Transformaciones Lineales

Acción sobre la Base

Primero consideremos una transformación lineal T sobre $\mathbb{R}^3$.

- T actúa sobre vectores $\vec{v}\in\mathbb{R}^3$.
- Cualquier $\vec{v}=(a,b,c)$ se puede puede expresar como c.l. de la base canónica. Es decir:
$$\vec{v}=a\hat{\imath}+b\hat{\jmath}+c\hat{k}.$$
- Como T es lineal, entonces
$$T(\vec{v})=T(a\hat{\imath}+b\hat{\jmath}+c\hat{k})=aT(\hat{\imath})+bT(\hat{\jmath})+cT(\hat{k}).$$

Esto quiere decir que $T(\vec{v})$ es c.l. de $\{T(\hat{\imath}),T(\hat{\jmath}),T(\hat{k})\}$. Es decir, c.l. de las *imágenes* de la base canónica.

Ejemplo 1. Consideremos la función $T(x,y)=(2x-y,x+2y)$. Esta T.L. va de $\mathbb{R}^2$ en $\mathbb{R}^2$. Es un *ejercicio* verificar que T es lineal (**). Calculemos la imagen del vector (4,5) de dos formas:

- $T(4,5)=(2(4)-(5),(4)+2(5))=(3,14)$.
- $T(\hat{\imath})=T(1,0)=(2(1)-(0),(1)+2(0))=(2,1)$ y análogamente $T(\hat{\jmath})=(-1,2)$. Entonces
$$\begin{aligned}T(4,5)&=4T(\hat{\imath})+5T(\hat{\jmath})\\&=4(2,1)+5(-1,2)\\&=(8,4)+(-5,10)=(3,14).\end{aligned}$$

Observación. ¡Lo importante de la T.L. es que está totalmente determinada por su acción sobre la base! Es decir, con sólo saber qué hace T con la *base canónica* sabemos qué hace con *cualquier* vector.

Observación. También notemos que la operación $4(2,1)+5(-1,2)$ es lo mismo que
$$(4,5)\begin{pmatrix}(2,1)\\(-1,2)\end{pmatrix}=(4,5)\begin{pmatrix}2&1\\-1&2\end{pmatrix}=\left(\begin{pmatrix}2&-1\\1&2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}4\\5\end{pmatrix}\right)^{\mathsf{T}}.$$
Es decir, podemos determinar T como la multiplicación de la matriz $A=\begin{pmatrix}2&-1\\1&2\end{pmatrix}$. Por lo tanto
$$T(4,5)=\begin{pmatrix}2&-1\\1&2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}4\\5\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3\\14\end{pmatrix}.$$

En general esto vale para cualquier transformación lineal y en cualquier dimensión. Tenemos el siguiente resultado:

Teorema 2. *Si T es una T.L. entonces existe una matriz A de forma que $T(\vec{x})=A\vec{x}$.*

Surge naturalmente la pregunta, ¿cómo representamos T con una matriz? *¡Usamos la base canónica!*

Ejemplo 3. Consideremos la T.L. $T(x,y,z)=(x-2y+z,2x-y-4z)$, T va de $\mathbb{R}^3$ en $\mathbb{R}^2$. Para encontrar la matriz de T primero buscamos la imagen de la base canónica:
$$\begin{cases}T(\hat{\imath})=T(1,0,0)=(1-0+0,2-0-0)=(1,2),\\T(\hat{\jmath})=(0-2+0,0-1-0)=(-2,-1),\\T(\hat{k})=(1,-4).\end{cases}$$
Así
$$T(x,y,z)=x(1,2)+y(-2,-1)+z(1,-4)$$
y si suponemos que la imagen de (x,y,z) es algún vector (a,b) entonces traducimos esto en un sistema lineal:
$$\begin{aligned}(a,b)&=x(1,2)+y(-2,-1)+z(1,-4)\\&=(x-2y+z,2x-y-4z)\\&\Rightarrow\begin{cases}a=x-2y+z\\b=2x-y-4z\end{cases}\end{aligned}$$
Convirtiendo a forma matricial, lo podemos ver como
$$\begin{pmatrix}a\\b\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&-2&1\\2&-1&-4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}.$$
Por lo tanto $T(x,y,z)=\begin{pmatrix}1&-2&1\\2&-1&-4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}$, y entonces concluimos que esa es la matriz de T.

Observación. La matriz de T está compuesta por las imágenes de la base canónica tomadas como columnas. Por ejemplo en el caso anterior $T(\hat{\imath})$ era $(1,2)$, entonces ese vector es la primera columna de A.

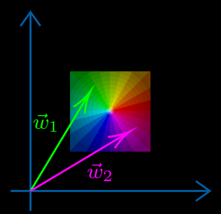
Denotaremos a la matriz de una transformación lineal A, A_T ó sólo T. Otra notación más *sugestiva* de lo que haremos más adelante es $[T]_{\mathcal{C}}$.

Ejemplo 4. Supongamos que $T:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^3$ es una T.L. que cumple
$$\begin{cases}T(\hat{\imath})=(-1,3,8),\\T(\hat{\jmath})=(0,-2,7).\end{cases}$$
Si queremos encontrar la imagen de $(6,-2)$ entonces formamos la matriz y multiplicamos. En este caso:
$$[T]_{\mathcal{C}}=\begin{pmatrix}-1&0\\3&-2\\8&7\end{pmatrix}$$
$$\Rightarrow T(6,-2)=\begin{pmatrix}-1&0\\3&-2\\8&7\end{pmatrix}\begin{pmatrix}6\\-2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-6\\22\\34\end{pmatrix}.$$
Por lo tanto $T(6,-2)=(-6,22,34)$.

Como las T.L.'s están determinadas por su acción sobre la base, entonces podemos ver cómo actúa T sobre los vectores por medio de su acción sobre $\hat{\imath},\hat{\jmath}$.

T.L.'s en el plano (en $\mathbb{R}^2$)

Para guiarnos, tomaremos vectores cuyas puntas estén en la imagen a continuación:

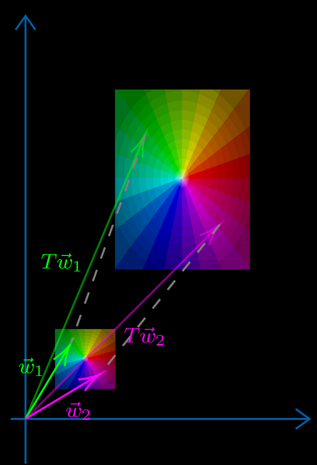


Los vectores *del cuadro* son aquellos cuyas puntas caen en el cuadro y salen desde el origen.

Reescalamiento (Elongar ó acortar)

El reescalamiento alonga o acorta. ¿Cómo se ve una matriz de un reescalamiento? ¿Adónde van $\hat{\imath}$ y $\hat{\jmath}$?

Ejemplo 5. Llamemos $\vec{u}=T\hat{\imath}$, $\vec{v}=T\hat{\jmath}$, entonces en este caso $\vec{u}=(2,0)$, $\vec{v}=(0,3)$.



Armando la matriz de T obtenemos

$$[T]_{\mathcal{C}}=\begin{pmatrix}2&0\\0&3\end{pmatrix}.$$

Y encontramos el *criterio* de T por medio de

$$T(x,y)=\begin{pmatrix}2&0\\0&3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=(2x,3y).$$

> **Práctica**
>
> Si las medidas iniciales del cuadro son 1×1:
> 1. ¿Cuales son las medidas de la figura nueva?
> 2. ¿Cuál es el área la figura nueva?
> 3. ¿Cuánto vale $\det([T]_{\mathcal{C}})$?

En general un reescalamiento se representa con una matriz diagonal $\begin{pmatrix}m&0\\0&n\end{pmatrix}$. Su acción sobre $\hat{\imath}$ y $\hat{\jmath}$ es mandarlos a múltiplos de ellos respectivamente.

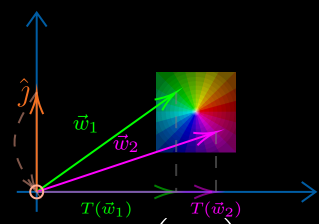
Observación. El vector (x,y) es enviado a (mx,ny). Si un vector es de la forma $(x,0)$ entonces su imagen es $(mx,0)=m(x,0)$. Esto quiere decir que son *paralelos*.

Definición. Un vector $\vec{v}$ es <u>invariante</u> bajo una T.L. T si $T(\vec{v})\in\operatorname{gen}(\vec{v})$.

Por lo anterior los vectores del eje x y los del eje y son invariantes bajo reescalamientos.

Proyecciones (Justo como antes)

Ejemplo 6. Proyectamos sobre el eje x con la transformación $T(\vec{x})=\operatorname{Proy}_{\hat{\imath}}(\vec{x})$. ¿Cuál es la matriz de esta T.L.?



$$\begin{cases}\vec{u}=\operatorname{Proy}_{\hat{\imath}}(\hat{\imath})=\langle\hat{\imath}|\hat{\imath}\rangle\hat{\imath}=\hat{\imath},\\ \vec{v}=\operatorname{Proy}_{\hat{\imath}}(\hat{\jmath})=\langle\hat{\imath}|\hat{\jmath}\rangle\hat{\imath}=0.\end{cases}$$

Así $[T]_{\mathcal{C}}=\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix}\Rightarrow T(x,y)=(x,0)$.

> **Práctica**
>
> ¿Qué pasó con el cuadro? ¿Cuál es su área bajo la proyección? ¿Cuánto vale el determinante de T aquí?

Observación. Si $b\neq 0$, $(0,b)$ va para cero bajo $\operatorname{Proy}_{\hat{\imath}}$. También colapsa la cuadrícula en un solo eje. Esta es la idea de una T.L. <u>singular</u>.

Definición. Si T es una *T.L.*, su núcleo es el conjunto $\ker T=\{\vec{x}\colon\ T(\vec{x})=0\}$.

Teorema 7. *Si $A=[T]_{\mathcal{C}}$ es la representación matricial de T, entonces* $\ker T=\ker A$.

Ejemplo 8. En este caso $\ker(\operatorname{Proy}_{\hat{\imath}})=\ker\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix}$. El espacio de soluciones está definido por la ecuación $x=0$ de forma que las soluciones son de la forma $(0,y)$. Entonces $\ker(\operatorname{Proy}_{\hat{\imath}})=\operatorname{gen}(\hat{\jmath})$.

Definición. Una T.L. se llama <u>singular</u> si existe algún vector $\vec{v}$ no nulo que es enviado a cero bajo la T.L.

Observación. En el caso de la proyección, como los $(0,y)$ van para cero, entonces es una T.L. singular.

Definición. Una T.L. se dice <u>no-singular</u> si el único vector que manda a cero es el cero. Es decir, si $\ker T=\{0\}$.

Vale que

$$\begin{aligned}&T \text{ es no-singular} \iff \ker[T]_{\mathcal{C}}=\{0\}\\ \iff &\operatorname{Nul}([T]_{\mathcal{C}})=0 \iff \operatorname{Rng}[T]_{\mathcal{C}} \text{ es completo}\\ \iff &\det[T]_{\mathcal{C}}\neq 0 \iff [T]_{\mathcal{C}} \text{ es invertible.}\end{aligned}$$

Definición. Una T.L. es <u>invertible</u> si su matriz es invertible. En este caso si $T\vec{x}=A\vec{x}$ entonces $T^{-1}\vec{x}=A^{-1}\vec{x}$.

Ejemplo 9. Si $T(x,y)=(2x,3y)$, entonces $\begin{pmatrix}2&0\\0&3\end{pmatrix}^{-1}=\begin{pmatrix}\frac{1}{2}&0\\0&\frac{1}{3}\end{pmatrix}$ y entonces $T^{-1}(x,y)=(x/2,y/3)$.