

Planos

Ecuación Normal

Vimos que una ecuación normal

$$\langle \vec{n} | \vec{x} - P \rangle = 0$$

representa una recta en 2D. ¿Pero qué pasa en 3D?

Ejemplo 1. Consideremos la ecuación

$$\begin{aligned} \langle (1,1,1) | (x,y,z) - (1,2,3) \rangle &= 0 \\ \iff \langle (1,1,1) | (x-1,y-2,z-3) \rangle &= 0 \\ \iff x+y+z &= 6. \end{aligned}$$

Esta ecuación describe un plano que interseca los ejes cartesianos en $(6,0,0)$, $(0,6,0)$ y $(0,0,6)$.

Definición. Un plano en \mathbb{R}^3 se describe con la ecuación normal

$$ax+by+cz=d.$$

El vector normal es ortogonal a todos los vectores afines que están en el plano y está dado por $\vec{n}=(a,b,c)$

Vectores Directores

Al igual que una recta está definida por *dos puntos*, un plano se define con *tres puntos*. Pero, ¿cómo encontramos el plano que contiene tres puntos distintos P, Q, R ?

Los vectores afines \overrightarrow{PQ} y \overrightarrow{PR} son dos vectores afines dentro del plano. Podemos describir entonces el plano de *forma paramétrica*:

$$\vec{x} = s\overrightarrow{PQ} + t\overrightarrow{PR} + P.$$

Proposición 2. El vector normal al plano $\pi = \{\vec{x} = s\overrightarrow{PQ} + t\overrightarrow{PR} + P\}$ es

$$\vec{n} = \overrightarrow{PQ} \times \overrightarrow{PR}.$$

Práctica

Considere los puntos $A=(1,2,3)$, $B=(4,5,6)$ y $C=(7,8,9)$. Encuentre el plano que contiene a estos puntos.

Ejemplo 3. Consideremos la ecuación $2x-3y=6$, en 2D tiene la forma:

$$\begin{aligned} \langle (2,-3) | (x,y) \rangle &= 6 \\ \iff \langle (2,-3) | (x-3,y) \rangle &= 0 \\ \iff \langle (2,-3) | (x,y+2) \rangle &= 0. \end{aligned}$$

Es decir, tiene vector normal $(2,-3)$ y vector director $(3,2)$.

Para encontrar la forma vectorial despejamos una de las variables:

$$\begin{aligned} 2x-3y=6 &\iff y=2x/3-2 \\ \iff (x,y) &= (x, 2x/3-2) = (1, 2/3)x + (0, -2). \end{aligned}$$

Parametrizamos tomando $x=t$ y así obtenemos las ecuaciones paramétricas:

$$\begin{cases} x=t \\ y=2/3t-2 \end{cases}$$

En 3D la ecuación tiene z como variable libre, $(3,0,0)$ resuelve la ecuación, pero también lo hace $(3,0,2022)$. Vemos que la misma ecuación define un *plano* en 3D.

Esto va con la inclusión de un parámetro más en la forma paramétrica del plano:

$$\begin{aligned} (x,y,z) &= (x, 2x/3-2, z) \\ &= (1, 2/3, 0)x + (0, 0, 1)z + (0, -2, 0). \end{aligned}$$

Los vectores directores del plano son los que acompañan a la x y a la z . El vector normal de este plano será:

$$\vec{n} = (1, 2/3, 0) \times (0, 0, 1) = \det \begin{pmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ 1 & 2/3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2/3 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Finalmente observemos que este vector y el normal del plano son paralelos pues

$$3\vec{n} = (2, -3, 0) \parallel (2, -3).$$

Intersecciones y Direcciones

Observación. Si tenemos dos conjuntos algebraicos (rectas o planos), su intersección está dada por los puntos que satisfagan las ecuaciones de ambos conjuntos.

Intuitivamente la intersección de dos planos *no paralelos* es una recta. Verifiquémoslo.

Ejemplo 4. Consideremos los planos

$$\begin{cases} \pi_1 = \{17x+2y+7z=34\}, \\ \pi_2 = \{23x-6y+16z=46\}. \end{cases}$$

Su intersección está dada por los puntos que satisfacen ambas ecuaciones al mismo tiempo. Es decir, por el conjunto solución del sistema:

$$\begin{cases} 17x+2y+7z=34 \\ 23x-6y+16z=46 \end{cases}$$

Extrayendo la matriz del sistema y reduciendo obtenemos:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 17 & 2 & 7 & 34 \\ 23 & -6 & 16 & 46 \end{array} \right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1/2 & 2 \\ 0 & 1 & -3/4 & 0 \end{array} \right)$$

De aquí extraemos las ecuaciones

$$\begin{cases} x+z/2=2 \\ y-3z/4=0 \end{cases}$$

Y por lo tanto la solución es

$$(x,y,z) = (-z/2+2, 3z/4, z) = (-1/2, 3/4, 1)z + (2, 0, 0).$$

Esto es una recta con vector director $\vec{v}_\ell = (-1/2, 3/4, 1)$ que atraviesa el punto $P=(2,0,0)$.

Observación. Notemos que la dirección de la recta es ortogonal a ambas direcciones normales de los planos en cuestión. Entonces otra forma de encontrar el vector director \vec{v}_ℓ es con el producto cruz de los vectores normales:

$$\vec{v}_\ell \parallel \vec{n}_1 \times \vec{n}_2 = \det \begin{pmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ 17 & 2 & 7 \\ 23 & -6 & 16 \end{pmatrix} = (74, -111, -148).$$

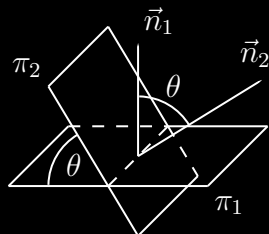
Observemos que $-148\vec{v}_\ell = \vec{n}_1 \times \vec{n}_2$.

Es importante recordar que dos vectores son paralelos si y sólo si uno es múltiplo del otro.

Ejemplo 5. Consideremos los planos

$$\begin{cases} \pi_1 = \{6x + 8y - 3z = 12\}, \\ \pi_2 = \{9x + 2y + 3z = -12\}. \end{cases}$$

Si queremos encontrar el ángulo formado entre ellos, aprovechamos los vectores normales. Observe que el ángulo entre \vec{n}_1 y \vec{n}_2 es el mismo ángulo que hay entre π_1 y π_2 :



De esta forma tenemos que el ángulo θ se obtiene de la ecuación

$$\langle \vec{n}_1 | \vec{n}_2 \rangle = \|\vec{n}_1\| \|\vec{n}_2\| \cos(\theta) \Rightarrow \theta = \arccos\left(\frac{61}{\sqrt{109}\sqrt{94}}\right).$$

Este valor es irracional pero una aproximación es $\theta \approx 53^\circ$.

Ejemplo 6. Considere las rectas

$$\begin{cases} \ell_1 = \{\vec{x} = t(-2, -2, -3) + (-2, 2, 3)\}, \\ \ell_2 = \{\vec{x} = t(-2, 4, 4) + (-4, 0, 0)\}. \end{cases}$$

El ángulo entre ℓ_1 y ℓ_2 es el mismo que entre sus vectores directores. Usando la identidad del producto punto tenemos que

$$\langle \vec{v}_1 | \vec{v}_2 \rangle = \|\vec{v}_1\| \|\vec{v}_2\| \cos(\theta) \Rightarrow \theta = \arccos\left(\frac{16}{\sqrt{17} \cdot 6}\right).$$

Es valor es aproximadamente $\theta \approx 50^\circ$.

Observación. El ángulo entre una recta y un plano es importante para determinar si son paralelos o perpendiculares entre si. En general vale que:

$$\ell \parallel \pi \iff \vec{v}_\ell \perp \vec{n}_\pi, \quad \ell \perp \pi \iff \vec{v}_\ell \parallel \vec{n}_\pi.$$

En cualquier otro caso diremos que las rectas y los planos son oblicuos.

Distancias

Para encontrar distancias entre conjuntos algebraicos consideramos los casos más básicos:

- i) Si P es un punto fuera de una recta ℓ que contiene a Q , entonces la distancia entre P y ℓ es

$$d(P, \ell) = \frac{\|\overrightarrow{QP} \times \vec{v}_\ell\|}{\|\vec{v}_\ell\|}.$$

- ii) Si P es un punto fuera de un plano π que contiene a Q , entonces la distancia entre P y π es

$$d(P, \pi) = \frac{|\langle \overrightarrow{QP} | \vec{n}_\pi \rangle|}{\|\vec{n}_\pi\|}.$$

- iii) Si $\ell_1: t\vec{v}_1 + P$ y $\ell_2: t\vec{v}_2 + Q$, con $\vec{v}_1 \nparallel \vec{v}_2$, entonces

$$d(\ell_1, \ell_2) = \frac{|\langle \overrightarrow{QP} | \vec{v}_1 \times \vec{v}_2 \rangle|}{\|\vec{v}_1 \times \vec{v}_2\|}.$$

La distancia entre una recta y un plano paralelos, dos planos paralelos o dos rectas paralelas se encuentra utilizando la *primera fórmula*.

Práctica

Considere los puntos $P = (1, 2, 0)$, $Q = (1, 0, 1)$ y $R = (2, 1, 0)$. Si ℓ es la recta que contiene a P y Q , encuentre $d(R, \ell)$. También encuentre $\angle(R, \ell)$.

Práctica

Encuentre la distancia entre los planos

$$\begin{cases} \pi_1 = \{x + 3y + 5z = -4\}, \\ \pi_2 = \{x + 3y + 5z = 16\}. \end{cases}$$

Resumen

- El vector normal de $ax + by + cz = d$ es $\vec{n} = (a, b, c)$.
- Encontrar intersecciones es resolver sistemas lineales.
- La dirección de la recta de intersección de dos planos es $\vec{n}_1 \times \vec{n}_2$.
- El ángulo formado por dos planos es el mismo que hay entre \vec{n}_1 , \vec{n}_2 .
- El ángulo formado por dos rectas es el mismo que hay entre \vec{v}_1 , \vec{v}_2 .
- Las distancias entre conjuntos algebraicos dependen de un punto fuera del conjunto y del vector director o normal de ese conjunto.