Síntesis y Resumen sobre T.L.'s

I) Toda T.L. corresponde con una matriz y toda matriz corresponde con una T.L. Para pasar entre una y otra:
   - Si tenemos el criterio, $[T]_\mathcal{C}$ tiene como columnas a $T\hat{\imath}$, $T\hat{\jmath}$ y $T\hat{k}$. En general, las cols. son las imágenes de la base.
   - Si tenemos la matriz $[T]_\mathcal{C}$, entonces multiplicamos por el vector de variables: (x,y), (x,y,z) ó en general $(x_1,x_2,...,x_n)$.

II) La composición de T.L.'s corresponde con el producto de matrices. Si S y T son T.L.'s entonces $(S\circ T)(\vec{x}) = S(T(\vec{x}))$ y $[S\circ T]_\mathcal{C} = [S]_\mathcal{C}[T]_\mathcal{C}$. Al igual que el producto de matrices, la composición no necesariamente conmuta.

III) Hay rectas (o más generalmente, subespacios) que permanecen *invariantes* al aplicar una T.L., esos vectores directores son los autovectores de T.

Por ejemplo para los reescalamientos $\hat{\imath}$, $\hat{\jmath}$ son los autovectores.

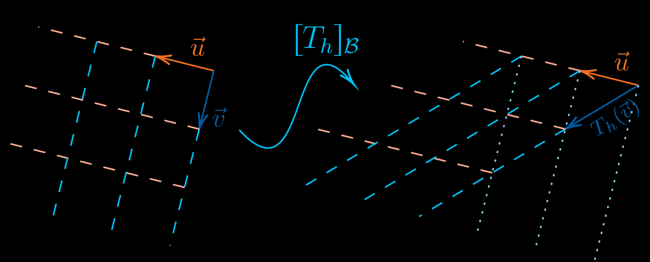
IV) Hay rectas (o subespacios) que *colapsan* cuando se les aplica una T.L. tales vectores forman el *núcleo o kernel* de la matriz. Las T.L.'s que no colapsan algo se llaman no-singulares.

En el caso de las proyecciones, el núcleo es el eje ortogonal al eje sobre el que se proyecta.

V) El determinante de una T.L. es el factor por el que reescala un área. Las T.L.'s con determinante 1 preservan áreas.

Cambios de Base y Dimensiones Distintas

Supongamos que tenemos una base $\mathcal{B} = \{\vec{u},\vec{v}\}$ y aplicamos un cizallamiento en ese marco de referencia.



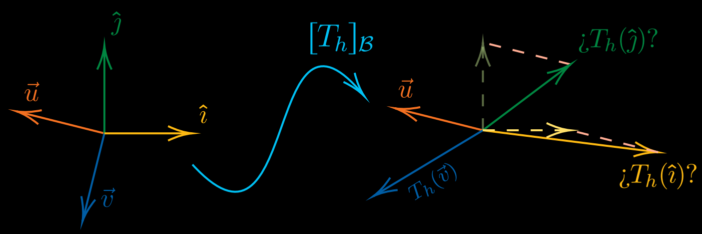
Consideremos el cizallamiento horizontal dado por:

$$[T_h]_\mathcal{B} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Es importante notar que el subíndice $\mathcal{B}$ nos indica sobre qué base está actuando T_h. Es decir:

- La primera columna es $T_h(\vec{u}) = 1\cdot\vec{u} + 0\cdot\vec{v} = \vec{u}$.
- La segunda es $T_h(\vec{v}) = 1\cdot\vec{u} + 1\cdot\vec{v} = \vec{u}+\vec{v}$.

T_h es un cizallamiento sobre $\mathcal{B}$ pues deja invariante al eje $\vec{u}$ (y su representación es una *matriz triangular con diagonal de 1's*). Sin embargo no sabemos cómo actúa esta transformación sobre $\mathcal{C} = \{\hat{\imath},\hat{\jmath}\}$. ¿Qué son $T_h(\hat{\imath})$ y $T_h(\hat{\jmath})$?



¡Podemos resolver por medio de cambios de base!

Ejemplo 1. Si $\mathcal{B}$ es $\{(-1,1/4),(-1/4,-1)\}$ y T_h es una T.L. dada por $[T_h]_\mathcal{B} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, entonces T_h actúa sobre vectores *escritos en coordenadas de* $\mathcal{B}$.

Para encontrar $T_h(\hat{\imath}), T_h(\hat{\jmath})$ traducimos $\hat{\imath}, \hat{\jmath}$ a $\mathcal{B}$, aplicamos T_h en $\mathcal{B}$ y traducimos de vuelta:

- Primero encontramos la matriz de cambio de base tomando los vectores de $\mathcal{B}$ como columnas:
$$MCB = [\mathrm{id}]_\mathcal{C}^\mathcal{B} = \begin{pmatrix} -1 & -1/4 \\ 1/4 & -1 \end{pmatrix}.$$
- Esta anterior es la que va de $\mathcal{B}$ en $\mathcal{C}$, entonces invertimos para obtener la que va de $\mathcal{C}$ en $\mathcal{B}$:
$$MCB^{-1} = [\mathrm{id}]_\mathcal{B}^\mathcal{C} = \begin{pmatrix} -16/17 & 4/17 \\ -4/17 & -16/17 \end{pmatrix}.$$
- Traducimos $\hat{\imath},\hat{\jmath}$ a $[\hat{\imath}]_\mathcal{B},[\hat{\jmath}]_\mathcal{B}$:
$$\begin{cases} [\hat{\imath}]_\mathcal{B} = [\mathrm{id}]_\mathcal{B}^\mathcal{C}(1,0) = (-16/17,-4/17), \\ [\hat{\jmath}]_\mathcal{B} = [\mathrm{id}]_\mathcal{B}^\mathcal{C}(0,1) = (4/17,-16/17). \end{cases}$$
- Ya podemos aplicarle a estos vectores $[T_h]_\mathcal{B}$:
$$\begin{cases} [T_h\hat{\imath}]_\mathcal{B} = [T_h]_\mathcal{B}[\hat{\imath}]_\mathcal{B} = (-20/17,-4/17), \\ [T_h\hat{\jmath}]_\mathcal{B} = [T_h]_\mathcal{B}[\hat{\jmath}]_\mathcal{B} = (-12/17,-16/17). \end{cases}$$
- Los vectores que obtuvimos están escritos en términos de $\mathcal{B}$, entonces traducimos de vuelta:
$$\begin{cases} [T_h\hat{\imath}]_\mathcal{C} = [\mathrm{id}]_\mathcal{C}^\mathcal{B}[T_h\hat{\imath}]_\mathcal{B} = (21/17,-1/17), \\ [T_h\hat{\jmath}]_\mathcal{C} = [\mathrm{id}]_\mathcal{C}^\mathcal{B}[T_h\hat{\jmath}]_\mathcal{B} = (16/17,13/17), \end{cases}$$

Estos últimos vectores son las imágenes de $\hat{\imath}$ y $\hat{\jmath}$ bajo T_h, entonces podemos formar la matriz T_h en base canónica:

$$[T_h]_\mathcal{C} = \frac{1}{17}\begin{pmatrix} 21 & 16 \\ -1 & 13 \end{pmatrix}.$$

Observación. La matriz que hemos obtenido no es un cizallamiento, ni ninguno de los otros 4 tipos de T.L.'s que vimos. Pero es un cizallamiento en la base $\mathcal{B}$.

A propósito aprovechamos para consolidar la notación formal para matrices de cambio de base. $[\mathrm{id}]_{\mathcal{B}_2}^{\mathcal{B}_1}$ significa la matriz de cambio de base desde $\mathcal{B}_1$ hacia $\mathcal{B}_2$.

Proceso General

El proceso no es más que una multiplicación de matrices en ambos lados. Resumamos lo que hicimos:

I) Pasamos los vectores canónicos de $\mathcal{C}$ a $\mathcal{B}$ con $[\mathrm{id}]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{C}}$.
II) Multiplicamos $[T_h]_{\mathcal{B}}$ a los vectores traducidos.
III) Devolvemos a $\mathcal{C}$ el resultado con $[\mathrm{id}]_{\mathcal{C}}^{\mathcal{B}}$.

Esto nos dice entonces que la operación completa es:
$$[T_h]_{\mathcal{C}}=[\mathrm{id}]_{\mathcal{C}}^{\mathcal{B}}[T_h]_{\mathcal{B}}[\mathrm{id}]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{C}}.$$
Entonces en general si tenemos una T.L. S dada en términos de una base $\mathcal{B}_1$, $[S]_{\mathcal{B}_1}$ y queremos traducirla a una base $\mathcal{B}_2$, entonces multiplicamos de la siguiente forma:
$$[S]_{\mathcal{B}_2}=[\mathrm{id}]_{\mathcal{B}_2}^{\mathcal{B}_1}[S]_{\mathcal{B}_1}[\mathrm{id}]_{\mathcal{B}_1}^{\mathcal{B}_2}.$$
Pero, no siempre vamos a tener T.L.'s de una misma base en si misma, o de la misma dimensión tanto para la entrada como para la salida.

Ejemplo 2. Consideremos $T:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^2$ dada por
$$T(x,y,z)=(x+y,3x-z)$$
y las bases
$$\begin{cases}\mathcal{B}_1=\{(1,1,2),(-3,0,1),(2,4,3)\},\\ \mathcal{B}_2=\{(4,1),(3,1)\}.\end{cases}$$
Queremos encontrar $[T]_{\mathcal{B}_2}^{\mathcal{B}_1}$.

Primero llamamos $\mathcal{C}_1$ y $\mathcal{C}_2$ a las bases canónicas de $\mathbb{R}^3$ y $\mathbb{R}^2$ respectivamente. Entonces encontramos las imágenes de $\mathcal{C}_1$ bajo T:
$$\begin{cases}T\hat{\imath}=(1+0,3\cdot1-0)=(1,3),\\ T\hat{\jmath}=(0+1,3\cdot0-0)=(1,0),\\ T\hat{\jmath}=(0+0,3\cdot0-1)=(0,-1).\end{cases}$$
Esto nos dice que $[T]_{\mathcal{C}_2}^{\mathcal{C}_1}=\begin{pmatrix}1&1&0\\3&0&-1\end{pmatrix}$. Seguidamente, queremos que vaya desde $\mathcal{B}_1$ a $\mathcal{B}_2$, para eso seguimos el siguiente camino:
$$\mathbb{R}^3(\mathcal{B}_1)\xrightarrow{[\mathrm{id}]_{\mathcal{C}_1}^{\mathcal{B}_1}}\mathbb{R}^3(\mathcal{C}_1)\xrightarrow{[T]_{\mathcal{C}_2}^{\mathcal{C}_1}}\mathbb{R}^2(\mathcal{C}_2)\xrightarrow{[\mathrm{id}]_{\mathcal{B}_2}^{\mathcal{C}_2}}\mathbb{R}^2(\mathcal{B}_2).$$
Podemos encontrar las matrices de cambio de base tomando los vectores de las bases como columnas:
$$[\mathrm{id}]_{\mathcal{C}_1}^{\mathcal{B}_1}=\begin{pmatrix}1&-3&2\\1&0&4\\2&1&3\end{pmatrix},\ [\mathrm{id}]_{\mathcal{C}_2}^{\mathcal{B}_2}=\begin{pmatrix}4&3\\1&1\end{pmatrix}.$$
Invertimos $[\mathrm{id}]_{\mathcal{C}_2}^{\mathcal{B}_2}$ para obtener $[\mathrm{id}]_{\mathcal{B}_2}^{\mathcal{C}_2}=\begin{pmatrix}1&-3\\-1&4\end{pmatrix}$. Así multiplicamos para obtener:
$$[T]_{\mathcal{B}_2}^{\mathcal{B}_1}=[\mathrm{id}]_{\mathcal{B}_2}^{\mathcal{C}_2}[T]_{\mathcal{C}_2}^{\mathcal{C}_1}[\mathrm{id}]_{\mathcal{C}_1}^{\mathcal{B}_1}=\begin{pmatrix}-1&27&-3\\2&-37&6\end{pmatrix}.$$

Ejemplo 3. Supongamos que $T:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^2$ cumple que
$$\begin{cases}T(6,3,-2)=(a,1),\\ T(3,-2,6)=(2a,b),\\ T(-2,6,3)=(3a,2b).\end{cases}$$
Donde $a,b\in\mathbb{Z}$. Si $\vec{x}=(49,49,49)$, buscamos $T(\vec{x})$.

- Para este efecto notamos que el conjunto $\mathcal{B}=\{\vec{u},\vec{v},\vec{w}\}$, donde estos son los vectores anteriores, es una base de $\mathbb{R}^3$.
- Como no tenemos indicación expresa sobre los vectores en $\mathbb{R}^2$, asumimos que están escritos en coordenadas canónicas.
- Esto significa que
$$[T]_{\mathcal{C}_2}^{\mathcal{B}}=\begin{pmatrix}a&2a&3a\\1&b&2b\end{pmatrix}.$$
- Por lo tanto debemos traducir esta matriz para que tome vectores desde $\mathcal{C}_1$, la base canónica de $\mathbb{R}^3$. La matriz $[\mathrm{id}]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{C}_1}$ es la inversa de
$$[\mathrm{id}]_{\mathcal{C}_1}^{\mathcal{B}}=\begin{pmatrix}6&3&-2\\3&-2&6\\-2&6&3\end{pmatrix}.$$
Es este caso resulta que
$$[\mathrm{id}]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{C}_1}=([\mathrm{id}]_{\mathcal{C}_1}^{\mathcal{B}})^{-1}=\frac{1}{49}\begin{pmatrix}6&3&-2\\3&-2&6\\-2&6&3\end{pmatrix}.$$
- Traducimos $\vec{x}$ a $\mathcal{B}$ por medio de esta matriz:
$$(49,49,49)\xrightarrow{[\mathrm{id}]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{C}_1}}(7,7,7).$$
- Como ya lo tenemos escrito en coordenadas de $\mathcal{B}$, podemos aplicar $[T]_{\mathcal{C}_2}^{\mathcal{B}}$ para obtener
$$\begin{pmatrix}a&2a&3a\\1&b&2b\end{pmatrix}\begin{pmatrix}7\\7\\7\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}42a\\7(3b+1)\end{pmatrix}.$$

Práctica

Considere la T.L. $T:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2$ dada por
$$T(a,b)=(a+2b,3a-b)$$
y las bases $\mathcal{B}_1=\{(1,1),(1,0)\}$ y $\mathcal{B}_2=\{(4,7),(4,8)\}$.

I) Encuentre $[T]_{\mathcal{B}_1}$ y $[T]_{\mathcal{B}_2}$.
II) Encuentre una matriz invertible P tal que $[T]_{\mathcal{B}_2}=P^{-1}[T]_{\mathcal{B}_1}P$.