

Capítulo 1

Variedades

1.1. Variedades Afines

Definición 1.1.1. El espacio afín $\mathbb{A}^n(k)$ sobre k , un cuerpo algebraicamente cerrado es el conjunto de todas las n -tuplas de elementos de k .

Los elementos del espacio afín son puntos x que se representan con coordenadas $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n)$. No debemos confundir el punto con sus coordenadas.

Definición 1.1.2. Un subconjunto $Y \subseteq \mathbb{A}^n(k)$ se dice ser un conjunto algebraico (también llamado variedad afín) si existe un subconjunto $T \subseteq k[\mathbf{x}]$ tal que

$$Y = V(T) := \{ \mathbf{a} \in \mathbb{A}^n(k) : \forall p \in T (p(\mathbf{a}) = 0) \}.$$

Proposición 1.1.3. Supongamos que $M, N \subseteq \mathbb{A}^n(k)$, vale lo siguiente:

- (a) Si $M \subseteq N$, entonces $V(N) \subseteq V(M)$.
- (b) Si $\mathfrak{i} = \text{gen}(M)$, entonces $V(\mathfrak{i}) = V(M)$.
- (c) La unión de finita de variedades es una variedad. Más específicamente

$$V(M) \cup V(N) = V(M \cap N) = V(M \cdot N).$$

- (d) La intersección de variedades es variedad. Específicamente vale:

$$\bigcap_{i \in I} V(M_i) = V \left(\bigcup_{i \in I} M_i \right).$$

- (e) El vacío y el espacio afín son variedades.

Prueba

- (a) Si $x \in V(N)$, entonces x anula a cualquier polinomio de N . En particular, anula a cualquier polinomio de M . Es decir $x \in V(M)$.
- (b) Como $M \subseteq i$, entonces $V(i) \subseteq V(M)$. Por otro lado, si $a \in V(M)$ entonces a anula a cualquier polinomio de M . Como M genera a i , entonces todo elemento $g \in i$ es de la forma

$$g = \sum_{f \in M} hf \Rightarrow g(a) = \sum_{f \in M} h(a)f(a) = 0.$$

Por lo tanto tenemos la otra inclusión.

- (c) Como $M \cdot N \subseteq M \cap N \subseteq M, N$ entonces valen las inclusiones de izquierda a derecha.

Si $a \in V(M \cdot N)$ pero $a \notin V(M)$ entonces para algún $f \in M$ vale que $f(a) \neq 0$. Sin embargo para $g \in N$ vale $(f \cdot g)(a) = 0$. Como g es arbitrario, entonces $a \in V(N)$. Así concluimos la igualdad.

- (d) Como $M_i \subseteq \bigcup_{i \in I} M_i$ para todo i , entonces vale la inclusión \supseteq .

Mientras tanto si $a \in \bigcap_{i \in I} V(M_i)$, entonces

$$\forall i \in I (a \in V(M_i)) \Rightarrow \forall i \in I \forall f \in M_i (f(a) = 0).$$

Es decir, a anula a cualquier polinomio dentro de cualquier M_i . Entonces a anula a cualquier polinomio en $\bigcup_{i \in I} M_i$. Esta justificación no me gusta.

- (e) Finalmente vale que $V(\{0\}) = \mathbb{A}^n(k)$ y $V(k[x]) = \emptyset$.

Definición 1.1.4. La topología de Zariski se define tomando como cerrados a las variedades. Los abiertos son los complementos de las variedades. De acuerdo con la proposición anterior, esta colección forma una topología.