Capítulo 1

Variedades

1.1. Variedades Afines

Definición 1.1.1. El espacio afín $\mathbb{A}^n(k)$ sobre k, un cuerpo algebraicamente cerrado es el conjunto de todas las n-tuplas de elementos de k.

Los elementos del espacio afín son puntos x que se representan con coordenadas $\mathbf{x} = (x_1, \ldots, x_n)$. No debemos confundir el punto con sus coordenadas.

Definición 1.1.2. Un subconjunto $Y \subseteq \mathbb{A}^n(k)$ se dice ser un conjunto algebraico (también llamado variedad afín) si existe un subconjunto $T \subseteq k[\mathbf{x}]$ tal que

$$Y = V(T) := \{\, \mathbf{a} \in \mathbb{A}^n(k) : \ \forall p \in T(p(\mathbf{a}) = 0) \,\}.$$

Proposición 1.1.3. *Supongamos que $M, N \subseteq \mathbb{A}^n(k)$, vale lo siguiente:*

(*a*) *Si $M \subseteq N$, entonces $V(N) \subseteq V(M)$.*

(*b*) *Si $\mathfrak{i} = \operatorname{gen}(M)$, entonces $V(\mathfrak{i}) = V(M)$.*

(*c*) *La unión de finita de variedades es una variedad. Más específicamente*

$$V(M) \cup V(N) = V(M \cap N) = V(M \cdot N).$$

(*d*) *La intersección de variedades es variedad. Específicamente vale:*

$$\bigcap_{i \in I} V(M_i) = V\left(\bigcup_{i \in I} M_i\right).$$

(*e*) *El vacío y el espacio afín son variedades.*

Prueba

(a) Si $\mathbf{x} \in V(N)$, entonces $\mathbf{x}$ anula a cualquier polinomio de N. En particular, anula a cualquier polinomio de M. Es decir $\mathbf{x} \in V(M)$.

(b) Como $M \subseteq \mathfrak{i}$, entonces $V(\mathfrak{i}) \subseteq V(M)$. Por otro lado, si $\mathbf{a} \in V(M)$ entonces $\mathbf{a}$ anula a cualquier polinomio de M. Como M genera a $\mathfrak{i}$, entonces todo elemento $g \in \mathfrak{i}$ es de la forma

$$g = \sum_{f \in M} hf \Rightarrow g(\mathbf{a}) = \sum_{f \in M} h(\mathbf{a}) f(\mathbf{a}) = 0.$$

Por lo tanto tenemos la otra inclusión.

(c) Como $M \cdot N \subseteq M \cap N \subseteq M, N$ entonces valen las inclusiones de izquierda a derecha.

Si $\mathbf{a} \in V(M \cdot N)$ pero $\mathbf{a} \notin V(M)$ entonces para algún $f \in M$ vale que $f(\mathbf{a}) \neq 0$. Sin embargo para $g \in N$ vale $(f \cdot g)(\mathbf{a}) = 0$. Como g es arbitrario, entonces $\mathbf{a} \in V(N)$. Así concluimos la igualdad.

(d) Como $M_i \subseteq \bigcup_{i \in I} M_i$ para todo i, entonces vale la inclusión $\supseteq$.

Mientras tanto si $\mathbf{a} \in \bigcap_{i \in I} V(M_i)$, entonces

$$\forall i \in I\, (\mathbf{a} \in V(M_i)) \Rightarrow \forall i \in I \forall f \in M_i (f(\mathbf{a}) = 0).$$

Es decir, $\mathbf{a}$ anula a cualquier polinomio dentro de cualquier M_i. Entonces $\mathbf{a}$ anula a cualquier polinomio en $\bigcup_{i \in I} M_i$. Esta justificación no me gusta.

(e) Finalmente vale que $V(\{0\}) = \mathbb{A}^n(k)$ y $V(k[\mathbf{x}]) = \varnothing$.

Definición 1.1.4. La topología de Zariski se define tomando como cerrados a las variedades. Los abiertos son los complementos de las variedades. De acuerdo con la proposición anterior, esta colección forma una topología.

Ejemplo 1.1.5. Topología de Zariski en dimensión 1 Recordemos que en $k[x]$ todo ideal es principal. Entonces vale para cualquier variedad:

$$V(M) = V(\mathrm{gen}(M)) = V(p),$$

donde p es el único generador del ideal en cuestión. Es decir, cualquier variedad es el conjunto de ceros de un único polinomio. A su vez

$$p(x) = c(x - a_1) \cdots (x - a_n),\ c, a_j \in k \Rightarrow V(p) = \{\, a_j \,\}_{j=1}^{n}.$$

Así cualquier variedad en $\mathbb{A}^1(k)$ es un conjunto finito.

Esto nos dice que la topología de Zariski en dimensión 1 corresponde con la topología cofinita que de hecho no es de Hausdorff.

Para hablar de ejemplos en dimensión superior precisamos otros conceptos topológicos.

Definición 1.1.6. Un subconjunto $Y \subseteq X$ de un espacio topológico es irreducible si no es posible escribir $Y = Y_1 \cup Y_2$ con $Y_1, Y_2 \subseteq Y$ cerrados. El vacío *no* es irreducible.