

Transformaciones Lineales

Acción sobre la Base

Primero consideremos una transformación lineal T sobre \mathbb{R}^3 .

- T actúa sobre vectores $\vec{v} \in \mathbb{R}^3$.
- Cualquier $\vec{v} = (a, b, c)$ se puede expresar como c.l. de la base canónica. Es decir:

$$\vec{v} = a\hat{i} + b\hat{j} + c\hat{k}.$$
- Como T es lineal, entonces

$$T(\vec{v}) = T(a\hat{i} + b\hat{j} + c\hat{k}) = aT(\hat{i}) + bT(\hat{j}) + cT(\hat{k}).$$

Esto quiere decir que $T(\vec{v})$ es c.l. de $\{T(\hat{i}), T(\hat{j}), T(\hat{k})\}$. Es decir, c.l. de las *imágenes* de la base canónica.

Ejemplo 1. Consideremos la función $T(x, y) = (2x - y, x + 2y)$. Esta T.L. va de \mathbb{R}^2 en \mathbb{R}^2 . Es un *ejercicio* verificar que T es lineal (**). Calculemos la imagen del vector $(4, 5)$ de dos formas:

- $T(4, 5) = (2(4) - (5), (4) + 2(5)) = (3, 14)$.
- $T(\hat{i}) = T(1, 0) = (2(1) - (0), (1) + 2(0)) = (2, 1)$ y análogamente $T(\hat{j}) = (-1, 2)$. Entonces

$$\begin{aligned} T(4, 5) &= 4T(\hat{i}) + 5T(\hat{j}) \\ &= 4(2, 1) + 5(-1, 2) \\ &= (8, 4) + (-5, 10) = (3, 14). \end{aligned}$$

Observación. ¡Lo importante de la T.L. es que está totalmente determinada por su acción sobre la base! Es decir, con sólo saber qué hace T con la *base canónica* sabemos qué hace con *cualquier* vector.

Observación. También notemos que la operación $4(2, 1) + 5(-1, 2)$ es lo mismo que

$$(4, 5) \begin{pmatrix} (2, 1) \\ (-1, 2) \end{pmatrix} = (4, 5) \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} = \left(\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \end{pmatrix} \right)^T.$$

Es decir, podemos determinar T como la multiplicación de la matriz $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$. Por lo tanto

$$T(4, 5) = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 14 \end{pmatrix}.$$

En general esto vale para cualquier transformación lineal y en cualquier dimensión. Tenemos el siguiente resultado:

Teorema 2. Si T es una T.L. entonces existe una matriz A de forma que $T(\vec{x}) = A\vec{x}$.

Surge naturalmente la pregunta, ¿cómo representamos T con una matriz? ¡Usamos la base canónica!

Ejemplo 3. Consideremos la T.L. $T(x, y, z) = (x - 2y + z, 2x - y - 4z)$, T va de \mathbb{R}^3 en \mathbb{R}^2 . Para encontrar la matriz de T primero buscamos la imagen de la base canónica:

$$\begin{cases} T(\hat{i}) = T(1, 0, 0) = (1 - 0 + 0, 2 - 0 - 0) = (1, 2), \\ T(\hat{j}) = (0 - 2 + 0, 0 - 1 - 0) = (-2, -1), \\ T(\hat{k}) = (1, -4). \end{cases}$$

Así

$$T(x, y, z) = x(1, 2) + y(-2, -1) + z(1, -4)$$

y si suponemos que la imagen de (x, y, z) es algún vector (a, b) entonces traducimos esto en un sistema lineal:

$$\begin{aligned} (a, b) &= x(1, 2) + y(-2, -1) + z(1, -4) \\ &= (x - 2y + z, 2x - y - 4z) \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} a = x - 2y + z \\ b = 2x - y - 4z \end{cases}$$

Convirtiendo a forma matricial, lo podemos ver como

$$\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 2 & -1 & -4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}.$$

Por lo tanto $T(x, y, z) = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 2 & -1 & -4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$, y entonces

concluimos que esa es la matriz de T .

Observación. La matriz de T está compuesta por las imágenes de la base canónica tomadas como columnas. Por ejemplo en el caso anterior $T(\hat{i})$ era $(1, 2)$, entonces ese vector es la primera columna de A .

Denotaremos a la matriz de una transformación lineal A , A_T ó sólo T . Otra notación más *sugestiva* de lo que haremos más adelante es $[T]_C$.

Ejemplo 4. Supongamos que $T: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ es una T.L. que cumple

$$\begin{cases} T(\hat{i}) = (-1, 3, 8), \\ T(\hat{j}) = (0, -2, 7). \end{cases}$$

Si queremos encontrar la imagen de $(6, -2)$ entonces formamos la matriz y multiplicamos. En este caso:

$$[T]_C = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 3 & -2 \\ 8 & 7 \end{pmatrix}$$

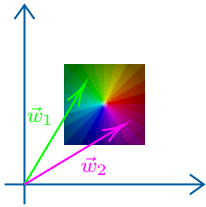
$$\Rightarrow T(6, -2) = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 3 & -2 \\ 8 & 7 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 6 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -6 \\ 22 \\ 34 \end{pmatrix}.$$

Por lo tanto $T(6, -2) = (-6, 22, 34)$.

Como las T.L.'s están determinadas por su acción sobre la base, entonces podemos ver cómo actúa T sobre los vectores por medio de su acción sobre \hat{i}, \hat{j} .

T.L.'s en el plano (en \mathbb{R}^2)

Para guiarnos, tomaremos vectores cuyas puntas estén en la imagen a continuación:

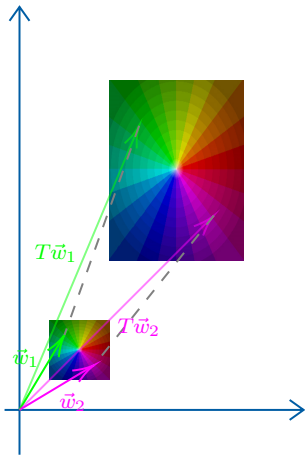


Los vectores *del cuadro* son aquellos cuyas puntas caen en el cuadro y salen desde el origen.

Reescalamiento (Elongar ó acortar)

El reescalamiento alonga o acorta. ¿Cómo se ve una matriz de un reescalamiento? ¿Adónde van \hat{i} y \hat{j} ?

Ejemplo 5. Llamemos $\vec{u} = T\hat{i}$, $\vec{v} = T\hat{j}$, entonces en este caso $\vec{u} = (2,0)$, $\vec{v} = (0,3)$.



Armando la matriz de T obtenemos

$$[T]_C = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

Y encontramos el *criterio* de T por medio de

$$T(x,y) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x \\ 3y \end{pmatrix}.$$

Práctica

- Si las medidas iniciales del cuadro son 1×1 :
1. ¿Cuales son las medidas de la figura nueva?
 2. ¿Cuál es el área la figura nueva?
 3. ¿Cuánto vale $\det([T]_C)$?

En general un reescalamiento se representa con una matriz diagonal $\begin{pmatrix} m & 0 \\ 0 & n \end{pmatrix}$. Su acción sobre \hat{i} y \hat{j} es mandarlos a múltiplos de ellos respectivamente.

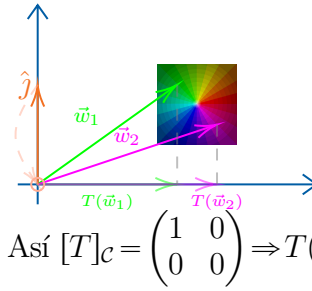
Observación. El vector (x,y) es enviado a (mx,ny) . Si un vector es de la forma $(x,0)$ entonces su imagen es $(mx,0) = m(x,0)$. Esto quiere decir que son *paralelos*.

Definición. Un vector \vec{v} es invariante bajo una T.L. T si $T(\vec{v}) \in \text{gen}(\vec{v})$.

Por lo anterior los vectores del eje x y los del eje y son invariantes bajo reescalamientos.

Proyecciones (Justo como antes)

Ejemplo 6. Proyectamos sobre el eje x con la transformación $T(\vec{x}) = \text{Proy}_{\hat{i}}(\vec{x})$. ¿Cuál es la matriz de esta T.L.?



$$\begin{cases} \vec{u} = \text{Proy}_{\hat{i}}(\hat{i}) = \langle \hat{i} | \hat{i} \rangle \hat{i} = \hat{i}, \\ \vec{v} = \text{Proy}_{\hat{i}}(\hat{j}) = \langle \hat{i} | \hat{j} \rangle \hat{i} = 0. \end{cases}$$

$$\text{Así } [T]_C = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow T(x,y) = (x,0).$$

Práctica

¿Qué pasó con el cuadro? ¿Cuál es su área bajo la proyección? ¿Cuánto vale el determinante de T aquí?

Observación. Si $b \neq 0$, $(0,b)$ va para cero bajo $\text{Proy}_{\hat{i}}$. También colapsa la cuadrícula en un solo eje. Esta es la idea de una T.L. singular.

Definición. Si T es una T.L., su núcleo es el conjunto $\ker T = \{\vec{x} : T(\vec{x}) = 0\}$.

Teorema 7. Si $A = [T]_C$ es la representación matricial de T , entonces $\ker T = \ker A$.

Ejemplo 8. En este caso $\ker(\text{Proy}_{\hat{i}}) = \ker \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.

El espacio de soluciones está definido por la ecuación $x=0$ de forma que las soluciones son de la forma $(0,y)$. Entonces $\ker(\text{Proy}_{\hat{i}}) = \text{gen}(\hat{j})$.

Definición. Una T.L. se llama singular si existe algún vector \vec{v} no nulo que es enviado a cero bajo la T.L.

Observación. En el caso de la proyección, como los $(0,y)$ van para cero, entonces es una T.L. singular.

Definición. Una T.L. se dice no-singular si el único vector que manda a cero es el cero. Es decir, si $\ker T = \{0\}$.

Vale que

$$T \text{ es no-singular} \iff \ker[T]_C = \{0\}$$

$$\iff \text{Nul}([T]_C) = 0 \iff \text{Rng}[T]_C \text{ es completo}$$

$$\iff \det[T]_C \neq 0 \iff [T]_C \text{ es invertible.}$$

Definición. Una T.L. es invertible si su matriz es invertible. En este caso si $T\vec{x} = A\vec{x}$ entonces $T^{-1}\vec{x} = A^{-1}\vec{x}$.

Ejemplo 9. Si $T(x,y) = (2x,3y)$, entonces $\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{3} \end{pmatrix}$ y entonces $T^{-1}(x,y) = (x/2, y/3)$.