**Ejercicio 1** (Combinatoria)**.** Verifique las siguientes identidades mediante doble conteo:

$$\binom{n}{k}k = n\binom{n-1}{k-1}, \tag{1.1}$$

$$\binom{n}{k}(n-k) = n\binom{n-1}{k}, \tag{1.2}$$

$$\binom{n}{k}\binom{k}{\ell} = \binom{n}{\ell}\binom{n-\ell}{k-\ell}, \tag{1.3}$$

$$\binom{n}{k}\binom{n-k}{\ell} = \binom{n}{\ell}\binom{n-\ell}{k}. \tag{1.4}$$

Note que las dos últimas generalizan las primeras.

**Ejercicio 2** (Putnam 2024 A6)**.** Sea

$$f(x) = \frac{1-3x-\sqrt{1-14x+9x^2}}{4}, \quad f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k x^k.$$

Sea $C$ la matriz $n \times n$ con entradas $C_{ij} = c_{i+j-1}$. Calcule $\det C$.

**Ejercicio 3** (Putnam 2001 A2)**.** Sea $G$ un grupo tal que $(xy)x = y$ para todo $x, y \in G$. Pruebe que también se cumple $x(yx) = y$.

**Ejercicio 4** (Putnam 1989 B2)**.** Sea $(S, \circ)$ un semigrupo cancelable donde todo elemento tiene orden finito. Es decir:

(a) $\circ$ es asociativa.

(b) Si $xz = yz$ o $zx = zy$, entonces $x = y$ para $x, y, z \in S$.

(c) El conjunto $\{x^k \mid k \in \mathbb{N}\}$ es finito para todo $x \in S$.

Demuestre que $(S, \circ)$ es un grupo.

**Ejercicio 5** (Putnam 2005 B6)**.** Sea $\mathfrak{S}_n$ el grupo simétrico de $n$ elementos. Para $\sigma \in \mathfrak{S}_n$, defina:

$$\operatorname{sgn}\sigma = \begin{cases} 1 & \text{si } \sigma \text{ es par,} \\ -1 & \text{si } \sigma \text{ es impar.} \end{cases}$$

Equivalentemente, $\operatorname{sgn}\sigma = (-1)^{\operatorname{inv}\sigma}$, donde $\operatorname{inv}\sigma$ es el número de inversiones. Esto es, la cantidad de números que aparecen "en desorden". Por ejemplo,

$$\operatorname{inv}(3142) = 3 \quad \text{por} \quad (3,1),(3,2),(4,2).$$

Sea $|\operatorname{Fix}\sigma|$ el número de puntos fijos. Pruebe que

$$\sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_n} \frac{\operatorname{sgn}\sigma}{|\operatorname{Fix}\sigma| + 1} = (-1)^n \frac{n}{n+1}.$$

**Ejercicio 6** (Extra)**.** Verifique las siguientes identidades:

$$\sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_n} \frac{\operatorname{sgn}(\sigma)}{(|\operatorname{Fix}(\sigma)| + 1)^2} = (-1)^{n+1} \left( \frac{nH_n}{n+1} - \frac{1}{(n+1)^2} \right), \tag{1.5}$$

$$\sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_n} \frac{\operatorname{sgn}\sigma}{2^{|\operatorname{Fix}\sigma|}} = \frac{2n-1}{2} \left( \frac{-1}{2} \right)^{n-1}, \tag{1.6}$$

$$\sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_n} \operatorname{sgn}\sigma \left( \frac{1}{3} \right)^{n-|\operatorname{Fix}\sigma|} \left( \frac{4}{3} \right)^{|\operatorname{Fix}\sigma|} = \frac{n+3}{3}. \tag{1.7}$$

Aquí, $H_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k}$ es el $n$-ésimo número armónico.