Determinantes

El determinante es una función cuya entrada es una matriz cuadrada y devuelve un escalar.

Notación. El determinante de una matriz A se denota $\det(A)$ ó bien $|A|$.

- En el caso $[2\times 2]$, si $A=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ entonces
$$\det(A)=ad-bc.$$
- El caso $[3\times 3]$, la **Regla de Sarrus**:
Si $A=\begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix}$ entonces calculamos su determinante tomando las dos primeras columnas y aumentando A con ellas de forma que obtenemos
$$\left(\begin{array}{ccc|cc} a & b & c & a & b \\ d & e & f & d & e \\ g & h & i & g & h \end{array}\right)$$
de aquí sumamos las diagonales de arriba hacia abajo y restamos las diagonales de abajo hacia arriba de forma que
$$\det(A)=aei+bfg+cdh-gec-hfa-idb.$$

Propiedades

I) Escalares: $\det(cA)=c^{\#\text{filas}A}\det(A)$.

II) Traspuestas: $\det(A)=\det\left(A^{\mathsf{T}}\right)$.

III) Multiplicatividad: $\det(AB)=\det(A)\det(B)$.

IV) Inversas: $\det(A^{-1})=\frac{1}{\det(A)}$.

El siguiente resultado es parte del teorema resumen que hemos visto la lección pasada.

Teorema 1 (Adendo al Tma. Resumen)**.** *Una matriz A es invertible si y sólo si* $\det(A)\neq 0$.

Práctica

Considere las matrices
$$I=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},\ -I=\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$
Calcule sus determinantes. Ahora sume ambas matrices y calcule el determinante del resultado.

Ejercicio 2. En general, ¿se cumple que $\det(A+B)=\det(A)+\det(B)$? ¿Puede encontrar un ejemplo donde sí se cumpla y uno donde no?

Determinantes de orden superior

Para matrices en $\mathcal{M}_4$ o de tamaño más grande existen dos maneras de calcular sus determinantes.

Expansión por menores (Laplace)

Ejemplo 3. Calculamos el determinante de $A=\begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix}$ expandiendo por la primera fila.
$$\left|\begin{pmatrix} \boxed{a \quad b \quad c} \\ d \quad e \quad f \\ g \quad h \quad i \end{pmatrix}\right|=a\left|\begin{pmatrix} e & f \\ h & i \end{pmatrix}\right|-b\left|\begin{pmatrix} d & f \\ g & i \end{pmatrix}\right|+c\left|\begin{pmatrix} d & e \\ g & h \end{pmatrix}\right|.$$

Estas *submatrices* llevan el siguiente nombre:

Definición. El menor (i,j) de una matriz A se obtiene al eliminar de A la fila i y la columna j.

El proceso en concreto es:

I) Tomamos una entrada de la fila escogida.

II) Eliminamos el resto de la fila y columna que la contienen para obtener un menor.

III) Tomamos el determinante de ese menor.

IV) Lo multiplicamos por la entrada en cuestión.

$$\approx\begin{pmatrix} \boxed{a} & \times & \times \\ \times & e & f \\ \times & h & i \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} \times & \boxed{b} & \times \\ d & \times & f \\ g & \times & i \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} \times & \times & \boxed{a} \\ d & e & \times \\ g & h & \times \end{pmatrix}$$

Para los signos, seguimos la *convención* de que la entrada (1,1) es $+$, y los vecinos de $+$ son $-$ y vice-versa. Obtenemos una matriz de signos:
$$\begin{pmatrix} + & - & + \\ - & + & - \\ + & - & + \end{pmatrix}$$
Aquí $+$ es **no** cambiar de signo, pero $-$ **sí** es cambiarlo.

Práctica

Calcule con alguien $\det(A)$ si
$$A=\begin{pmatrix} -10 & 7 & 3 \\ 0 & 8 & 0 \\ 6 & -4 & 0 \end{pmatrix}.$$
Sugerencia: Puede expandir por cualquier fila o columna.

Reducción y Determinantes

Primero veamos lo siguiente:

Teorema 4. *Si A es triangular o diagonal, su determinante es el producto de su diagonal.*

Ejemplo 5. Consideremos las matrices

$$A=\begin{pmatrix}2&3&5\\0&7&11\\0&0&13\end{pmatrix}, B=\begin{pmatrix}k&0&0\\-k&3&0\\2k&0&1\end{pmatrix}, D=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&-6&0\\0&0&9\end{pmatrix}.$$

Si calculamos sus determinantes expandiendo vemos que

$$\det(A)=2\left|\begin{pmatrix}7&11\\0&13\end{pmatrix}\right|+0=2\cdot 7\cdot 13.$$

Análogamente

$$\det(B)=k\left|\begin{pmatrix}3&0\\0&1\end{pmatrix}\right|+0=3k.$$

Lo mismo ocurre con D ya sea expandiendo por cualquier fila o columna.

- Ya sabemos reducir matrices.
- Basta con reducir a forma triangular.
- Pero, ¿cambiará el determinante cuando se hacen operaciones de fila? **¡Sí!**

Ocurre lo siguiente:

Ejemplo 6. Si $A=\begin{pmatrix}1&2\\3&5\end{pmatrix}$ y aplicamos $F_1\leftrightarrow F_2$ para obtener $B=\begin{pmatrix}3&5\\1&2\end{pmatrix}$, entonces $\det(B)=-\det(A)$.

Intercambiar filas **cambia el signo** del determinante.

Ejemplo 7. Si $A=\begin{pmatrix}1&2\\3&5\end{pmatrix}$ y aplicamos $6F_1$ para obtener $B=\begin{pmatrix}6&12\\3&5\end{pmatrix}$, entonces $\det(B)=6\cdot\det(A)$.

Reescalar filas **multiplica** el determinante **por el mismo escalar**.

Finalmente, a la hora de **combinar** filas, no le hacemos ningún cambio al determinante.

Ejercicio 8. Supongamos que $A\in\mathcal{M}_4$ tiene determinante 12. Aplicamos las siguientes operaciones:

1. $A\mapsto A^{\mathsf{T}}$.
2. $6F_2$, $\frac{1}{2}F_3$.
3. F_3-F_2, F_1+F_2.
4. $B\mapsto B^{\mathsf{T}}$, $F_1\leftrightarrow F_4$.

¿Cuál es el determinante de la matriz resultante?

La Regla de Cramer

Este es otro método para resolver sistemas lineales.

- En el caso $[2\times 2]$ los sistemas son de la forma
$$A\vec{x}=\vec{b}:\quad \begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}e\\f\end{pmatrix}.$$
La solución del sistema será:
$$x=\frac{\left|\begin{pmatrix}e&b\\f&d\end{pmatrix}\right|}{\left|\begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix}\right|},\ y=\frac{\left|\begin{pmatrix}a&e\\c&f\end{pmatrix}\right|}{\left|\begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix}\right|}$$

- En el caso $[3\times 3]$ ocurre que:
$$A\vec{x}=\vec{b}:\quad \begin{pmatrix}a&b&c\\d&e&f\\g&h&i\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}j\\k\\l\end{pmatrix}.$$
Aquí la solución será:
$$x=\frac{\left|\begin{pmatrix}j&b&c\\k&e&f\\l&h&i\end{pmatrix}\right|}{\left|\begin{pmatrix}a&b&c\\d&e&f\\g&h&i\end{pmatrix}\right|},\ y=\frac{\left|\begin{pmatrix}a&j&c\\d&k&f\\g&l&i\end{pmatrix}\right|}{\left|\begin{pmatrix}a&b&c\\d&e&f\\g&h&i\end{pmatrix}\right|},\ z=\frac{\left|\begin{pmatrix}a&b&j\\d&e&k\\g&h&l\end{pmatrix}\right|}{\left|\begin{pmatrix}a&b&c\\d&e&f\\g&h&i\end{pmatrix}\right|}$$

El proceso es

I) Tomamos una variable.

II) Eliminamos de A la columna que le corresponde.

III) En tal columna incluimos el vector de constantes $\vec{b}$.

IV) Calculamos el determinante de la nueva matriz y lo dividimos por $\det(A)$.

Práctica

Suponga que en un sistema conocemos la siguiente información:

$$A\vec{x}=\vec{b}:\quad \begin{pmatrix}3&0&\times\\0&-2&\times\\-15&0&\times\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix}.$$

Si $\vec{x}$ es solución del sistema y $\det(A)=12$, ¿cuánto vale z?