

Respuesta Breve

Primera idea: Tomar una matriz con autovalores enteros, reemplazar una entrada de la matriz con un parámetro y preguntar por el valor del parámetro para el cual la matriz tiene tales autovalores.

Ejercicio 1. Considere la matriz $A = \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ r & -4 \end{pmatrix}$. ¿Para cuál valor de r se cumple que los autovalores de A son 2 y -6 ?

Podemos responder de varias formas:

1. Usando la fórmula de autovalores $[2 \times 2]$ tenemos que

$$\lambda = m \pm \sqrt{m^2 - p}, \quad m = 1/2(a+d), \quad p = \det(A).$$

En este caso $m = -2$ y $p = -3r$. Despejando la fórmula obtenemos

$$(\lambda + 2)^2 = 4 + 3r \Rightarrow \lambda^2 + 4\lambda = 3r.$$

Tomando $\lambda = -2$ la ecuación es $4 + 8 = 3r$ y así $\underline{r=4}$, ó bien si $\lambda = -6$ obtenemos $36 - 24 = 3r$ y de la misma forma $\underline{r=4}$.

2. Encontrando el polinomio característico llegamos a que

$$f_A(\lambda) = \lambda^2 + 4\lambda - 3r.$$

Como los autovalores anulan a f_A , al sustituir cualquiera de los dos autovalores en la ecuación igualada a cero llegamos a que $\underline{r=4}$.

3. O bien, al desarrollar el polinomio característico que sabemos que es $(\lambda - 2)(\lambda + 6)$ y comparar coeficientes para obtener

$$\lambda^2 + 4\lambda - 12 \Rightarrow -3r = -12 \Rightarrow \underline{r=4}.$$

Ejercicio 2. Considere la matriz $A = \begin{pmatrix} -4 & -4 & 4 \\ 2 & -4 & s \\ 4 & 4 & -4 \end{pmatrix}$. ¿Para cuál valor de s se cumple que los autovalores de A son 0, -6 y -6 ?

En el caso $[3 \times 3]$ no tenemos una fórmula para encontrar autovalores rápidamente, entonces no podemos usar el primer método.

1. El polinomio característico de A se puede encontrar con la regla de Sarrus de forma que obtenemos

$$f_A(\lambda) = -\lambda^3 - 12\lambda^2 - 40\lambda + 4s\lambda.$$

Como los autovalores anulan f_A , sustituimos $\lambda = -6$ (sustituir $\lambda = 0$ no da información) y obtenemos

$$24 - 24s = 0 \Rightarrow \underline{s=1}.$$

2. Comparando coeficientes tenemos que

$$f_A(\lambda) = -\lambda^3 - 12\lambda^2 - 40\lambda + 4s\lambda = \lambda(\lambda + 6)^2 = \lambda^3 + 12\lambda^2 + 36\lambda.$$

(Aquí cambiamos el signo porque lo calculé con $A - \lambda I$ y no $\lambda I - A$). Comparando el coeficiente lineal vemos que

$$40 - 4s = 36 \Rightarrow s = 1.$$

Segunda idea: Preguntar por cuál es el autovalor asociado a un autovector de manera creativa.

Recordar que si \vec{v} es autovector de T entonces $T\vec{v} = \lambda\vec{v}$. Es decir T reescala \vec{v} por un factor de λ .

Ejercicio 3. Considere la T.L. $T(x,y) = (3x+2y, -2x-2y)$. Si $\vec{v} = (-2,1)$ es un autovector de T , ¿bajo cuál factor reescala T a \vec{v} ?

La dificultad de esta pregunta está en entender qué significa reescalamiento. Incluso sin decir que $(-2,1)$ es un autovector, basta con evaluar

$$T(-2,1) = (3 \cdot -2 + 2 \cdot 1, -2 \cdot -2 - 2 \cdot 1) = (-4, 2) = 2(-2,1).$$

El factor de reescalamiento es 2 y por tanto ese valor es el autovalor asociado a $(-2,1)$.

Otra forma de resolver sería diagonalizando T y comparando posiciones de los autovectores en la matriz de cambio de base con la forma diagonal de T pero eso podría ser excesivo.

Observación. Otra forma de preguntar sería: Si $\vec{v} = (-2,1)$ es un autovector de T , ¿a cuál autovalor de T está asociado?

Ejercicio 4. Considere la T.L. $T(x,y,z) = (x-y+z, -x+y+z, x)$. Si $\vec{v} = (2,-1,1)$ es un autovector de T , ¿bajo cuál factor reescala T a \vec{v} ?

Evaluando T en tal vector vemos que vale la ecuación $T\vec{v} = 2\vec{v}$.

Tercera idea: Usar propiedades de linealidad para averiguar imágenes de una T.L.

Ejercicio 5. Considere una T.L. que cumple $T(2,1) = (6,3)$. ¿Cuál es el valor de $T(4044,2022)$?

Como $(2,1)$ es un autovector de T asociado al autovalor $\lambda = 3$. En consecuencia

$$T(4044,2022) = 2022 \cdot T(2,1) = 2022 \cdot 3(2,1) = (12132, 6066).$$

Observación. Ni siquiera es necesario saber que $(2,1)$ es autovector para resolver esta pregunta. Basta con recordar que si T es lineal entonces $T(c\vec{v}) = cT\vec{v}$.

Cuarta idea: Usar propiedades de autovalores para encontrar imágenes de una T.L.

Por ejemplo si $A\vec{v} = \lambda\vec{v}$ entonces $A^{-1}\vec{v} = \frac{1}{\lambda}\vec{v}$.

Ejercicio 6. Considere una T.L. T que cumple que $T(\vec{v}) = 3\vec{v}$. Si T es invertible, para cuál valor de k vale que $T^{-1}(\vec{v}) = k\vec{v}$? (*Sugerencia: k no necesariamente es un valor entero.*)

Alternativamente el enunciado podría ser $T(\vec{v}) = \frac{1}{3}\vec{v}$ para que así el valor de k sí sea entero.

Ejercicio 7. Considere una T.L. T que cumple que $T(\vec{v}) = 4\vec{v}$. Entonces, ¿para cuál valor de k se cumple que $T^2(\vec{v}) = k\vec{v}$?

Aquí como T tiene autovalor $\lambda = 4$ entonces T^2 tiene como autovalor a $4^2 = 16$. Entonces $k = 16$ satisface lo pedido.

Desarrollo

Ejercicio 8. Considere la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 6 & 8 \\ 1 & 3 & 0 & 5 \\ 1 & 1 & 6 & 3 \end{pmatrix}.$$

1. Encuentre una base para $\ker(A)$.
2. Encuentre una base para el espacio de filas de A .
3. Encuentre una base para $\text{Im}(A)$ que sólo contenga columnas de A .
4. Para cada vector columna que no pertenece a la base de la imagen, expréselo como combinación lineal de la base.

1. Reducimos A a $R = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 9 & 2 \\ 0 & 1 & -3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. Las ecuaciones homogéneas asociadas a esta matriz son

$$\begin{cases} x_1 + 9x_3 + 2x_4 = 0 \Rightarrow x_1 = -9x_3 - 2x_4 \\ x_2 - 3x_3 + x_4 = 0 \Rightarrow x_2 = 3x_3 - x_4 \end{cases}$$

por lo que la solución es

$$(x_1, x_2, x_3, x_4) = (-9x_3 - 2x_4, 3x_3 - x_4, x_3, x_4) = (-9, 3, 1, 0)x_3 + (-2, -1, 0, 1)x_4.$$

Los vectores $\vec{v}_1 = (-9, 3, 1, 0)$ y $\vec{v}_2 = (-2, -1, 0, 1)$ forman una base de $\ker(A)$.

2. El espacio de filas de A tiene como base a las filas de R . Tales vectores son $\vec{u}_1 = (1, 0, 9, 2)$ y $\vec{u}_2 = (0, 1, -3, 1)$.
3. Primero recordemos que $\text{Rng}(A) = \dim(\text{Im}(A)) = \dim(\text{esp.cols.}(A))$. Por el trabajo anterior $\text{Rng}(A)$ es 2 y así sólo dos vectores l.i. generan el espacio de columnas.

Sin pérdida de generalidad tomamos $\vec{u} = (2, 1, 1)$ y $\vec{v} = (4, 3, 1)$, que son l.i. pues no son múltiplos uno del otro, como base del espacio de columnas.

4. Las columnas que sobran las escribimos como combinación lineal de \vec{u} y \vec{v} de forma que debemos encontrar constantes a_1, b_1, a_2, b_2 tales que

$$(6, 0, 6) = a_1\vec{u} + b_1\vec{v}, \quad (8, 5, 3) = a_2\vec{u} + b_2\vec{v}.$$

Una forma rápida de resolver es ver que las últimas dos columnas de R contienen los coeficientes pedidos: $a_1 = 9$, $b_1 = -3$ y $a_2 = 2$, $b_2 = 1$. Alternativamente se pueden resolver los sistemas a mano.

Observación. Los items 3 y 4 no tienen solución única.

Observación. Este tipo de ejercicio se puede crear elaborando una matriz reducida de rango incompleto en \mathbb{Z} y luego aplicarle distintas operaciones de fila con enteros para así garantizar que su forma reducida tenga enteros.