Planos

Ecuación Normal

Vimos que una ecuación normal

$$\langle\vec{n}|\vec{x}-P\rangle=0$$

representa una recta en 2D. ¿Pero qué pasa en 3D?

Ejemplo 1. Consideremos la ecuación

$$\begin{aligned}&\langle(1,1,1)|(x,y,z)-(1,2,3)\rangle=0\\ \iff&\langle(1,1,1)|(x-1,y-2,z-3)\rangle=0\\ \iff&x+y+z=6.\end{aligned}$$

Esta ecuación describe un plano que interseca los ejes cartesianos en (6,0,0),(0,6,0) y (0,0,6).

Definición. Un plano en $\mathbb{R}^3$ se describe con la ecuación normal

$$ax+by+cz=d.$$

El vector normal es ortogonal a todos los vectores afines que están en el plano y está dado por $\vec{n}=(a,b,c)$

Vectores Directores

Al igual que una recta está definida por *dos puntos*, un plano se define con *tres puntos*. Pero, ¿cómo encontramos el plano que contiene tres puntos distintos P,Q,R?

Los vectores afines $\overrightarrow{PQ}$ y $\overrightarrow{PR}$ son dos vectores afines dentro del plano. Podemos describir entonces el plano de *forma paramétrica*:

$$\vec{x}=s\overrightarrow{PQ}+t\overrightarrow{PR}+P.$$

Proposición 2. *El vector normal al plano $\pi=\{\vec{x}=s\overrightarrow{PQ}+t\overrightarrow{PR}+P\}$ es*

$$\vec{n}=\overrightarrow{PQ}\times\overrightarrow{PR}.$$

Práctica

Considere los puntos $A=(1,2,3)$, $B=(4,5,6)$ y $C=(7,8,9)$. Encuentre el plano que contiene a estos puntos.

Ejemplo 3. Consideremos la ecuación $2x-3y=6$, en 2D tiene la forma:

$$\begin{aligned}&\langle(2,-3)|(x,y)\rangle=6\\ \iff&\langle(2,-3)|(x-3,y)\rangle=0\\ \iff&\langle(2,-3)|(x,y+2)\rangle=0.\end{aligned}$$

Es decir, tiene vector normal (2,−3) y vector director (3,2).

Para encontrar la forma vectorial despejamos una de las variables:

$$\begin{aligned}2x-3y=6&\iff y=2x/3-2\\ \iff(x,y)&=(x,2x/3-2)=(1,2/3)x+(0,-2).\end{aligned}$$

Parametrizamos tomando $x=t$ y así obtenemos las ecuaciones paramétricas:

$$\begin{cases}x=t\\ y=2/3t-2\end{cases}$$

En 3D la ecuación tiene z como variable libre, (3,0,0) resuelve la ecuación, pero también lo hace (3,0,2022). Vemos que la misma ecuación define un *plano* en 3D.

Esto ve con la inclusión de un parámetro más en la forma paramétrica del plano:

$$\begin{aligned}(x,y,z)&=(x,2x/3-2,z)\\ &=(1,2/3,0)x+(0,0,1)z+(0,-2,0).\end{aligned}$$

Los vectores directores del plano son los que acompañan a la x y a la z. El vector normal de este plano será:

$$\vec{n}=(1,2/3,0)\times(0,0,1)=\det\begin{pmatrix}\hat{\imath}&\hat{\jmath}&\hat{k}\\1&2/3&0\\0&0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2/3\\-1\\0\end{pmatrix}.$$

Finalmente observemos que este vector y el normal del plano son paralelos pues

$$3\vec{n}=(2,-3,0)\parallel(2,-3).$$

Intersecciones y Direcciones

Observación. Si tenemos dos conjuntos algebraicos (rectas o planos), su intersección está dada por los puntos que satisfagan las ecuaciones de ambos conjuntos.

Intuitivamente la intersección de dos planos *no paralelos* es una recta. Verifiquémoslo.

Ejemplo 4. Consideremos los planos

$$\begin{cases}\pi_1=\{17x+2y+7z=34\},\\ \pi_2=\{23x-6y+16z=46\}.\end{cases}$$

Su intersección está dada por los puntos que satisfacen ambas ecuaciones al mismo tiempo. Es decir, por el conjunto solución del sistema:

$$\begin{cases}17x+2y+7z=34\\ 23x-6y+16z=46\end{cases}$$

Extrayendo la matriz del sistema y reduciendo obtenemos:

$$\left(\begin{array}{ccc|c}17&2&7&34\\23&-6&16&46\end{array}\right)\to\left(\begin{array}{ccc|c}1&0&1/2&2\\0&1&-3/4&0\end{array}\right)$$

De aquí extraemos las ecuaciones

$$\begin{cases}x+z/2=2\\ y-3z/4=0\end{cases}$$

Y por lo tanto la solución es

$$(x,y,z)=(-z/2+2,3z/4,z)=(-1/2,3/4,1)z+(2,0,0).$$

Esto es una recta con vector director $\vec{v}_\ell=(-1/2,3/4,1)$ que atraviesa el punto $P=(2,0,0)$.

Observación. Notemos que la dirección de la recta es ortogonal a ambas direcciones normales de los planos en cuestión. Entonces otra forma de encontrar el vector director $\vec{v}_\ell$ es con el producto cruz de los vectores normales:

$$\vec{v}_\ell \parallel \vec{n}_1 \times \vec{n}_2 = \det\begin{pmatrix} \hat{\imath} & \hat{\jmath} & \hat{k} \\ 17 & 2 & 7 \\ 23 & -6 & 16 \end{pmatrix} = (74,-111,-148).$$

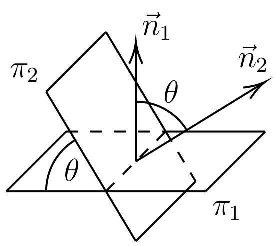
Observemos que $-148\vec{v}_\ell = \vec{n}_1 \times \vec{n}_2$.

Es importante recordar que dos vectores son paralelos si y sólo si uno es múltiplo del otro.

Ejemplo 5. Consideremos los planos

$$\begin{cases} \pi_1 = \{6x+8y-3z=12\}, \\ \pi_2 = \{9x+2y+3z=-12\}. \end{cases}$$

Si queremos encontrar el ángulo formado entre ellos, aprovechamos los vectores normales. Observe que el ángulo entre $\vec{n}_1$ y $\vec{n}_2$ es el mismo ángulo que hay entre π_1 y π_2:



De esta forma tenemos que el ángulo θ se obtiene de la ecuación

$$\langle \vec{n}_1 | \vec{n}_2 \rangle = \|\vec{n}_1\| \|\vec{n}_2\| \cos(\theta) \Rightarrow \theta = \arccos\left(\frac{61}{\sqrt{109}\sqrt{94}}\right).$$

Este valor es irracional pero una aproximación es $\theta \approx 53°$.

Ejemplo 6. Considere las rectas

$$\begin{cases} \ell_1 = \{\vec{x} = t(-2,-2,-3)+(-2,2,3)\}, \\ \ell_2 = \{\vec{x} = t(-2,4,4)+(-4,0,0)\}. \end{cases}$$

El ángulo entre ℓ_1 y ℓ_2 es el mismo que entre sus vectores directores. Usando la identidad del producto punto tenemos que

$$\langle \vec{v}_1 | \vec{v}_2 \rangle = \|\vec{v}_1\| \|\vec{v}_2\| \cos(\theta) \Rightarrow \theta = \arccos\left(\frac{16}{\sqrt{17 \cdot 6}}\right).$$

Es valor es aproximadamente $\theta \approx 50°$.

Observación. El ángulo entre una recta y un plano es importante para determinar si son paralelos o perpendiculares entre si. En general vale que:

$$\ell \parallel \pi \iff \vec{v}_\ell \perp \vec{n}_\pi, \qquad \ell \perp \pi \iff \vec{v}_\ell \parallel \vec{n}_\pi.$$

En cualquier otro caso diremos que las rectas y los planos son oblicuos.

Distancias

Para encontrar distancias entre conjuntos algebraicos consideramos los casos más básicos:

I) Si P es un punto fuera de una recta ℓ que contiene a Q, entonces la distancia entre P y ℓ es

$$d(P,\ell) = \frac{\left\|\overrightarrow{QP} \times \vec{v}_l\right\|}{\|\vec{v}_l\|}.$$

II) Si P es un punto fuera de un plano π que contiene a Q, entonces la distancia entre P y π es

$$d(P,\pi) = \frac{\left|\left\langle \overrightarrow{QP} \middle| \vec{n}_\pi \right\rangle\right|}{\|\vec{n}_\pi\|}.$$

III) Si $\ell_1 \colon t\vec{v}_1 + P$ y $\ell_2 \colon t\vec{v}_2 + Q$, con $\vec{v}_1 \nparallel \vec{v}_2$, entonces

$$d(\ell_1,\ell_2) = \frac{\left|\left\langle \overrightarrow{QP} \middle| \vec{v}_1 \times \vec{v}_2 \right\rangle\right|}{\|\vec{v}_1 \times \vec{v}_2\|}.$$

La distancia entre una recta y un plano paralelos, dos planos paralelos o dos rectas paralelas se encuentra utilizando la *primera fórmula*.

Práctica

Considere los puntos $P=(1,2,0), Q=(1,0,1)$ y $R=(2,1,0)$. Si ℓ es la recta que contiene a P y Q, encuentre $d(R,\ell)$. También encuentre $\angle(R,\ell)$.

Práctica

Encuentre la distancia entre los planos

$$\begin{cases} \pi_1 = \{x+3y+5z=-4\}, \\ \pi_2 = \{x+3y+5z=16\}. \end{cases}$$

Resumen

- El vector normal de $ax+by+cz=d$ es $\vec{n}=(a,b,c)$.
- Encontrar intersecciones es resolver sistemas lineales.
- La dirección de la recta de intersección de dos planos es $\vec{n}_1 \times \vec{n}_2$.
- El ángulo formado por dos planos es el mismo que hay entre $\vec{n}_1$, $\vec{n}_2$.
- El ángulo formado por dos rectas es el mismo que hay entre $\vec{v}_1$, $\vec{v}_2$.
- Las distancias entre conjuntos algebraicos dependen de un punto fuera del conjunto y del vector director o normal de ese conjunto.