MA0505 - Análisis I

Lección XXII: Riemann y Lebesgue IV

Pedro Méndez[1]

[1]Departmento de Matemática Pura y Ciencias Actuariales
Universidad de Costa Rica

Semestre I, 2021

Agenda

Particiones

Sea $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ acotada y

$$\Gamma_k = \{\, a = x_1^k < x_2^k < \cdots < x_{m_k}^k = b \,\}.$$

Consideremos

a) Si $m_i = \inf_{[x_{i-1}, x_i]} f(x)$, entonces

$$\ell_k(x) = \sum_{i=1}^{n-1} m_i \mathbf{1}_{[x_{i-1}, x_i[} + m_n \mathbf{1}_{[x_{n-1}, x_n]}.$$

b) Si $M_i = \sup_{[x_{i-1}, x_i]} f(x)$, entonces

$$u_k(x) = \sum_{i=1}^{n-1} M_i \mathbf{1}_{[x_{i-1}, x_i[} + M_n \mathbf{1}_{[x_{n-1}, x_n]}.$$

Note que

$$\ell_k(x) \leqslant f(x) \leqslant u_k(x).$$

Recordemos que si $\Gamma_k \subseteq \Gamma_{k+1}$, entonces

(I) $\ell_k \leqslant \ell_{k+1}$.

(II) $u_k \geqslant u_{k+1}$.

Si $|f(x)| \leqslant M$ para $x \in [a,b]$, entonces $|\ell_k|, |u_k| \leqslant M$ en $[a,b]$. Y también

$$\begin{cases} \ell = \lim\limits_{k\to\infty} \ell_k \\ u = \lim\limits_{k\to\infty} u_k \end{cases} \overbrace{\Rightarrow}^{\text{(TCD)}} \begin{cases} \lim\limits_{k\to\infty} \displaystyle\int_{[a,b]} \ell_k(x)\mathrm{d}x = \int_{[a,b]} \ell(x)\mathrm{d}x. \\ \lim\limits_{k\to\infty} \displaystyle\int_{[a,b]} u_k(x)\mathrm{d}x = \int_{[a,b]} u(x)\mathrm{d}x. \end{cases}$$

Luego tenemos que

$$\int_{[a,b]} u(x)\mathrm{d}x = \int_{[a,b]} \ell(x)\mathrm{d}x$$

$$\iff \int_{[a,b]} (u(x) - \ell(x))\mathrm{d}x = 0$$

$$\iff u = \ell \text{ c.p.d.}$$

Como

$$\int_{[a,b]} \ell_k(x)\mathrm{d}x = \sum_{i=1}^{n} m_i(x_i - x_{i-1}), \int_{[a,b]} u_k(x)\mathrm{d}x = \sum_{i=1}^{n} M_i(x_i - x_{i-1}),$$

entonces concluimos que $u = \ell$ c.p.d. si y sólo si las sumas inferiores y superiores convergen al mismo punto.

Teorema

Sea $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ acotada. Entonces son equivalentes

(I) *f es Riemann-integrable.*

(II) *f es continua c.p.d.*

Comenzamos asumiendo que f es Riemann-integrable. Tomemos

$$Z = \{\, \ell \neq f \,\} \cap \{\, \ell \neq u \,\} \cap \{\, f \neq u \,\} \cap \bigcup_{k=1}^{\infty} \Gamma_k .$$

Como f es Riemann-integrable, entonces $m(Z) = 0$.

Continuamos la Prueba

Si fuese que $x \notin Z$, entonces

$$u(x) = \ell(x) = f(x), \; x \notin \Gamma_k, \; k \geqslant 1.$$

Supongamos a manera de contradicción que f no es continua en x. Entonces existe un $\varepsilon > 0$ tal que para $\delta > 0$, existe x_δ tal que

$$|x_\delta - x| < \delta, \text{ y } |f(x) - f(x_\delta)| > \varepsilon.$$

Continuamos la Prueba

Dado k, existen x_i^k, x_{i+1}^k tales que $x \in \left]x_i^k, x_{i+1}^k\right[$. Tomemos δ_0 tal que

$$]x-\delta, x+\delta[\subseteq \left]x_i^k, x_{i+1}^k\right[, \ \delta \leqslant \delta_0.$$

Entonces

$$\begin{aligned} x_\delta \in \left]x_i^k, x_{i+1}^k\right[&\Rightarrow \varepsilon \leqslant M_i - m_i \\ &\Rightarrow u_k(x) - \ell_k(x) > \varepsilon, \text{para todo } k. \end{aligned}$$

La Otra Dirección

Asumamos que f es continua c.p.d. Sea entonces

$$Z = \{\, x : \; f(x) \text{ es discontinua en } x \,\}$$

y tomemos $x \in Z \cup \{\, a, b \,\}$. Dado $\varepsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que si $y \in \,]a, b[$, entonces

$$|x - y| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(y)| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Continuamos la Prueba

Tome ahora $|\Gamma_k| < \frac{\delta}{2}$. Sea i tal que $x \in [x_{i-1}, x_i[$ para $1 \leqslant i \leqslant n$. Como $[x_{i-1}, x_i[\subseteq]x - \delta, x + \delta[$ tenemos que

$$f(x) - \frac{\varepsilon}{2} \leqslant f(x) < f(x) + \frac{\varepsilon}{2}, \; y \in [x_{i-1}, x_i[\,.$$

Luego

$$f(x) - \frac{\varepsilon}{2} < m_i \leqslant M_i \leqslant f(x) + \frac{\varepsilon}{2}$$

y así concluimos que si $|\Gamma_k| \xrightarrow[k\to\infty]{} 0$, existe k_0 tal que

$$k \geqslant k_0 \Rightarrow |u_k(x) - f(x)|, |\ell_k(x) - f(x)| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Concluimos la Prueba

Lo anterior nos dice que

$$\ell_k(x) \xrightarrow[k\to\infty]{} f(x), \; u_k(x) \xrightarrow[k\to\infty]{} f(x).$$

Por el T.C.D. se cumple que

$$\lim_{k\to\infty} \int_{[a,b]} \ell_k(x)\mathrm{d}x = \int_{[a,b]} f(x)\mathrm{d}x. \quad \lim_{k\to\infty} \int_{[a,b]} u_k(x)\mathrm{d}x = \int_{[a,b]} f(x)\mathrm{d}x.$$

En conclusión las integrales de Riemann y Lebesgue concuerdan.

Resumen

- El teorema 1 que nos da la equivalencia entre integrabilidad de Riemann y continuidad casi por doquier.

Ejercicios

- Lista 22
    - No hay ejercicios para hoy.

Lecturas adicionales I

- S.Cambronero.
  Notas MA0505.
  20XX.
- I.Rojas
  Notas MA0505.
  2018.