Planos

Ecuación Normal

Vimos que una ecuación normal
$$\langle \vec{n} | \vec{x} - P \rangle = 0$$
representa una recta en 2D. ¿Pero qué pasa en 3D?

Ejemplo 1. Consideremos la ecuación
$$\begin{aligned} &\langle (1,1,1) | (x,y,z) - (1,2,3) \rangle = 0 \\ \iff &\langle (1,1,1) | (x-1, y-2, z-3) \rangle = 0 \\ \iff &x + y + z = 6. \end{aligned}$$
Esta ecuación describe un plano que interseca los ejes cartesianos en $(6,0,0)$,$(0,6,0)$ y $(0,0,6)$.

Definición. Un plano en $\mathbb{R}^3$ se describe con la ecuación normal
$$ax + by + cz = d.$$
El vector normal es ortogonal a todos los vectores afines que están en el plano y está dado por $\vec{n} = (a,b,c)$

Vectores Directores

Al igual que una recta está definida por *dos puntos*, un plano se define con *tres puntos*. Pero, ¿cómo encontramos el plano que contiene tres puntos distintos P,Q,R?

Los vectores afines $\overrightarrow{PQ}$ y $\overrightarrow{PR}$ son dos vectores afines dentro del plano. Podemos describir entonces el plano de *forma paramétrica*:
$$\vec{x} = s\overrightarrow{PQ} + t\overrightarrow{PR} + P.$$

Proposición 2. *El vector normal al plano $\pi = \{\vec{x} = s\overrightarrow{PQ} + t\overrightarrow{PR} + P\}$ es*
$$\vec{n} = \overrightarrow{PQ} \times \overrightarrow{PR}.$$

> **Práctica**
>
> Considere los puntos $A = (1,2,3)$, $B = (4,5,6)$ y $C = (7,8,9)$. Encuentre el plano que contiene a estos puntos.

Ejemplo 3. Consideremos la ecuación $2x - 3y = 6$, en 2D tiene la forma:
$$\begin{aligned} &\langle (2,-3) | (x,y) \rangle = 6 \\ \iff &\langle (2,-3) | (x-3, y) \rangle = 0 \\ \iff &\langle (2,-3) | (x, y+2) \rangle = 0. \end{aligned}$$
Es decir, tiene vector normal $(2,-3)$ y vector director $(3,2)$.

Para encontrar la forma vectorial despejamos una de las variables:
$$\begin{aligned} 2x - 3y = 6 &\iff y = 2x/3 - 2 \\ &\iff (x,y) = (x, 2x/3 - 2) = (1, 2/3)x + (0,-2). \end{aligned}$$
Parametrizamos tomando $x = t$ y así obtenemos las ecuaciones paramétricas:
$$\begin{cases} x = t \\ y = \dfrac{2}{3}t - 2 \end{cases}$$
En 3D la ecuación tiene z como variable libre, $(3,0,0)$ resuelve la ecuación, pero también lo hace $(3,0,2022)$. Vemos que la misma ecuación define un *plano* en 3D.

Esto ve con la inclusión de un parámetro más en la forma paramétrica del plano:
$$\begin{aligned} (x,y,z) &= \left(x, \frac{2}{3}x - 2, z\right) \\ &= \left(1, \frac{2}{3}, 0\right)x + (0,0,1)z + (0,-2,0). \end{aligned}$$
Los vectores directores del plano son los que acompañan a la x y a la z. El vector normal de este plano será:
$$\vec{n} = \left(1, \frac{2}{3}, 0\right) \times (0,0,1) = \det \begin{pmatrix} \hat{\imath} & \hat{\jmath} & \hat{k} \\ 1 & 2/3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2/3 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$
Finalmente observemos que este vector y el normal del plano son paralelos pues
$$3\vec{n} = (2,-3,0) \parallel (2,-3).$$

Intersecciones y Direcciones

Observación. Si tenemos dos conjuntos algebraicos (rectas o planos), su intersección está dada por los puntos que satisfagan las ecuaciones de ambos conjuntos.

Intuitivamente la intersección de dos planos *no paralelos* es una recta. Verifiquémoslo.

Ejemplo 4. Consideremos los planos
$$\begin{cases} \pi_1 = \{17x + 2y + 7z = 34\}, \\ \pi_2 = \{23x - 6y + 16z = 46\}. \end{cases}$$
Su intersección está dada por los puntos que satisfacen ambas ecuaciones al mismo tiempo. Es decir, por el conjunto solución del sistema:
$$\begin{cases} 17x + 2y + 7z = 34 \\ 23x - 6y + 16z = 46 \end{cases}$$
Extrayendo la matriz del sistema y reduciendo obtenemos:
$$\left(\begin{array}{ccc|c} 17 & 2 & 7 & 34 \\ 23 & -6 & 16 & 46 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1/2 & 2 \\ 0 & 1 & -3/4 & 0 \end{array}\right)$$
De aquí extraemos las ecuaciones
$$\begin{cases} x + z/2 = 2 \\ y - 3z/4 = 0 \end{cases}$$
Y por lo tanto la solución es
$$(x,y,z) = (-z/2 + 2, 3z/4, z) = (-1/2, 3/4, 1)z + (2,0,0).$$

Distancias