Funciones Lebesgue medibles

Sea $f: E \to \overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{\infty\} \cup \{-\infty\}$.

Decimos que f es medible si para todo $a \in \mathbb{R}$

$$\{x \in E : f(x) > a\} \in \mathcal{M}.$$

De ahora en adelante

$$\{f > a\} = \{x \in E : f(x) > a\}$$

Note que

$$E = \bigcup_{n=1}^{\infty} \{f > -n\} \cup \{f = -\infty\}$$

Entonces E es medible si $\{f = -\infty\}$ es medible.

Por el resto de esta sección asumimos que E es medible.

Ejm:

(i) Sea $f: \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ continua, ent $\{f > a\}$ es abierto

(ii) Sea $f = \mathbb{1}_A$, ent

$$\{f > a\} = \begin{cases} E & \text{si } a < 0 \\ A & \text{si } 0 \leq a < 1 \\ \emptyset & \text{si } a \geq 1 \end{cases}$$

Teorema: Sea $f: E \to \mathbb{R}$ con E medible. Entonces f es medible si se cumple cualquiere de los siguientes postulados para todo $a \in \mathbb{R}$

(i) $\{f \geq a\}$ es medible

(ii) $\{f < a\}$ es medible

(iii) $\{f \leq a\}$ es medible

(iv) $\{f > a\}$ es medible

Pba: Note que

$$\{f > a\} = \bigcup_{n=1}^{\infty} \{f \geq a + \tfrac{1}{n}\} = \{f \leq a\}^c$$

$$\{f \geq a\} = \bigcap_{n=1}^{\infty} \{f > a - \tfrac{1}{n}\} = \{f < a\}^c$$

$\blacksquare$

Si $f: E \to \mathbb{R}$ es medible, entonces

$$\{f > -\infty\} = \bigcup_{k=1}^{\infty} \{f > -k\}$$

$$\{f < +\infty\} = \bigcup_{k=1}^{\infty} \{f \leq k\}$$

$$\{f = +\infty\}, \quad \{a < f \leq b\},$$

$$\{a \leq f < b\}$$

son medibles

Def: Decimos que $f: E \to \mathbb{R}$ es Borel medible si

(i) $E \in \mathcal{B}$

(ii) $\{f > a\} \in \mathcal{B}$ para todo $a \in \mathbb{R}$.

Esta definición será útil para los ejercicios.

Teorema: Sea $f: E \to \mathbb{R}$. Ent f es medible sii $f^{-1}(G)$ es medible para todo abierto G.

Pba:

"$\Leftarrow$" Si $G = (a, +\infty)$, tenemos que

$$f^{-1}(G) = \{x \in E : f(x) > a\}$$

"$\Rightarrow$" Sea G abierto en $\mathbb{R}$. Entonces

$$G = \bigcup_{k=1}^{\infty} (a_k, b_k), \text{ i.e.}$$

$$f^{-1}(G) = \bigcup_{k=1}^{\infty} f^{-1}((a_k, b_k))$$

$$= \bigcup_{k=1}^{\infty} \{a_k < f < b_k\}$$

Lema: Sea $f: E \to \mathbb{R}$ medible y $\phi: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continua. Ent

$\phi \circ f$ es medible

Pba: Sea G abierto, ent

$$(\phi \circ f)^{-1}(G) = f^{-1}(\phi^{-1}(G)).$$

Como ϕ es continua $\phi^{-1}(G)$ es abierto, i.e.

$f^{-1}(\phi^{-1}(G))$ es medible.

Luego si $f: E \to \mathbb{R}$ es medible tenemos que. $|f|$, $|f|^p$, e^{cf}, $f^{+} = \max\{f, 0\}$ y $f^{-} = -\min\{0, f\}$

son medibles.

Def: Decimos que una propiedad se cumple casi por doquier si se cumple excepto en un conjunto de medida cero.

Lema: Sean $f : E \to \mathbb{R}$
$g : E \to \mathbb{R}$.

Si f es medible y $g = f$ casi por doquier. Entonces g es medible.

Pba: Sea $a \in \mathbb{R}$, ent

$$\{g > a\} = [\{g > a\} \cap \{f = g\}] \cup [\{g > a\} \cap \{f \neq g\}]$$

Como $\{g > a\} \cap \{f = g\} =$

$\{f > a\} \cap \{f = g\}$, este conjunto es medible.

Además $\{f \neq g\}$ tiene medida cero, ent $\{g > a\}$ es la unión de medibles

Tenemos una variante del lema trasanterior para funciones con valores infinitos

Lema: Sea $f : E \to \overline{\mathbb{R}}$ medible t.q.

$$0 = m(f = +\infty) = m(f = -\infty)$$

Entonces $\phi \circ f$ es medible, para ϕ continua

Pba: Sea

$$F = \{x \in E : f(x) \in \mathbb{R}\}.$$

Considere

$$f_1(x) = \begin{cases} f(x) & \text{si } x \in F \\ 0 & \text{si no} \end{cases}$$

Entonces $\phi \circ f_1$ es igual a $\phi \circ f$ c.p.d., como $\phi \circ f_1$ es medible tenemos que $\phi \circ f$ es medible ∎

Vamos a mostrar que las funciones medibles son un espacio vectorial.

Lema, Sean $f : E \to \mathbb{R}$, $g : E \to \mathbb{R}$ medibles. Entonces $\{f > g\}$ es medible.

Pba:

Sea $\mathbb{Q} = \{q_n\}_{n=1}^{\infty}$, entonces

$$\{f > g\} = \bigcup_{n=1}^{\infty} \{f > q_n > g\}$$
$$= \bigcup_{n=1}^{\infty} \{f > q_n\} \cap \{q_n > g\}$$

que es medible. ∎

Lema: Sean $f: E \to \mathbb{R}$

$g: E \to \mathbb{R}$

medibles. Entonces

(i) $f+t$, tf son medibles para todo $t \in \mathbb{R}$

(ii) $f+g$ es medible.

Db: Se deja como ejercicio probar el punto (i). Sea $t \in \mathbb{R}$ entonces

$$\{f+g>t\} = \{f > t-g\}$$

que es medible ∎

En el caso de que

$f: E \to \overline{\mathbb{R}}$

$g: E \to \overline{\mathbb{R}}$

hay que tomar en cuenta que $f+g$ podría no estar definida.

Ejc: El lema anterior es válido si $f+g$ esta bien definida.

Corolario: Sean $f: E \to \overline{\mathbb{R}}$ y $g: E \to \overline{\mathbb{R}}$ medibles. Entonces $f \cdot g$ es medible y $\frac{f}{g}$ es medible si $g \neq 0$.

Pba:

Sea $F = \{f \in \mathbb{R}\} \cap \{g \in \mathbb{R}\}$

entonces

$$\{f g > a\} = \{f \cdot g > a\} \cap F$$

$$\cup \left(\{f = +\infty\} \cap \{g > 0\}\right)$$

$$\cup \left(\{g = +\infty\} \cap \{f > 0\}\right)$$

$$\cup \left(\{f = -\infty\} \cap \{g < 0\}\right)$$

$$\cup \left(\{g = -\infty\} \cap \{f < 0\}\right)$$

Luego basta mostrar que

$$\{f \cdot g > a\} \cap F \text{ es medible.}$$

Lo cual se deduce del hecho

$$f \cdot g = \left((f+g)^2 - (f-g)^2\right)\frac{1}{4}$$

en F. Se deja como ejercicio el resto del resultado $\blacksquare$

Teorema: Sea $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ una sucesión de funciones medibles. Entonces

$\sup_{n \geq 1} f_n(x)$, $\inf_{n \geq 1} f_n(x)$, $\limsup_{n \to \infty} f_n(x)$

y $\liminf_{n \to \infty} f_n(x)$ son medibles.

Pba: Sea $a>0$, ent

$$\{\sup_{n\geq 1} f_n(x) > a\} = \bigcup_{n=1}^{\infty} \{f_n > a\} \quad \text{es medible.}$$

Además

$$\inf_{n\geq 1} f_n = -\sup_{n\geq 1}(-f_n)$$

$$\limsup_{n\to\infty} f_n = \inf_{n\geq 1} \sup_{\ell\geq n} f_\ell$$

$$\liminf_{n\to\infty} f_n = \sup_{n\geq 1} \inf_{\ell\geq n} f_\ell$$

Aproximación de funciones medibles

Una función ϕ es simple si existen $A_1, \dots, A_n$ conjuntos y $a_1, \dots, a_n$ reales tales que

$$\phi(x) = \sum_{n=1}^{m} a_n \mathbb{1}_{A_n}$$

Ejr: Dada ϕ simple, existen $b_1, \dots, b_\ell \in \mathbb{R}$ y $B_1, \dots, B_\ell$ medibles t.q.

$$\phi(x) = \sum_{n=1}^{\ell} b_n \mathbb{1}_{B_n}$$

con $B_i \cap B_j = \emptyset$ y $b_i \neq b_j$ para $i \neq j$.

Sea $f \geq 0$, $f : E \to \mathbb{R}$.

Considere

$$f_n(x) = \begin{cases} \frac{j-1}{2^n} & \text{si } \frac{j-1}{2^n} \leq f(x) < \frac{j}{2^n} \\ \text{para} & 1 \leq j \leq n2^n \\ n & \text{si } f(x) \geq n \end{cases}$$

Considere

$$f_n(x) = \sum_{j=1}^{n2^n} \frac{j-1}{2^n} \mathbb{1}_{A_n^j} +$$

$$n \mathbb{1}_{B_n}$$

donde

$$B_n = f^{-1}([n, +\infty))$$

$$A_n^j = f^{-1}\left(\left[\frac{j-1}{2^n}, \frac{j}{2^n}\right)\right)$$

si $1 \leq j \leq n2^n$.

Es claro que

$$0 \leq f(x) - f_n(x) \leq \frac{1}{2^n}$$

si $0 \leq f(x) < n$. Si $f(x) \geq n$,

$$0 \leq f(x) - f_n(x) = f(x) - n$$

Luego si $f(x) \neq +\infty$ existe n_0 t.q

$$|f(x) - f_n(x)| < \frac{1}{2^n}$$

para todo $n \geq n_0$.

Además si $f(x) = +\infty$, ent

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x)$$

Ahora si $\frac{j-1}{2^n} \leq f(x) < \frac{j}{2^n}$

entonces

$$(1) \quad \frac{2j-2}{2^{n+1}} \leq f(x) < \frac{2j-1}{2^{n+1}} \quad \text{ó}$$

$$(2) \quad \frac{2j-1}{2^{n+1}} \leq f(x) < \frac{2j-2}{2^{n+1}}$$

Si (1) se cumple

$$f_n = \frac{j-1}{2^n} = f_{n+1}$$

Si se cumple (2)

$$f_n = \frac{j-1}{2^n} \quad y \quad f_{n+1} = \frac{2j-1}{2^{n+1}}$$

$$\therefore f_n \leq f_{n+1}$$

Teorema: Sea $f: E \to \mathbb{R}$. Entonces existe una sucesión de funciones simples φ_n t.q

$$\lim_{n\to\infty} \varphi_n = f$$

Si $f \geq 0$, la sucesión puede ser tomada creciente. Si f es medible se pueden tomar las φ_n medibles.