frac{1}{2})$ contiene una cantidad infinita de puntos de

$$\{x_{n_{k,1}}\}_{k=1}^{\infty}$$

Sea $\{x_{n_{k,2}}\}_{k=1}^{\infty}$ la subsucesión de estos puntos. Iterando el proceso existe una subsucesión

$$\{x_{n_{k,l}}\}_{k=1}^{\infty} \subseteq B(\tilde{y}_l, \tfrac{1}{l})$$

y un punto $\tilde{y}_{l+1}$ t.q.

$$B(\tilde{y}_{l+1}, \tfrac{1}{l+1})$$

contiene una cantidad infinita de puntos de la subsucesión $\{x_{n_{k,l}}\}_{k=1}^{\infty}$,

Sea $\{x_{n_{k,l+1}}\}_{k=1}^{\infty}$ la subsucesión de estos puntos, note que

$$d(x_{n_{k,l+1}}, x_{n_{s,l+1}}) < \frac{2}{l+1}$$

Considere la subsucesión

$$x_{n_{l,l}}$$

Si $l \leq s$, ent

$$d(x_{n_{l,l}}, x_{n_{s,s}}) \leq \frac{2}{l+1}$$

$\therefore$ $\{x_{n_{l,l}}\}_{l=1}^{\infty}$ es de Cauchy

**Lema:** Un espacio $(X,d)$ es totalmente acotado sii toda sucesión $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ en $(X,d)$ tiene una subsucesión de Cauchy.

**Prueba:**

"$\Leftarrow$" Asuma que $(X,d)$ no es totalmente acotado. Entonces existe $\varepsilon > 0$ t.q.

$$X \not\subseteq \bigcup_{i=1}^{m} B(x_i, \varepsilon)$$

para cualquier conjunto $\{x_1, \dots, x_m\}$.

Dado $x_0 \in X$ sabemos que existe

$$x_1 \in X \setminus B(x_0, \varepsilon)$$

Iterando el proceso existe $x_n$ t.q.

$$x_n \in X \setminus \bigcup_{i=1}^{n-1} B(x_i, \varepsilon)$$

de esta forma se obtiene una sucesión t.q.

$$d(x_i, x_j) \geq \varepsilon \quad (\$)$$

siempre que $i \neq j$. ∎

Con este resultado a mano podemos probar

**Teorema:** Un espacio métrico $(X,d)$ es compacto sii $(X,d)$ es completo y totalmente acotado.

"$\Rightarrow$" Sabemos que todo espacio compacto es totalmente acotado y completo.

"$\Leftarrow$" Sea $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ una sucesión entonces existe una subsucesión de Cauchy $\{x_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$, la cual converge por completitud. ■

Vamos a finalizar esta sección probando que dado un espacio métrico $(X,d)$ existe un espacio métrico completo $(X^{\#},d^{\#})$ y una función inyectiva

$$i: X \longrightarrow X^{\#}$$

que preserva distancias.

Note que si $X \subseteq X^{\#}$ y $\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \subseteq X$ es de Cauchy, entonces existe $y \in X^{\#}$ t.q.

$$x_n \xrightarrow[n\to\infty]{} y$$

Es decir $X^{\#}$ contiene todos los posibles límites. Vamos a definir una clase de equivalencia entre sucesiones de Cauchy, los límites serán la diferentes clases de equivalencia.

Como primer paso vamos a definir una métrica entre sucesiones de Cauchy

11

Sean $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ y $\{y_n\}_{n=1}^{\infty}$ dos sucesiones de Cauchy. Note que

$$d(x_m, y_m) \leq d(x_m, x_n) + d(x_n, y_n) + d(y_n, y_m)$$

Luego

$$d(x_m, y_m) - d(x_n, y_n) \leq d(x_m, x_n) + d(y_m, y_n).$$

La simetría del argumento en $n$ y $m$ muestra que

$$|d(x_m, y_m) - d(x_n, y_n)| \leq d(x_m, x_n) + d(y_m, y_n)$$

$\therefore$ Dado $\varepsilon > 0$, existe $n_0$ tal que

$$|d(x_m, y_m) - d(x_n, y_n)| < \varepsilon$$

si $n, m \geq n_0$

$\therefore$ $\{d(x_m, y_m)\}_{m=1}^{\infty}$ es de Cauchy en $\mathbb{R}$

Definimos

$$\tilde{d}\left(\{x_n\}_{n=1}^{\infty}, \{y_n\}_{n=1}^{\infty}\right) = \lim_{m \to \infty} d(x_m, y_m)$$

Note que si $x_m \xrightarrow[m\to\infty]{} z$ y 12

$y_m \xrightarrow[m\to\infty]{} z$

Entonces

$$d(x_m, y_m) \leq d(x_m, z) + d(z, y_m)$$

converge a "0" cuando $m \to \infty$, i.e.

$$\tilde{d}\left(\{x_m\}_{m=1}^{\infty}, \{y_m\}_{m=1}^{\infty}\right) = 0.$$

Note además que al ser

$$d(x_m, y_m) = d(y_m, x_m)$$

tenemos que

$$\tilde{d}\left(\{x_m\}_{m=1}^{\infty}, \{y_m\}_{m=1}^{\infty}\right) =$$

$$\tilde{d}\left(\{y_m\}_{m=1}^{\infty}, \{x_m\}_{m=1}^{\infty}\right)$$

Además dada otra sucesión de Cauchy $\{z_n\}_{n=1}^{\infty}$, tenemos que

$$d(x_m, y_m) \leq d(x_m, z_m) + d(z_m, y_m)$$

tomando límites obtenemos que

$$\tilde{d}\left(\{x_m\}_{m=1}^{\infty}, \{y_m\}_{m=1}^{\infty}\right) \leq$$

$$\tilde{d}\left(\{x_m\}_{m=1}^{\infty}, \{z_m\}_{m=1}^{\infty}\right) +$$

$$\tilde{d}\left(\{z_m\}_{m=1}^{\infty}, \{y_m\}_{m=1}^{\infty}\right)$$

Es decir, la función $\tilde{d}$ satisface la definición de métrica excepto por la condición

$$\tilde{d}\left(\{x_n\}_{n=1}^{\infty}, \{y_n\}_{n=1}^{\infty}\right) = 0$$

si: $\{x_n\}_{n=1}^{\infty} = \{y_n\}_{n=1}^{\infty}$

Estas funciones se llaman semimétricas

Para obtener una métrica, decimos que

$$\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \sim \{y_n\}_{n=1}^{\infty}$$

si:

$$\tilde{d}\left(\{x_n\}_{n=1}^{\infty}, \{y_n\}_{n=1}^{\infty}\right) = 0$$

Vamos a probar que, si:

$$X^{\#} = \{ \{x_n\}_{n=1}^{\infty} \subseteq X \text{ es de Cauchy} \} / \sim$$

es el conjunto de clases de equivalencia y definimos

$$d^{\#}(\underline{x}, \underline{y}) = \tilde{d}\left(\{x_n\}_{n=1}^{\infty}, \{y_n\}_{n=1}^{\infty}\right)$$

donde

$$\underline{x} = [\{x_n\}_{n=1}^{\infty}]$$

$$\underline{y} = [\{y_n\}_{n=1}^{\infty}]$$

Entonces $(X^{\#}, d^{\#})$ es el espacio buscado

| | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| subsuresión | $x_1$ | $x_2$ | $x_3$ | $x_4$ | $x_5$ | $x_6$ | $x_7$ |
| " | $x_{1,1}$ | $x_{2,1}$ | $x_{3,1}$ | $x_{4,1}$ | $x_{5,1}$ | $x_{6,1}$ | $x_{7,1}$ |
| " | $x_{1,2}$ | $x_{2,2}$ | $x_{3,2}$ | $x_{4,2}$ | $x_{5,2}$ | $x_{6,2}$ | $x_{7,2}$ |
| | $x_{1,3}$ | $x_{2,3}$ | $x_{3,3}$ | $x_{4,3}$ | $x_{5,3}$ | $x_{6,3}$ | $x_{7,3}$ |
| subsucesión | $x_{1,4}$ | $x_{2,4}$ | $x_{3,4}$ | $x_{4,4}$ | $x_{5,4}$ | $x_{6,4}$ | $x_{7,4}$ |

$$d(x_{i,l}, x_{j,l}) < \frac{2}{l}$$

**Paso 1:** $d^{\#}$ esta bien definida

(14)

Sean $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ y $\{x_n'\}_{n=1}^{\infty}$

tales que $\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \sim \{x_n'\}_{n=1}^{\infty}$

Entonces

$$\lim_{m \to \infty} d(x_m, x_m') = 0.$$

Dada $\{y_n\}_{n=1}^{\infty}$ sucesión de Cauchy

$$d(x_m, y_m) \leq d(x_m, x_m') + d(x_m', y_m).$$

$$\therefore \lim_{m \to \infty} d(x_m, y_m) \leq \lim_{m \to \infty} d(x_m', y_m)$$

De igual forma se prueba que

$$\lim_{m \to \infty} d(x_m', y_m) \leq \lim_{m \to \infty} d(x_m, y_m)$$

$$\therefore \lim_{m \to \infty} d(x_m', y_m) = \lim_{m \to \infty} d(x_m, y_m)$$

**Paso 2:** Sea $x \in X$, tome $x_n = x$ para todo $n \in \mathbb{N}$, y defina

$$i(x) = [\{x_n\}_{n=1}^{\infty}]$$

Entonces

$$d^{\#}(i(x), i(y)) = \lim_{m \to \infty} d(x_m, y_m)$$
$$= d(x, y)$$

i.e. $i$ preserve distancias.

Ahora dada una sucesión de Cauchy $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ y $\varepsilon > 0$ existe $n_0$ t.q.

$$d(x_n, x_{n_0}) < \varepsilon$$

si $n \geq n_0$

Entonces

$$\lim_{m \to \infty} d(x_m, x_{n_0}) \leq \varepsilon$$

por lo tanto

$$d^{\#}([\{x_n\}_{n=1}^{\infty}], i(x_{n_0})) \leq \varepsilon$$

$\therefore$ $i(X)$ es denso en $X^{\#}$.

<u>Paso 3:</u> $(X^{\#}, d^{\#})$ es completo

Sea $\{\underline{x}^m\}_{m=1}^{\infty}$ una sucesión de Cauchy de clases de equivalencia

Sea $y_n \in X$ tal que

$$d^{\#}(\underline{x}^n, i(y_n)) < \frac{1}{n}$$

Como

$$d(y_m, y_n) = d^{\#}(i(y_m), i(y_n)) \leq$$

$$d^{\#}(i(y_m), \underline{x}^m) + d^{\#}(\underline{x}^m, \underline{x}^n) +$$

$$d^{\#}(\underline{x}^n, i(y_n)) \leq$$

$$\frac{1}{n} + \frac{1}{m} + d^{\#}(\underline{x}^m, \underline{x}^n)$$

Luego $\{y_m\}_{m=1}^{\infty}$ es de Cauchy

Finalmente

$$d^{\#}(\underline{x}^m, [\{y_m\}_{m=1}^{\infty}]) \leq$$

$$d^{\#}(\underline{x}^m, i(y_m)) +$$

$$d^{\#}(i(y_m), [\{y_m\}_{m=1}^{\infty}]) \leq$$

$$\frac{1}{m} + d^{\#}(i(y_m), [\{y_m\}_{m=1}^{\infty}])$$

Dado que $i(y_\ell) \xrightarrow[\ell \to \infty]{} [\{y_m\}_{m=1}^{\infty}]$

concluimos que

$$\underline{x}^n \xrightarrow[n \to \infty]{} [\{y_m\}_{m=1}^{\infty}]$$

<u>Teorema:</u> Sea $(X,d)$ un espacio métrico. Entonces

(a) existe un espacio métrico $(X^{\#},d^{\#})$ completo y una función ingectiva

$$i : X \longrightarrow X^{\#}$$

que preserva distancias.

(b) si $(X,d)$ es completo, entonces $(X^{\#},d^{\#})$ es isométrico a $(X,d)$.

<u>Prueba:</u> (a) ✓

(b) Sea $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ de Cauchy

si $(X,d)$ es completo existe $y \in X$ t.q $x_n \xrightarrow[n\to\infty]{} y$

Dado $\varepsilon > 0$,

$$d^{\#}\left( [\{x_n\}_{n=1}^{\infty}], \hat{i}(y) \right) = \lim_{m\to\infty} d(x_m, y) = 0$$

$\therefore$ $\underline{\hat{i}(y)} = [\{x_n\}_{n=1}^{\infty}]$

$\therefore$ $\hat{i}$ es sobre.

**Lema:** Sean $(Y, \rho)$ un espacio métrico completo y

$$j : X \longrightarrow Y$$

que preserva distancias y $j(X) \subseteq Y$ es denso en $(Y, \rho)$.

Entonces existe

$$\theta : X^{\#} \longrightarrow Y$$

una isometría t.q. $\theta \circ \hat{\imath} = j$.

**Prueba:** Ejercicio.