El Producto Matricial

La condición que garantiza que dos matrices A,B se puedan multiplicar es:

$$\#\text{filas } A = \#\text{columnas } B.$$

Si A es $[m \times p]$ y B es $[p \times n]$, entonces las entradas del producto se definen con la fórmula:

$$(AB)_{ij} = \sum_{k=1}^{p} A_{ik} B_{kj}.$$

Más fácilmente:

$$(AB)_{ij} = \langle \text{fila } i \ A | \text{col. } j \ B \rangle.$$

La matriz AB será de tamaño $[m \times n]$.

Ejemplo 1. Consideremos las matrices

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 3 & 4 \\ -2 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}, \ B = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -2 & 8 & -5 \\ 1 & -2 & 3 & 9 & 6 \end{pmatrix}.$$

Notemos que:

- A es $[4 \times 2]$.
- B es $[2 \times 5]$.
  - Vale que $\#\text{filas } A = \#\text{cols. } B$.
  - ¡Podemos multiplicar A con B!
- La matriz AB será de tamaño $[4 \times 5]$.

Si queremos encontrar la entrada (2,4) de AB utilizamos la fila 2 de A y la columna 4 de B:

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 3 & 4 \\ -2 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad \begin{pmatrix} 2 & 0 & -2 & 8 & -5 \\ 1 & -2 & 3 & 9 & 6 \end{pmatrix}.$$

Tomamos el producto punto de estos vectores:

$$\langle (3,4) | (8,9) \rangle = 3 \cdot 8 + 4 \cdot 9 = 60$$

y por lo tanto $(AB)_{24} = 60$.

En general podemos acomodar las matrices de la siguiente forma:

		2	0	−2	8	−5
		1	−2	3	9	6
1	−1					
3	4				(∗)	
−2	0					
0	4					

> **Práctica**
>
> - Encuentre la entrada (1,3) de AB resaltando las filas y columnas correspondientes.
> - Realice el mismo procedimiento para encontrar la entrada (3,2) de AB.

Para encontrar cualquier entrada, ubicamos la fila y columna correspondiente de las matrices y calculamos su producto punto.

Ejercicio 2. Ya multiplicamos A a la izquierda de B. ¿Podemos multiplicar BA? Es decir, invirtiendo el orden de multiplicación.

Observación. En general si $A \in \mathcal{M}_{m \times n}$ y $B \in \mathcal{M}_{n \times m}$ entonces tanto AB como BA existen.

Ejemplo 3. Consideremos las matrices

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -2 & 7 \\ 4 & -3 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \ B = \begin{pmatrix} 0 & 8 \\ 2 & -1 \\ -2 & 2 \\ 7 & 0 \end{pmatrix}.$$

Si queremos encontrar AB entonces verificamos primero si podemos multiplicarlas. A es $[2 \times 4]$ y B es $[4 \times 2]$, en este caso

$$\#\text{filas } A = \#\text{cols. } B$$

entonces podemos calcular AB.

De la misma forma si buscamos BA, también podemos calcularla porque

$$\#\text{filas } B = \#\text{cols. } A.$$

> **Práctica**
>
> 1. ¿Qué tamaño tendrán las matrices AB y BA?
> 2. Trabaje en conjunto con alguien para encontrar las matrices que resultan al multiplicar.

Propiedades

Supongamos que A,B y C son matrices de tamaños adecuados y c un escalar. El producto matricial goza de las siguientes propiedades:

1. Asocia: $ABC = A(BC) = (AB)C$.
2. Identidad: Hay una matriz I tal que $AI = A = IA$.
3. Anulador: Hay una matriz 0 tal que $A0 = 0 = 0A$.
4. Distribución: $A(B+C) = AB + AC$.
5. Conmuta con prod. escalar: $cAB = (cA)B = A(cB)$.
6. Traspuesta de prod.: $(AB)^{\mathsf{T}} = B^{\mathsf{T}} A^{\mathsf{T}}$.
7. **NO necesariamente** conmuta.

Matrices Invertibles

Observación. Todo número real posee un inverso multiplicativo. Considere por ejemplo el número 20220421, existe el número $\frac{1}{20220421}$ que cumple que

$$20220421 \cdot \frac{1}{20220421} = 1.$$

En el caso de las matrices el 1 es la matriz identidad que mencionamos en las propiedades anteriores.

Definición. La matriz identidad es la matriz cuadrada cuya diagonal contiene sólo 1's.

Ejemplo 4. $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ es la matriz identidad de orden 2 mientras que $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ es la identidad de orden 3.

Definición. Diremos que una matriz A es <u>invertible</u> si existe una matriz B que cumple

$$AB = I = BA.$$

A esta matriz la denotamos como A^{-1}.

Propiedades

Si A,B son matrices de tamaño adecuado invertibles y c es un escalar no nulo entonces:

1. Escalares: $(cA)^{-1} = \frac{1}{c}A^{-1}$.
2. Producto: $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$.
3. Traspuestas: $(A^{\mathsf{T}})^{-1} = (A^{-1})^{\mathsf{T}}$.

Ejercicio 5. Si A y B son invertibles, ¿$A + B$ es invertible?

Teorema 6 (Adendo al Tma. Resumen)**.** *Una matriz A es invertible si y sólo si es equivalente por filas a la identidad.*

Ejemplo 7. Supongamos que $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ entonces la inversa de A es

$$A^{-1} = \frac{1}{ad - bc} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}.$$

Práctica

Verifiquemos en conjunto que en efecto esas matrices son inversas. Luego encuentre las inversas de

$$A = \begin{pmatrix} 1 & a \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}.$$

Encontrar Inversas: Reducción en Paralelo

Para el caso $[2 \times 2]$ es sencillo encontrar la inversa con la fórmula. Para matrices más grandes utilizamos el proceso de reducción por filas.

Ejemplo 8. Consideremos la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & -1 \\ 0 & 6 & 0 \\ 9 & 0 & -2 \end{pmatrix}.$$

Encontramos su inversa *reduciendo en paralelo.* Aumentamos la matriz, pero con una identidad a la izquierda y luego reducimos:

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 3 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 9 & 0 & -2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right).$$

Veremos que la matriz en cuestión es

$$A^{-1} = \frac{1}{6} \begin{pmatrix} -4 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 18 & 0 & 6 \end{pmatrix}.$$