Espacios Vectoriales

Recordemos las propiedades de la suma y producto escalar:

Props. Suma

I) $\vec{x}+\vec{y}=\vec{y}+\vec{x}$.
II) $(\vec{x}+\vec{y})+\vec{z}=\vec{x}+(\vec{y}+\vec{z})$.
III) $\vec{x}+0=\vec{x}$.
IV) $\vec{x}+(-\vec{x})=0$.

Props. Mult.

I) $1\vec{x}=\vec{x}$.
II) $(cd)\vec{x}=c(d\vec{x})$.
III) $c(\vec{x}+\vec{y})=c\vec{x}+c\vec{y}$.
IV) $(c+d)\vec{x}=c\vec{x}+d\vec{x}$.

Al considerar $\mathbb{R}^n$ con "+" y "$\cdot$", entonces valen estas propiedades para la suma y producto. Como $\mathbb{R}^n$ satisface estas propiedades entonces podemos decir que es un espacio vectorial.

Definición. Un espacio vectorial (**e.v.**) es un conjunto V con 2 operaciones "+" y "$\cdot$" (**suma vectorial y producto escalar**) que obedecen las propiedades anteriores.

En ese caso un vector es un elemento de un espacio vectorial.

Ejemplo 1. $\mathbb{R}$ es un espacio vectorial.

- Suma vectorial: Suma usual de números reales.
- Producto escalar: Multiplicación usual.

Claramente estas operaciones satisfacen las propiedades.

Ejemplo 2. El conjunto $\{2n+1\colon\ n\in\mathbb{N}\}$ de los enteros impares **no forma un espacio vectorial** con la suma y producto usual. $3+5=8$ y 8 no es impar. Además 0 no es impar.

Ejemplo 3. $\mathcal{M}_{m\times n}$ es un espacio vectorial.

- Suma vectorial: Suma de matrices.
- Producto escalar: Multiplicación de una matriz por un escalar.

Ejemplo 4. Las funciones continuas sobre $\mathbb{R}$, $\mathcal{C}(\mathbb{R})$, forman un espacio vectorial.

- Suma vectorial: $(f+g)(x)=f(x)+g(x)$.
- Producto escalar: $(cf)(x)=c\cdot f(x)$.

Observación. Nuestros vectores originales eran *arreglos de datos*, como $(a,b,c)\in\mathbb{R}^3$. Veamos los arreglos en estos ejemplos.

- En $\mathbb{R}$ el tamaño del arreglo es **1**, cada número es un vector.
- En $\mathbb{R}^n$ los arreglos son $(x_1,x_2,\ldots,x_n)$, es decir, tienen **tamaño n**.
- Las m filas de longitud n de una matriz $[m\times n]$ se pueden acomodar en un arreglo enorme de **tamaño mn**.
- En el caso de una función continua...
  ¿Cómo armamos un arreglo? ¿Cómo vemos e^x o $x^3+2\sin(5x)$ como un arreglo?

A este *tamaño* le llamaremos dimensión. Precisaremos la definición más adelante. Denotamos $\dim(V)$.

Observación. Esto quiere decir que $\mathbb{R},\mathbb{R}^n$ y $\mathcal{M}_{m\times n}$ tienen dimensión finita. Respectivamente $1,n$ y mn. Nos preguntamos ¿cuál es la dimensión de $\mathcal{C}(\mathbb{R})$?

Subespacios

Denotamos $\mathbb{P}_n$ al conjunto de polinomios de grado n. Observemos lo siguiente:

- Todos lo polinomios son funciones continuas, entonces $\mathbb{P}_n\subseteq\mathcal{C}(\mathbb{R})$.
- Ocurre que $\dim(\mathbb{P}_n)\leqslant\dim(\mathcal{C}(\mathbb{R}))$.
- **Suave**, ¿acaso $\mathbb{P}_n$ es un espacio vectorial? No podemos hablar de dimensión sin que lo sea.

Teorema 5 $(**)$**.** *Supongamos que $W\subseteq V$ ya siendo V un espacio vectorial. Entonces W es espacio vectorial si valen las condiciones:*

I) *$x,y\in W\Rightarrow x+y\in W$. (**suma permanece**)*
II) *$x\in W\Rightarrow cx\in W$. (**múltiplos permanecen**)*

En este caso diremos que W es subespacio de V. Denotamos $W\leqslant V$.

Verifiquemos que $\mathbb{P}_n\subseteq\mathcal{C}(\mathbb{R})$ es un espacio vectorial aplicando el teorema.

1. ¿Primero, $\mathcal{C}(\mathbb{R})$ es un espacio vectorial? Eso lo sabemos de supuesto.
2. Ahora, si $p,q\in\mathbb{P}_n$, entonces ¿$p+q\in\mathbb{P}_n$? $(\star)$
3. Y si $p\in\mathbb{P}_n$, ¿vale que $cp\in\mathbb{P}_n$? $(\star)$

Si $p\in\mathbb{P}_n$ entonces

$$\begin{aligned} p(x) &= a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_1x+a_0 \\ &= a_0+a_1x+\cdots+a_{n-1}x^{n-1}+a_nx^n. \end{aligned}$$

Asociamos a p el arreglo $(a_0,a_1,\ldots,a_{n-1},a_n)$. Entonces $\dim(\mathbb{P}_n)=n+1$.

Ejemplo 6. En $\mathbb{P}_2$ consideramos $p(x)=x^2+5x+6$ asociado al vector $(6,5,1)$, mientras que $q(x)=2x^2-6x+8$ sería $(8,-6,2)$.

El vector $\hat{\jmath}=(0,1,0)$ corresponde con el polinomio $r(x)=x$ y x^2 corresponde con $\hat{k}$.

Observación. Lo que ocurre detrás del telón es que $\mathbb{P}_n\simeq\mathbb{R}^{n+1}$.

Bases y Dimensión

- Nuestro concepto de dimensión es *Dimensión = Long. del arreglo vectorial.*
- ¿Podemos definir dimensión sin coordenadas?

Ejemplo 7 ($\star$). Para familiarizarnos con algunos conceptos hacemos una analogía. Imaginemos un mapa:

- Hay distintos marcos de referencia (**bases**) para guiarse distintos al marco *canónico* $(\hat{\imath},\hat{\jmath})$.
- Los distintos puntos a los que llegamos con esas direcciones son las **combinaciones lineales**.
- Y en un mapa plano no precisamos más de dos direcciones para guiarnos. Una tercera es superflua. (**dependencia lineal**)

Definición. Si $C = \{\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_n\}$ es un conjunto de vectores, una combinación lineal de vectores de C es cualquier vector $\vec{v}$ de la forma

$$\vec{v} = c_1\vec{v}_1 + \dots + c_n\vec{v}_n.$$

Ejemplo 8. $(2,-3,3)$ es combinación lineal de $(1,0,0)$ y de $(0,1,-1)$ pues

$$(2,-3,3) = 2\cdot(1,0,0) + (-3)\cdot(0,1,-1).$$

Definición. El conjunto generado por una colección de vectores $C = \{\vec{v}_1,\dots,\vec{v}_n\}$ es el conjunto de **todas** las combinaciones lineales de C. Denotamos $\operatorname{gen}(C)$.

Proposición 9. *Si $C \subseteq \mathbb{R}^n$, entonces* $\operatorname{gen}(C) \leqslant \mathbb{R}^n$.

Ejemplo 10. Dentro de $\operatorname{gen}((1,0,0),(0,-1,1))$ está $(2,-3,3)$. También $(19,31,-31)$, $(4,0,0)$, $(0,-5,5)$ y $(-8,7,-7)$. ¡El conjunto es infinito!

Definición. Un vector $\vec{v}$ es linealmente dependendiente (**l.d.**) de conjunto de vectores $C = \{\vec{v}_1,\dots,\vec{v}_n\}$ si $\vec{v}$ es combinación lineal de C.
Un conjunto es linealmente dependiente si posee al menos un vector linealmente dependendiente.
Por el contrario, un vector es linealmente independiente (**l.i.**) de un conjunto si no es l.d. Análogamente para conjuntos.

Ejemplo 11. $(2,-3,3)$ es l.d. de $(1,0,0)$ y $(0,-1,1)$, pues

$$(2,-3,3) = 2(1,0,0) + 3(0,-1,1).$$

En consecuencia $\{(2,-3,3),(1,0,0),(0,-1,1)\}$ es un conjunto l.d.
Pero a su vez ocurre que

$$(1,0,0) = \frac{1}{2}(2,-3,3) - \frac{3}{2}(0,-1,1).$$

Es decir los demás vectores son c.l. de los otros.

Observación. Notemos que si $\vec{u},\vec{v}$ son l.d. entonces $\vec{u} = c\vec{v}$. Tenemos entonces las siguientes equivalencias, dos vectores son:

l.d. $\Longleftrightarrow$ **paralelos** $\Longleftrightarrow$ **múltiplos uno del otro**.

El teorema resumen de independencia lineal

Teorema 12. *Considere $\{\vec{v}_1,\dots,\vec{v}_m\} \subseteq \mathbb{R}^n$ con $m \leqslant n$. Si A es la matriz cuyas filas son los vectores, entonces la* ***cantidad de vectores l.i.*** *es* $\operatorname{Rng}(A)$.
Cuando $m > n$, el conjunto es l.d.

Ejemplo 13. Si $C = \left\{ \begin{pmatrix} 3\\5\\-8 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1\\1\\-2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0\\-1\\1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1\\-3\\2 \end{pmatrix} \right\}$, y queremos ver cuantos vectores l.i. hay en C, consideramos la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 5 & -8\\ 1 & 1 & -2\\ 0 & -1 & 1\\ 1 & -3 & 2 \end{pmatrix}$$

Al reducir vemos que $\operatorname{Rng}(A) = 2$. Es decir, sólo dos vectores son l.i. **¿Cuáles dos?**

- Tomamos $(0,-1,1)$ primero.
- Luego uno que no sea múltiplo, como $(1,1,-2)$.

Si queremos escribir $(3,5,-8)$ como c.l. de $(1,1,-2)$ y $(0,-1,1)$ debemos encontrar a,b reales tales que

$$(3,5,-8) = a(1,1,-2) + b(0,-1,1) \Rightarrow \begin{cases} 3 = a\\ 5 = a - b\\ -8 = -2a + b \end{cases}$$

Con esto llegamos a $a = 3$ y $b = -2$.

Definición. Una base de un espacio vectorial es un conjunto generador que es l.i.
La dimensión de un espacio vectorial es la cantidad de elementos en una base.

Ejemplo 14. La base canónica de $\mathbb{R}^2$ es $\mathcal{C} = \{\hat{\imath},\hat{\jmath}\}$. Pero también $\{(1,1),\hat{\jmath}\}$ y $\{\hat{\imath},(-1,-2)\}$ son bases de $\mathbb{R}^2$. Como vimos anteriormente, $\dim(\mathbb{R}^n) = n$, entonces cualquier base de $\mathbb{R}^n$ tiene n vectores l.i.

Práctica

Encuentre $\dim(\operatorname{gen}(C))$ donde $C \subseteq \mathbb{R}^3$ es

$$\left\{ \begin{pmatrix} -2\\2\\0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1\\0\\1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0\\-1\\1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0\\-3\\3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1\\-3\\4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1\\0\\-1 \end{pmatrix} \right\}.$$

Para finalizar consideramos $\mathcal{C}(\mathbb{R})$, aquí los monomios $\{1,x,x^2,\dots,x^n,x^{n+1},\dots\}$ forman un conjunto l.i. infinito. Hay más funciones l.i. que esas pero ya con esto vemos que $\dim(\mathcal{C}(\mathbb{R})) = \infty$.