MA0505 - Análisis I

Lección XI: La Integral de Riemann-Stieltjes

Pedro Méndez[1]

[1]Departmento de Matemática Pura y Ciencias Actuariales
Universidad de Costa Rica

Semestre I, 2021

Agenda

1. La Nueva Integral
   - Sumas de Riemann y Stieltjes
   - Sumas Superiores e Inferiores
   - Propiedades
2. Propiedades de la Integral

Las Sumas de Riemann y Stieltjes

Sea $\phi : [a, b] \to \mathbb{R}$. Dados $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ acotada, una partición $\Gamma = \{ x_0 = a < x_1 < \cdots < x_n = b \}$ de $[a, b]$ y $x_{i-1} \leqslant \xi_i \leqslant x_i$ para $1 \leqslant i \leqslant n$, definimos la suma de Riemann-Stieltjes como

$$R(f, \Gamma, \phi) = \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)[\phi(x_i) - \phi(x_{i-1})].$$

La Definición de la Integral

Definición

Decimos que f es Riemann-Stieltjes integrable con respecto a ϕ en $[a, b]$ si existe $I \in \mathbb{R}$ que satisface

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0\ (|\Gamma| < \delta \Rightarrow |R(f, \Gamma, \phi) - I| < \varepsilon)$$

para cualquier escogencia de puntos $\{\xi_1, \ldots, \xi_n\}$.

Denotamos $I = \int\limits_a^b f \mathrm{d}\phi$.

Sea $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ acotada y $\Gamma = \{\, x_0 = a < x_1 < \cdots < x_n = b \,\}$, definimos

$$m_i = \inf_{x_{i-1} \leqslant \xi_i \leqslant x_i} f(\xi), \quad M_i = \sup_{x_{i-1} \leqslant \xi_i \leqslant x_i} f(\xi)$$

para $1 \leqslant i \leqslant n$. De forma similar a la integral de Riemann, definimos

- $L(f, \Gamma, \phi) = \sum_{i=1}^{n} m_i[\phi(x_i) - \phi(x_{i-1})]$.
- $U(f, \Gamma, \phi) = \sum_{i=1}^{n} M_i[\phi(x_i) - \phi(x_{i-1})]$.

Claramente si f es creciente entonces

$$L(f, \Gamma, \phi) \leqslant R(f, \Gamma, \phi) \leqslant U(f, \Gamma, \phi)$$

y caso que $\phi(x) = x$ para $x \in [a, b]$ se obtiene la integral de Riemann ordinaria.

El Criterio de Cauchy

Ejercicio

La función f es Riemann-Stieltjes integrable respecto a ϕ si y sólo si dado $\varepsilon > 0$, existe un $\delta > 0$ tal que si $|\Gamma| < \delta$ y $|\Gamma'| < \delta$, vale entonces que

$$|R(f, \Gamma, \phi) - (f, \Gamma', \phi)| < \varepsilon.$$

Lema

Asuma que existe $z_0 \in [a, b]$ tal que f y ϕ son discontinuas en z_0. Entonces f no es Riemann-Stieltjes integrable respecto a ϕ.

- Supongamos que

$$\phi(z_0) \neq \lim_{x \to z_0^+} \phi(x) = \lim_{x \to z_0^-} \phi(x).$$

- Entonces existe un $\varepsilon > 0$ tal que para $\delta > 0$, existen $\overline{x}_\delta, \overline{y}_\delta$ que satisfacen
  - $\overline{x}_\delta < z_0 < \overline{y}_\delta$.
  - $|\phi(z_0) - \phi(\overline{x}_\delta)| \geqslant \sqrt{\varepsilon}$.
  - $|\phi(z_0) - \phi(\overline{y}_\delta)| \geqslant \sqrt{\varepsilon}$.

Continuamos la Prueba

Además, existe un ξ_δ tal que

- $|\xi_\delta - z_0| < \frac{\delta_1}{2}$.
- $|f(\xi_\delta) - f(z_0)| \geqslant \sqrt{\varepsilon}$.

Donde

$$\delta_1 = \text{mín}\left\{ \frac{1}{2}|z_0 - \overline{x}_\delta|, \frac{1}{2}|z_0 - \overline{y}_\delta| \right\}.$$

Supogamos que $\xi_\delta > z_0$ y tomemos Γ una partición tal que

$$z_0 = x_{i_0} < \xi_\delta < x_{i_0+1} = \overline{y}_\delta$$

con $|\Gamma| < \delta$. ($\Gamma = \{ x_0 = a < x_1 < \cdots < x_n = b \}$).

Continuamos la Prueba

Considere ahora dos suma de R-S con Γ de partición y los mismos $\{\xi_i\}$ para $i = i_0$.
En el intervalo $[x_{i_0}, x_{i_0+1}]$ vale que

- $R(f, \Gamma, \phi)$ es la suma de R-S con punto $\xi_{i_0} = \xi_\delta$.
- $R'(f, \Gamma, \phi)$ es la suma de R-S con punto $\xi_{i_0} = z_0$.

Así

$$|R(f, \Gamma, \phi) - (f, \Gamma', \phi)| = |f(\xi_\delta) - f(z_0)||\phi(x_{i_0}) - \phi(x_{i_0+1})| \geqslant \varepsilon.$$

En el caso que $z_0 > \xi_\delta$, la prueba es similar. Y el caso en el que $\lim_{x \to z_0^+} \phi(x) \neq \lim_{x \to z_0^-} \phi(x)$ será un ejercicio

Como las Sumas de Darboux

Analizamos U y L. El resultado a continuación tiene una análogo en las sumas de Darboux.

Lema

Sea $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ acotada y $\phi : [a, b] \to \mathbb{R}$ creciente.

1. *Si $\Gamma_1 \subseteq \Gamma_2$, entonces*
$$L(f, \Gamma_1, \phi) \leqslant L(f, \Gamma_2, \phi), \quad U(f, \Gamma_1, \phi) \leqslant U(f, \Gamma_2, \phi).$$
2. *Si Γ_1, Γ_2 son dos particiones cualesquiera*
$$L(f, \Gamma_1, \phi) \leqslant U(f, \Gamma_2, \phi).$$

Primer Inciso

Sean

$$\Gamma_1 = \{\, x_0 = a < x_1 < \cdots < x_n = b \,\},$$
$$\Gamma_2 = \{\, y_0 = a < y_1 < \cdots < y_m = b \,\}$$

con $n \leqslant m$. Dado $1 \leqslant i \leqslant n$ asuma que existe y_i tal que $x_i < y_i < x_{i+1}$. Entonces

$$\sup_{[x_i, y_i]} f, \quad \sup_{[y_i, x_{i+1}]} f \leqslant \sup_{[x_i, x_{i+1}} f$$

y por lo tanto

$$\sup_{[x_i, y_i]} f(\phi(y_i) - \phi(x_i)) + \sup_{[y_i, x_{i+1}]} f(\phi(x_{i+1}) - \phi(y_i))$$
$$\leqslant \sup_{[x_i, x_{i+1}]} f(\phi(y_i) - \phi(x_i) + \phi(x_{i+1}) - \phi(y_i)) = \sup_{[x_i, x_{i+1}]} f(\phi(x_{i+1}) - \phi(x_i)).$$

Terminamos el Inciso

Usando un argumento similar se prueba que si

$$y_{j-1} = x_{i-1} < y_j < y_{j+1} < \cdots < x_i = y_{j+m},$$

entonces

$$\sum_{j=1}^{m} \sup_{[y_{j-1},y_j]} f(\phi(y_j) - \phi(y_{j-1})) \leqslant \sup_{[x_{i-1},x_i]} f(\phi(x_i) - \phi(x_{i-1})).$$

Por lo tanto

$$U(f,\Gamma_1,\phi) \geqslant U(f,\Gamma_2,\phi).$$

De forma similar se prueba la desigualdad para L.

El Segundo Inciso

Si asumimos el primer inciso y tomamos Γ_1, Γ_2 particiones con $\Gamma = \Gamma_1 \cup \Gamma_2$, entonces

$$L(f, \Gamma_1, \phi) \leqslant L(f, \Gamma, \phi) \leqslant U(f, \Gamma, \phi) \leqslant U(f, \Gamma_2, \phi).$$

Utilizando la definición es fácil probar que si $\int_a^b f\mathrm{d}\phi_1$ y $\int_a^b f\mathrm{d}\phi_2$ existen, y vale $\phi = \phi_1 - \phi_2$, entonces $\int_a^b f\mathrm{d}\phi$ existe y además

$$\int_a^b f\mathrm{d}\phi = \int_a^b f\mathrm{d}\phi_1 - \int_a^b f\mathrm{d}\phi_2.$$

En el caso que ϕ sea de variación acotada, podemos reducir el problema de que f sea R-S integrable respecto a ϕ al caso que ϕ sea creciente y positiva.

Teorema

Sea $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ continua y $\phi : [a,b] \to \mathbb{R}$ de variación acotada en $[a,b]$. Entonces $\int_a^b f \mathrm{d}\phi$ existe y Además

$$\left| \int_a^b f \mathrm{d}\phi \right| \leqslant \sup_{[a,b]} |f| \operatorname{Var}(\phi, [a,b]).$$

Basta probar el resultado en el caso que ϕ es creciente. Entonces, dado $\varepsilon > 0$ existe $\delta_1 > 0$ tal que

$$|x - y| < \delta_1 \Rightarrow |f(x) - f(y)| < \frac{\varepsilon}{2(\phi(b) - \phi(a))}.$$

Primer Paso

Si $|\Gamma| < \delta_1$, vamos a probar que

$$U(f,\Gamma,\phi) - L(f,\Gamma,\phi) < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Sea $\Gamma = \{\, x_0 = a < x_1 < \cdots < x_n = b \,\}$, como f es continua, existen ξ_i, η_i que satisfacen

- $f(\xi_i) = \sup_{[x_i,x_{i+1}]} f = M_i$ para $0 \leqslant i \leqslant n-1$.
- $f(\eta_i) = \inf_{[x_i,x_{i+1}]} f = m_i$ para $0 \leqslant i \leqslant n-1$.

Primer Paso

Tenemos que

$$
\begin{aligned}
&U(f,\Gamma,\phi) - L(f,\Gamma,\phi)\\
&= \sum_{i=0}^{n-1} (M_i - m_i)(\phi(x_{i+1}) - \phi(x_i))\\
&= \sum_{i=0}^{n-1} (f(\xi_i) - f(\eta_i))(\phi(x_{i+1}) - \phi(x_i))\\
&\leqslant \frac{\varepsilon}{2} \frac{1}{\phi(b) - \phi(a)} (\phi(b) - \phi(a))
\end{aligned}
$$

puesto que

$$|\xi_i - \eta_i| \leqslant |x_{i+1} - x_i| \leqslant |\Gamma| \leqslant \delta_1$$

Segundo Paso

Vamos a mostrar que existe I tal que para $\eta > 0$, existe un $\delta > 0$ que satisface

$$|\Gamma| < \delta \Rightarrow |U(f, \Gamma, \phi) - I| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Para ese efecto, tomemos $\{\Gamma_k\}_{k=1}^{\infty}$ una sucesión de particiones tal que $\lim_{k\to\infty} |\Gamma_k| = 0$.
Considere $\Gamma'_k = \bigcup_{j=1}^{k} \Gamma_j$, entonces vale

- $\Gamma'_k \subseteq \Gamma'_{k+1}$, y
- $\Gamma_k \subseteq \Gamma'_k$.

Segundo Paso

Tomemos $U = \inf_{1 \leqslant k} U(f, \Gamma_k, \phi)$. Dado que $|\Gamma_k| < \delta_1$ para $k \geqslant k_1$,

$$U(f, \Gamma_k, \phi) \leqslant L(f, \Gamma_k, \phi) + \frac{\varepsilon}{2} \leqslant U(f, \Gamma'_k, \phi) + \frac{\varepsilon}{2}.$$

Sea $k_0 \geqslant k$, tal que

$$0 \leqslant U(f, \Gamma'_k, \phi) - U < \frac{\varepsilon}{2}$$

cuando $k \geqslant k_0$. Entonces cuando $k \geqslant k_0$ vale

$$\begin{gathered} |U(f, \Gamma_k, \phi) - U| \\ \leqslant |U(f, \Gamma'_k, \phi) - U| + |U(f, \Gamma_k, \phi) - U(f, \Gamma'_k, \phi)| \\ \leqslant \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2}. \end{gathered}$$

Segundo Paso

Si $\{\tilde{\Gamma}_k\}_{k=1}^{\infty}$

Resumen

- La definición 1 de funciones Riemann-Stieltjes integrables.
- El criterio 1 que nos dice cuando una función NO es R-S integrable.
- El lema 2 que resume algunas propiedades de las sumas superiores e inferiores.

Ejercicios

- Lista 11
  - El ejercicio 1 sobre el criterio de Cauchy para integrales de Riemann y Stieltjes.
  - Terminar la prueba del lema 1 es un ejercicio.

Lecturas adicionales I

S.Cambronero.
Notas MA0505.
20XX.

I.Rojas
Notas MA0505.
2018.