**Ejercicio 1** (Kunz Ej. 4 pag. 72)**.** Para una función $K$-regular $\varphi : V \to W$, sea

$$K[\varphi] : K[W] \to K[V]$$

el homomorfismo de $K$-álgebras dado por $f \mapsto f \circ \varphi$. *Es decir, el pullback de* $\varphi$.

Si $\psi : W \to Z$ es otra función $K$-regular hacia una $K$-variedad $Z$, entonces *muestre que*

$$K[\psi \circ \varphi] = K[\varphi] \circ K[\psi].$$

Además, *verifique que* $K[\mathrm{id}] = \mathrm{id}_{K[V]}$.

*Aparte, el mapeo* $\varphi \mapsto K[\varphi]$ define una biyección entre el conjunto de todas las funciones $K$-regulares de $V$ a $W$ y el conjunto de todos los homomorfismos de $K$-álgebra $K[W] \to K[V]$.

Aquí, los $K$-isomorfismos de $V$ en $W$ corresponden de manera biyectiva a los isomorfismos de $K$-álgebras $K[W] \cong K[V]$.

Respuesta

Observe que $\psi \circ \varphi : V \to Z$ y su pullback $K[\psi \circ \varphi] : K[Z] \to K[V]$ está definido por:

$$K[\psi \circ \varphi](f) = f \circ (\psi \circ \varphi), \quad \text{para } f \in K[Z].$$

Por otro lado, la composición $K[\varphi] \circ K[\psi]$ está dada por:

$$(K[\varphi] \circ K[\psi])(f) = K[\varphi](f \circ \psi) = (f \circ \psi) \circ \varphi.$$

Estas cantidades son iguales por lo que $K[\psi \circ \varphi] = K[\varphi] \circ K[\psi]$, como se pedía. Esto prueba la primera parte del ejercicio.

---

En efecto, observe $K[\mathrm{id}]$ es el mapeo $f \mapsto f \circ \mathrm{id} = f$. Se sigue que $K[\mathrm{id}]$ es la identidad en $K[V]$.

---

Para la segunda parte, queremos mostrar que el mapeo

$$(\varphi \mapsto K[\varphi]) : \mathrm{Map}(V, W) \to \mathrm{Hom}\big(K[W], K[V]\big)$$

es una biyección.

Primero verificamos inyectividad. Supongamos que $\varphi_1, \varphi_2 : V \to W$ son funciones $K$-regulares con

$$K[\varphi_1] = K[\varphi_2].$$

Entonces, para cualquier $f \in K[W]$, tenemos que $f \circ \varphi_1 = f \circ \varphi_2$. En particular, vale para $\mathrm{id}_{K[V]}$ que

$$\mathrm{id}_{K[V]} \circ \varphi_1 = \mathrm{id}_{K[V]} \circ \varphi_2 \Rightarrow \varphi_1 = \varphi_2.$$

Sobreyectividad: No estoy seguro, pero creo que tiene que ver con el morfismo de evaluación.

---

Si $\varphi : V \to W$ es un isomorfismo, entonces existe $\psi : W \to V$ con

$$\psi \circ \varphi = \mathrm{id}_V \quad \text{y} \quad \varphi \circ \psi = \mathrm{id}_W.$$

De la primera parte, sabemos que

$$K[\psi \circ \varphi] = K[\varphi] \circ K[\psi]$$

y como $\psi \circ \varphi = \mathrm{id}_V$, tenemos que:

$$K[\psi \circ \varphi] = K[\mathrm{id}_V] = \mathrm{id}_{K[V]}.$$

De manera similar, dado que $\varphi \circ \psi = \mathrm{id}_W$, tenemos que:

$$K[\varphi \circ \psi] = K[\mathrm{id} W] = \mathrm{id} K[W].$$

La otra dirección es análoga y basado en el apartado anterior, tenemos la correspondencia entre isomorfismos de variedades e isomorfismos de anillos de coordenadas.