1. Parcial 1

1.1. Día 1— 13-3-18

Recordar definición de norma.

Definición 1.1.1. Si $\mathbf{x}\in\mathbb{R}^d$, defina $\|\mathbf{x}\|=(\sum_i x_i^2)^{\frac{1}{2}}$

Teorema 1.1.2. *La norma cumple las siguientes propiedades:*

1. $\|\mathbf{x}\|\geqslant 0$ *y* $\|\mathbf{x}\|=0 \iff \mathbf{x}=0$
2. $\forall a\in\mathbb{R}\forall\mathbf{x}\in\mathbb{R}^d:\|a\mathbf{x}\|=|a|\|\mathbf{x}\|$
3. $\forall\mathbf{x},\mathbf{y}\in\mathbb{R}^d:\|\mathbf{x}+\mathbf{y}\|\leqslant\|\mathbf{x}\|+\|\mathbf{y}\|$

Definición 1.1.3. Dado $x_0\in\mathbb{R}^d$ definimos
$$B(\mathbf{x}_0,r):=\{\mathbf{x}\in\mathbb{R}^d:\|\mathbf{x}-\mathbf{x}_0\|<r\}$$

Definición 1.1.4. Decimos que $C\subseteq\mathbb{R}^d$ es abierto si para todo $\mathbf{x}_0\in C$ existe $r>0$ tal que $B(\mathbf{x}_0,r)\subseteq C$.

Cúales son los abiertos sobre $\mathbb{R}$? Pensaríamos en intervalos abiertos, pero la respuesta correcta es uniones disjuntas contables de intervalos abiertos.

Lema 1.1.5. *Se cumple que:*

1. $\varnothing,\mathbb{R}^d$ *son abiertos*
2. *Toda bola es abierta.*
3. *Dados* $C_1,C_2\subseteq\mathbb{R}^d$*, entonces* $C_1\cap C_2$ *es abierto.*
4. *La unión de abiertos es abierta y la intersección finita de abiertos es abierta.*

Prueba

Para *2.*, si $\mathbf{y}\in B(\mathbf{x}_0,r)$ tenemos $\|\mathbf{x}_0-\mathbf{y}\|\leqslant r$. Tome $\mathbf{z}\in B(\mathbf{y},r_1)$ y considere $\|\mathbf{x}_0-r\|$. Vea que
$$\begin{aligned}\|\mathbf{x}_0-\mathbf{z}\| &\leqslant \|\mathbf{x}_0-\mathbf{y}\|+\|\mathbf{y}-\mathbf{z}\|\\ &<\|\mathbf{x}_0-\mathbf{y}\|+r-\|\mathbf{x}_0-\mathbf{y}\|=r\end{aligned}$$
Para *3.* tome $\mathbf{x}\in C_1\cap C_2$. Existen r_1,r_2 tales que $B(\mathbf{x},r_1)\subseteq C_1$ y $B(\mathbf{x},r_2)\subseteq C_2$. Sin perdida de generalidad, asuma que $r_1<r_2$, entonces $B(\mathbf{x},r_1)\subseteq B(\mathbf{x},r_2)\subseteq C_2$. Por lo tanto $B(\mathbf{x},r_1)\subseteq C_1\cap C_2$. En *4.* tome $\mathbf{x}\in\cup_{i\in I}C_i$, entonces existe $j\in[d]:\mathbf{x}\in C_j$. Tenemos que C_j es abierto y por tanto hay una bola adentro de C_j. Esta bola está dentro de la unión. Por lo tanto la unión es abierta.

Ejercicio 1.1.6. Terminar de probar el lema.

Observe que $\varnothing$ es abierto por vacuidad. Para todo punto en $\varnothing$, la bola de cualquier radio está contenida en $\varnothing$. Esto es cierto por vacuidad. Ahora $\mathbb{R}^d$ es abierto pues toda bola está dentro del espacio. Ahora suponga que tenemos $(A_i)_{i\in[n]}$ una familia finita de abiertos. Considere $A:=\cap_{i\in[n]}A_i$ y $\mathbf{x}\in A$, luego $\forall i\in[n]:\mathbf{x}\in A_i$. Entonces como todos los A_i son abiertos, $\exists r_i>0$ tal que $B(\mathbf{x},r_i)\subseteq A_i$ para todo $i\in[n]$. Tome $\tilde{r}=\min_i\{r_i\}$. Entonces $B(\mathbf{x},\tilde{r})\subseteq A_i$ para todo i, por lo que $B(\mathbf{x},\tilde{r})\subseteq A$ y por lo tanto A es abierto.

Definición 1.1.7. $F\subseteq\mathbb{R}^d$ es cerrado si $F^C:=\mathbb{R}^d\setminus F$ es abierto.

Lema 1.1.8. *Las siguientes son propiedades de cerrados.*

1. $\varnothing,\mathbb{R}^d$ *son cerrados.*
2. *La unión finita de cerrados es cerrada.*
3. *La intersección infinita, inclusive no numerable, de cerrados es cerrada.*

Prueba

1. es inmediato de la definición de conjunto cerrado. Como $\varnothing,\mathbb{R}^d$ son abiertos, sus complementos son cerrados. Estos son $\mathbb{R}^d$ y $\varnothing$ respectivamente. Suponga que $(F_i)_{i\in I}$ es una familia arbitraria de cerrados. Note que $(\cap_{i=1}^{\infty}F_i)^C=\cup_{i=1}^{\infty}(F_i)^C$ es abierto pues $(F_i)^C$ es abierto.

Ejercicio 1.1.9. Terminar de probar el lema.

Sean $(F_i)_{i\in[n]}$ conjuntos cerrados. Considere $F=\cup_{i\in[n]}F_i$ y vea que $F^C=\cap_{i\in[n]}F_i^C$ es una intersección finita de abiertos. Por lo tanto F^C es abierto e inmediatamente F es cerrado.

Definición 1.1.10. Decimos que $\mathbf{x}_0$ es un punto de acumulación de $H\subseteq\mathbb{R}^d$ si existe $(\mathbf{y}_n)_{n\in\mathbb{N}}\subseteq H$ tal que $\mathbf{y}_n\to\mathbf{x}_0$.

Ejemplo 1.1.11. El conjunto de los números de la forma $\left(\frac{1}{n}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ tiene como punto de acumulación 0. Sin embargo 0 no es de la forma $\frac{1}{n}$.

Lema 1.1.12. F *es cerrado si y sólo si contiene todos sus puntos de acumulación.*

Prueba

(⇒) Suponga que tenemos un conjunto cerrado F y sea x un punto de acumulación de F. Asuma por contradicción que $x \in F^C$. Esto significa que existe $r>0$ tal que $B(x,r) \subseteq F^C$. Esto nos lleva a una contradicción, pues existe $(y_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq F$ tal que $y_n \to x$. O sea existe $n_0 \geqslant 0$ tal que para todo $n>n_0$: $\|y_n - x\| < r$.

(⇐) Ahora suponga que F contiene todos sus puntos de acumulación. Suponga que F no es cerrado lo que nos dice que F^C no es abierto. Así, existe un punto $x_0 \in F^C$ tal que no existe $r>0: B(x_0,r) \subseteq F^C$. Decir esto es lo mismo que decir que existe un punto de F que está en $B(x_0,r)$. Luego $\exists y_r \in B(x_0,r) \cap F$. En particular $y_n \in B(x_0, \frac{1}{n}) \cap F$ o sea $\|x_0 - y_n\| < \frac{1}{n} \Rightarrow y_n \to x_0$ y así x_0 es un punto de acumulación.

Observación 1.1.13. La siguiente es una prueba, en prosa, distinta del hecho anterior.

(⇒) Suponga que F es cerrado, entonces F^C es abierto. Entonces existe un vecindario alrededor de cada punto de F^C contenido dentro de F^C. En otras palabras, cualquier punto fuera de F no es aproximable (no hay un vecindario) por puntos dentro de él. Por contraposición, cualquier punto aproximable de F está en F.

(⇐) Ahora suponga que F contiene todos sus puntos de acumulación. Esto nos dice que todo punto fuera de F no es punto de acumulación de F. Viéndolo de otra manera, cualquier punto fuera de F tiene un vecindario enteramente contenido en F^C. Esto nos dice que todo punto de F^C tiene un vecindario dentro de él y por lo tanto F^C es abierto.

Hasta ahora, sólo hemos usado propiedades de la norma y el hecho de que las bolas son abiertas. Las cosas que cumplen la desigualdad triangular no son necesariamente normas, sino distancias. No es necesario estar en un espacio vectorial.

Espacios Métricos

Definición 1.1.14. Dado un conjunto E, una métrica es una función

$$\mathfrak{m}\colon E \times E \to [0,\infty[$$

tal que

1. $\forall x,y \in E$: $\mathfrak{m}(x,y) \geqslant 0$ y $\mathfrak{m}(x,y) = 0 \iff x = y$.
2. $\forall x,y \in E$: $\mathfrak{m}(x,y) = \mathfrak{m}(y,x)$.
3. $\forall x,y,z \in E$: $\mathfrak{m}(x,y) \leqslant \mathfrak{m}(x,z) + \mathfrak{m}(z,y)$.

Decimos que $(E,\mathfrak{m})$ es un espacio métrico.

Ejemplo 1.1.15. Sea $\mathbf{x},\mathbf{y} \in \mathbb{R}^d$, defina

1. $\|\mathbf{x}\|_\infty = \sup\{|x_i| : i \in [d]\}$ y $\mathfrak{m}_\infty(\mathbf{x},\mathbf{y}) = \|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|_\infty$
2. $\|\mathbf{x}\|_1 = \sum_{i\in[d]} |x_i|$ y $\mathfrak{m}_1(\mathbf{x},\mathbf{y}) = \|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|_1$

Veamos que estas funciones en efecto son normas y que las distancias también cumplen la definición de serlo.

Prueba

Sean $\mathbf{x},\mathbf{y} \in \mathbb{R}^d$. Ahora:

- $\|\mathbf{x}\|_1 = 0 \iff \sum_{i\in[d]} |x_i| = 0 \iff \forall i \in [d]: x_i = 0 \iff \mathbf{x} = 0$
- $\|a\mathbf{x}\|_1 = \sum_{i\in[d]} |ax_i| = |a| \sum_{i\in[d]} |x_i| = |a| \|\mathbf{x}\|_1$
- $\|\mathbf{x}+\mathbf{y}\|_1 = \sum_{i\in[d]} |x_i + y_i| \leqslant \sum_{i\in[d]} |x_i| + |y_i| = \|\mathbf{x}\|_1 + \|\mathbf{y}\|_1$

Ejercicio 1.1.16. Muestre que la función $\|\cdot\|_\infty$ también define una norma. Muestre que las métricas inducidas por estas normas en efecto son métricas.

Nuevamente sean $\mathbf{x},\mathbf{y} \in \mathbb{R}^d$.

- $\|\mathbf{x}\|_\infty = 0 \iff s := \sup\{|x_i| : i \in [d]\} = 0 \Rightarrow 0 \leqslant |x_i| \leqslant s = 0 \Rightarrow \forall i \in [d]: x_i = 0 \iff \mathbf{x} = 0$. La otra dirección es inmediata. Todas las coordenadas son 0, entonces $s = 0$.
- $\|a\mathbf{x}\|_\infty = \sup \{|ax_i| : i \in [d]\} = |a| \sup\{|x_i| : i \in [d]\} = |a| \|\mathbf{x}\|_\infty$.
- $\|\mathbf{x}+\mathbf{y}\|_\infty = \sup \{|x_i + y_i| : i \in [d]\} \leqslant \sup\{|x_i| + |y_i| : i \in [d]\} \leqslant \sup\{|x_i| : i \in [d]\} + \sup\{|y_i| : i \in [d]\} = \|\mathbf{x}\|_\infty + \|\mathbf{y}\|_\infty$.

La segunda propiedad viene de $\sup(aX) = a\sup(X)$ y la tercera ocurre pues $|\cdot|$, el valor absoluto en $\mathbb{R}$, cumple la desigualdad triangular y $\sup(A+B) \leqslant \sup(A) + \sup(B)$.

Observación 1.1.17. Del ejercicio anterior, basta mostrar que cualquier norma sobre un e.v. finito-dimensional induce una métrica.

Prueba

Sea (V,N) un e.v. dim. finita con norma N. Sean $x,y,z \in V$, defina $\mathfrak{m}(x,y) = N(x-y)$:

- $\mathfrak{m}(x,y) = 0 \iff N(x-y) = 0 \iff x - y = 0_V \iff x = y$.
- $\mathfrak{m}(x,y) = N(x-y) = N((-1)(y-x)) =$

$|-1|N(y-x) = N(y-x) = \mathfrak{m}(y,x)$
- $\mathfrak{m}(x,z) = N(x-z) = N(x+(-y+y)-z) \leqslant N(x-y)+N(y-z) = \mathfrak{m}(x,y)+\mathfrak{m}(y,x)$.

Por lo tanto $(V,\mathfrak{m})$ es un espacio métrico.

Teorema 1.1.18. *$\|\cdot\|$ y $\|\cdot\|_1$ son equivalentes.*

Prueba

Note que $\|x\|_1 \leqslant d\sup\{|x_i|: i\in[d]\} \leqslant d\|x\|$ y elevando a ambos lados al cuadrado la definición de norma Euclídea inmediatamente tenemos $\|x\| \leqslant \|x\|_1$.

Ejercicio 1.1.19. Pruebe que la norma $\|\cdot\|_\infty$ y $\|\cdot\|$ son equivalentes. Más aún muestre que todas las normas sobre $\mathbb{R}^d$ son equivalentes.

En efecto sea $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^d$, inmediatamente tenemos que $\|\mathbf{x}\|_\infty \leqslant \|\mathbf{x}\|$ pues si $|x_j| = \sup\{|x_i|: i\in[d]\}$ para $j \in [d]$, entonces $|x_j|^2 \leqslant \sum_{i\in[d]}|x_i|^2 \iff 0 \leqslant \sum_{i\neq j}|x_i|^2$. Ahora note que por definición de $|x_j|$ tenemos que $\sum_{i\in[d]}|x_i|^2 \leqslant d|x_j|^2$. Tomando raices en ambos lados obtenemos $\|\mathbf{x}\| \leqslant \sqrt{d}\|\mathbf{x}\|_\infty$. Por lo tanto:

$$\|\mathbf{x}\|_\infty \leqslant \|\mathbf{x}\| \leqslant \sqrt{d}\|\mathbf{x}\|_\infty$$

Para el segundo apartado note que la relación N es equivalente a N' es transitiva. Suponga que $N,N'\widetilde{N}$ son normas sobre $\mathbb{R}^d$ y que

$$c_1N'(\mathbf{x}) \leqslant N(\mathbf{x}) \leqslant c_2N'(\mathbf{x})$$

$$d_1\widetilde{N}(\mathbf{x}) \leqslant N'(\mathbf{x}) \leqslant d_2\widetilde{N}(\mathbf{x})$$

Inmediatamente $c_1d_1\widetilde{N} \leqslant N(\mathbf{x}) \leqslant c_2d_2\widetilde{N}$ por lo que la relación es transitiva.

Así, ver que todas las normas son equivalentes es lo mismo que ver que cualquier norma es equivalente a la norma usual sobre $\mathbb{R}^d$.**FINISH**

1.2. Día 2— 16-3-18

Recuerde que con el concepto de norma podemos definir una distacia. Probar que las normas son equivalentes es lo mismo que lo siguiente.

Ejercicio 1.2.1. Para cualquier norma N sobre $\mathbb{R}^d$, muestre que existen $c_1 = c_1(d), c_2 = c_2(d)$ tales que

$$c_1N(\mathbf{x}) \leqslant \|\mathbf{x}\| \leqslant c_2N(\mathbf{x})$$

En efecto, sea $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^d$. Tenemos que si $\mathbf{x} = (x_1,x_2,\cdots,x_d)$, por desigualdad triangular:

$$N(\mathbf{x}) \leqslant \sum_{j\in[d]}|x_j|N(e_j)$$

Por Cauchy-Schwarz tenemos que

$$\sum_{j\in[d]}|x_j|N(e_j) \leqslant \left(\sum_{j\in[d]}x_j^2\right)^{\frac{1}{2}}\left(\sum_{j\in[d]}N(e_j)^2\right)^{\frac{1}{2}}$$

Ahora, tome $c_1 = \left(\sum_{j\in[d]}N(e_j)^2\right)^{-\frac{1}{2}}$, entonces tenemos que $c_1N(\mathbf{x}) \leqslant \|\mathbf{x}\|$.

Por otro lado considere la función N sobre el conjunto $K = \left\{\mathbf{x}\in\mathbb{R}^d: \|\mathbf{v}\| = 1\right\}$. Note además que K es compacto, sea $m = \min_{\mathbf{x}\in K}\{N(\mathbf{x})\}$ y $\mathbf{y} = \frac{\mathbf{x}}{\|\mathbf{x}\|}$. Así $\|\mathbf{y}\| = 1$ y por tanto $N(\mathbf{y}) \geqslant m$. Luego tenemos que

$$N(\mathbf{x}) \geqslant m\|\mathbf{x}\|$$

Que a la vez es lo mismo que $\|\mathbf{x}\| \leqslant c_2N(\mathbf{x})$ con $c_2 = \frac{1}{m}$.

Continuamos con otro ejemplo de espacio métrico.

Ejemplo 1.2.2. Sea A un conjunto, defina $E := \{f: A\to\mathbb{R}: f \text{ es acotada}\}$ con $\mathfrak{m}(f,g) = \sup_{x\in A}|f(x)-g(x)|$. Entonces $(E,\mathfrak{m})$ es un espacio métrico.

Prueba

Note que $\mathfrak{m}(f,g) \geqslant 0$ y $\mathfrak{m}(f,g) = 0 \iff 0 = \sup_{x\in A}|f(x)-g(x)| \iff \forall x\in A 0 = |f(x)-g(x)|$.

Además si $f,g,h\in E$, se tiene que

$$|f(x)-g(x)| \leqslant |f(x)-h(x)|+|h(x)-g(x)|$$
$$\leqslant \mathfrak{m}(f,h)+\mathfrak{m}(h,g)$$

Así $\mathfrak{m}(f,g) \leqslant \mathfrak{m}(f,h)+\mathfrak{m}(h,g)$

En el ejercicio anterior, es necesario que las funciones sean acotadas. De lo contrario dicho supremo puede no existir. A esta métrica se le conoce como la métrica de convergencia uniforme por lo siguiente.

Ejercicio 1.2.3. Si $(f_k)_{k\in\mathbb{N}} \subseteq E$, entonces $\mathfrak{m}(f_k,f) \to 0$ si $k\to\infty$ si y sólo si $f_k \to f$ uniformemente.

Por definición de convergencia uniforme, si $f_k \to f$ uniformemente entonces $\forall\varepsilon > 0 \exists k_0 \in \mathbb{N}$ tal que $\forall x\in A, k \geqslant k_0: |f_k(x)-f(x)| < \varepsilon$. Por definición de sup tenemos que $\sup_{x\in A}|f_k(x)-f(x)| < \varepsilon$. O sea que visto en E como sucesión tenemos que

$\mathfrak{m}(f_k,f)<\varepsilon$ para todo $\varepsilon>0$ cuando $k\geqslant k_0$. Esto corrobora la equivalencia.

Conceptos Topológicos

Definición 1.2.4. Sea $(E,\mathfrak{m})$ un espacio métrico. Defina la bola abierta como
$$B(x_0,r)=\{y\in E\colon \mathfrak{m}(x_0,y)<r\}$$
Diremos que $G\subseteq E$ es abierto si
$$\forall x\in G\exists r>0\colon B(x,r)\subseteq G$$

De igual forma que en $\mathbb{R}^d$, tenemos las siguientes propiedades.

Lema 1.2.5. *Sea E un espacio métrico.*
1. *$\varnothing,E$ son abiertos.*
2. *Si G_1,G_2 son abiertos, entonces $G_1\cap G_2$ es abierto.*
3. *Si A es un conjunto y G_λ es abierto para todo $\lambda\in A$ entonces $\cup_{\lambda\in A}G_\lambda$ es abierto.*

Ejercicio 1.2.6. Adapte la prueba del lema 1.1.5 a este lema.

Definición 1.2.7. Se dice que $F\subseteq E$ es cerrado si $E\backslash F$ es abierto.

Las propiedades de los cerrados son las mismas que en 1.1.8 intercambiando $\mathbb{R}^d$ por E.

Definición 1.2.8. Dado $A\subseteq E$, decimos que $x_0\in A$ es un punto interior de A si existe $r>0$ tal que $B(x_0,r)\subseteq A$. Análogamente definimos el interior de A como el conjunto de los puntos interiores de A. Denotamos A^o al interior.

Es importante notar que A^o puede ser vacío.

Lema 1.2.9. *Un conjunto $G\subseteq E$ es abierto si y sólo si $G=G^o$.*

Definición 1.2.10. Decimos que $V\subseteq E$ es un vecindario de $x_0\in E$ si $x_0\in V^o$. Es decir, existe $r>0$ tal que $B(x_0,r)\subseteq V$.

Veamos un hecho interesante sobre abiertos. Sea $G\subseteq A$ con G abierto. Si $x_0\in G$ existe $r>0$ tal que $B(x_0,r)\subseteq G\subseteq A$. Luego $x_0\in A^o$ y $G\subseteq A^o$. Es decir, A^o es el abierto más grande contenido en A. Esto prueba el apartado *2.* del siguiente lema.

Lema 1.2.11. *Sea $A,B\subseteq E$, entonces*
1. *A es abierto si y sólo si $A=A^o$.*
2. *A^o es el abierto más grande contenido en A.*
3. *Si $A\subseteq B$, entonces $A^o\subseteq B^o$.*
4. *$(A\cap B)^o=A^o\cap B^o$.*

Prueba

Para *4.* note que $A^o\cap B^o\subseteq A\cap B$. Luego $A^o\cap B^o\subseteq (A\cap B)^o$. Además $(A\cap B)^o\subseteq A\cap B\subseteq A$. Como $(A\cap B)^o$ es abierto entonces $(A\cap B)^o\subseteq A^o$. De igual forma $(A\cap B)^o\subseteq B^o$.

1. Suponga que A es abierto, por el apartado *2* tenemos que si G es un subconjunto abierto de A entonces $G\subseteq A^o$. En particular como A es abierto, $A\subseteq A^o$. La otra dirección es inmediata pues A^o es abierto por definición.

3. Observe que por el apartado *2* tenemos que $A^o\subseteq A\subseteq B$ es un subconjunto abierto de B, o sea está contenido en su interior. Así $A^o\subseteq B^o$.

Definición 1.2.12. Se dice que $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}\subseteq E$ converge a x si $\lim_{n\to\infty}\mathfrak{m}(x_n,x)=0$. Esto es lo mismo que decir que dado $\varepsilon>0$ existe n_0 tal que $\mathfrak{m}(x_n,x)<\varepsilon$ cuando $n\geqslant n_0$. Denotamos $x_n\to x$.

Sea x un punto y $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}\subseteq B^C$ tal que $x_n\to x$. Si $x\in B^o$, entonces existe $r>0$ tal que $B(x,r)\subseteq B$. Pero existe n_0 tal que $x_n\in B(x,r)$ para todo $n\geqslant n_0$.

Definición 1.2.13. Dado $x_0\in E$, decimos que x_0 está en la frontera de A si para todo $r>0$ se cumple $B(x_0,r)\cap A\neq\varnothing\neq B(x_0,r)\cap A^C$. En palabras de sucesiones, existen $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}\subseteq A$ y $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}\subseteq A^C$ tales que $x_n\to x_0$ y $y_n\to x_0$. Denotamos la frontera de A como ∂A.

Inmediatamente se sigue que $\partial(A)=\partial(A^C)$.

Definición 1.2.14. Decimos que $x_0\in E$ está en la adherencia de A si para todo $r>0$ se cumple $B(x_0,r)\cap A\neq\varnothing$. Definimos la clausura de A como el conjunto de puntos de adherencia de A, denotado por $\overline{A}$. En términos de sucesiones, $x_0\in\overline{A}$ si y sólo si $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}\subseteq A$ tal que $x_n\to x_0$.

Note que $\mathfrak{m}(x_n,\ x_0)\ \to\ 0$ entonces $\inf\{\mathfrak{m}(x_0,a)\colon a\in A\}=0$ pues no existe $r>0$ tal que $\mathfrak{m}(x_0,a)>r$.

Definición 1.2.15. Dados $A,B\subseteq E$ definimos $\mathfrak{m}(A,B)=\inf\{\mathfrak{m}(x,y)\colon (x,y)\in A\times B\}$.

Luego, si $x_0\in\overline{A}$, se tiene $\mathfrak{m}(\{x_0\},A)=0$.

Ejercicio 1.2.16. El detalle anterior no es obvio. Más aún es una equivalencia, pruébelo.

(⇒) Suponga que x_0 es un punto de adherencia. Entonces $\forall r>0: B(x_0,r)\cap A\neq\varnothing$. Ahora sea $y\in B(x_0,r)\cap A$, luego $\mathfrak{m}(\{x_0\},A)\leqslant\mathfrak{m}(x_0,y)<r$ y como $r>0$ es arbitrario se sigue que $\mathfrak{m}(\{x_0\},A)=0$.

(⇐) Ahora suponga que x_0 es un punto tal que $\mathfrak{m}(\{x_0\},A)=0$. Entonces $\forall r>0 \exists y_r\in A: \mathfrak{m}(x_0,y_r)<r$. Así $B(x_0,r)\cap A\neq\varnothing$. Pero entonces cualquier bola abierta centrada en x_0 tendrá intersección no vacía con A por lo que x_0 está en su adherencia.

Ejemplo 1.2.17. Considere $A=\{n\colon n\geqslant 1\}$ y $B=\left\{n+\frac{1}{n}\colon n\geqslant 1\right\}$. Como $\mathfrak{m}(n,n+\frac{1}{n})=|n-(n+\frac{1}{n})|=\frac{1}{n}$ entonces $\mathfrak{m}(A,B)=0$.

Usualmente la mente lo traiciona a uno pues uno piensa en situaciones con conjuntos acotados. El ejemplo anterior muestra que estos conjuntos se tocan en infinito.

Ahora un punto de acumulación es un punto de adherencia sólo que la intersección con A no puede ser trivial. O sea la intersección no puede ser el mismo punto.

Definición 1.2.18. Un punto $x_0\in E$ es un punto de acumulación de A si $(B(x_0,r)\backslash\{x_0\})\cap A\neq\varnothing$ para todo $r>0$. El conjunto de los puntos de acumulación se denota A' Un punto $x_0\in A$ es un punto aislado de A si existe $r>0$ tal que $B(x_0,r)\cap A=\{x_0\}$.

Ejemplo 1.2.19. Considere $A=\{(x,y)\colon y\geqslant 0\}\subseteq\mathbb{R}^2$ con la métrica usual. Encuentre el interior, frontera y adherencia de A.

Vea que $A^o=A\backslash\{(x,y)\colon y=0\}$.
Sea $(x,y)\in A^o$, tome $r=\frac{y}{2}$ y $(z,w)\in B((x,y),r)$. Entonces $\|(z,w)-(x,y)\|<r=\frac{y}{2}$, así $|w-y|\leqslant\sqrt{(z-x)^2+(w-y)^2}<\frac{y}{2}$. Por lo que

$$|w-y|<\frac{y}{2}$$
$$\iff -\frac{y}{2}<w-y<\frac{y}{2}$$
$$\iff 0<\frac{y}{2}<w<y$$

Además $\partial(A)=\{(x,0)\colon x\in\mathbb{R}\}$ pues $B((x,0),r)$ contiene $(x,\frac{r}{2}),(x,-\frac{r}{2})$.
Finalmente $\overline{A}=A$.

Ejercicio 1.2.20. Caracterice los puntos de acumulación en términos de sucesiones.

TO DO

Lema 1.2.21. *Sea $A\subseteq E$. Entonces A es cerrado si y sólo si $A=\overline{A}$.*

Prueba

(⇒) Tenemos $A\subseteq\overline{A}$. Ahora si A es cerrado, A^C es abierto. Entonces dado $x_0\in A^C$, existe $r>0$ tal que $B(x_0,r)\subseteq A^C$. Tome $x_0\in\overline{A}\backslash A$, entonces $B(x_0,r)\cap A\neq\varnothing$. Esto es contradictorio por lo que $\overline{A}\backslash A=\varnothing$ i.e. $A=\overline{A}$.

(⇐) Sea $x_0\notin\overline{A}$, entonces existe $r>0$ tal que $B(x_0,r)\cap A=\varnothing$. Luego $B(x_0,r)\subseteq A^C=(\overline{A})^C$.

En general tenemos el siguiente hecho.

Lema 1.2.22. *Dado $A\subseteq E$, $\overline{A}$ es cerrado.*

Prueba

Suponga que $\overline{A}$ no es cerrado. Entonces $(\overline{A})^C$ no es abierto. Entonces existe $x_0\in(\overline{A})^C$ tal que para todo $r>0$ tenemos $B(x_0,r)\subsetneq(\overline{A})^C$. Es decir que existe $y_0\in\overline{A}$ tal que $y_0\in B(x_0,r)$. Como $B(x_0,r)$ es abierto, existe $r_1>0$ tal que $B(y_0,r_1)\subseteq B(x_0,r)$. Además $y_0\in\overline{A}$ entonces $B(y_0,r_1)\cap A\neq\varnothing\Rightarrow B(x_0,r)\cap A\neq\varnothing\Rightarrow x_0\in\overline{A}$, pues r es arbitrario.

Ejercicio 1.2.23. Sea F cerrado. Si $A\subseteq F$, entonces $\overline{A}\subseteq F$.

En efecto, sea $x\in\overline{A}$ un punto de adeherencia de A. Podemos encontrar una sucesión $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de puntos en A que convergen a x. En particular esta sucesión está contenida en F y dado que F es cerrado, contiene todos sus puntos de adherencia. Como x era arbitrario, F contiene todos los puntos de adherencia de A, $\overline{A}\subseteq F$.

Observación 1.2.24. Podemos interpretar el hecho anterior de la siguiente manera. El conjunto de puntos de adherencia de A es el cerrado más pequeño que contiene a A.

Realizar los ejercicios de las notas Santiago Cambronero. Sección 2.2.11(1,2,6,7,11,12,16,17,19,20).

1.3. Día 3— 20-3-18

Definición 1.3.1. Dado $A \subseteq E$ definimos

$$V_r(A) = \{x \in E : \mathfrak{m}(x,A) = \mathfrak{m}(\{x\},A) < r)\}$$

Será que este conjunto es un vecindario de A según nuestra definición 1.2.10 anterior? Tenemos que agarrar una bola y meterla dentro de este conjunto.

Tome $a \in A$, entonces $B(a,r) \subseteq V_r(A)$ pues si $y \in B(a,r) \Rightarrow |y-a| < r$ y por definición de distancia al conjunto $\mathfrak{m}(y,A) < |y-a| < r$ y por lo tanto $V_r(A)$ es un vecindario de A.

Ahora si $A \subseteq E$ es cerrado, $y \notin A$ entonces $\mathfrak{m}(y,A) > 0$. O sea existe $r_0 > 0$ tal que $\mathfrak{m}(y,A) > r_0$ pues de lo contrario $\mathfrak{m}(y,A) = 0$. Entonces $y \notin V_r(A)$ para cualquier $r < r_0$.

Esto también se puede corroborar con el ejercicio 1.2.16, ya que si A es cerrado, $y \in A \iff \mathfrak{m}(y,A) = 0$. Tomando la contrapositiva de la implicación hacia la izquierda tenemos el resultado.

Ejercicio 1.3.2. Si A es cerrado entonces $V_r(A)$ es abierto.

Tome $x \in V_r(A)$ y considere el radio $\tilde{r} = \min\{\mathfrak{m}(x,A), r - \mathfrak{m}(x,A)\}$. La hipótesis de que A sea cerrado es necesaria para garantizar que $\mathfrak{m}(x,A) > 0$, pues $x \notin A$. De esta manera $B(x,\tilde{r}) \subseteq V_r(A)$.
Sea $y \in B(x,\tilde{r})$, tenemos que verificar que $\mathfrak{m}(y,A) < r$. Por desigualdad triangular tenemos que

$$\begin{aligned}\mathfrak{m}(y,A) &\leqslant \mathfrak{m}(y,x) + \mathfrak{m}(x,A)\\ &< \tilde{r} + \mathfrak{m}(x,A)\\ &= 2\mathfrak{m}(x,A) \quad \text{ó} \quad r\end{aligned}$$

Cuando se cumple que $\mathfrak{m}(y,A) < 2\mathfrak{m}(x,A)$ es porque $\tilde{r} = \mathfrak{m}(x,A)$. Entonces $\mathfrak{m}(x,A) \leqslant \frac{r}{2}$. En ambos casos se corrobora que $y \in V_r(A)$.

Además $A \subseteq \cap_{r>0} V_r(A)$. Se cumple la igualdad?

Ejercicio 1.3.3. Si A es cerrado entonces $A = \cap_{r>0} V_r(A)$. En caso de que A no sea cerrado, la igualdad es con $\overline{A}$.

TO DO
La intersección es vecindario de tamaño cero. Los puntos a distancia cero de un conjunto es la adherencia.
Será que podemos ver $V_r(A)$ como la unión de todas las bolas de radio r en puntos de A?

Definición 1.3.4. Para un conjunto $F \subseteq E$, decimos que F es denso en E si $\overline{F} = E$.

Definición 1.3.5. Un espacio $(E,\mathfrak{m})$ es separable si contiene un conjunto denso y numerable.

Métricas Inducidas

Vamos a cambiar nuestra notación de espacio de E a X.

Definición 1.3.6. Sea $(X,\mathfrak{m})$ un espacio métrico y $H \subseteq X$. Defina $\mathfrak{m}_H : H \times H \to \mathbb{R}; (h_1,h_2) \mapsto \mathfrak{m}(h_1,h_2)$ es una métrica.

Entonces qué es una bola en H? Vea que $B_H(a,r) = \{y \in H : \mathfrak{m}(a,y) < r\}$ pero esto es $B(a,r) \cap H = \{y \in X : \mathfrak{m}(y,a) < r\}$.

Ahora los abiertos quienes son?

Note que si G es abierto y $g \in G$ entonces existe $r_g > 0$ tal que $B(g,r_g) \subseteq G \Rightarrow \cup_{g \in G} B(g,r_g) \subseteq G$. Luego si G es abierto respecto a $(H,\mathfrak{m}_H)$ entonces

$$\begin{aligned}G &= \cup_{\lambda \in A} B_H(x_\lambda, r_\lambda)\\ &= \cup_{\lambda \in A} (B(x_\lambda,r_\lambda) \cap H)\\ &= H \cap (\cup_{\lambda \in A} (B(x_\lambda,r_\lambda))\\ &= H \cap G_X\end{aligned}$$

Donde G_X es un abierto pero en el espacio grande.

Lema 1.3.7. *Todo abierto es unión de bolas.*

Observación 1.3.8. Más aún, un conjunto dentro de un espacio métrico es abierto si y sólo si es unión de bolas abiertas.

($\Rightarrow$) Sea $A \subseteq X$ abierto y $a \in A$. Como A es abierto, $\exists r_a > 0 : B(a,r_a) \subseteq A$. Para cualquier $a \in A$ se cumple, por lo que $\cup_{a \in A} B(a,r_a) \subseteq A$. La otra inclusión es inmediata pues por como fue definida, la unión tiene todos los puntos de A. Entonces A es unión de bolas.

($\Leftarrow$) Tenemos que la unión de abiertos es un abierto. En este caso, las bolas son abiertas.

Lema 1.3.9. *Todo abierto en* $(H,\mathfrak{m}_H)$ *es de la forma* $G \cap H$ *con* G *abierto en* $(X,\mathfrak{m})$.

Queremos responder la misma pregunta para cerrados. Cómo son los cerrados en $(H,\mathfrak{m}_H)$?

Sea F cerrado en $(H,\mathfrak{m}_H)$ entonces $H \backslash F$ es abierto en $(H,\mathfrak{m}_H)$. Luego, existe G abierto en $(X,\mathfrak{m})$ tal que $H \backslash F = G \cap H$. Tomando complementos tenemos que $F = H \backslash (G \cap H) = H \cap G^C$. O sea que un cerrado en H es la intersección de un cerrado original con el espacio H.

Continuidad

Para poder hablar de la noción de continuidad necesitamos dos espacios métricos.

Definición 1.3.10. Sean $(X,\mathfrak{m}),(Y,\mathfrak{m}')$ dos espacios métricos y $f\colon X\to Y$. Se dice que $\lim_{x\to a} f(x)=\ell\in Y$ si para todo $\varepsilon>0$ existe $\delta>0$ tal que $0<\mathfrak{m}(a,x)<\delta \Rightarrow \mathfrak{m}'(\ell,f(x))<\varepsilon$. Además f es continua en a si $\lim_{x\to a} f(x)=f(a)$.

Observe que es necesario que f esté definida en a para hablar de continuidad. Ahora, una caracterización por bolas es la siguiente. Si f es continua en a entonces para todo $\varepsilon>0$ existe $\delta>0$ tal que $f(B(a,\delta))\subseteq B(f(a),\varepsilon)$. Además $\lim_{x\to a} f(x)=\ell$ si y sólo si $f(B(a,\delta)\backslash\{a\})\subseteq B(\ell,\varepsilon)$.

Ejemplo 1.3.11. Dado $x_0\in X$ defina $f(x)=\mathfrak{m}(x,x_0)$, entonces $\mathfrak{m}(f(x),f(a))=|\mathfrak{m}(x,x_0)-\mathfrak{m}(a,x_0)|\leqslant\mathfrak{m}(x,a)$. De hecho f es Lipschitz y por tanto es continua.

Ejercicio 1.3.12. De igual forma si $A\subseteq X$ es un conjunto, $f(x)=\mathfrak{m}(x,A)$ es continua. Pruebe y utilice el hecho: $\mathfrak{m}(x,A)-\mathfrak{m}(y,A)\leqslant\mathfrak{m}(x,y)$.

Para ver que $\mathfrak{m}(x,A)\leqslant\mathfrak{m}(x,y)+\mathfrak{m}(y,A)$ vea que para cualquier $a\in A$ tenemos que

$$\mathfrak{m}(x,a)\leqslant\mathfrak{m}(x,y)+\mathfrak{m}(y,a)$$

Por definición de ínf tenemos $\mathfrak{m}(x,A)\leqslant\mathfrak{m}(x,a)\leqslant\mathfrak{m}(x,y)+\mathfrak{m}(y,a)$. Pero entonces $\mathfrak{m}(x,A)-\mathfrak{m}(x,y)$ es cota inferior de $\mathfrak{m}(y,A)$. Nuevamente por definición de ínf tenemos que $\mathfrak{m}(x,A)-\mathfrak{m}(x,y)\leqslant\mathfrak{m}(y,A)$. Esto prueba la desigualdad y por tanto procedemos por simetría. Como tenemos que $\mathfrak{m}(x,A)\leqslant\mathfrak{m}(x,y)+\mathfrak{m}(y,A)$, podemos aplicar a y. Esto es $\mathfrak{m}(y,A)\leqslant\mathfrak{m}(x,y)+\mathfrak{m}(x,A)$. Así tenemos que

$$\mathfrak{m}(x,A)-\mathfrak{m}(y,A)\leqslant\mathfrak{m}(x,y)$$

$$-(\mathfrak{m}(x,A)-\mathfrak{m}(y,A))=\mathfrak{m}(y,A)-\mathfrak{m}(x,A)\leqslant\mathfrak{m}(x,y)$$

Así $|\mathfrak{m}(x,A)-\mathfrak{m}(y,A)|\leqslant\mathfrak{m}(x,y)$, luego f es 1-Lipschitz y por tanto continua.

Definición 1.3.13. Una función $f\colon X\to Y$ se dice Lipschitz si existe $\lambda>0$ tal que $\mathfrak{m}(f(x),f(y))\leqslant\lambda\mathfrak{m}(x,y)$. Toda función Lipschitz es continua.

El siguiente teorema es la caracterización topológica de continuidad.

Sea $G\subseteq Y$ abierto y considere $f^{-1}(G)=\{x\in X\colon f(x)\in G\}$. Tome $x_0\in f^{-1}(G)$, existe $r>0$ tal que $B(x_0,r)\subseteq f^{-1}(G)$? Es decir existe $r>0$ tal que $x\in B(x_0,r)$ entonces $f(x)\in G$?

Como G es abierto, existe $\varepsilon>0$ tal que $B(f(x_0),\varepsilon)\subseteq G$. Luego si f es continua, existe $\delta>0$ tal que $f(B(x_0,\delta))\subseteq B(f(x_0),\varepsilon)\subseteq G$.

Las funciones continuas mandan abiertos de vuelta en abiertos, por imagen inversa.

Teorema 1.3.14. *Si $f\colon X\to Y$ es continua y $G\subseteq Y$ es abierto entonces $f^{-1}(G)$ es abierto en X.*

Observe que las imagenes directas no preservan esta propiedad. Es decir, si $G_1\subseteq X$ es abierto, no es siempre cierto que $f(G_1)$ es abierto.

De hecho el teorema anterior es una equivalencia.

Teorema 1.3.15. *Sea $f\colon X\to Y$, son equivalentes:*
1. *f es continua*
2. *$f^{-1}(G)$ para todo $G\subseteq Y$ abierto.*
3. *$f^{-1}(F)$ es cerrado para todo $F\subseteq Y$ cerrado.*
4. *$f(\overline{B})\subseteq\overline{f(B)}$ para todo $B\subseteq X$. Donde la primera cerradura es respecto a X y la segunda respecto a Y.*

Prueba

(*2* $\Rightarrow$ *1*) Dado $\varepsilon>0$ y $x_0\in X$, $B(f(x_0),\varepsilon))\Rightarrow f^{-1}[B(f(x_0),\varepsilon)]$ es abierto. Así $\exists\delta>0$ tal que $B(x_0,\delta)\subseteq f^{-1}[B(f(x_0),\varepsilon)]\Rightarrow f(B(x_0,\delta))\subseteq B(f(x_0),\varepsilon)$

Ejercicio 1.3.16. Mostar que *4* es equivalente a alguna característica anterior.

Vamos a mostrar que *2.*$\Rightarrow$*4.* y *4.*$\Rightarrow$*3.*

($\Rightarrow$) Como f es continua manda abiertos de vuelta en abiertos, $f^{-1}(Y\backslash\overline{f(B)})$ es abierto de X. Además $X\backslash f^{-1}(\overline{f(B)})=f^{-1}(Y\backslash\overline{f(B)})$. De esta manera $f^{-1}(\overline{f(B)})$ es cerrado. Ahora considere la siguiente cadena de inclusiones

$$A\subseteq f^{-1}(f(B))\subseteq f^{-1}(\overline{f(B)})$$

Lo que nos dice que $\overline{B}\subseteq f^{-1}(\overline{f(B)})$ y por lo tanto

$$f(\overline{B})\subseteq f(f^{-1}(\overline{f(B)}))\subseteq\overline{f(B)}$$

($\Leftarrow$) Sea $F\subseteq Y$ cerrado. Tenemos que

$$f(\overline{f^{-1}(F)})\subseteq\overline{f(f^{-1}(F))}\subseteq\overline{F}=F$$
$$\Rightarrow f(\overline{f^{-1}(F)})\subseteq F$$

Esto significa que $\overline{f^{-1}(F)}\subseteq f^{-1}(F)$ y por lo tanto f manda cerrados de vuelta en cerrados.

Teorema 1.3.17. *Sea $f\colon X\to Y$, f es continua en a si y sólo si para cualquier sucesión $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}\subseteq X$ tal que $x_n\to a$ se tiene que $f(x_n)\to f(a)$.*

Prueba

Considere $(f(x_n))_{n\in\mathbb{N}}$, dado $\varepsilon > 0$ hay que mostrar que existe n_0 tal que $\mathfrak{m}(f(x_0),f(a))<\varepsilon$ para todo $n \geqslant n_0$. Sabemos que para todo $\eta>0$ existe m_0 tal que $\mathfrak{m}(x_n,a)<\eta$ si $n\geqslant m_0$. Además existe η_0 tal que $\mathfrak{m}(x_n, a) < \eta_0 \Rightarrow \mathfrak{m}(f(x_n),f(a)) < \varepsilon$. Luego si $n \geqslant m_0$, entonces $\mathfrak{m}(x_n,a)<\eta_0 \Rightarrow \mathfrak{m}(f(x_n),f(a))<\varepsilon$.
Por otro lado asuma que f no es continua, o sea existe $\varepsilon>0$ tal que para todo δ existe un x_δ que cumple $\mathfrak{m}(x_\delta,a)<\delta$ y $\mathfrak{m}(f(x_0),f(a))\geqslant\varepsilon$. En particular si $\delta=\frac{1}{n}$ existe x_n tal que $\mathfrak{m}(x_n,a)<\frac{1}{n}$ y $\mathfrak{m}(f(x_n),f(a))\geqslant\varepsilon$. Esto nos da una contradicción porque tenemos $f(x_n)$ no converge a $f(a)$.

Verificar continuidad es lo mismo que verificarlo para sucesiones. Recuerde además que la sucesión no puede ser escogida, debe ser arbitraria.

La siguiente definición nos va a servir en algún momento.

Definición 1.3.18. Una función $f: X \to Y$ es un homeomorfismo si f es biyectiva y f y su inversa son continuas.

Estas funciones preservan abiertos. Sin embargo, estas funciones no preservan bolas.

Definición 1.3.19. Una función $f: X \to Y$ es una isometría si es sobreyectiva y $\mathfrak{m}'(f(x),f(y))=\mathfrak{m}(x,y)$.

Será cierto que las isometrías son inyectivas? En efecto, por un argumento de kernel se obtiene el resultado.

Ejercicio 1.3.20. Una isometría es un homeomorfismo.

Primero corroboramos que una isometría es inyectiva. Sea f una isometría con $f(a)=f(b)$ entonces $\mathfrak{m}'(f(a),f(b))=0$. Tenemos que $\mathfrak{m}(a,b)=0$, pues f es una isometría, y por lo tanto $a=b$.
Ahora vemos que f es continuas. Pero esto es inmediato, suponga que $\mathfrak{m}(a, b) < \varepsilon$ entonces $\mathfrak{m}'(f(a),f(b))<\varepsilon$ para cualquier $\varepsilon>0$.
Entonces nos falta ver que la inversa de f preserva distancias. Como f es una isometría $\mathfrak{m}(a, b) = \mathfrak{m}(f(a), f(b))$ para $a, b \in X$. Como f es biyectiva, existen $c, d \in Y$ tales que $a = f^{-1}(c)$, $b = f^{-1}(d)$. De la igualdad anterior tenemos $\mathfrak{m}(f^{-1}(c), f^{-1}(d)) = \mathfrak{m}(f(f^{-1}(c)),f(f^{-1}(d)))=\mathfrak{m}(c,d)$. Así f^{-1} también es una isometría que por lo tanto es continua. Concluímos que una isometría es un homeomorfismo.

Compacidad

Sea $f: [a,b] \to \mathbb{R}$ continua. Qué propiedades tiene esta función? Es uniformemente continua, alcanza puntos extremos, manda intervalos en intervalos. Estos intervalos son los compactos de $\mathbb{R}$.

Definición 1.3.21. Un conjunto $C\subseteq X$ es compacto si toda sucesión $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq C$ tiene una subsucesión $(x_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ tal que $x_{n_k}\to c\in C$.

Bajo esta definición todo compacto es cerrado pues todos los puntos de adherencia son límites de sucesiones y no hay otro lugar que caer para los puntos de adherencia que en C.

Note que si $x_{n_k} \to c$ entonces c es un punto de adherencia de $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Ahora tome $c \in \overline{(x_n)_{n\in\mathbb{N}}}$, tome $n_2 > n_1$ y $x_{n_1} \in B(c, 1) \cap (x_n)_{n\in\mathbb{N}}$. En general $x_{n_k} \in B(c, \frac{1}{k}) \cap (x_n)_{n\in\mathbb{N}}$, esta sucesión converge a c. Ahora yo quiero que mi sucesión conste de puntos distintos. Si queremos que $x_{n_1}\neq x_{n_2}$, tome $x_{n_2}\in B(c,r)$ con $r<\text{mín}\{\frac{1}{2},\mathfrak{m}(x_{n_1},c)\}$ entonces $x_{n_1}\neq x_{n_2}$.

En general, cuando $n_k>n_{k-1}$, $x_{n_k}\in B(c,r)\cap(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ con $r<\text{mín}\{\frac{1}{k},\mathfrak{m}(c,x_{n_1}),\cdots,\mathfrak{m}(c,x_{n_{k-1}})\}$.

Definición 1.3.22. Decimos que una colección $\mathcal{U} = \{U_\alpha\colon \alpha\in A\}$ de abiertos de X cubre C si $C\subseteq \cup_{\alpha\in A}U_\alpha$.

Lema 1.3.23. *Sea $C\subseteq X$ compacto y $\mathcal{U}$ un cubrimiento de C. Entonces existe $\varepsilon>0$ tal que para todo $x\in C$ existe $\alpha\in A$ que satisface $B(x,\varepsilon)\subseteq U_\alpha$.*

Aquí el ε nos sirve para todos U_α's.

Prueba

Asuma que el resultado es falso, o sea que para todo epsilon puedo encontrar un x tal que $B(x,\varepsilon)$ no está contenido en todos los U_α. Van a haber pedazos en U_α pero no completamente. Mejor dicho, para todo n existe $x_n\in C$ tal que $B(x_n, \frac{1}{n}) \subsetneq U_\alpha$ para todo $\alpha \in A$. Sabemos que existe $x_{n_k}\to c_0\in C$. Existe un α tal que $c_0\in U_\alpha$. Todavía no hemos usado la hipótesis acerca de $\mathcal{U}$ como cubrimiento. Vea que como U_α es abierto podemos tomar $\varepsilon>0$ tal que $B(c_0,\varepsilon)\subseteq U_\alpha$. Basta ver que las bolas anteriores las podemos meter en esta nueva bola para obtener una contradicción, pues según nuestra hipótesis por contradicción no podemos meter las bolas anteriores en un U_α. Sea n_0 tal que $\mathfrak{m}(x_n,c_0)<\frac{\varepsilon}{2}$ y $\frac{1}{n}<\frac{\varepsilon}{2}$ para todo $n\geqslant n_0$. Entonces $B(x_n,\frac{1}{n})\subseteq B(c_0,\varepsilon)$ Esto pues $y\in B(x_n,\frac{1}{n})\Rightarrow \mathfrak{m}(y,c_0)\leqslant \mathfrak{m}(y,x_n)+\mathfrak{m}(x_n,c_0)<\frac{1}{n}+\frac{\varepsilon}{2}<\varepsilon$.

1.4. Día 4— 22-3-18

Primera sesión de ejercicios

Ejercicio 1.4.1 (2.2.11.1.b Santiago Cambronero)**.** Sea $A=\{(x,e^x): x\in\mathbb{Q}\}$. Es A acotado? Cerrado? Abierto? Encuentre $A^o,\overline{A}$ y $\partial(A)$.

Tome $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}\subseteq\mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}$ y $x_n\to a$ entonces como la exponencial es continua $e^{x_n}\to e^a$. Así $(x_n,e^{x_n})\to(a,e^a)$.

Ejercicio 1.4.2 (2.2.11.7. Santiago Cambronero)**.** Mostrar que $\overline{A}$ es el menor cerrado que contiene a A

Tome B un cerrado tal que $A\subseteq B\subseteq\overline{A}$. Así $B^C\subseteq A^C$, existe $x\in B^C$ tal que $x\in\overline{A}$. Como B^C es abierto entonces existe $r>0$ tal que $B(x,r)\subseteq B^C$. Esto implica que esta bola está contenida en A^C, sin embargo $x\in\overline{A}$. Eso implica que para todo r_1 si tomamos la bola $B(x,r_1)$ pescamos a alguien en A. Esto es contradictorio pues la bola está completamente contenida en el complemento.

Estar en $\overline{A}$ significa que existe una sucesión de A que converge al punto. En otras palabras $\exists(x_n)_{n\in\mathbb{N}}\subseteq A$: $x_n\to x$. Esa misma sucesión está contenida en B y como B es cerrado, es igual a su clausura. Esto nos dice que $x\in B$ y por tanto $\overline{A}\subseteq B$.

Ejercicio 1.4.3 (2.2.11.7.a Santiago Cambronero)**.** Si $A\subseteq B$ entonces $\overline{A}\subseteq\overline{B}$

Tenemos que $A\subseteq\overline{B}$. Como $\overline{B}$ es cerrado, luego $\overline{A}$ es el menor cerrado bajo inclusión que contiene a A. Entonces $\overline{A}\subseteq\overline{B}$.

Ejercicio 1.4.4 (2.2.11.7.b Santiago Cambronero)**.** Mostrar $\overline{A\cup B}=\overline{A}\cup\overline{B}$

"$\supseteq$" Como $\overline{A}\cup\overline{B}$ es cerrado entonces $A\cup B\subseteq\overline{A}\cup\overline{B}\Rightarrow\overline{A\cup B}\subseteq\overline{A}\cup\overline{B}$.

"$\subseteq$" Si $x\in\overline{A\cup B}$ existe $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}\subseteq A\cup B$ tal que $x_n\to x$. Entonces la sucesión está en uno de los conjuntos. Esto significa que el límite está en uno de los dos conjuntos.

Por la definición de cerradura, como $\overline{A\cup B}$ es cerrado y $A,B\subseteq A\cup B\subseteq\overline{A\cup B}$. Entonces sus cerraduras están contenidas en la cerradura de la unión.

Ejercicio 1.4.5 (2.2.11.7.c Santiago Cambronero)**.** Mostrar $\overline{A\cap B}\subseteq\overline{A}\cap\overline{B}$

Como $\overline{A}\cap\overline{B}$ es cerrado tenemos que $A\cap B\subseteq\overline{A}\cap\overline{B}$. Por definición de cerradura $\overline{A\cap B}\subseteq\overline{A}\cap\overline{B}$.

Ejercicio 1.4.6 (2.2.11.12 Santiago Cambronero)**.** Mostrar $A\subseteq\mathbb{R}$ es abierto $\iff A=\cup_i I_i$ con I_i intervalos abiertos. La unión es disjunta.

($\Leftarrow$) A sería unión de abiertos, entonces A es abierto.

($\Rightarrow$)

Ejercicio 1.4.7 (2.2.11.16.a Santiago Cambronero)**.** Si A es abierto, entonces $A\subseteq(\overline{A})^o$. Encuentre un ejemplo donde la inclusión es estricta.

Tome $a\in A$ entonces existe $r>0$ tal que $B(x,r)\subseteq A\subseteq\overline{A}$. Entonces $a\in(\overline{A})^o$.
A manera de ejemplo considere $A=]a,b[\cup]b,c[$. Entonces $\overline{A}=[a,c]$ y $(\overline{A})^o=]a,c[$.

Otra forma usando la definición topológica del interior.

Si A es abierto, entonces $(\overline{A})^o$ es el mayor abierto contenido en $\overline{A}$. Además $A\subseteq\overline{A}$ y como A es abierto se sigue que $A\subseteq(\overline{A})^o$.

Ejercicio 1.4.8 (2.2.11.16.b Santiago Cambronero)**.** Si A es cerrado, entonces $\overline{(A^o)}\subseteq A$.

Sea $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}\subseteq A^o$ tal que $x_n\to x$. Esto significa que $x\in\overline{(A^o)}$ y así $x\in A$

Parte c

beta A barra subset A barra, o sea barra alpha A = beta A barra subset A barra

1.5. Día 5— 3-4-18

Retomando un ejemplo anterior, para $c\in(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ nos interesa lo que pasa en la cola. El comportamiento de esta sucesión se determina no por una cantidad finita de puntos sino por los últimos infinitos puntos. Tome $x_{n_1}\in B(c,1)$ y $\varepsilon_2=\text{mín}\left\{\frac{1}{2},\mathfrak{m}(c,x_{n_1})\right\}$. Sea $x_{n_2}\in B(c,\varepsilon_2)$.

Lo primero que hay que hacer es asumir que el conjunto $\{x_n\colon n\in\mathbb{N}\}$ sea infinito. Si fuera finito, la sucesión sólo toma 10 puntos. Es agarrar sucesiones constantes y cada una de estas nos da un punto de acumulación. No aproximándolo, sino repitiéndolo. Llega un momento donde puedo hacer el segundo paso finitas veces, el de escoger el ε_2.

Bajo esta nueva hipótesis con $x_{n_1}\neq c$, sea $n_2>n_1$ tal que $x_{n_2}\in B(c,\varepsilon_2)$. Iterando el proceso existe $n_k>n_{k-1}>\cdots>n_1$ tal que $x_{n_k}\in B(c,\varepsilon_k)$ con $\varepsilon_k=\text{mín}\left\{\frac{1}{k},\mathfrak{m}(c,x_{n_1}),\cdots,\mathfrak{m}(c,x_{n_k})\right\}$. Esto me asegura el proceso de escoger una sucesión donde todos los elementos son distintos.

Recordamos la definición 1.3.21 de conjuntos compactos.

Definición. Un conjunto C se dice compacto si dada $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}\subseteq C$ existe $(x_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}\subseteq C$ que converge a un punto de C.

Por la construcción tenemos la siguiente equivalencia.

Lema 1.5.1. *Un conjunto C es compacto si y sólo si para cualquier $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}\subseteq C$ se cumple $\cap_{k\in\mathbb{N}}\overline{\{x_n\colon n>k\}}\neq\emptyset$.*

Lema 1.5.2. *Sea C un conjunto compacto y $\mathcal{U}=\{U_\alpha\colon \alpha\in A\}$ un cubrimiento por abiertos de C. Entonces existe $\varepsilon>0$ tal que para todo $x\in C$ existe $\alpha_0\in A$ tal que $B(x,\varepsilon)\subseteq U_{\alpha_0}$.*

Teorema 1.5.3. *Sea $C\subseteq X$, entonces C es compacto si y sólo si para todo cubrimiento por abiertos $\mathcal{U}=\{U_\alpha\colon \alpha\in A\}$ de C existen $(\alpha_i)_{i\in[m]}\subseteq A$ tal que $C\subseteq\cup_{i\in[m]}U_{\alpha_i}$.*

Prueba

($\Rightarrow$) Sea $\mathcal{U}=\{U_\alpha\colon \alpha\in A\}$ tal que $C\subseteq\cup_{\alpha\in A}U_\alpha$. Sea $\varepsilon>0$ según el lema anterior. Tome $x_1\in C$, así existe α_1 tal que $B(x,\varepsilon)\subseteq U_{\alpha_1}$.

Si $C\subseteq U_{\alpha_1}$, estamos listos. De lo contrario tome $x_2\in C\backslash U_{\alpha_1}\subseteq C\backslash B(x_1,\varepsilon)$. Al escogerlo fuera de U_{α_1} ya sé que la distancia $\mathfrak{m}(x_1,x_2)$ es mayor a ε. Tome α_2 tal que $B(x_2,\varepsilon)\subseteq U_{\alpha_2}$. En el caso de que $C\subseteq U_{\alpha_1}\cup U_{\alpha_2}$, tenemos el resultado.

De lo contrario existe $x_3\in C\backslash(U_{\alpha_1}\cup U_{\alpha_2})$. En otras palabras $\mathfrak{m}(x_3,x_1)\geqslant\varepsilon,\mathfrak{m}(x_3,x_2)\geqslant\varepsilon,\mathfrak{m}(x_2,x_1)\geqslant\varepsilon$. Esto contradice que esta sucesión sea convergente, contradiciendo la condición de Cauchy.

Si iteramos este proceso, podemos encontrar $x_{k+1}\in C\backslash(\cup_{i\in[k]}U_{\alpha_i})$ y $\mathfrak{m}(x_i,x_j)\geqslant\varepsilon$ para $i,j\in[k+1],i\neq j$. Si este proceso acaba, significa que existe m tal que $C\subseteq\cup_{i\in[m]}U_{\alpha_i}$. En el caso contrario construimos una sucesión $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}\subseteq C$ tal que $\mathfrak{m}(x_i,x_j)\geqslant\varepsilon$ si $i\neq j$ y esto es una contradicción.

Esto pues $\varepsilon\leqslant\mathfrak{m}(x_i,x_j)\leqslant\mathfrak{m}(x_i,c)+\mathfrak{m}(x_j,c)$ lo que nos dice que no pueden haber subsucesiones convergentes, contradiciendo la definición de compacidad.

($\Leftarrow$) Asuma que $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}\subseteq C$ no tiene una subsucesión convergente. Defina $U_k=X\backslash(\overline{\{x_n\colon n\geqslant k\}})$. Note que $C\subseteq\cup_{k\in\mathbb{N}}U_k=X\backslash(\cap_{k\in\mathbb{N}}\overline{\{x_n\colon n\geqslant k\}})$. y este conjunto es X. Luego, por compacidad, existen $k_1<\cdots<k_m$ tales que $C\subseteq\cup_{i\in[m]}U_{k_i}$. Al unir todos, como van creciendo, es lo mismo que poner el más grande. O sea $C\subseteq U_{k_m}=X\backslash(\overline{\{x_n\colon n\geqslant k_m\}})$ y esto es una contradicción pues $x_n\in C$.

En los textos se toma la siguiente deinición de compacidad.

Definición 1.5.4. Dado $\mathcal{U}=\left\{\widetilde{U}_\alpha\colon \alpha\in A\right\}$ con $\widetilde{U}_\alpha$ abierto respecto a C. Diremos que C es compacto si existen $\alpha_1,\cdots,\alpha_n$ tal que $C=\cup_{i\in[m]}\widetilde{U}_{\alpha_i}$.

Recuerde que como $\widetilde{U}_\alpha$ es abierto respecto a C, existe U_α abierto en X tal que $\widetilde{U}_\alpha=U_\alpha\cap C$.

Ejercicio 1.5.5. La definición anterior coincide con la definición 1.3.21.

Leer Munkres 203

Veamos en $\mathbb{R}$, cuáles son los conjuntos compactos? En $[0,1]$ una sucesión dentro de este conjunto tiene una subsucesión convergente por Bolzano-Weierstraß.

Primero veremos un resultado, las funciones continuas mandan compactos en compactos.

Prueba

Sea $f: X \to Y$ continua y $K \subseteq X$ compacto. Defina $K_1 = f(K)$. Sea $\mathcal{U} = \{U_\alpha : \alpha \in A\}$ un cubrimiento de K. Así $K_1 \subseteq \cup_{\alpha\in A} \Rightarrow f^{-1}(K_1) \subseteq \cup_{\alpha\in A} f^{-1}(U_\alpha)$.

Recuerde que $c \in f^{-1}(f(K)) \iff f(c) \in f(K) \Rightarrow k \in K$ entonces $f(k) \in f(K) \Rightarrow K \subseteq f^{-1}(f(K))$.

Esto nos dice que $K \subseteq f^{-1}(f(K)) \subseteq \cup_{\alpha\in A} f^{-1}(U_\alpha)$. Como K es compacto, existen $\alpha_1, \cdots, \alpha_m$ tales que $K \subseteq \cup_{i\in[m]} f^{-1}(U_{\alpha_i}) \Rightarrow f(K) \subseteq \cup_{i\in[m]} f(f^{-1}(U_{\alpha_i}))$. Entonces $f(K) = K_1$ y $\cup_{i\in[m]} f(f^{-1}(U_{\alpha_i})) \subseteq \cup_{i\in[m]} U_{\alpha_i}$ nos da el resultado.

Ejercicio 1.5.6. Sea $f: X \to Y$ y $\tilde{K} \subseteq X, K \subseteq Y$. Pruebe que $\tilde{K} \subseteq f^{-1}(f(\tilde{K}))$ y $f(f^{-1}(K)) \subseteq K$. Se cumple la igualdad cuando f es inyectiva y sobreyectiva respectivamente.

Teorema 1.5.7. *Dado $(X, \mathfrak{m})$ un espacio métrico. Las siguientes aseveraciones son equivalentes.*

1. *X es compacto.*
2. *Dados $\{F_\alpha : \alpha \in A\}$ con F_α cerrados tal que para todos $\alpha_1, \cdots, \alpha_m$ se tiene $\cap_{i\in[m]} F_{\alpha_i} \neq \varnothing \Rightarrow \cap_{\alpha\in A} F_\alpha \neq \varnothing$.*

Prueba

Probamos *1.* $\Rightarrow$ *2.* por contradicción. Suponga que la conclusión es falso o sea existe $\{F_\alpha : \alpha \in A\}$ tal que $\cap_{\alpha\in A} F_\alpha = \varnothing \Rightarrow \cup_{\alpha\in A} X \backslash F_\alpha = X$. Luego $\{X \backslash F_\alpha : \alpha \in A\}$ es un cubrimiento de X. Así existen $\alpha_1, \cdots, \alpha_m$ tal que $X = \cup_{i\in[m]} X \backslash F_{\alpha_i} \Rightarrow \cap_{i\in[m]} F_{\alpha_i} = \varnothing$. Esto es una contradicción. Por qué?

Definición 1.5.8. Un espacio $(X, \mathfrak{m})$ es acotado si para todo $x_0 \in X$ existe $r > 0$ tal que $B(x_0, r) \supseteq X$. O equivalentemente, existe M tal que $\mathfrak{m}(x,y) \leqslant M$ para todos los $x, y \in X$.

De manera análoga $B \subseteq X$ es acotado si $(B, \mathfrak{m}_B)$ es acotado. O sea para cualquier $x_0 \in X$ existe $r > 0$ tal que $B \subseteq B(x_0, r)$.

Será que un conjunto compacto es acotado? Si C es compacto $C \subseteq \cup_{n\in\mathbb{N}} B(x_0, n)$. Por compacidad existen $n_1 < n_2 < \cdots < n_m$ tales que $C \subseteq \cup_{n\in[m]} B(x_0, n) = B(x_0, n_m)$.

Lema 1.5.9. *Si $C \subseteq X$ es compacto, entonces C es cerrado y acotado.*

Considere $C = \bigtimes_{i\in[d]} [a_i, b_i] \subseteq \mathbb{R}^d$ con la métrica euclídea. Si C no es compacto, existe $\mathcal{U} = \{U_\alpha : \alpha \in A\}$ tal que $C \subsetneq \cup_{i\in[m]} U_{\alpha_i}$ para todo $\alpha_1, \cdots, \alpha_m$.

INSERTAR FIG5.1

Divida el rectángulo en 2^d rectángulos de la forma $\bigtimes_{j\in[d]} \left[c_j^i, d_j^i\right]$, $i \in \left[2^d\right]$. Donde $\left[c_j^i, d_j^i\right]$ es de la forma $\left[a_j, \frac{a_i+b_i}{2}\right]$ ó $\left[\frac{a_i+b_i}{2}, b_j\right]$. Por hipótesis existe un $i_0 \in \left[2^d\right]$ tal que $C_1 = \bigtimes_{j\in[d]} \left[c_j^{i_0}, d_j^{i_0}\right]$ tal que no puede ser cubierto por una cantidad finita de U_α's. Iterando el proceso $C_k = \bigtimes_{j\in[d]} \left[c_j^k, d_j^k\right]$ con $\left[c_j^k, d_j^k\right] \supseteq \left[c_j^{k+1}, d_j^{k+1}\right]$ y $\left|d_j^k - c_j^k\right| = \frac{b_j - a_j}{2^k}$. Por el teorema 1.5.7 de los intervalos encajados existe $z_j = \cap_{k\in\mathbb{N}} \left[c_j^k, d_j^k\right] \Rightarrow \cap_{k\in\mathbb{N}} C_k = \{(z_1, \cdots, z_{algo})\}$. Como $z \in C$, existe $\beta \in A$: $z \in U_\beta$. Como U_β es abierto, existe $\varepsilon > 0$ tal que $B(z, \varepsilon) \subseteq U_\beta$

INSERTAR FIG5.2

Si $\frac{\sqrt{d}\sup_{i\in[d]}|b_i - a_i|}{2^k} < \varepsilon$ entonces $C_k \subseteq B(z, \varepsilon) \subseteq U_\beta$.

Lema 1.5.10. *Si $C_1 \subseteq C_2$ con C_2 compacto y C_1 cerrado entonces C_1 es compacto.*

Ejercicio 1.5.11. Muestre el lema anterior.

En efecto, sea $\mathcal{U}$ un cubrimiento por abiertos de C_1. Por topología de subespacio, todo abierto en $\mathcal{U}$ es de la forma $U \cap C_1$ con U abierto en C_2. Tome

$\tilde{\mathcal{U}} = \left\{U \subseteq C_2 : U \text{es abierto y} \exists \tilde{U} \in \mathcal{U} : U \cap C_1 = \tilde{U}\right\}$

Observe que $\tilde{\mathcal{U}}$ es un cubrimiento por abiertos de C_1. A su vez $C_2 \backslash C_1$ es abierto y asi $\tilde{\mathcal{U}} \cup \{C_2 \backslash C_1\}$ es un cubrimiento por abiertos de C_2. Ahora como C_2 es compacto podemos extraer un subcubrimiento finito que también cubre C_1. Por lo tanto, como el cubrimiento era arbitrario, se sigue que C_1 es compacto.

Como $\bigtimes_{i\in[d]} \{a_i, b_i\}$ es compacto, si C es cerrado y acotado existe n tal que $C \subseteq \bigtimes_{i\in[d]} [-n, n]$ tenemos que C es compacto. Con esto probamos el teorema de Heine-Borel.

Teorema 1.5.12 (Heine-Borel)**.** *Sea $C \subseteq \mathbb{R}^d$ con la métrica euclídea. Entonces C es compacto si y sólo si C es cerrado y acotado.*

1.6. Día 6— 5-4-18

Completitud

Definición 1.6.1. Sea $(X,\mathfrak{m})$ un espacio métrico y $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq X$. Decimos que la sucesión es de Cauchy si para todo $\varepsilon > 0$ existe n_0 tal que $\mathfrak{m} x_n, x_m < \varepsilon$ cuando $n,m \geqslant n_0$.

Ahora al igual que en $\mathbb{R}$ se cumple que:

Lema 1.6.2. *Toda sucesión convergente es de Cauchy y toda sucesión de Cauchy es acotada.*

Definición 1.6.3. Decimos que $(X,\mathfrak{m})$ es completo si toda sucesión de Cauchy en X es convergente en X.

Ejemplo 1.6.4. Sea $X = \{f : [a,b] \to \mathbb{R} : f \text{ es continua}\}$ con la métrica $\mathfrak{m}_\infty = \sup_{x\in[a,b]}\{|f(x)-g(x)|\} = \|f-g\|_\infty$. Sea $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de Cauchy.

Dado $\varepsilon > 0$ existe n_0 tal que $\|f_n - f_m\|_\infty \leqslant \varepsilon$, ahora con $x \in [a,b]$, $|f_n(x) - f_m(x)| \leqslant \|f_n - f_m\| < \varepsilon$ si $m,n \geqslant n_0$. Defina $f = \lim_{n\to\infty} f_n$, si $x \in [a,b]$ existe n_1 tal que $|f(x) - f_m(x)| < \varepsilon$ para $m \geqslant n$. Note que

$$|f(x)-f_m(x)| \leqslant |f(x)-f_n(x)| + |f_m(x)-f_n(x)|$$

El primer término es pequeño pues $f_n \to f$ puntualmente y el segundo término pues $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es Cauchy, esto nos permite empequeñecer independiente del x.

De esta manera, si $m,n \geqslant n_0$ y $m,n \geqslant n_1$ entonces $|f(x) - f_n(x)| \leqslant 2\varepsilon$ para $n \geqslant \max\{n_0, n_1\}$. Esto prueba coonvergencia uniforme, lo que implica que f además es continua.

Considere un subconjunto cerrado C de un espacio completo X. Será cierto que toda sucesión convergente en C converge en C?

Sea $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq C \subseteq X$, como X es completo tenemos que $x_n \to y \in X$. Como C es cerrado, se tiene que y está en C, toda sucesión convergente en C converge a un límite dentro de C.

Esto prueba el lema siguiente:

Lema 1.6.5. *Sea $(X,\mathfrak{m})$ un espacio completo, $C \subseteq X$ con C cerrado. Entonces C con métrica inducida es un espacio completo. Además si $(C, \mathfrak{m}_C)$ es completo, entonces es cerrado en X.*

Prueba

Suponga que C es completo, entonces toda sucesión de Cauchy es convergente dentro C. De esta manera toda sucesión convergente es C converge dentro de C que es la definición de ser cerrado.

Habrá alguna relación entre completitud y compacidad?

Vea que $\mathbb{R}$ es completo pero no es compacto. Por otra parte, si X es compacto y $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq X$ es de Cauchy existe $(x_{n_k})_{k\in\mathbb{N}} \subseteq (x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ que converge. O sea $x_{n_k} \to y \in X$, entonces $\mathfrak{m}(x_n, y) \leqslant \mathfrak{m}(x_n, x_{n_k}) + \mathfrak{m}(x_{n_k}, y)$. Esto nos dice que $\mathfrak{m}(x_n, y) \to 0$ y por tanto $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es convergente.

Lema 1.6.6. *Sea $(X,\mathfrak{m})$ un espacio compacto, entonces $(X,\mathfrak{m})$ es completo.*

Ejercicio 1.6.7. Completar los detalles de la prueba anterior.

En efecto, sea $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq X$ una sucesión de Cauchy. Como X es compacto, por definición 1.3.21, $\exists (x_{n_k})_{k\in\mathbb{N}} \subseteq (x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tal que $x_{n_k} \xrightarrow[k\to\infty]{} \ell \in X$.
Sea $\varepsilon > 0$, entonces como $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es de Cauchy existe $M \in \mathbb{N}$ tal que $\mathfrak{m}(x_n, x_m) < \frac{\varepsilon}{2}$ cuando $m,n > M$. Además como $x_{n_k} \xrightarrow[k\to\infty]{} \ell$ tenemos que existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $\mathfrak{m}(x_{n_k}, x) < \frac{\varepsilon}{2}$ cuando $k > N$. Entonces existe $K \in \mathbb{N} : K > \max M, N$ tal que tenemos $n_K \geqslant K > N$ y por desigualdad triangular, cuando $n > K$ se cumple que

$$\mathfrak{m}(x_n, \ell) \leqslant \mathfrak{m}(x_n, x_{n_K}) + \mathfrak{m}(x_{n_K}, \ell) < \varepsilon$$

Por lo tanto $x_n \xrightarrow[n\to\infty]{} \ell$. Como $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ era arbitraria, toda sucesión de Cauchy es convergente y por lo tanto X es completo.

Aún si completitud no implica directamente compacidad, podemos encontrar una propiedad que junto a completitud nos de compacidad. A esto se le conoce como estar totalmente acotado.

Definición 1.6.8. Un espacio métrico $(X,\mathfrak{m})$ se dice ser totalmente acotado o paracompacto si $\forall \varepsilon > 0$ existen $y_1, \cdots, y_n \in X : X \subseteq \cup_{i\in[m]} B(y_i, \varepsilon)$.

Ejemplo 1.6.9. Tome $X = \mathbb{N}$ y $\mathfrak{m}(m,n) = m \neq n ? 1 : 0$, la métrica discreta. Entonces X es acotado pero no totalmente acotado. Esto pues el ε de la definición puede ser menor a 1 y la cantidad de bolas no es contable sino finita.

Teorema 1.6.10. *En un espacio totalmente acotado, toda sucesión poseé una subsucesión de Cauchy.*

Prueba

Sea $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}\subseteq X$, entonces como X es compacto existen $y_1,\cdots,y_m$ tal que
$$(x_n)_{n\in\mathbb{N}}\subseteq X\subseteq\cup_{i\in[m]}B(y_i,1)$$
Si la sucesión no tiene infinitos puntos, el resultado es inmediato pues tenemos subsucesiones constantes. Sin perdida de generalidad podemos asumir que $\{x_n : n\in\mathbb{N}\}$ tiene cardinalidad infinita. Entonces existe z_1 tal que $B(z_1,1)$ contiene infinitos de la sucesión.
Sea $(x_{n,1})_{n\in\mathbb{N}}\subseteq B(z_1,1)$ y $\{x_{n,1} : n\geqslant 1\}$ tiene cardinalidad infinita. Si iteramos este proceso, tenemos que $(x_{n,k})_{n\in\mathbb{N}}\subseteq B(z_k,\frac{1}{k})$ es una sucesión de cardinalidad infinita. De esta manera extraemos la subsucesión $(x_{n,k+1})_{n\in\mathbb{N}}\subseteq B(z_{k+1},\frac{1}{k+1})$.
Note que $\mathfrak{m}(x_{n,k},x_{m,k})\leqslant\frac{2}{k}$.
Tome la sucesión $(x_{k,k})_{k\in\mathbb{N}}$ y note que $\mathfrak{m}(x_{k,k},x_{\ell,\ell})\leqslant\frac{2}{k}$.

Aplicamos un argumento diagonal, creamos muchas sucesiones y así construimos una matriz de sucesiones. De aquí llléndonos por la diagonal podemos agarrar esta.

La otra dirección de la implicación también es cierta.

Lema 1.6.11. *Sea $(X,\mathfrak{m})$ un espacio métrico. Entonces X es totalmente acotado si y sólo si toda sucesión $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}\subseteq X$ poseé una subsucesión de Cauchy.*

Prueba

Suponga que X no es totalmente acotado, entonecs existe $\varepsilon>0$ tal que X no se puede cubrir con una cantidad finita de bolas con radio ε. Tome $y_1\in X$, entonces $X\subsetneq B(y_1,\varepsilon)$. Sea $y_2\in X\backslash B(y_1,\varepsilon)$. Como $X\subsetneq B(y_1,\varepsilon)\cup B(y_2,\varepsilon)$. En general tome
$$y_k\in X\backslash\left(\cup_{j\in[k-1]}B(y_j,\varepsilon)\right)$$
Entonces $\mathfrak{m}(y_k,y_\ell)\geqslant\varepsilon$, o sea la sucesión $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ no puede tener una subsucesión de Cauchy.

Teorema 1.6.12. *Dado un espacio métrico $(X,\mathfrak{m})$. Se tiene que C es compacto si y sólo si completo y totalmente acotado.*

Compleción de un espacio

Sea $(X,\mathfrak{m})$ un espacio. Tome $(x_n)_{n\in\mathbb{N}},(y_n)_{n\in\mathbb{N}}\subseteq X$ sucesiones de Cauchy. Vea que
$$\mathfrak{m}(x_m,y_m)\leqslant\mathfrak{m}(x_m,x_n)+\mathfrak{m}(x_n,y_n)+\mathfrak{m}(y_m,y_n)$$
Y a su vez, podemos hacer lo mismo con $\mathfrak{m}(x_n,y_n)$. Entonces
$$|\mathfrak{m}(x_m,y_m)-\mathfrak{m}(x_n,y_n)|\leqslant\mathfrak{m}(x_n,x_m)+\mathfrak{m}(y_n,y_m)$$
Sabemos que dado $\varepsilon\geqslant 0$, existe n_0 tal que cuando $m,n\geqslant n_0$:
$$\mathfrak{m}(x_n,x_m)<\frac{\varepsilon}{2}$$
$$\mathfrak{m}(y_n,y_m)<\frac{\varepsilon}{2}$$
Así $(\mathfrak{m}(x_m,y_m))_{m\in\mathbb{N}}$ es una sucesión de Cauchy.

Definimos
$$\mathfrak{m}^{\#}((x_n)_{n\in\mathbb{N}},(y_n)_{n\in\mathbb{N}})=\lim_{m\to\infty}\mathfrak{m}(x_m,y_m)$$
Sea $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de Cauchy, como $\mathfrak{m}(x_m,y_m)\leqslant\mathfrak{m}(x_m,z_m)+\mathfrak{m}(z_m,y_m)$ al tomar limites se tiene que
$$\mathfrak{m}^{\#}((x_n)_{n\in\mathbb{N}},(y_n)_{n\in\mathbb{N}})\leqslant\mathfrak{m}^{\#}((x_n)_{n\in\mathbb{N}},(z_n)_{n\in\mathbb{N}})+\mathfrak{m}^{\#}((z_n)_{n\in\mathbb{N}},(y_n)_{n\in\mathbb{N}})$$
Esto nos dice que $\mathfrak{m}^{\#}$ es una semimétrica ya que no cumple definición positiva.

1.7. Día 7— 10-4-18

Retomamos de la clase pasada las sucesiones. Vamos a definir clases de equivalencia para tratar bien la métrica.

Diremos que $(x_n)_{n\in\mathbb{N}},(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ están relacionadas si
$$\mathfrak{m}^{\#}((x_n)_{n\in\mathbb{N}},(y_n)_{n\in\mathbb{N}})=\lim_{m\to\infty}\mathfrak{m}(x_m,y_m)=0$$
Es evidente que esta relación es de equivalencia.

Ejercicio 1.7.1. Verificar que la relación anterior en efecto es de equivalencia.

La relación es reflexiva por definición de la métrica.
$$\lim_{m\to\infty}\mathfrak{m}(x_m,x_m)=0$$
Es simétrica pues la métrica también cumple simetría. El límite no cambia nada.
$$\lim_{m\to\infty}\mathfrak{m}(x_m,y_m)=0\Rightarrow\lim_{m\to\infty}\mathfrak{m}(y_m,x_m)=0$$
Ahora suponga que
$$\lim_{m\to\infty}\mathfrak{m}(x_m,y_m)=0=\lim_{m\to\infty}\mathfrak{m}(y_m,z_m)$$
entonces vea que por desigualdad triangular tenemos que
$$\lim_{m\to\infty}\mathfrak{m}(x_m,z_m)\leqslant\lim_{m\to\infty}\mathfrak{m}(x_m,y_m)+\lim_{m\to\infty}\mathfrak{m}(y_m,z_m)$$
Como ambos límites son cero, se sigue que la relación es transitiva.

Consideramos un nuevo espacio, si $\mathcal{R}$ es la relación anterior definimos:
$$X^{\#}=\{(x_n)_{n\in\mathbb{N}}\subseteq X : (x_n)\text{ es de Cauchy}\}/\mathcal{R}$$

Tome $\mathfrak{m}^{\#}:X^{\#}\times X^{\#}\to\mathbb{R}:([x],[y])\mapsto \mathfrak{m}^{\#}([x],[y])=\mathfrak{m}^{\#}((x_n)_{n\in\mathbb{N}},(y_n)_{n\in\mathbb{N}})$. Necesitamos verificar que $\mathfrak{m}^{\#}$ está bien definida.

Prueba

Sean $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}\mathcal{R}(x'_n)_{n\in\mathbb{N}}$ y $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}\mathcal{R}(y'_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Como

$$\lim_{m\to\infty}\mathfrak{m}(x_m,y_m)=\mathfrak{m}^{\#}((x_n)_{n\in\mathbb{N}},(y_n)_{n\in\mathbb{N}})$$

Entonces tenemos que probar

$$\lim_{m\to\infty}\mathfrak{m}(x_m,y_m)=\lim_{m\to\infty}\mathfrak{m}(x'_m,y'_m)$$

Pero observe que

$$\begin{aligned}\mathfrak{m}(x_m,y_m)&\leqslant\mathfrak{m}(x_m,x'_m)+\mathfrak{m}(x'_m,y_m)\\&\leqslant\mathfrak{m}(x_m,x'_m)+\mathfrak{m}(x'_m,y'_m)+\mathfrak{m}(y_m,y'_m)\end{aligned}$$

Por lo tanto $\lim_{m\to\infty}\mathfrak{m}(x_m,\ y_m)\leqslant\lim_{m\to\infty}\mathfrak{m}(x'_m,\ y'_m)$ entonces por simetría se cumple lo pedido.

Ejercicio 1.7.2. Verifique que $(X^{\#},\mathfrak{m}^{\#})$ es un espacio métrico.

En efecto, tenemos que probar que $\mathfrak{m}^{\#}$ cumple ser definida positiva, simétrica y que cumple la desigualdad triangular.

Probamos primero definición positiva, vea que $\mathfrak{m}^{\#}$ siempre es positiva pues es el límite de términos positivos. Ahora vea que

$$\mathfrak{m}^{\#}([(x_n)],[(y_n)])=0\iff\lim_{m\to\infty}\mathfrak{m}(x_m,y_m)=0$$

Pero esta es la definición de la relación de equivalencia. O sea $(x_n)\mathcal{R}(y_n)$ y por tanto $[(x_n)]=[(y_n)]$.

Por definición de $\mathfrak{m}^{\#}$ tenemos la simetría, ya que $\mathfrak{m}$ es simétrica.

Ahora considere $(x_n)_{n\in\mathbb{N}},(y_n)_{n\in\mathbb{N}},(z_n)_{n\in\mathbb{N}}\subseteq X$. Queremos ver que

$$\begin{aligned}\mathfrak{m}^{\#}((x_n)_{n\in\mathbb{N}},(z_n)_{n\in\mathbb{N}})&\leqslant\mathfrak{m}^{\#}((x_n)_{n\in\mathbb{N}},(z_n)_{n\in\mathbb{N}})\\&\quad+\mathfrak{m}^{\#}((z_n)_{n\in\mathbb{N}},(y_n)_{n\in\mathbb{N}})\end{aligned}$$

Pero en efecto, para cualquier n tenemos que

$$\mathfrak{m}(x_n,z_n)\leqslant\mathfrak{m}(x_n,y_n)+\mathfrak{m}(y_n,z_n)$$

Tomando límites obtenemos el resultado.

Revisar

Vamos a ver que este nuevo espacio es completo y que además X es denso en él.

Lema 1.7.3. *Existe una inyección de X en $X^{\#}$.*

Prueba

Considere $i:X\to X^{\#}:x\mapsto[(x_n)_{n\in\mathbb{N}}]$ con $x_n=x$. Esta sucesión es de Cauchy pues es constante. La función i es inyectiva, tome $x\neq y$ elementos de X. Tenemos que

$$\begin{aligned}\mathfrak{m}(x,y)&=\lim_{m\to\infty}\mathfrak{m}(x,y)\\&=\mathfrak{m}^{\#}((x_n)_{n\in\mathbb{N}},(y_n)_{n\in\mathbb{N}})\\&=\mathfrak{m}^{\#}([(x_n)_{n\in\mathbb{N}}],[(y_n)_{n\in\mathbb{N}}])\end{aligned}$$

Por lo que $\mathfrak{m}(x,y)=\mathfrak{m}^{\#}(i(x),i(y))$

Más aún, i preserva distancias pero no es una isometría ya que no cumple sobreyectividad.

Ahora, $i(X)$ es la copia de X dentro de $X^{\#}$. Queremos ver que este conjunto es denso dentro de $X^{\#}$ o sea $\overline{i(X)}=X^{\#}$.

Prueba

Considere $\underline{y}=[(y_n)_{n\in\mathbb{N}}]$, dado $\varepsilon>0$ existe n_0 tal que $m,\ \ell\geqslant n_0$ entonces $\mathfrak{m}(y_m,y_\ell)<\varepsilon\Rightarrow\lim_{m\to\infty}\mathfrak{m}(y_m,y_\ell)\leqslant\varepsilon$. Pero esto es igual a $\mathfrak{m}^{\#}((y_n)_{n\in\mathbb{N}},(y_\ell)_{n\in\mathbb{N}})=\mathfrak{m}^{\#}(\underline{y},i(y_\ell))$. Es decir, cuando $\ell\geqslant n_0$ se cumple $\mathfrak{m}^{\#}(\underline{y},i(y_\ell))\leqslant\varepsilon$ y por lo tanto $i(X)$ es denso en $X^{\#}$.

Queremos ver que $X^{\#}$ es un espacio completo, es decir queremos agarrar una sucesión aquí o sea una sucesión de sucesiones. Queremos encontrar una nueva sucesión para la cual la nuestra original converge. Primero aproximamos toda sucesión con elementos de X, esto nos dará una nueva sucesión y esta debe converger a la que construimos.

Prueba

Sea $(\underline{y}^n)_{n\in\mathbb{N}}\subseteq X^{\#}$, tome $y_n\in X$ tal que $\mathfrak{m}^{\#}(\underline{y}^n,i(y_n))<\frac{1}{n}$. Ahora vea que

$$\begin{aligned}\mathfrak{m}(y_m,y_n)&=\mathfrak{m}^{\#}(i(y_m),i(y_n))\\&\leqslant\mathfrak{m}^{\#}(i(y_m),\underline{y}^m)+\mathfrak{m}^{\#}(\underline{y}^m,\underline{y}^n)\\&\quad+\mathfrak{m}^{\#}(\underline{y}^n,i(y_n))\\&\leqslant\frac{1}{n}+\frac{1}{m}+\mathfrak{m}^{\#}(\underline{y}^m,\underline{y}^n)\end{aligned}$$

Por lo que si $(\underline{y}^n)_{n\in\mathbb{N}}$ es de Cauchy en $X^{\#}$ entonces $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es Cauchy en X. Finalmente, vamos a probar que $(\underline{y}^n)_{n\in\mathbb{N}}$ conver a $[(y_n)_{n\in\mathbb{N}}]=\underline{y}$. Es decir que $\lim_{n\to\infty}(\underline{y}^n,\underline{y})=0$. Vea que

$$\begin{aligned}\mathfrak{m}^{\#}(\underline{y}^n,\underline{y}) &\leqslant \mathfrak{m}^{\#}(\underline{y}^n,i(y_n))+\mathfrak{m}^{\#}(i(y_n),\underline{y})\\ &\leqslant \frac{1}{n}+\mathfrak{m}^{\#}(i(y_n),\underline{y})\end{aligned}$$

Por construcción se cumple que $\mathfrak{m}^{\#}(i(y_n),\underline{y})\to 0$ cuando $n\to\infty$.

Ejercicio 1.7.4. Refine el último detalle de la prueba anterior.

Lo que acabamos de probar es lo siguiente:

Teorema 1.7.5. *Dado un espacio métrico $(X,\mathfrak{m})$, existe un espacio métrico $(X^{\#},\mathfrak{m}^{\#})$ completo y una función inyectiva $i\colon X\to X^{\#}$ tal que $\mathfrak{m}(x,y)=\mathfrak{m}^{\#}(i(x),i(y))$ y se cumple que $i(X)$ es denso en $X^{\#}$.*

Ahora considere $(Y,\mathfrak{m}')$ completo y $j\colon X\to Y$ que satisface $\mathfrak{m}(x,y)=\mathfrak{m}'(j(x),j(y))$. Vamos a construir una función inyectiva $\theta\colon X^{\#}\to Y$ que preserva distancias. En cierto sentido, $X^{\#}$ es el espacio completo más pequeño que contiene a X.

Lo que haremos es lo siguiente, primero vamos a definir una función en todo $X^{\#}$ para ello la definimos primero en $i(X)$. Una vez hecho esto, como $i(X)$ es denso podemos extender la definición mediante límites. Lo que queda el límite, es lo que vale.

Prueba

Dado $x\in X$, definimos $\theta(i(x))=j(x)$. Ya conocemos la función j, pero por qué se preservan las distancias con θ? Note que

$$\begin{aligned}\mathfrak{m}'(\theta(i(x)),\theta(i(y)))&=\mathfrak{m}'(j(x),j(y))\\ &=\mathfrak{m}(x,y)\\ &=\mathfrak{m}^{\#}(i(x),i(y))\end{aligned}$$

Es decir $\theta : i(X)\to Y : x\mapsto j(x)$ preserva distancias y por tanto inyectiva.

Dada $\underline{y}$, existe una sucesión $(i(y_n))_{n\in\mathbb{N}}$ tal que

$$\lim_{n\to\infty}\mathfrak{m}^{\#}(\underline{y},i(y_n))=0$$

Tome $\theta(\underline{y})=\lim_{n\to\infty}(\theta(i(y_n)))=\lim_{n\to\infty}j(y_n)$. Como j es continua, para que el límite exista basta que y_n sea convergente. Entonces si probamos que $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tenemos el resultado.

Note que $\mathfrak{m}'(j(y_n),j(y_m))=\mathfrak{m}^{\#}(i(y_n),i(y_m))=\mathfrak{m}(y_n,\, y_m)$. Como $(i(y_n))_{n\in\mathbb{N}}$ es de Cauchy, tenemos que $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ y $(j(y_n))_{n\in\mathbb{N}}$ son de Cauchy.

Por lo tanto $\lim_{n\to\infty}j(y_n)$ existe.

Ejercicio 1.7.6. Muestre que θ está bien definida y que preserva distancias.

Conexidad

Definición 1.7.7. Un espacio $(X,\mathfrak{m})$ es disconexo si existen A,B abiertos no vacíos tal que $X=A\cup B$ con $A\cap B=\varnothing$. El espacio $(X,\mathfrak{m})$ es conexo si no es disconexo.

Insertar FIG 7.1

Entonces ser conexo y tener $X=A\cup B$ con A,B abiertos entonces A es vacío o todo el espacio y B vice-versa.

Note además, si $(X,\mathfrak{m})$ es disconexo con $X=A\cup B$. Entonces A es abierto y por lo tanto $X\backslash A$ es cerrado. Pero por construcción $B=X\backslash A$ y por tanto B es cerrado y abierto. Análogamente A es abierto y cerrado.

Lema 1.7.8. *Un espacio $(X,\mathfrak{m})$ es conexo si y sólo si los únicos conjuntos abiertos y cerrados son X y $\varnothing$.*

Definición 1.7.9. Decimos que $E\subseteq X$ es conexo si $(E,\mathfrak{m}_E)\leqslant(X,\mathfrak{m})$ es un espacio conexo.

De forma equivalente, si E es disconexo $E=A'\cup B'$ disjuntos y abiertos en $(E,\mathfrak{m}_E)$ no vacíos. Es decir, existen $A,B\subseteq X$ abiertos tales que $E=(E\cap A)\cup(E\cap B)$ con $A\cap E\neq\varnothing$ y $E\cap B\neq\varnothing$. Luego si E es conexo, A,B abiertos disjuntos con $E\subseteq A\cup B$, entonces $E\subseteq A$ ó $E\subseteq B$.

Ejemplo 1.7.10. $E=\{x\}$, $x\in X$ es conexo.

Ejemplo 1.7.11. $I=]a,b[\subseteq\mathbb{R}$ es conexo.

Sean A,B abiertos disjuntos no vacíos de manera que podamos ver $I=(I\cap A)\cup(I\cap B)$. Tome $(s,t)\in(I\cap A)\times(I\cap B)$. Por definición de intervalo $[s,t]\subseteq I$. Insertar FIG 7.2

Sea $u=\sup(A\cap[s,t])$ y tenemos que $u\in I$. Entonces está en A ó en B.

1. Si $u\in A$ entonces existe $\delta>0$ tal que $]u-\delta,u+\delta[\subseteq A$. Vea que $u\neq t$, u está en A y $t\in B$. Luego $u<t$ y por tanto existe $\delta_1>0$ tal que $[u,u+\delta_1]\subseteq A\cap[s,t]$. Esto contradice

que u es el sup.

2. Si $u \in B$, entoces $s < u$. Como B es abierto existe $\delta_2 > 0$ tal que $]u-\delta_2, u+\delta_2[\subseteq B$. Entonces $]u-\delta_2, u] \subseteq [s,t]$. Finalmente $w \in A \cap [s,t]$ tal que $u-\delta_2 < w \leqslant u$. Esto es una contradicción pues hay un punto en la intersección.

Lema 1.7.12. *Sean $(X,\mathfrak{m}),(Y,\mathfrak{m}')$ espacios métricos y $f: X \to Y$ continua. Si $E \subseteq X$ es conexo entonces $f(E)$ es conexo.*

Prueba

Sean A,B abiertos disjuntos tales que
$$f(E) = (f(E) \cap A) \cup (f(E) \cap B)$$
$$\Rightarrow E = (f^{-1}(A) \cap E) \cup (f^{-1}(B) \cap E)$$
Pero si E es conexo, uno de los dos debe ser vacío y otro todo el espacio. Entonces $E \subseteq f^{-1}(A)$ ó $E \subseteq f^{-1}(B)$ lo que implica que $f(E) \subseteq A$ ó $f(E) \subseteq B$. Entonces uno de los pedazos es vacío y el otro es $f(E)$. Por lo tanto $f(E)$ es conexo.

Ejemplo 1.7.13. $\mathbb{R}^d$ es conexo.

Sean $\mathbf{x},\mathbf{y} \in \mathbb{R}^d$, tome $f: [0,1] \to \mathbb{R}^d, t \mapsto (1-t)\mathbf{x} + t\mathbf{y}$. Esta función es continua. Entonces diremos que el segmento de recta entre $\mathbf{x},\mathbf{y}$ es $f([0,1]) = \{\mathbf{z} \in \mathbb{R}^d : \mathbf{z} = (1-t)\mathbf{x} + t\mathbf{y}, t \in [0,1]\} = [\mathbf{x},\mathbf{y}]$.
Ahora si $\mathbb{R}^d$ fuese disconexo, existen A y B abiertos disjuntos no vacíos tales que $\mathbb{R}^d = A \cup B$. Tome $(\mathbf{x},\mathbf{y}) \in A \times B$, entonces $[\mathbf{x},\mathbf{y}] = ([\mathbf{x},\mathbf{y}] \cap A) \cup ([\mathbf{x},\mathbf{y}] \cap B)$. Esto es una contradicción pues el segmento de recta $[\mathbf{x},\mathbf{y}]$ es conexo por el lema anterior.

Lema 1.7.14. *Sea $(U_\alpha)_{\alpha \in \mathcal{A}} \subseteq \mathcal{P}(X)$ una colección de conjuntos conexos. Si $\cap_{\alpha \in \mathcal{A}} U_\alpha \neq \varnothing$, entonces $U = \cup_{\alpha \in \mathcal{A}} U_\alpha$ es conexo.*

Prueba

Sea $x \in \cap_{\alpha \in \mathcal{A}} U_\alpha$. Tome A,B abiertos tales que $U = (U \cap A) \cup (U \cap B)$. Sin perdida de generalidad $x \in U \cap A$, o sea $x \in A$. Vea que $U \cap B \neq \varnothing \iff (\cup_{\alpha \in \mathcal{A}} U_\alpha) \cap B \neq \varnothing$. Entonces existe β_0 tal que $U_{\beta_0} \cap B \neq \varnothing$. Además $x \in U_{\beta_0} \cap A$ pues x está en la intersección. Por lo tanto $E_{\beta_0} = (E_{\beta_0} \cap A) \cup (E_{\beta_0} \cap b)$. Esto es una contradicción por qué?

Definición 1.7.15. Una curva o camino entre $x,y \in X$ es una función $f: [0,1] \to X$ continua tal que $(f(0), f(1)) = (x,y)$. Un espacio es conexo por caminos o arcoconexo si dados dos puntos $x,y \in X$, existe un camino entre x,y.

INSERTAR FIG 7.3

Lema 1.7.16. *Todo espacio conexo por caminos es conexo.*

Prueba

Sea X un espacio conexo por caminos pero asuma a manera de contradicción que X no es conexo. Así existen $A,B \subseteq X$ abiertos, disjuntos, no vacíos de manera que $X = A \cup B$. Tome $(a,b) \in A \times B$. Como X es conexo por caminos, existe $\gamma: [0,1] \to X$ continua tal que $(\gamma(0),\gamma(1)) = (a,b)$. Note que $\gamma^{-1}(A)$ y $\gamma^{-1}(B)$ son disjuntos de $[0,1]$ y su unión es $[0,1]$ por definición de función. Como γ es continua, son abiertos y como $(0,1) \in \gamma^{-1}(A) \times \gamma^{-1}(B)$.
Así hemos encontrado una desconexión de $[0,1]$ en abiertos, disjuntos, no vacíos. Esto es una contradicción pues este conjunto es conexo y por lo tanto nuestra suposición de que X no era conexo está errada. Por lo tanto X es conexo.

Ejercicio 1.7.17. Si $E \subseteq \mathbb{R}^d$ y E es conexo y abierto, entonces E es conexo por caminos.

Sea $a \in E$ y considere $A \subseteq E$:
$$A = \{x \in E : \exists \gamma \in \mathcal{C}([0,1],X), (\gamma(0),\gamma(1)) = (x,a)\}$$
el subconjunto de E de los puntos que pueden ser unidos a a por un camino.
Tome $x \in A$, esto significa que $B(x,r) \subseteq E$. Observe que si $y \in B(x,r)$, existe γ' un camino en linea recta de x a y en virtud de que la bola es convexa. Además como $x \in A$ tenemos que hay un camino de a hacia x, entonces $\gamma\gamma'$ (abuso?) es un camino entre y y a. O sea $y \in A$ y por tanto $B(x,r) \subseteq A$ pues y era arbitrario. Por lo tanto A es abierto.
De manera análoga, defina $B = E \backslash A$, el conjunto de puntos que no se pueden unir a a por un camino, y vea que B es abierto. Para $x \in B$, conside-

re $B(x,r)\subseteq E$. Si existe $y\in B(x,r)$ tal que hay un camino de y a a, podríamos extender el camino hacia x. Por lo tanto $B(x,r)\subseteq B$ y así B es abierto. Claramente $A\cap B=\varnothing$ y $E=A\cup B$, también $a\in A$ lo que nos dice que $A\neq\varnothing$. Cómo E es conexo se sigue que B debe ser vacío y por tanto $E=A$ y así E es conexo por caminos.

INSERTAR FIG7.4

1.8. Día 8— 12-4-18

Segunda sesión de ejercicios

Ejercicio 1.8.1 (2.2.11.22 Santiago Cambronero)**.** Sea E un espacio métrico separable y $(U_i)_{i\in I}$ familia de abiertos no vacíos, disjuntos por parejas. Mostrar que I es contable

Como E es separable, existe $D\subseteq E$ tal que D es contable. Además
D es denso y contable y por tanto para cualquier $H\subseteq E$ tal que H es abierto tenemos $D\cap H\neq\varnothing$. En particular para cada U_i tenemos $D\cap U_i\neq\varnothing$. O sea, existe $x_i\in D\cap U_i$ tal que $x_i\notin U_j$ para $j\neq i$. Considere $f\colon I\to D\colon i\mapsto x_i$, f es inyectiva por construcción. Entonces para cada elemento de I hay uno en D y por tanto I es contable.

Ejercicio 1.8.2 (2.3.4.19 Santiago Cambronero)**.** Sea $f,g\colon E\to E'$ continuas y $f(x)=g(x)$ para $x\in D$ donde D es denso en E. Mostrar que $f(x)=g(x)$ para $x\in E$.

Sea $x\in E$ tal que $x_n\to x$ donde $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}\subseteq D$. Entonces para cualquier x_n tenemos $f(x_n)=g(x_n)$. Al tomar límites tenemos que $f(x)=g(x)$ ya que f,g son continuas.

Vea que $D\subseteq\{x\in E\colon f(x)=g(x)\}$ entonces $\overline{D}\subseteq\overline{\{x\in E\colon f(x)=g(x)\}}$. Pero este conjunto es cerrado y $\overline{D}=E$. Entonces $E\subseteq\{x\in E\colon f(x)=g(x)\}$. Por lo tanto f y g coinciden en E.

Ejercicio 1.8.3. Sea E' completo y $f\colon D\to E'$ uniformemente continua en D con $\overline{D}=E$. Demuestre que existe una única extensión de f hacia E. Muestre además que es uniformemente continua.

Sea $x\in E$ y $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}\subseteq D$ tal que $x_n\to x$. Entonces tenemos $f(x)=\lim_{n\to\infty}f(x_n)$. Como $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es una sucesión convergente, es de Cauchy. Ahora f uniformemente continua en D implica que para $x,y\in D$
$\forall\varepsilon>0\exists\delta>0\colon \mathfrak{m}(x,y)<\delta\Rightarrow\mathfrak{m}_{E'}(f(x),f(y))<\varepsilon$
Entonces $\exists N$ tal que cuando $m,n>N$ entonces $\mathfrak{m}(x_n,x_m)<\delta$ entonces $\mathfrak{m}'_E(f(x_n),f(x_m))<\varepsilon$.
Terminar de escribir viendo las fotos

Ejercicio 1.8.4. Sean $A,B\subseteq E$ disjuntos. Si A es cerrado y B compacto entonces $\mathfrak{m}(A,B)>0$. Muestre que el resultado es falso si sólo se pide que ambos sean cerrados.

Suponga que $\mathfrak{m}(A,\ B)=0$ entonces para todo $n\in\mathbb{N}$ existen $x_n\in B$ y $y_n\in A$ tales que $\mathfrak{m}(x_n,y_n)<\frac{1}{n}$. Considere $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}\subseteq B\Rightarrow\exists(x_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}\subseteq(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ que converge a $x\in B$. Como $\mathfrak{m}(x,y_{n_k})\leqslant\mathfrak{m}(x,x_{n_k})+\mathfrak{m}(x_{n_k},y_{n_k})<\tilde{\varepsilon}$. El primer término es pequeño pues la sucesión converge y el segundo por construcción. Entonces $y_{n_k}\to x$ como A es cerrado entonces $x\in A$ pero esto es una contradicción pues A y B son disjuntos.

1.9. Día 9— 17-4-18

Ejemplo 1.9.1. Considere el conjunto $D=[-1,0]\times\{0\}\cup\left\{\left(x,\sin\left(\frac{1}{x}\right)\right)\colon x\in[0,1]\right\}$. Veamos que D es conexo.

Asuma que $D=A\cup B$ con A,B abiertos disjuntos. Vamos a probar que alguno contiene a $(0,0)$ y por tanto contiene toda la curva.
Asuma que $(0,\ 0)\in A$. A partir de aquí $D_1=[-1,0]\times\{0\}$ lo podemos ver como $\{(-t,0)\colon t\in[0,1]\}$. Esto es la imagen de $[0,1]$ bajo $\varphi(t)=(-t,0)$, una parametrización continua. Como $D_1\subseteq A\cup B$ y D_1 es conexo, entonces $D_1\subseteq A$. Además D_1 es abierto y puedo meter una bola en él.
Entonces vamos a mostrar que existe un n_0 tal que $\left(\frac{1}{\pi n},\sin(\pi n)\right)=\left(\frac{1}{\pi n},0\right)\in A$ cuando $n\geqslant n_0$. Esto se sigue de que existe $r>0$ tal que $B((0,0),r)\subseteq A$ entonces tiene un punto de acumulación.
Por último, vemos que A contiene a $\left\{\left(x,\sin\left(\frac{1}{x}\right)\right)\colon x\in[0,1]\right\}$.

Ejercicio 1.9.2. Verifique el último paso del ejemplo anterior.

Ejercicio 1.9.3. Muestre que no existe $\varphi\colon [0,1]\to\mathbb{R}$ continua tal que $\varphi(0)=(0,0)$ y $\varphi(1)=(\frac{1}{\pi},0)$.

Leer Munkres 178

Categorías de Baire

Definición 1.9.4. Dado un espacio $(X,\mathfrak{m})$, decimos que $A\subseteq X$ es denso en ninguna parte si $X\backslash\overline{A}$ es denso en X.

Lo que esto significa es que $X\backslash\overline{A}\cap B(x,r)\neq\varnothing$. Esto es equivalente a $X\backslash\overline{A}\cap B(x,r)\neq\varnothing$ para $x\in\overline{A}$. A la vez podemos ver esto como $(\overline{A})^o=\varnothing$.

Esto es una forma de decir que el conjunto es muy pequeño, en el sentido que no le podemos meter bolas adentro. Qué conjuntos se pueden construir a partir de conjuntos pequeños? Por ejemplo $\mathbb{Q}$ está hecho de conjuntos pequeños, pero uniéndolos obtenemos un conjunto denso.

Podemos construir abiertos con conjuntos pequeños? La respuesta nos la da Baire, no es posible construir abiertos a partir de conjuntos pequeños. Pero sólo en espacios completos.

Definición 1.9.5. Un conjunto A es de primera categoría si es unión contable de conjuntos densos en ninguna parte. Cualquier conjunto que no sea de primera catergoría, es de segunda categoría.

Ahora, en un espacio completo todos los espacios son de segunda categoria. Note que sí es posible escribir conjuntos abiertos como uniones no contables de conjuntos de primera categoría, pues un conjunto es unión de los conjuntos unitarios que contienen a sus elementos.

Teorema 1.9.6 (Categorías de Baire)**.** *Sea $(X,\mathfrak{m})$ completo, si $D\subseteq X$ es abierto, entonces D es de segunda categoría.*

Precisamos un lema más antes de proseguir con la prueba del teorema.

Lema 1.9.7. *Sea $(X,\mathfrak{m})$ completo y $G_n\subseteq X$ abierto y denso para $n\geqslant 1$. Entonces $\cap_{n\geqslant 1}G_n$ es denso.*

Prueba

Sea A un abierto, entonces existe $x_1\in A\cap G_1$ pues G_1 es abierto. Como A,G_1 son abiertos, existe $r_1>0$ tal que

$$B_1=B(x_1,r_1)\subseteq A\cap G_1$$

Al ser B_1 abiertos entonces podemos repetir el mismo proceso pero con G_2. Así existen $x_2\in X, r_2>0$ tal que $B(x_2,r_2)\subseteq B_1\cap G_2$. Sin perdida de generalidad podemos tomar $r_2<\frac{r_1}{2}$. Montando esta sucesión podemos garantizar que los puntos se van acercando más. Estamos generando una sucesión de Cauchy y como el espacio es completo, va a tener un límite. Observe que

$$B_2=B(x_2,\frac{r_2}{2})\subseteq\overline{B_2}\subseteq A\cap G_1\cap G_2$$

Pero este procedimiento nos lleva a la cantidad finita, la completitud nos lleva a coger todos. La clausura es para asegurar que los límites caen donde deben de caer.
Iteramos este proceso y así existen $x_n\in X$, $r_n>0$ tales que

$$\begin{aligned} B_n&=B(x_n,r_n) \quad \text{y}\\ B_n&\subseteq\overline{B_n}\subseteq B_{n-1}\cap G_n\\ &\subseteq A\cap G_1\cap\cdots\cap G_n \end{aligned}$$

Note que al agarrar el x_n, él está en B_n que esta contenido en todos los B_k's anteriores. Así $x_n\in B_i$ para $i\in[n]$. En otras palabras, si $m<n$ entonces $x_m,x_n\in B(x_m,r_m)$ y así $\mathfrak{m}(x_m,x_n)<r_m\leqslant\frac{r_1}{2^m}$. Entonces $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es de Cauchy, sea $x=\lim_{n\to\infty}x_n$. Vea que

$$\begin{aligned} &\{x_n\colon n\geqslant m\}\subseteq B_m\Rightarrow B_m\\ &\Rightarrow x\in\overline{\{x_n\colon n\geqslant m\}}\subseteq\overline{B_m}\subseteq B_{m-1}\subseteq G_{m-1}\cap A \end{aligned}$$

De aquí retomamos el teorema 1.9.6.

Prueba

Sean A_n conjuntos densos en ninguna parte y tome $G_n=X\backslash\overline{A_n}$. Vea que G_n es abierto y denso por definición. Entonces

$$\begin{aligned} G\cap\bigcap_{n\in\mathbb{N}}G_n\neq\varnothing&\Rightarrow G\cap\bigcap_{n\in\mathbb{N}}(X\backslash\overline{A_n})\neq\varnothing\\ &=G\cap X\backslash(\bigcup_{n\in\mathbb{N}}\overline{A_n}) \end{aligned}$$

Arzelá-Ascoli

Definición 1.9.8. Dada una familia $\mathcal{F}=(f_\alpha)_{\alpha\in\mathcal{A}}$ de funciones, $(X,\mathfrak{m}),(Y,\mathfrak{m}')$ espacios métricos y $f_\alpha\colon X\to Y$, se dice ser equicontinua en x_0 si para todo $\varepsilon>0$ existe $\delta>0$ tal que $\mathfrak{m}(x,x_0)<\delta\Rightarrow\mathfrak{m}'(f_\alpha(x),f_\alpha(x_0))<\varepsilon$ para $\alpha\in\mathcal{A}$.

Una familia es equicontinua en X si es equicontinua en todo punto de X.

Observe que el mismo δ sirve para todas las funciones.

Lema 1.9.9. *Sea $(X,\mathfrak{m})$ completo y $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión de funciones equicontinuas. Si $D\subseteq X$ es denso y*

$\lim_{n\to\infty} f_n(d)$ *existe para cualquier* $d \in D$*, entonces* f_n *converge en* X *a una función continua.*

Para qué sirve completitud? Para probar el paso intermedio de que la sucesión es Cauchy. Por lo tanto va a existir el límite.

Prueba

Basta probar que $(f_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$ es de Cauchy para $x \in X$. Ahora dado $\varepsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que para todo $n \geqslant 1$ se cumple

$$\mathfrak{m}(x,x_0) < \delta \Rightarrow \mathfrak{m}'(f_n(x),f_n(x_0))$$

Queremos probar que $\mathfrak{m}(f_n(x),f_m(x)) < \varepsilon$ para $x \in X$. Nosotros sabemos esto pero para $d \in D$ el denso. Entonces la densidad nos permite meter alguien en la bola de x_0.

Tome $d \in D \cap B(x_0,\delta)$, sabemos que $(f_n(d))_{n\in\mathbb{N}}$ es de Cauchy. Es decir, existe N tal que cuando $m, n \geqslant N$ tenemos que $\mathfrak{m}'(f_n(d), f_m(d)) < \varepsilon$. Luego cuando $m,n \geqslant N$

$$\begin{aligned}\mathfrak{m}'(f_n(x_0),f_m(x_0)) \leqslant &\ \mathfrak{m}'(f_n(x_0),f_n(d)) \\ &+ \mathfrak{m}'(f_n(d),f_m(d)) \\ &+ \mathfrak{m}'(f_m(x_0),f_m(d)) < 3\varepsilon\end{aligned}$$

Sea $f(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x)$ entonces $\lim_{n\to\infty} \mathfrak{m}'(f_n(x), f_n(x_0)) = \mathfrak{m}'(f(x), f(x_0))$. Tomando limites obtenemos el resultado.

Note que no es necesario que todo el espacio sea completo no es necesario, sino que $\overline{(f_n(x))_{n\in\mathbb{N}}}$ sea completo. Por ejemplo si $\overline{(f_n(x))_{n\in\mathbb{N}}}$ es compacto. En $\mathbb{R}$ basta que sea acotada, aquí una sucesión equicontinua y acotada cumple todo lo anterior.

En compactos la equicontinuidad nos garantiza que si tenemos convergencia puntual, tenemos convergencia uniforme.

Lema 1.9.10. *Sea* $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *equicontinua. Si* $(f_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$ *converge para* $x \in K$ *compacto, entonces* f_n *converge uniformemente en* K*.*

Prueba

Sean $x_0 \in K$ y $\varepsilon > 0$. Entonces existe $\delta > 0$ tal que por equicontinuidad

$$\mathfrak{m}(x,x_0) < \delta \Rightarrow \mathfrak{m}'(f_n(x),f_n(x_0)) < \varepsilon$$

Reescribimos esto con bolas

$$x \in B(x_0,\delta,\mathfrak{m}) \Rightarrow f(x) \in B(f(x_0),\varepsilon,\mathfrak{m}')$$

Queremos probar que la distancia entre $f_n(x_0)$ y $f(x_0)$ es menor que ε arbitrario. Hay convergencia puntual pero $n \geqslant N(x_0)$. Como hay puntual N varía, la equicontinuidad entra haciendo que la distancia entre $f_n(x_0)$ y $f(x_0)$ sea menor que un montón de cosas. Dos están acotadas por equicontinuidad y una por convergencia puntual. Ahora tenemos un problema pues sólo se puede dentro de las bolas. Reducimos a un número finito de bolas gracias a compacidad y esto nos da el resultado. Note que $\cup_{x_0\in K} B(x_0,\delta)$ es un cubrimiento por abiertos de K. Entoces existen $(x_k)_{k\in[n]}$ con $K \subseteq \cup_{k\in[n]} B(x_k,\delta_{x_k})$. Además existe N tal que cuando $n \geqslant N$ y $k \in [n]$:

$$\mathfrak{m}'(f_n(x_k),f(x_k)) < \varepsilon$$

Si $x \in K$, entonces existe k_0 tal que $x \in B(x_{k_0},\delta_{x_{k_0}})$. Luego tenemos

$$\begin{aligned}\mathfrak{m}'(f_n(x),f(x)) \leqslant &\ \mathfrak{m}'(f_n(x),f_n(x_{k_0})) \\ &+ \mathfrak{m}'(f_n(x_0),f(x_{k_0})) \\ &+ \mathfrak{m}'(f(x_{k_0}),f(x)) < 3\varepsilon\end{aligned}$$

Pues $\mathfrak{m}'(f(x_{k_0}), f(x)) = \lim_{n\to\infty} \mathfrak{m}'(f_n(x_{k_0}),f_n(x)) \leqslant \varepsilon$.

Teorema 1.9.11 (Arzelá-Ascoli)**.** *Sea* $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *equicontinua con* X *separable. Suponga que para cada* $x \in X$ *se cumple que* $\overline{(f_n)_{n\in\mathbb{N}}}$ *es compacto. Entonces existe* $(f_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ *subsucesión convergente en* X *a una función continua* f *y la convergencia es uniforme en compactos.*

Prueba

Sea $D = (x_i)_{i\in\mathbb{N}}$ denso en X, que existe por separabilidad. Basta probar que existe f_{n_k} tal que $f_{n_k}(x_i)$ converge para todo $i \geqslant 1$. Sabemos que $\overline{(f_n(x_1))_{n\in\mathbb{N}}}$ es compacto, entonces existe una subsucesión $f_{1,n}$ de f_n tal que $f_{1,n}(x_1)$ es convergente. De igual forma $(f_{1,n}(x_2))_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \overline{(f_n(x_2))_{n\in\mathbb{N}}}$, entonces existe una subsucesión $f_{2,n}$ tal que $(f_{2,n}(x_2))_{n\in\mathbb{N}}$ y $(f_{2,n}(x_2))_{n\in\mathbb{N}}$. Al iterar este proceso existe una sucesucesión $f_{k+1,n}$ de $f_{k,n}$ tal que $f_{k+1,n}(x_{k+m}), \cdots, f_{k+1,n}(x_1)$ convergen. Ahora tome $f_{n,n}$ que es subsucesión de $(f_{k,n})_{k\in\mathbb{N}}$ siempre que $n = k$. Entonces $f_{n,m}(x_\ell)$ converge si $\ell, n \geqslant k$. Usando los dos lemas anteriores se sigue el resultado.

Corolario 1.9.12. *Sean* $f_n \colon X \to \mathbb{R}$ *equicontinuas tal que* X *es separable. Si* $(f_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$ *es acotada para todo* x *entonces existe* $f_{n,k}$ *que converge en el sentido del teorema anterior.*

Ejemplo 1.9.13. Sea $K\subseteq\mathbb{R}^d$ compacto y $\mathcal{C}(K,\mathbb{R})=\{f\colon K\to\mathbb{R}\colon f \quad \text{es continua}\}$. Entonces $(\mathcal{C}(K,\mathbb{R}),\mathfrak{m}_\infty)$ es un espacio métrico.

Lema 1.9.14. *Sea $F\subseteq\mathcal{C}(K,\mathbb{R})$, entonces F es compacto si y sólo si F es cerrado, acotado y equicontinuo.*

Prueba

($\Rightarrow$) Hay que verificar que $(f_\alpha)_{\alpha\in\mathcal{A}}$ es equicontinua. Por contradicción asuma que existe $\varepsilon>0$ y $\mathbf{x}_0\in K$ tal que existen $\mathbf{y}_n,\alpha_n$ con
$$\|\mathbf{y}_n-\mathbf{x}_0\|<\frac{1}{n}\wedge|f_{\alpha_n}(\mathbf{y}_n)-f_{\alpha_n}(\mathbf{x}_0|\geqslant\varepsilon$$
Como $(f_{\alpha_n})_{n\in\mathbb{N}}\subseteq F$, entonces existe n_k tal que $f_{\alpha_{n_k}}\xrightarrow[k\to\infty]{}f$ en norma infinito. Es decir
$$\sup_{\mathbf{x}\in K}|f_{\alpha_{n_k}}(\mathbf{x})-f(\mathbf{x})|\xrightarrow[k\to\infty]{}0$$
Pero $f_{\alpha_{n_k}}(x_0)\xrightarrow[k\to\infty]{}f(x_0)$ y $f_{\alpha_{n_k}}(y_{n_k})\xrightarrow[k\to\infty]{}f(x_0)$. Esto es una contradicción. por qué?

($\Leftarrow$) Sea $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}\subseteq F$. Como F es acotado existe $M>0$ tal que $\|f\|_\infty\leqslant M$ para $f\in F$. Entonces $\sup_{\mathbf{x}\in K}|f_n(\mathbf{x})|\leqslant M$. Esto inmediatamente nos dice que $(f_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$ es acotado.

Veamos que las bolas cerradas no son compactas. Considere $\overline{B(0,1)}=\{f\in\mathcal{C}(K,\mathbb{R})\colon\sup_{x\in K}|f(x)|\leqslant1\}$. Sea $f_n(x)=0$ cuando $0\leqslant x\leqslant1-\frac{1}{n}$ y $f(x)=nx-n-1$ si $1-\frac{1}{n}\leqslant x\leqslant1$. Entonces $\sup_{x\in[0,1]}|f_n(x)|=1$. Pero
$$|f_n(x)-f_n(1)|=|nx-n+1-1|=n|x-1|$$
Siempre que $1-\frac{1}{n}\leqslant x\leqslant1$. Por lo tanto
$$\begin{aligned}|f_n(x)-f_n(1)|<\varepsilon&\iff|x-1|\leqslant\varepsilon\\&\iff|x-1|\leqslant\frac{\varepsilon}{n}\end{aligned}$$
Esto contradice la independencia del δ y por tanto no es equicontinua.

1.10. Día 10— 19-4-18

Stone-Weierstrass

Sea $(X,\mathfrak{m})$ espacio compacto y $\mathcal{C}(X,\mathbb{R})$ con la métrica $\mathfrak{m}_\infty(f,g)=\|f-g\|_\infty=\sup_{x\in X}|f(x)-g(x)|$.

Lema 1.10.1. *El espacio $\mathcal{C}(X,\mathbb{R})$ es completo.*

Vamos a estudiar condiciones para que un espacio sea denso en el espacio mencionado anteriormente. Ahora recuerde que definimos el máximo y mínimo entre dos funciones f,g como
$$f\vee g(x)=\frac{1}{2}(f(x)+g(x)+|f(x)-g(x)|)$$
$$f\wedge g(x)=\frac{1}{2}(f(x)+g(x)-|f(x)-g(x)|)$$
Ahora, qué necesitamos para que un espacio sea cerrado por máximos y mínimos. Necesitamos que sea cerrado por valores absolutes esencialmente. Vamos a tomar un espacio vectorial cerrado por valores absolutos, un retículo, y esto veremos que es denso en el espacio de funciones continuas.

Definición 1.10.2. Sea $\mathcal{R}\subseteq\mathcal{C}(X)$, decimos que $\mathcal{R}$ es un retículo si $\mathcal{R}$ es un subespacio vectorial tal que $f,g\in\mathcal{R}\Rightarrow f\vee g,f\wedge g\in\mathcal{R}$.

Teorema 1.10.3. *Sea $(X,\mathfrak{m})$ completo, $\mathcal{R}\subseteq\mathcal{C}(X)$ es un retículo que satisface que para $x,y\in X,a,b\in\mathbb{R}$ existe $f\in\mathcal{R}$ tal que $(f(x),f(y))=(a,b)$ entonces tenemos $\mathcal{R}$ es denso en $\mathcal{C}(X,\mathbb{R})$.*

Prueba

Tome $f\in\mathcal{C}(X)$ y dados $x,y\in X$ existe $h_{x,y}\in\mathcal{R}$ tal que
$$h_{x,y}(x)=f(x)\quad h_{x,y}(y)=f(y)$$
Fije $x\in X$. La función
$$g_x(z)=h_{x,y}(z)-f(z)$$
al evaluarla en y nos da 0. Dado $\varepsilon>0$, existe δ_y tal que
$$\mathfrak{m}(z,y)<\delta_y\Rightarrow|g_x(z)-g_x(y)|<\varepsilon$$
Por lo tanto tenemos
$$\begin{aligned}z\in B(y,\delta_y)&\Rightarrow-\varepsilon<g_x(z)<\varepsilon\\&\Rightarrow h_{x,y}(z)-f(z)<\varepsilon\\&\Rightarrow h_{x,y}(z)<f(z)+\varepsilon\end{aligned}$$
Como la colección de las bolas $B(y,\delta_y)$ forma un cubrimiento por abiertos de X, entonces podemos reducir a $y_1,\cdots,y_m$ tales que $X\subseteq\cup_{i\in[m]}B(y_i,\delta_{y_i})$. Sea $h_x(z)=(\wedge_{i\in[m]}h_{x,y_i})(z)$ entonces $h_x(z)<f(z)+\varepsilon$ para $z\in X$. Esto ocurre pues $h_x(z)\leqslant h_{x,y_i}(z)$ en $B(y_i,\delta_{y_i})$.
Note que $h_x(x)=f(x)$, tome $g(z)=h_x(z)-f(z)$. Como $g(x)=0$, existe δ_x tal que
$$\begin{aligned}&\mathfrak{m}(x,z)<\delta_x\Rightarrow|g(z)-g(x)|<\varepsilon\\&\iff-\varepsilon<h_x(z)-f(z)<\varepsilon\\&\iff-\varepsilon+f(z)<h_x(z),\quad z\in B(x,\delta_x)\end{aligned}$$
Por compacidad existen $x_1,\cdots,x_\ell$ tales que $X\subseteq\cup_{i\in[\ell]}B(x_i,\,\delta_{x_i})$. Esto nos dice que $-\varepsilon+f(z)<h_{x_i}(z)\leqslant h(z)$, $z\in B(x_i,\delta_{x_i})$. Sea $h=\vee_{i\in[\ell]}h_{x_i}\Rightarrow f(z)-\varepsilon<h_x(z)$ para cualquier $z\in X$. Escoja $z\in X$, tiene que existe x_i tal que $h(z)=h_{x_i}(z)$ y en ese punto $h(z)=h_{x_i}(z)<f(z)+\varepsilon$. Así encontramos alguien en el retículo que está a distancia ε de cualquier función.

Definición 1.10.4. Un álgebra A es un espacio vectorial con un producto $\circ\colon A^2 \to A\colon (x,y) \mapsto x \circ y$ que es bilineal y asociativo. Decimos que A tiene unidad si existe $1 \in A$ tal que $1x = x1 = x$. Además A es un álgebra normada si $\|xy\| \leqslant \|x\|\|y\|$ y $\|1\| = 1$ si A tiene unidad.

Ejemplo 1.10.5. $\mathcal{C}(X,\mathbb{R})$ es un álgebra normada con unidad donde $(f \circ g)(x) = f(x)g(x)$.

Basta ver que
$$\sup_{z\in X}|f(z)g(z)| \leqslant \sup_{z\in X}|f(z)|\sup_{z\in X}|g(z)|$$
Y esto es equivalente a $\|fg\|_\infty \leqslant \|f\|_\infty \|g\|_\infty$.

Cuál es la relación entre las álgebras y los retículos? Vamos a ver que las álgebras contienen el valor absoluto de sus elementos y así ver que es un retículo.

Si $A \subseteq X$ con X un espacio normado y una métrica inducida por la norma. Tome dos sucesiones convergentes, entonces el producto ($\circ$ del álgebra)de ellas converge al producto de sus límites.

Ejercicio 1.10.6. Corrobore el hecho anterior.

Lema 1.10.7. *Sea $A \subseteq \mathcal{C}(X)$ un álgebra normada con unidad. Entonces $\overline{A}$ es un retículo.*

Ejercicio 1.10.8. Verifique que $\overline{A}$ es un álgebra normada con unidad.

Hay que definir el producto en $\overline{A}$. Esto se logra con el ejercicio anterior. Hay que verificar que se cumple la desigualdad, pero esta se cumple en sucesión. Tomando límites se obtiene el resultado.

Proseguimos con la prueba del lema 1.10.7.

Prueba

Basta probar que si $h \in \overline{A}$ entonces $|h| \in \overline{A}$. Como $\|h\|_\infty = c \Rightarrow h(z) \in [-c,c]$ para $z \in X$. Al ser $g(t) = |t|$, con $g\colon [-c,c] \to \mathbb{R}$, continua, dado n existe un polinomio $p_n(t)$ tal que $\|g - p_n\|_\infty < \frac{1}{n}$. Esto es equivalente a $\sup_{z\in X}|g(z) - p_n(z)| < \frac{1}{n}$. Esto nos dice que $||z| - p_n(z)| < \frac{1}{n}$ para $z \in [-c,c]$ entonces $||h(y)| - p_n(h(y))| < \frac{1}{n}$ con $y \in X$. Falta ver que p_n está en el álgebra, pero esto se sigue de que
$$p_n(h(y)) = a_0 + a_1 h(y) + \cdots + a_m (h(y))^m$$
$$= \left(a_0 1 + a_1 h + a_2 h \circ h + \cdots + a_m \underbrace{h \circ h \circ \cdots \circ h}_{m \text{veces}} \right)(y)$$

Teorema 1.10.9 (Stone-Weierstrass). *Sea $(X, \mathfrak{m})$ compacto y $A \subseteq \mathcal{C}(X)$ un álgebra normada tal que $x \neq y \Rightarrow \exists h \in A$ tal que $h(x) \neq h(y)$ y $1 \in A$ entonces tenemos que A es denso en $\mathcal{C}(X)$.*

Prueba

Sabemos que $\overline{A}$ es un retículo. Falta probar que dados $x,y \in X$ y $a,b \in \mathbb{R}$ existe $h_1 \in A$ tal que $(h_1(x), h_1(y)) = (a,b)$. Considere el sistema
$$\alpha h(x) + \beta = a \quad \alpha h(y) + \beta = b$$
Este sistema tiene solución pues la siguiente matriz tiene determinante no nulo.
$$\begin{pmatrix} h(x) & 1 \\ h(y) & 1 \end{pmatrix} = |h(x) - h(y)| \neq 9$$

La última condición del teorema se conoce como separación de puntos. En otras palabras tenemos la siguiente definición.

Definición 1.10.10. Decimos que $h \in \mathcal{C}(X)$ separa puntos si para $x \neq y$, se cumple que $h(x) \neq h(y)$.

1.11. Día 11— 24-4-18

Nos interesan los números complejos pues nos interesan las funciones trigonométricas. Es más fácil ver estas funciones como las partes reales e imaginarias de e^{iz}.

La diferencia entre el teorema siguiente y 1.10.9 es cerradura por conjugados complejos.

Teorema 1.11.1 (Stone-Weierstrass). *Sea X espacio métrico compacto y $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{C}(X,\mathbb{C})$ subálgebra que satisface:*

1. *Tiene unidad,*
2. *Separa puntos: si $x \neq y$ entonces existe $f \in \mathcal{A}\colon f(x) \neq f(y)$,*
3. *$f \in \mathcal{A} \Rightarrow \overline{f} \in \mathcal{A}$*

Entonces $\mathcal{A}$ es denso en $\mathcal{C}(X,\mathbb{C})$.

Prueba

Sea $f\colon X \to \mathbb{C}$ con $f = f_1 + i f_2$. Recuerde que $\overline{f} = f_1 - i f_2$. Luego se cumple que
$$\frac{1}{2}(f + \overline{f}) = f_1 = \mathrm{Re}(f) \in \mathcal{A}$$
$$\frac{-i}{2}(f - \overline{f}) = f_2 = \mathrm{Im}(f) \in \mathcal{A}$$

Así $f_1,f_2\in\mathcal{C}(X,\mathbb{R})$. Vamos a probar que $\mathcal{A}_1=\overline{\mathcal{A}\cap\mathcal{C}(X,\mathbb{R})}=\mathcal{C}(X,\mathbb{R})$. Este conjunto es una subálgebra con unidad *1* la función constante. Basta probar que separa puntos.
Tome $x\neq y$, existe $f\in\mathcal{C}(X,\mathcal{C})$ tal que
$$f_1(x)+if_2(x)=f(x)\neq f(y)=f_1(y)+if_2(y)$$
Entonces $f_1(x)\neq f_1(y)$ ó $f_2(x)\neq f_2(y)$. Por el teorema 1.10.9 se encuentra lo buscado.
Tome $h\in\mathcal{C}(X,\mathbb{C})$ con $h=h_1+ih_2$. Sabemos que existen $(f_n)_{n\in\mathbb{N}},(g_n)_{n\in\mathbb{N}}\subseteq\mathcal{A}_1$ tales que $f_n\to h_1,g_n\to h_2$ en $\mathcal{C}(X,\mathbb{R})$. Entonces $h_n=f_n+ig_n\in\mathcal{A}$ converge a $h\in\mathcal{C}(X,\mathbb{C})$.

Ejemplo 1.11.2. Recuerde que $e^{iz}=\cos(z)+i\sin(z)$ y considere $p(e^{iz})=\sum_{n=-k}^{k}c_n(e^{iz})^n$. Observe que esto es $\sum_{n=-k}^{k}c_ne^{izn}$ y $e^{-izn}=\overline{e^{izn}}$ entonces $c_ke^{izn}+c_{-k}\overline{e^{izn}}=a_k\sin(kz)+b_k\cos(kz)$ con $(a_k,b_k)=(c_k+c_{-k},i(c_k-c_{-k}))$. Por lo tanto
$$p(e^{izn})=\sum_{k=0}^{n}a_k\sin(kz)+b_k\cos(kz)$$
Separa puntos pues $e^{iz}\neq e^{iw}$ tomando $p(x)=x$ tenemos el resultado.

El ejemplo anterior nos dice que los polinomios trigonométricos son densos en $\mathcal{C}(\partial B(0,1),\mathcal{C})$. Sea $X=\{f\colon[-\pi,\pi]\to\mathbb{R}\colon f(-\pi)=f(\pi)\}$, note que $[-\pi,\pi]\xrightarrow{e^{iz}}\partial B(0,1)$. Vea que $\partial B(0,1)$ y X son isométricos.

Tercera Sesión de Ejercicios

Ejercicio 1.11.3 (2.4. Joseph Varilly)**.** Mostrar que el complemento del conjunto de Cantor es abierto y denso.

Considere la sucesión de los intervalos a los que les quitamos el tercio de la mitad. El conjunto de Cantor es la intersección de todos estos conjuntos, cada conjunto de la sucesión es la unión disjunta de intervalos de longitud $\frac{1}{3^i}$. Es claro que el conjunto de Cantor es cerrado pues es la intersección de uniones finitas de intervalos cerrados.
Vea que C^c es denso si y sólo si $C^o=\varnothing$. Así para $x\in C$ tenemos $B(x,\varepsilon)\cap C^c\neq\varnothing$. Como $x\in C$ entonces $x\in C_k$ con k tal que $\frac{1}{3^k}<\varepsilon$. FIG11.1

Ejercicio 1.11.4 (2.9. Joseph Varilly)**.** Mostrar que el conjunto $\{z\}\cup\{z_n\colon n\in\mathbb{N}\}$ es compacto donde $z_n\to z$.

Vea que si cubrimos en el conjunto con ε-bolas. Alguna de todas las bolas contiene a z, inmediatamente contiene infinitos z_n's salvo un número finito. Los otros se reparten en una bola cada una. Por lo tanto hay finitas bolas.

Ejercicio 1.11.5 (2.15. Joseph Varilly)**.** Un subconjunto $K\subseteq\mathbb{R}^n$ es compacto si y sólo si toda función en él es acotada.

Si toda función es acotada, la función $\mathfrak{m}(x,y)$ para $y\in K$ es acotada. Esta es la definición de ser acotado.
Si K no fuese cerrado tome $x\in\overline{K}\backslash K$ y entoncecs $\forall\varepsilon\exists x\in K\mathfrak{m}(x,y)<\varepsilon$ entonces la función $\frac{1}{\mathfrak{m}(x,y)}>\frac{1}{\varepsilon}$ cumple ser continua pero no acotada.

Ejercicio 1.11.6 (2.4.6.17. Santiago Cambronero)**.** Si $f\colon K\to\mathbb{R}$ es continua, K compacto, conexo, entonces $f(K)=[\text{mín}_{x\in K}(f(x)),\text{máx}_{x\in K}(f(x))]$.

Las funciones continuas preservan compactos. Entonces $f(K)$ es una unión de intervalos cerrados. Ahora, f también preserva conexos por lo que es sólo un intervalo cerrado. Como f alcanza su máximo y mínimo se deduce el resultado.

Ejercicio 1.11.7 (2.4.6.23. Santiago Cambronero)**.** Si E es compacto, toda sucesión en E con un solo punto de acumulación es convergente.

Si E es compacto, es completo. Para $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}\subseteq E$ existe $(x_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}\subseteq(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ convergente. Entonces sea $x=\text{lím}_{k\to\infty}x_{n_k}$.
Ahora asuma que $\neg(x_n\to x)$, así existe $(x_{n_\ell})_{\ell\in\mathbb{N}}\subseteq(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tal que existe $\varepsilon_0>0\colon\mathfrak{m}(x_{n_\ell},x)>\varepsilon$. Por completitud existe $(x_{n_{\ell_m}})_{m\in\mathbb{N}}$ subsucesión convergente. Entonces esta sucesión converge a x, pero la distancia es mayor a ε_0. Esto es una contradicción.

1.12. Día 12— 3-5-18

Cuarta Sesión de Ejercicios

Ejercicio 1.12.1 (2.4.6.6. Santiago Cambronero)**.** Sea $f\colon[0,1]\to[0,1]$ continua. Muestre que f tiene al menos un punto fijo.

Considere la función $h(x)=f(x)-x$ y observe que h es continua. Además $h(0)\geqslant 0$ y $h(1)\leqslant 0$. Por el teorema de Bolzano de los valores intermedios tenemos que $\exists c\in[0,1]: h(c)=0$. Luego $f(c)=c$ y por tanto f tiene un punto fijo.

Ejercicio 1.12.2 (2.4.6.7. Santiago Cambronero)**.** Sea $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ diferenciable y $|f'(x)|\leqslant 1$. Se concluye que f es una contracción? Más aún, qué pasa si $|f'(x)|<1$.

En el primer caso inmediatamente no, considere $f(x)=x$. Tenemos que $f'(x)=1$ para todo x. Luego $|f(x)-f(y)|=|x-y|$ y por tanto f no es q-Lipschitz con $q<1$. Por lo tanto x no es una contracción a pesar de cumplir la hipótesis. Finish

Teorema 1.12.3 (Banach, 1922)**.** *Sea $(X,\mathfrak{m})$ un espacio métrico completo y $f:X\to X$ una contracción. Esto es, f es λ-Lipschitz con $0<\lambda<1$. Entonces f tiene un único punto fijo.*

Prueba

En efecto, considere $x_0\in X$ y sea $x_{n+1}=f(x_n)$. Note que por definición de contracción y por inducción tenemos lo siguiente:

$$\begin{aligned}\mathfrak{m}(x_{n+2},x_{n+1}) &\leqslant \lambda\mathfrak{m}(x_{n+1},x_n)\\ &\leqslant \lambda^2\mathfrak{m}(x_n,x_{n-1})\\ &\vdots\\ &\leqslant \lambda^n\mathfrak{m}(x_{n+1-n},x_{n-n})\\ &=\lambda^n\mathfrak{m}(x_1,x_0)\end{aligned}$$

Entonces para $n>m$ aplicando desigualdad triangular y el hecho anterior resulta en:

$$\begin{aligned}\mathfrak{m}(x_n,x_m) &\leqslant \sum_{i=m}^{n-1}\mathfrak{m}(x_{i+1},x_i)\\ &\leqslant \sum_{i=m}^{n-1}\lambda^i\mathfrak{m}(x_1,x_0)\\ &\leqslant \mathfrak{m}(x_1,x_0)\sum_{i=m}^{\infty}\lambda^i\\ &=\mathfrak{m}(x_1,x_0)\left(\sum_{i=0}^{\infty}\lambda^i-\left(\frac{1-\lambda^m}{1-\lambda}\right)\right)\\ &=\mathfrak{m}(x_1,x_0)\left(\frac{1}{1-\lambda}-\left(\frac{1-\lambda^m}{1-\lambda}\right)\right)\\ &=\frac{\lambda^m\mathfrak{m}(x_1,x_0)}{1-\lambda}\end{aligned}$$

Como esta expresión tiende a 0 pues $\lambda<1$ se sigue que $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es de Cauchy y por tanto $x_n\to x\in X$. Ahora vea que

$$\lim_{n\to\infty}x_{n+1}=\lim_{n\to\infty}f(x_n)=f(\lim_{n\to\infty}x_n)\Rightarrow x=f(x)$$

Así este es el punto fijo de f.

Ahora suponemos que existen x,y puntos fijos de f. Entonces tenemos que

$$\begin{aligned}\lambda\mathfrak{m}(f(x),f(y)) &=\lambda\mathfrak{m}(x,y)\\ &\geqslant \mathfrak{m}(f(x),f(y))\\ &\iff \mathfrak{m}(f(x),f(y))=0\iff x=y\end{aligned}$$

Se sigue que sólo hay un punto fijo.

Ejercicio 1.12.4 (2.4.6.12. Santiago Cambronero)**.** Sea E completo y $f:E\to E$. Si $f^k=\underbrace{f\circ f\circ\cdots\circ f}_{k\text{ veces}}$ es contractiva entonces f tiene un único punto fijo.

Por el teorema de Banach, f^k tiene un único punto fijo x. Esto nos dice que

$$\begin{aligned}f^k(x)=x &\Rightarrow f(f^k(x))=f(x)\\ &\Rightarrow f^k(f(x))=f(x)\\ &\Rightarrow f(x)=x\end{aligned}$$

Donde la última igualdad se sigue pues f^k tiene un único punto fijo. Así x es único punto fijo de f.

Ejercicio 1.12.5. Bernstein's polynomials.

2. Parcial 2

2.1. Día 13— 10-5-18

Funciones de Variación Acotada

Definición 2.1.1. Sean $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ y $\Gamma = \{x_0 = a, x_1, \cdots, x_m = b\}$ con $a = x_0 < x_1 < \cdots < x_m = b$. Definimos

$$S(f,\Gamma) = \sum_{i\in[m]} |f(x_i) - f(x_{i-1})|$$

y $\mathrm{Var}[f,[a,b]] = \sup_\Gamma S(f,\Gamma)$.

Una función se dice de variación acotada si $\mathrm{Var}[f,[a,b]] < \infty$.

InSERTAR Fig13.1

Ejemplo 2.1.2. Sea $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ monótona, entonces f es de variación acotada.

- Si f es creciente entonces $S(f, \Gamma) = \sum_{i\in[n]}(f(x_i) - f(x_{i+1})) = f(b) - f(a)$.
- En cambio para f decreciente tenemos que $\mathrm{Var}[f,[a,b]] = f(a) - f(b)$.

Ejercicio 2.1.3. La función $f\,[-1,1] \to \mathbb{R}$ tal que $f(x) = (x = 0)?1 : 0$ es de variación acotada.

Tome $\Gamma = \{-1,0,1\}$ entonces $S(f,\Gamma) = 2$.

De hecho, $S(f,\Gamma) = 2$ si $0 \in \Gamma$ y $S(f,\Gamma) = 0$ si $0 \notin \Gamma$.

Ejercicio 2.1.4. La función $f(x) = (x \in \mathbb{Q} \cap [0,1])?1 : 0$ entonces $\mathrm{Var}[f,[0,1]] = \infty$.

Considere $\Gamma = \{0 = x_0, x_1, \cdots, x_n = 1\}$ con x_k irracional para k par y racional si k es impar. La suma de f respecto a Γ estará dada por

$$S(f,\Gamma) = \sum_{i\in[n]} |f(x_{i-1}) - f(x_i)|$$

Todos los términos de esta suma son 1 por definición de f. Luego $\mathrm{Var}[f,[0,1]] = \sup_\Gamma |\Gamma| = n$, este término es no acotado y por tanto la variación es infinita.

Lema 2.1.5. *Si $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ es λ-Lipschitz entonces f es de variación acotada.*

Prueba

Note que

$$\begin{aligned} S(f,\Gamma) &= \sum_{i\in[m]} |f(x_i) - f(x_{i-1})| \\ &\leqslant \lambda \sum_{i\in[m]} |x_i - x_{i-1}| \\ &= \lambda(b-a) \end{aligned}$$

Luego f es de variación acotada.

Lema 2.1.6. *Sea f de variación acotada. Entonces f es acotada.*

Prueba

Tome $\Gamma = \{a,x,b\}$ con $x \in\,]a,b[$ una partición. Luego tenemos que

$$|f(x) - f(a)| + |f(b) - f(x)| \leqslant \mathrm{Var}[f,[a,b]]$$

Entonces por desigualdad triangular al revés tenemos

$$\begin{aligned} 2|f(x)| &= |f(x)| + |f(x)| \\ &\leqslant |f(a)| + |f(a) - f(x)| \\ &\quad + |f(b)| + |f(b) - f(x)| \\ &\leqslant |f(a)| + |f(b)| + \mathrm{Var}[f,[a,b]] \end{aligned}$$

Por lo tanto

$$|f(x)| \leqslant \frac{1}{2}(|f(a)| + |f(b)| + \mathrm{Var}[f,[a,b]])$$

Teorema 2.1.7. *Sean $f, g : [a,b] \to \mathbb{R}$ funciones de variación acotada. Se cumple que:*

1. *$cf + g$ es de variación acotada para $c \in \mathbb{R}$.*
2. *fg es de variación acotada.*
3. *Si existe $\varepsilon > 0$ tal que $|g(x)| > \varepsilon$ para $x \in [a,b]$. Entonces $\frac{f}{g}$ es de variación acotada.*

Prueba

Como f,g son de variación acotada, entonces $\mathrm{Var}\,[f,[a,b]] \leqslant \frac{M_1}{c}$, y $\mathrm{Var}\,[g,[a,b]] \leqslant M_2$ con $M_1, M_2 > 0$. Sea $\Gamma = (x_i)_{i\in[n]}$ partición de $[a,b]$, entonces tenemos que si $h = cf + g$ la variación de h es

$$\sum_{i\in[n]}|h(x_i)-h(x_{i-1})|$$

$$=\sum_{i\in[n]}|cf(x_i)-cf(x_{i-1})+g(x_i)-g(x_{i-1})|$$

$$\leqslant c\sum_{i\in[n]}|f(x_i)-f(x_{i-1})|+\sum_{i\in[n]}|g(x_i)-g(x_{i-1})|$$

$$\leqslant c\left(\frac{M_1}{c}\right)+M_2$$

Tome $M=M_1+M_2$, de esta manera para cualquier partición se cumple que $S(h,\Gamma)=S(cf+g,\Gamma)\leqslant M$. Por lo tanto h es de variación acotada.

Nuevamente, $\text{Var}\,[f,[a,b]] \leqslant \frac{M_1}{c}$, y $\text{Var}\,[g,[a,b]] \leqslant M_2$. Sea $h = fg$ y $\Gamma = (x_i)_{i\in[n]}$ partición de $[a,b]$. La suma de h respecto a Γ está dada por

$$\sum_{i\in[n]}|h(x_i)-h(x_{i-1})|$$

$$=\sum_{i\in[n]}|f(x_i)g(x_i)-f(x_{i-1})g(x_{i-1})|$$

Ahora, al término $|f(x_i)g(x_i)-f(x_{i-1})g(x_{i-1})|$ le sumamos cero de manera que sea $|f(x_i)g(x_i)-f(x_i)g(x_{i-1}) + f(x_i)g(x_{i-1}) - f(x_{i-1})g(x_{i-1})|$. Acotamos por desigualdad triangular y obtenemos que la expresión es menor a lo siguiente $|f(x_i)||g(x_i)-g(x_{i-1})|+|f(x_i)-f(x_{i-1})||g(x_{i-1})|$ Recuerde que una función de variación acotada, es acotada. Sean $A,B>0$ respectivas cotas de f,g entonces $|f(x)|\leqslant A$, $|g(x)|\leqslant B$. Luego tenemos que

$$\sum_{i\in[n]}|h(x_i)-h(x_{i-1})|$$

$$\leqslant B\sum_{i\in[n]}|f(x_i)-f(x_{i-1})|+A\sum_{i\in[n]}|g(x_i)-g(x_{i-1})|$$

$$\leqslant BM_1+AM_2$$

Tomamos $M = BM_1 + AM_2 > 0$ y así h es de variación acotada.

Para el último apartado basta verificar que si g es de variación acotada, entonces $\frac{1}{g}$ también. Como g es de variación acotada, tome $\Gamma=(x_i)_{i\in[n]}$ partición de $[a,b]$ y así existe $M > 0$ tal que $S(g,\Gamma)\leqslant M$. Consideremos $S(\frac{1}{g},\Gamma)$, tenemos que

$$\sum_{i\in[n]}\left|\frac{1}{g(x_i)}-\frac{1}{g(x_{i-1})}\right|=\sum_{i\in[n]}\left|\frac{g(x_{i-1})-g(x_i)}{g(x_i)g(x_{i-1})}\right|$$

$$\leqslant\sum_{i\in[n]}\left|\frac{g(x_{i-1})-g(x_i)}{\varepsilon^2}\right|$$

$$=\frac{1}{\varepsilon^2}\sum_{i\in[n]}|g(x_i)-g(x_{i-1})|$$

$$\leqslant\frac{M}{\varepsilon^2}$$

Luego $\text{Var}\left[\frac{1}{g},[a,b]\right] \leqslant \frac{M}{\varepsilon^2}$ y por tanto $\frac{1}{g}$ es de variación acotada. Finalmente por el apartado anterior aplicado a $(f)(\frac{1}{g})$ obtenemos que el cociente de dos funciones de variación acotada, es de variación acotada.

Vamos a ver si entendemos la definición. Cuando escribimos $S(f,\Gamma)$ es $\sum_{i\in[n]}|f(x_i)-f(x_{i-1})|$. Tome $\Gamma=\{x_0,x_1,\cdots,x_n\}$ y $y\notin\Gamma$ con $x_{i-1}<y<x_i$ e $i<n$. Defina $\Gamma_1=\Gamma\cup\{y\}$, entonces qué es $S(f,\Gamma)$?

Inserta FIG13.2

Vea que $S(f,\Gamma_1) = \sum_{j\in[i]}|f(x_j)-f(x_{j-1})| + \sum_{j=i+2}^{n}|f(x_j)-f(x_{j-1})| + |f(x_i)-f(y)| + |f(y)-f(x_{i-1})|$. Esto nos dice $S(f,\Gamma)\leqslant S(f,\Gamma_1)$. Por inducción podemos ver que si $\Gamma_1\subseteq\Gamma_2$ entonces $S(f,\Gamma_1)\leqslant S(f,\Gamma_2)$.

Ahora si $[c,d]\subseteq[a,b]$ y Γ es una partición de $[c,d]$ tome $\Gamma_1=\Gamma\cup\{a,b\}$. Esto define una partición sobre $[a,b]$.

FIG13.3

Así $S(f,\Gamma)\leqslant S(f,\Gamma_1)\leqslant \text{Var}\,[f,[a,b]]$. Entonces $\text{Var}[f,[c,d]]\leqslant\text{Var}[f,[a,b]]$.

Con las particiones no hay que complicarse, regáleles puntos.

Lema 2.1.8. *Sea* $c\in\,]a,b[$, *entonces* $\text{Var}\,[f,[a,b]] = \text{Var}[f,[a,c]]+\text{Var}[f,[c,b]]$.

Prueba

Probamos dos desigualdades.

Tome Γ partición de $[a,b]$, si $\Gamma=\{x_0,x_1,\cdots,x_m\}$ entonces existe j_0 tal que $x_{j_0}\leqslant c<x_{j_0+1}$. Note que $\tilde{\Gamma}=\{x_0,x_1,\cdots,x_{j_0},c\}$ partición de $[a,c]$ y $\widehat{\Gamma}=\{c,x_{j_0+1},\cdots,x_m\}$ es una partición de $[c,b]$. Además, partimos de una partición arbitraria que despedazamos en dos particiones que construimos.

$$\begin{aligned}S(f,\Gamma)\leqslant S(f,\Gamma_1)&=S(f,\tilde{\Gamma})+S(f,\widehat{\Gamma})\\&\leqslant \mathrm{Var}[f,[a,c]]+\mathrm{Var}[f,[c,b]]\end{aligned}$$

Por lo tanto Var $[f,[a,b]]\leqslant$ Var $[f,[a,c]]$ + $\mathrm{Var}[f,[c,b]]$.

Por otro lado si Γ_1,Γ_2 son particiones de $[a,c],[c,b]$ respectivamente entonces $\Gamma=\Gamma_1\cup\Gamma_2$ es una partición de a,b. Luego $S(f,\Gamma)=S(f,\Gamma_1)+S(f,\Gamma_2)$. FIG 13.4

Esto nos dice que $S(f,\Gamma_1)+S(f,\Gamma_2)\leqslant$ Var $[f,[a,b]]$. Tomamos sup's uno por uno, dejando uno fijo y luego en otro. Obtenemos

$$\sup_{\Gamma_1}S(f,\Gamma_1)+\sup_{\Gamma_2}S(f,\Gamma_2)\leqslant \mathrm{Var}[f,[a,b]]$$

Esto nos da el resultado.

Qué pasa cuando nuestras funciones crecen y decrecen?

Definición 2.1.9. Dado $x\in\mathbb{R}$ definimos $x^+=(x\geqslant 0)?x:0$ y $x^-=(x\leqslant 0)?-x:0$.

Entonces $|x|=x^++x^-$ y $x=x^+=x^-$.

Definimos $P(f,\Gamma)=\sum_{i\in[n]}(f(x_i)-f(x_{i-1}))^+$ y $N(f,\Gamma)=\sum_{i\in[n]}(f(x_i)-f(x_{i-1}))^-$. Luego definimos $P\,[f,[a,b]]=\sup_\Gamma P(f,\Gamma), N\,[f,[a,b]]=\sup_\Gamma N(f,\Gamma)$ como la variación positiva y la variación negativa de f respectivamente.

De la definición anterior tenemos que:

$$\begin{cases}S(f,\Gamma)=P(f,\Gamma)+N(f,\Gamma)\\f(b)-f(a)=P(f,\Gamma)-N(f,\Gamma)\end{cases}$$

Qué relación hay entre la variación positiva y la variación negativa? De la relación anterior, tomando sup's tenemos que $f(b)-f(a)=P[f,[a,b]]-N[f,[a,b]]$. Análogamente tenemos que $\mathrm{Var}[f,[a,b]]=P[f,[a,b]]+N[f,[a,b]]$. Esto lo probamos a continuación:

Prueba

Tomando cotas superiores obtenemos que

$$S(f,\Gamma)\leqslant P[f,[a,b]]+N[f,[a,b]]$$

Entonces en particular, esto acota al sup. Luego

$$\mathrm{Var}[f,[a,b]]\leqslant P[f,[a,b]]+N[f,[a,b]]$$

Por otro lado sabemos que $P(f,\Gamma)+N(f,\Gamma)\leqslant$ Var $[f,[a,b]]$. Sea $(\Gamma_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión de particiones de manera que

$$\lim_{n\to\infty}N(f,\Gamma_n)=N[f,[a,b]]$$

Entonces $\lim_{n\to\infty}P(f,\Gamma_n)=f(b)-f(a)+N[f,[a,b]]=P[f,[a,b]]$. Así la partición que nos sirve para aproximar N nos deja aproximar P por las igualdades que teníamos anteriormente. Esto concluye la desigualdad, porque entonces lo que tenemos aquí es que

$$P(f,\Gamma_n)+N(f,\Gamma_n)\leqslant \mathrm{Var}[f,[a,b]]$$

Al tomar un límite $n\to\infty$ esto resulta en $P[f,[a,b]]+N[f,[a,b]]\leqslant \mathrm{Var}[f,[a,b]]$.

Vamos a reducir la notación. Las indentidades anteriores se resumen en $V=P+N, f(b)-f(a)=P-N$. Sea $x\in[a,b]$, entonces

$$f(x)-f(a)=P[f,[a,x]]-N[f,[a,x]]$$

De aquí $f(x)=(P[f,[a,x]]+f(a))-N[f,[a,x]]$. Entonces $x<y$ nos dice que

$$P[f,[a,x]]\leqslant P[f,[a,y]]$$
$$N[f,[a,x]]\leqslant N[f,[a,y]]$$

Teorema 2.1.10 (Jordan)**.** *Sea $f:[a,b]\to\mathbb{R}$. Entonces f es de variación acotada si y sólo si es la resta de dos funciones positivas y crecientes.*

Ejercicio 2.1.11. Escriba los detalles de la prueba anterior. Use el hecho de que $f(x)=(P[f,[a,x]]+f(a))-N\,[f,[a,x]]$ es lo mismo que $f(x)=(P[f,[a,x]]+f^+(a))-(N[f,[a,x]]+f^-(a))$.

Suponga que $f=g-h$ con g,h positivas y crecientes, esto significa que g,h están acotadas por debajo por cero y además por el ejemplo 2.1.2 tenemos que g,h son de variación acotada. Entonces su suma es de variación acotada, luego f lo es. Ahora, sea f de variación acotada, por la sugerencia tenemos que para todo $x\in]a,b[$ se cumple que

$$\big(P[f,[a,x]]+f^+(a)\big)-\big(N[f,[a,x]]+f^-(a)\big)$$

Tomemos como candidatos las siguientes funciones:

$$g(x)=\big(P[f,[a,x]]+f^+(a)\big)$$
$$h(x)=\big(N[f,[a,x]]+f^-(a)\big)$$

finish

2.2. Día 14— 15-5-18

De dónde sale la idea de funciones de variación acotada? Considere la integral de Riemman $\int_a^b dx$. Normalmente esto lleva a $b-a$, cualquiera nos diría que esa es la longitud del intervalo. Pero que pasa si medimos con $\int_a^b d\phi = \phi(b)-\phi(a)$. Al medir todos los pedacitos de intervalo, uno esperaría que la suma de las medidas fuera la medida de todo el intervalo.

Lo que necesitamos al hacer $\sum|\phi(x_i)-\phi(x_{i-1})|$. Pero quién dice que eso es finito? De aquí nace la idea de variación acotada. Para medir otras longitudes, queremos que los pedazos sean finitos.

Más adelante es natural pensar en variación acotada en campos como análisis harmónico y oscilación de funciones.

Lo último que vimos es que si ϕ es de variación acotada, entonces $\phi=\phi_1-\phi_2$ con ϕ_1,ϕ_2 positivas y crecientes.

Lema 2.2.1. *Sea $\phi\colon [a,b]\to\mathbb{R}$ una función de variación acotada. Entonces ϕ tiene a lo sumo una cantidad contable de discontinuidades. Todas las discontinuidades son saltos o son removibles.*

Prueba

Vea que si $\overline{x}$ es una discontinuidad de ϕ, entonces $\overline{x}$ es una discontinuidad de ϕ_1 ó de ϕ_2. Lo que puede pasar es que los saltos de una se anulen con los saltos de la otra, o que una salte mucho más que la otra y entonces le queda el salto. Así, basta analizar estas funciones y probar el resultado para ϕ creciente.
Sea
$$D_k=\left\{x\in[a,b]\colon \phi(x^+)-\phi(x^-)\geqslant\frac{1}{k}\right\}$$
Asuma que $x_1<\cdots<x_n\in D_k$. Vamos a montar una partición del intervalo. Sea $x_{j-1}<y_j<x_j$ para $j\in[m]$. Entonces tenemos la siguiente partición
$$\{y_0=a<y_1<y_2<\cdots<y_{m+1}=b\}$$
Ahora la pregunta es, cuánto es $|\phi(y_i)-\phi(y_{i-1})|\geqslant\frac{1}{k}$ para $j\in[m]$. Esto es mayor a $\frac{1}{k}$ pues los saltos dentro de D_k son mayores a $\frac{1}{k}$ y estamos agarrando un pedazo más a cada lado. Es decir $\phi(y_j)\geqslant\phi(x_j^+)$ y $\phi(y_{j-1})\geqslant\phi(x_j^-)$. Luego tenemos que
$$\frac{1}{k}m\leqslant\sum_{k\in[m]}\phi(y_k)-\phi(y_{k-1})\leqslant\phi(b)-\phi(a)$$
$$\Rightarrow m\leqslant k(\phi(b)-\phi(a))$$
Esto nos da una cota al número de discontinuidades.

Cuando tenemos funciones continuas, podemos aproximar la variación por la malla. Hay un δ tal que si la malla es pequeña atrapamos todos los de la malla.

Sea $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ continua. Recuerde que $|\Gamma|=\sup_{j\in[m]}\{x_j-x_{j-1}\}$.

Teorema 2.2.2. *Sea $f\colon[a,b]\to\mathbb{R}$ continua y de variación acotada. Entonces dado $M\leqslant\mathrm{Var}[f,[a,b]]=V$, existe $\delta>0$ tal que*
$$|\Gamma|<\delta\Rightarrow M\leqslant S(f,\Gamma)\leqslant V$$

Prueba

Sea $\varepsilon>0$ tal que $M+\varepsilon<V$. Entonces existe $\Gamma_1=\{\tilde{x_0}<\tilde{x_1}<\cdots<\tilde{x_n}\}$ tal que
$$M=\varepsilon<S(f,\Gamma_1)\leqslant V$$
Además, por continuidad uniforme, existe $\delta_1>0$ tal que
$$|x-x'|<\delta_1\Rightarrow|f(x)-f(x')|<\varepsilon$$
Tome $\delta_2=\frac{1}{2}\min\{\delta_1,|\Gamma_1|\}$, $|\Gamma|<\delta$. Ahora considere $\Gamma_2=\Gamma\cup\Gamma_1$, entonces tenemos
$$M+\varepsilon<S(f,\Gamma_1)\leqslant S(f,\Gamma_2)$$
Si $\Gamma=\{x_0<x_1<\cdots<x_n\}$, podría darse que entre x_j,x_{j+1} hubieran varios $\overline{x_i}$? Si fuese el caso que $x_j<\tilde{x_i}<\tilde{x_{i+1}}<x_{j+1}$ esto sería contradictorio con el tamaño de la malla Γ, pues entonces $|\Gamma_1|<|\Gamma|$ y escogimos $|\Gamma|$ más pequeña.
FIG14.2
Sabemos que dados x_j,x_{j+1} existe a los sumo un $\tilde{x}_i$ tal que $x_j\leqslant\tilde{x}_j\leqslant x_{j+1}$.
FIG14.3
Ahora descomponemos la suma entre los intervalitos que tienen un $\tilde{x}_j$ en medio y los que no.
$$S(f,\Gamma_2)=\sum_{\substack{j\in[n]\\ [x_j,x_{j+1}]\cap\Gamma_1=\varnothing}}|f(x_j)-f(x_{j-1})|$$
$$+\sum_{\substack{j\in[n]\\ [x_j,x_{j+1}]\cap\Gamma_1\neq\varnothing}}|f(x_{j+1})-f(\tilde{x}_i)|+|f(\tilde{x}_i)-f(\tilde{x}_i)|$$
ver foto
$$\leqslant S(f,\Gamma)+\varepsilon$$
Por lo tanto tenemos que $M+\varepsilon<S(f,\Gamma_2)\leqslant S(f,\Gamma)+\varepsilon$ y así $M<S(f,\Gamma)$.

De esta manera probamos que
$$\lim_{|\Gamma|\to 0}S(f,\Gamma)=\mathrm{Var}[f,[a,b]]$$

Ahora si $\Gamma=\{a=x_0<x_1<\cdots<x_n=b\}$, tenemos que

$$\begin{aligned} S(f,\Gamma) &= \sum_{i\in[m]} |f(x_i)-f(x_{i-1})| \\ &= \sum_{i\in[m]} |f'(\xi_i)|(x_i-x_{i-1}) \end{aligned}$$

si es el caso que $f'(x)$ existe y es continua. Entonces

$$\lim_{|\Gamma|\to 0} S(f,\Gamma)=\int_a^b |f'(x)|\mathrm{d}x$$

Corolario 2.2.3. *Sea $f\colon [a,b]\to\mathbb{R}$ de clase $\mathcal{C}^1$. Entonces se cumple que*

$$V=\int_a^b |f'(x)|\mathrm{d}x \ P=\int_a^b (f'(x))^+\mathrm{d}x \ N=\int_a^b (f'(x))^-\mathrm{d}x$$

Curvas Rectificables

Sea $\gamma\colon [a,b]\to\mathbb{R}^2$, $t\mapsto(f(t),g(t))$ continua. Cuanto mide la curva?

FIG 14.4

Definición 2.2.4. Dado $\Gamma=\{a=x_0<x_1<\cdots<x_m=b\}$, definimos

$$L(\gamma,\Gamma)=\sum_{i\in[m]} \|\gamma(x_i)-\gamma(x_{i-1})\|$$

$$L(\gamma)=\sup_{\Gamma}\{L(\gamma,\Gamma)\}$$

Decimos que la curva γ es rectificable si $L(\gamma)<\infty$.

Observe que tenemos las siguientes desigualdades.

$$\begin{aligned} &\max\{|f(x_i)-f(x_{i-1})|,|g(x_i)-g(x_{i-1})|\} \\ &\leqslant \|\gamma(x_i)-\gamma(x_{i-1})\| \\ &\leqslant |f(x_i)-f(x_{i-1})|+|g(x_i)-g(x_{i-1})| \end{aligned}$$

Observación 2.2.5. Las deigualdades anteriores se siguen del comportamiento entre norma-1 y norma-2.

Lema 2.2.6. *La curva γ es rectificable si y sólo si f,g son de variación acotada.*

Ejercicio 2.2.7. Escriba los detalles de la prueba tomando sumas sobre las desigualdades anteriores y tomando sup's.

($\Rightarrow$) Si γ es rectificable, tome $\Gamma=\{a=x_0<x_1<\cdots<x_m=b\}$ partición de $[a,b]$. Entonces consideramos

$$\begin{aligned} L(\gamma,\Gamma) &= \sum_{i\in[m]} \|\gamma(x_i)-\gamma(x_{i-1})\| \\ &= \sum_{i\in[m]} \left((f(x_i)-f(x_{i-1}))^2+(g(x_i)-g(x_{i-1}))^2\right)^{\frac{1}{2}} \end{aligned}$$

Luego, como $L(\gamma)$ es el sup, tenemos que

$$\sum_{i\in[m]} |f(x_i)-f(x_{i-1})|, \sum_{i\in[m]} |g(x_i)-g(x_{i-1})|\leqslant L(\gamma)$$

Se sigue que $\mathrm{Var}[f,[a,b]],\mathrm{Var}[g,[a,b]]\leqslant L(\gamma)$.

Por lo tanto f,g son de variación acotada.

($\Leftarrow$) Ahora tenemos que

$$\begin{aligned} L(\gamma,\Gamma) &\leqslant \sum_{i\in[m]} |f(x_i)-f(x_{i-1})| \\ &\quad + \sum_{i\in[m]} |g(x_i)-g(x_{i-1})| \\ &\leqslant \mathrm{Var}[f,[a,b]]+\mathrm{Var}[g,[a,b]] \end{aligned}$$

Esta es una cota superior para $L(\gamma,\,\Gamma)$, entonces el sup está por debajo.

$$L(\gamma)\leqslant \mathrm{Var}[f,[a,b]]+\mathrm{Var}[g,[a,b]]$$

Por lo tanto γ es rectificable.

La Integral de Riemann-Stieltjes

La idea de Riemann-Stieltjes es cambie como mide el intervalo. La pregunta es si f es Riemann-Stieltjes integrable respecto a la medida nueva del intervalo.

Sea $\phi\colon [a,b]\to\mathbb{R}$. Dados

1. $f\colon [a,b]\to\mathbb{R}$ acotada, (Recuerde que la intergral de Riemann está definida para funciones acotadas.)
2. $\Gamma=\{a=x_0<x_1<\cdots<x_n=b\}$ partición de $[a,b]$,
3. $\{\xi_i\}_{i\in[n]}$ con $x_{i-1}<\xi_i<x_i$ para $i\in[n]$.

Definimos $R(f,\,\Gamma,\,\phi,\,\{\xi_i\}_{i\in[n]}) = R(f,\,\Gamma,\,\phi) = \sum_{i\in[n]} f(x_i)(\phi(x_i)-\phi(x_{i-1}))$.

Definición 2.2.8. Decimos que f $[a,b]\to\mathbb{R}$ es Riemann-Stieltjes integrable con respecto a ϕ. Si existe I tal que dado $\varepsilon>0$ existe $\delta>0$ que satisface

$$|\Gamma|<\delta\Rightarrow|R(f,\Gamma,\phi)-I|<\varepsilon$$

Denotamos $I=\int_a^b f\mathrm{d}\phi$.

Hay un cambio fundamental entre esto y la integral de Riemann, aquí todo empieza a cambiar.

Defina

$$U(f,\Gamma,\phi)=\sum_{i\in[n]} M_i(\phi(x_i)-\phi(x_{i-1}))$$

$$L(f,\Gamma,\phi)=\sum_{i\in[n]} m_i(\phi(x_i)-\phi(x_{i-1}))$$

Aquí $M_i = \sup\,\{f(x)\colon x_{i-1}\leqslant x\leqslant x_i\}$ y $m_i = \inf\{f(x)\colon x_{i-1}\leqslant x\leqslant x_i\}$. Las desigualdades no se dan directamente como ensanguchar y listo. Ahora no hay orden establecido entre U, L y R pues ϕ no es necesariamente monótona.

En general no hay orden establecido entre estas sumas. Si ϕ es creciente tenemos la desigualdad
$$L \leqslant R \leqslant U$$
Ya que todos los términos son positivos. En el caso de que ϕ sea decreciente, la desigualdad se invierte. El problema es que la función puede moverse mucho y al final no se sabe como se comportan las sumas.

Ejercicio 2.2.9. Mostrar que f es integrable respecto a ϕ si y sólo si dado $\varepsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que
$$|\Gamma|, |\Gamma'| < \delta \Rightarrow |R(f,\Gamma,\phi) - R(f,\Gamma',\phi)| < \varepsilon$$

Usando el ejercicio vamos a mostrar lo siguiente.

Lema 2.2.10. *Si f,ϕ son discontinuas en un mismo punto entonces f no es integrable respecto a ϕ.*

Prueba

Para el primer caso considere
$$\lim_{x \to \overline{x}^+} \phi(x) = \lim_{x \to \overline{x}^-} \phi(x) \neq \phi(\overline{x})$$
Esto es lo mismo que decir que existe $\varepsilon > 0$ tal que para todo $\delta > 0$ existe
1. $x_1 > \overline{x}$, $|x_1 - \overline{x}| < \frac{\delta}{2}$, $|\phi(\overline{x}) - \phi(x_1)| \geqslant \varepsilon$,
2. $x_2 < \overline{x}$, $|x_2 - \overline{x}| < \frac{\delta}{2}$, $|\phi(\overline{x}) - \phi(x_2)| \geqslant \varepsilon$,

FIG 14.5
Además, como f es discontinua, existe ξ_δ tal que
$$|\overline{x} - \xi_\delta| < \tilde{\delta}, \text{ y } |f(\xi_\delta) - f(\overline{x})| \geqslant \varepsilon$$
Aquí tenemos $\tilde{\delta} = \min\left\{\frac{\delta}{2}, \frac{|\overline{x}-x_1|}{2}, \frac{|\overline{x}-x_2|}{2}\right\}$. Si se cumple que $\overline{x} < \xi_\delta < x_2$, tome Γ una partición que contenga $x_1, x_2, \overline{x}$ y $\Gamma \cap]x_1, \overline{x}[= \Gamma \cap]\overline{x}, x_2[= \varnothing$, además tomemos $R(f,\Gamma,\phi), R(f,\Gamma,\phi)$ de tal manera que en el intervalo $[\overline{x}, x_2]$, R toma el valor de $\xi_i = \xi_\delta$ y R' toma el valor de $\xi_i' = \overline{x}$. Las sumas anteriores son
$$R(f,\Gamma,\phi) = \sum_{i \in [n]} f(\xi_i)(\phi(y_i) - \phi(y_{i-1}))$$
$$R'(f,\Gamma,\phi) = \sum_{i \in [n]} f(\xi_i')(\phi(y_i) - \phi(y_{i-1}))$$
Todos lo términos son iguales excepto en el punto de discontinuidad. Luego tenemos que
$$\begin{aligned} &|R(f,\Gamma,\phi) - R'(f,\Gamma,\phi)| \\ &= |f(\xi_\delta)(\phi(x_2) - \phi(\overline{x})) - f(\overline{x})(\phi(x_2) - \phi(\overline{x}))| \\ &= |f(\xi_\delta) - f(\overline{x})||\phi(x_2) - \phi(\overline{x})| \\ &\geqslant \varepsilon^2 \end{aligned}$$

Lema 2.2.11. *Sea $f[a,b] \to \mathbb{R}$ acotada y $\phi[a,b] \to \mathbb{R}$. Entonces se cumple que*

1. *$\Gamma_1 \subseteq \Gamma_2$, entonces*
$$U(f,\Gamma_2,\phi) \leqslant U(f,\Gamma_1,\phi)$$
$$L(f,\Gamma_2,\phi) \geqslant L(f,\Gamma_1,\phi)$$
2. *Si Γ, Γ' son dos particiones entonces*
$$L(f,\Gamma,\phi) \leqslant U(f,\Gamma',\phi)$$

Prueba

Para el primer apartado asuma que $\Gamma_2 = \Gamma_1 \cup \{y\}$.
FIG 14.6
Si $x_i < y < x_{i+1}$, entonces tenemos que
$$\begin{aligned} &\sup_{[x_i,x_{i+1}]} (f(x)(\phi(x_{i+1}) - \phi(x_i))) \\ &= \sup_{[x_i,x_{i+1}]} (f(x)((\phi(x_{i+1}) - \phi(y)) - (\phi(y) - \phi(x_i)))) \\ &\geqslant \sup_{[x_i,y]} (f(x)(\phi(y) - \phi(x_i))) \\ &+ \sup_{[y,x_{i+1}]} (f(x)(\phi(x_{i+1}) - \phi(y))). \end{aligned}$$
Por lo tanto $U(f,\Gamma_2,\phi) \leqslant U(f,\Gamma_1,\phi)$.
El segundo apartado se sigue de la siguiente desigualdad. Si $\Gamma_1 = \Gamma \cup \Gamma'$,
$$L(f,\Gamma,\phi) \leqslant L(f,\Gamma_1,\phi) \leqslant U(f,\Gamma_1,\phi) \leqslant U(f,\Gamma',\phi).$$

Teorema 2.2.12. *Sea $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ continua y $\phi : [a,b] \to \mathbb{R}$ de variación acotada. Entonces f es integrable respecto a ϕ y además*
$$\left|\int_a^b f \mathrm{d}\phi\right| \leqslant \sup_{x \in [a,b]} (f(x)) \mathrm{Var}[\phi,[a,b]]$$

Prueba

Sabemos que exsiten ϕ_1, ϕ_2 crecientes tales que $\phi = \phi_1 - \phi_2$. Esto nos dice que
$$R(f,\Gamma,\phi) = R(f,\Gamma,\phi_1) - R(f,\Gamma,\phi_2)$$
De aquí tenemos que basta probar el resultado para ϕ creciente. Tenemos que mostar que existe I tal que para todo $\varepsilon > 0$ existe $\delta > 0$ que satisface
$$|\Gamma| < \delta \Rightarrow |R(f,\Gamma,\phi) - I| < \varepsilon$$
Recordemos que $M_i = \sup_{x \in [x_{i-1},x_i]} f(x) = f(\eta_i)$ se alcanza por compacidad del dominio. Análogamente $m_i = \inf_{x \in [x_{i-1},x_i]} f(x) = f(\theta_i)$ con $x_{i-1} \leqslant \theta_i, \eta_i \leqslant x_i$.
Note que
$$\begin{aligned} 0 &\leqslant U(f,\Gamma,\phi) - L(f,\Gamma,\phi) \\ &= \sum_{i \in [n]} (f(\eta_i) - f(\theta_i))(\phi(x_i) - \phi(x_{i-1})) \\ &\leqslant \sum_{i \in [n]} |f(\eta_i) - f(\theta_i)|(\phi(x_i) - \phi(x_{i-1})) \end{aligned}$$

Sabemos que dado $\varepsilon>0$ existe $\delta>0$ tal que
$$|x-x'|<\delta \Rightarrow |f(x)-f(x')|<\frac{\varepsilon}{2(\phi(a)-\phi(b))}$$
Luego si $|\Gamma|<\delta$, entonces $|\eta_i-\theta_i|<\delta$ y
$$\begin{aligned}0&\leqslant U(f,\Gamma,\phi)-L(f,\Gamma,\phi)\\ &\leqslant \frac{\varepsilon}{2(\phi(a)-\phi(b))}\sum_{i\in[n]}\phi(x_i)-\phi(x_{i-1})=\frac{\varepsilon}{2}\end{aligned}$$

2.3. Día 15— 17-5-18

La clase pasada estabamos probando el teorema 2.2.12 y vimos que bastaba probarlo para ϕ creciente. Dado $\varepsilon>0$ existe $\delta>0$ tal que
$$|x-x'|<\delta \Rightarrow |f(x)-f(x')|<\frac{\varepsilon}{2(\phi(a)-\phi(b))}$$
Por qué nos servía que ϕ fuese creciente? Porque al esto nos garantiza el control de R por U,L. Entonces vamos a probar que U's convergen a algo y por lo tanto las R's convergen también.

Vamos a probar que existen I,δ_1 tales que
$$|\Gamma|<\delta_1 \Rightarrow |U(f,\Gamma,\phi)-I|<\frac{\varepsilon}{2}$$
Cómo es que esto prueba que R converge a algo? En este caso tendríamos que
$$\begin{aligned}R(f,\Gamma,\phi)-I&\leqslant U(f,\Gamma,\phi)-I\\ &\geqslant\frac{\varepsilon}{2}\end{aligned}$$
Tenemos la desigualdad inversa a partir de
$$\begin{aligned}R(f,\Gamma,\phi)-I&\geqslant L(f,\Gamma,\phi)-I\\ &\geqslant U(f,\Gamma,\phi)-I-\frac{\varepsilon}{2}\\ &\geqslant -\varepsilon\end{aligned}$$
Y esto va a ocurrir siempre que $|\Gamma|<\text{mín}\{\delta,\delta_1\}$.

Probamos que las U's convergen.

Prueba

Tome $(\Gamma_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sucesión de particiones que en malla van para cero, es decir $|\Gamma_n|\xrightarrow[n\to\infty]{}0$. Cuál es el problema que tenemos cuando una sucesión de particiones van en malla hacia cero? Que las distancias de los elementos se van acercando. Pero las particiones no necesariamente tienen elementos comunes, no hay un orden. Para ellos inducimos uno a la fuerza.

Defina $\Gamma'_k=\cup_{i\in[k]}\Gamma_i$ y vea que $\Gamma_k\subseteq\Gamma'_k$. Entonces $\Gamma'_k\subseteq\Gamma'_{k+1}$. Cuando las particiones van decreciendo, las U's se van haciendo más pequeñas.

Tome $I=\text{ínf}_{n\geqslant 1}U(f,\Gamma'_n,\phi)$, por definición de ínf tenemos que existe $k_0>0$ tal que
$$\begin{aligned}&I\leqslant U(f,\Gamma'_{k_0},\phi)\leqslant I+\frac{\varepsilon}{2}\\ \Rightarrow &I\leqslant U(f,\Gamma'_k,\phi)\leqslant I+\frac{\varepsilon}{2},\quad \text{si } k>k_0\end{aligned}$$
Entonces tenemos que
$$\begin{aligned}U(f,\Gamma_k,\phi)&\geqslant U(f,\Gamma'_k,\phi)\\ &\geqslant I\end{aligned}$$
Por otro lado para obtener la otra desigualdad usamos L's. Si $|\Gamma_k|<\delta$ entonces
$$\begin{aligned}U(f,\Gamma_k,\phi)&\leqslant L(f,\Gamma_k,\phi)+\frac{\varepsilon}{2}\\ &\leqslant L(f,\Gamma'_k,\phi)+\frac{\varepsilon}{2}\\ &\leqslant U(f,\Gamma_k,\phi)+\frac{\varepsilon}{2}\\ &I+\varepsilon\end{aligned}$$
Entonces quién es el δ que nos sirve? Necesitamos dos condiciones

- $|\Gamma_k|<\delta$,
- $k\geqslant k_0$

Luego si $\delta_1=\frac{1}{2}\text{mín}\{\delta,|\Gamma'_{k_0}|\}$ entonces tenemos que
$$|\Gamma_k|<\delta_1\Rightarrow|U(f,\Gamma_k,\phi)-I|<\varepsilon$$
El problema es que sólo estamos hablando de una sucesión en particular. Si hablamos de otra sucesión queremos que se comporte igual. Es análogo a continuidad por sucesiones.

Ejercicio 2.3.1. Si $(\Gamma_n)_{n\in\mathbb{N}},(\hat{\Gamma}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ son sucesiones tales que
$$\lim_{n\to\infty}|\Gamma_n|=\lim_{n\to\infty}|\hat{\Gamma}_n|=0$$
Entonces se cumple que
$$\lim_{n\to\infty}U(f,\Gamma_n,\phi)=\lim_{n\to\infty}U(f,\hat{\Gamma}_n,\phi)$$

Note que si ϕ es creciente entonces siempre tenemos
$$\begin{aligned}R(f,\Gamma_n,\phi)&\leqslant\sum_{i\in[n]}f(\xi_i)(\phi(x_i)-\phi(x_{i-1}))\\ &\leqslant\sup_{x\in[a,b]}f(x)\sum_{i\in[n]}(\phi(x_i)-\phi(x_{i-1}))\\ &\leqslant\sup_{x\in[a,b]}f(x)(\phi(b)-\phi(a)\end{aligned}$$
De manera análoga $\text{ínf}_{x\in[a,b]}f(x)(\phi(b)-\phi(a)\leqslant R(f,\Gamma_n,\phi)$. Si f es RS-integrable respecto a ϕ tendremos que
$$\inf_{x\in[a,b]}f(x)(\phi(b)-\phi(a)\leqslant\int_a^b f\mathrm{d}\phi\leqslant\sup_{x\in[a,b]}f(x)(\phi(b)-\phi(a)$$
Luego si f es continua, existe $\xi\in[a,b]$ tal que
$$f(\xi)(\phi(b)-\phi(a))=\int_a^b f\mathrm{d}\phi$$

Teorema 2.3.2. *Asuma que las integrales* $\int_a^b f_1 \mathrm{d}\phi$, $\int_a^b f_2 \mathrm{d}\phi$ *existen. Entonces tenemos que* $\int_a^b (cf_1+f_2)\mathrm{d}\phi$ *existe y es igual a* $c\int_a^b f_1\mathrm{d}\phi + \int_a^b f_2 \mathrm{d}\phi$. *Además* $\int_a^b f_1 \mathrm{d}(c\phi) = c\int_a^b f_1 \mathrm{d}\phi$.

Prueba

Denotemos $I_1 = \int_a^b f_1\mathrm{d}\phi, I_2 = \int_a^b f_2\mathrm{d}\phi$. Sabemos que dado $\varepsilon > 0$ existe δ_1, δ_2 tales que para particiones Γ_1, Γ_2 de $[a,b]$ se cumple

$$|\Gamma_1| < \delta_1 \Rightarrow |R(f_1,\Gamma_1,\phi) - I_1| < \frac{\varepsilon}{2|c|}$$

$$|\Gamma_2| < \delta_2 \Rightarrow |R(f_2,\Gamma_2,\phi) - I_2| < \frac{\varepsilon}{2}$$

Cómo son las sumas de Riemann de cf_1+f_2? Necesitamos averiguar cuál es la partición. Sea $\Gamma = \Gamma_1 \cup \Gamma_2 = \{a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b\}$ un refinamiento de Γ_1, Γ_2, entonces

$$R(cf_1+f_2,\Gamma,\phi) = \sum_{i\in[n]} (cf_1+f_2)(\xi_i)(\phi(x_i) - \phi(x_{i-1})).$$

Si S_1, S_2 son respectivamente las sumas de Riemann de f_1, f_2, entonces la suma de cf_1+f_2 es claramente cS_1+S_2. De esta manera

$$|R(cf_1+f_2,\Gamma,\phi) - (cI_1+I_2)| \leqslant |c||R(f_1,\Gamma,\phi) - I_1| + |R(f_2,\Gamma,\phi) - I_2| \leqslant |c|\frac{\varepsilon}{2|c|} + \frac{\varepsilon}{2},$$

cuando $|\Gamma| \to 0$.

También hay linealidad en ϕ.

Teorema 2.3.3. *Asuma que las integrales* $\int_a^b f\mathrm{d}\phi_1$, $\int_a^b f\mathrm{d}\phi_1$ *existen. Entonces tenemos que* $\int_a^b f\mathrm{d}(\phi_1+\phi_2)$ *existe y es igual a* $\int_a^b f\mathrm{d}\phi_1 + \int_a^b f\mathrm{d}\phi_2$.

Teorema 2.3.4. *Asuma que* $\int_a^b f\mathrm{d}\phi$ *existe. Si* $a<c<b$ *entonces*

$$\int_a^b f\mathrm{d}\phi = \int_a^c f\mathrm{d}\phi + \int_c^b f\mathrm{d}\phi$$

Ejercicio 2.3.5. Pruebe los dos teoremas anteriores.

Procedemos con el teorema 2.3.3.

En efecto, sea $\Gamma = (x_i)_{i\in[n]}$ una partición de $[a,b]$ con $x_1 = a, x_n = b$. Como las integrales existen, llamémolas I_1, I_2 respectivamente. De esta manera, para $\varepsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que

$$|\Gamma| < \delta \Rightarrow |R(f,\Gamma,\phi_1) - I_1| < \frac{\varepsilon}{2}$$

$$\Rightarrow |R(f,\Gamma,\phi_2) - I_1| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Consideramos la suma $R(f,\Gamma,\phi_1+\phi_2)$. Vea que

$$\begin{aligned}\lim_{|\Gamma|\to 0} R(f,\Gamma,\phi_1+\phi_2) &= \lim_{|\Gamma|\to 0} (R(f,\Gamma,\phi_1) + R(f,\Gamma,\phi_2)) \\ &= \lim_{|\Gamma|\to 0} (R(f,\Gamma,\phi_1)) \\ &\quad + \lim_{|\Gamma|\to 0} (R(f,\Gamma,\phi_2)) \\ &= I_1 + I_2.\end{aligned}$$

De esta manera $R(f,\Gamma,\phi_1+\phi_2)$ converge y converge a la suma de las integrales.

Ahora veremos la prueba del teorema 2.3.4.

En efecto, sea Γ una partición de $[a,b]$ con $\Gamma=(x_i)_{i\in[n]}$. Sea $R(f,\Gamma,[a,b])$ la suma de f respecto a Γ.
Para ver que $\int_a^c f\mathrm{d}\phi$ existe vamos a usar la condición de Cauchy sobre integrales.
Sea $\varepsilon>0$. Como $\int_a^b f\mathrm{d}\phi$ existe, también existe $\delta>0$ tal que para cualesquiera Γ_1,Γ_2, particiones de $[a,b]$ con $|\Gamma_1|,|\Gamma_2|<\delta$ se cumple

$$|R(f,\Gamma_1,[a,b])-R(f,\Gamma_2,[a,b])|<\varepsilon.$$

Sean Γ_1',Γ_2' particiones de $[a,c]$ y $\hat{\Gamma}$ partición de $[c,b]$ de manera que $\Gamma_i=\Gamma_i'\cup\hat{\Gamma}$. Tomamos los puntos intermedios de las particiones de manera que se cumple

$$R(f,\Gamma_1,[a,b])=R(f,\Gamma_1',[a,c])+R(f,\hat{\Gamma},[c,b]),$$
$$R(f,\Gamma_2,[a,b])=R(f,\Gamma_2',[a,c])+R(f,\hat{\Gamma},[c,b]).$$

Si suponemos que $|\Gamma_1'|,|\Gamma_2'|<\delta$ y tomamos $\hat{\Gamma}$ de manera que $|\hat{\Gamma}|<\delta$, entonces se sigue que $|\Gamma_1|,|\Gamma_2|<\delta$ por los argumentos anteriores. Ahora de las igualdades anteriores tenemos

$$\begin{aligned}&|R(f,\Gamma_1',[a,c])-R(f,\Gamma_2',[a,c])|\\ &\leqslant|R(f,\Gamma_1,[a,b])-R(f,\Gamma_2,[a,b])|\\ &<\varepsilon,\text{ cuando } |\Gamma_1'|,|\Gamma_2'|<\delta.\end{aligned}$$

Es decir, existe la integral $\int_a^c f\mathrm{d}\phi$.
La estrategia es análoga para mostrar que $\int_c^b f\mathrm{d}\phi$ existe. Tomamos un par de particiones de $[c,b]$ y les regalamos puntos. Tomamos una partición suficientemente buena de $[a,c]$ y deducimos fórmulas como las anteriores.
Finalmente de cualquiera de las dos ecuaciones, tomando límites de norma de partición obtenemos

$$\int_a^b f\mathrm{d}\phi=\int_a^c f\mathrm{d}\phi+\int_c^b f\mathrm{d}\phi.$$

Prueba

Sean $\Gamma=\{x_0<x_1<\cdots<x_n\}$ y $x_{i-1}<\xi_i<x_i$. Entonces

$$R(f,\Gamma,\phi)=\sum_{i\in[n]}f(\xi_i)(\phi(x_i)-\phi(x_{i-1}))$$

Tome $\Gamma'=\{a=\xi_0<\xi_1<\cdots<\xi_n=b\}$, ahora

$$\begin{aligned}R(f,\Gamma,\phi)&=\sum_{i\in[n]}f(\xi_i)\phi(x_i)-\sum_{i\in[n]}f(\xi_i)\phi(x_{i-1})\\ &=\sum_{i\in[n]}f(\xi_i)\phi(x_i)-\sum_{i\in[n-1]^*}f(\xi_{i+1})\phi(x_i)\\ &=\sum_{i\in[n-1]}(f(\xi_{i+1})-f(\xi_i))\phi(x_i)\\ &\quad+f(\xi_n)\phi(x_n)-f(\xi_1)\phi(x_0)\\ &\quad(=f(\xi_n)\phi(b)-f(\xi_1)\phi(a))\\ &=-\sum_{i\in[n]^*}\phi(x_i)(f(\xi_{i+1})-f(\xi_i))\\ &\quad+f(\xi_n)\phi(b)-f(\xi_1)\phi(a)\\ &\quad+\phi(x_0)(f(\xi_1)-f(\xi_0))\\ &\quad+\phi(x_n)(f(\xi_{n+1})-f(\xi_n))\end{aligned}$$

Luego queremos relacionar el tamaño de las mallas, así podemos tomar límites y sacar las integrales. Note que

$$\sup_{i\in[n]}|x_i-x_{i-1}|\leqslant 2\sup_{i\in[n+1]}|\xi_i-\xi_{i-1}|$$

puesto que $x_i-x_{i-1}\leqslant\xi_{i+1}-\xi_{i-1}=(\xi_{i+1}-\xi_i)+\xi_i-\xi_{i-1}$. De igual forma $|\Gamma'|\leqslant 2|\Gamma|$.

Teorema 2.3.6. *Si $\int_a^b f\mathrm{d}\phi$ existe, entonces $\int_a^b \phi\mathrm{d}f$ existe. Además*

$$\int_a^b f\mathrm{d}\phi+\int_a^b\phi\mathrm{d}f=\phi(b)f(b)-\phi(a)f(a)$$

Ejercicio 2.3.7. Si ϕ es diferenciable y $\int_a^b f\mathrm{d}\phi$ existe, entonces $\int_a^b f\mathrm{d}\phi=\int_a^b f(x)\phi'(x)\mathrm{d}x$

En efecto, sea $\Gamma=(x_i)_{i\in[n]}$ partición de $[a,b]$. Por el teorema del valor medio, podemos tomar $\eta_i\in[x_{i-1},x_i]$ para $i\in[n]$ de manera que
$$|\phi(x_i)-\phi(x_{i-1})|=\phi'(\eta_i)|x_i-x_{i-1}|.$$
Por definición de suma de Riemann-Stieltjes, los puntos, $(\xi_i)_{i\in[n]}$, en medio de los bloques de la partición simplemente deben cumplir estar en el intervalo $[x_{i-1},x_i]$. Así, sin perdida de generalidad tomamos $xi_i=\eta_i$ para todo $i\in[n]$. La suma será
$$\begin{aligned}R(f,\Gamma,\phi)&=\sum_{i\in[n]}f(\eta_i)(\phi(x_i)-\phi(x_{i-1}))\\&=\sum_{i\in[n]}f(\eta_i)\phi'(\eta_i)(x_i-x_{i-1}),\end{aligned}$$
que por definición de suma de Riemann converge a $\int_a^b f\phi'\mathrm{d}x$ cuando la malla de $|\Gamma|$ tiende a cero. Así como $R(f,\Gamma,\phi)$ converge a $\int_a^b f\mathrm{d}\phi$, concluimos la igualdad.

Medida

Queremos medir longitudes, por ejemplo medir longitudes en $\mathbb{R}$. Sea m una "medida". Para un intervalo $[a,b]$ tendríamos $m([a,b])=b-a$. A la vez intuitivamente $m(]b,a])=b-a$. De aquí $m(\{b\})=0$.

Si $A=\bigcup_{i\in[n]}[a_i,b_i]$ donde los intervalos no se traslapan, tendríamos que $m(A)=\sum_{i\in[n]}b_i-a_i$. Intuitivamente $m(A\cup B)=m(A)+m(B)$ dado $A\cap B=\varnothing$ y $m(\bigcup_{i\in[n]}\{a_i\})=0$.

Qué pasa si $A=\bigcup_{i\in\mathbb{N}}[a_i,b_i]$? Con intervalos disjuntos, la medida sería una serie. Así $m(\mathbb{Q})=0$. Para $E\subseteq\mathbb{R}$ queremos aproximarlo con intervalos, pues podemos medir intervalos. Intuitivamente si un conjunto está metido en otro, la medida del grande es mayor a la del pequeño. Es decir $E\subset\bigcup_{i\in[n]}I_i$ con $I_i\cap I_j=\varnothing$ para todo i,j. Entonces la medida "exterior" de E sería $m^+(E)=\inf\sum_{i\in\mathbb{N}}m(I_i)$.

Recuerde que Arquimedes para medir areas, las aproximaba por poligonos y tomaba límites de alguna forma.

Si $\mathbf{1}$ es la función indicatriz, vamos a mostrar que $\int\mathbf{1}_B\mathrm{d}x=m(B)$. A partir de esto $\int\mathbf{1}_{\mathbb{Q}}\mathrm{d}x=0$ y $\int\mathbf{1}_{\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}}\mathrm{d}x=1$.

En general si $f_n\to f$, la pregunta que queremos responder es, cuándo se cumple $\int f_n\mathrm{d}x=\int f\mathrm{d}x$?

2.4. Día 16— 22-5-18

La medida de Lebesgue

Sea $S=\{[a,b[:\ a<b\}\cup\{\varnothing\}\cup\{]-\infty,b]:\ b\in\mathbb{R}\}\cup\{[a,\infty[\}$ y defina la colección $\mathcal{A}_1=\left\{\bigcup_{i\in[n]}I_i:\ I_i\in S\right\}$.

Retomamos la idea de la medida exterior, así definimos

- $m_e([a,b[)=b-a$,
- $m_e(]-\infty,b])=\infty$,
- $m_e([a,\infty[)=\infty$,
- Si $I_i\cap I_j=\varnothing$ entonces $m_e\left(\bigcup_{i\in[n]}I_i\right)=\sum_{i\in[n]}m_e(I_i)$ siempre que $I_i\in S$.

Hay que mostrar que esta noción está bien definida. Si $[a,b[=\bigcup_{i\in[k]}I_i$ con I_j's disjuntos, entonces $I_i=[a_i,b_i[$ con $a_i<a_j$ si $i<j$. Como $[a_1,b_1]\cap[a_2,b_2[=\varnothing$ entonces $a_2\geqslant b_1$. Al ser $[a,b[$ conexo tenemos que $a_2=b_1$. Por lo tanto $b_i=a_{i+1}$.

Entonces dado $a_1=a,b_k=b$ tenemos una suma telescópica.
$$\sum_{i\in[k]}m(I_i)=\sum_{i\in[k]}b_i-a_i=b-a$$
Por otro lado si ocurre que $I_i\cap I_{i+1}\neq\varnothing$ entonces sólo tenemos $b_i>a_{a+1}$ luego $b_i-a_i>a_{i+1}-a_i$ y entonces $\sum_{i\in[n]}b_i-a_i\geqslant b-a$.

Sin embargo vea que esto no nos basta para aproximar. La medida exterior de un punto sería la medida de $[a,a[$ o sea 0. Luego la medida de $\mathbb{N}$ debería de ser cero, pero $\mathbb{N}\subseteq[a,\infty[$ y esto tiene medida infinita.

Arreglamos este problema al considerar uniones infinitas.

Definición 2.4.1. Definimos la medida exterior de un conjunto $E\subseteq\bigcup_{i\in\mathbb{N}}I_i$ para $I_i\in S$ como
$$m_e(E)=\inf\sum_{i\in\mathbb{N}}m(I_i)$$
En esta definición $m(I_i)=b_i-a_i$ si $I_i=[a,b[$ y $m(\varnothing)=0$.

Note que si $E_1\subseteq E_2$, entonces $m_e(E_1)\leqslant m_e(E_2)$.

Ejercicio 2.4.2. Pruebe el hecho anterior.

Lema 2.4.3. *La medida exterior de un intervalo es su longitud. Es decir $m_e([a,b[)=b-a$.*

Prueba

Sea $E=[a,b[$ entonces $E\subseteq[a,b[$, luego $m_e(E)\leqslant b-a$. Es menor igual porque la medida exterior es el ínf.
Vamos a convertir E en un compacto y los I_i's abiertos por topología usual. Luego por compactificación tendremos un cubrimiento finito.
Si $E\subseteq\cup_{i\in\mathbb{N}}I_i$, tome $\varepsilon>0$ tal que $a<b-2\varepsilon$. Es decir $[a,b-\varepsilon]\subseteq E\subseteq\cup_{i\in\mathbb{N}}I_i$.

El siguiente problema es que los I_i's no son abiertos. En vez de hacerlos más pequeños, los alargamos. Sea $I_i^* \in S$ tal que $I_i \subseteq (I_i^*)^o$ y $m(I_i^*) \leqslant (1+\varepsilon)m(I_i)$.
FIG 16.1
Entonces $[a,b-\varepsilon] \subseteq \cup_{i\in\mathbb{N}}(I_i^*)^o$,
$\Rightarrow \exists k_0: \quad [a,b-\varepsilon] \subseteq \cup_{i\in[k_0]}(I_i^*)^o \subseteq \cup_{i\in[k_0]} I_i^*$
Así $[a,b-2\varepsilon] \subseteq \cup_{i\in[k_0]}(I_i^*)^o$. Aquí lo que tenemos es que

$$\begin{aligned} b-a-2\varepsilon &\leqslant \sum_{i\in[k_0]} m(I_i^*) \\ &\leqslant (1+\varepsilon)\sum_{i\in[k_0]} m(I_i) \\ &\leqslant (1+\varepsilon)\sum_{i\in\mathbb{N}} m(I_i) \\ \Rightarrow \frac{b-a-2\varepsilon}{1+\varepsilon} &\leqslant \sum_{i\in\mathbb{N}} m(I_i) \end{aligned}$$

Por lo tanto $\frac{b-a-2\varepsilon}{1+\varepsilon} \leqslant m_e([a,b[)$. Por definición de inf obtenemos el resultado.

Mientras mantengamos el control de qué tanto están variando los conjuntos vamos a poder aproximar.

Sean $E_k, E \subseteq \mathbb{R}$ tales que $E \subseteq \bigcup_{k\in\mathbb{N}} E_k$. Vamos a probar que

$$m_e(E) \leqslant \sum_{k\in\mathbb{N}} m_e(E_k)$$

Prueba

Sin perdida de generalidad $m_e(E_k) < \infty$. De lo contrario la desigualdad es trivial. Entonces existe $E_k \; \cup_{i\in\mathbb{N}} \; I_i^k$, cubrimiento, tal que $\sum_{i\in\mathbb{N}} m(I_i^k) \leqslant m_e(E_k) + \frac{\varepsilon}{2^k}$. Por definición de ínf, al sumar este ε agarramos a uno de los I_i^k's.
Tomando la unión sobre k tenemos que

$$\begin{aligned} E &\subseteq \cup_{k\in\mathbb{N}} \cup_{i\in\mathbb{N}} I_i^k \\ \Rightarrow m_e(E) &\leqslant \sum_{k,i\in\mathbb{N}} m(I_i^k) \\ &\leqslant \sum_{k\in\mathbb{N}} \left(m(E_k) + \frac{\varepsilon}{2^k} \right) \end{aligned}$$

Por lo tanto $m_e(E) \leqslant (\sum_{k\in\mathbb{N}} m_e(E_k)) + \varepsilon$.

No se complique con quien es quien, la idea siempre es aproximar.

Formalmente el lema es el siguiente.

Lema 2.4.4. *Si* $E \subseteq \bigcup_{k\in\mathbb{N}} E_k$ *entonces* $m_e(E) \leqslant \sum_{k\in\mathbb{N}} m_e(E_k)$.

Ejemplo 2.4.5. Vamos a medir algunos conjuntos.

1. $m_e(\{a\})$,
2. $m_e([a,b])$,
3. $m_e(]a,b[)$,
4. $m_e(]a,b])$.

1. Como $\{a\} \subseteq [a,a+\varepsilon[$, entonces $m_e(\{a\}) \leqslant \varepsilon$ para todo $\varepsilon > 0$. Luego $m_e(\{a\}) = 0$.
2. Como $[a,b[\subseteq [a,b]$ entonces
$$b-a = m_e([a,b[) \leqslant m_e([a,b])$$
Además $[a,b] = [a,b[\cup \{b\}$, de aquí
$$m_e([a,b]) \leqslant m_e([a,b[) + m_e(\{b\}) = b-a$$

Ejercicio 2.4.6. Pruebe los casos que faltan del ejemplo anterior.

Queremos pasarnos a más dimensiones. Defina $S_d = \left\{ \times_{i\in[d]} I_i : \; I_i \in S \right\}$. note que $\times_{i\in[d]} [a_i,b_i[\in S_d$.
FIG 16.2

Definición 2.4.7. Dado $E \subseteq \mathbb{R}^d$ con $E \subseteq \bigcup_{i\in\mathbb{N}} I_i$ dados $I_i \in S_d$, definimos

$$m_e(E) = \inf \sum_{i\in\mathbb{N}} m(I_i)$$

Aquí $m(\times_{i\in[d]} \; I_i) = \prod_{i\in[d]} m(I_i)$. Es decir $m(\times_{i\in[d]} [a_i,b_i[) = \prod_{i\in[d]} (b_i - a_i)$.

Lema 2.4.8. *Si* $E_1 \subseteq E_2$, *entonces* $m_e(E_1) \leqslant m_e(E_2)$.

Lema 2.4.9. $m_e(\times_{i\in[d]} [a_i,b_i[) = \prod_{i\in[d]} (b_i - a_i)$

Lema 2.4.10. *Si* $E \subseteq \bigcup_{k\in\mathbb{N}} E_k$, *entonces* $m_e(E) \leqslant \sum_{k\in\mathbb{N}} m_e(E_k)$.

Ejercicio 2.4.11. Pruebe los lemas anteriores adaptando las pruebas de una dimensión.

Ejemplo 2.4.12. Vamos a medir $[a,b] \times \{c\} \subseteq \mathbb{R}^2$

Observe que

$$\begin{gathered} m_e([a,b] \times \{c\}) \\ \leqslant [a,b+\varepsilon[\times [c,c+\varepsilon[\\ \varepsilon(b-a+\varepsilon) \end{gathered}$$

Luego este conjunto tiene medida cero.

Lema 2.4.13. *Sea* $E \subseteq \mathbb{R}^d$, *entonces existe* G *abierto tal que* $E \subseteq G$ *y*

$$m_e(E) \leqslant m_e(G) \leqslant m_e(E) + \varepsilon$$

Es decir $m_e(E) = \inf_{E\subseteq G} m_e(G)$ *con* G *abierto.*

La prueba empieza por aproximarlo con cajas. Recuerde que ahora estamos en varias dimensiones y debemos considerar cajas.

Prueba

Sea $\varepsilon > 0$, entonces existe $I_k \in S_d$ tal que $E \subseteq \cup_{k\in\mathbb{N}} I_k$ y $m_e(E) \leqslant \sum_{k\in\mathbb{N}} m(I_k) \leqslant m_e(E) + \frac{\varepsilon}{2}$. Entonces sea $I_k^* \in S_d$ tal que $I_k \subseteq (I_k^*)^o$ con $m(I_k^*) \leqslant m(I_k) + \frac{\varepsilon}{2^{k+1}}$.
El G que vamos a tomar será $G = \cup_{k\in\mathbb{N}} (I_k^*)^o$. Luego

$$\begin{aligned} m_e(G) &\leqslant \sum_{k\in\mathbb{N}} m_e((I_k^*)^o) \\ &\leqslant \sum_{k\in\mathbb{N}} m_e(I_k^*) \\ &\leqslant \sum_{k\in\mathbb{N}} m_e(I_k) + \frac{\varepsilon}{2^{k+1}} \\ &\leqslant m_e(E) + \varepsilon \end{aligned}$$

Esto nos permite cambiarnos a conjuntos abiertos. No es que sea muy ventajoso, la intuición geométrica viene dada más por las cajas que por abiertos cualesquiera.

Definición 2.4.14. Un conjunto G se dice ser G_δ si existen $(G_k)_{k\in\mathbb{N}}$ abiertos, tales que $G = \bigcap_{k\in\mathbb{N}} G_k$.

Si $m_e(E) < \infty$, entonces existe G_k tal que

$$m_e(E) \leqslant m_e(G_k) \leqslant m_e(E) + \frac{1}{k}$$

Luego si $H = \cap_{k\in\mathbb{N}} G_k$ que contiene a E, tenemos que

$$\begin{aligned} m_e(E) \leqslant m_e(H) &\leqslant m_e(G_k) \\ &\leqslant m_e(E) + \frac{1}{k} \end{aligned}$$

Esto nos da el siguiente lema.

Lema 2.4.15. *Si $E \subseteq \mathbb{R}^d$, existe H un conjunto G_δ tal que $m_e(E) = m_e(H)$.*

Los conjuntos que vamos a medir, son los que intuitivamente vamos a poder medir.

Definición 2.4.16. Sea $E \subseteq \mathbb{R}^d$, decimos que E es medible si dado $\varepsilon > 0$ existe $G \subseteq \mathbb{R}^d$ abierto tal que $E \subseteq G$ y $m(G \setminus E) < \varepsilon$.

FIG16.3

Todos los conjuntos son medibles? Si $m_e(E) < \infty$, existe G tal que $m_e(G) \leqslant m_e(E) + \varepsilon$. Note que $m_e(G) = m_e((G \setminus E) \cup E)$. De aquí tenemos que $m_e(G) \leqslant m_e(G \setminus E) + m_e(E)$. Esta desigualdad no es comparable con la anterior. Luego no todo conjunto es medible.

Ejemplo 2.4.17. Cualquier intervalo de $\mathbb{R}$ es medible.

Considere $[a,b[\subseteq]a-\varepsilon,b[= G$. Entonces tenemos que

$$m_e(G \setminus [a,b[) = m_e(]a-\varepsilon,a[) = \varepsilon$$

Ejercicio 2.4.18. Pruebe los demás casos con una prueba análoga.

Lema 2.4.19. *La unión de conjuntos medibles es un conjunto medible. Sea $(E_i)_{i\in\mathbb{N}}$ con E_i medible, entonces $\bigcup_{i\in\mathbb{N}} E_i$ es medible.*

Prueba

Sea $\varepsilon > 0$, entonces existe G_i abierto tal que $m_e(G_i \setminus E_i) < \frac{\varepsilon}{2^i}$. Entonces como $G = \bigcup_{k\in\mathbb{N}} G_k$ es abierto, buscamos $m_e(G \setminus \bigcup_{i\in\mathbb{N}} E_i)$.

$$\begin{aligned} & m_e\left(G \setminus \bigcup_{i\in\mathbb{N}} E_i\right) \\ &= m_e\left(\bigcup_{i\in\mathbb{N}} G_i \setminus \bigcup_{i\in\mathbb{N}} E_i\right) \\ &\leqslant m_e\left(\bigcup_{i\in\mathbb{N}} G_i \setminus E_i\right) \leqslant \sum_{i\in\mathbb{N}} m_e(G_i \setminus E_i) = \varepsilon \end{aligned}$$

Lema 2.4.20. *Sean $I_k \subseteq \mathbb{R}^d$ con $I_k = \bigtimes_{i\in[d]} [a_i^k, b_i^k]$ tal que $I_i^o \cap I_j^o = \emptyset$. Entonces $m_e(\bigcup_{k\in[m]} I_k) = \sum_{k\in[m]} m_e(I_k)$.*

Ejercicio 2.4.21. Pruebe el lema anterior.

Lema 2.4.22. *Sean $E_1, E_2 \subseteq \mathbb{R}^d$ tal que $\mathfrak{m}(E_1, E_2) > 0$. Entonces*

$$m_e(E_1 \cup E_2) = m_e(E_1) + m_e(E_2)$$

Prueba

Sea $\varepsilon > 0$, entonces existen $I_k \in S_d$ tales que

$$E_1 \cup E_2 \subseteq \bigcup_{k\in\mathbb{N}} I_k$$

Con $m_e(E_1 \cup E_2) \leqslant \sum_{k\in\mathbb{N}} m(I_k) \leqslant m_e(E_1 \cup E_2) + \varepsilon$.
FIG 16.4
Dividiendo son I_k's en cajas más pequeñas podemos asumir que $E_1 \cap I_j \neq \emptyset \Rightarrow E_2 \cap I_j = \emptyset$.

Luego observe que
$$\mathbb{N}=\{j\in\mathbb{N}:\ E_j\cap E_1\}\cup\{j\in\mathbb{N}:\ I_j\cap E_2\neq\varnothing\}$$
Denotemos estos conjuntos como Λ_1,Λ_2. Luego
$$\bigcup_{k\in\mathbb{N}} I_k=\bigcup_{k\in\Lambda_1} I_k\cup\bigcup_{k\in\Lambda_2} I_k$$
Ahora $E_1\subseteq\bigcup_{k\in\Lambda_1} I_k$ pues si $e\in E_1$ entonces $e\in\bigcup_{k\in\Lambda_1} I_k$ ó bien $e\in\bigcup_{k\in\Lambda_2} I_k$. Como $I_i\cap E_1=\varnothing$ cuando $i\in\Lambda_2$, tenemos que $e\in\bigcup_{k\in\Lambda_1} I_k$.
Finalmente tenemos que
$$m_e(E_1)\leqslant\sum_{k\in\Lambda_1} m(I_k)$$
$$m_e(E_2)\leqslant\sum_{k\in\Lambda_2} m(I_k)$$
$$\Rightarrow m_e(E_1)+m_e(E_2)\leqslant\sum_{k\in\mathbb{N}} m(I_k)$$
$$\leqslant m_e(E_1\cup E_2)+\varepsilon$$

2.5. Día 17— 24-5-18

Por el momento sabemos que la unión de conjuntos medibles es medible. Vamos a ver los complementos de medibles también lo son. Para ello, veremos que los cerrados lo son y así vamos a ver un criterio de medición respecto a cerrados. Usando esto vamos a probar que la medida de la unión de dos conjuntos disjuntos es la suma de las medidas.

Lema 2.5.1. *Sea $G\subseteq\mathbb{R}^d$ abierto, entonces $G=\bigcup_{k\in\mathbb{N}} I_k$ con $I_k=\bigtimes_{i\in\mathbb{N}}[a_i^k,b_i^k]$ y $I_k^o\cap I_\ell^o=\varnothing$ para $k\neq\ell$.*

Ejercicio 2.5.2. Observe que este lema es el séptimo ejercicio del primer examen. Demuestrelo.

Teorema 2.5.3. *Sea $F\subseteq\mathbb{R}^d$ cerrado, entonces F es medible.*

Prueba

Primero asumamos que F es acotado como una hipótesis extra. Dado $\varepsilon>0$ existe G abierto tal que $m_e(G)\leqslant m_e(F)+\varepsilon$.
FIG17.1
Como $G\backslash F$ es abierto, entonces $G\backslash F=\bigcup_{k\in\mathbb{N}} I_k$ con I_k iguales que en el lema 2.5.1. Note que $\bigcup_{k\in[m]} I_k\cap F=\varnothing$ porque están en el complemento. Como ambos son compactos entonces se cumple que $\mathfrak{m}(\bigcup_{k\in[m]} I_k,F)>0$.

Aplicamos el lema 2.4.22 tenemos que
$$m_e(F)+m_e(\bigcup_{k\in[m]} I_k)=m_e(\bigcup_{k\in[m]} I_k\cup F)$$
$$\leqslant m_e(G)$$
$$\Rightarrow m_e(\bigcup_{k\in[m]} I_k)\leqslant m_e(G)-m_e(F)\leqslant\varepsilon$$
$$\Rightarrow\sum_{k\in[m]} m_e(I_k)\leqslant\varepsilon$$
$$\Rightarrow\sum_{k\in\mathbb{N}} m_e(I_k)\leqslant\varepsilon$$

Finalmente $m_e(G\backslash F)=m_e(\bigcup_{k\in\mathbb{N}} I_k)\leqslant\sum_{k\in\mathbb{N}} m_e(I_k)\leqslant\varepsilon$.
Cómo nos quitamos de en cima el hecho de que F no sea acotado? Hay forma de escribir F como unión de conjuntos medibles?
Note que $F=\bigcup_{k\in\mathbb{N}} F\cap\overline{B(0,k)}$, estos conjuntos son compactos y por lo anterior son medibles. Finalmente la unión infinita también es medible. Por lo tanto F es medible.

La estrategia para probar que algo es medible es despedazarlo en objetos que ya sabemos que son medibles. De hecho, esta misma estrategia se usará para probar que los complentos son medibles.

Lema 2.5.4. *Sea E medible, entonces su complemento es medible.*

Prueba

Dado k, existe G_k tal que $m_e(G_k \backslash E) \leqslant \frac{1}{k}$. Cómo relaciono aproximaciones de E por las del complemento?
Nosotros sabemos que si $E \subseteq G_k$ entonces $E^c \supseteq G_k^c$, tomar complementos invierte la inclusión. Este conjunto es un cerrado y por tanto medible. Podemos trabajar con esto.
Tome $H = \bigcup_{k\in\mathbb{N}} G_k^c$, inmediatamente $H \subseteq E^c$ y es medible. A quién no hemos logrado pescar? A los que están en $E^c \backslash H$. Vamos a considerar $m_e(E^c \backslash H)$.

$$\begin{aligned} m_e(E^c \backslash H) &= m_e\left(E^c \cap \left(\bigcap_{k\in\mathbb{N}} G_k\right)\right) \\ &= m_e(E^c \cap G_k) \\ &= m_e(G_k \backslash E) \leqslant \frac{1}{k} \end{aligned}$$

Por lo tanto $F = H \cup (E^c \backslash H)$ y $m_e(E^c \backslash H)$. Por lo tanto F es medible.

En la prueba anterior usamos el siguiente hecho.

Lema 2.5.5. *Suponga que $Z \subseteq \mathbb{R}^d$ tiene medida exterior cero. Entonces Z es medible.*

Prueba

Dado $\varepsilon > 0$ existe $G \supseteq Z$ tal que
$$m_e(G) \leqslant m_e(Z) + \varepsilon = \varepsilon$$
Pero $m_e(G) \geqslant m_e(G \backslash Z)$ y así $m_e(G \backslash Z) \leqslant \varepsilon$. Se concluye que Z es medible.

Sean $E_k \subseteq \mathbb{R}^d$ medibles. Podemos empezar a jugar con operaciones entre conjuntos.
$$\bigcap_{k\in\mathbb{N}} E_k = \left(\bigcup_{k\in\mathbb{N}} E_k^c\right)^c$$
Entonces inmediatamente las intersecciones son medibles. Las intersecciones finitas también tomando $E_k = \varnothing$ salvo finitos k's. De igual manera la resta de medibles es medible.

Definición 2.5.6. Sea Ω un conjunto y $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{P}(\Omega)$. Decimos que $\mathcal{F}$ es una σ-álgebra sobre Ω si se cumplen las siguientes condiciones.
1. $\Omega \in \mathcal{F}$,
2. $E \in \mathcal{F} \Rightarrow E^c \in \mathcal{F}$,
3. Si $E_k \in \mathcal{F}$ para todo $k \in \mathbb{N}$, entonces $\bigcup_{k\in\mathbb{N}} E_k \in \mathcal{F}$.

Ejemplo 2.5.7. Los siguientes son ejemplos de σ-álgebras sobre Ω.
1. $\mathcal{F} = \{\varnothing, \Omega\}$,
2. $\mathcal{F} = \mathcal{P}(\Omega)$.

Si $\Omega = \mathbb{R}^d$ el conjunto de conjuntos medibles es una σ-álgebra sobre $\mathbb{R}^d$.

Definición 2.5.8. Sea $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{P}(\Omega)$, definimos
$$\sigma(\mathcal{A}) = \mathrm{gen}(\mathcal{A}) = \bigcap_{\mathcal{A}\subseteq\mathcal{F}} \mathcal{F}$$
A este conjunto se le llama la σ-álgebra generada por $\mathcal{A}$. Donde $\mathcal{F}$ es una σ-álgebra. Diremos que esta es la σ-álgebra más pequeña que contiene a $\mathcal{A}$.

Ejercicio 2.5.9. Corrobore que en efecto $\mathrm{gen}(\mathcal{A})$ es una σ-álgebra.

Definición 2.5.10. Si τ es una topología sobre $\mathbb{R}^d$, entonces la σ-álgebra $\mathrm{gen}(\tau) = \mathcal{B}$ se conoce como la σ-álgebra Boreliana. Note inmediatamente que $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{M}$, donde $\mathcal{M}$ es el conjunto de conjuntos medibles de $\mathbb{R}^d$.

Finalmente vamos a verificar el hecho que buscabamos desde el principio. La medida de la unión es la suma de las medidas. Empezamos con un lema.

Lema 2.5.11. *Sea $E \subseteq \mathbb{R}^d$, entonces E es medible si y sólo si dado $\varepsilon > 0$ existe $F \subseteq E$ cerrado tal que $m_e(E \backslash F) < \varepsilon$.*

Prueba

Si E es medible, entonces E^c es medible. Dado $\varepsilon > 0$ existe $G \supseteq E^c$ tal que $m_e(G \backslash E^c) < \varepsilon$.
$$\begin{aligned} G \backslash E^c &= G \cap (E^c)^c \\ &= G \cap E \\ &= (G^c)^c \cap E \end{aligned}$$

De esta manera tome $F = G^c$ y entonces $m_e(E \backslash F) < \varepsilon$.

Ejercicio 2.5.12. Prueba la otra dirección del lema anterior.

Definición 2.5.13. Si E es medible, definimos la medida de Lebesgue de E como $m_e(E)$. Denotamos simplemente $m_e \equiv m$.

Teorema 2.5.14. *Sea $(E_k)_{k\in\mathbb{N}} \subseteq \mathcal{M}$. Si $E_k \cap E_\ell = \varnothing$ si $k \neq \ell$ entonces*
$$m\left(\bigcup_{k\in\mathbb{N}} E_k\right) = \sum_{k\in\mathbb{N}} m(E_k)$$

Cada E_k se puede meter en un G_k. Pero al aproximarlos por arriba tenemos problemas de traslapes. Para ello aproximamos por abajo con cerrados por dentro. Satisface buenas aproximaciones y que son disjuntos.

Prueba

Asumamos como una hipótesis extra que E_k es acotado para todo $k \in \mathbb{N}$. Teniendo esto sea $F_k \subseteq E_k$ cerrado. Dado $\varepsilon > 0$ tenemos que

$$m(E_k \backslash F_k) < \frac{\varepsilon}{2^k}$$

Sabemos que todos estos conjuntos $(F_i)_{i\in[m]}$ son compactos y disjuntos. Luego $\mathfrak{m}(F_i,F_j) > 0$ para $i \neq j$.

$$\begin{aligned} m\left(\bigcup_{i\in[m]} F_i\right) &= \sum_{i\in[m]} m(F_i) \\ &\leqslant m\left(\bigcup_{i\in\mathbb{N}} F_i\right) \\ &\leqslant m\left(\bigcup_{k\in\mathbb{N}} E_k\right) \end{aligned}$$

Por lo tanto $\sum_{k\in\mathbb{N}} m(F_k) \leqslant m\,(\bigcup_{k\in\mathbb{N}} E_k)$. Finalmente

$$\begin{aligned} m(E_k) &= m(F_k \backslash (E_k \backslash F_k)) \\ &\leqslant m(F_k) + m(E_k \backslash F_k) \\ \Rightarrow m(E_k) - \frac{\varepsilon}{2^k} &\leqslant m(F_k) \\ \Rightarrow \sum_{k\in\mathbb{N}} m(E_k) - \varepsilon &\leqslant \sum_{k\in\mathbb{N}} m(F_k) \\ &\leqslant m\left(\bigcup_{k\in\mathbb{N}} E_k\right) \end{aligned}$$

Para deshacernos de la condición de acotación, consideramos diferencias de bolas.

$$\begin{aligned} E_k = (E_k \cap B(0,1)) \\ \cup \left(\bigcup_{m\in\mathbb{N}} [B(0,m+1) \backslash B(0,m)] \cap E_k\right) \end{aligned}$$

Tomando unión disjunta sobre k, m entonces obtenemos un conjunto medible por álgebra de conjuntos medibles.

2.6. Día 18— 29-5-18

Recordemos que si E_k es medible y $E_k \cap E_\ell = \varnothing$, para $k \neq \ell$ entonces $m(\bigcup_{k\in\mathbb{N}} E_k) = \sum_{k\in\mathbb{N}} m(E_k)$.

Sean $I_k = \times_{i\in[d]} \left[a_i^k, b_i^k\right]$ tal que $I_k^o \cap I_\ell^o = \varnothing$ para $k \neq \ell$ entonces

$$\begin{aligned} m\left(\bigcup_{k\in\mathbb{N}} I_k^o\right) &= \sum_{k\in\mathbb{N}} m(I_k^o) \\ &= \sum_{k\in\mathbb{N}} m(I_k) \end{aligned}$$

Ahora acotamos con

$$\begin{aligned} m\left(\bigcup_{k\in\mathbb{N}} I_k^o\right) &\leqslant m\left(\bigcup_{k\in\mathbb{N}} I_k\right) \\ &\leqslant \sum_{k\in\mathbb{N}} m(I_k) \end{aligned}$$

Luego $m(\bigcup_{k\in\mathbb{N}} I_k) = \sum_{k\in\mathbb{N}} m(I_k)$. Este resultado es muy importante pues todo abierto se puede descomponer en estas cajas. Esto es en virtud de que la topología producto está generada por elementos básicos I_k's.

Ahora asuma que $E_1 \subseteq E_2$ conjuntos medibles. Entonces $E_2 = E_1 \cup (E_2 \backslash E_1)$, luego $m(E_2) = m(E_1) + m(E_2 \backslash E_1)$. Si $m(E_1) < \infty$ entonces $m(E_2 \backslash E_1) = m(E_2) - m(E_1)$.

Veamos otras cosas que podemos hacer con esto, considere una sucesión de conjuntos medibles $(E_k)_{k\in\mathbb{N}}$ con $E_k \subseteq E_{k+1}$. Entonces podemos separar la unión en conjuntos disjuntos.

$$\bigcup_{k\in\mathbb{N}} E_k = E_1 \cup \bigcup_{i\in\mathbb{N}\backslash\{1\}} E_i \backslash E_{i-1}$$

FIG18.1

Luego

$$\begin{aligned} m\left(\bigcup_{k\in\mathbb{N}} E_k\right) &= m(E_1) + \sum_{i\in\mathbb{N}\backslash\{1\}} m(E_i \backslash E_{i-1}) \\ &= m(E_1) + \sum_{i\in\mathbb{N}\backslash\{1\}} m(E_i) - m(E_{i-1}) \end{aligned}$$

Esto ocurre siempre que $m(E_i) < \infty$ para todo $i \in \mathbb{N}$. Luego la suma que nos queda es una telescópica.

$$\begin{aligned} m(\bigcup_{k\in\mathbb{N}} E_k) &= m(E_1) + \lim_{i\to\infty} m(E_i) - m(E_1) \\ &= \lim_{i\to\infty} m(E_i) \end{aligned}$$

Por otro lado si $E_k \supseteq E_{k+1}$ consideramos

$$E_1 = \left(\bigcup_{k\in\mathbb{N}} E_k \backslash E_{k+1}\right) \cup \left(\bigcap_{k\in\mathbb{N}} E_k\right)$$

Tomando medidas y asumiendo que todos tienen medida finita resulta en

$$\begin{aligned} m(E_1) &= \left(\sum_{k\in\mathbb{N}} m(E_k \backslash E_{k+1})\right) + m\left(\bigcap_{k\in\mathbb{N}} E_k\right) \\ &= \left(\sum_{k\in\mathbb{N}} m(E_k) - m(E_{k+1})\right) + m\left(\bigcap_{k\in\mathbb{N}} E_k\right) \end{aligned}$$

Esta suma vuelve a ser telescópica.

$$\Rightarrow m(E_1)=m(E_1)-\lim_{k\to\infty} m(E_k)+m\left(\bigcap_{k\in\mathbb{N}} E_k\right)$$
$$\Rightarrow m\left(\bigcap_{k\in\mathbb{N}} E_k\right)=\lim_{k\to\infty} m(E_k)$$

Note que era suficiente asumir que E_1 tiene medida finita. Sin embargo esto refleja como se iría pensando el problema. Además si uno prescinde de esta suposición, entonces consideramos $E_k=[k,\infty[$ que tiene medida infinita. Su intersección es vacía y por tanto no se cumple el resultado.

Las disquisición anterior se resume en el teorema siguiente.

Teorema 2.6.1. *Sea $(E_k)_{k\in\mathbb{N}}$ una sucesión de conjuntos medibles.*

1. *Si $E_k \subseteq E_{k+1}$ para todo $k\in\mathbb{N}$, entonces $m(\bigcup_{k\in\mathbb{N}} E_k)=\lim_{i\to\infty} m(E_i)$.*
2. *Si existe i_0 tal que $m(E_{i_0})<\infty$ y $E_k\supseteq E_{k+1}$, entonces $m(\bigcap_{k\in\mathbb{N}} E_k)=\lim_{k\to\infty} m(E_k)$.*

Nos planteamos la pregunta, qué ocurre cuando E_k no es medible? Si asumimos que $(E_k)_{k\in\mathbb{N}}$ una sucesión de conjuntos no medibles tal que $E_k\subseteq E_{k+1}$ y $m_e(E_k)<\infty$. Sea H_k un conjunto G_δ tal que $m_e(E_k)=m(H_k)$ con $E_k\subseteq H_k$. Definimos $G_k=\bigcup_{i\in\mathbb{N}\setminus[k-1]} H_i\subseteq H_k$,note que $E_k\subseteq E_{k+\ell}\subseteq H_{k+\ell}$, cuál es la ventaja de hacer esto?

$$E_k\subseteq G_k\subseteq H_k$$
$$\Rightarrow m_e(E_k)\leqslant m(G_k)\leqslant m(H_k)$$

Pero recuerde que $m_e(E_k)=m(H_k)$. Los G_k's crecen y por lo tanto la medida de la unión es $\lim_{k\to\infty} m(G_k)$, por el teorema anterior. Por las desigualdades anterior, tenemos que $m_e(E_k)=m(G_k)$. Finalmente tenemos una sucesión de números positivos crecientes, o sea, convergen al sup.

$$m_e(E_k)\leqslant m_e\left(\bigcup_{k\in\mathbb{N}} E_k\right)\leqslant \lim_{k\to\infty} m_e(E_k)$$

Caracterización de medibilidad

Teorema 2.6.2. *Las siguientes condiciones son equivalentes.*

1. *E es un conjunto medibles,*
2. *$E=H\setminus Z$, con H un conjunto G_δ y $m_e(Z)=0$,*
3. *$E=H\cup Z$, con H un conjunto F_σ y $m_e(Z)=0$.*

Prueba

Vea que los últimos dos apartados nos dan el primero por álgebra de conjuntos medibles. Veamos que *1.*$\Rightarrow$*3.*.
Sea E medible, dado $k\in\mathbb{N}$ existe $F_k\subseteq E$ cerrado tal que $m_e(E\setminus F_k)<\frac{1}{k}$. Tome $H=\bigcup_{k\in\mathbb{N}} F_k$, entonces

$$m(E\setminus H)=m\left(E\setminus\left(\bigcup_{k\in\mathbb{N}} F_k\right)\right)$$
$$\leqslant m(E\setminus F_k)\leqslant \frac{1}{k}$$

Esto significa que F_k tiene medida cero y por lo tanto $m(E\setminus H)=0$.

Ejercicio 2.6.3. Escriba con detalle el apartado que falta.

Teorema 2.6.4. *Las siguientes condiciones son equivalentes.*

1. *E es un conjunto medibles,*
2. *Dado $\varepsilon>0$, existen S, N_1, N_2 tales que $E=(S\cup N_1)\setminus N_2$ con*
   - *$S=\bigcup_{k\in\mathbb{N}} I_k$, $I_k\in S_d$ (cajas abiertas a la derecha y cerradas por la izquierda),*
   - *$m_e(N_1)<\varepsilon$,*
   - *$m_e(N_2)<\varepsilon$.*

Ejercicio 2.6.5. Pruebe el teorema anterior.

Teorema 2.6.6 (Carathéodory)**.** *Sea $E\subseteq\mathbb{R}^d$, entonces E es medible si y sólo si para cualquier $A\subseteq\mathbb{R}^d$ se cumple*

$$m_e(A)=m_e(A\cap E)+m_e(A\setminus E)$$

En general de forma trivial tendríamos una desigualdad, sin embargo un conjunto medible parte cualquier conjunto en dos pedazos sin problemas.

Prueba

Sabemos que existe H un conjunto G_δ tal que $A\subseteq H$ y $m_e(A)=m(H)$ pues H es medible. Pero en virtud de esto mismo, tenemos que $m(H)=m((H\cap E)\cup(H\setminus E))$.

$$\begin{aligned} m_e(A)&=m_e(H)=m(H)\\ &m((H\cap E)\cup(H\setminus E))\\ &m(H\cap E)+m(H\setminus E)\\ &\geqslant m_e(A\cap E)+m_e(A\setminus E)\end{aligned}$$

Como tenemos la otra desigualdad inmediatamente, se cumple la igualdad.

Primero vamos a asumir otra hipótesis. Pensemos que pasa cuando la medida exterior es finita? Que podemos trabajar con álgebra de conjuntos sin problemas.
Asuma que $m_e(E) < \infty$, sabemos que existe H un conjunto G_δ que contiene a E tal que $m_e(E) = m_e(H)$. Le aplicamos la hipótesis a H.

$$m_e(H) m_e(H \cap E) + m_e(H \backslash E)$$
$$= m_e(E) + m_e(H \backslash E)$$

Por lo tanto $0 = m_e(H \backslash E)$, si definimos $Z = H \backslash E$, entonces $E = H \backslash Z$ con $m_e(Z) = 0$ y H un conjunto G_δ. Por la caracterización 2.6.2 tenemos que E es medible.
Tenemos dos opciones, despedazar nuestro conjunto en cosas fáciles de trabajar o afinar la prueba para evitar sumar infinitos.
Por ahora, despedazamos. Tome $m_e(E) = \infty$ y $E_k = E \cap B(0,k) \subseteq E_{k+1}$. Lo que vamos a hacer es repetir la prueba con un pequeño cambio para los E_k's.
Sea H_k un conjunto G_δ que contiene a E_k tal que $m_e(H_k) = m_e(E_k)$. Nuevamente por hipótesis tenemos que

$$m_e(H_k) = m_e(H_k \cap E) + m_e(H_k \backslash E)$$
$$\geqslant m_e(E_k) + m_e(H_k \backslash E)$$

Esto pues $E_k \subseteq H_k$, $E_k \subseteq E$. Por lo tanto $m(H_k \backslash E) = 0$. Tome $H = \bigcup_{k \in \mathbb{N}} H_k \supseteq \bigcup_{k \in \mathbb{N}} E_k = E$. Finalmente

$$m_e(H \backslash E) = m_e\left(\bigcup_{k \in \mathbb{N}} H_k \backslash E\right)$$
$$\leqslant \sum_{k \in \mathbb{N}} m(H_k \backslash E) = 0$$

La moraleja es, no trabaje con A! Trabaje con alguien que se comporta bien, H un medible. El resultado a continuación es muy técnico. Es de esos lemas que le salva a uno la vida cuando todo se pone rudo, es muy útil ya que le ahorra a uno mucho trabajo.

Teorema 2.6.7. *Sea $E \subseteq \mathbb{R}^d$, entonces existe H un conjunto G_δ que contiene a E tal que*

$$m_e(E \cap M) = m(H \cap M)$$

para cualquier conjunto M medible.

Como en la prueba anterior vamos a asumir primero medida finita.

Prueba

Asuma que $m_e(E) < \infty$ porque el H que nos sirve es el clásico conjunto G_δ que siempre sirve. Existe H un conjunto G_δ que contiene a E tal que

$$m_e(E) = m_e(H) = m(H)$$

Sea M medible, luego

$$m_e(E) = m_e(E \cap M) + m_e(E \backslash M)$$
$$m(H) = m(H \cap M) + m(H \backslash M)$$

Note que $m_e(E \cap M) \leqslant m(H \cap M)$ y $m(E \backslash M) \leqslant m(H \backslash M$. Por lo tanto $m_e(E \cap M) = m(H \cap M)$.
Qué pasa cuando las medidas no son finitas? Sea $E = \bigcup_{k \in \mathbb{N}} E_k$, con $E_k \subseteq E_{k+1}$ y $m_e(E_k) < \infty$. Sabemos que existe H_k un conjunto G_δ tal que

$$m_e(E_k \cap M) = m_e(H_k \cap M)$$

para cualquier M medible. Queremos poner E en vez de E_k, si pudieramos tomar límites estaríamos listos. El problema es que como los H_k's no necesariamente están ordenados, un límite no necesariamente será un H. Los vamos a forzar a ser ordenados, pero esto será unión de intersecciones y así no necesariamente será un conjunto G_δ. Sea $V_k = \bigcap_{j \geqslant k} H_j \subseteq H_k$, además usando la técnica de la vez anterior tenemos que $E_k \subseteq V_k \subseteq H_k$.Observe que

$$E_k \cap M \subseteq V_k \cap M \subseteq H_k \cap m$$
$$\Rightarrow m_e(E_k \cap M) \leqslant m_e(V_k \cap M) \leqslant m(H_k \cap M)$$

Pero tenemos $m_e(E_k \cap M) = m(H_k \cap M)$. Entonces $v_k \subseteq V_{k+1}$, con V_k un conjunto G_δ tal que $m_e(V_k \cap M) = m_e(E_k \cap M)$. Al tomar limites se obtiene

$$m_e(\left(\bigcup_{k \in \mathbb{N}} V_k\right) \cap M) = m_e(E \cap M)$$

A este tipo de conjuntos se les llama $G_{\sigma\delta}$.
Como $H_1 = \bigcup_{k \in \mathbb{N}} V_k$, entonces H_1 es medible tal que $m(H_1 \cap M) = m_e(E \cap M)$. Sea H un conjunto G_δ tal que $H_1 = H \backslash Z$ con Z de medida cero. Finalemente tenemos

$$m(H \cap M) = m((H \backslash Z) \cap M) + m((H \cap Z) \cap M)$$
$$= m((H \backslash Z) \cap M) = m_e(H_1 \cap M)$$

El conjunto de Cantor

El conjunto de Cantor es un ejemplo maravilloso en el sentido que contradice toda intuición posible. Sabemos que este conjunto es denso por ninguna parte, no contable, y no contiene intervalos. Vamos a ver que este conjunto es de medida cero.

A recordar, tomamos una sucesión $(C_k)_{k \in \mathbb{N}}$ de manera que

$$C_0=[0,1]$$
$$C_1=\left[0,\frac{1}{3}\right]\cup\left[\frac{2}{3},1\right]$$
$$C_2=\left[0,\frac{1}{9}\right]\cup\left[\frac{2}{9},\frac{1}{3}\right]\cup\left[\frac{2}{3},\frac{7}{9}\right]\cup\left[\frac{8}{9},1\right]$$

En general C_{k+1} se obtiene de C_k dividiendo cada intervalo en tres intervalos iguales y removiendo el tercio del medio.

El conjunto de Cantor es $C=\bigcap_{k\in\mathbb{N}}C_k$ que es cerrado. Proseguimos a medirlo.

$$m(C_{k+1})=\frac{2}{3}m(C_k)=\left(\frac{2}{3}\right)^{k+1}$$

Luego $m(C)=\lim_{k\to\infty}m(C_k)=0$. Así el conjunto de Cantor es denso en ninguna parte y de medida cero. La próxima lección probaremos que el conjunto de Cantor es no numerable construyendo una biyección de C en $[0,1]$.

2.7. Día 19— 31-5-18

Quinta Sesión de Ejercicios

Ejercicio 2.7.1 (2.4 Wheeden & Zygmund)**.** Sea $(f_k)_{k\in\mathbb{N}}$ una sucesión de funciones de variación acotada en $[a,b]$ con una cota uniforme que converge puntualmente a f. Muestre que f es de variación acotada sobre $[a,b]$ con la misma cota que las f_k. De un contraejemplo cuando la cota no es uniforme.

Prueba

Sea $\Gamma=\{a=x_0,x_1,\cdots,x_n=b\}$ partición de $[a,b]$, queremos probar que $\sum_{i\in[n]}|f(x_i)-f(x_{i-1})|$ está acotado.

Sea $k_0\in\mathbb{N}$ tal que

$$|f(x_i)-f_k(x_i)|<\frac{\varepsilon}{n},\quad k>k_0$$

Usamos desigualdad triangular dos veces.

$$\begin{aligned}\sum_{i\in[n]}|f(x_i)-f(x_{i-1})|&\leqslant\sum_{i\in[n]}|f(x_i)-f_k(x_i)|\\&+\sum_{i\in[n]}|f_k(x_i)-f_k(x_{i-1})|\\&+\sum_{i\in[n]}|f_k(x_{i-1})-f(x_{i-1})|\\&\leqslant\varepsilon+\varepsilon+M\end{aligned}$$

Tomamos $M'=2\varepsilon+M$ y así f es de variación acotada.

Ahora para el contraejemplo tomamos $f(x)=x\sin\left(\frac{1}{x}\right)$ que no es de variación acotada en $[0,1]$/ Sin embargo considera siguiente sucesión de funciones.

$$f_n(x)=\begin{cases}x\sin\left(\frac{1}{x}\right), & \text{si } \frac{1}{n}\leqslant x\\ 0, & \text{si } \frac{1}{n}>x\end{cases}$$

Todos los términos se comportan bien, sin embargo la función como tal no. La idea es tomar una función que no es de variación acotada y despedazarla.

Podemos formular otro contraejemplo.

Sea $H\subseteq[0,1]$ contable, $H=\{x_i\}_{i\in[n]}$. Definimos la siguiente sucesión de funciones.

$$f_0(x)=1,\quad\forall x\in[0,1]$$
$$f_1(x)=\begin{cases}0, & \text{si } x=x_1\\ f_0(x), & \text{si no}\end{cases}$$

En general tenemos que

$$f_{k+1}(x)=\begin{cases}0, & \text{si } x=x_{k+1}\\ f_k(x), & \text{si no}\end{cases}$$

finish, ver foto

Ejercicio 2.7.2 (2.5 Wheeden & Zygmund)**.** Suponga que f es finita en $[a,b]$ y de variación acotada en $[a+\varepsilon,b]$ para todo $\varepsilon>0$ con $\operatorname{Var}[f,[a+\varepsilon,b]]\leqslant M$. Muestre que f es de variación acotada en $[a,b]$. Se cumple que $\operatorname{Var}[f,[a,b]]\leqslant M$? Si no, qué hipótesis garantiza esto?

Prueba

Sea $\Gamma=\{a=x_1,x_2,\cdots,x_n=b\}$ partición de $[a,b]$. Tome $x_2=a+\varepsilon$, ahora escrbimos la suma de f respecto a Γ.

$$\begin{aligned}S(f,\Gamma,[a,b])&=|f(a)-f(x_2)|\\&+\sum_{i\in[n]\setminus\{1\}}|f(x_i)-f(x_{i-1})|\\&\leqslant|f(a)-f(x_2)|+\operatorname{Var}[f,[a+\varepsilon,b]]\\&\leqslant|f(a)|+|f(x_1)-f(b)+f(b)|+M\\&\leqslant|f(a)|+|f(b)|+2M\end{aligned}$$

Con que haya un salto en a, no es posible obtener la cota. Es necesario que f sea continua en a.

Ejercicio 2.7.3 (2.9 Wheeden & Zygmund)**.** Sea $\mathcal{C}$ una curva parametrizada por $(\varphi(t),\psi(t))$ con $t\in[a,b]$.

1. Suponga que φ,ψ son continuas y de variación acotada, entonces $L(\gamma)=\lim_{|\Gamma|\to0}L(\gamma,\Gamma)$.

2. Si φ,ψ son continuamente diferenciables, muestre que $L(\gamma)=\int_a^b((\varphi'(t))^2+(\psi'(t))^2)^{\frac{1}{2}}$.

Prueba

1. En efecto, sea $\Gamma_1=(x_i)_{i\in[n]}$ partición de $[a,b]$ tal que
$$L(\gamma)-\ell(\gamma,\Gamma_1)<\varepsilon.$$
En virtud de que φ,ψ son continuas en $[a,b]$, son uniformemente continuas. Así, podemos tomar un $\delta>0$ tal que
$$\text{máx}\{|\varphi(\alpha)-\varphi(\beta)|,\psi(\alpha)-\psi(\beta)|\}<\varepsilon,$$
cuando $|\alpha-\beta|<\delta$. Tome ahora $\Gamma_2=(y_i)_{i\in[m]}$ otra partición de $[a,b]$ de malla menor que δ. Sea $\Gamma=\Gamma_1\cup\Gamma_2=(t_i)_{i\in[m']}$ un refinamiento con $m'>m$. Así tenemos que nuestra primera desigualdad nos da
$$\begin{aligned}L(\gamma)-\ell(\gamma,\Gamma_1)<\varepsilon &\Rightarrow L(\gamma)-\varepsilon<\ell(\gamma,\Gamma_1)\\ &\Rightarrow L(\gamma)-\varepsilon<\ell(\gamma,\Gamma).\end{aligned}$$
Ahora, por definición de longitud de curva tenemos que
$$\begin{aligned}\ell(\gamma,\Gamma)&=\sum_{i[m']}\sqrt{|\Delta\varphi|^2+|\Delta\psi|^2}\\ &=\sum_{i[m']}\sqrt{2\varepsilon^2}=\varepsilon m'\sqrt{2}.\end{aligned}$$
De manera análoga obtenemos que $\ell(\gamma,\Gamma_2)=\varepsilon m\sqrt{2}$. Así
$$\begin{aligned}|L(\gamma)-\ell(\gamma,\Gamma_1)|&\leqslant|L(\gamma)-\ell(\gamma,\Gamma)|\\ &\quad+|\ell(\gamma,\Gamma)-\ell(\gamma,\Gamma_1)|\\ &=\varepsilon+\varepsilon\sqrt{2}(m'-m).\end{aligned}$$
Como tenemos que la diferencia está acotada por un múltiplo de ε concluimos que $\text{lím}_{|\Gamma_1|\to 0}\ell(\gamma,\Gamma_1)=L(\gamma)$.
2. Tomamos ahora Γ, una partición uniforme de $[a,b]$. Entonces por definición de integral de Riemann tenemos que
$$\begin{aligned}L(\gamma)&=\sum_{i\in[n]}\frac{1}{n}\sqrt{|\Delta\varphi|^2+|\Delta\psi|^2}\\ &=\int_a^b\sqrt{|\varphi'(t)|^2+|\psi'(t)|^2}\mathrm{d}t.\end{aligned}$$

2.8. Día 20—5-6-18

Sea $x\in[0,1]$, entonces podemos representarlo en base 3 como
$$x=\sum_{i\in\mathbb{N}}\frac{n_i}{3}=\frac{n_1}{3}+\frac{n_2}{3^2}+\frac{n_3}{3^3}+\cdots$$
donde $n_i\in\{0,1,2\}$. Observe que $\frac{1}{3}=\sum_{i\geqslant 2}\frac{2}{3^i}$.

Ejercicio 2.8.1. Existe más de una expansión en base 3 si y sólo $x=\frac{k}{3^n}$ con $k,n\in\mathbb{N}$.

Para evitar el problema de varias expansiones, si x es tal que cumple las siguientes condiciones
1. $n_k=1$ y $n_{k+\ell}=0$ para todo $\ell\in\mathbb{N}$,
2. $n_k=0$ y $n_{k+\ell}=2$ para todo $\ell\in\mathbb{N}$.

Entonces tomaremos otra expansión.

Ahora si $x\in\left[0,\frac{1}{3}\right]$ debe ocurrir que n_1 es 0. Lo más grande que puede pasar es 0 en el primer término y 2 en todos los demás.

Luego $x\in\left[\frac{2}{3},1\right]$ ocurre si $n_1=0$ y $n_2=0$ y $x\in\left[\frac{2}{9},\frac{1}{3}\right]$ si y sólo si $n_1=0,n_2=2$. Para los demás conjuntos tenemos que $x\in\left[\frac{2}{3},\frac{7}{9}\right]\iff n_1=2,n_2=0$ y $x\in\left[\frac{8}{9},1\right]\iff n_1=2,n_2=2$. En general tenemos el siguiente hecho.

Ejercicio 2.8.2. $x\in C_k$ si y sólo si $n_i\in\{0,2\}$ para todo $i\in[k]$.

Esto nos permite deducir el siguiente lema.

Lema 2.8.3. *$x\in C$, el conjunto de Cantor si y sólo si $n_k\in\{0,2\}$ para todo $k\in\mathbb{N}$.*

Considere ahora la función
$$\Phi\colon C\to[0,1],\ x=\sum_{i\in\mathbb{N}}\frac{n_i}{3^i}\mapsto\sum_{i\in\mathbb{N}}\left(\frac{n_i}{2}\right)\frac{1}{2^i}$$
Esto nos da una biyección entre el conjunto de Cantor y $[0,1]$. Por lo tanto C es no contable.

Volvemos a la pregunta de que si todos los conjuntos son medibles. La respuesta es no, pero no solo vamos a ver un ejemplo, vamos a ver que todo conjunto de medida exterior cero contienen un conjunto no medible.

El conjunto de Vitali

El conjunto de Vitali no es medible, pero para probar esto necesitamos un lema. El lema *técnico.*

Lema 2.8.4 (Vitali, 1905)**.** *Sea $E\subseteq\mathbb{R}$ medible con $m(E)>0$. Entonces el conjunto*
$$E-E=\{e-f,\ e,f\in E\}$$
contiene un intervalo que contiene a cero.

Qué es lo que nos dice esto? Si un conjunto no contiene un intervalo entonces debe ocurrir que alguna de las hipótesis no es cierta. O sea, el conjunto o no es medible o tiene medida cero.

Prueba

Dado $m(E)>0$, entonces para $\varepsilon>0$, existe $G\supseteq E$ abierto tal que
$$m(E)\leqslant m(G)<(1+\varepsilon)m(E)$$

Al ser G abierto tenemos que
$$G=\bigcup_{k\in\mathbb{N}}]a_k,b_k[$$
con $]a_i,b_i[\ \cap\ ]a_j,b_j[\ =\varnothing$ para $i\neq j$. Llame $I_k=[a_k,b_k]$, luego tome $E_k=E\cap I_k$. Entonces ocurre lo siguiente.
$$m(G)=\sum_{k\in\mathbb{N}}m(I_k)$$
$$m(E)=m\left(\bigcup_{k\in\mathbb{N}}E_k\right)$$
$$=\sum_{k\in\mathbb{N}}m(E_k)$$
Luego existe k_0 tal que $m(I_{k_0})\leqslant m(E_{k_0})(1+\varepsilon)$.
Por lo menos en uno la desigualdad no da vuelta.
Suponga que $m(I_{k_0})=\alpha$, vamos a probar que si $\varepsilon=\frac{1}{3}$ entonces el intervalo $B(\alpha,\frac{1}{2})\subseteq E_{k_0}-E_{k_0}\subseteq E-E$.
Sea $d\in B(\alpha,\frac{1}{2})$, supongamos $(d+E_{k_0})\cap E_{k_0}=\varnothing$ a manera de contradicción, entonces $m((d+E_{k_0})\cup E_{k_0})=2m(E_{k_0})$.
Pero $E_{k_0}\subseteq I_{k_0}$, entonces $(d+I_{k_0})\cup I_{k_0}$ es un intervalo.
FIG 20.1
Como $|d|<\frac{m(I_{k_0})}{2}$, entonces tenemos
$$(d+I_{k_0})\cup I_{k_0}=\begin{cases}[a_k,b_k+d], & \text{cuando } d>0,\\ [a_k+d,b_k], & \text{cuando } d\leqslant 0\end{cases}$$
Así tenemos
$$m((d+I_{k_0})\cup I_{k_0})=d+m(I_{k_0})$$
$$<\frac{1}{2}m(I_{k_0})+m(I_{k_0})\quad=\frac{3}{2}m(I_{k_0})$$
Juntando esto con los hechos anteriores resulta en:
$$2m(E_{k_0})<\frac{3}{2}m(I_{k_0})\Rightarrow(1+\frac{1}{3})m(E_{k_0})<m(I_{k_0})$$
Luego si $d\in B(\alpha,\ \frac{1}{2})$ tenemos que $(d+E_{k_0})\cap E_{k_0}\neq\varnothing$. Entonces $d\in E_{k_0}-E_{k_0}$ y por lo tanto $B(\alpha,\frac{1}{2})\subseteq E_{k_0}-E_{k_0}\subseteq E-E$.

Para definir el conjunto de Vitali consideramos la relación $x\sim y\iff x-y\in\mathbb{Q}$. Esta relación es de equivalencia. Note que podemos expresar cada clase como $[x]=\{x+q\colon q\in\mathbb{Q}\}$. Así como las clases de equivalencia particionan $\mathbb{R}$ tenemos que $\mathbb{R}=\bigcup_{x\in\mathbb{R}}[x]$ y la cantidad de clases es no contable.

Por el axioma de elección podemos tomar un representante de cada clase. Sea E el conjunto formado por estos elementos.

Note que $(E-E)\cap\mathbb{Q}=\{0\}$, entonces en virtud del lema 2.8.4 debe ocurrir $m_e(E)=0$ ó que E no sea medible. Pero $\bigcup_{q\in\mathbb{Q}}E+q=\mathbb{R}$.
$$\Rightarrow m(\mathbb{R})\leqslant\sum_{q\in\mathbb{Q}}m_e(E+q)$$
Es decir, si $m_e(E)=0\Rightarrow m_e(E+q)=0\Rightarrow m(\mathbb{R})=0$. Pero esto es imposible, entonces debe ocurrir que E no es medible.

Ahora sea A un conjunto tal que $m_e(A)>0$. Podemos despedazar A en la unión de A_q's con $A_q=A\cap(E+q)$. Así $A=\bigcup_{q\in\mathbb{Q}}A_q$. Luego $(A_q-A_q)\cap\mathbb{Q}=\{0\}$, entonces debe ocurrir que $m_e(A_q)=0$ ó A_q no es medible.

Como tenemos $m_e(A)\leqslant\sum_{q\in\mathbb{Q}}m_e(A_q)$, existe q_0 tal que $m_e(A_{q_0})\neq 0$. Es decir, existe q_0 tal que A_{q_0} no es medible.

Lema 2.8.5. *Sea $A\subseteq\mathbb{R}$ tal que $m_e(A)>0$. Entonces existe $B\subseteq A$ tal que B no es medible.*

3. Parcial 3

Ya sabemos qué son conjuntos medibles. Ahora vamos a ver qué son funciones medibles. Estas funciones son la integrables en el sentido de Lebesgue.

Definición 3.0.1. Sea $f\colon E\to\mathbb{R}\cup\{\infty\}\cup\{-\infty\}$. Decimos que f es medible si $\{x\in E\colon f(x)\geqslant a\}=f^{-1}([a,\infty[)$ es medible para cualquier $a\in\mathbb{R}$.

Vamos a denotar $\{x\in E\colon f(x)\geqslant a\}$ como $\{f>a\}$.

Observación 3.0.2. Note que $E=\bigcup_{a\in\mathbb{R}}\{f>a\}\cup\{f=-\infty\}$. Si f es medible, entonces E es medible si y sólo si $f=-\infty$ es medible.

De ahora en adelante el dominio de nuestra función es un conjunto medible.

Lema 3.0.3. *Sea $f: E\to\overline{bR}$. Las siguientes afirmaciones son equivalentes.*
1. *f es medible,*
2. *$\{f\geqslant a\}$ es medible para todo $a\in\mathbb{R}$,*
3. *$\{f<a\}$ es medible para todo $a\in\mathbb{R}$,*
4. *$\{f\leqslant a\}$ es medible para todo $a\in\mathbb{R}$.*

Prueba

Observe que $\{f>a\}=\{f\leqslant a\}^c=\bigcup_{n\in\mathbb{N}}\{f\geqslant a+\frac{1}{n}\}$. También podemos escribir $\{f\geqslant a\}=\bigcap_{n\in\mathbb{N}}\{f>a-\frac{1}{n}\}$.
Sin importar con el conjunto que empecemos, podemos escribir los demás con álgebra de conjuntos.

Ejercicio 3.0.4. Refine los detalles de esta prueba.

Ejemplo 3.0.5. Veremos algunos ejemplos de funciones medibles.
1. Sea $f: E\to\mathbb{R}$ continua, entonces $f^{-1}(]a,\infty[)$ es abierto.

2. Si A es medible, $f(x)=\mathbf{1}_A(x)$ cumple

$$\{\mathbf{1}_A>a\}=\begin{cases}\varnothing, & \text{si } a>1\\ A, & \text{si } a\in[0,1]\\ E, & \text{si } a<0.\end{cases}$$

Observación 3.0.6. Sea $f\colon E\to\overline{\mathbb{R}}$ medible, entonces

$$\{f=\infty\}=\bigcap_{n\in\mathbb{N}}\{f\geqslant n\}$$
$$\{a\leqslant f<b\}=\{a\leqslant f\}\cap\{f<b\}$$
$$\{f=a\}=\bigcap_{n\in\mathbb{N}}\left\{a\leqslant f\leqslant a+\frac{1}{n}\right\}$$

Qué pasa si sólo tenemos $\Omega\subseteq\mathbb{R}$ denso y numerable con $\{f>a\}$ medible para todo $a\in\Omega$? Tome $\alpha\in\mathbb{R}$, entonces existe $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}\subseteq\Omega$ decreciente que converge a α. Entonces $\{f>\alpha\}=\bigcup_{k\in\mathbb{N}}\{f>a_k\}$.

En particular, esto nos dice que si una función es medible en $\mathbb{Q}$, es medible $\mathbb{R}$.

Lema 3.0.7. *Sea $f\colon E\to\mathbb{R}$, entonces f es medible si y sólo si $f^{-1}(G)$ es medible para todo G abierto.*

Prueba

($\Leftarrow$) En particular $]a,\infty[$ es abierto, entonces $f^{-1}(]a,\infty[)$ es medible y así f es medible.

($\Rightarrow$) Sea G un abierto, entonces $G=\bigcup_{k\in\mathbb{N}}]a_k,b_k[$.

$$\begin{aligned}f^{-1}(G)&=\bigcup_{k\in\mathbb{N}}f^{-1}(]a_k,b_k[)\\&=\bigcup_{k\in\mathbb{N}}\{a_k<f<b_k\}\end{aligned}$$

Por álgebra de conjuntos medibles tenemos el resultado.

3.1. Día 21— 7-6-18

Sexta Sesión de Ejercicios

TO DO:write 2.21, 2.22

Ejercicio 3.1.1 (2.11 Wheeden & Zygmund)**.** Muestre que $\int_a^b f\mathrm{d}\phi$ existe si y sólo si

$$\forall\varepsilon>\exists\delta>0\colon |R(f,\Gamma,\phi)-R(f,\Gamma',\phi)|<\varepsilon,$$

cuando $|\Gamma|,|\Gamma'|<\delta$.

Prueba

En efecto, si la integral I existe, tenemos que si Γ es una partición de $[a,b]$, entonces dado $\varepsilon>0$, existe $\delta>0$ tal que

$$|R(f,\Gamma,\phi)-I|<\frac{\varepsilon}{2},\ |\Gamma|<\delta.$$

De manera análoga, si Γ' es otra partición de $[a,b]$ tal que $\max\{|\Gamma|,|\Gamma'|\}<\delta$ implica $|R(f,\Gamma',\phi)-I|<\frac{\varepsilon}{2}$. Luego por desigualdad triangular

$$\begin{aligned}|R(f,\Gamma,\phi)-R(f,\Gamma',\phi)|&\leqslant|R(f,\Gamma,\phi)-I|\\&\quad+|R(f,\Gamma',\phi)-I|\\&<2\frac{\varepsilon}{2}=\varepsilon.\end{aligned}$$

Sea $\varepsilon>0$, tome P_n una partición uniforme de $[a,b]$ y considere la sucesión $R(f,P_n,\phi)$. Por hipótesis existe $\delta>0$ tal que $|R(f,\Gamma,\phi)-R(f,\Gamma',\phi)|<\varepsilon$, cuando $|\Gamma|,|\Gamma'|<\delta$.

Tome $N\in\mathbb{N}$ tal que $\frac{b-a}{N}<\delta$. De esta manera, cuando $m,n>N$ tendremos

$$|P_n|=\frac{b-a}{n}<\frac{b-a}{N}<\delta.$$

De manera análoga $|P_m|<\delta$. Por hipótesis $|I_n-I_m|<\varepsilon$ y así $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es una sucesión de Cauchy de números reales que converge.

Sea I el límite de la sucesión, vamos a mostrar que $I=int_a^b f\mathrm{d}\phi$. Pero en efecto, como existe $\eta\in\mathbb{N}$ tal que $|I_n-I|<\frac{\varepsilon}{2}$ y existe $\eta'\in\mathbb{N}$ tal que $\frac{b-a}{\eta'}<\delta$ entonces

$$\begin{aligned}\max\{|\Gamma|,|P_n|\}<\delta\Rightarrow|R(f,\Gamma,\phi)-R(f,P_n,\phi)|&\\=|R(f,\Gamma,\phi)-I_n|<\frac{\varepsilon}{2},\ n\geqslant\eta'.\end{aligned}$$

Entonces si tomamos $N'\geqslant\max\{\eta,\eta'\}$ tendremos que si $|\Gamma|<\delta$ entonces

$$\begin{aligned}|R(f,\Gamma,\phi)-I|&\leqslant|R(f,\Gamma,\phi)-I_n|+|I_n-I|\\&<2\frac{\varepsilon}{2}=\varepsilon.\end{aligned}$$

O sea que $R(f,\Gamma,\phi)$ converge a $I=int_a^b f\mathrm{d}\phi$ cuando la norma de la partición tiende a cero.

Ejercicio 3.1.2 (2.15 Wheeden & Zygmund)**.** Sea f continua y ϕ de variación acotada en $[a,b]$. Muestre que

$$\psi(x)=\int_a^x f\mathrm{d}\phi,$$

es de variación acotada en $[a,b]$.

Pruebe que si $g\in\mathcal{C}([a,b])$ entonces

$$\int_a^b g\mathrm{d}\psi=\int_a^b gf\mathrm{d}\phi.$$

Prueba

En efecto sea $\Gamma=(x_i)_{i\in[n]}$ una partición de $[a,b]$. Considere la suma de ψ respecto a Γ. Tenemos que

$$\begin{aligned} S(\psi,\Gamma) &= \sum_{i\in[n]} |\psi(x_i)-\psi(x_{i-1})| \\ &= \sum_{i\in[n]} \left| \int_{x_{i-1}}^{x_i} f \mathrm{d}\phi \right| \\ &\leqslant \sum_{i\in[n]} \sup_{[x_{i-1},x_i]} |f| \mathrm{Var}[\phi,[x_{i-1},x_i]] \\ &\leqslant M(\phi(b)-\phi(a)). \end{aligned}$$

Esto nos dice que existe una cota de $S(\psi,\Gamma)$ de manera que ψ es de variación acotada.
Vamos a asumir que ψ,ϕ son crecientes para usar el teorema del valor medio. Luego arreglaremos esto usando el teorema de Jordan ya que ambas funciones son de variación acotada.
Ahora considere Γ nuevamente y $\int_{x_{i-1}}^{x_i} f\mathrm{d}\phi$. Por el teorema del valor medio podemos tomar $\eta_i \in [x_{i-1},x_i]$ tal que

$$\int_{x_{i-1}}^{x_i} f \mathrm{d}\phi = f(\eta_i)(\phi(x_i)-\phi(x_{i-1}).$$

Vea que la suma de Riemann-Stieltjes de g respecto a ψ tomando $(\eta_i)_{i\in[n]}$ como puntos intermedios es

$$\begin{aligned} R(g,\Gamma,\psi) &= \sum_{i\in[n]} g(\eta_i)(\psi(x_{i-1})-\psi(x_i)) \\ &= \sum_{i\in[n]} g(\eta_i) \int_{x_{i-1}}^{x_i} f \mathrm{d}\phi) \\ &= \sum_{i\in[n]} g(\eta_i) f(\eta_i)(\phi(x_i)-\phi(x_{i-1}) \\ &= R(gf,\Gamma,\phi). \end{aligned}$$

Así tomando límites sobre la norma de la partición tenemos

$$\lim_{|\Gamma|\to 0} R(g,\Gamma,\psi) = \lim_{|\Gamma|\to 0} R(gf,\Gamma,\phi)$$

$$\int_a^b g \mathrm{d}\psi = \int_a^b gf \mathrm{d}\phi.$$

Esto nos da el resultado para funciones crecientes.
Ahora aplicamos el teorema de Jordan, toda función de variación acotada se puede escribir como la diferencia de dos funciones crecientes. Tome

$$\psi = \psi_1 - \psi_2, \quad \phi = \phi_1 - \phi_2,$$

y así obtenemos

$$\begin{aligned} \int_a^b g \mathrm{d}\psi &= \int_a^b g \mathrm{d}(\psi_1-\psi_2) \\ &= \int_a^b g \mathrm{d}\psi_1 - \int_a^b g \mathrm{d}\psi_2) \\ &= \int_a^b gf \mathrm{d}\phi_1 - \int_a^b gf \mathrm{d}\phi_2) \\ &= \int_a^b gf \mathrm{d}(\phi_1-\phi_2) \\ &= \int_a^b gf \mathrm{d}\phi. \end{aligned}$$

Por lo tanto obtenemos el resultado.

Ejercicio 3.1.3 (2.16 Wheeden & Zygmund)**.** Suponga que ϕ es de variación acotada en $[a,b]$ y f es acotada y continua salvo en un número finito de puntos donde hay discontinuidades de saltos. Suponga que ϕ es continua en todo punto donde f es discontinua. Muestre que $\int_a^b f \mathrm{d}\phi$ existe.

Prueba

En efecto, sea $\varepsilon > 0$ y $M \in \mathbb{R}$ tal que $|f(x)| \leqslant M$ para $x \in [a,b] \setminus D$. Donde D es el conjunto de discontinuidades de f.
Considere $I_j = [a_j,b_j]$ intervalos que cubren D tales que

$$\sum_{j\in[n]} \phi(b_j)-\phi(a_j) < \varepsilon.$$

Podemos asumir que los puntos de D están en el interior de los I_j sin perdida de generalidad.
Considere ahora el conjunto

$$K = [a,b] \setminus \bigcup_{j\in[n]} I_j,$$

este conjunto es compacto. Así f es uniformemente continua en K y por tanto existe $\delta > 0$ tal que

$$|x-y| < \delta \Rightarrow |f(x)-f(y)| < \varepsilon, \quad x,y \in K.$$

Tome Γ una partición de $[a,b]$ que no conste de puntos de discontinuidad y regálele los puntos en $(a_j)_{j\in[n]},(b_j)_{j\in[n]}$. Suponga que $|\Gamma| < \delta$, así

$$\begin{aligned} U(f,\Gamma,\phi)-L(f,\Gamma,\phi) &= \sum_{x_i \neq a_j,b_j} (M_i-m_i)(\phi(x_i)-\phi(x_{i-1}) \\ &\quad + \sum_{i\in[n]} (M_i-m_i)(\phi(b_i)-\phi(a_i)) \\ &\leqslant \varepsilon((\phi(b)-\phi(a))+2M). \end{aligned}$$

Así como las sumas superiores e inferiores están cerca, concluimos que la integral existe.

3.2. Día 22— 12-6-18

Refresquemos la memoria. Sea $f\colon E\to\overline{\mathbb{R}}$, con E un medible. La función se dice medible si el conjunto

$$\{x\in E\colon f(x)>a\}$$

es medible. Esta definición la manipulamos para cambiar la desigualdad a no estricta y hacia el otro lado.

Además tenemos una caracterización de medibilidad, una función es medible si y sólo si manda abiertos de vuelta en medibles.

Lema 3.2.1. *Sea $f: E\to\mathbb{R}$ medible y $\phi:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ continua. Entonces ϕf es medible.*

Cuál es el problema si f toma valores infinitos? Habría que definir que es $\phi(\infty)$, podría ser fácil se los límites existen. Pero si ϕ oscila, cómo lidiamos con esto?

Prueba

Por la caracterización, tome G un abierto, entonces

$$(\phi f)^{-1}(G)=f^{-1}(\phi^{-1}(G))$$

es un conjunto medible pues $\phi^{-1}(G)$ es un abierto.

Lema 3.2.2. *Sea $f\colon E\to\overline{\mathbb{R}}$ una función medible. Si g es tal que*

$$\{x\in E\colon f(x)\neq g(x)\}$$

tiene medida cero, entonces g es medible y $m(\{f>a\})=m(\{g>a\})$.

Prueba

Sea $a\in\mathbb{R}$, entonces $\{g>a\}=(\{g>a\}\cap\{f=g\})\cup(\{g>a\}\cap\{f\neq g\})$. Note que $m_e(\{g>a\}\cap\{f\neq g\})=0$, pues es subconjunto de un conjunto de medida cero y así $(\{g>a\}\cap\{f\neq g\})$ es medible.
Además $\{g>a\}\cap\{f=g\}=\{f>a\}\cap\{f=g\}$ es medible pues f es medible y $\{f=g\}^c$ es medible.

Recuerde que cuando queremos probar que alguien es medible, hay que despedazarlo en conjuntos que ya sabemos que son medibles.

El lema anterior nos permite modificar el lema que le precede.

Lema 3.2.3. *Sea $f: E\to\overline{\mathbb{R}}$ medible y $\phi:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ continua. Si $m(\{|f|=\infty\})$, entonces ϕf es medible.*

Prueba

Sea

$$g=\begin{cases} f, & \text{si } |f|\neq\infty\\ 0, & \text{si } |f|=\infty\end{cases}$$

Entonces ϕg es medible y $m(\{\phi g\neq\phi f\})=0$.

Ejemplo 3.2.4. Sea $f\colon E\to\overline{\mathbb{R}}$ con $m(\{|f|=\infty\})=0$. Entonces

$$|f|,e^{cf},e^{c|f|},f^+,f^-,\sin(f)$$

son medibles.

Ejercicio 3.2.5. Pruebe que las funciones anteriores son medibles usando los lemas precedentes.

Lema 3.2.6. *Sea $f\colon E\to\overline{\mathbb{R}}$ medbile, entonces $cf,c+f$ son medibles para todo $c\in\mathbb{R}.r$*

Lema 3.2.7. *Sean $f,g: E\to\overline{\mathbb{R}}$ medibles. Entonces $\{f>g\}$ es medible.*

Prueba

Note que

$$\begin{aligned}\{f>g\}&=\bigcup_{q\in\mathbb{Q}}\{f>q>g\}\\ &=\bigcup_{q\in\mathbb{Q}}\{f>q\}\cap\{g\geqslant q\}^c.\end{aligned}$$

Lema 3.2.8. *Sean $f,g\colon E\to\overline{\mathbb{R}}$ medibles. Si $f+g$ está bien definida en E entonces $f+g$ es medible.*

Prueba

Si $f+g$ está bien definida, entonces $\{f+g\}>a=\{f>a-g\}$,

De ahora en adelante vamos a trabajar con varias funciones. Siempre que no se mecione el dominio se debe asumir que es el mismo. De lo contrario la suma no va a estar bien definida, es una condición necesaria pero no suficiente.

Lema 3.2.9. *Sea $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión de funciones tal que $f_n\colon E\overline{\mathbb{R}}$ es medible para todo n. Entonces se cumple que*

1. $\sup_{n\in\mathbb{N}}f_n,\inf_{n\in\mathbb{N}}f_n$ *son medibles,*
2. $\limsup_{n\to\infty}f_n,\liminf_{n\to\infty}f_n$ *son medibles,*
3. *Si* $\lim_{n\to\infty}f_n=f$ *casi por doquier, entonces f es medible.*

Prueba

Note que
$$\left\{\sup_{n\in\mathbb{N}} f_n > a\right\} = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \{f_n > a\}.$$
Además $-\sup_{n\in\mathbb{N}}(-f_n) = \inf_{n\in\mathbb{N}} f_n$. Por definición tenemos además
$$\limsup_{n\to\infty} f_n = \inf_{n\in\mathbb{N}} \sup_{k\geqslant n} f_k,$$
$$\liminf_{n\to\infty} f_n = \sup_{n\in\mathbb{N}} \inf_{k\geqslant n} f_k.$$

Definición 3.2.10. Sea $\phi\colon E\to\mathbb{R}$, decimos que ϕ es simple si
$$\phi(x) = \sum_{k\in[m]} a_k \mathbf{1}_{A_k}(x),$$
con $A_k\subseteq E$ y $a_k\in\mathbb{R}$.

Ejercicio 3.2.11. Sea $\phi: E\to\mathbb{R}$ simple, entonces existe $(b_i)_{i\in[\ell]}\subseteq\mathbb{R}$ y $(B_i)_{i\in[\ell]}\subseteq\mathcal{P}(E)$ tales que
1. $B_i\cap B_j=\varnothing$ para $i\neq j$,
2. $\phi(x)=\sum_{i\in[\ell]} b_i \mathbf{1}_{B_i}(x)$.

Observación 3.2.12. $E=\bigcup_{i\in[\ell]}$ si se incluye el conjunto $\{\phi=0\}$.

Esta es la clave para la integral de Lebesgue. Vamos a definir la integral de funciones simples, después definimos la integral para funciones positivas. Después de eso vamos a aproximar funciones por funciones simples.

Ejercicio 3.2.13. ϕ es medible si y sólo si B_i es medible para todo $i\in[\ell]$.

Vamos a empezar a aproximar funciones por simples. Sea $f\colon E\to\overline{\mathbb{R}}$ con $f>0$. Sea $j\in\left[k2^k\right]$, defina
$$f_k(x) = \begin{cases} \frac{j-1}{2^k}, & \text{si } \frac{j-1}{2^k}\leqslant f(x)\leqslant \frac{j}{2^k} \\ k, & \text{si } f\geqslant k. \end{cases}$$
INSERTAR FIG22.1

Note que $0\leqslant f(x)\leqslant k$, entonces
$$|f(x)-\frac{j-1}{2^k}|\leqslant\frac{1}{2^k}$$
si $f(x)\in\left[\frac{j-1}{2^k},\frac{j}{2^k}\right[$. Es decir
$$|f(x)-f_k(x)|<\frac{1}{2^k}.$$
De hecho si $f(x)\neq\infty$, existe $k_0=k_0(x)$ tal que
$$|f(x)-f_k(x)|<\frac{1}{2^k}, \quad \text{si} k>k_0.$$
Por otro lado $f(x)\geqslant k$, entonces $f(x)\geqslant f_k(x)\geqslant k$. Luego si $f(x)=+\infty$, entonces $\lim_{k\to\infty} f_k(x)=+\infty$.

Note que podemos representar f_k con racionales diádicos,
$$f_k(x) = \sum_{j\in[k2^k]} \frac{j-1}{2^k}\mathbf{1}_{B_j}(x) + k\mathbf{1}_{\{f\geqslant k\}}(x)$$
si $B_i=\left\{\frac{j-1}{2^k}\leqslant f\leqslant\frac{j}{2^k}\right\}$. Note que si f es medible, entonces f_k es medible.

Además

INSERTAR FIG 22.2

Si $\frac{2j-2}{2^{k+1}}\leqslant f\leqslant\frac{2j-1}{2^{k+1}}$, entonces $f_k(x)=f_{k+1}(x)$. Por otro lado si $\frac{2j-1}{2^k}\leqslant f<\frac{2j}{2^{k+1}}$, entonces $f_{k+1}(x)=f_k(x)+\frac{1}{2^{k+1}}$.

Lo que acabamos de probar es lo siguiente.

Teorema 3.2.14. *Sea $f\colon E\to[0,\infty[$. Entonces existe una sucesión f_k de funciones simples tal que*
1. $\lim_{k\to\infty} f_k = f$,
2. $f_k\leqslant f_{k+1}$.

Si f es medible, las funciones f_k se pueden tomar medibles.

El siguiente teorema es contraintuitivo. Uno pensaría que es falso y que no sirve, sin embargo este teorema es un *cañon*.

Teorema 3.2.15 (Severini-Egorov, 1910-1911)**.** *Sea $(f_k)_{k\in\mathbb{N}}$ una sucesión de funciones medibles con dominio E tal que*
1. $f_k \xrightarrow[k\to\infty]{} f$ *casi por doquier,*
2. $m(E)<\infty$,
3. $m(\{|f(x)|=\infty\})=0$.

Entonces para todo $\varepsilon>0$ existe $F\subseteq E$ un cerrado que satisface
1. $m(E\backslash F)<\varepsilon$, *y*
2. $f_k\xrightarrow[k\to\infty]{} f$ *uniformemente en* F.

Antes de probar el teorema, vamos a probar un lema.

Lema 3.2.16. *Bajo las hipótesis del teorema de Egorov, dados $\varepsilon,\eta>0$ existen $F\subseteq E$ cerrados y $k_0\geqslant 1$ tal que*
1. $m(E\backslash F)<\eta$,
2. $|f(x)-f_k(x)|<\varepsilon$ *si* $k\geqslant k_0$ *y* $x\in F$.

Observe que aquí ε es fijo por lo que no nos da convergencia uniforme. Tenemos que producir un f aparte.

Prueba

Considere
$$E_m = \bigcap_{k\geqslant m}\{|f-f_k|<\varepsilon\},$$
entonces tenemos dos cosas
1. $E_m\subseteq E_{m+1}$,

2. $E \supseteq \bigcup_{m\in\mathbb{N}} E_m \supseteq \tilde{E}$.
Donde $\tilde{E} = \{x \in E \colon \lim_{k\to\infty} f_k\}$
pedir fotos y completar.
Dado $\eta > 0$, existe k_0 tal que
$$m(E \backslash E_m) < \frac{\eta}{2}, \quad m \geqslant k_0.$$
Tome $F \subseteq E_{k_0}$ cerrado tal que $m(E_{k_0} \backslash F) < \frac{\eta}{2}$. Entonces $m(E \backslash F) < \eta$ y $|f(x) - f_k(x)| < \varepsilon$ cuando $k \geqslant k_0$.

Procedemos con el teorema de Egorov.

Prueba

Dado $\varepsilon > 0$ y $m \geqslant 0$, existe $F_m \subseteq E$ y k_m tal que
$$m(E \backslash F_m) < \frac{\varepsilon}{2^m}$$
y $|f(x) - f_k(x)| < \frac{1}{m}$ para $k \geqslant k_m$, $x \in F_m$. Tome $F = \bigcap_{m\in\mathbb{N}} F_m$, entonces F es cerrado. Note que
$$\begin{aligned} m(E \backslash F) &= m\left(\bigcup_{m\in\mathbb{N}} E \backslash F_m\right) \\ &\leqslant \sum_{m\in\mathbb{N}} m(E \backslash F_m) < \varepsilon. \end{aligned}$$
Sea $\eta > 0$, tome $\frac{1}{m} < \eta$. Esto nos dice que $|f(x) - f_k(x)| < \frac{1}{m} < \eta$ para cualquier $k \geqslant k_m$ para $x \in F$. Entonces esto nos da convergencia uniforme en F.

El Teorema de Lusin

Definición 3.2.17. Dada $f \colon E \to \mathbb{R}$, decimos que f tiene la propiedad C si dado $\varepsilon > 0$, existe $F \subseteq E$ cerrado tal que

1. $m(E \backslash F) < \varepsilon$.
2. La función f es continua en F.

Teorema 3.2.18. *Sea $\phi \colon E \to \mathbb{R}$ medible y simple. Entonces ϕ satisface la propiedad C.*

Prueba

Sabemos que existen $(b_i)_{i\in[\ell]}, (B_i)_{i\in[\ell]}$ tal que
$$\phi(x) = \sum_{i\in[\ell]} b_i \mathbf{1}_{B_i}(x),$$
ya que ϕ es simple. Además $B_i \cap B_j = \varnothing$, B_i medible y $E = \bigcup_{i\in[\ell]} B_i$. Sea $f_i \subseteq B_i$, cerrado, tal que $m(B_i \backslash F_i) < \frac{\varepsilon}{\ell}$.

Tome $F = \bigcup_{i\in[m]} F_i$, entonces
$$\begin{aligned} m(E \backslash F) &= m\Big(\bigcup_{i\in[\ell]} B_i \backslash F\Big) \\ &\leqslant \sum_{i\in[\ell]} m(B_i \backslash F) \\ &\leqslant \sum_{i\in[\ell]} m(B_i \backslash F_i) \\ &< \varepsilon. \end{aligned}$$
Sea $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq F$, tal que $x_n \to x_0 \in F$. Entonces existe ℓ_0 tal que $x_0 \in F_{\ell_0}$. Sabemos que $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es acotada pues es convergente. Si asumimos que $\ell \neq \ell_0$ tal que $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \cap F_\ell$ es infinita, entonces $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \cap F_\ell = (x_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$, entonces
UHHHH Aglo
Luego existe algo, como $x_{n_{k_s}} \in F_\ell$, tenemos que $x_0 \in F_\ell$. Pero esto es contradictorio. Entonces $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \cap F_\ell$ es finito para todo $\ell \neq \ell_0$.
Luego existe k_0 tal que $x_n \in F_{\ell_0}$ para $n \geqslant k_0$. Entonces $\phi(x_n) = \phi(x_0)$ cuando $n \geqslant k_0$.

3.3. Día 23— 14-6-18

Séptima Sesión de Ejercicios

Ejercicio 3.3.1 (3.1 Wheeden & Zygmund)**.** Suponga que $b > 1$ es entero y tome $x \in [0,1]$. Muestre que existe $(c_k)_{k\in\mathbb{N}} \subseteq [b-1]^*$ tal que $x = \sum_{k\in\mathbb{N}} \frac{c_k}{b^k}$. Muestre que la expansión es única excepto cuando $x = \frac{c}{b^k}$ con $c \in \left[b^k - 1\right]$.

Prueba

En efecto, podemos tomar c_1 como el mayor entero tal que $\frac{c_1}{b} \leqslant x$. De manera inductiva podemos tomar c_n, el mayor entero tal que $\sum_{k\in[n]} \frac{c_k}{b^k} \leqslant x$. Tomamos el límite hacia infinito para obtener
$$\sum_{k\in\mathbb{N}} \frac{c_k}{b^k} \leqslant x.$$
Por maximalidad de c_n tenemos que
$$\sum_{k\in[n]} \frac{c_k}{b^k} \leqslant x < \sum_{k\in[n-1]} \frac{c_k}{b^k} + \frac{c_n+1}{b^n}$$
para todo $n \in \mathbb{N}$. Si restamos la suma de la izquierda obtenemos la desigualdad
$$x - \sum_{k\in[n]} \frac{c_k}{b^k} < -\frac{c_n}{b^n} + \frac{c_n+1}{b^n} = \frac{1}{b^n}, \quad n\in\mathbb{N}.$$
Nuevamente tomamos límites para obtener
$$x - \sum_{k\in\mathbb{N}} \frac{c_k}{b^k} \leqslant 0 \Rightarrow x \leqslant \sum_{k\in\mathbb{N}} \frac{c_k}{b^k}.$$
Esto nos permite concluir que $x = \sum_{k\in\mathbb{N}} \frac{c_k}{b^k}$. Procedemos con unicidad, suponga que $x = \sum_{k\in\mathbb{N}} \frac{c_k}{b^k} = \sum_{k\in\mathbb{N}} \frac{d_k}{b^k}$ y sea $n = \min\{k\in\mathbb{N}\colon\ c_k \neq d_k\}$. Es decir $c_n \neq d_n$ pero $c_k = d_k$ para $k < n$. Ahora tenemos que
$$\frac{c^n - d^n}{b^n} = \sum_{k\in[n]^c} \frac{d_k - c_k}{b^k}$$
y de aquí note que
$$\frac{1}{b^n} \leqslant \left|\frac{c_n - d_n}{b^n}\right| = \sum_{k\in[n]^c} \frac{|d_k - c_k|}{b^k} \leqslant \sum_{k\in[n]^c} \frac{b-1}{b^k} = \frac{1}{b^n}.$$
Hay desigualdad estricta si $|d_m - c_m| \neq b-1$.
finish

Ejercicio 3.3.2 (3.7 Wheeden & Zygmund)**.** Si $(I_k)_{k\in[n]}$ es una colección de intervalos que no se traslapan, entonces $\bigcup_{k\in[n]} I_k$ es medible y $m(\bigcup_{k\in[n]} I_k) = \sum_{k\in[n]} m(I_k)$.

Prueba

En efecto, tenemos que $\bigcup_{k\in[n]} I_k$ es una unión contable de conjuntos medibles. Ya sabemos que $m\left(\bigcup_{k\in[n]} I_k\right) \leqslant \sum_{k\in[n]} m(I_k)$. Así basta probar la otra desigualdad.
Primero, recuerde que $I_k = I_k^o \cup \partial I_k$, donde la frontera tiene medida cero. Tenemos la desigualdad $m(I_k) \leqslant m(I_k^o) + m(\partial I_k) = m(I_k^o)$ y como $I_k^o \subseteq I_k$ obtenemos $m(I_k) = m(I_k^o)$.

En general tenemos $\bigcup_{k\in[n]} I_k^o \subseteq \bigcup_{k\in[n]} I_k$ por lo que $m\left(\bigcup_{k\in[n]} I_k^o\right) \leqslant m\left(\bigcup_{k\in[n]} I_k\right)$. Queremos la otra desigualdad, pero en efecto
$$\begin{aligned} m\left(\bigcup_{k\in[n]} I_k\right) &= m\left(\bigcup_{k\in[n]} (I_k^o \cup \partial I_k)\right) \\ &\leqslant m\left(\bigcup_{k\in[n]} I_k^o\right) + m\left(\bigcup_{k\in[n]} \partial I_k\right) \\ &\leqslant m\left(\bigcup_{k\in[n]} I_k^o\right) + \sum_{k\in[n]} m(\partial I_k)) \\ &= m\left(\bigcup_{k\in[n]} I_k^o\right). \end{aligned}$$
De esta manera $m\left(\bigcup_{k\in[n]} I_k\right) = m\left(\bigcup_{k\in[n]} I_k^o\right)$.
Ahora sea $\varepsilon > 0$. Tome $(F_k)_{k\in[n]}$ una colección de conjuntos F_σ tales que $F_k \subseteq I_k^o$ y $m(I_k^o \backslash F_k) < \frac{\varepsilon}{n}$, para todo $k \in [n]$. Vea que $F_k \cap F_\ell = \varnothing$ y cada F_k es compacto por el lema de Heine-Borel. Además tenemos que $\mathfrak{m}(F_k, F_\ell) > 0$ cuando $k \neq \ell$ y $m(I_k^o) \leqslant m(F_k) + m(I_k \backslash F_k) = m(F_k) + \frac{\varepsilon}{n}$. Por lo que tenemos
$$\begin{aligned} \sum_{k\in[n]} m(I_k) = \sum_{k\in[n]} m(I_k^o) &\leqslant \sum_{k\in[n]} m(F_k) + \varepsilon \\ &= m\left(\bigcup_{k\in[n]} F_k\right) + \varepsilon \\ &\leqslant m\left(\bigcup_{k\in[n]} I_k\right) + \varepsilon. \end{aligned}$$
Luego $\sum_{k\in[n]} m(I_k) \leqslant m\left(\bigcup_{k\in[n]} I_k\right)$. Por lo tanto obtenemos la igualdad.

Ejercicio 3.3.3 (3.9 Wheeden & Zygmund)**.** Suponga que $(E_k)_{k\in\mathbb{N}}$ es una sucesión de conjuntos tal que $\sum_{k\in\mathbb{N}} m_e(E_k) < \infty$. Muestre que $\limsup_{k\to\infty} E_k$ tiene medida cero. También el $\liminf_{k\to\infty} E_k$.

Prueba

Sea $\varepsilon > 0$. Como $\lim_{n\to\infty} \sum_{k\in[n]} m_e(E_k) = \sum_{k\in\mathbb{N}} m_e(E_k) < \infty$, entonces $\exists N \in \mathbb{N}$ tal que si

$n \geqslant N$ entonces
$$\sum_{k\in[n]^c} m_e(E_k) = \sum_{k\in\mathbb{N}} m_e(E_k) - \sum_{k\in[n]} m_e(E_k) < \varepsilon.$$
Sabemos que
$$\text{límsup} E_k = \bigcap_{\ell\in\mathbb{N}} \left(\bigcup_{k\in[\ell]^c} E_k \right) \subseteq \bigcup_{k\in[N]^c} E_k.$$
Tomando medidas tenemos
$$m_e(\text{límsup} E_k) \leqslant m_e\left(\bigcup_{k\in[N]^c} E_k \right) \leqslant \sum_{k\in[n]^c} m_e(E_k) < \varepsilon.$$
De esta manera límsup E_k tiene medida cero. Como líminf $E_k \subseteq$ límsup E_k el resultado se sigue.

Ejercicio 3.3.4 (3.13 Wheeden & Zygmund)**.** Defina la medida interior de E como
$$\sup\{m(F):\ F \subseteq E, \text{ cerrado }\}.$$
Muestre que

1. $m_i(E) \leqslant m_e(E)$,
2. Si $m_e(E) < \infty$ entonces E es medible si y sólo si $m_i(E) = m_e(E)$.

Prueba

1. En efecto, sea $F \subseteq E$ un cerrado. Entonces $m(F) \leqslant m_e(E)$, por lo que $m_e(E)$ es cota superior de $m(F)$ y así $m_i(E) \leqslant m_e(E)$.
2. Primero suponga que E es medible, tome $F \subseteq E$ cerrado tal que $m_e(E) - m(F) = m_e(E \backslash F) < \varepsilon$. Inmediatamente por definición de sup tenemos que $\sup(m(F)) = m_e(E)$.

   Ahora si $m_i(E) = m_e(E)$ entonces existe $F \subseteq E$ cerrado tal que $m_e(E) - m(F) < \frac{\varepsilon}{2}$. Además existe un G abierto que contiene a E y $m(G) - m_e(E) < \frac{\varepsilon}{2}$. Sumando lo anterior tenemos que
$$\begin{aligned} m(G) - m(F) < \varepsilon &\Rightarrow m(G \backslash F) < \varepsilon \\ &\Rightarrow m_e(G \backslash F) < \varepsilon \\ &\Rightarrow m_e(E \backslash F) < \varepsilon. \end{aligned}$$
   Por tanto E es medible.

Ejercicio 3.3.5 (3.15 Wheeden & Zygmund)**.** Si E es medible y $A \subseteq E$, muestre que
$$m(E) = m_i(A) + m_e(E \backslash A).$$

Prueba

En efecto, tomemos $F \subseteq A$ un cerrado. Podemos invertir este contenido con complemento de manera que $F^c \supseteq A^c$ donde el complemento se toma respecto a E. Como F es cerrado, F^c es abierto y por tanto medible. Luego
$$m(F) + m_e(A^c) \leqslant m(F) + m(F^c) = m(E).$$
Si tomamos el sup sobre $F \subseteq A$ cerrados, obtenemos que
$$m_i(A) + m_e(A^c) \leqslant m(E).$$
De manera análoga, considere $G \supseteq A^c$ un abierto. Tomando complementos tenemos $G^c \subseteq A$ con G^c cerrado y así
$$m_i(A) + m(G) \geqslant m(G^c) + m(G) = m(E).$$
Ahora tomamos ínf sobre los abiertos que contienen a A^c de manera que obtenemos
$$m_i(A) + m_e(A^c) \geqslant m(E).$$
Concluimos el resultado pues tenemos las dos desigualdades.

3.4. Día 24— 19-6-18

Octava Sesión de Ejercicios

Ejercicio 3.4.1 (3.12 Wheeden & Zygmund)**.** Sean $E_1, E_2 \subseteq \mathbb{R}$, muestre que $E_1 \times E_2 \subseteq \mathbb{R}^2$ es medible y $m(E_1 \times E_2) = m(E_1)m(E_2)$.

Como sugerencia use caracterización de medibilidad.

Ejercicio 3.4.2 (3.20 Wheeden & Zygmund)**.** Muestre que existe una colección $(E_k)_{k\in\mathbb{N}}$ de conjuntos disjuntos tales que
$$m_e\left(\bigcup_{k\in\mathbb{N}} E_k \right) < \sum_{k\in\mathbb{N}} m_e(E_k),$$
con desigualdad estricta.

Como sugerencia considere un conjunto no medible en $[0,1]$ cuyas traslaciones por racionales son disjuntas. Si consideramos todas las traslaciones por $r \in \mathbb{Q} \cap [0,1]$ y usamos el ejercicio 3.18 obtendremos el resultado.

Prueba

En efecto, siguiendo la sugerencia sea E el conjunto de Vitali.
Primero note que para cualquier real x, existe $r \in \mathbb{Q}$ tal que $x - r \in [0,1]$. De esta manera, cada clase de equivalencia (de la relación por la cual se define el conjunto de Vitali) tiene un representante en $[0,1]$.
Por el axioma de elección podemos asumir que

$E\subseteq[0,1]$. Ahora sea $(r_k)_{k\in\mathbb{N}}$ una enumeración de $\mathbb{Q}\cap[0,1]$.
Defina
$$E_k=\{x+r_k:\, x\in E\}=E+r_k,$$
y observe que si tenemos $z\in E_k\cap E_\ell$ entonces existen $x,y\in E$ tales que
$$x+r_k=y+r_\ell=z.$$
Pero esto nos dice que $x-y\in\mathbb{Q}$ y esto es imposible pues significaría que $x\sim y$ así $[x]=[y]$. Por construcción sabemos que solo hay un representante por cada clase en E. La única otra posibilidad es que $r_k=r_\ell$, lo que nos lleva a concluir que los conjuntos E_k's son disjuntos.
Ahora por invariancia de traslación tenemos
$$m_e(E_k)=m_e(E)>0.$$
Finalmente observe que $\bigcup_{k\in\mathbb{N}}E_k\subseteq[0,2]$, pues lo más que van a trasladar los r_k un conjunto va a ser por 1. Entonces
$$m_e\left(\bigcup_{k\in\mathbb{N}}E_k\right)\leqslant 2.$$
Sin embargo,
$$\sum_{k\in\mathbb{N}}m_e(E_k)=\sum_{k\in\mathbb{N}}m_e(E)\to\infty.$$
Por lo tanto
$$m_e\left(\bigcup_{k\in\mathbb{N}}E_k\right)<\sum_{k\in\mathbb{N}}m_e(E_k).$$

Ejercicio 3.4.3 (3.23 Wheeden & Zygmund)**.** Suponga que $Z\subseteq\mathbb{R}$ tiene medida cero. Muestre que $\{x^2:\, x\in Z\}$ es de medida cero.

Prueba

En efecto, vamos a despedazar Z en bolas. Considere $Z_n=Z\cap B(0,n)$ con $n\in\mathbb{N}$. Entonces tenemos
$$Z=\bigcup_{n\in\mathbb{N}}Z_n,\quad \text{y}\quad m(Z_n)=0.$$
Luego, existe intervalos $I_{k,n}=[a_k,b_k]$ tales que $Z_n\subseteq\bigcup_{k\in\mathbb{N}}I_{k,n}$ con $\sum_{k\in\mathbb{N}}m(I_k)<\varepsilon$. En particular podemos suponer $I_{k,n}\subseteq B(0,n)$.
Ahora, queremos ver cómo se comportan a_k^2,b_k^2.
Observe que para $x\in I_k$ tenemos
$$\begin{cases} a_k^2\leqslant x^2\leqslant b_k^2, & \text{cuando } 0\leqslant a_k\leqslant b_k.\\ 0\leqslant x^2\leqslant \text{máx}\{a_k^2,b_k^2\}, & \text{cuando } a_k\leqslant 0\leqslant b_k.\\ b_k^2\leqslant x^2\leqslant a_k^2, & \text{cuando } a_k\leqslant b_k\leqslant 0.\end{cases}$$
Observe que en el segundo caso, podemos ver I_k como $[a_k,0]\cup[0,b_k]$. Así, siempre podremos tomar los casos $0\leqslant a_k\leqslant b_k$ o $a_k\leqslant b_k\leqslant 0$.
Vamos a trabajar con nuevos intervalos J_k's que contengan a los x^2 de manera que
$$\begin{aligned} m(J_k)&=|a_k^2-b_k^2|\\ &=|a_k-b_k||a_k+b_k|\\ &\leqslant m(I_k)(|a_k|+|b_k|)\leqslant m(I_k)(2n).\end{aligned}$$
De esta manera obtenemos
$$\begin{aligned} m_e(\{x^2:\, x\in Z_n\})&\leqslant m_e\left(\bigcup_{k\in\mathbb{N}}J_k\right)\\ &\leqslant\sum_{k\in\mathbb{N}}m(J_k)\\ &\leqslant 2n\sum_{k\in\mathbb{N}}m(I_k)<2n\varepsilon.\end{aligned}$$
Esto nos dice que $\{x^2:\, x\in Z_n\}$ tiene medida cero para todo $n\in\mathbb{N}$. Finalmente, podemos ver $\{x^2:\, x\in Z\}$ como una unión de conjuntos de medida cero de manera tal que
$$\{x^2:\, x\in Z\}=\bigcup_{n\in\mathbb{N}}\{x^2:\, x\in Z_n\},$$
$$\Rightarrow m_e(\{x^2:\, x\in Z\})\leqslant\sum_{n\in\mathbb{N}}m_e(\{x^2:\, x\in Z_n\})=0.$$
Por lo tanto $\{x^2:\, x\in Z\}$ es de medida cero.

El Teorema de Lusin

Recuerde que una función $f:\, E\to\overline{\mathbb{R}}$ se dice tener la propiedad C si para todo $\varepsilon>0$, existe $F\subseteq E$ tal que
1. $m(E\backslash F)<\varepsilon$,
2. f es continua en F.

Teorema 3.4.4 (Lusin)**.** *Sea $f:\, E\to\mathbb{R}$, con E medible. Entonces f es medible si y sólo si f tiene la propiedad C.*

Prueba

Suponga que f es medible, luego existe una sucesión $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de funciones medibles simples tal que $f_n\to f$.
Cuándo es que la conergencia puntual y continuidad implican convergencia uniforme? Hay que devolvernos al teorema de Egorov. Primero asumimos que $m(E)<\infty$. Sea F_n cerrado tal que $m(E\backslash F_n)<\varepsilon$ y f_n es continua en F_n.
Por el teorema 3.2.15 de Egorov, existe F tal que
$$m(E\backslash F)<\varepsilon$$
y $f_n\to f$ uniformemente. Sea
$$\tilde{F}=F\cap\bigcap_{n\in\mathbb{N}}F_n$$

y queremos que $E\backslash\tilde{F}$ de medida pequeña. Observe que

$$m(E\backslash\tilde{F})\leqslant m(E\backslash F)+\sum_{n\in\mathbb{N}} m(E\backslash F_n)$$
$$<\varepsilon.$$

Además en $\tilde{F}$, f es límite de funciones continuas de manera uniforme. Por tanto tenemos el resultado por Egorov.
El problema es que todavía tenemos la medida finita, eso no es parte de las hipótesis. Para eso, vamos a despedazar en trozos de medida finita. Si $m(E)=\infty$, considere

$$E_n=E\cap\{x\colon n\leqslant|x|<n+1\},\ n\geqslant 0.$$

Sabemos que existen $F_n\subseteq E_n$ de manera que

$$m(E_n\backslash F_n)<\frac{\varepsilon}{2^n},$$

y f es continua en F_n. El truco es mostrar que f es continua en $\bigcup_{n\in\mathbb{N}}F_n$ y que este conjunto es cerrado. Llamemos a esta unión $\hat{F}$, vamos a probar las dos cosas al mismo tiempo. Utilizamos continuidad sucesional y cerradura por sucesiones. Sea $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}\subseteq\hat{F}$ tal que $x_n\to x$. Sabemos que existe $M\in\mathbb{N}$ tal que $|x_n|\leqslant M$ para todo $n\in\mathbb{N}$. Luego

$$(x_n)_{n\in\mathbb{N}}\subseteq\bigcup_{n\in[M]}F_n$$

que es cerrado. Así $x\in\bigcup_{n\in[M]}F_n\subseteq\hat{F}$.
Ahora suponga que f tiene la propiedad C. Sea F_j cerrado tal que

$$m(E\backslash F_j)<\frac{1}{j},$$

y f continuaen F_j para todo j. Tome $A=\bigcup_{j\in\mathbb{N}}F_j$. Cuanto es $m(E\backslash A)$? Observe que esta medida es menor que cualquier cosa, es decir

$$m(E\backslash A)\leqslant m(E\backslash F_j)<\frac{1}{j}.$$

Así $m(E\backslash A)=0$. Finalmente

$$\{x\in E\colon f(x)>a\}$$
$$=\bigcup_{j\in\mathbb{N}}\{x\in F_j\colon f(x)>a\}\cup\{x\in E\backslash A\colon f(x)>a\}.$$

Convergencia en medida

Esta convergencia es la convergencia más debil. Muchas convergencias implican estas, pero esta no implica nada.

Definición 3.4.5. Sean $f,f_n\colon E\to\overline{\mathbb{R}}$ finitas casi por doquier. Decimos que f_n converge a f en medida si

$$\forall\varepsilon>0\lim_{n\to\infty}m\{|f_n-f|>\varepsilon\}=0.$$

Denotamos $f_n\xrightarrow{m}f$

Esto dice que el conjunto donde no converge, en medida va para cero. Vamos a empezar a estudiar modos de convergencia.

Teorema 3.4.6. *Sean $f,f_n\colon E\to\overline{\mathbb{R}}$ medibles y finitas casi por doquier. Si $f_n\to f$ casi por doquier en E y $m(E)<\infty$ entonces $f_n\xrightarrow{m}f$ en E.*

Prueba

Esencialmente queremos usar el teorema 3.2.15 de Egorov. Sean η,ε, hay que mostar que existe n_0 tal que

$$m\{|f_n-f|>\varepsilon\}<\eta,$$

cuando $n\geqslant n_0$. Sea $F\subseteq E$ tal que $m(E\backslash F)$ y $f_n\to f$ uniformemente en F. Entonces existe n_0 tal que

$$|f_n(x)-f(x)|<\varepsilon,\quad n\geqslant n_0,x\in F.$$

Luego $\{x\in E\colon|f_n(x)-f(x)|>\varepsilon\}\subseteq E\backslash F$, cuando $n\geqslant n_0$.

Vamos a ver una sucesión que converge en medida pero no puntualmente. Considere la sucesión

$$I_0=\mathbf{1}_{[0,1]},$$
$$I_{1,1}=\mathbf{1}_{\left[0,\frac{1}{2}\right]},I_{1,2}=\mathbf{1}_{\left[\frac{1}{2},1\right]},$$
$$I_{2,i}=\mathbf{1}_{\left[\frac{i-1}{2^2},\frac{i}{2^2}\right]},i\in[4].$$

En general $I_{n,i}=\mathbf{1}_{\left[\frac{i-1}{2^n},\frac{i}{2^n}\right]}$ con $i\in[2^n]$. Esta sucesión no puede converger puntualmente, es cero o uno en todo lado. Pero en medida, la medida de los intervalos es $\frac{1}{2^n}$ que va para cero. Sin embargo, así como está presentada no es una sucesión!

Usamos el orden

$$(m,i)\leqslant(n,j)\iff(m\leqslant n)\vee((m=n)\wedge i\leqslant j),$$

tenemos una sucesión que no converge en ningún punto pero converge a cero en medida.

Convergencia en medida nunca implica convergencia puntual. Sin embargo convergencia puntual implica convergencia en medida, pero sólo en medida finita. Veamos un contraejemplo, una sucesión que converge puntualmente pero no converge en medida.

Considere la sucesión

$$f_n=\mathbf{1}_{[-n,n]}\to 1,$$

pero $1-f_n=\mathbf{1}_{[-n,n]^c}=\mathbf{1}_{[-\infty,-n]}+\mathbf{1}_{[n,\infty]}$. Es decir f_n no converge en medida a 1.

Teorema 3.4.7. *Sea $f_n\xrightarrow{m}f$ en E. Entonces existe n_j de manera que $f_{n_j}\to f$ casi por doquier.*

Prueba

Dado j, existe n_j tal que
$$m\left\{|f_n-f|>\frac{1}{j}\right\}\leqslant\frac{1}{2^j},\ n\geqslant n_j.$$
Sin perdida de generalidad $n_j\leqslant n_{j+1}$, entonces
$$m\left\{|f_{n_j}-f|>\frac{1}{j}\right\}<\frac{1}{2^j}.$$
Tome $E_j=\left\{|f_{n_j}-f|>\frac{1}{j}\right\}$, y
$$H_m=\bigcup_{j\in[m-1]^c}\left\{|f_{n_j}-f|>\frac{1}{j}\right\}.$$
Entonces $H_m\supseteq H_{m+1}$ y
$$m(H_m)\leqslant\sum_{j\in[m-1]^c}m\left\{|f_{n_j}-f|>\frac{1}{j}\right\}$$
$$=\sum_{j\in[m-1]^c}\frac{1}{2^j}=\frac{1}{2^{m-1}}.$$
Luego tome $Z=\bigcup_{m\in\mathbb{N}}H_m$ tiene medida cero. Si $x\in E\backslash Z=\bigcup_{m\in\mathbb{N}}E\backslash H_m$. Esto nos dice que existe m_0 tal que $x\in E\backslash H_{m_0}$.
$$\Rightarrow x\in\bigcap_{j\in[m-1]^c}E\backslash\left\{|f_{n_j}-f|>\frac{1}{j}\right\},$$
$$\Rightarrow x\in\bigcap_{j\in[m-1]^c}\left\{|f_{n_j}-f|\leqslant\frac{1}{j}\right\},$$
$$\Rightarrow f_{n_j}\xrightarrow[j\to\infty]{}f.$$

Definición 3.4.8. Decimos que $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es Cauchy en medida si para todo $\varepsilon,\eta>0$ existe $N\in\mathbb{N}$ tal que
$$m\{|f_n-f_m|>\varepsilon\}<\eta,$$
para $n,m\geqslant N$.

Inmediatamente convergencia en medida implica Cauchy en medida.

Lema 3.4.9. *Una sucesión de Cauchy en medida es convergente en medida.*

Prueba

Sabemos que existe n_j tal que
$$m\left\{|f_n-f_m|>\frac{1}{2^j}\right\}<\frac{1}{2^j},$$
si $n,m\geqslant n_j$. Sin perdida de generalidad suponga que $n_j<n_{j+1}$ y tome
$$E_j=\left\{|f_{n_{j+1}}-f_{n_j}|>\frac{1}{2^j}\right\}$$
$$H_m=\bigcup_{j\in[m-1]^c}E_j.$$
Entonces $m(H_m)\leqslant\frac{1}{2^{m-1}}$, tome $x\in E\backslash H_m$. Así
$$|f_{n_{j+1}}-f_{n_j}|<\frac{1}{2^j},\quad j\geqslant m.$$
Luego la serie $\sum_{j\in[m-1]^c}f_{n_{j+1}}-f_{n_j}$ converge absolutamente y uniformemente por el M-test de Weierstrass. Así existe f el límite de f_{n_j} uniforme en $E\backslash H_m$.
Qué tenemos que probar ahora? Que f_{n_j} converge a f en medida. Tome $x\in E\backslash H_m$ y $k\geqslant m$.
$$|f_{n_k}(x)-f_{n_m}(x)|\leqslant\sum_{j\in[k-1]\backslash[m-1]}|f_{n_{j+1}}(x)-f_{n_j}(x)|$$
$$\leqslant\sum_{j\in[k-1]\backslash[m-1]}\frac{1}{2^j}<\frac{1}{2^{m-1}}.$$
Luego $|f(x)-f_{n_m}(x)|\leqslant\frac{1}{2^{m-1}}$ si $x\in E\backslash H_m$.
Hay que mostrar que dado $\varepsilon,\eta>0$, existe $N\in\mathbb{N}$ tal que
$$m\{|f-f_k|>\varepsilon\}<\eta,\quad k\geqslant N.$$
Si $\frac{1}{2^{m-1}}<\varepsilon,\eta$, entonces
$$\{|f_k-f|>\varepsilon\}\subseteq H_m.$$
Es decir $m\{|f_k-f|>\varepsilon\}\leqslant m(H_m)\leqslant\frac{1}{2^{m-1}}<\eta$.

La función de Cantor

INSERTAR FIG 24.1 función de Cantor

Sea
$$D_k=[0,1]\backslash C_k=\bigcup_{j\in[2^k-1]}I_j,$$
con $I_j=]\alpha_j,\beta_j[$ y $0<\alpha_1<\beta_1<\cdots<\alpha_{2^k-1}<\beta_{2^k-1}<1$. Definimos
$$f_n(x)=\begin{cases}0, & \text{cuando } x=0,\\ \frac{j}{2^n}, & \text{si } x\in[\alpha_i,\beta_i],\\ \text{lineal entre}, & (\beta_j,\frac{j}{2^n}),(\alpha_{j+1},\frac{j+1}{2^n}),\\ 1, & \text{si } x=1.\end{cases}$$
Entonces f_n es creciente, continua y $(f(0),f(1))=(0,1)$. Note que
$$D_{k+1}=\bigcup_{j\in[2^k-1]}I_j\cup\bigcup_{i\in[2^k]}\left]\tilde{\alpha}_i,\tilde{\beta}_i\right[,$$
con $0<\tilde{\alpha}_i<\tilde{\beta}_i<\alpha_1$, $\beta_{2^k-1}<\tilde{\alpha}_{2^k}<\tilde{\beta}_{2^k}<1$ y $\beta_{j-1}<\tilde{\alpha}_j<\tilde{\beta}_j<\alpha_j$.

Entonces

$$f_{k+1}(x)=\frac{2j}{2^{k+1}},\quad x\in[\alpha_i,\beta_i],$$
$$f_{k+1}(x)=\frac{2j-1}{2^{k+1}},\quad x\in\left[\tilde{\alpha}_i,\tilde{\beta}_i\right].$$

Además $|f_k(x)-f_{k-1}(x)|<\frac{1}{2^k}$. Entonces $\sum_k f_{k+1}-f_k$ converge uniformemente, luego $f_k\to f$ uniformemente. Luego la función f es continua, creciente, $f(0)=0,f(1)=1$ y

$$f_k(x)=f(x),\quad \text{en}\quad D_k.$$

Luego si $x\in D_k$, $f'(x)=0$.

3.5. Día 25— 21-6-18

La integral de Lebesgue

Sea $f\colon E\to\overline{\mathbb{R}}$, con f positiva. Vamos a definir la curva de la función.

Definición 3.5.1. La gráfica o curva de una función es

$$G(f,E)=\{(x,f(x))\in E\times\mathbb{R}\colon f(x)<\infty\}.$$

Ahora los puntos bajo esta curva serán llamados

$$R(f,E)=\{(x,y)\in E\times\mathbb{R}\colon 0\leqslant y\leqslant f(x)\}.$$

Observe que $G\subseteq R$, pues R es la curva y toda el area debajo. También tenemos que $R(f,E)\subseteq\mathbb{R}^{d+1}$ cuando $E\subseteq\mathbb{R}^d$. Procedemos a definir la integral como el área bajo la curva.

Definición 3.5.2. Si $R(f,E)$ es medible, entonces definimos

$$\int_E f\mathrm{d}m=m(R(f,E)).$$

Si $R(f,E)$ es de medida finita la integral existe.

Lema 3.5.3. *Sea $f\colon E\to\overline{\mathbb{R}}$, con f positiva y medible. Entonces $R(f,E)$ es medible.*

Cómo probamos esto? Empezamos con indicadores, si no sirve, tratamos con simples. Vamos a despedazar esto en lemas.

Lema 3.5.4. *Sea $f=a\mathbf{1}_A$ con A medible, entonces $R(f,E)$ es medible.*

Prueba

Tenemos que el conjunto en cuestión es

$$R(f,E)=\{(x,y)\in E\times\mathbb{R}\colon 0\leqslant y\leqslant a\mathbf{1}_A\},$$

pero esto se puede describir como

$$\{(x,y)\colon x\in A,\ 0\leqslant y\leqslant a\}\cup\{(x,y)\colon x\in E\backslash A,y=0\}.$$

Entonces recordando el ejercicio 4 del examen parcial 2, podemos ver estos conjuntos como

$$A\times[0,a]\cup E\backslash A\times\{0\}.$$

Vamos a probar que

$$A\times[a,b]\text{ es medible}\iff A\text{ es medible.}$$

Además $m(A\times[a,b])=(b-a)m(A)$.

1. Si $A=\bigtimes_{i\in[d]}[a_i,b_i]$, entonces $A\times[a,b]$ es una caja $d+1$ dimensional. Este conjunto es medible y la medida es el producto de todas las longitudes.
2. Si A es un abierto G entonces podemos expresar
$$G=\bigcup_{k\in\mathbb{N}}I_k,\quad I_k^o\cap I_\ell^o=\varnothing,$$
con $I_k=\bigtimes_{i\in[d]}[a_i(k),b_i(k)]$. Entonces $G\times[a,b]=(\bigcup_{k\in\mathbb{N}}I_k)\times[a,b]$ es medible y tenemos que
$$\begin{aligned}m(G\times[a,b])&=\sum_{k\in\mathbb{N}}m(I_k\times[a,b])\\&=(b-a)\sum_{k\in\mathbb{N}}m(I_k)\\&=(b-a)m(G).\end{aligned}$$
3. Si $Z\subseteq E$ es de medida cero, dado $\varepsilon>0$ existe $G\supseteq Z$ abierto tal que $m(G\backslash Z)=m(G)<\varepsilon$.
Entonces
$$\begin{aligned}m(Z\times[a,b])&\leqslant m(G\times[a,b])\\&=\varepsilon(b-a).\end{aligned}$$
4. Sea A un conjunto G_δ, entonces
$$A=\bigcap_{j\in\mathbb{N}}G_j,$$
con G_j abierto para $j\in\mathbb{N}$. Cómo trabajamos con sucesiones decrecientes? Forzándolo!
Defina
$$\tilde{G}_j=\bigcap_{i\in[j]}G_i\supseteq A,$$
un abierto. Tenemos $\tilde{G}_j\supseteq\tilde{G}_{j+1}$. Observe que
$$\begin{aligned}A\times[a,b]&=\left(\bigcap_{j\in\mathbb{N}}G_j\right)\times[a,b]\\&=\left(\bigcap_{j\in\mathbb{N}}\tilde{G}_j\right)\times[a,b]\\&=\bigcap_{j\in\mathbb{N}}\left(\tilde{G}_j\times[a,b]\right),\end{aligned}$$

es medible. Si A tiene medida finita, entonces

$$\begin{aligned} m(A\times[a,b]) &= m\left(\bigcap_{j\in\mathbb{N}}\left(\tilde{G}_j\times[a,b]\right)\right) \\ &= \lim_{j\to\infty} m\left(\tilde{G}_j\times[a,b]\right) \\ &= (b-a)\lim_{j\to\infty} m\left(\tilde{G}_j\right) \\ &= m(A)(b-a). \end{aligned}$$

Finalmente si $A=H\backslash Z$ con H un G_δ y Z de medida cero,

$$A\times[a,b]=(H\times[a,b])\backslash(Z\times[a,b]),$$

con $Z\times[a,b]$ un conjunto de medida cero.

Todo esto sirvió para medida finita, pero esto se puede arreglar facilmente para medida infinita. Si $m(A)=\infty$, sea

$$A_k=A\cap(B(0,k)\backslash B(0,k-1)).$$

Entonces despedazamos A e anillos y así los A_k son disjuntos por parejas. De esta manera

$$A\times[a,b]=\bigcup_{k\in\mathbb{N}}(A_k\times[a,b]).$$

Recordemos que

$$R(a\mathbf{1}_A,E)=(A\times[0,a])\cup((E\backslash A)\times\{0\}),$$

entonces $\int_E a\mathbf{1}_A \mathrm{d}m=am(A)$.

El paso que seguiría sería simples, pero vamos tomar un pequeño desvío. Cuánto debería de medir solamente la curva de la función? Intuitivamente debería ser cero. Esencialmente la integral va a ser lo mismo con o sin la curva de la función.

Lema 3.5.5. *Sea $f\colon E\to\overline{\mathbb{R}}$ medible, positiva. Entonces $m(G(f,E))=0$.*

El truco de esta prueba va para el bolsillo de trucos.

Prueba

Sea $\varepsilon>0$. Recordemos que

$$G(f,E)=\{(x,f(x))\in E\times\mathbb{R}\colon f(x)<\infty\}.$$

Ahora definimos

$$E_k=\{x\in E\colon k\varepsilon\leqslant f(x)\leqslant(k+1)\varepsilon\},$$

entonces podemos cubrir $G(f,E)$ como

$$G(f,E)\subseteq\bigcup_{k\in\mathbb{N}}(E_k\times[k\varepsilon,(k+1)\varepsilon]).$$

El truco aquí es *no se agarre con cosas complicadas de medir. Aproxímelas!*

Ahora si E es de medida finita, entonces

$$\begin{aligned} m_e(G(f,E)) &\leqslant \sum_{k\in\mathbb{N}} m(E_k\times[k\varepsilon,(k+1)\varepsilon]) \\ &\leqslant \varepsilon\sum_{k\in\mathbb{N}} m(E_k)=\varepsilon m(E). \end{aligned}$$

Esto nos dice que la gráfica tiene medida cero. Resta ver qué pasa con medida infinita de E.

Ejercicio 3.5.6. Complete el caso de $m(E)=\infty$ de la prueba anterior despedazando E en anillos.

Ahora volvemos al lema 3.5.3. Ya tenemos las herramientas necesarias para probarlo.

Prueba

Como f es positiva y medible, existe $(f_k)_{k\in\mathbb{N}}$ una sucesión de funciones simples tal que

1. $0\leqslant f_k(x)\leqslant f_{k+1}(x)$ para todo $x\in E$,
2. $f_k\xrightarrow{k\to\infty}f$.

Entonces podemos expresar

$$\begin{aligned} R(f,E) &= \{(x,y)\colon x\in E,\ 0\leqslant y\leqslant f(x)\} \\ &= \{(x,y)\colon x\in E,\ 0\leqslant y<f(x)\}\cup G(f,E). \end{aligned}$$

Pero por nuestras funciones simples tenemos

$$\begin{aligned} &\{(x,y)\colon x\in E,\ 0\leqslant y<f(x)\} \\ &=\bigcup_{k\in\mathbb{N}}\{(x,y)\colon x\in E,\ 0\leqslant y<f_k(x)\}. \end{aligned}$$

La igualdad se cumple pues si $y<f(x)$ en algún punto debe haber un $f_k(x)$ muy cercano a $f(x)$, más que y. La otra dirección es inmediata de nuestra condición *1* de la sucesión.

Recuerde que las funciones simples se pueden escribir como

$$f_k(x)=\sum_{i\in[m_k]} a_{i,k}\mathbf{1}_{A_{i,k}},$$

con $\bigcup_{i\in[m_k]}A_{i,k}=E$ donde los conjuntos son disjuntos por parejas. Entonces tenemos que

$$\begin{aligned} &\{(x,y)\colon x\in E,\ 0\leqslant y<f_k(x)\} \\ &=\bigcup_{i\in[m_k]}\{(x,y)\colon\ x\in A_{i,k},\ 0\leqslant y\leqslant a_{i,k}\}, \end{aligned}$$

es un conjunto medible. Se cumple que

$$\begin{aligned} m(R(f,E)) &= \sum_{i\in[m_k]} m(A_{i,k}\times[0,a_{i,k}]) \\ &= \sum_{i\in[m_k]} a_{i,k}m(A_{i,k}). \end{aligned}$$

Esto ya nos permite calcular la integral de funciones simples.

Corolario 3.5.7. *Si $f(x) = \sum_{i\in[m_k]} a_i \mathbf{1}_{A_i}$, es una función simple con $A_i \cap A_j$ disjuntos, entonces*
$$\int_E f \mathrm{d}m = \sum_{i\in[m]} a_i m(A_i).$$

Veremos propiedades fáciles de la integral de Lebesgue.

Teorema 3.5.8. *Sean $f,g\colon E \to \overline{\mathbb{R}}$ medibles, positivas. Se cumplen las siguientes propiedades*

1. *Si $g(x) \leqslant f(x)$ para $x \in E$, entonces $\int_E g \mathrm{d}m \leqslant \int_E f \mathrm{d}m$.*
2. *Si $E_1 \subseteq E_2 \subseteq E$, entonces $\int_{E_1} f \mathrm{d}m \leqslant \int_{E_2} f \mathrm{d}m$.*
3. *Si $\int_E f \mathrm{d}m < \infty$ entonces $m(\{f=\infty\}) = 0$.*

Prueba

1. En efecto, si $g(x) \leqslant f(x)$ entonces $R(g,E) \subseteq R(f,E)$ y así $m(R(g,E)) \leqslant m(R(f,E))$.
2. Como $E_1 \subseteq E_2$, entonces $R(f,E_1) \subseteq R(f,E_2)$. El resto de la prueba sigue igual que el apartado anterior.
3. Sea $E_1 \subseteq E$ y considere $f\mathbf{1}_{E_1}$. Entonces
$$\int_E f\mathbf{1}_{E_1} \mathrm{d}m = \int_{E_1} f \mathrm{d}m,$$
pues podemos ver $R(f\mathbf{1}_{E_1},E)$ como
$$\{(x,y)\colon x\in E,\ 0\leqslant y \leqslant f\mathbf{1}_{E_1}\}$$
$$= (E\backslash E_1 \times \{0\}) \cup \{(x,y)\colon x \in E_1,\ 0 \leqslant y \leqslant f(x)\}.$$
Así tome $E_1 = \{f=\infty\}$, entonces
$$\mathbf{1}_{E_1} \leqslant f \Rightarrow n\mathbf{1}_{E_1} \leqslant f$$
$$\Rightarrow n(m(E_1)) \leqslant \int_E f \mathrm{d}m, \quad \forall n \in \mathbb{N},$$
$$\Rightarrow m(E_1) = 0.$$

Teorema 3.5.9 (Convergencia Monótona de Lebesgue)**.** *Sean $f,f_k\colon E \to \overline{\mathbb{R}}$ medibles, positivas para $k\in\mathbb{N}$. Si se cumple*

1. *$0 \leqslant f_k(x) \leqslant f_{k+1}(x)$ para todo $x \in E$,*
2. *$f_k \xrightarrow{k\to\infty} f$,*

entonces
$$\int_E f \mathrm{d}m = \lim_{k\to\infty} \int_E f_k \mathrm{d}m.$$

Prueba

Recuerde que
$$R(f,E) = \{(x,y)\colon x\in E,\ 0\leqslant y < f(x)\} \cup G(f,E).$$
Tenemos que
$$\int_E f \mathrm{d}m = m(\{(x,y)\colon x\in E,\ 0\leqslant y < f(x)\})$$
$$= m\left(\bigcup_{k\in\mathbb{N}} \{(x,y)\colon x\in E,\ 0\leqslant y < f_k(x)\}\right).$$
Note que
$$\{(x,y)\colon x\in E,\ 0\leqslant y < f_k(x)\}$$
$$\subseteq \{(x,y)\colon x\in E,\ 0\leqslant y < f_{k+1}(x)\},$$
entonces
$$\int_E f \mathrm{d}m = \lim_{k\to\infty} m(\{(x,y)\colon x\in E,\ 0\leqslant y < f_k(x)\})$$
$$= \lim_{k\to\infty} \int_E f_k \mathrm{d}m.$$

Observación 3.5.10. Esta propiedad ni siquiera se puede enunciar para la integral de Riemann. Que sea posible intercambiar el límite con la integral es una de las propiedades más importantes de la integral de Lebesgue.

Sean $(E_k)_{k\in\mathbb{N}}$ tal que E es la unión disjunta de estos conjuntos.

Entonces
$$R(f,E) = \bigcup_{k\in\mathbb{N}} R(f,E_k)$$
$$\Rightarrow m(R(f,E)) = \sum_{k\in\mathbb{N}} m(R(f,E_k))$$
$$\Rightarrow \int_E f \mathrm{d}m = \sum_{k\in\mathbb{N}} \int_{E_k} f \mathrm{d}m.$$

En pocas palabras, podemos despedazar nuestro dominio en cuantos pedazos querramos de manera que la integral sobre el dominio va a ser la integral sobre los pedazos.

3.6. Día 26— 28-6-2018

Recuerde que la clase pasada definimos la integral. Cuando $f\colon E \to \mathbb{R}$ es medible y positiva, entonces
$$R(f,E) = \{(x,y)\colon x \in E, 0 \leqslant y \leqslant f(x)\},$$
es medible y
$$\int_E f \mathrm{d}m = m(R(f,E)).$$
Si $\phi = \sum_{i\in[n]} a_i \mathbf{1}_{A_i}$ con $A_i \cap A_j = \varnothing$, entonces
$$\int_E \phi \mathrm{d}m = \sum_{i\in[n]} a_i m(A_i).$$
También vimos el teorema 3.5.9 de convergencia monótona, si $0 \leqslant f_k \leqslant f_{k+1}$ tal que $f_k \to f$, entonces
$$\int_E f \mathrm{d}m = \lim_{n\to\infty} \int_E f_k \mathrm{d}m.$$
Ahora si ϕ es simple como antes y $\phi \leqslant f$, entonces $\int_E \phi \mathrm{d}m \leqslant \int_E f \mathrm{d}m$.

Lema 3.6.1. *Sea $f\colon E\to\mathbb{R}$ medible y positiva. Entonces*
$$\int_E f\mathrm{d}m=\sup\left\{\int_E \phi\mathrm{d}m\colon \phi \text{ simple, } \phi\leqslant f\right\}.$$

Prueba

Dada $f\geqslant 0$, tome
$$E_k^j=\left\{\frac{j-1}{2^k}\leqslant f\leqslant \frac{j}{2^k}\right\},\quad j\in\left[k2^k\right],$$
y tome $E_k^0=\{f\geqslant k\}$. Luego
$$\phi_k=k\mathbf{1}_{E_k^0}+\sum_{j\in[k2^k]}\frac{j-1}{2^k}\mathbf{1}_{E_j^k},$$
entonces $\phi_k\leqslant f$, $\phi_k\leqslant\phi_{k+1}$ y $\phi_k\to f$. Note que estas son las hipótesis del teorema de convergencia monótona. Así tendremos
$$\int_E f\mathrm{d}m=\lim_{k\to\infty}\int_E\phi_k\mathrm{d}m.$$

Observe que estos conjuntos E_j^k son una partición del espacio. Nos preguntamos ahora, qué pasa cuando integramos sobre un conjunto de medida cero? Cuánto vale $\int_E f\mathrm{d}m$? Estamos integrando sobre un pedazo que es esencialmente vacío. Cuando no tenemos idea de como entrarle a un problema como estos, empezamos con indicadores, nos pasamos a simples y de alguna manera tomamos límites. En este caso sale de una vez con funciones simples.

Sea $(\varphi_k)_{k\in\mathbb{N}}$ una sucesión creciente de funciones simples tal que $\varphi_k\to f$. Entonces
$$\int_E\varphi_k\mathrm{d}m=\sum_{i\in[n]}a_i m(A_i),$$
si $\varphi_k=\sum_{i\in[n]}a_i\mathbf{1}_{A_i}$. Como $A_i\subseteq E$, entonces $m(A_i)=0$. Así $\int_E\varphi_k\mathrm{d}m=0$, en otras palabras
$$\int_E f\mathrm{d}m=\lim_{k\to\infty}\int_E\varphi_k\mathrm{d}m=0.$$
Esto prueba el lema a continuación.

Lema 3.6.2. *Sea $f: E\to\mathbb{R}$ medible y positiva. Si $m(E)=0$, entonces $\int_E f\mathrm{d}m=0$.*

Ahora si $f\equiv 0$ casi por doquier, definimos $Z=\{f>0\}$. Luego Z tiene medida cero y
$$\int_E f\mathrm{d}m=\int_Z f\mathrm{d}m+\int_{E\setminus Z}f\mathrm{d}m=0,$$
pues $f\equiv 0$ en $E\setminus Z$.

Cómo funcionan este tipo de resultados? Si $f,g\geqslant 0$ y $f\geqslant g$ casi por doquier, cómo probaríamos que la integral de f le gana a la de g cuando la desigualdad es casi por doquier?

Sea $Z=\{f<g\}$ con medida cero, entonces
$$\begin{aligned}\int_E f\mathrm{d}m&=\int_{E\setminus Z}f\mathrm{d}m+\int_Z f\mathrm{d}m\\&=\int_{E\setminus Z}f\mathrm{d}m\geqslant\int_{E\setminus Z}g\mathrm{d}m\\&=\int_{E\setminus Z}g\mathrm{d}m+\int_Z g\mathrm{d}m=\int_E g\mathrm{d}m.\end{aligned}$$

La Desigualdad de Markov

Sea $\alpha\geqslant 0$, entonces
$$\alpha\mathbf{1}_{\{f\geqslant\alpha\}}\leqslant f\mathbf{1}_{\{f\geqslant\alpha\}},$$
$$\Rightarrow \alpha m(\{f\geqslant\alpha\})\leqslant\int_{\{f\geqslant\alpha\}}f\mathrm{d}m\leqslant\int_E f\mathrm{d}m.$$
Esta inocente desigualdad tiene grandes aplicaciones. Vea que si $\int_E f\mathrm{d}m=0$ y $n\geqslant 0$, entonces
$$\frac{1}{n}m\left(\left\{f\geqslant\frac{1}{n}\right\}\right)\leqslant\int_E f\mathrm{d}m=0,$$
$$\Rightarrow m\left(\left\{f\geqslant\frac{1}{n}\right\}\right)=0,\ n\in\mathbb{N}.$$
Pero vea que $\{f\geqslant 0\}=\bigcup_{n\in\mathbb{N}}\left\{f\geqslant\frac{1}{n}\right\}$. Es decir $m(\{f\geqslant 0\})=0$. Acabamos de probar el siguiente lema.

Lema 3.6.3. *Sea $f\geqslant 0$ y medible. Entonces*
$$\int_E f\mathrm{d}m=0\Longleftrightarrow f\equiv 0 \text{ casi por doquier.}$$

Finalmente vamos a probar que la integral es lineal. Porque si tenemos una integral que no es un operador lineal no nos sirve de mucho.

Lema 3.6.4. *Sean $f,g\colon E\to\mathbb{R}$ medibles, positivas. Si $c>0$, entonces*
$$\int_E(cf+g)\mathrm{d}m=c\int_E f\mathrm{d}m+\int_E g\mathrm{d}m.$$

Prueba

Sea $(f_k)_{k\in\mathbb{N}}$ una sucesión creciente de funciones simples que convergen a f. Si tenemos $f_k=\sum_{i\in[\ell]}a_i\mathbf{1}_{A_i}$, con $E=\bigcup_{i\in[\ell]}A_i$ y A_i disjuntos por parejas. Vea que
$$cf_k=\sum_{i\in[\ell]}ca_i\mathbf{1}_{A_i}$$
$$\begin{aligned}\Rightarrow\int_E cf_k\mathrm{d}m&=\sum_{i\in[\ell]}ca_i m(A_i)\\&=c\sum_{i\in[\ell]}a_i m(A_i)=c\int_E f_k\mathrm{d}m.\end{aligned}$$
Así siempre podemos sacar la constante c

siempre que sean simples. Como $(cf_k)_{k\in\mathbb{N}}$ es una sucesión de funcioens simples y crecientes con $cf=\lim_{k\to\infty} cf_k$ tenemos

$$\begin{aligned}\int_E cf\,\mathrm{d}m &= \lim_{k\to\infty}\int_E cf_k\mathrm{d}m\\ &= c\lim_{k\to\infty}\int_E f_k\mathrm{d}m\\ &= c\int_E f\mathrm{d}m.\end{aligned}$$

Ahora queremos probar la parte de la suma. Nuevamente tome $(g_k)_{k\in\mathbb{N}}$ una sucesión creciente de funciones simples que converge a g. Ahora

$$g_k=\sum_{i\in[m]} b_i\mathbf{1}_{B_i},$$

con $E=\bigcup_{i\in[m]}B_i$ y B_i disjuntos dos a dos. Note que

$$f_k+g_k=\sum_{i\in[\ell]}a_i\mathbf{1}_{A_i}+\sum_{j\in[m]}b_j\mathbf{1}_{B_j}.$$

Despedazamos nuestros A's en intersecciones de B's. Este truco de intersecarlos todos nos debe servir para jugar con varias simples.
Como

$$\begin{aligned}\mathbf{1}_{A_i} &= \mathbf{1}_{A_i\cap\bigcup_{k\in[m]}B_j}\\ &= \mathbf{1}_{\bigcup_{k\in[m]}B_j\cap A_i}\\ &= \sum_{j\in[m]}\mathbf{1}_{B_j\cap A_i}.\end{aligned}$$

Así tenemos que

$$f_k+g_k=\sum_{i\in[\ell]}\sum_{j\in[m]}(a_i+b_j)\mathbf{1}_{A_i\cap B_j},$$

lo que nos dice que la integral de las simples es

$$\int_E f_k+g_k\mathrm{d}m=\sum_{i\in[\ell]}\sum_{j\in[m]}(a_i+b_j)m(A_i\cap B_j).$$

Lo que esperaríamos es que la suma de las b_j's es que nos de la integral de g. Ahora tenemos

$$\begin{aligned}\sum_{i\in[\ell]}\sum_{j\in[m]}b_jm(A_i\cap B_j) &= \sum_{j\in[m]}b_j\left(\sum_{i\in[\ell]}m(A_i\cap B_j)\right)\\ &= \sum_{j\in[m]}b_jm\left(\bigcup_{i\in[\ell]}A_i\cap B_j\right).\end{aligned}$$

Pero en virtud de que $\bigcup_{i\in[\ell]}A_i\cap B_j=B_j$ ya que los A_i son partición, tenemos el resultado.

Ejercicio 3.6.5. Muestre el otro caso, los detalles son análogos.

Asuma ahora que $0\leqslant f\leqslant g$, entonces

$$\begin{aligned}\int_E((g-f)+f)\mathrm{d}m &= \int_E g\mathrm{d}m\\ &= \int_E(g-f)\mathrm{d}m+\int_E f\mathrm{d}m=\int_E g\mathrm{d}m.\end{aligned}$$

Si además tenemos $\int_E f\mathrm{d}m<\infty$, entonces

$$\int_E(g-f)\mathrm{d}m=\int_E g\mathrm{d}m-\int_E f\mathrm{d}m.$$

Más aún podemos considerar $(f_k)_{k\in\mathbb{N}}$ una sucesión de funciones positivas, medibles. Tome

$$\int_E\left(\sum_{k\in\mathbb{N}}f_k\right)\mathrm{d}m,$$

si $S_n=\sum_{k\in[n]}f_k$, entonces $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es un sucesión creciente tendremos por el teorema 3.5.9 de convergencia monótona tendremos:

$$\begin{aligned}\int_E\left(\sum_{k\in\mathbb{N}}f_k\right)\mathrm{d}m &= \lim_{n\to\infty}\int_E S_n\mathrm{d}m\\ &= \lim_{n\to\infty}\sum_{k\in[n]}\int_E f_n\mathrm{d}m\\ &= \sum_{k\in\mathbb{N}}\int_E f_k\mathrm{d}m.\end{aligned}$$

La gran preegunta aquí es, podemos intercambiar el límite con la integral? Es decir, supongamos que $(f_k)_{k\in\mathbb{N}}$ es una sucesión funciones solamente positiva con $f_k\to f$ casi por doquier. Entonces será cierto que se cumple

$$\lim_{k\to\infty}\int_E f_k\mathrm{d}m=\int_E f\mathrm{d}m?$$

La respuesta a esta pregunta no es necesariamente cierta. Considere la sucesión

$$f_k=\begin{cases}k, & \text{si } 0\leqslant x\leqslant\frac{1}{k}\\ 0, & \text{cuando } \frac{1}{k}\leqslant x.\end{cases}$$

Entonces $f_k\to 0$, pero $\int_E f_k\mathrm{d}m=1$.

Lema 3.6.6 (Fatou)**.** *Sea $(f_k)_{k\in\mathbb{N}}$ una sucesión de funciones medibles positivas. Entonces*

$$\int_E\liminf_{k\to\infty}f_k\mathrm{d}m\leqslant\liminf_{k\to\infty}\int_E f_k\mathrm{d}m.$$

El secreto de esto es lo siguiente. Recordar la definición de líminf!

Prueba

Note que

$$\begin{aligned}\liminf_{k\to\infty}f_k &= \sup_{n\in\mathbb{N}}\inf_{k\geqslant n}f_k\\ &= \sup_{n\in\mathbb{N}}g_n,\end{aligned}$$

con $g_n=\inf_{k\geqslant n}f_k$. A mayor n menos cosas

tenemos el ínf y por tanto va a ser más grande. Entonces $g_n \to \liminf_{k\to\infty} f_k$. Luego
$$\int_E \liminf_{k\to\infty} f_k \mathrm{d}m = \lim_{n\to\infty}\int_E g_n \mathrm{d}m,$$
pero
$$g_n = \inf_{k\geqslant n} f_k \leqslant f_\ell, \quad \ell \geqslant n.$$
Ahora integramos para obtener
$$\int_E g_n \mathrm{d}m \leqslant \int_E f_\ell \mathrm{d}m, \quad \ell\geqslant n,$$
$$\Rightarrow \int_E g_n \mathrm{d}m \leqslant \inf_{\ell\geqslant n}\int_E f_\ell \mathrm{d}m.$$
Cuando tiramos $n\to\infty$ entonces
$$\int_E g_n \mathrm{d}m \to \int_E \liminf_{k\to\infty} f_k \mathrm{d}m$$
$$\inf_{\ell\geqslant n}\int_E f_\ell \mathrm{d}m \to \sup_{n\in\mathbb{N}}\inf_{\ell\geqslant n}\int_E f_\ell \mathrm{d}m$$
$$=\liminf_{k\to\infty}\int_E f_k \mathrm{d}m.$$
Esto nos da el resultado que buscamos.

El siguiente resultado es de los más poderosos.

Teorema 3.6.7 (Convergencia Dominada)**.** *Sea $(f_k)_{k\in\mathbb{N}}$ una sucesión de funciones medibles, positivas que convergen a f. Si existe g positiva y medible tal que:*

1. *$0\leqslant f_k \leqslant g$ casi por doquier,*
2. *$\int_E g \mathrm{d}m < \infty$.*

Entonces
$$\lim_{k\to\infty}\int_E f_k \mathrm{d}m = \int_E f \mathrm{d}m.$$

Prueba

Sabemos que
$$\int_E f \mathrm{d}m = \int_E \lim_{k\to\infty} f_k \mathrm{d}m$$
$$= \int_E \liminf_{k\to\infty} f_k \mathrm{d}m$$
$$\leqslant \liminf_{k\to\infty}\int_E f_k \mathrm{d}m.$$
Donde la última desigualdad se sigue del Lema de Fatou. Vamos a volcar la desigualdad usando el hecho que $\inf(A) = -\sup(-A)$.
Considere $g_k = g - f_k \geqslant 0$. Entonces
$$\int_E \liminf_{k\to\infty} g_k \mathrm{d}m = \int_E (g-f)\mathrm{d}m,$$
pero tenemos
$$\int_E \liminf_{k\to\infty} g_k \mathrm{d}m \leqslant \liminf_{k\to\infty}\int_E g_k \mathrm{d}m$$
$$= \liminf_{k\to\infty}\left(\int_E g \mathrm{d}m - \int_E f_k \mathrm{d}m\right)$$
$$= \int_E g \mathrm{d}m - \limsup_{k\to\infty}\int_E f_k \mathrm{d}m.$$
Finalmente tenemos que
$$\int_E g \mathrm{d}m - \int_E f \mathrm{d}m \leqslant \int_E g \mathrm{d}m - \limsup_{k\to\infty}\int_E f_k \mathrm{d}m$$
$$\Rightarrow \limsup_{k\to\infty}\int_E f_k \mathrm{d}m \leqslant \int_E f \mathrm{d}m.$$

3.7. Día 27— 3-7-2018

Integración de funciones medibles

Ya habíamos probado propiedades de integrales de funciones positivas. Hoy vamos a generalizar con integrales de funciones medibles. Vamos a ver que las funciones Riemann integrables son continuas casi por doquier redondeando toda la materia.

Tomemos cualquier función $f\colon E \to \overline{\mathbb{R}}$, recuerde que
$$f^+ = \max\{0, f\},$$
$$f^- = \max\{0, -f\},$$
y $|f| = f^+ + f^-$. También tenemos que $f = f^+ - f^-$ y así si $\int_E f^+ \mathrm{d}m < \infty$ ó $\int_E f^- \mathrm{d}m < \infty$ entonces definimos
$$\int_E f \mathrm{d}m = \int_E f^+ \mathrm{d}m - \int_E f^- \mathrm{d}m.$$

Definición 3.7.1. Decimos que f es integrable si ambas integrales son finitas. Denotamos $f \in L(E)$.

Observe que esto es equivalente a que la suma de las partes de la integral sea finita, pero observe que
$$\int_E (f^+ + f^-)\mathrm{d}m < \infty \iff \int_E |f| \mathrm{d}m < \infty.$$
Observe que
$$\left|\int_E f \mathrm{d}m\right| = \left|\int_E f^+ \mathrm{d}m - \int_E f^- \mathrm{d}m\right|$$
$$\leqslant \int_E f^+ \mathrm{d}m + \int_E f^- \mathrm{d}m$$
$$= \int_E |f| \mathrm{d}m.$$
Las propiedades básicas son las siguientes.

Teorema 3.7.2. *Sean $f, g\colon E \to \overline{\mathbb{R}}$ medibles tales que $\int_E f \mathrm{d}m, \int_E g \mathrm{d}m$ existen. Entonces se cumple lo siguiente:*

1. *Si $g \leqslant f$, entonces $\int_E g \mathrm{d}m \leqslant \int_E f \mathrm{d}m$.*

2. *Si $F\subseteq E$, entonces $\int_F f\mathrm{d}m$ existe si $F\subseteq E$ es medible.*
3. *Si $E=\bigcup_{i\in\mathbb{N}}E_i$ y $E_i\cap E_j=\varnothing$ para $i,j\in\mathbb{N}$, entonces*
$$\int_E f\mathrm{d}m=\sum_{i\in\mathbb{N}}\int_{E_i} f\mathrm{d}m.$$
4. *Si E es un conjunto de medida cero, entonces $\int_E f\mathrm{d}m=0$.*
5. *Si $f=g$ casi por doquier, entonces $\int_E f\mathrm{d}m=\int_E g\mathrm{d}m$.*

Prueba

Veamos el primer apartado, suponga $g\leqslant f$. Tenemos lo siguiente
$$f^+=\text{máx}\{0,f\}\geqslant\text{máx}\{0,g\}=g^+,$$
$$f^-=\text{máx}\{0,-f\}\leqslant\text{máx}\{0,-g\}=g^-,$$
entonces tendremos
$$\int_E f^+\mathrm{d}m\geqslant\int_E g^+\mathrm{d}m,$$
$$\int_E f^-\mathrm{d}m\leqslant\int_E g^-\mathrm{d}m.$$
Sumando tenemos el resultado.
Para el segundo apartado, recuerde que la integral existe cuando alguna de las partes existe. Si existe en la parte grande (o sea, nos da un número) entonces en la parte pequeña también. Si $\int_E f^+\mathrm{d}m<\infty$, entonces $\int_F f^+\mathrm{d}m<\infty$. Es análogo para f^-.
En el tercer apartado, sabemos que valen las fórmulas
$$\int_E f^+\mathrm{d}m=\sum_{i\in\mathbb{N}}\int_{E_i} f^+\mathrm{d}m$$
$$\int_E f^-\mathrm{d}m=\sum_{i\in\mathbb{N}}\int_{E_i} f^-\mathrm{d}m$$
Si ambas series son números estamos listos. Con solo que uno sea un número estámos porque nada más da infinito. Como al menos una de las sumas es finita se tiene el resultado.
Para el cuarto apartado, separamos nuevamente en partes positivas y negativas. El resultado se vale para esas funciones por lo que la integral entera nos va a dar $0-0=0$. El quinto apartado es similar usando el primer y cuarto apartado, despedazamos el conjunto en donde son iguales y en donde no lo son. En donde no ocurre es un conjunto de medida cero.

Teorema 3.7.3. *Sean $f,g\colon E\to\overline{\mathbb{R}}$ medibles tales que $\int_E f\mathrm{d}m,\int_E g\mathrm{d}m$ existen. Entonces se cumple lo siguiente:*
1. *$\int_E cf\mathrm{d}m=c\int_E f\mathrm{d}m$.*
2. *Si $f,g\in L(E)$ entonces*
$$\int_E (f+g)\mathrm{d}m=\int_E f\mathrm{d}m+\int_E g\mathrm{d}m$$

Prueba

Como no importa el caso cuando $c=0$, vemos que pasa en los demás casos. El caso fácil es $c>0$, así suponemos $c<0$. Tenemos que
$$\begin{aligned}(cf)^+&=\text{máx}\{0,cf\}\\&=\text{máx}\{0,c(-f)\}\\&=-cf^-.\end{aligned}$$
Con un razonamiento análogo $(cf)^-=cf^+$. Luego, sumando se obtiene
$$\begin{aligned}\int_E cf\mathrm{d}m&=\int_E(-c)f^-\mathrm{d}m-\int_E(-c)f^+\mathrm{d}m\\&=-c\int_E f^-\mathrm{d}m+c\int_E f^+\mathrm{d}m\\&=c\int_E f\mathrm{d}m.\end{aligned}$$
Ahora por definición tendríamos que
$$\int_E (f+g)\mathrm{d}m=\int_E (f+g)^+\mathrm{d}m-\int_E (f+g)^-\mathrm{d}m.$$
El problema aquí es, cuál es la relación entre $(f+g)^+$ y f^+,g^+? No podemos encontrar una relación, hay demasiadas posibilidades. Queremos despedazar conjuntos de manera que podamos controlar el signo de la función.
Defina
$$E_1=\{f\geqslant0,g\geqslant0\},\quad E_2=\{f\leqslant0,g\leqslant0\},$$
$$E_3=\{f\geqslant0,g<0,f+g\geqslant0\},$$
$$E_4=\{f\geqslant0,g<0,f+g<0\},$$
$$E_5=\{f<0,g\geqslant0,f+g\geqslant0\},$$
$$E_6=\{f<0,g\geqslant0,f+g<0\}.$$
Note que en E_3 tenemos que
$$\begin{aligned}\int_{E_3} f\mathrm{d}m&=\int_{E_3}(f+g)+(-g)\mathrm{d}m\\&=\int_{E_3}(f+g)\mathrm{d}m+\int_{E_3}(-g)\mathrm{d}m\\&=\int_{E_3}(f+g)\mathrm{d}m-\int_{E_3}g\mathrm{d}m.\end{aligned}$$
En la última expresión pudimos sacar el (-1) por el primer apartado y entonces tenemos que ya todas las integrales existen. Pasamos a sumar $\int_{E_3} g\mathrm{d}m$ y obtener el resultado sobre E_3. La prueba de E_4 es análoga, nada más cambiamos

un par de detalles, f por $-g$.

$$\begin{aligned}\int_{E_4}(-g)\mathrm{d}m &= \int_{E_4} -(f+g)+f\mathrm{d}m\\ &= \int_{E_4} -(f+g)\mathrm{d}m + \int_{E_4} f\mathrm{d}m\\ &= -\int_{E_4}(f+g)\mathrm{d}m - \int_{E_4} f\mathrm{d}m.\end{aligned}$$

Nuevamente pasando un par de términos de cada lado tenemos el resultado.

Ejercicio 3.7.4. Resuelva los demás casos, no aplique un argumento de simetría. Piénselo de manera intuitiva cambiando a ver quienes son positivos y negativos.

Observe que el conjunto $L(E)$ es un espacio vectorial normado. Definimos un norma sobre $L(E)$ como

$$\|f\|_L = \int_E |f|\mathrm{d}m.$$

Esta es la compleción de un espacio de funciones continuas. Es importante ver que quienes son las compleciones de ciertos espacios porque sino estamos trabajando con sólo cosas abstractas.

Ahora, veamos un contraejemplo de cuando la suma de las integrales no funciona.

Ejemplo 3.7.5. Considere $f=\mathbf{1}_{[n,\infty[}$, $g=-\mathbf{1}_{[n+1,\infty[}$. Entonces $f+g=\mathbf{1}_{[n,n+1[}$ y las integrales $\int_{\mathbb{R}} f\mathrm{d}m$, $\int_{\mathbb{R}} g\mathrm{d}m$ no están definidas. Sin embargo

$$\int_{\mathbb{R}}(f+g)\mathrm{d}m = 1.$$

Ahora, si $\phi\in L(E)$ y $f\colon E\to\overline{\mathbb{R}}$ es medible tal que $\phi\leqslant f$ y $\int_E f\mathrm{d}m$ existe, cuánto vale $\int_E(f-\phi)\mathrm{d}m$?

Si asumimos $f\notin L(E)$ vea una cosa, si f no es integrable una de las partes es infinita. Primero, la parte negativa de f no puede ser infinita. Note que $f^-\leqslant\phi^-$. Entonces

$$0\leqslant\int_E f^-\mathrm{d}m\leqslant\int_E\phi^-\mathrm{d}m<\infty.$$

Luego $\int_E f^+\mathrm{d}m=\infty$, y así

$$\int_E f^+\mathrm{d}m - \int_E\phi\mathrm{d}m = \infty.$$

Esto porque a infinito le estamos restando un número. Ahora, $f-\phi$ puede ser integrable? Si $f-\phi$ fuese integrable y le sumamos ϕ quedaría f que no es integrable. Pero la suma de integrabes lo es. Por lo que $f-\phi$ no puede ser integrable.

Como $f-\phi$ es positiva, entonces $\int_E(f-\phi)\mathrm{d}m = \int_E(f-\phi)^+\mathrm{d}m=\infty$. De aquí tenemos

$$\int_E(f-\phi)\mathrm{d}m = \int_E f\mathrm{d}m - \int_E\phi\mathrm{d}m.$$

Teoremas de convergencia

Teorema 3.7.6 (Convergencia Monótona)**.** *Sea $(f_k)_{k\in\mathbb{N}}$ una sucesión de funciones medibles tales que $f_k\to f$ en E. Si existe $\phi\in L(E)$ tal que $\phi\leqslant f_k\leqslant f_{k+1}$. Entonces se cumple*

$$\lim_{k\to\infty}\int_E f_k\mathrm{d}m = \int_E f\mathrm{d}m.$$

El teorema de convergencia monótona 3.5.9 es el mismo sólo que en vez con funciones positivas y $\phi\equiv 0$.

Lema 3.7.7 (Fatou)**.** *Sea $(f_k)_{k\in\mathbb{N}}$ una sucesión de funciones medibles tal que $\phi\leqslant f_k$ con $\phi\in L(E)$. Entonces se cumple que*

$$\int_E \liminf_{k\to\infty} f_k\mathrm{d}m\leqslant\liminf_{k\to\infty}\int_E f\mathrm{d}m.$$

Finalmente si $|f_k|\leqslant\phi$ con $\phi\in L(E)$, entonces

$$0\leqslant f_k+\phi\leqslant 2\phi,$$
$$0\leqslant \phi-f_k\leqslant 2\phi.$$

Por Fatou tenemos que

$$\Rightarrow\int_E \liminf_{k\to\infty} f_k\mathrm{d}m\leqslant\liminf_{k\to\infty}\int_E f_k\mathrm{d}m,$$
$$\Rightarrow\int_E \limsup_{k\to\infty} f_k\mathrm{d}m\geqslant\limsup_{k\to\infty}\int_E f_k\mathrm{d}m,$$

respectivamente de ambas desigualdades.

Teorema 3.7.8 (Convergencia Dominada)**.** *Sea $(f_k)_{k\in\mathbb{N}}$ una sucesión de funciones medibles tal que $f_k\to f$ casi por doquier y $|f_k|\leqslant\phi$ con $\phi\in L(E)$. Entonces se cumple*

$$\lim_{k\to\infty}\int_E f_k\mathrm{d}m = \int_E f\mathrm{d}m.$$

Riemann y Lebesgue

Teorema 3.7.9. *Sea $f\colon[a,b]\to\mathbb{R}$ acotada. Entonces $\mathcal{R}([a,b])\subseteq L([a,b])$, además*

$$\int_{[a,b]} f\mathrm{d}m = \int_a^b f\mathrm{d}x.$$

Prueba

Sea $(\Gamma_k)_{k\in\mathbb{N}}$ una colección de particiones de $[a,b]$ tales que $\Gamma_k\subseteq\Gamma_{k+1}$. Si

$$\Gamma_k=\{0=x_k(0)<x_k(1)<\cdots<x_k(m_k)=b\},$$

entonces buscamos aplicar el criterio de Darboux.

Veamos las sumas superiores y las inferiores.

$$L_k=\left(\sum_{i\in[m_k-1]}(\inf_{[x_k(i-1),x_k(i)]}f)\mathbf{1}_{[x_k(i-1),x_k(i)[}\right)$$
$$+(\inf_{[x_k(i-1),x_k(i)]}f)\mathbf{1}_{[x_k(m_{k-1}),x_k(m_k)]},$$
$$U_k=\left(\sum_{i\in[m_k-1]}(\sup_{[x_k(i-1),x_k(i)]}f)\mathbf{1}_{[x_k(i-1),x_k(i)[}\right)$$
$$+(\sup_{[x_k(i-1),x_k(i)]}f)\mathbf{1}_{[x_k(m_{k-1}),x_k(m_k)]}.$$

Entonces $L_k\leqslant L_{k+1}\leqslant f\leqslant U_{k+1}\leqslant U_k$ para todo $k\in\mathbb{N}$. Además $|L_k|,|U_k|\leqslant M$ con $M=\sup_{[a,b]}f$. Sean $U=\lim_{k\to\infty}U_k$, $L=\lim_{k\to\infty}L_k$, así $L\leqslant f\leqslant U$. Ahora como

$$\lim_{k\to\infty}\int_{[a,b]}L_k\mathrm{d}m=\lim_{k\to\infty}\int_{[a,b]}U_k\mathrm{d}m$$
$$\Rightarrow\int_{[a,b]}U\mathrm{d}m=\int_{[a,b]}L\mathrm{d}m=\int_a^b f\mathrm{d}x.$$

Esto es porque al integral las U_k,L_k nos quedan las sumas superiores e inferiores de Darboux. como $U\geqslant L$ y $\int_{[a,b]}(U-L)\mathrm{d}m=0$ entonces $U=L$ casi por doqueir. Esto significa que $U=L=f$ casi por doquier.

Teorema 3.7.10. *Sea $f\colon[a,b]\to\mathbb{R}$ acotada. Entonces $f\in\mathcal{R}([a,b])$ si y sólo si f es continua casi por doquier.*

Prueba

Bajo la notación de la prueba anterior, suponga que $f\in\mathcal{R}([a,b])$. Definamos

$$Z=\{L=U=f\}^c\cup\bigcup_{k\in\mathbb{N}}\Gamma_k,$$
$$=\{L\neq U\}\cup\{L\neq f\}\cup\{f\neq U\}\cup\bigcup_{k\in\mathbb{N}}\Gamma_k.$$

Vea que Z es el conjunto donde f debería de ser discontinua. Sea $x\notin Z$ entonces si fuese que f no es continua en x existiría $\varepsilon>0$ tal que para todo $\delta>0$ existe un x_δ que satisface

$$|x-x_\delta|<\varepsilon,\ \text{ y }\ |f(x)-f(x_\delta)|\geqslant\varepsilon.$$

Dado k, existen $x_k(i-1)$, $x_k(i)$ tales que $x\in]x_k(i-1),x_k(i)[$. Entonces

$$L_k(x)=\inf_{[x_k(i-1),x_k(i)]}f,$$
$$U_k(x)=\sup_{[x_k(i-1),x_k(i)]}f.$$

Como $x\in]x_k(i-1),x_k(i)[$ existe x_δ tal que $x_\delta\in]x_k(i-1),x_k(i)[$ y

$$\varepsilon\leqslant|f(x_\delta)-f(x)|\leqslant U_k(x)-L_k(x),$$
$$\Rightarrow\varepsilon\leqslant U_k(x)-L_k(x).$$

Esto dice que f no es integrable fuera de Z. Veamos la otra dirección, supongamos que

$$Z=\{x\colon f\ \text{ no es continua en } x\}\cup\{a,b\}.$$

Si $x\notin Z$ dado $\varepsilon>0$ existe $\delta>0$ tal que

$$|x-y|<\delta\Rightarrow|f(x)-f(y)|<\varepsilon.$$

Note que $y\in]x-\delta,x+\delta[$, entonces $f(y)\geqslant f(x)-\varepsilon$ y $f(y)\leqslant f(x)+\varepsilon$.

INSERTAR fig27.1

Sea k_0 tal que $|\Gamma_k|<\frac{\delta}{2}$ si $k\geqslant k_0$. Si tenemos $x\in[x_k(i-1),x_k(i)]$, entonces

$$\sup_{[x_k(i-1),x_k(i)]}f=U_k(x)\leqslant f(x)+\varepsilon,$$
$$\inf_{[x_k(i-1),x_k(i)]}f=L_k(x)\geqslant f(x)-\varepsilon.$$

Luego tenemos que $\forall k\geqslant k_0$ tenemos

$$\varepsilon\geqslant U_k-f,f-L_k\geqslant0,$$

luego $\lim_{k\to\infty}U_k=\lim_{k\to\infty}L_k=f$. Aplicamos el teorema de convergencia dominada 3.7.8 para obtener

$$\lim_{k\to\infty}\int_{[a,b]}U_k\mathrm{d}m=\lim_{k\to\infty}\int_{[a,b]}L_k\mathrm{d}m=\int_{[a,b]}f\mathrm{d}m.$$

3.8. Día 28— 5-7-18

Novena Sesión de Ejercicios

Ejercicio 3.8.1 (4.5 Wheeden & Zygmund)**.** Muestre con un ejemplo que la composición de funciones medibles y finitas no necesariamente es medible.

A manera de sugerencia tome una “inversa” de la función de Cantor y una indicadora de un conjunto de medida cero adecuado.

Prueba

Queremos un conjunto $\{gf=1\}$ no medible. Este conjunto es
$$(f^{-1}g^{-1})[\{1\}].$$
Definimos $g=\mathbf{1}_A$ de manera que el conjunto anterior sea $f^{-1}(A)$. Si seguimos la sugerencia y decimos que F es la inversa, entonces tendríamos que este conjunto sería $F(A)$.
Si F es la función de Cantor entonces vamos a construir
$$f^{-1}(x)=\inf\{y\in[0,1]:\ F(y)=x\}.$$
Esta función está bien definida sobre el conjunto de Cantor salvo los extremos derechos. Si C es el conjunto de Cantor y B el de los extremos derechos, entonces $m(F(C\backslash B))>0$. Luego existe $D\in F(C\backslash B)$ un conjunto no medible. Entonces tome $\tilde{D}=F^{-1}(D)$, note que $\tilde{D}\subseteq C\backslash B\subseteq C$. Para nuestros efectos, tomemos $g=\mathbf{1}_{\tilde{D}}$.

checkup

Ejercicio 3.8.2 (4.15 Wheeden & Zygmund)**.** Sea $(f_k)_{k\in\mathbb{N}}$ una sucesión de funciones medibles con $f_k\colon E\to\mathbb{R}$ y E es de medida finita. Si $|f_k(x)|\leqslant M(x)<\infty$ para $x\in E$, $k\in\mathbb{N}$, entonces dado $\varepsilon>0$ existe $F\subseteq E$ cerrado y $M\in\mathbb{R}$ tal que $m(E\backslash F)<\varepsilon$ y $|f_k(x)|\leqslant M$ para $x\in F$ para todo $k\in\mathbb{N}$.

Prueba

Considere los conjuntos
$$E_m:=\{x\in E:\ \forall k\in\mathbb{N}:\ |f_k(x)|<m\}=\bigcap_{k\in\mathbb{N}}\{f_k<m\},$$
vea que $E_m\subseteq E_{m+1}$ y $\bigcup_{m\in\mathbb{N}}E_m=E$. También para $x\in E$, $M(x)\leqslant m\Rightarrow x\in E_m$. Entonces existe m_0 tal que $m(E\backslash E_{m_0})<\frac{\varepsilon}{2}$. Sea $F\subseteq E_{m_0}$ cerrado tal que $m(E_{m_0}\backslash F)<\frac{\varepsilon}{2}$. Entonces como
$$E\backslash F E\backslash E_{m_0}\cup E_{m_0}\backslash F$$
$$\Rightarrow m(E\backslash F)=\text{medidas de arriba...}<\varepsilon.$$
Y tenemos $M=m_0$ la cota uniforme de F.

3.9. Día 29— 27-7-18

Décima Sesión de Ejercicios

Ejercicio 3.9.1 (4.19 Wheeden & Zygmund)**.** Sea $I=[0,1]$ y $f\colon I^2\to\mathbb{R}$ continua en cada variable por separado. Muestre que f es medible como función de (x,y). Si en cambio asumimos que f es continua en x para todo y fijo pero arbitrario, ¿todavía se cumple la conclusión?

Prueba

Considere una partición uniforme de I en n subintervalos y definamos
$$f_n(x,y)=f\left(\frac{k}{n},y\right),\quad x\in\left[\frac{k}{n},\frac{k+1}{n}\right[,\ k\in[n-1]^*.$$
Como por hipótesis f es continua en $\frac{k}{n}$ para y fijo pero arbitrario, por definción se sigue que dado $\varepsilon>0$, existe $\delta=\delta(y)$ tal que
$$\left|x-\frac{k}{n}\right|<\delta\Rightarrow\left|f(x,y)-f\left(\frac{k}{n},y\right)\right|<\varepsilon.$$
Ahora para cada $n>\frac{1}{\delta}$, cuando $x\in\left[\frac{k}{n},\frac{k+1}{n}\right[$ tenemos que
$$\left|x-\frac{k}{n}\right|\leqslant\frac{1}{n}<\delta\Rightarrow\left|f(x,y)-f\left(\frac{k}{n},y\right)\right|<\varepsilon.$$
Lo que implica que $f_n\to f$ puntualmente. Ahora queremos ver que f_n es medible pues esto nos mostrará que f es medible. Primero vamos a ver que
$$\{f_n>a\}=\bigcup_{k\in[n-1]^*}\left(\left[\frac{k}{n},\frac{k+1}{n}\right[\times A\right).$$
Donde $A:=\left\{y\in I:\ f\left(\frac{k}{n},y\right)>a\right\}$, este conjunto es medible en virtud de que f es continua en y. Si tenemos que $(u,v)\in\{f_n>a\}$ entonces $f_n(u,v)=f\left(\frac{k}{n},v\right)>a$ con $p\in\left[\frac{k}{n},\frac{k+1}{n}\right[$ para algún k. Inmediatamente esto nos dice que $v\in A$ por lo que (u,v) está en el producto cartesiano y por tanto en la unión.
Por otro lado si $(u,v)\in\bigcup_{k\in[n-1]^*}\left(\left[\frac{k}{n},\frac{k+1}{n}\right[\times A\right)$ entonces existe algún k_0 tal que $u\in\left[\frac{k}{n},\frac{k+1}{n}\right[$ y $f(\frac{k_0}{n},v)=f_n(u,v)>a$. De esta manera $(u,v)\in\{f_n>a\}$.
De esta manera terminos de ver la igualdad de los conjuntos. Ahora, queremos ver que los conjuntos de la unión son medibles. Pero en efecto, como f es continua en cada variable por separado, es medible y por tanto los conjuntos A son medibles para cada k. Luego $\{f_n>a\}$ es una unión de conjuntos medibles que por tanto es medible. Se sigue que f_n es medible y por tanto f es medible. finish segundo apto.

Ejercicio 3.9.2 (5.2 Wheeden & Zygmund)**.** Muestre que el teorema de convergencia monótona es falso cuando omitimos la hipótesis $\phi\in L(E)$. Muestre que el teorema de convergencia uniforme es falso cuando omitimos la hipótesis $m(E)<\infty$.

Ejercicio 3.9.3 (5.3 Wheeden & Zygmund)**.** Sea $(f_k)_{k\in\mathbb{N}}$ una sucesión de funciones positivas y medibles sobre E. Si $f_k \to f$ y $f_k \leqslant f$ casi por doquier, entonces muestre que $\int_E f_k \mathrm{d}m \to \int_E f \mathrm{d}m$.

Ejercicio 3.9.4 (5.4 Wheeden & Zygmund)**.** Sea $f \in L(]0{,}1[)$, muestre que $x^k f(x) \in L(]0{,}1[)$ para todo $k \in \mathbb{N}$. Además $\int_0^1 x^k f(x)\mathrm{d}x \to 0$.

Ejercicio 3.9.5 (5.5 Wheeden & Zygmund)**.** Con el teorema de Egorov, pruebe el teorema de convergencia acotada.

Teorema 3.9.6 (Convergencia Acotada)**.** *Sea $(f_k)_{k\in\mathbb{N}}$ una sucesión de funciones medibles con $f_k \to f$ casi por doquier en E. Si E tiene medida finita y existe $M \in \mathbb{R}$ tal que $|f_k| \leqslant M$ casi por doquier, entonces $\int_E f_k \mathrm{d}m \to \int_E f \mathrm{d}m$.*

Prueba

Buscamos aplicar el teorema de convergencia uniforme. Tenemos que $|f_k| \leqslant M$ lo que implica que $\int_E f_k \mathrm{d}m$ es finita. Luego $f_k \to f \Rightarrow |f| \leqslant M$. Por el teorema 3.2.15 de Egorov, existe $F \subseteq E$ con $m(E \backslash F) < \varepsilon$ donde $f_k \to f$ uniformemente en F. Entonces $f_k \in L(F)$ y así $\int_F f_k \mathrm{d}m \to \int_F f \mathrm{d}m$. Para el resto del conjunto tenemos que

$$\begin{aligned}\left|\int_{E\backslash F} f - f_k \mathrm{d}m\right| &\leqslant \int_{E\backslash F} |f - f_k| \mathrm{d}m \\ &\leqslant \int_{E\backslash F} |f| + |f_k| \mathrm{d}m \\ &\leqslant 2M\varepsilon\end{aligned}$$

Ejercicio 3.9.7 (5.6 Wheeden & Zygmund)**.** Considere $f : I^2 \to \mathbb{R}$ una función que cumple:

- Para todo x, f es integrable respecto a y.
- $\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)$ es acotada como función de dos variables.

Muestre que $\frac{\partial f}{\partial x}$ es medible como función de y para x fijo pero arbitrario y que

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\int_0^1 f(x,y)\mathrm{d}y = \int_0^1 \frac{\partial}{\partial x} f(x,y)\mathrm{d}y.$$

Ejercicio 3.9.8 (5.9 Wheeden & Zygmund)**.** Sea $p > 0$ y $\lim_{k\to\infty} \int_E |f - f_k|^p \mathrm{d}m = 0$. Muestre que $f_k \xrightarrow{m} f$.

Prueba

Sea $\varepsilon > 0$ y considere una partición de E a definir

$$\{|f - f_k| > \varepsilon\} \cup \{|f - f_k| \leqslant \varepsilon\} = E.$$

Entonces

$$\begin{aligned}\int_E |f - f_k|^p \mathrm{d}m &\geqslant \varepsilon^p m(\{|f - f_k| > \varepsilon\}) + Am(\{|f - f_k| \leqslant \varepsilon\}) \\ &\geqslant \varepsilon^p m(\{|f - f_k| > \varepsilon\})\end{aligned}$$