Explorando estadísticas de permutaciones: contando con q's

Ignacio Rojas [1]

Mayo, 2023

[1] Colorado State University

Permutaciones

Definición

Una permutación de un conjunto A es una biyección $\sigma : A \to A$.

Permutaciones

Definición

Una permutación de un conjunto A es una biyección $\sigma : A \to A$.

Estamos más familiarizados con permutaciones de $[n]$ donde

$$[n] = \{\, 1, 2, \ldots, n \,\}$$

Permutaciones

Definición

Una <u>permutación</u> de un conjunto A es una biyección $\sigma : A \to A$.

Estamos más familiarizados con permutaciones de $[n]$ donde

$$[n] = \{ 1, 2, \ldots, n \}$$

- Consideremos la permutación σ:

$$\sigma(1) = 3, \quad \sigma(2) = 5, \quad \sigma(3) = 4, \quad \sigma(4) = 1, \quad \sigma(5) = 2.$$

Esta notación es *poco conveniente*. . .

Notación

Escribamos σ de distintas formas:

Notación

Escribamos σ de distintas formas:

- Como un emparejamiento:

Notación

Escribamos σ de distintas formas:

- Como un emparejamiento:

- Como una matriz:

Notación

Escribamos σ de distintas formas:

- Como un emparejamiento:
- Como una matriz:
- Como una lista:

Notación

Escribamos σ de distintas formas:

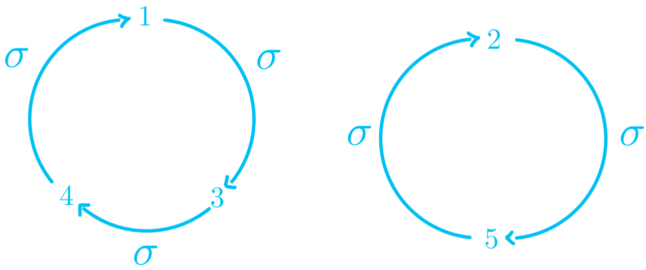
- Como un emparejamiento:
- Como una matriz:
- Como una lista:
- Como un gráfico:

Una forma más, por ciclos:

Tenemos $\sigma = 35412$:

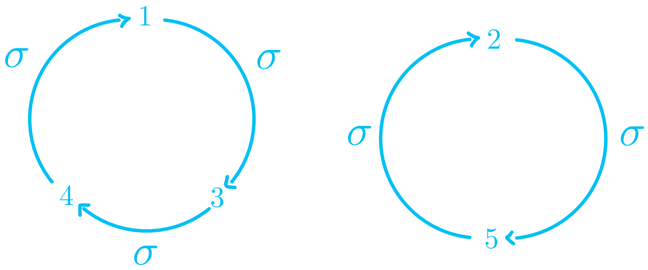
Una forma más, por ciclos:

Tenemos $\sigma = 35412$:



Una forma más, por ciclos:

Tenemos $\sigma = 35412$:



Entonces:

$$\sigma = 35412 = (134)(25).$$

Un breve ejercicio

Tome otra permutación de 5 elementos, distinta a $\sigma = 35412$ y escríbala como:

- Un emparejamiento.
- Una matriz.
- Una lista.

También:

- Dibuje el gráfico de su permutación.
- Descompóngala por ciclos.

El grupo simétrico

Definición

El conjunto de todas las permutaciones es

$$S_n = \{\, \sigma \text{ es una permutación de } [n] \,\}.$$

El grupo simétrico

Definición

El conjunto de todas las permutaciones es

$$S_n = \{\, \sigma \text{ es una permutación de } [n] \,\}.$$

Ejemplo

En S_2:

$$S_2 = \{\, 12, 21 \,\}.$$

El grupo simétrico

Definición

El conjunto de todas las permutaciones es

$$S_n = \{\, \sigma \text{ es una permutación de } [n] \,\}.$$

Ejemplo

En S_2:

$$S_2 = \{\, 12, 21 \,\}.$$

Ejemplo

En S_3:

$$S_3 = \{\, 123, 213, 132, 321, 231, 312 \,\}.$$

Estadísticas de permutaciones

Definición

Una estadística es una función:

$$f: \; S_n \to \mathbb{N}.$$

Estadísticas de permutaciones

Definición

Una estadística es una función:

$$f : \; S_n \to \mathbb{N}.$$

- El orden de una permutación es

$$\mathrm{ord}(\sigma) = \min\{\, n \in \mathbb{N} \mid \sigma^n = \mathrm{id} \,\}.$$

Estadísticas de permutaciones

Definición

Una estadística es una función:

$$f : S_n \to \mathbb{N}.$$

- El orden de una permutación es

$$\mathrm{ord}(\sigma) = \min\{\, n \in \mathbb{N} \mid \sigma^n = \mathrm{id} \,\}.$$

- El orden es una estadística: $\sigma \mapsto \mathrm{ord}(\sigma)$.

Estadísticas de permutaciones

Definición

Una estadística es una función:

$$f : S_n \to \mathbb{N}.$$

- El orden de una permutación es
$$\mathrm{ord}(\sigma) = \min\{\, n \in \mathbb{N} \mid \sigma^n = \mathrm{id} \,\}.$$
- El orden es una estadística: $\sigma \mapsto \mathrm{ord}(\sigma)$.
- Para $\sigma = 35412$, tenemos $\mathrm{ord}(\sigma) = 6$.

Estadísticas de permutaciones

Definición

Una estadística es una función:

$$f: \ S_n \to \mathbb{N}.$$

- El orden de una permutación es

$$\mathrm{ord}(\sigma) = \min\{\, n \in \mathbb{N} \mid \sigma^n = \mathrm{id} \,\}.$$

- El orden es una estadística: $\sigma \mapsto \mathrm{ord}(\sigma)$.
- Para $\sigma = 35412$, tenemos $\mathrm{ord}(\sigma) = 6$.
- De hecho

$$\mathrm{ord}(\sigma) = \underset{(*)}{\prod}(\text{Longitudes de sus ciclos}).$$

Inversiones

Definición

El <u>número de inversiones</u> de una permutación σ es la cantidad de parejas $(\sigma(i), \sigma(j))$ con

$$i < j, \quad \text{y} \quad \sigma(i) > \sigma(j).$$

Inversiones

Definición

El <u>número de inversiones</u> de una permutación σ es la cantidad de parejas $(\sigma(i), \sigma(j))$ con

$$i < j, \quad \text{y} \quad \sigma(i) > \sigma(j).$$

Para $\sigma = 35412$:

Inversiones

Definición

El <u>número de inversiones</u> de una permutación σ es la cantidad de parejas $(\sigma(i), \sigma(j))$ con

$$i < j, \quad \text{y} \quad \sigma(i) > \sigma(j).$$

Para $\sigma = 35412$:

Es decir, $\operatorname{inv}(\sigma)$ es una estadística.

Descensos

Definición

El número de descensos de una permutación σ es la cantidad de índices i con $\sigma(i) > \sigma(i+1)$.
El conjunto de descensos es $D(\sigma) = \{\, i \mid \sigma(i) > \sigma(i+1) \,\}$

Descensos

Definición

El <u>número de descensos</u> de una permutación σ es la cantidad de índices i con $\sigma(i) > \sigma(i+1)$.
El conjunto de descensos es $D(\sigma) = \{\, i \mid \sigma(i) > \sigma(i+1) \,\}$

Para $\sigma = 35412$:

Descensos

Definición

El <u>número de descensos</u> de una permutación σ es la cantidad de índices i con $\sigma(i) > \sigma(i+1)$.
El conjunto de descensos es $D(\sigma) = \{\, i \mid \sigma(i) > \sigma(i+1) \,\}$

Para $\sigma = 35412$:

Nuevamente, $\mathrm{des}(\sigma)$ es una estadística.

Índice Mayor

Definición

El índice mayor de una permutación σ es la suma de los índices i donde ocurren descensos.

Índice Mayor

Definición

El <u>índice mayor</u> de una permutación σ es la suma de los índices i donde ocurren descensos.

Formalmente:

$$\mathrm{maj}(\sigma) = \sum_{i \in D(\sigma)} i.$$

Índice Mayor

Definición

El índice mayor de una permutación σ es la suma de los índices i donde ocurren descensos.

Formalmente:

$$\mathrm{maj}(\sigma) = \sum_{i \in D(\sigma)} i.$$

Para $\sigma = 35412$:

Resumen y ejercicio

- Órden: Cuantas veces la compongo para que sea la identidad.
- Inversiones: Número de parejas en *orden opuesto*.
- Descensos: Número de inversiones *seguidas*.
- Índice Mayor: Suma de los índices donde hay descensos.

Resumen y ejercicio

- Órden: Cuantas veces la compongo para que sea la identidad.
- Inversiones: Número de parejas en *orden opuesto*.
- Descensos: Número de inversiones *seguidas*.
- Índice Mayor: Suma de los índices donde hay descensos.

Con su permutación del inicio, encuentre el valor de las estadísticas.

Ejemplo

Supongamos que tenemos 5 lápices, 2 botellas de agua y 3 cuadernos. Si al bulto echamos sólo uno de cada uno, ¿de cuántas maneras podemos acomodar el bulto?

Contando con q's

Ejemplo

Supongamos que tenemos 5 lápices, 2 botellas de agua y 3 cuadernos. Si al bulto echamos sólo uno de cada uno, ¿de cuántas maneras podemos acomodar el bulto?

Ejemplo

Ahora dos lapices pesan 2 gramos, otros dos pesan 3 y uno 4. Los cuadernos pesan 10 y 12. Las botellas pesan 12, 12 y 13.
De las 30 maneras, cuantos arreglos van a pesar 25 gramos en total?

Definición

Para un conjunto X con una estadística $s : X \to \mathbb{N}$, un <u>q-análogo</u> de $|X|$ es

$$|X|_q = \sum_{x \in X} q^{s(x)}.$$

Definición

Para un conjunto X con una estadística $s : X \to \mathbb{N}$, un <u>q-análogo</u> de $|X|$ es

$$|X|_q = \sum_{x \in X} q^{s(x)}.$$

Volviendo al ejemplo pasado...

$$L = 2q^2 + 2q^3 + q^4, \ C = q^{10} + q^{12}, \ B = 2q^{12} + q^{13}.$$

Definición

Para un conjunto X con una estadística $s : X \to \mathbb{N}$, un q-análogo de $|X|$ es
$$|X|_q = \sum_{x \in X} q^{s(x)}.$$

Volviendo al ejemplo pasado...

$$L = 2q^2 + 2q^3 + q^4, \; C = q^{10} + q^{12}, \; B = 2q^{12} + q^{13}.$$

Entonces

$$L \cdot C \cdot B = q^{29} + 4q^{28} + 7q^{27} + 8q^{26} + 6q^{25} + 4q^{24}.$$

q-análogos para S_3

		ord	inv	des	maj
()	123				
(12)	213				
(23)	132				
(13)	321				
(123)	231				
(132)	312				

		ord	inv	des	maj
()	123				
(12)	213				
(23)	132				
(13)	321				
(123)	231				
(132)	312				

De aquí que

- $\sum_{\sigma \in S_3} q^{\mathrm{ord}(\sigma)} =$
- $\sum_{\sigma \in S_3} q^{\mathrm{inv}(\sigma)} =$
- $\sum_{\sigma \in S_3} q^{\mathrm{des}(\sigma)} =$
- $\sum_{\sigma \in S_3} q^{\mathrm{maj}(\sigma)} =$

El factorial cuántico

Observemos que el resultado

$$\sum_{\sigma \in S_3} q^{\mathrm{maj}(\sigma)} = \sum_{\sigma \in S_3} q^{\mathrm{inv}(\sigma)}$$

se extiende a un hecho general:

El factorial cuántico

Observemos que el resultado

$$\sum_{\sigma\in S_3} q^{\mathrm{maj}(\sigma)} = \sum_{\sigma\in S_3} q^{\mathrm{inv}(\sigma)}$$

se extiende a un hecho general:

Teorema

Vale para todo n que

$$\sum_{\sigma\in S_n} q^{maj(\sigma)} = \sum_{\sigma\in S_n} q^{inv(\sigma)}$$

y a esta cantidad le llamamos el <u>factorial cuántico</u> $(n!)_q$.

El factorial cuántico

Definición

El análogo cuántico de n es

$$(n)_q = (1 + q + q^2 + \cdots + q^{n-1}) = \frac{q^n - 1}{q - 1}$$

El factorial cuántico

Definición

El análogo cuántico de n es

$$(n)_q = (1 + q + q^2 + \cdots + q^{n-1}) = \frac{q^n - 1}{q - 1}$$

Teorema

El factorial cuántico satisface la siguiente recurrencia:

$$(n!)_q = (n)_q((n-1)!)_q.$$

El factorial cuántico

Definición

El análogo cuántico de n es

$$(n)_q = (1 + q + q^2 + \cdots + q^{n-1}) = \frac{q^n - 1}{q - 1}$$

Teorema

El factorial cuántico satisface la siguiente recurrencia:

$$(n!)_q = (n)_q((n-1)!)_q.$$

Podemos extender mucho más y hablar del coeficiente binomial cuántico:

$$\binom{n}{k}_q = \frac{(n!)_q}{((n-k)!)_q(k!)_q}.$$

¿Qué cuentan estos números?

Algunos objetos enumerados por números cuánticos:

- Número de inversiones en S_n.

¿Qué cuentan estos números?

Algunos objetos enumerados por números cuánticos:

- Número de inversiones en S_n.
- En el plano proyectivo sobre $\mathbb{F}_q$ con $q = p^k$ tenemos

$$|\mathbb{P}^n_{\mathbb{F}_q}| = (n+1)_q.$$

¿Qué cuentan estos números?

Algunos objetos enumerados por números cuánticos:

- Número de inversiones en S_n.
- En el plano proyectivo sobre $\mathbb{F}_q$ con $q = p^k$ tenemos

$$|\mathbb{P}^n_{\mathbb{F}_q}| = (n+1)_q.$$

- El número de subespacios k dimensionales de $\mathbb{F}_q^n$ es $\binom{n}{k}_q$.

¿Qué cuentan estos números?

Algunos objetos enumerados por números cuánticos:

- Número de inversiones en S_n.
- En el plano proyectivo sobre $\mathbb{F}_q$ con $q = p^k$ tenemos

$$|\mathbb{P}^n_{\mathbb{F}_q}| = (n+1)_q.$$

- El número de subespacios k dimensionales de $\mathbb{F}_q^n$ es $\binom{n}{k}_q$.

¿Qué cuentan estos números?

Algunos objetos enumerados por números cuánticos:

- Número de inversiones en S_n.
- En el plano proyectivo sobre $\mathbb{F}_q$ con $q = p^k$ tenemos

$$|\mathbb{P}^n_{\mathbb{F}_q}| = (n+1)_q.$$

- El número de subespacios k dimensionales de $\mathbb{F}_q^n$ es $\binom{n}{k}_q$.

Y otros resultados interesantes como:

¿Qué cuentan estos números?

Algunos objetos enumerados por números cuánticos:

- Número de inversiones en S_n.
- En el plano proyectivo sobre $\mathbb{F}_q$ con $q = p^k$ tenemos

$$|\mathbb{P}^n_{\mathbb{F}_q}| = (n+1)_q.$$

- El número de subespacios k dimensionales de $\mathbb{F}_q^n$ es $\binom{n}{k}_q$.

Y otros resultados interesantes como:

- El teorema binomial cuántico, si $xy = qyx$ entonces

$$(x+y)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}_q x^k y^{n-k}.$$

¿Qué cuentan estos números?

Algunos objetos enumerados por números cuánticos:

- Número de inversiones en S_n.
- En el plano proyectivo sobre $\mathbb{F}_q$ con $q = p^k$ tenemos

$$|\mathbb{P}^n_{\mathbb{F}_q}| = (n+1)_q.$$

- El número de subespacios k dimensionales de $\mathbb{F}_q^n$ es $\binom{n}{k}_q$.

Y otros resultados interesantes como:

- El teorema binomial cuántico, si $xy = qyx$ entonces

$$(x+y)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}_q x^k y^{n-k}.$$

- La recurrencia cuántica de Pascal:

$$\binom{n}{k}_q = \binom{n-1}{k-1}_q + q^k \binom{n-1}{k}_q.$$

Otra, otra, otra...

Veamos una estadística más:

Definición

La carga de una permutación σ se define de la siguiente manera:

- Escriba un subíndice de 0 bajo cada entrada de σ.
- Para cada entrada $i > 2$ aumente en 1 su subíndice si i está a la derecha de $i - 1$. Y sino, déjelo igual.

Sume todos los subíndices al final, eso es $c(\sigma)$.

Otra, otra, otra...

Veamos una estadística más:

Definición

La carga de una permutación σ se define de la siguiente manera:

- Escriba un subíndice de 0 bajo cada entrada de σ.
- Para cada entrada $i > 2$ aumente en 1 su subíndice si i está a la derecha de $i - 1$. Y sino, déjelo igual.

Sume todos los subíndices al final, eso es $c(\sigma)$.

En el caso de $\sigma = 35412$ tenemos:

Otra, otra, otra...

Veamos una estadística más:

Definición

La carga de una permutación σ se define de la siguiente manera:

- Escriba un subíndice de 0 bajo cada entrada de σ.
- Para cada entrada $i > 2$ aumente en 1 su subíndice si i está a la derecha de $i - 1$. Y sino, déjelo igual.

Sume todos los subíndices al final, eso es $c(\sigma)$.

En el caso de $\sigma = 35412$ tenemos:

En general $\sum q^{c(g)} = (n!)_q$.