Capítulo 1

Variedades

1.1. Variedades Afines

Definición 1.1.1. El espacio afín $\mathbb{A}^n(k)$ sobre k, un cuerpo algebraicamente cerrado es el conjunto de todas las n-tuplas de elementos de k.

Los elementos del espacio afín son puntos x que se representan con coordenadas $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n)$. No debemos confundir el punto con sus coordenadas.

Definición 1.1.2. Un subconjunto $Y \subseteq \mathbb{A}^n(k)$ se dice ser un conjunto algebraico si existe un subconjunto $T \subseteq k[\mathbf{x}]$ tal que

$$Y = V(T) := \{\, \mathbf{a} \in \mathbb{A}^n(k) : \ \forall p \in T(p(\mathbf{a}) = 0) \,\}.$$

Proposición 1.1.3. *Supongamos que $M, N \subseteq \mathbb{A}^n(k)$, vale lo siguiente*:

(*a*) *Si $M \subseteq N$, entonces $V(N) \subseteq V(M)$.*

(*b*) *Si $\mathfrak{i} = \operatorname{gen}(M)$, entonces $V(\mathfrak{i}) = V(M)$.*

(*c*) *La unión de finita de variedades es una variedad. Más específicamente*

$$V(M) \cup V(N) = V(M \cap N) = V(M \cdot N).$$

(*d*) *La intersección de variedades es variedad. Específicamente vale*:

$$\bigcap_{i \in I} V(M_i) = V\left(\bigcup_{i \in I} M_i\right).$$

(*e*) *El vacío y el espacio afín son variedades.*

Prueba

(a) Si $\mathbf{x} \in V(N)$, entonces $\mathbf{x}$ anula a cualquier polinomio de N. En particular, anula a cualquier polinomio de M. Es decir $\mathbf{x} \in V(M)$.

(b) Como $M \subseteq \mathfrak{i}$, entonces $V(\mathfrak{i}) \subseteq V(M)$. Por otro lado, si $\mathbf{a} \in V(M)$ entonces $\mathbf{a}$ anula a cualquier polinomio de M. Como M genera a $\mathfrak{i}$, entonces todo elemento $g \in \mathfrak{i}$ es de la forma

$$g = \sum_{f \in M} hf \Rightarrow g(\mathbf{a}) = \sum_{f \in M} h(\mathbf{a})f(\mathbf{a}) = 0.$$

Por lo tanto tenemos la otra inclusión.

(c) Como $M \cdot N \subseteq M \cap N \subseteq M, N$ entonces valen las inclusiones de izquierda a derecha.

Si $\mathbf{a} \in V(M \cdot N)$ pero $\mathbf{a} \notin V(M)$ entonces para algún $f \in M$ vale que $f(\mathbf{a}) \neq 0$. Sin embargo para $g \in N$ vale $(f \cdot g)(\mathbf{a}) = 0$. Como g es arbitrario, entonces $\mathbf{a} \in V(N)$. Así concluimos la igualdad.

(d) Como $M_i \subseteq \bigcup_{i \in I} M_i$ para todo i, entonces vale la inclusión $\supseteq$.

Mientras tanto si $\mathbf{a} \in \bigcap_{i \in I} V(M_i)$, entonces

$$\forall i \in I \, (\mathbf{a} \in V(M_i)) \Rightarrow \forall i \in I \forall f \in M_i (f(\mathbf{a}) = 0).$$

Es decir, $\mathbf{a}$ anula a cualquier polinomio dentro de cualquier M_i. Entonces $\mathbf{a}$ anula a cualquier polinomio en $\bigcup_{i \in I} M_i$. Esta justificación no me gusta.

(e) Finalmente vale que $V(\{ 0 \}) = \mathbb{A}^n(k)$ y $V(k[\mathbf{x}]) = \varnothing$.

Definición 1.1.4. La topología de Zariski se define tomando como cerrados a las variedades. Los abiertos son los complementos de las variedades. De acuerdo con la proposición anterior, esta colección forma una topología.

Ejemplo 1.1.5. Topología de Zariski en dimensión 1 Recordemos que en $k[x]$ todo ideal es principal. Entonces vale para cualquier variedad:

$$V(M) = V(\mathrm{gen}(M)) = V(p),$$

donde p es el único generador del ideal en cuestión. Es decir, cualquier variedad es el conjunto de ceros de un único polinomio. A su vez

$$p(x) = c(x - a_1)\cdots(x - a_n),\ c, a_j \in k \Rightarrow V(p) = \{\, a_j \,\}_{j=1}^{n}.$$

Así cualquier variedad en $\mathbb{A}^1(k)$ es un conjunto finito.

Esto nos dice que la topología de Zariski en dimensión 1 corresponde con la topología cofinita que de hecho no es de Hausdorff.

Para hablar de ejemplos en dimensión superior precisamos otros conceptos topológicos.

Definición 1.1.6. Un espacio topológico no vacío es <u>irreducible</u> si no puede ser expresado como la unión de dos subconjuntos cerrados propios. Un subconjunto es irreducible si visto con la topología inducida es irreducible.

Viendo la definición extraemos lo siguiente:

- ⋄ El conjunto vacío *no* es irreducible.
- ⋄ Si $Y \subseteq X$ es no vacío, entonces es irreducible si no es posible escribir $Y = F_1 \cup F_2$ con $F_1, F_2 \subset Y$ cerrados en Y.

Ejemplo 1.1.7. A manera de ejemplo, $\mathbb{A}^1(k)$ es irreducible. Todo cerrado de $\mathbb{A}^1(k)$ es un conjunto finito.

Si quisiéramos que $\mathbb{A}^1(k) = F_1 \cup F_2$, precisamos que alguno de estos conjuntos sea infinito. Pero esto no es posible, pues todos los cerrados son finitos.

A esta definición un poco nueva le agregamos algunas equivalencias que aún no conocíamos.

Proposición 1.1.8. *Si X es un espacio topológico no vacío entonces lo siguiente es equivalente*:

(*a*) *X es irreducible.*

(*b*) *Cualesquiera dos abiertos no vacíos de X tienen intersección no vacía.*

(*c*) *Cualquier abierto no vacío de X es denso, conexo e irreducible.*

Prueba

Las primeras dos condiciones son equivalentes pues

$$X = F_1 \cup F_2 \iff \varnothing = G_1 \cap G_2.$$

Si no existen los cerrados F_1, F_2 que satisfacen la primera igualdad, entonces cualesquiera abiertos G_1, G_2 satisfacen la segunda igualdad.
Inmediatamente cualquier abierto es denso pues todos los abiertos se tocan.
Para conexidad supongamos que dos abiertos sí tienen intersección vacía, por lo que su unión es un abierto disconexo.

TODO: finish esta prueba y agregar archivo .bib