**Espacios Vectoriales**

Recordemos las propiedades de la suma y producto escalar:

| **Props. Suma** | **Props. Mult.** |
|---|---|
| I) $\vec{x}+\vec{y}=\vec{y}+\vec{x}$. | I) $1\vec{x}=\vec{x}$. |
| II) $(\vec{x}+\vec{y})+\vec{z}=\vec{x}+(\vec{y}+\vec{z})$. | II) $(cd)\vec{x}=c(d\vec{x})$. |
| III) $\vec{x}+0=\vec{x}$. | III) $c(\vec{x}+\vec{y})=c\vec{x}+c\vec{y}$. |
| IV) $\vec{x}+(-\vec{x})=0$. | IV) $(c+d)\vec{x}=c\vec{x}+d\vec{x}$. |

Al considerar $\mathbb{R}^n$ con "+" y "$\cdot$", entonces valen estas propiedades para la suma y producto. Como $\mathbb{R}^n$ satisface estas propiedades entonces podemos decir que es un espacio vectorial.

**Definición.** Un espacio vectorial (**e.v.**) es un conjunto $V$ con 2 operaciones "+" y "$\cdot$" (**suma vectorial y producto escalar**) que obedecen las propiedades anteriores.

En ese caso un vector es un elemento de un espacio vectorial.

**Ejemplo 1.** $\mathbb{R}$ es un espacio vectorial.

- Suma vectorial: Suma usual de números reales.
- Producto escalar: Multiplicación usual.

Claramente estas operaciones satisfacen las propiedades.

**Ejemplo 2.** El conjunto $\{2n+1\colon\, n\in\mathbb{N}\}$ de los enteros impares **no forma un espacio vectorial** con la suma y producto usual. $3+5=8$ y 8 no es impar. Además 0 no es impar.

**Ejemplo 3.** $\mathcal{M}_{m\times n}$ es un espacio vectorial.

- Suma vectorial: Suma de matrices.
- Producto escalar: Multiplicación de una matriz por un escalar.

**Ejemplo 4.** Las funciones continuas sobre $\mathbb{R}$, $\mathcal{C}(\mathbb{R})$, forman un espacio vectorial.

- Suma vectorial: $(f+g)(x)=f(x)+g(x)$.
- Producto escalar: $(cf)(x)=c\cdot f(x)$.

*Observación.* Nuestros vectores originales eran *arreglos de datos*, como $(a,b,c)\in\mathbb{R}^3$. Veamos los arreglos en estos ejemplos.

- En $\mathbb{R}$ el tamaño del arreglo es **1**, cada número es un vector.
- En $\mathbb{R}^n$ los arreglos son $(x_1,x_2,\dots,x_n)$, es decir, tienen **tamaño n**.
- Las $m$ filas de longitud $n$ de una matriz $[m\times n]$ se pueden acomodar en un arreglo enorme de **tamaño mn**.
- En el caso de una función continua...
  ¿Cómo armamos un arreglo? ¿Cómo vemos $e^x$ o $x^3+2\sin(5x)$ como un arreglo?

A este *tamaño* le llamaremos dimensión. Precisaremos la definición más adelante. Denotamos $\dim(V)$.

*Observación.* Esto quiere decir que $\mathbb{R},\mathbb{R}^n$ y $\mathcal{M}_{m\times n}$ tienen dimensión finita. Respectivamente $1,n$ y $mn$. Nos preguntamos ¿cuál es la dimensión de $\mathcal{C}(\mathbb{R})$?

**Subespacios**

Denotamos $\mathbb{P}_n$ al conjunto de polinomios de grado $n$. Observemos lo siguiente:

- Todos lo polinomios son funciones continuas, entonces $\mathbb{P}_n\subseteq\mathcal{C}(\mathbb{R})$.
- Ocurre que $\dim(\mathbb{P}_n)\leqslant\dim(\mathcal{C}(\mathbb{R}))$.
- **Suave**, ¿acaso $\mathbb{P}_n$ es un espacio vectorial? No podemos hablar de dimensión sin que lo sea.

**Teorema 5** (**). *Supongamos que $W\subseteq V$ ya siendo $V$ un espacio vectorial. Entonces $W$ es espacio vectorial si valen las condiciones:*

I) *$x,y\in W\Rightarrow x+y\in W$. (**suma permanece**)*
II) *$x\in W\Rightarrow cx\in W$. (**múltiplos permanecen**)*

*En este caso diremos que $W$ es subespacio de $V$. Denotamos $W\leqslant V$.*

Verifiquemos que $\mathbb{P}_n\subseteq\mathcal{C}(\mathbb{R})$ es un espacio vectorial aplicando el teorema.

1. ¿Primero, $\mathcal{C}(\mathbb{R})$ es un espacio vectorial? Eso lo sabemos de supuesto.
2. Ahora, si $p,q\in\mathbb{P}_n$, entonces ¿$p+q\in\mathbb{P}_n$? ($\star$)
3. Y si $p\in\mathbb{P}_n$, ¿vale que $cp\in\mathbb{P}_n$? ($\star$)

Si $p\in\mathbb{P}_n$ entonces

$$\begin{aligned} p(x)&=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_1x+a_0\\ &=a_0+a_1x+\cdots+a_{n-1}x^{n-1}+a_nx^n. \end{aligned}$$

Asociamos a $p$ el arreglo $(a_0,a_1,\dots,a_{n-1},a_n)$. Entonces $\dim(\mathbb{P}_n)=n+1$.

**Ejemplo 6.** En $\mathbb{P}_2$ consideramos $p(x)=x^2+5x+6$ asociado al vector $(6,5,1)$, mientras que $q(x)=2x^2-6x+8$ sería $(8,-6,2)$.

El vector $\hat{\jmath}=(0,1,0)$ corresponde con el polinomio $r(x)=x$ y $x^2$ corresponde con $\hat{k}$.

*Observación.* Lo que ocurre detrás del telón es que $\mathbb{P}_n\simeq\mathbb{R}^{n+1}$.

**Bases y Dimensión**

- Nuestro concepto de dimensión es *Dimensión = Long. del arreglo vectorial.*
- ¿Podemos definir dimensión sin coordenadas?

**Ejemplo 7** ($\star$)**.** Para familiarizarnos con algunos conceptos hacemos una analogía. Imaginemos un mapa:

- Hay distintos marcos de referencia (**bases**) para guiarse distintos al marco *canónico* ($\hat{\imath}$,$\hat{\jmath}$).
- Los distintos puntos a los que llegamos con esas direcciones son las **combinaciones lineales**.
- Y en un mapa plano no precisamos más de dos direcciones para guiarnos. Una tercera es superflua. (**dependencia lineal**)

**Definición.** Si $C = \{\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_n\}$ es un conjunto de vectores, una combinación lineal de vectores de $C$ es cualquier vector $\vec{v}$ de la forma

$$\vec{v} = c_1\vec{v}_1 + \cdots + c_n\vec{v}_n.$$

**Ejemplo 8.** $(2,-3,3)$ es combinación lineal de $(1,0,0)$ y de $(0,1,-1)$ pues

$$(2,-3,3) = 2\cdot(1,0,0) + (-3)\cdot(0,1,-1).$$

**Definición.** El conjunto generado por una colección de vectores $C = \{\vec{v}_1,\ldots,\vec{v}_n\}$ es el conjunto de **todas** las combinaciones lineales de $C$. Denotamos $\operatorname{gen}(C)$.

**Proposición 9.** *Si* $C \subseteq \mathbb{R}^n$*, entonces* $\operatorname{gen}(C) \leqslant \mathbb{R}^n$.

**Ejemplo 10.** Dentro de $\operatorname{gen}((1,0,0),(0,-1,1))$ está $(2,-3,3)$. También $(19,31,-31)$, $(4,0,0)$, $(0,-5,5)$ y $(-8,7,-7)$. ¡El conjunto es infinito!

**Definición.** Un vector $\vec{v}$ es linealmente dependendiente (**l.d.**) de conjunto de vectores $C = \{\vec{v}_1,\ldots,\vec{v}_n\}$ si $\vec{v}$ es combinación lineal de $C$.
Un conjunto es linealmente dependiente si posee al menos un vector linealmente dependendiente.
Por el contrario, un vector es linealmente independiente (**l.i.**) de un conjunto si no es l.d. Análogamente para conjuntos.

**Ejemplo 11.** $(2,-3,3)$ es l.d. de $(1,0,0)$ y $(0,-1,1)$, pues

$$(2,-3,3) = 2(1,0,0) + 3(0,-1,1).$$

En consecuencia $\{(2,-3,3),(1,0,0),(0,-1,1)\}$ es un conjunto l.d.
Pero a su vez ocurre que

$$(1,0,0) = \frac{1}{2}(2,-3,3) - \frac{3}{2}(0,-1,1).$$

Es decir los demás vectores son c.l. de los otros.

*Observación.* Notemos que si $\vec{u},\vec{v}$ son l.d. entonces $\vec{u} = c\vec{v}$. Tenemos entonces las siguientes equivalencias, dos vectores son:

**l.d.** $\Longleftrightarrow$ **paralelos** $\Longleftrightarrow$ **múltiplos uno del otro**.

**El teorema resumen de independencia lineal**

**Teorema 12.** *Considere* $\{\vec{v}_1,\ldots,\vec{v}_m\} \subseteq \mathbb{R}^n$ *con* $m \leqslant n$*. Si* $A$ *es la matriz cuyas filas son los vectores, entonces la **cantidad de vectores l.i.** es* $\operatorname{Rng}(A)$*.*
*Cuando* $m > n$*, el conjunto es l.d.*

**Ejemplo 13.** Si $C = \left\{ \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \\ -8 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix} \right\}$, y queremos ver cuantos vectores l.i. hay en $C$, consideramos la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 5 & -8 \\ 1 & 1 & -2 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & -3 & 2 \end{pmatrix}$$

Al reducir vemos que $\operatorname{Rng}(A) = 2$. Es decir, sólo dos vectores son l.i. **¿Cuáles dos?**

- Tomamos $(0,-1,1)$ primero.
- Luego uno que no sea múltiplo, como $(1,1,-2)$.

Si queremos escribir $(3,5,-8)$ como c.l. de $(1,1,-2)$ y $(0,-1,1)$ debemos encontrar $a,b$ reales tales que

$$(3,5,-8) = a(1,1,-2) + b(0,-1,1) \Rightarrow \begin{cases} 3 = a \\ 5 = a - b \\ -8 = -2a + b \end{cases}$$

Con esto llegamos a $a = 3$ y $b = -2$.

**Definición.** Una base de un espacio vectorial es un conjunto generador que es l.i.
La dimensión de un espacio vectorial es la cantidad de elementos en una base.

**Ejemplo 14.** La base canónica de $\mathbb{R}^2$ es $\mathcal{C} = \{\hat{\imath},\hat{\jmath}\}$. Pero también $\{(1,1),\hat{\jmath}\}$ y $\{\hat{\imath},(-1,-2)\}$ son bases de $\mathbb{R}^2$. Como vimos anteriormente, $\dim(\mathbb{R}^n) = n$, entonces cualquier base de $\mathbb{R}^n$ tiene $n$ vectores l.i.

**Práctica**

Encuentre $\dim(\operatorname{gen}(C))$ donde $C \subseteq \mathbb{R}^3$ es

$$\left\{ \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ -3 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ -3 \\ 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \right\}.$$