Diagonalización

Las matrices diagonales son las más sencillas de todas.

- Los sistemas $D\vec{x}=\vec{b}$ son fáciles de resolver.
- El determinante de D es el producto de su diagonal.
- Sus autovalores están en la diagonal.

Queremos despedazar una matriz para ver su *forma diagonal* y ver cómo es que funciona.

Comenzamos con $T:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^n$ una T.L. y $\mathcal{B}=\{\vec{v}_1,\dots,\vec{v}_n\}$ sus autovectores. Si $\mathcal{B}$ es base, podemos representar T en $\mathcal{B}$ como una matriz:

$$[T]_{\mathcal{B}}=\begin{pmatrix}[T\vec{v}_1]_{\mathcal{B}} & [T\vec{v}_2]_{\mathcal{B}} & \cdots & [T\vec{v}_n]_{\mathcal{B}}\end{pmatrix}.$$

Aquí cada $[T\vec{v}_i]_{\mathcal{B}}$ es una columna. Y veamos una cosa:

- En $\mathcal{B}$ vale que
$$\vec{v}_i=0\cdot\vec{v}_1+0\cdot\vec{v}_2+\cdots+1\cdot\vec{v}_1+\cdots+0\cdot\vec{v}_n$$
$$\Rightarrow[\vec{v}_i]_{\mathcal{B}}=(0,0,\dots,1,\dots,0).$$
- La ecuación $T\vec{v}_i=\lambda_i\vec{v}_i$ en base $\mathcal{B}$ es
$$[T\vec{v}_i]_{\mathcal{B}}=\lambda_i(0,0,\dots,1,\dots,0)=(0,0,\dots,\lambda_i,\dots,0).$$

Repitiendo el proceso para todos los demás autovectores obtenemos la representación en base $\mathcal{B}$ de T como

$$[T]_{\mathcal{B}}=\begin{pmatrix}\lambda_1 & \cdots & 0\\ \vdots & \ddots & \vdots\\ 0 & \cdots & \lambda_n\end{pmatrix}=\operatorname{diag}(\lambda_1,\lambda_2,\dots,\lambda_n).$$

En resumen podemos ver que diagonalizar es un proceso de *cambio de base* a final de cuentas. Sin embargo, hay una condición que asumimos **que los autovectores de T forman una base**.

Teorema 1. *Una T.L. T se puede representar en forma diagonal cuando alguna de las siguientes condiciones vale:*

I) *Todo autovalor de T cumple m.a. = m.g.*

II) $\dim(E_{\lambda_1})+\cdots+\dim(E_{\lambda_n})=\dim\mathbb{R}^n=n$. *(La suma de las dimensiones de los espacios invariantes es la dimensión de todo el espacio.)*

III) *Los autovectores de T forman una base de $\mathbb{R}^n$.*

Ejemplo 2. Tenemos $C=\begin{pmatrix}1 & 3\\ 0 & 1\end{pmatrix}$, un cizallamiento.

- C triangular $\Rightarrow\lambda=1$ con m.a.$=2$.
- Tiene un único autovector $\hat{\imath}$, entonces m.g.$=1$.
- Como m.a. $\neq$ m.g. entonces C no es diagonalizable.

Ejemplo 3. Consideremos $A=\begin{pmatrix}2 & 1\\ 1 & 2\end{pmatrix}$. Buscamos sus autovectores con el fin de diagonalizar.

1. Utilizando la fórmula de autovalores $[2\times 2]$ tenemos que
$$m=\frac{1}{2}(2+2),\ p=\det A=3\Rightarrow\lambda=2\pm\sqrt{2^2-3},$$
por lo que $\lambda_1=3$ y $\lambda_2=1$.
2. El primer espacio invariante es
$$E_{\lambda_1}=\ker(A-3I)=\ker\begin{pmatrix}-1 & 1\\ 1 & -1\end{pmatrix}=\ker\begin{pmatrix}1 & -1\\ 0 & 0\end{pmatrix}.$$
La ecuación asociada a esa matriz es $x-y=0$ y su solución es
$$(x,y)=(x,x)=x(1,1)\Rightarrow E_{\lambda_1}=\operatorname{gen}(1,1).$$
Concluimos que $\vec{v}_1=(1,1)$ es un autovector de A asociado a $\lambda_1=3$.
3. El segundo espacio invariante es
$$E_{\lambda_2}=\ker(A-I)=\ker\begin{pmatrix}1 & 1\\ 1 & 1\end{pmatrix}=\ker\begin{pmatrix}1 & 1\\ 0 & 0\end{pmatrix}.$$
La ecuación asociada es $x+y=0$. Su solución es
$$(x,y)=(x,-x)=x(1,-1)\Rightarrow E_{\lambda_2}=\operatorname{gen}(1,-1)$$
y así el otro autovector es $\vec{v}_2=(1,-1)$ asociado a $\lambda_2=1$.

Tenemos que los autovalores cumplen que m.a.=m.g. y así A es diagonalizable.

Según lo mencionado antes, la forma diagonal de A tiene a sus autovalores en la diagonal. La base en la cual es diagonal es $\mathcal{B}=\{\vec{v}_1,\vec{v}_2\}$, con los autovectores anteriores.

Así $[\mathrm{id}]_{\mathcal{C}}^{\mathcal{B}}=P=\begin{pmatrix}1 & 1\\ 1 & -1\end{pmatrix}$ entonces la forma diagonal de A se obtiene con

$$D=PAP^{-1}\Rightarrow\begin{pmatrix}3 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 1\\ 1 & -1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2 & 1\\ 1 & 2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1/2 & 1/2\\ 1/2 & -1/2\end{pmatrix}.$$

Podemos intuir que toda matriz simétrica es diagonalizable. Pero de hecho el resultado es más poderoso todavía. Observemos que

$$\langle\vec{v}_1|\vec{v}_2\rangle=(1)(1)+(1)(-1)=0,$$

es decir la base $\mathcal{B}$ es *ortogonal*.

Teorema 4. *Toda matriz simétrica es diagonalizable y sus autovectores son ortogonales. En concreto diremos que es ortogonalmente diagonalizable.*

Práctica

Realice el mismo proceso para diagonalizar la matriz $A=\begin{pmatrix}2 & -2\\ -2 & 5\end{pmatrix}$.

Aplicaciones

Ejemplo 5. Consideremos la matriz

$$A=\begin{pmatrix}4&-1&1\\-1&3&-2\\1&-2&3\end{pmatrix},$$

si queremos encontrar A^5 podríamos multiplicar lentamente. Pero diagonalizando lo hacemos más rápido.

Si diagonalizamos A entonces

$$\begin{aligned}A^5&=(P^{-1}DP)^5\\&=(P^{-1}DP)(P^{-1}DP)\cdots(P^{-1}DP)\\&=P^{-1}D^5P\end{aligned}$$

Y elevar una matriz diagonal a una potencia es lo mismo que elevar sus entradas a la misma potencia.

I) El polinomio característico de A es

$$\begin{aligned}f_A(\lambda)=\det(A-\lambda I)=\det\begin{pmatrix}4-\lambda&-1&1\\-1&3-\lambda&-2\\1&-2&3-\lambda\end{pmatrix}\\=-\lambda^3+10^2-27\lambda+18.\end{aligned}$$

Para factorizar este polinomio podemos usar el teorema de raices racionales. Sus posibles raices son $\{\pm1,\pm2,\pm3,\pm6\pm9,\pm18\}$.

Evaluando en 1 vemos que $f_A(1)=0$ por lo que factorizamos

$$\begin{aligned}f_A(\lambda)&=(\lambda-1)(-\lambda^2+9\lambda-18)\\&=-(\lambda-1)(\lambda-3)(\lambda-6).\end{aligned}$$

Los autovalores de A son $\lambda_1=1$, $\lambda_2=3$ y $\lambda_3=6$.

II) El espacio invariante asociado a λ_1 es

$$E_{\lambda_1}=\ker\begin{pmatrix}3&-1&1\\-1&2&-2\\1&-2&2\end{pmatrix}=\ker\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&-1\\0&0&0\end{pmatrix}.$$

Esto resulta en las ecuaciones

$$\begin{cases}x=0\\y-z=0\end{cases}$$

La solución es $(x,y,z)=(0,y,y)=y(0,1,1)$. Y así $\vec{v}_1=(0,1,1)$ es un autovector de A asociado a λ_1.

III) E_{λ_2} se obtiene a partir de

$$E_{\lambda_2}=\ker\begin{pmatrix}1&-1&1\\-1&0&-2\\1&-2&0\end{pmatrix}=\ker\begin{pmatrix}1&0&2\\0&1&1\\0&0&0\end{pmatrix}.$$

Reescribiendo como un sistema obtenemos

$$\begin{cases}x+2z=0\\y+z=0\end{cases}$$

y así obtenemos la solución $(-2z,-z,z)$. El autovector $\vec{v}_2=(-2,-1,1)$ está asociado entonces a λ_2.

IV) El tercer autovector es $\vec{v}_3=(1,-1,1)$ asociado a $\lambda_3=6$. *A manera de ejercicio, ¡verifíquelo!*

V) Tomando los autovectores como columnas encontramos la matriz de cambio de base $[\mathrm{id}]_{\mathcal{C}}^{\mathcal{B}}$ a la que llamamos P:

$$P=\begin{pmatrix}0&-2&1\\1&-1&-1\\1&1&1\end{pmatrix}\Rightarrow P^{-1}=\frac{1}{6}\begin{pmatrix}0&3&3\\-2&-1&1\\2&-2&2\end{pmatrix}.$$

Y la forma diagonal de A es $D=\mathrm{diag}(1,3,6)$.

Con esta información encontramos D^5 fácilmente pues

$$D^5=\mathrm{diag}(1^5,3^5,6^5)=\mathrm{diag}(1,243,7776)$$

y por lo tanto

$$\begin{aligned}A^5&=P^{-1}D^5P\\&=\frac{1}{6}\begin{pmatrix}0&3&3\\-2&-1&1\\2&-2&2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0&0\\0&243&0\\0&0&7776\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&-2&1\\1&-1&-1\\1&1&1\end{pmatrix}\\&=\begin{pmatrix}2754&-2511&2511\\-2511&2633&-2632\\2511&-2632&2633\end{pmatrix}\end{aligned}$$

BONUS: Exponencial Matricial

Podríamos pensar, ¿se puede aplicar la función e^x a una matriz? Ordinariamente no, pero es que hay que recordar el nombre completo de la función exponencial. Recordemos que

$$e^x=1+x+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\cdots+\frac{x^n}{n!}+\ldots$$

A pesar de ser infinitas operaciones podemos aplicarlas a una matriz de forma ordinaria y luego llamar a lo que resulte ¡e^A! Más fácil todavía si A es diagonalizable, haciendo una manipulación algebraica podemos ver que

$$e^A=e^{P^{-1}DP}=P^{-1}(e^D)P.$$

Además $e^{\mathrm{diag}(d_1,\ldots,d_n)}=\mathrm{diag}(e^{d_1},e^{d_2},\ldots,e^{d_n})$.

Práctica

Encuentre e^A donde $A=\begin{pmatrix}2&-2\\-2&5\end{pmatrix}$.