Conexidad

1

Def: Un espacio (X,d) es disconexo si existen A y B abiertos no vacíos t.q.

$$X = A \dot\cup B \quad (A \cap B = \phi).$$

Un espacio es conexo si no es disconexo.

Luego si X es conexo y

$$X = A \dot\cup B$$

con A y B abiertos es necesario que $A = X$ ó $B = X$.

Dado $E \subseteq X$, podemos definir

$$d_E : E \times E \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$(x,y) \longrightarrow d(x,y)$$

Ejr (E, d_E) es un espacio métrico.

Pruebe que $D \subseteq E$ es abierto en (E, d_E) sii existe $O \subseteq X$ abierto en (X,d) t.q. $D = E \cap O$.

Def: $E \subseteq X$ es disconexo si existen A, B abiertos de (X,d) t.q.

$$E = A \cap E \,\dot\cup\, B \cap E$$

con $A \cap E \neq \phi$ y $B \cap E \neq \phi$

2

<u>Ej.m.</u> Sea $I = (a,b) \subseteq \mathbb{R}$

Vamos a probar que I es conexo.

Asuma que I es disconexo, entonces existen A y B abiertos tales que

$$I = (I \cap A) \,\dot{\cup}\, (I \cap B)$$

con $I \cap A \neq \emptyset$ y $I \cap B \neq \emptyset$. Sea $t \in I \cap B$ y $s \in I \cap A$ con $s < t$.

Note que $[s,t] \subseteq I$. Como $s \in A$ existe δ_1 tal que

$$(s-\delta_1, s+\delta_1) \subseteq A$$

$$[s, s+\delta_1] \subseteq [s,t]$$

$\therefore$ $[s, s+\delta_1] \subseteq [s,t] \cap A$.

Tome

$$u = \sup\{x \in [s,t] \cap A\}$$

Ent $s < u \leq t$. Si $u \in B$, existe $\delta_2 > 0$ t.q.

$$(u-\delta_2, u+\delta_2) \subseteq B$$

$$(u-\delta_2, u) \subseteq [s,t]$$

$\therefore$ $(u-\delta_2, u) \subseteq B \cap [s,t]$

Sin embargo, por propiedades del sup existe $w \in [s,t] \cap A$ t.q.

$$u-\delta_2 < w \leq u \quad (\S)$$

De forma similar se prueba que si $u \in A$ entonces existe δ_3 t.q

$$[u, u+\delta_3] \subseteq [s,t] \cap A \quad (\S)$$

La conexidad se preserva por funciones continuas.

Lema: Sea $f: X \longrightarrow Y$ una función continua. Si $E \subseteq X$ es conexo, entonces $f(E)$ es conexo.

Prueba: Asuma que existen $C, D \subseteq Y$ abiertos tal que

$$f(E) = f(E) \cap C \,\dot{\cup}\, f(E) \cap D$$

con $f(E) \cap C \neq \phi$ y $f(E) \cap B \neq \phi$

Note que

$$f^{-1}(f(E) \cap C) \supseteq E \cap f^{-1}(C) \neq \phi$$

$$f^{-1}(f(E) \cap B) \supseteq E \cap f^{-1}(B) \neq \phi$$

y además

$$E \subseteq E \cap f^{-1}(C) \,\dot{\cup}\, E \cap f^{-1}(B) \quad (\lightning)$$

pues $f^{-1}(C)$ y $f^{-1}(B)$ son abiertos. ■

Con este resultado podemos probar que $\mathbb{R}^d$ es conexo. Asuma que

$$\mathbb{R}^d = A \,\dot{\cup}\, B$$

con $A \neq \phi$ y $B \neq \phi$ abiertos.

Sean $x \in A$, $y \in B$, y considere

$$f: [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}^d$$
$$t \longrightarrow (1-t)x + ty$$

Como f es continua

$$[x,y] = f([0,1])$$

el segmento entre "x" y "y" es conexo pero

$$[x,y] = [x,y] \cap A \;\dot{\cup}\; [x,y] \cap B$$

con $[x,y] \cap A \neq \phi$

$[x,y] \cap B \neq \phi$.

Lema: Sea $\{E_\alpha : \alpha \in A\}$ una familia de conexos tal que

$$\bigcap_{\alpha \in A} E_\alpha \neq \phi$$

Entonces $E = \bigcup_{\alpha \in A} E_\alpha$ es conexo.

Prueba:

Sea $x \in \bigcap_{\alpha \in A} E_\alpha$. Si E es disconexo existen A, B abiertos t.q. $A \cap E \neq \phi$, $B \cap E \neq \phi$ y

$$E = A \cap E \;\dot{\cup}\; B \cap E.$$

Asuma que $x \in B \cap E$, como

$$A \cap E \neq \phi$$

existe α_0 t.q. $A \cap E_{\alpha_0} \neq \phi$,

además $x \in B$ y $x \in \bigcap_{\alpha \in A} E_\alpha$

$$\therefore\; x \in B \cap E_{\alpha_0}$$

Como $E_{\alpha_0} \cap E = E_{\alpha_0}$

tenemos que

$$E_{\alpha_0} = E_{\alpha_0} \cap A \;\dot{\cup}\; E_{\alpha_0} \cap B$$

Sea (X,d) un espacio métrico

Dado $x \in X$ se define la componente conexa de x, como la unión de todos los conexos E t.q

$$x \in E$$

Es decir si

$$\Lambda = \{E \subseteq X : E \text{ conexo t.q. } x \in E\}$$

ent. la componente conexa $C(x)$ es

$$C(x) = \bigcup_{E \in \Lambda} E$$

Por el lema anterior $C(x)$ es conexo para todo $x \in X$.

Podemos definir la relación de equivalencia R en X por

$$x \, R \, y \iff \text{existe } C \text{ conexo tal que } x, y \in C$$

Ejr: Si $[x]$ es la clase de equivalencia de x, entonces

$$[x] = C(x)$$

Ejm: Sea $E \subseteq \mathbb{R}$ conexo, con $a, b \in E$. Vamos a mostrar que $[a,b] \subseteq E$.

Asume que existe $x \in [a,b]$ t.q

$$x \notin E$$

Entonces

$$E = \left(E \cap (-\infty, x)\right) \dot{\cup} \left((x, +\infty) \cap E\right)$$

Sea $a = \inf E$

$b = \sup E$

Sabemos que existen $\{a_n\}_{n=1}^{\infty} \subseteq E$

$\{b_n\}_{n=1}^{\infty} \subseteq E$ tal que

$a_{n+1} \leq a_n$, $\lim_{n \to \infty} a_n = a$

$b_n < b_{n+1}$, $\lim_{n \to \infty} b_n = b$

Ent $(a,b) = \bigcup_{n=1}^{\infty} [a_n, b_n] \subseteq E$

De acá se deduce que

$E = (a,b)$ ó $[a,b)$ ó

$(b,a]$ ó $[a,b]$

$\therefore$ Los conexos de $\mathbb{R}$ son los intervalos

Ejr: Sea G abierto en $\mathbb{R}$. Entonces existen $\{(a_i, b_i)\}_{i=1}^{\infty}$ t.q.

$$G = \dot{\bigcup_{i=1}^{\infty}} (a_i, b_i)$$

Recordemos que dado $E \subseteq \mathbb{R}^d$, decimos que E es arco conexo si dados x_0 y x_1 en E existe γ una curva

7

$$\gamma : [0,1] \to \mathbb{R}^d$$

tal que

a) $\gamma(0) = x_0$ y $\gamma(1) = x_1$

b) $\gamma(t) \in E$ para todo $t \in [0,1]$

¿Es arco conexo equivalente a conexo?

Considere

$$E = \{0\} \times [-1,1] \cup \{(x,y) : 0 < x \leq 1, y = \operatorname{sen}(\tfrac{1}{x})\}$$

Sean A, B abiertos tales que $A \cap E \neq \emptyset$, $B \cap E \neq \emptyset$, $A \cap B = \emptyset$ y

$$E \subseteq A \cap E \cup B \cap E$$

Asuma que $(0,0) \in A$

Paso 1: Usando el hecho que $\{0\} \times [-1,1]$ es conexo, pruebe que $\{0\} \times [-1,1] \subseteq A$.

8

Paso 2: La sucesión

$$x_n = \left(\frac{1}{n\pi}, \operatorname{sen}(\pi n)\right) = \left(\frac{1}{n\pi}, 0\right)$$

converge a $(0,0)$. Luego existe n_0 tal que

$$\left(\frac{1}{n\pi}, \operatorname{sen}(\pi n)\right) \in A$$

para todo $n \geq n_0$. ¿Por qué?

Paso 3: Considere el conjunto

$$E_n = \left\{(x,y) : \frac{1}{n\pi} \leq x \leq 1,\ y = \operatorname{sen}\left(\frac{1}{x}\right)\right\}$$

Como

$$\gamma : \left[\frac{1}{n\pi}, 1\right] \longrightarrow E_n$$
$$x \longrightarrow \left(x, \operatorname{sen}\left(\frac{1}{x}\right)\right)$$

tenemos que E_n es conexo, luego

$$E_n \cap A = \phi \quad \text{ó} \quad E_n \cap B = \phi,$$

i.e. $E_n \cap B = \phi$ y por lo tanto $E_n \subseteq A$. Ent

$$\left(x, \operatorname{sen}\left(\frac{1}{x}\right)\right) \in A$$

para todo $0 < x \leq 1$

Concluimos que

$$E \subseteq A. \quad (5)$$

Paso 4: Asume que existe $\tilde{\gamma} : [0,1] \to E$ continua tal que $\tilde{\gamma}(0) = (0,0)$ y

$$\tilde{\gamma}(1) = \left(\frac{1}{n_0\pi}, \operatorname{sen}(n_0\pi)\right)$$

Note que si $t_n \downarrow 0$ cuando $n \to \infty$, entonces

$$\tilde{\gamma}(t_n) = (\tilde{\gamma}_1(t_n), \tilde{\gamma}_2(t_n)) \xrightarrow[n\to\infty]{} (0,0)$$

Luego $\tilde{\gamma}_1(t_n) \xrightarrow[n\to 0]{} 0$

y $$\tilde{\gamma}_2(t_n) = \operatorname{sen}\left(\frac{1}{\tilde{\gamma}_1(t_n)}\right).$$

Es decir existe $x_n \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$ t.q.

$$\left(x_n, \operatorname{sen}\left(\frac{1}{x_n}\right)\right) \in \tilde{\gamma}([0,1])$$

<u>Ejr:</u> Pruebe que, si $x_n < x_{n+1}$, entonces

$$\left(x, \operatorname{sen}\left(\frac{1}{x}\right)\right) \in \tilde{\gamma}([0,1])$$

para todo $x_n \leq x \leq x_{n+1}$.

Concluya que

a) $B = \{(x, \operatorname{sen}(\frac{1}{x})) : 0 < x < \frac{1}{n_0 \pi}\}$

$\subseteq \tilde{\gamma}([0,1])$.

b) Sea $t_0 = \sup\{t > 0 : \tilde{\gamma}(t) = (0,0)\}$,

ent $\tilde{\gamma}([t_0, 1]) \setminus B = \{(0,0)\}$

c) $\tilde{\gamma}$ no es continua en t_0.

Si asumimos que nuestro conjunto es abierto en $\mathbb{R}^d$ las nociones son equivalentes

Lema: Sea $E \subseteq \mathbb{R}^d$ abierto. Entonces son equivalentes

a) E es conexo

b) E es arco conexo.

Prueba: Ejv