Ortogonalidad y Proyecciones

Definición. Diremos que dos conjuntos C,D de vectores son ortogonales si sus vectores lo son pareja por pareja.

Análogamente dos subespacios son ortogonales si lo son como conjuntos. Denotaremos igual que como con vectores, $C \perp D$ si C y D son ortogonales.

Ejemplo 1. Consideremos $V = \text{gen}((0,7,0))$ y $W = \text{gen}((1,0,-1),(0,0,2))$. Entonces $V \perp W$. No tenemos que probar que *todos* los elementos son ortogonales entre si, sino sólo los elementos prototípicos de cada espacio.

- En V los vectores son de la forma $c(0,7,0)$.
- En W se ven como $a(1,0,-1)+b(0,0,2)$.

Basta verificar entonces que para cualesquiera a,b,c reales:

$$(0,7c,0) \perp (a,0,2b-a).$$

Pero en efecto

$$\langle (0,7c,0) | (a,0,2b-a) \rangle = 0 \cdot a + 0 \cdot (7c) + 0 \cdot (2b-a) = 0.$$

Como independiente de a,b,c, los vectores son ortogonales, entonces los espacios son ortogonales.

Proposición 2. *Si* $V = \text{gen}(C)$ *y* $W = \text{gen}(D)$*, entonces* $V \perp W \iff C \perp D$.

Es decir, con sólo que los generadores sean ortogonales, ya los espacios son ortogonales.

Definición. Un conjunto de vectores se dice ortogonal si todos sus vectores son ortogonales entre si.

Ejemplo 3. El conjunto $\mathcal{C} = \{\hat{\imath},\hat{\jmath},\hat{k}\}$, la base canónica de $\mathbb{R}^3$ forma un conjunto ortogonal de $\mathbb{R}^3$.

Ejemplo 4. Si $\mathcal{B} = \{(2,2,-1),(2,-1,2),(-1,2,2)\}$ es ortogonal. Llamemos $\vec{u},\vec{v}$ y $\vec{w}$ a estos vectores. Observemos que

$$\langle \vec{u} | \vec{v} \rangle = 4-2-2 = 0,$$
$$\langle \vec{w} | \vec{v} \rangle = -2-2+4 = 0.$$

Claramente $\vec{w} \perp \vec{u}$ también.

Pero, hay una diferencia entre este conjunto $\mathcal{B}$ y la base canónica. ¿Será que $\mathcal{B}$ también es base? Verificamos montando una matriz cuyas filas son los vectores de $\mathcal{B}$:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & -1 \\ 2 & -1 & 2 \\ -1 & 2 & 2 \end{pmatrix} \Rightarrow \det(A) = -27 \neq 0.$$

Para facilitarnos un poco la búsqueda de vectores l.i. usamos el siguiente resultado.

Proposición 5. *Dos vectores ortogonales son l.i.*

No necesariamente vale al contrario, $\vec{u} = (1,1,1)$ y $\vec{v} = (-1,1,-1)$ son l.i. pero no son ortogonales pues $\langle \vec{u} | \vec{v} \rangle = -1 \neq 0$.

Como A tiene determinante no cero, tiene rango completo y por tanto sus filas son l.i. y así $\mathcal{B}$ forma una base de $\mathbb{R}^3$. Es decir, en términos de que son base y en términos de que son ortogonales no hay diferencia.

Definición. Una base es ortogonal si lo es como conjunto. Pero una base es ortonormal si ya es ortogonal y todos sus vectores tienen norma 1.

Ejemplo 6. En el ejemplo anterior tenemos que $\mathcal{B}$ forma una base ortogonal, sin embargo

$$\|(2,2,-1)\|^2 = 4+4+1 = 9 \Rightarrow \|(2,2,-1)\| = 3 \neq 1.$$

Lo mismo vale para $\vec{v}$ y $\vec{w}$. Como los vectores no tienen norma 1, entonces no forman una base ortonormal.

Podemos normalizar la base para obtener vectores de norma 1 ahora si. Recuerde que para normalizar, dividimos entre su norma.

Ejemplo 7. El conjunto $\hat{\mathcal{B}} = \{\hat{u},\hat{v},\hat{w}\}$ sí forma una base ortonormal. Aquí por ejemplo

$$\hat{u} = \frac{\vec{u}}{\|\vec{u}\|} = \frac{1}{3}(2,2,-1) = \left(\frac{2}{3},\frac{2}{3},-\frac{1}{3}\right).$$

Estos vectores sí tienen norma 1 y por tanto forman una base ortonormal.

Ejemplo 8. La base canónica también forma una base ortonormal. Cada vector canónico tiene norma 1.

Práctica

¿Cuándo vale que $\mathcal{B} = \{\vec{u},\vec{v},\vec{u}\times\vec{v}\}$ es una base ortogonal de $\mathbb{R}^3$?

Práctica

Considere los vectores $(1,-2,0),(0,1,1)$. Encuentre un tercer vector que junto con estos forme una base ortogonal de $\mathbb{R}^3$.

Matrices

Analicemos la matriz que corresponde a una base ortogonal.

Ejemplo 9. Veamos la matriz

$$A=\begin{pmatrix} 2 & 2 & -1 \\ 2 & -1 & 2 \\ -1 & 2 & 2 \end{pmatrix}.$$

Podemos notar que A es simétrica primero que nada y además podemos ver que su inversa es

$$A^{-1}=\frac{1}{9}\begin{pmatrix} 2 & 2 & -1 \\ 2 & -1 & 2 \\ -1 & 2 & 2 \end{pmatrix}.$$

Es decir vale que $A^{-1}=\frac{1}{9}A$.

Usando la propiedad $(cM)^{-1}=\frac{1}{c}M^{-1}$ podemos considerar $B=\frac{1}{3}A$ y de esta manera $(B)^{-1}=B$.

Sin embargo este es un caso muy especial. No todas las matrices que corresponden a una base ortogonal cumplen que sus inversas son un múltiplo de ellas mismas.

Práctica

Si $\mathcal{B}=\{(18,9,-6),(9,-6,19),(14,-42,-21)\}$, entonces realice lo siguiente:

1. Verifique que $\mathcal{B}$ forma una base ortogonal de $\mathbb{R}^3$.
2. Encuentre la matriz inversa de A, donde A es tomar como filas los vectores de $\mathcal{B}$.

En general con bases ortogonales no podemos esperar mucho de la matriz. Pero podemos hablar de un tipo especial de matrices que sí nos daran bases ortogonales con propiedades especiales.

Definición. Una matriz A es <u>ortogonal</u> si $AA^{\mathsf{T}}=I$. Es decir, si $A^{-1}=A^{T}$.

Observación. La matriz del ejemplo anterior es ortogonal y además es simétrica (eso la convierte en un tipo aún más especial de matriz que se llama *involutiva*). La de la práctica no es ninguna de las dos.

Ejemplo 10. Las matrices

$$R_\theta=\begin{pmatrix} \cos(\theta) & \sin(\theta) \\ -\sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix},\ S_\theta=\begin{pmatrix} \cos(\theta) & \sin(\theta) \\ \sin(\theta) & -\cos(\theta) \end{pmatrix}$$

son ortogonales para cualquier $\theta\in\mathbb{R}$.

De hecho *todas* las matrices $[2\times 2]$ ortogonales tienen esa forma.

Proposición 11.

$$A \textit{ ortogonal} \Rightarrow \det(A)=\pm 1.$$

Sin embargo el converso no es cierto. La matriz $\begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & \frac{1}{3} \end{pmatrix}$ tiene determinante 1 pero no es ortogonal.

Proceso de Gram-Schmidt

Resta la pregunta, ¿cómo generamos matrices ortogonales a partir de vectores? Por ejemplo con los de la práctica, ¿qué hacemos para que la matriz sea ortogonal? Aplicamos el llamado Proceso de Gram-Schmidt para obtener una base ortonormal.

Para 3 vectores el proceso es el siguiente:

1. Comenzamos con tres vectores $\mathcal{B}_1=\{\vec{v}_1,\vec{v}_2,\vec{v}_3\}$.
2. El primer vector nuevo será $\vec{w}_1=\hat{v}_1=\frac{\vec{v}_1}{\|\vec{v}_1\|}$.
3. El segundo vector será $\vec{w}_2=\vec{v}_2-\mathrm{Proy}_{\vec{w}_1}\vec{v}_2$. Que es lo mismo que
   $$\vec{w}_2=\vec{v}_2-\langle\vec{w}_1|\vec{v}_2\rangle\vec{w}_1.$$
   Y al final debemos normalizar $\vec{w}_2$.
4. Finalmente el tercer vector es
   $$\vec{w}_3=\vec{v}_3-\mathrm{Proy}_{\vec{w}_1}\vec{v}_3-\mathrm{Proy}_{\vec{w}_2}\vec{v}_3.$$
   Y al igual que antes se debe de normalizar al final.

Este proceso determina una base nueva $\mathcal{B}_2=\{\vec{w}_1,\vec{w}_2,\vec{w}_3\}$ que sí es ortogonal.

Observación. No es necesario que los vectores de $\mathcal{B}_1$ sean ortogonales desde el principio, nada más es necesario que sean l.i.

Ejemplo 12. Si $\mathcal{B}_1=\{(1,2,3),(2,3,1),(3,1,2)\}$ es una base y aplicamos Gram-Schmidt entonces:

1. $\vec{w}_1=\frac{1}{\sqrt{14}}(1,2,3)$.
2. $\vec{w}_2=\vec{v}_2-\mathrm{Proy}_{\vec{w}_1}\vec{v}_2$ es decir
   $$\begin{aligned}\vec{w}_2&=(2,3,1)-\left\langle\frac{1}{\sqrt{14}}(1,2,3)\middle|(2,3,1)\right\rangle\frac{1}{\sqrt{14}}(1,2,3)\\&=(2,3,1)-\frac{11}{14}(1,2,3)=\left(\frac{17}{14},\frac{10}{7},\frac{-19}{14}\right)\end{aligned}$$
   Normalizando obtenemos $\vec{w}_2=\left(\frac{17}{5\sqrt{42}},\frac{4}{\sqrt{42}},\frac{-19}{5\sqrt{42}}\right)$.
3. Finalmente
   $$\begin{aligned}\vec{w}_3&=\vec{v}_3-\mathrm{Proy}_{\vec{w}_1}\vec{v}_3-\mathrm{Proy}_{\vec{w}_2}\vec{v}_3\\&=(3,1,2)-\left\langle\frac{1}{\sqrt{14}}(1,2,3)\middle|(3,1,2)\right\rangle\frac{1}{\sqrt{14}}(1,2,3)\\&\quad-\left\langle\frac{1}{\sqrt{42}}\left(\frac{17}{5},4,\frac{-19}{5}\right)\middle|(3,1,2)\right\rangle\frac{1}{\sqrt{42}}\left(\frac{17}{5},4,\frac{-19}{5}\right).\end{aligned}$$
   Normalizando obtenemos $\vec{w}_3=\left(\frac{7}{5\sqrt{3}},\frac{-1}{\sqrt{3}},\frac{1}{5\sqrt{3}}\right)$.