## El Producto Matricial

La condición que garantiza que dos matrices $A$,$B$ se puedan multiplicar es:

$$\#\text{columnas } A = \#\text{filas } B.$$

Si $A$ es $[m\times p]$ y $B$ es $[p\times n]$, entonces las entradas del producto se definen con la fórmula:

$$(AB)_{ij} = \sum_{k=1}^{p} A_{ik}B_{kj}.$$

Más fácilmente:

$$(AB)_{ij} = \langle \text{fila } i \ A | \text{col. } j \ B\rangle.$$

La matriz $AB$ será de tamaño $[m\times n]$.

**Ejemplo 1.** Consideremos las matrices

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 3 & 4 \\ -2 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}, \ B = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -2 & 8 & -5 \\ 1 & -2 & 3 & 9 & 6 \end{pmatrix}.$$

Notemos que:

- $A$ es $[4\times 2]$.
- $B$ es $[2\times 5]$.
  - Vale que $\#$cols. $A = \#$filas $B$.
  - ¡Podemos multiplicar $A$ con $B$!
- La matriz $AB$ será de tamaño $[4\times 5]$.

Si queremos encontrar la entrada (2,4) de $AB$ utilizamos la fila 2 de $A$ y la columna 4 de $B$:

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ \boxed{3 \quad 4} \\ -2 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad \begin{pmatrix} 2 & 0 & -2 & \boxed{\begin{matrix} 8 \\ 9 \end{matrix}} & -5 \\ 1 & -2 & 3 & & 6 \end{pmatrix}.$$

Tomamos el producto punto de estos vectores:

$$\langle (3,4) | (8,9) \rangle = 3\cdot 8 + 4\cdot 9 = 60$$

y por lo tanto $(AB)_{24} = 60$.

En general podemos acomodar las matrices de la siguiente forma:

| | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| | | 2 | 0 | −2 | 8 | −5 |
| | | 1 | −2 | 3 | 9 | 6 |
| 1 | −1 | | | | | |
| 3 | 4 | | | | (∗) | |
| −2 | 0 | | | | | |
| 0 | 4 | | | | | |

**Práctica**

- Encuentre la entrada (1,3) de $AB$ resaltando las filas y columnas correspondientes.
- Realice el mismo procedimiento para encontrar la entrada (3,2) de $AB$.

Para encontrar cualquier entrada, ubicamos la fila y columna correspondiente de las matrices y calculamos su producto punto.

**Ejercicio 2.** Ya multiplicamos $A$ a la izquierda de $B$. ¿Podemos multiplicar $BA$? Es decir, invirtiendo el orden de multiplicación.

*Observación.* En general si $A \in \mathcal{M}_{m\times n}$ y $B \in \mathcal{M}_{n\times m}$ entonces tanto $AB$ como $BA$ existen.

**Ejemplo 3.** Consideremos las matrices

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -2 & 7 \\ 4 & -3 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \ B = \begin{pmatrix} 0 & 8 \\ 2 & -1 \\ -2 & 2 \\ 7 & 0 \end{pmatrix}.$$

Si queremos encontrar $AB$ entonces verificamos primero si podemos multiplicarlas. $A$ es $[2\times 4]$ y $B$ es $[4\times 2]$, en este caso

$$\#\text{cols. } A = \#\text{filas } B$$

entonces podemos calcular $AB$.

De la misma forma si buscamos $BA$, también podemos calcularla porque

$$\#\text{cols. } B = \#\text{filas } A.$$

**Práctica**

1. ¿Qué tamaño tendrán las matrices $AB$ y $BA$?
2. Trabaje en conjunto con alguien para encontrar las matrices que resultan al multiplicar.

## Propiedades

Supongamos que $A$,$B$ y $C$ son matrices de tamaños adecuados y $c$ un escalar. El producto matricial goza de las siguientes propiedades:

1. Asocia: $ABC = A(BC) = (AB)C$.
2. Identidad: Hay una matriz $I$ tal que $AI = A = IA$.
3. Anulador: Hay una matriz 0 tal que $A0 = 0 = 0A$.
4. Distribución: $A(B+C) = AB + AC$.
5. Conmuta con prod. escalar: $cAB = (cA)B = A(cB)$.
6. Traspuesta de prod.: $(AB)^{\mathsf{T}} = B^{\mathsf{T}}A^{\mathsf{T}}$.
7. **NO necesariamente** conmuta.

## Matrices Invertibles

*Observación.* Todo número real posee un inverso multiplicativo. Considere por ejemplo el número 20220421, existe el número $\frac{1}{20220421}$ que cumple que

$$20220421 \cdot \frac{1}{20220421} = 1.$$

En el caso de las matrices el 1 es la matriz identidad que mencionamos en las propiedades anteriores.

**Definición.** La matriz identidad es la matriz cuadrada cuya diagonal contiene sólo 1's.

**Ejemplo 4.** $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ es la matriz identidad de orden 2 mientras que $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ es la identidad de orden 3.

**Definición.** Diremos que una matriz $A$ es <u>invertible</u> si existe una matriz $B$ que cumple

$$AB = I = BA.$$

A esta matriz la denotamos como $A^{-1}$.

### Propiedades

Si $A$,$B$ son matrices de tamaño adecuado invertibles y $c$ es un escalar no nulo entonces:

1. Escalares: $(cA)^{-1} = \frac{1}{c} A^{-1}$.
2. Producto: $(AB)^{-1} = B^{-1} A^{-1}$.
3. Traspuestas: $(A^{\mathsf{T}})^{-1} = (A^{-1})^{\mathsf{T}}$.

**Ejercicio 5.** Si $A$ y $B$ son invertibles, ¿$A + B$ es invertible?

**Teorema 6** (Adendo al Tma. Resumen)**.** *Una matriz $A$ es invertible si y sólo si es equivalente por filas a la identidad.*

**Ejemplo 7.** Supongamos que $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ entonces la inversa de $A$ es

$$A^{-1} = \frac{1}{ad - bc} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}.$$

**Práctica**

Verifiquemos en conjunto que en efecto esas matrices son inversas. Luego encuentre las inversas de

$$A = \begin{pmatrix} 1 & a \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}.$$

## Encontrar Inversas: Reducción en Paralelo

Para el caso $[2 \times 2]$ es sencillo encontrar la inversa con la fórmula. Para matrices más grandes utilizamos el proceso de reducción por filas.

**Ejemplo 8.** Consideremos la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & -1 \\ 0 & 6 & 0 \\ 9 & 0 & -2 \end{pmatrix}.$$

Encontramos su inversa *reduciendo en paralelo*. Aumentamos la matriz, pero con una identidad a la izquierda y luego reducimos:

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 3 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 9 & 0 & -2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right).$$

Veremos que la matriz en cuestión es

$$A^{-1} = \frac{1}{6} \begin{pmatrix} -4 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 18 & 0 & 6 \end{pmatrix}.$$