¡Atención a la notación!

- Intercambio: Intercambia filas.
  - $F_i = F_j$, $F_i \leftrightarrow F_j$, $f_i \leftrightarrow f_j$.
- Reescalamiento: Multiplica filas por constantes.
  - cF_i, $F_i = cF_i$,cf_i.
- Combinación: Sumar múltiplos de filas.
  - $F_i + cF_j$,$F_i = F_i + cF_j$,$F_i \leftarrow F_i + cF_j$.

Observación. En el libro de Grossmann se utiliza R_i para denotar la fila i-ésima.

Definición. Una matriz está en <u>forma escalonada</u> si:

1. Las filas nulas están lo **más abajo posible**.
2. La 1^era^ entrada no cero de cada fila **está a la derecha** de la 1^era^ entrada no cero de la fila anterior.

Ejemplo 1. Consideremos la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & 2 & 4 & -5 \end{pmatrix}.$$

Veamos si A está en forma escalonada.

C1 La condición 1 de la definición se cumple porque no hay filas nulas.

C2 Las 1^eras^ entradas no cero de cada fila son 1,-1 y 2. El -1 de la segunda fila sí está a la **derecha** del 1. Pero el 2 está a la **izquierda** del -1

La condición 2 no se cumple entonces A no está en forma escalonada. Pero, ¿podemos convertirla? ¡Sí! Con una operación de fila. Observemos que al aplicar un **intercambio** obtenemos:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & 2 & 4 & -5 \end{pmatrix} \xrightarrow{F_2 \leftrightarrow F_3} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 4 & -5 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 3 \end{pmatrix}.$$

La matriz A y la nueva matriz **no son la misma**. Sin embargo está nueva matriz **sí** está en forma escalonada.

Práctica

Considere la matriz $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. ¿Está en forma escalonada? Si no, ¡conviértala con operaciones de fila!
Como **sugerencia** debe usar la operación de **combinación**.

Definición. Una matriz está en <u>forma escalonada reducida</u> (**FER**) si:

1. Está en **forma escalonada**.
2. La 1^era^ entrada de cada fila es un 1.
3. En cada **columna**, a los unos sólo **los acompañan ceros**.

Ejemplo 2. Considere la última matriz que obtuvimos del ejemplo anterior.

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 4 & -5 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 3 \end{pmatrix}$$

¿está en **forma escalonada reducida**?

C1 Sí está en forma escalonada.

C2 Las 1^eras^ entradas no cero de cada fila son 1,2 y -1. Entonces sólo la primera fila lo cumple.

Remediamos esto aplicando dos **reescalamientos**:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 4 & -5 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 3 \end{pmatrix} \xrightarrow{\frac{1}{2}F_2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & \frac{-5}{2} \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 3 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{-1F_3} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & \frac{-5}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -3 \end{pmatrix}$$

Con esto ya vale la condición 2.

Sin embargo la condición 3 todavía no se cumple. El 1 de la segunda fila tiene un 1 en cima y el de la tercera un -2 y un 2. Para deshacernos de ellos aplicamos una **combinación**.

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & \frac{-5}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -3 \end{pmatrix} \xrightarrow{F_1 - F_2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -4 & \frac{5}{2} \\ 0 & 0 & 1 & 2 & \frac{-5}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -3 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{F_2 - 2F_3} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -4 & \frac{5}{2} \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \frac{7}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -3 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{F_1 + 4F_3} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & \frac{-19}{2} \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \frac{7}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -3 \end{pmatrix}$$

Se cumple así la condición 3 y está es la forma escalonada reducida de A.

Observación. Al decir *la* forma escalonada reducida hacemos alusión a unicidad. Esto es porque **toda matriz** es equivalente por filas a una **única** matriz en **FER**.

Definición. El rango de una matriz es el **número de filas no nulas** (no cero) de su **FER**. Denotamos el rango de A como $\mathrm{Rng}(A)$.

Observación. En el ejemplo anterior, la matriz no tenía filas nulas por lo que $\mathrm{Rng}(A)=3$.

Además igual que la cantidad de soluciones, el rango se preserva por medio de operaciones de fila.

El Tma. Resumen de Soluciones de un Sist. Lin.

Teorema. *Consideremos el sistema $A\vec{x}=\vec{b}$:*

1. *Tiene* ***solución única*** *cuando*
$$\mathrm{Rng}(A)=\mathrm{Rng}(A\,|\,\vec{b})=\#cols.A.$$
2. *Tiene* ***infinitas soluciones*** *cuando*
$$\mathrm{Rng}(A)=\mathrm{Rng}(A\,|\,\vec{b})<\#cols.A.$$
3. *Es* ***inconsistente*** *cuando*
$$\mathrm{Rng}(A)<\mathrm{Rng}(A\,|\,\vec{b}).$$

Observación. Observemos lo siguiente:

- Según la tercera condición, si $\mathrm{Rng}(A)<\mathrm{Rng}(A\,|\,\vec{b})$, el sistema no tiene solución. En un sistema homogéneo $\vec{b}=0$ (vector de ceros), y eso no afecta el rango. Vale $\mathrm{Rng}(A)=\mathrm{Rng}(A\,|\,0)$ entonces **no es posible que no tenga solución**. Es decir, **un sistema homogéneo siempre tiene solución**.

Definición. Si A cumple $\mathrm{Rng}(A)=\#\mathrm{cols}.A$, diremos que A tiene rango completo.

Si no, vale $\mathrm{Rng}(A)<\#\mathrm{cols}.A$. En ese caso llamamos nulidad a la cantidad $\mathrm{Nul}(A)=\#\mathrm{cols}.A-\mathrm{Rng}(A)$.

Diferencia entre $\mathrm{Rng}(A)$ y $\mathrm{Rng}(A\,|\,\vec{b})$

Práctica

Consideremos el sistema de ecuaciones:
$$\begin{cases} x+4y-7z=4\\ 2x+7y-17z=-1\\ y+3z=2\end{cases}$$
Encontremos el **rango** de la matriz de coeficientes y de la matriz aumentada y veamos qué nos dice el teorema resumen.

Práctica

Resolvamos el sistema de ecuaciones del problema estequiométrico de la primera clase:
$$\begin{cases} 3a-c=0\\ 8a-2d=0\\ 2b-2c-d=0\end{cases}$$

Práctica

Consideremos el sistema de ecuaciones a continuación:
$$\begin{cases} u+v-y=1\\ v+2w+x+3y=1\\ u-w+x+y=0\end{cases}$$

1. ¿Cuál es la matriz asociada al sistema? ¿Y la aumentada?
2. Reduzca la matriz aumentada para encontrar la solución. ¿Qué nos dice el teorema resumen?
3. ¿Cuáles variables son libres en la solución? ¿De cuantos parámetros depende la solución? ¿Cuál es la nulidad de la matriz?