# MA0505 - Análisis I

## Lección X: Variación Acotada

Pedro Méndez[1]

[1] Departmento de Matemática Pura y Ciencias Actuariales
Universidad de Costa Rica

Semestre I, 2021

# Agenda

1. Funciones de Variación Acotada
   - Motivación
   - La Definición de la Variación Acotado
   - Variación con Signo
   - Caracterización

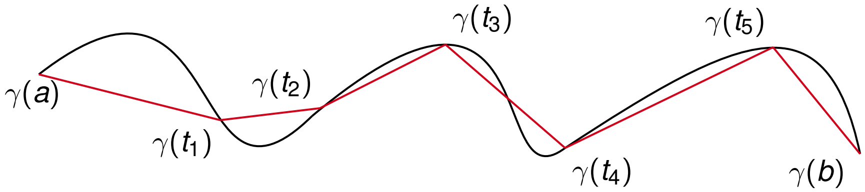
# Dos Problemas

Veremos dos problemas que muestran la necesidad de extendar las funciones que se pueden abordar por métodos usuales como el uso de la integral de Riemann.

# Longitud de una Curva

Considere $\gamma : [a, b] \to \mathbb{R}^2$ con $\gamma(t) = (\gamma_1(t), \gamma_2(t))$. Inicialmente nuestra función no es continua ni acotada.

¿Cuál es la longitud de la curva?



# Primeras Ideas

Podemos aproximar la curva por segmentos.

- Dados $a = t_0 < t_1 < t_2 < \cdots < t_n = b$, consideramos los segmentos $[\gamma(t_i), \gamma(t_{i+1})]$ con $0 \leqslant i \leqslant n-1$ donde $P = \{ t_0, t_1, \ldots, t_n \}$.
- Tomando particiones cada vez más finas esperaríamos que la longitud de las curvas poligonales aproximen la longitud de la curva. ¿Será cierto que el límite es finito?
- Note que estos límites no pueden ser aproximados por la integral de Riemann a menos que $\gamma_1, \gamma_2$ sean diferenciables.

# Componentes Diferenciables

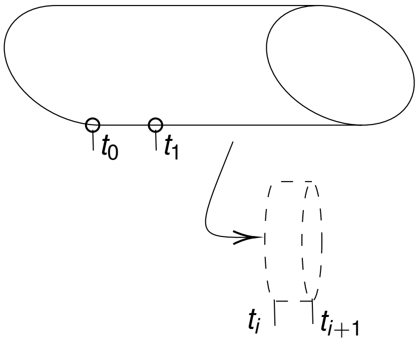
En el caso que $\gamma_1, \gamma_2$ sean diferenciables, vale el teorema del valor medio:

$$(\gamma(t_{i+1}) - \gamma(t_i)) = \gamma'(\xi_i)(t_{i+1} - t_i).$$

En general no es claro que el conjunto $L(\Gamma, \rho)$ es acotado.

# Masa de un Alambre

Un problema similar surge a la hora de medir la masa de un alambre. Aquí el área transversal es $A$.



# Análisis del Problema

En este caso podemos considerar

$$\sum_{i=1}^{n-1} \rho(t_i) A(t_i, t_{i+1}),$$

donde $\triangleright(t_i)$ es la densidad del alambre en el punto $t_i$ y $A(t_i, t_{i+1})$ es el area del segmento $t_i$ a $t_{i+1}$. Es decir

$$A(t_i, t_{i+1}) \approx A \left\| \gamma(t_i) - \gamma(t_{i+1}) \right\| .$$

La masa se aproxima por

$$\sum_{i=1}^{n-1} \rho(t_i) A \left\| \gamma(t_i) - \gamma(t_{i+1}) \right\| .$$

# Variación Acotada

Antes de explorar una nueva definición de integral que nos permite abordar estos problemas, vamos a centrarnos en el problema de las funciones tales que existe un $M \geqslant 0$ con

$$\sum_{i=1}^{n-1} |f(t_i) - f(t_{i+1})| \leqslant M$$

para cualquier partición.

# Variación Acotada

## Definición

Decimos que $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ es de variación acotada si existe un $M > 0$ tal que para toda partición

$$\Gamma = \{ t_0 = a < t_1 < \cdots < t_n = b \}$$

se tiene que

$$S(f, \Gamma) := \sum_{i=1}^{n-1} |f(t_i) - f(t_{i+1})| \leqslant M.$$

En otras palabras $f$ es variación acotada si vale que

$$\sup_{\Gamma} S(f, \Gamma) < \infty.$$

# Ejemplos de Funciones de Variación Acotada

1. Si $f$ es creciente, entonces

$$\sum_{i=1}^{n-1} |f(t_i) - f(t_{i+1})| = \sum_{i=1}^{n-1} f(t_i) - f(t_{i+1}) = f(b) - f(a).$$

Análogamente si $f$ es decreciente $S(f, \Gamma) = f(a) - f(b)$. Por lo tanto toda función monótona es de variación acotada.

# Ejemplos de Funciones de Variación Acotada

2. Tomemos $\phi : [0,1] \to \mathbb{R}$ dada por

$$\phi(x) = \begin{cases} 0, & x \in \mathbb{Q} \\ 1, & x \notin \mathbb{Q} \end{cases}$$

y sea $x_n$ tal que $x_{2k} \in \mathbb{Q}$ para $0 \leqslant k \leqslant n$ mientras que $x_{2k+1} \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ para $0 \leqslant k \leqslant n-1$. Tomamos $x_0 = 0$ y $x_{2n} = 1$. Así vale que

$$S(\phi, \Gamma) = \sum i = 0^{2n-1} |\phi(x_{i+1}) - \phi(x_i)| = n$$

y por tanto $\phi$ no es de variación acotada.

# La Variación Total

Dada $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ una función de variación acotada, definimos

$$\mathrm{Var}(f,[a,b]) = \sup_{\Gamma} S(f,\Gamma).$$

Sea $\Gamma_1 = \{\, x_0 = a < x_1 < \cdots < x_n = x \,\}$ con $a < x < b$, entonces $\Gamma = \Gamma_1 \cup \{\, b \,\}$ es una partición de $[a,b]$. Si $x_{n+1} = b$,

$$S(f,\Gamma) = \sum_{i=1}^{n-1} |f(t_{x+1}) - f(x_i)| = S(f,\Gamma_1) + |f(b) - f(x)|.$$

Por lo tanto $f:[a,x]\to\mathbb{R}$ es de variación acotada y

$$\mathrm{Var}(f,[a,x]) \leqslant \mathrm{Var}(f,[a,b]).$$

Además

$$|f(a) - f(x)| + |f(x) - f(b) \leqslant \mathrm{Var}(f,[a,b])$$
$$\Rightarrow 2|f(x)| \leqslant \mathrm{Var}(f,[a,b]) + |f(a)| + |f(b)|.$$

# Propiedades

## Lema

*Sean $f, g : [a, b] \to \mathbb{R}$ de variación acotada. Entonces*

(I) *$cf + g$ es de variación acotada para $c \in \mathbb{R}$.*

(II) *$fg$ es de variación acotada.*

(III) *Si existe $\varepsilon > 0$ tal que $|g(x)| \geqslant \varepsilon$ para $x \in [a, b]$, entonces $\frac{1}{g}$ es de variación acotada.*

(IV) *$f, g$ son acotadas.*

La prueba de este lema es un ejercicio.

# Subintervalos y la Variación

Usando los argumentos expuestos se prueba que si $\Gamma_1$ es una partición de $[a_1, b_1]$ con $a < a_1 < b_1 < b$. Tome $\Gamma = \Gamma_1 \cup \{ a, b \}$, entonces

$$\begin{aligned} & S(f, \Gamma_1) \leqslant S(f, \Gamma) \leqslant \operatorname{Var}[f, [a, b]] \\ \Rightarrow & \operatorname{Var}[f, [a_1, b_1]] \leqslant \operatorname{Var}[f, [a, b]] \, . \end{aligned}$$

# Subintervalos y la Variación

- Sea $a < c < b$, considere $\Gamma$ una partición de $[a, b]$ con

$$\Gamma = \{ x_0 = a < x_1 < \cdots < x_n = x \}.$$

- Tome $x_{m_0}$ tal que $x_{m_0} \leqslant c < x_{m_0+1}$.
- Defina $\Gamma' = \Gamma \cup \{ c \}$ y

$$\Gamma_1 = \{ x_0 = a < x_1 < \ldots \leqslant x_{m_0} \leqslant c \}$$
$$\Gamma_2 = \{ c \leqslant x_{m_0+1} < \cdots < b = x_n \}.$$

# Subintervalos y la Variación

Entonces

$$\begin{aligned} S(f,\Gamma) &\leqslant S(f,\Gamma') = S(f,\Gamma_1) + S(f,\Gamma_2) \\ &\leqslant \operatorname{Var}[f,[a,c]] + \operatorname{Var}[f,[c,b]] \end{aligned}$$

Por lo tanto

$$\operatorname{Var}[f,[a,b]] \leqslant \operatorname{Var}[f,[a,c]] + \operatorname{Var}[f,[c,b]]$$

Por otro lado si $\Gamma_1$ es una partición de $[a,c]$ y $\Gamma_2$ es una partición de $[c,b]$, entonces $\Gamma = \Gamma_1 \cup \Gamma_2$ es una partición de $[a,b]$. Es decir

$$S(f,\Gamma_1) + S(f,\Gamma_2) = S(f,\Gamma) \leqslant \operatorname{Var}[f,[a,b]] .$$

# Subintervalos y la Variación

Así tenemos que

$$
\begin{aligned}
&\sup_{\Gamma_1} S(f,\Gamma_1) + S(f,\Gamma_2) \leqslant \operatorname{Var}[f,[a,b]] \\
\Rightarrow &\sup_{\Gamma_1} S(f,\Gamma_1) + \sup_{\Gamma_2} S(f,\Gamma_2) \leqslant \operatorname{Var}[f,[a,b]] \\
\Rightarrow &\operatorname{Var}[f,[a,c]] + \operatorname{Var}[f,[c,b]] \leqslant \operatorname{Var}[f,[a,b]] .
\end{aligned}
$$

## Lema

*Sea $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ de variación acotada. Entonces*

$$\operatorname{Var}[f,[a,b]] = \operatorname{Var}[f,[a,c]] + \operatorname{Var}[f,[c,b]] .$$

Dado $x \in \mathbb{R}$ definimos

$$x^+ = \begin{cases} x, & x \geqslant 0 \\ 0, & x < 0 \end{cases} \qquad x^- = \begin{cases} -x, & x \leqslant 0 \\ 0, & x > 0 \end{cases}$$

y así $x^+, x^-$ son positivas. Además $x^+ + x^- = |x|$ y $x^+ - x^- = x$. Dada $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ y $\Gamma = \{\, x_0 = a < x_1 < \cdots < x_n = b \,\}$, una partición, consideremos

$$P(f, \Gamma) = \sum_{i=1}^{n-1} (f(t_i) - f(t_{i+1}))^+$$

$$N(f, \Gamma) = \sum_{i=1}^{n-1} (f(t_i) - f(t_{i+1}))^-$$

# Observaciones

Note que

- $S(f,\Gamma) = N(f,\Gamma) + P(f,\Gamma)$.
- $-N(f,\Gamma) + P(f,\Gamma) \leqslant \sum_{i=1}^{n-1}(f(t_i) - f(t_{i+1})) \leqslant f(b) - f(a)$.

Definimos

$$P(f,[a,b]) = \sup_{\Gamma} P(f,\Gamma), \;\; N(f,[a,b]) = \sup_{\Gamma} N(f,\Gamma).$$

Entonces

$$S(f,\Gamma) = N(f,\Gamma) + P(f,\Gamma) \leqslant N(f,[a,b]) + P(f,[a,b])$$

y por lo tanto

$$\mathrm{Var}(f,[a,b])) \leqslant N(f,[a,b]) + P(f,[a,b]).$$

# El Otro Lado

$$f(a) + P(f,\Gamma) = f(b) + N(f,\Gamma),$$

entonces

$$f(a) + P(f,[a,b]) = f(b) + N(f,[a,b]).$$

Además

$$N(f,\Gamma) + P(f,\Gamma) = S(f,\Gamma) \leqslant \mathrm{Var}(f,[a,b]).$$

Entonces

$$\begin{aligned} &f(a) - f(b) + 2P(f,\Gamma) = S(f,\Gamma) \\ \Rightarrow &f(a) - f(b) + 2P(f,[a,b]) = \mathrm{Var}(f,[a,b]) \\ \Rightarrow &N(f,[a,b]) + P(f,[a,b]) = \mathrm{Var}(f,[a,b]). \end{aligned}$$

# Descomposición

## Lema

*Sea $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ de variación acotada. Entonces vale que*

- $P(f, [a, b]) - N(f, [a, b]) = f(b) - f(a)$.
- $P(f, [a, b]) + N(f, [a, b]) = \mathrm{Var}(f, [a, b])$.

Equivalentemente se tiene que

- $P(f, [a, b]) = \frac{1}{2}\{\, \mathrm{Var}(f, [a, b]) + f(b) - f(a) \,\}$.
- $N(f, [a, b]) = \frac{1}{2}\{\, \mathrm{Var}(f, [a, b]) - f(b) + f(a) \,\}$.

Note que

$$f(x) - f(a) = P(f, [a, x]) - N(f, [a, x]).$$

Como $P(f, [a, x])$ y $N(f, [a, x])$ son funciones crecientes de $x$ y positivas, entonces

$$f(x) = P(f, [a, x]) + f(a) - N(f, [a, x]).$$

**Teorema**

*Sea $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ una función. Entones $f$ es de variación acotada si y sólo si $f$ es la resta de dos funciones crecientes y positivas.*

# Discontinuidades

## Teorema

*Sea $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ de variación acotada. Entonces $f$ tiene a lo sumo un número contable de discontinuidades. Toda discontinuidad es un salto o es removible.*

Dado que $f = f_1 - f_2$ con tales funciones positivas y crecientes, basta analizar las discontinuidades de funciones positivas y crecientes.

# Prueba del Teorema

- Considere

$$D_n = \left\{ x \in [a,b] : \; f(x_+) - f(x_-) \geqslant \frac{1}{k} \right\}$$

donde $f(x_+) = \lim_{y \to x_+} f(y)$ y $f(x_-) = \lim_{y \to x_-} f(y)$.

- De esta forma, si $x_0 < x_1 < \cdots < x_m \in D_n$, existe $y_i, z_i$ tales que para $i = 1, \ldots, n$

$$\begin{aligned} a = y_0 \leqslant x_0 < z_0 = y_1 < x_1, \\ x_{i-1} < z_{i-1} = y_i < x_i, \\ x_m \leqslant z_m = b. \end{aligned}$$

# Prueba del Teorema

- Entonces

$$= f(y_{i+1}) - f(y_i)$$
$$f(x_i^+) - f(x_i^-) \leqslant f(z_i) - f(y_i)$$

- Es decir

$$\frac{m}{k} \leqslant \sum_{m=1}^{\infty} f(z_i) - f(y_i) = f(b) - f(a)$$

y así concluimos que $|D_n| < \infty$.

## Teorema

*Sea $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ de variación acotada y continua. Entonces dado $M < \mathrm{Var}(f, [a, b]) = V$, existe $\delta > 0$ que satisface*

$$|\Gamma| < \delta \Rightarrow M < S(f, \Gamma) \leqslant V.$$

Sea $\mu > 0$ tal que $M + \mu < V$. Sea $\Gamma_1$ una partición que satisface $M + \mu < S(f, \Gamma_1)$ con

$$\Gamma_1 = \{\, \tilde{x}_0 = a < \tilde{x}_1 < \cdots < \tilde{x}_k = b \,\}.$$

Al ser $f$ uniformemente continua, existe $\delta > 0$ tal que

$$|x - y| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(y)| < \frac{\mu}{2(k+1)}.$$

# Continuamos la Prueba

- Sea $\Gamma$ una partición tal que
$$|\Gamma| < \frac{1}{2}\,\text{mín}\{\,\delta, |\Gamma_1|\,\}.$$
- Si $\Gamma = \{\, x_0 = a < x_1 < \cdots < x_n = x\,\}$, tome $\Gamma_2 = \Gamma \cup \Gamma_1$.
- Vamos a mostrar que $S(f,\Gamma_2) - \mu < S(f,\Gamma)$.
- Entonces
$$M < S(f,\Gamma_1) - \mu \leqslant S(f,\Gamma_2) - \mu \leqslant S(f,\Gamma).$$

# Continuamos la Prueba

Sean $\{\,\tilde{x}_i, \ldots, \tilde{x}_{i_\ell}\,\} = \Gamma_2 \setminus \Gamma$, entonces existe $1 \leqslant j \leqslant m$ tal que

$$x_i < \tilde{x}_{i_k} < x_{i+1}.$$

Note que $1 \leqslant \ell \leqslant k+1$ y además

$$\begin{aligned} S(f,\Gamma) &= \sum_{\{\,1\leqslant j\leqslant m:\ \Gamma_1\cap ]x_{j-1},x_j[\neq\emptyset\,\}} |f(x_j) - f(x_{j-1})| = \Sigma'' \\ &+ \sum_{\{\,1\leqslant j\leqslant m:\ \Gamma_1\cap ]x_{j-1},x_j[=\emptyset\,\}} |f(x_j) - f(x_{j-1})| = \Sigma' \end{aligned}$$

# Terminamos la Prueba

Como $\Gamma_2 = \{\, x_0 < x_1 < \cdots < x_m \,\} \cup \{\, \tilde{x}_{i_1}, \ldots, \tilde{x}_{i_m} \,\}$, se tiene que

$$
\begin{aligned}
S(f, \Gamma_2) &= \Sigma' + \sum_{\{\, 1 \leqslant j \leqslant m:\ \Gamma_1 \cap ]x_{i-1}, x_i[ \neq \emptyset \,\}} |f(x_j) - f(x_{i_k})| + |f(x_{i_k}) - f(x_{j-1})| \\
&\leqslant \Sigma' + \frac{2\mu}{2(k+1)}(k+1) \\
&\leqslant \Sigma' + \mu \\
&\leqslant S(f, \Gamma) + \mu,
\end{aligned}
$$

# Un Corolario

## Corolario

*Sea $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ tal que $f'$ es continua en $[a, b]$. Entonces*

- $\mathrm{Var}(f, [a, b]) = \int_a^b |f'(x)| \mathrm{d}x.$
- $P(f, [a, b]) = \int_a^b (f'(x))^+ \mathrm{d}x.$
- $N(f, [a, b]) = \int_a^b (f'(x))^- \mathrm{d}x$

La prueba de este resultado es un ejercicio.

# Resumen

- La definición 1 de una función de variación acotada.
- El lema 1 sobre propiedades de las funciones de variación acotada.
- El lema 2 sobre subintervalos y el comportamiento de la variación.
- El lema 3 sobre la variación positiva y negativa.
- El teorema 1 que caracteriza las funciones de variación acotada.
- El teorema 2 sobre las discontinuidades de una función de variación acotada.
- El teorema 3 sobre las sumas.
- El corolario 1 sobre las integrales y la variación.

# Ejercicios

- Lista 10
  - La prueba del lema 1 sobre funciones de variación acotada.
  - La prueba del corolario 1 sobre integrales y variación.

# Lecturas adicionales I


- S.Cambronero.
  *Notas MA0505*.
  20XX.
- I.Rojas
  *Notas MA0505*.
  2018.