MA0505 - Análisis I

Lección XVI: Egorov y Lusin

Pedro Méndez[1]

[1] Departmento de Matemática Pura y Ciencias Actuariales
Universidad de Costa Rica

Semestre I, 2021

Agenda

El Teorema

Sean $f_k : E \to \mathbb{R}$ medibles tales que $f_k \xrightarrow[k\to\infty]{} f$ c.p.d. en E. Sabemos que no se puede esperar en general que $f_k \to f$ uniformemente en compactos.

Teorema (Egorov)

Sea $E \subseteq \mathbb{R}^d$ con $m(E) < \infty$. Si $|f(x)| \neq \infty$ c.p.d. en E entonces dado $\varepsilon > 0$, existe $F_\varepsilon \subseteq E$ cerrado que satisface:

(I) $m(E \setminus F_\varepsilon) < \varepsilon$.

(II) $f_k \xrightarrow[k\to\infty]{} f$ *uniformemente en* F_ε.

Un Comentario

- Sea $E = \mathbb{R}^d$ y $f_k = \mathbf{1}_{B(0,k)}(x)$, entonces $f_k \xrightarrow[k\to\infty]{} 1$ puntualmente.
- Si f no es acotado, existe x tal que $|1 - f_k(x)| = 1$.
- Si F es cerrado y $m(\mathbb{R}^d \setminus F) \neq \infty$ entonces F no es acotado.

Un Lema Previo

Antes de probar el teorema 1 de Egorov, vamos a probar el siguiente lema.

Lema

Dado $\varepsilon > 0$ y $\eta > 0$, entonces existen $F \subseteq E$ un cerrado y $k_0 = k_0(\varepsilon, \eta) \geqslant 0$ que satisfacen:

(I) $m(E \setminus F) < \eta$.

(II) $|f_k(x) - f(x)| < \varepsilon$ *si* $x \in F$ *y* $k \geqslant k_0$.

Prueba del Lema

Llamemos

$$\tilde{E} = \{\, x \in E : \lim_{k\to\infty} f_k = f,\ |f| < \infty \,\}.$$

Sean $\varepsilon > 0$ y $\eta > 0$, definamos

$$E_m = \bigcap_{k=m}^{\infty} \{\, |f - f_k| < \varepsilon \,\} = \{\, x \in E :\ k > k_0 \Rightarrow |f(x) - f_k(x)| < \varepsilon \,\}.$$

Entonces E_m es medible y $E_m \subseteq E_{m+1}$.

Ejercicio

Muestre que $\bigcup_{m=1}^{\infty} E_m = \tilde{E}$.

Continuamos la Prueba

- Luego $m(\tilde{E}) = \lim_{m\to\infty} m(E_m)$. Es decir

$$\lim_{m\to\infty} m(\tilde{E} \setminus E_m) = \lim_{m\to\infty} (m(\tilde{E}) - m(E_m)) = 0.$$

- Sea k_0 tal que $k \geqslant k_0 \Rightarrow m(E \setminus E_k) < \frac{\eta}{2}$. Si $x \in E_{k_0}$ entonces tenemos que

$$k \geqslant k_0 \Rightarrow |f(x) - f_k(x)| < \varepsilon.$$

- Finalmente tomemos F cerrado, $F \subseteq E_{k_0}$ que satisfaga $m(E_{k_0} \setminus F) < \frac{\eta}{2}$. Entonces

$$m(E \setminus F) \leqslant m(E \setminus E_{k_0}) + m(E_{k_0} \setminus F) < \eta.$$

Prueba del Teorema de Egorov

Dado $\varepsilon > 0$ existen $F_m \subseteq E$ cerrados y κ_m^ε tales que

(I) $m(E \setminus F_m) < \frac{\varepsilon}{2^m}$.

(II) $|f(x) - f_k(x)| < \frac{1}{m}$ para $k \geqslant \kappa_m^\varepsilon$ y $x \in F_m$.

Sea $F = \bigcap_{m=1}^{\infty} F_m$. Entonces F es cerrado y

$$m(E \setminus F) = m\left(E \cap \bigcup_{m=1}^{\infty} F_m^c\right) \leqslant \sum_{m=1}^{\infty} m(E \setminus F_m) < \varepsilon.$$

Además si $x \in F$, dado $m \geqslant 1$ existe κ_m tal que

$$k \geqslant \kappa_m \Rightarrow |f(x) - f_k(x)| < \frac{1}{m}.$$

Lusin

Definición

Una función $f : E \to \mathbb{R}$ tiene la propiedad C en E si dado $\varepsilon > 0$, existe un $F \subseteq E$ tal que

1. $m(E \setminus F) < \varepsilon$
2. f es continua relativa a F. Es decir $f : F \to \mathbb{R}$ es continua.

En este caso si $\{ x_n \}_{n=1}^{\infty} \subseteq F$ con $x_n \xrightarrow[n\to\infty]{} x \in F$, entonces $\lim_{n\to\infty} f(x_n) = f(x)$. Vamos a mostrar que esta condición es equivalente a la medibilidad de f.

Funciones Simples

Lema

Sea ϕ una función simple y medible. Entonces ϕ tiene la propiedad C.

- Sea $\phi(x) = \sum_{k=1}^{m} b_k \mathbf{1}_{B_k}(x)$ con $B_i \cap B_j = \emptyset$ y $b_i \neq b_j$ si $i \neq j$.
- Dado $\varepsilon > 0$, tome $F_\ell \subseteq E_\ell$ cerrado tal que $m(E_\ell \setminus F_\ell) < \frac{\varepsilon}{m}$.
- Entonces $F = \bigcup_{\ell=1}^{m} F_\ell$ es cerrado y $m(E \setminus F) < \varepsilon$.

Continuamos la Prueba

- Sea $\{ x_n \}_{n=1}^{\infty} \subseteq F$ tal que $x_n \xrightarrow[n\to\infty]{} yF_{\ell_0}$.
- Dado $\ell \neq \ell_0$, entonces $\{ x_n \}_{n=1}^{\infty} \cap F_\ell$ es finito.
- En caso contrario, existe $\{ x_{n_k} \}_{k=1}^{\infty} \subseteq F_\ell$ con $x_{n_k} \xrightarrow[n_k\to\infty]{} y$.
  Es decir $y \in F_\ell$, lo que nos lleva a una contradicción.
- Por lo tanto $\exists k_0$ tal que $x_n \in F_{\ell_0}$ para $n \geqslant k_0$. Entonces $\phi(x_n) = a_{\ell_0} = \phi(y)$.

El Teorema

Teorema (Lusin)

Sea $f : E \to \mathbb{R}$ con E medible. Entonces f es medible si y sólo si f tiene la propiedad C en E.

Sea $f : E \to \mathbb{R}$ medible, entonces existe $\{ f_n \}_{n=1}^{\infty}$ una sucesión de funciones simples y medibles tales que $\lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x)$ c.p.d. en E.
Sabemos que existe $F_k \subseteq E$ cerrado que satisface:

1. $m(E \setminus F_k) < \frac{\varepsilon}{2^{k+1}}$.
2. f_k es continua relativa a F_k.

El Caso de Medida Finita

Si $m(E) < \infty$, entonces por el teorema de Egorov existe $F_0 \subseteq E$ tal que

$$m(E \setminus F_0) < \frac{\varepsilon}{2}, \; f_k \xrightarrow[k\to\infty]{} f \text{ (unif. en } F_0).$$

Si tomamos $F = F_0 \cap \bigcap_{k=1}^{\infty} F_k$, entonces

$$m(E \setminus F) \leqslant m(E \setminus F_0) + \sum_{k=1}^{\infty} m(E \setminus F_k) < \varepsilon.$$

Como $f_k \xrightarrow[k\to\infty]{} f$ unif. en F, tenemos que f es continua en F.

El Caso de Medida Infinita

Si $m(E) = \infty$, llamemos

$$E_k = E \cap \{ x \in \mathbb{R}^d : \ k - 1 \leqslant |x| < k \}.$$

Ahora si $\{ x_k \}_{k=1}^{\infty} \subseteq F$ con $x_n \xrightarrow[n\to\infty]{} y \in F$, entonces existe k_0 tal que

$$k \geqslant k_0 \Rightarrow |x_k| \leqslant |y| + 1.$$

Si $m \geqslant |y| + 1$, entonces $x_k \in E_m$ para $k \geqslant k_0$ y por un argumento anterior, existen k_1, ℓ_1 tales que

$$n \geqslant k_1 \Rightarrow x_n \in F_{\ell_1}.$$

La Otra Dirección

Si f poseé la propiedad C, entonces para $k \geqslant 1$ existe $F_k \subseteq E$ que satisface

(I) $m(E \setminus F_k) < \frac{1}{k}$.

(II) f es continua relativa a F_k.

Sea $H = \bigcup_{k=1}^{\infty} F_k$, entonces $H \subseteq E$ y $m(E \setminus H) = 0$ (ejercicio). Finalmente

$$
\begin{aligned}
&\{\, x \in E : \ f(x) > a \,\} \\
&= \{\, x \in H : \ f(x) > a \,\} \cup \{\, x \in Z : \ f(x) > a \,\} \\
&= \bigcup_{k=1}^{\infty} \{\, x \in F_k : \ f(x) > a \,\} \cup \{\, x \in Z : \ f(x) > a \,\}
\end{aligned}
$$

es un conjunto medible.

Resumen

- El teorema 1 de Egorov y el lema 1 para probarlo.
- La propiedad C 1 y el lema 2 que garantiza que las funciones simples cumplen dicha propiedad
- El teorema 2 de Lusin

Ejercicios

- Lista 16
  - El ejercicio 1 en medio de la prueba del lema previo a Egorov.
  - El ejercicio 15 en la dirección contraria del teorema de Lusin.

Lecturas adicionales I

- S.Cambronero.
  Notas MA0505.
  20XX.
- I.Rojas
  Notas MA0505.
  2018.