Repaso Formas Cuadráticas

Recordemos que toda matriz simétrica está asociada a una forma cuadrática y vice-versa por medio de la relación
$$\vec{x}^\mathsf{T} A\vec{x} = \langle A\vec{x}|\vec{x}\rangle.$$
En una forma cuadrática, el término mixto ó cruzado es el término xy.

Práctica
Consideremos la siguientes formas cuadráticas junto con las matrices a su lado. Asocie las formas cuadráticas con su matriz correspondiente.

- $x^2+2xy-3y^2$.
- $4y^2+6xy$.
- $9x^2+16y^2$.
- $7xy$.

- $\begin{pmatrix} 9 & 0 \\ 0 & 16 \end{pmatrix}$.
- $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -3 \end{pmatrix}$.
- $\begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$.
- $\begin{pmatrix} 0 & 7/2 \\ 7/2 & 0 \end{pmatrix}$.

Eliminación del Término Mixto

Observación. De las formas cuadráticas anteriores sólo una no tenía término mixto. ¿Qué caracteriza a la matriz asociada a esa forma?

Eliminemos el término mixto con un ejemplo.

Ejemplo 1. Si $Q(x,y) = x^2 + 6xy + y^2$, entonces $Q = \vec{x}^\mathsf{T} A\vec{x}$ con $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$. Vamos a diagonalizar A:

1. Los autovalores de A se obtienen con
$$\lambda = m \pm \sqrt{m^2-p},\ m = (a+d)/2,\ p = \det A.$$
En este caso $\lambda = 1 \pm \sqrt{1^2-(-8)}$. Obtenemos $\lambda_1 = 4$ y $\lambda_2 = -2$.
2. El espacio invariante asociado a λ_1 es
$$E_{\lambda_1} = \ker(A-4I) = \ker\begin{pmatrix} -3 & 3 \\ 3 & -3 \end{pmatrix} = \ker\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$
La ecuación asociada es $x-y=0$ por lo que el autovector $\vec{v}_1 = (1{,}1)$ está asociado a $\lambda_1 = 4$.
3. El espacio invariante asociado a λ_2 es
$$E_{\lambda_2} = \ker(A-(-2)I) = \ker\begin{pmatrix} 3 & 3 \\ 3 & 3 \end{pmatrix} = \ker\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$
La ecuación asociada es $x+y=0$ por lo que el autovector $\vec{v}_2 = (1{,}-1)$ está asociado a $\lambda_2 = -2$.
4. Así $P = [\mathrm{id}]_{\mathcal{C}}^{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$ y $D = \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$. De forma que $A = PDP^{-1}$.

Sin embargo, buscamos una característica que es que P *respete orientación y medidas*. Esto significa dos cosas:

- Respeta orientación cuando $\det P > 0$.
- Respeta medida cuando $\det P = 1$.

En este caso $\det(P) = -2$. Para obtener lo pedido hacemos lo siguiente:

- Intercambiamos las columnas de P para cambiar el signo.
- Normalizamos las columnas de P.

Obtenemos así $P = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \\ -1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \end{pmatrix}$. Lo que hemos hecho fue intercambiar los autovectores de orden y los re-escalamos para que tuvieran norma 1. De la misma forma que antes $A = PDP^{-1}$ sólo que ahora $D = \mathrm{diag}(-2{,}4)$.

Con esto, ¿podemos decir que la forma sin término mixto es $-2x^2+4y^2$? Sí y no, ¡debemos cambiar variables! El cambio de variables es según la MCB
$$\vec{x} = [\mathrm{id}]_{\mathcal{C}}^{\mathcal{B}}\vec{u} \Rightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \\ -1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}.$$
De esta forma obtenemos
$$\left(\frac{u+v}{\sqrt{2}}\right)^2 + 6\left(\frac{u+v}{\sqrt{2}}\right)\left(\frac{v-u}{\sqrt{2}}\right) + \left(\frac{v-u}{\sqrt{2}}\right)^2$$
y simplificando obtenemos $-2u^2+4v^2$.

En resumen para eliminar el término mixto se debe diagonalizar y cerciorarse que la MCB respete medidas. Esto pues cuando $\det = 1$ se respeta la orientación.

Curvas Cuadráticas

Definición. Una curva cuadrática es una ecuación de la forma
$$ax^2+bxy+cy^2+dx+ey+f=0$$
que se puede representar de la forma
$$\vec{x}^\mathsf{T} A\vec{x} + \langle\vec{b}\,|\,\vec{x}\rangle + f = 0.$$
La forma normal de una curva cuadrática se obtiene cambiando variables con $\vec{x} = P\vec{u}$ donde $P = [\mathrm{id}]_{\mathcal{C}}^{\mathcal{B}}$ y $\mathcal{B}$ es la base de autovectores de A.

Ejemplo 2. Consideremos la curva dada por la ecuación
$$Q(x{,}y) = 3x^2+y^2-2\sqrt{3}-12x-12\sqrt{3}y = 0$$
y encontremos su forma normal. Extraemos su forma vectorial con
$$A = \begin{pmatrix} 3 & -\sqrt{3} \\ -\sqrt{3} & 1 \end{pmatrix},\ \vec{b} = \begin{pmatrix} -12 \\ -12\sqrt{3} \end{pmatrix},$$
y así $Q(\vec{x}) = \vec{x}^\mathsf{T} A\vec{x} + \langle\vec{b}\,|\,\vec{x}\rangle$. Para encontrar su forma normal diagonalizamos A:

1. Los autovalores de A se obtienen con
$$\lambda = m \pm \sqrt{m^2-p},\ m = (a+d)/2,\ p = \det A.$$
En este caso $\lambda = 2 \pm \sqrt{2^2-(0)}$. Obtenemos $\lambda_1 = 0$ y $\lambda_2 = 4$.

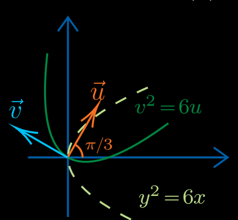
2. El espacio invariante asociado a λ_1 es E_{λ_1}
$$\ker(A)=\ker\begin{pmatrix} 3 & -\sqrt{3} \\ -\sqrt{3} & 1 \end{pmatrix}=\ker\begin{pmatrix} -\sqrt{3} & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$
La ecuación asociada es $-\sqrt{3}x+y=0$ por lo que el autovector $\vec{v}_1=(1,\sqrt{3})$ está asociado a $\lambda_1=0$.
3. El espacio invariante asociado a λ_2 es E_{λ_2}
$$\ker(A-4I)=\ker\begin{pmatrix} -1 & -\sqrt{3} \\ -\sqrt{3} & -3 \end{pmatrix}=\ker\begin{pmatrix} 1 & \sqrt{3} \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$
La ecuación asociada es $x+\sqrt{3}y=0$ por lo que el autovector $\vec{v}_2=(-\sqrt{3},1)$ está asociado a $\lambda_2=4$.
4. La matriz P con columnas $\vec{v}_1$, $\vec{v}_2$ es
$$P=\begin{pmatrix} 1 & -\sqrt{3} \\ \sqrt{3} & 1 \end{pmatrix}\Rightarrow \det P=4.$$
Como es positivo, nada más normalizamos las columnas de P para obtener
$$P=\begin{pmatrix} 1/2 & -\sqrt{3}/2 \\ \sqrt{3}/2 & 1/2 \end{pmatrix}\Rightarrow \det P=1.$$
5. El cambio de variables entonces es $\vec{x}=P\vec{u}$
$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1/2 & -\sqrt{3}/2 \\ \sqrt{3}/2 & 1/2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} (u-\sqrt{3}v)/2 \\ (\sqrt{3}u+v)/2 \end{pmatrix}.$$
Sustituyendo en la ecuación obtenemos
$$\vec{u}^{\mathsf{T}}P^{\mathsf{T}}AP\vec{u}+\langle\vec{b}\,|\,P\vec{u}\rangle=0\Rightarrow\vec{u}^{\mathsf{T}}D\vec{u}+\langle P^{\mathsf{T}}\vec{b}\,|\,\vec{u}\rangle=0$$
donde $P^{\mathsf{T}}\vec{b}=(-24,0)$. Por lo tanto la forma normal de Q es
$$Q(u,v)=4v^2+24u=0\Rightarrow v^2=6u.$$

Observación. Aquí hemos utilizado una propiedad del producto punto que no conocíamos:
$$\langle A\vec{x}\,|\,\vec{y}\rangle=\langle\vec{x}\,|\,A^{\mathsf{T}}\vec{y}\rangle$$

Geometricamente la ecuación que representa esta curva es una parábola horizontal centrada en el origen. Sin embargo eso es en base $\mathcal{B}$ de autovectores, es decir, en coordenadas (u,v). Vale que

- El eje u es $\mathrm{gen}(\vec{v}_1)$ y el v es $\mathrm{gen}(\vec{v}_2)$.
- El ángulo de rotación entre los ejes es el ángulo entre el eje x y el eje u ó el eje y y el v. Esto se obtiene midiendo el ángulo entre el vector $\hat{\imath}$ y $\vec{v}_1$ por ejemplo.

En este caso el ángulo es $\arccos(1/2)=\pi/3$.



Práctica

Encuentre la forma normal de la curva dada por
$$3\sqrt{2}x^2+3\sqrt{2}y^2+2\sqrt{2}xy-4x-12+2\sqrt{2}=0.$$
Seguidamente indique
1. Los ejes del nuevo sistema de coordenadas.
2. El ángulo de rotación entre los sistemas.

Formas Normales de Curvas Cuadráticas

Enumeramos los tipos de curvas cuadráticas en dos dimensiones:

1. $(y-s)^2=c(x-r)$ es una parábola horizontal centrada en (r,s). Su eje de simetría es el eje $y=s$.

   Si cambiamos el cuadrado obtenemos
   $$(x-r)^2=c(y-s)$$
   y esto es una parábola vertical centrada en (r,s) con eje de simetría $x=r$.
2. La elipse centrada en (r,s) se describe con
   $$\frac{(x-r)^2}{c^2}+\frac{(y-s)^2}{d^2}=1.$$
   Cuando $d=c$ se obtiene un círculo de radio c.
3. La ecuación
   $$\frac{(x-r)^2}{c^2}-\frac{(y-s)^2}{d^2}=1$$
   describe una hipérbola horizontal con vértices $(r\pm c,s)$ y ejes $x=r$, $y=s$. En cambio si cambiamos el signo obtenemos una hipérbola vertical dada por
   $$\frac{(y-s)^2}{d^2}-\frac{(x-r)^2}{c^2}=1.$$
   Los vértices aquí son $(r,s\pm d)$.

Práctica

Basado en lo anterior, clasifique la curva del ejercicio anterior.

A manera de práctica, para esta parte se recomiendan los ejercicios de C. Fonseca o los del último capítulo del libro de J. Sánchez.