Control System Engineering in SeoulTech

HW1

13184322 JEHA KIM (김재하)

[중간고사 대체 과제] 2020년 5월 5일

$$conditions : \begin{cases} T(t) = u(t) \\ T(s) = \frac{1}{s} \end{cases}$$

$$Q1. \quad T(t) \quad ? \quad \theta(t)$$

$$A1. \quad T(t) - K\theta(t) - D\frac{d\theta(t)}{dt} = J\frac{d^2}{dt^2}\theta(t)$$

$\Downarrow$
$L.T$
$\Downarrow$

$$T(s) = \theta(s)[Js^2 + Ds + K]$$

$$(\because \theta(0) = 0, \frac{d\theta(0)}{dt} = 0)$$

$$\therefore G(s) = \frac{\theta(s)}{T(s)} = \frac{1}{Js^2+Ds+K}$$

$$Q2. \quad if \ \ (K = 1, \ D = \frac{2}{3}, \ J = \frac{1}{12})$$

$$A2. \quad T(s) \cdot G_1(s) = \frac{1}{s(\frac{1}{12}s^2+\frac{2}{3}s+1)}$$

$$= \frac{12}{s(s^2+8s+12)}$$

$= \frac{12}{s(s+2)(s+6)}$

$= \frac{C_{1a}}{s} + \frac{C_{1b}}{(s+2)} + \frac{C_{1c}}{(s+6)}$

(by Partial fraction decomposition) $\Rightarrow \frac{1}{s} - \frac{\frac{3}{2}}{s+2} + \frac{\frac{1}{2}}{s+6}$

$\Downarrow$
$I.L.T$
$\Downarrow$

$(1 - \frac{3}{2}e^{-2t} + \frac{1}{2}e^{-6t})u(t) = \theta_1(t)$

$Q3. \quad if \ \ (K = 1, \ D = \frac{6}{25}, \ J = \frac{1}{25})$

$A3. \quad T(s) \cdot G_2(s) = \frac{1}{s(\frac{1}{25}s^2 + \frac{6}{25}s + 1)}$

$= \frac{25}{s(s^2+6s+25)}$

$= \frac{25}{s(s+3-4j)(s+3+4j)}$

$= \frac{C_{2a}}{s} + \frac{C_{2b}}{(s+3-4j)} + \frac{C_{2c}}{s+3+4j}$

$C_{2a} = 1$

$C_{2b} = \frac{25}{s(s+3+4j)}\Big|_{s \to -3+4j} = \frac{1}{8}(3j - 4)$

$C_{2c} = \frac{25}{s(s+3-4j)}\Big|_{s \to -3-4j} = -\frac{1}{8}(3j + 4)$

$= \frac{1}{s} + \frac{1}{8}\frac{(3j-4)}{(s+3-4j)} - \frac{1}{8}\frac{(3j+4)}{s+3+4j}$

$\Downarrow$
$I.L.T$
$\Downarrow$

$(1 + \frac{1}{8}(3j - 4)e^{-(3-4j)t} - \frac{1}{8}(3j + 4)e^{-(3+4j)t})u(t)$

(by Euler's formula) $\Rightarrow [1 - \frac{1}{4}e^{-3t}\{4cos(4t) + 3sin(4t)\}]u(t)$

$= \theta_2(t)$

$Q4. \quad if \ \ (K = 1, \ D = 0, \ J = \frac{1}{9})$

$A4. \quad T(s) \cdot G_3(s) = \frac{1}{s(\frac{1}{9}s^2+1)}$

$= \frac{9}{s(s^2+9)}$

$= \frac{C_{3a}}{s} + \frac{C_{3b}}{s^2+9}$

$= \frac{1}{s} - \frac{s}{s^2+9}$

$\Downarrow$
$I.L.T$
$\Downarrow$

$\{1 - cos(3t)\}u(t) = \theta_3(t)$

$Q5. \quad Discuss\ !$

$A5.$

각 문항에서 구한 특성방정식은 아래와 같다.

$F_1(s) = (s+2)(s+6)$

$F_2(s) = (s+3-4j)(s+3+4j)$

$F_3(s) = (s^2+9) = (s+3j)(s-3j)$

이 근들을 각각 S-plane 에 그려보면 아래 파이썬 산점도 그래프에 찍힌 모양처럼 나오게 된다.

Final Value Theorem 에서 한번 보았듯이, 모든 점들이 Left Half of the S-plane 에 있는 θ1 과 θ2 는 그래프가 안정한 것으로 보이지만

점들이 모두 Y축 위에 존재하는 θ3 의 경우 그래프가 진동하며 불안정한 모습을 보이는 것을 알수 있다.

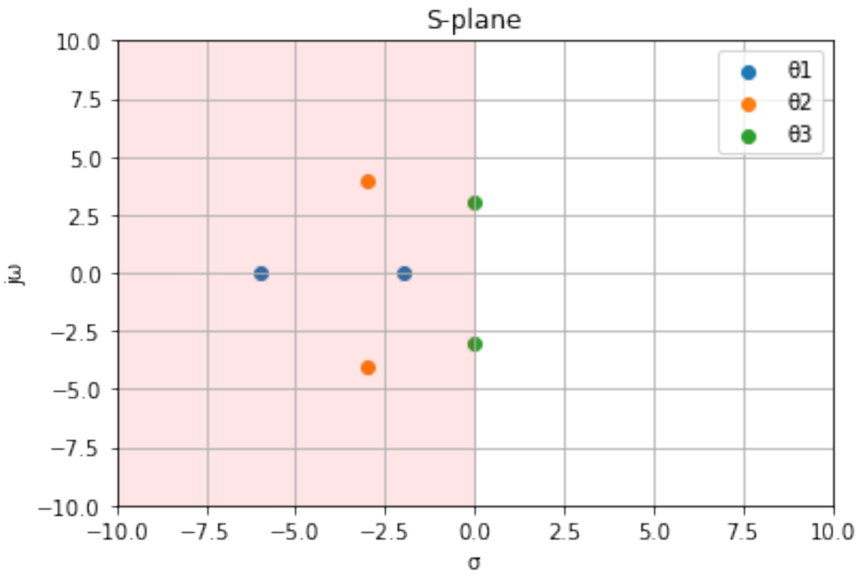
우리는 이것으로부터 특성방정식의 근과 응답 특성과의 관계는

안정도(Stability)와 관련이 있음을 가히 추측해 볼수 있다.

Python program showing Graphical representation

θ1. $\theta_1(t) = (1 - \frac{3}{2}e^{-2t} + \frac{1}{2}e^{-6t})u(t)$
θ2. $\theta_2(t) = [1 - \frac{1}{4}e^{-3t}\{4cos(4t) + 3sin(4t)\}]u(t)$
θ3. $\theta_3(t) = \{1 - cos(3t)\}u(t)$

In [30]:
```
plt.axis([-10, 10, -10, 10])
plt.title("S-plane")

plt.scatter((-2,-6), (0,0),label='θ1')

plt.scatter((-3,-3), (4,-4),label='θ2')

plt.scatter((0,0), (3,-3),label='θ3')

plt.xlabel("σ")
plt.ylabel("jω")

plt.fill_between([-10,0],
                    [10,10],[-10,-10],
                    color='r',
                    alpha=0.1)

plt.legend()
plt.grid()
plt.show()
```



In [31]:
```
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt

plt.figure(figsize=[15,10])
plt.axis([0, 10, 0, 10])
t = np.linspace(0,10,100)

theta1 = 1-(1.5)*np.exp((-2)*t)+(0.5)*np.exp((-6)*t)
theta2 = 1-((.25)*(np.exp((-3)*t))*(4*np.cos(4*t)+3*np.sin(4*t)))
theta3 = 1-np.cos(3*t)

plt.plot(t, theta1,
         color = 'red',label='θ1')
plt.plot(t, theta2,
         color = 'blue',label='θ2')
plt.plot(t, theta3,
         color = 'green',label='θ3')

plt.title("θs")
plt.xlabel("t")
plt.ylabel("θ")
plt.legend()

plt.show()
```