Respuesta Breve

Primera idea: Tomar una matriz con autovalores enteros, reemplazar una entrada de la matriz con un parámetro y preguntar por el valor del parámetro para el cual la matriz tiene tales autovalores.

Ejercicio 1. Considere la matriz $A=\begin{pmatrix}0 & 3\\ r & -4\end{pmatrix}$. ¿Para cuál valor de r se cumple que los autovalores de A son 2 y -6?

Podemos responder de varias formas:

1. Usando la fórmula de autovalores $[2\times 2]$ tenemos que
$$\lambda=m\pm\sqrt{m^2-p},\ m=1/2(a+d),\ p=\det(A).$$
En este caso $m=-2$ y $p=-3r$. Despejando la fórmula obtenemos
$$(\lambda+2)^2=4+3r\Rightarrow\lambda^2+4\lambda=3r.$$
Tomando $\lambda=-2$ la ecuación es $4+8=3r$ y así $\underline{r=4}$, ó bien si $\lambda=-6$ obtenemos $36-24=3r$ y de la misma forma $\underline{r=4}$.

2. Encontrando el polinomio característico llegamos a que
$$f_A(\lambda)=\lambda^2+4\lambda-3r.$$
Como los autovalores anulan a f_A, al sustituir cualquiera de los dos autovalores en la ecuación igualada a cero llegamos a que $\underline{r=4}$.

3. O bien, al desarrollar el polinomio característico que sabemos que es $(\lambda-2)(\lambda+6)$ y comparar coeficientes para obtener
$$\lambda^2+4\lambda-12\Rightarrow-3r=-12\Rightarrow\underline{r=4}.$$

Ejercicio 2. Considere la matriz $A=\begin{pmatrix}-4 & -4 & 4\\ 2 & -4 & s\\ 4 & 4 & -4\end{pmatrix}$. ¿Para cuál valor de s se cumple que los autovalores de A son 0, -6 y -6?

En el caso $[3\times 3]$ no tenemos una fórmula para encontrar autovalores rápidamente, entonces no podemos usar el primer método.

1. El polinomio característico de A se puede encontrar con la regla de Sarrus de forma que obtenemos
$$f_A(\lambda)=-\lambda^3-12\lambda^2-40\lambda+4s\lambda.$$
Como los autovalores anulan f_A, sustituimos $\lambda=-6$ (sustituir $\lambda=0$ no da información) y obtenemos
$$24-24s=0\Rightarrow\underline{s=1}.$$

2. Comparando coeficientes tenemos que
$$f_A(\lambda)=-\lambda^3-12\lambda^2-40\lambda+4s\lambda=\lambda(\lambda+6)^2=\lambda^3+12\lambda^2+36\lambda.$$
(Aquí cambiamos el signo porque lo calculé con $A-\lambda I$ y no $\lambda I-A$). Comparando el coeficiente lineal vemos que
$$40-4s=36\Rightarrow s=1.$$

Otra forma de preguntarlo sería:

Ejercicio 3. Los autovalores de la matriz $A=\begin{pmatrix}1 & -4\\ r & -3\end{pmatrix}$ son $r-2$ y -3. Encuentre r.

La solución es análoga. pendiente escribir

Segunda idea: Preguntar por cuál es el autovalor asociado a un autovector de manera creativa. Recordar que si $\vec{v}$ es autovector de T entonces $T\vec{v}=\lambda\vec{v}$. Es decir T reescala $\vec{v}$ por un factor de λ.

Ejercicio 4. Considere la T.L. $T(x,y)=(3x+2y,-2x-2y)$. Si $\vec{v}=(-2,1)$ es un autovector de T, ¿bajo cuál factor reescala T a $\vec{v}$?

La dificultad de esta pregunta está en entender qué significa reescalamiento. Incluso sin decir que $(-2,1)$ es un autovector, basta con evaluar

$$T(-2,1)=(3\cdot-2+2\cdot1,-2\cdot-2-2\cdot1)=(-4,2)=\underline{2}(-2,1).$$

El factor de reescalamiento es 2 y por tanto ese valor es el autovalor asociado a $(-2,1)$.

Otra forma de resolver sería diagonalizando T y comparando posiciones de los autovectores en la matriz de cambio de base con la forma diagonal de T pero eso podría ser excesivo.

Observación. Otra forma de preguntar sería: Si $\vec{v}=(-2,1)$ es un autovector de T, ¿a cuál autovalor de T está asociado?

Ejercicio 5. Considere la T.L. $T(x,y,z)=(x-y+z,-x+y+z,x)$. Si $\vec{v}=(2,-1,1)$ es un autovector de T, ¿bajo cuál factor reescala T a $\vec{v}$?

Evaluando T en tal vector vemos que vale la ecuación $T\vec{v}=2\vec{v}$.

Tercera idea: Usar propiedades de linealidad para averiguar imágenes de una T.L.

Ejercicio 6. Considere una T.L. que cumple $T(2,1)=(6,3)$. ¿Cuál es el valor de $T(4044,2022)$?

Como $(2,1)$ es un autovector de T asociado al autovalor $\lambda=3$. En consecuencia

$$T(4044,2022)=2022\cdot T(2,1)=2022\cdot3(2,1)=(12132,6066).$$

Observación. Ni siquiera es necesario saber que $(2,1)$ es autovector para resolver esta pregunta. Basta con recordar que si T es lineal entonces $T(c\vec{v})=cT\vec{v}$.

Cuarta idea: Usar propiedades de autovalores para encontrar imágenes de una T.L. Por ejemplo si $A\vec{v}=\lambda\vec{v}$ entonces $A^{-1}\vec{v}=\frac{1}{\lambda}\vec{v}$.

Ejercicio 7. Considere una T.L. T que cumple que $T(\vec{v})=3\vec{v}$. Si T es invertible, para cuál valor de k vale que $T^{-1}(\vec{v})=k\vec{v}$? (*Sugerencia: k no necesariamente es un valor entero.*)

Alternativamente el enunciado podría ser $T(\vec{v})=\frac{1}{3}\vec{v}$ para que así el valor de k sí sea entero.

Ejercicio 8. Considere una T.L. T que cumple que $T(\vec{v})=4\vec{v}$. Entonces, ¿para cuál valor de k se cumple que $T^2(\vec{v})=k\vec{v}$?

Aquí como T tiene autovalor $\lambda=4$ entonces T^2 tiene como autovalor a $4^2=16$. Entonces $k=16$ satisface lo pedido.

Desarrollo

Ejercicio 9. Considere la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 6 & 8 \\ 1 & 3 & 0 & 5 \\ 1 & 1 & 6 & 3 \end{pmatrix}.$$

1. Encuentre una base para $\ker(A)$.
2. Encuentre una base para el espacio de filas de A.
3. Encuentre una base para $\mathrm{Im}(A)$ que sólo contenga columnas de A.
4. Para cada vector columna que no pertenece a la base de la imagen, expréselo como combinación lineal de la base.

1. Reducimos A a $R = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 9 & 2 \\ 0 & 1 & -3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. Las ecuaciones homogéneas asociadas a esta matriz son
$$\begin{cases} x_1 + 9x_3 + 2x_4 = 0 \Rightarrow x_1 = -9x_3 - 2x_4 \\ x_2 - 3x_3 + x_4 = 0 \Rightarrow x_2 = 3x_3 - x_4 \end{cases}$$
por lo que la solución es
$$(x_1, x_2, x_3, x_4) = (-9x_3 - 2x_4, 3x_3 - x_4, x_3, x_4) = (-9,3,1,0)x_3 + (-2,-1,0,1)x_4.$$
Los vectores $\vec{v}_1 = (-9,3,1,0)$ y $\vec{v}_2 = (-2,-1,0,1)$ forman una base de $\ker(A)$.

2. El espacio de filas de A tiene como base a las filas de R. Tales vectores son $\vec{u}_1 = (1,0,9,2)$ y $\vec{u}_2 = (0,1,-3,1)$.

3. Primero recordemos que $\underline{\mathrm{Rng}(A) = \dim(\mathrm{Im}(A)) = \dim(\text{esp.cols.}(A))}$. Por el trabajo anterior $\mathrm{Rng}(A)$ es 2 y así sólo dos vectores l.i. generan el espacio de columnas.

   Sin perdida de generalidad tomamos $\vec{u} = (2,1,1)$ y $\vec{v} = (4,3,1)$, que son l.i. pues no son múltiplos uno del otro, como base del espacio de columnas.

4. Las columnas que sobran las escribimos como combinación lineal de $\vec{u}$ y $\vec{v}$ de forma que debemos encontrar constantes a_1, b_1, a_2, b_2 tales que
$$(6,0,6) = a_1\vec{u} + b_1\vec{v}, \; (8,5,3) = a_2\vec{u} + b_2\vec{v}.$$
Una forma rápida de resolver es ver que las <u>últimas dos columnas de R</u> contienen los coeficientes pedidos: $a_1 = 9$, $b_1 = -3$ y $a_2 = 2$, $b_2 = 1$. Alternativamente se pueden resolver los sistemas a mano.

Observación. Los items 3 y 4 no tienen solución única.

Observación. Este tipo de ejercicio se puede crear elaborando una matriz reducida de rango incompleto en $\mathbb{Z}$ y luego aplicarle distintas operaciones de fila con enteros para así garantizar que su forma reducida tenga enteros.