常用导数

编号	原函数	导函数
2	$y=n^x$	$y'=n^x\ln n$
3	$y=\ln x,\ln\lvert x\rvert$	$y'=\frac{1}{x}$(同定义域)
4	$y=x^n$	$y'=nx^{n-1}$
5	$y=\sin x$	$y'=\cos x$
6	$y=\cos x$	$y'=-\sin x$
7	$y=\tan x$	$y'=\frac{1}{\cos^2 x}=\sec^2 x$
8	$y=\cot x$	$y'=\frac{-1}{\sin^2 x}=-\csc^2 x$
9	$y=\sec x$	$y'=\sec x\tan x$
10	$y=\csc x$	$y'=-\csc x\cot x$
11	$y=\arcsin x$	$y'=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
12	$y=\arccos x$	$y'=-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
13	$y=\arctan x$	$y'=\frac{1}{1+x^2}$
14	$y=\operatorname{arccot} x$	$y'=-\frac{1}{1+x^2}$
15	$y=\operatorname{arcsec} x$	$y'=\frac{1}{x\sqrt{x^2-1}}$
16	$y=\operatorname{arccsc} x$	$y'=-\frac{1}{x\sqrt{x^2-1}}$
17	$y=\sinh x=\frac{e^x-e^{-x}}{2}$	$y'=\cosh x$
18	$y=\cosh x=\frac{e^x+e^{-x}}{2}$	$y'=\sinh x$
19	$y=\tanh x=\frac{e^x-e^{-x}}{e^x+e^{-x}}$	$y'=\frac{1}{\cosh^2 x}$
20	$y=\operatorname{arsh} x=\ln(x+\sqrt{x^2+1})$	$y'=\frac{1}{\sqrt{x^2+1}}$
21	$y=\operatorname{arch} x=\ln(x+\sqrt{x^2-1})$	$y'=\frac{1}{\sqrt{x^2-1}}$
22	$y=\operatorname{arth} x=\frac{1}{2}\ln(\frac{1+x}{1-x})$	$y'=\frac{1}{1-x^2}$

积分补充

编号	原函数	导函数
23	$\ln\lvert x+\sqrt{x^2\pm a^2}\rvert$+C	$\frac{1}{\sqrt{x^2\pm a^2}}$
24	$\frac{a^2}{2}\arcsin\frac{x}{a}+\frac{x}{2}\sqrt{a^2-x^2}+C$	$\sqrt{a^2-x^2}$
25	$\frac{x}{2}\sqrt{x^2\pm a^2}\pm\frac{a^2}{2}\ln\lvert x+\sqrt{x^2\pm a^2}\rvert+C$	$\sqrt{x^2\pm a^2}$

常用凑微分法

序号	原式	变式
1	$\int f(ax+b)\mathrm{d}x$（$a\neq 0)$	$\frac{1}{a}\int f(ax+b)\mathrm{d}ax+b$
2	$\int f(\sin x)\cos x\mathrm{d}x$	$\int f(\sin x)\mathrm{d}(\cos x)$
3	$\int f(\cos x)\sin x\mathrm{d}x$	$-\int f(\cos x)\mathrm{d}(\cos x)$
4	$\int f(\ln x)\frac{1}{x}\mathrm{d}x$	$\int f(\ln x)\mathrm{d}(\ln x)$
5	$\int f(x^n)x^{n-1}\mathrm{d}x(n\neq 0)$	$\frac{1}{n}\int f(x^n)\mathrm{d}(x^n)$
6	$\int f(\frac{1}{x^n})\frac{1}{x^{n+1}}\mathrm{d}x(n\neq 0)$	$-\frac{1}{n}\int f(\frac{1}{x^n})\mathrm{d}(\frac{1}{x^n})$
7	$\int f(\tan x)\frac{\mathrm{d}x}{\cos^2 x}$	$\int f(\tan x)\mathrm{d}(\tan x)$
8	$\int f(\cot x)\frac{\mathrm{d}x}{\sin^2 x}$	$-\int f(\cot x)\mathrm{d}(\cot x)$
9	$\int f(\arcsin x)\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{1-x^2}}$	$\int f(\arcsin x)\mathrm{d}(\arcsin x)$
10	$\int f(\arctan x)\frac{\mathrm{d}x}{1+x^2}$	$\int f(\arctan x)\mathrm{d}(\arctan x)$
11	$\int\frac{f'(x)}{f(x)}\mathrm{d}x$	$\int\frac{\mathrm{d}f(x)}{f(x)}=\ln\lvert f(x)\rvert+C$

泰勒公式（拉格朗日余项）

$$f(x)=T_n(x)+R_n(x)$$
$$T_n(x)=\sum_{k=0}^{n}\frac{f^{(n)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k$$
$$R_n(x)=\frac{1}{(n+1)!}f^{(n+1)}(\xi)(x-x_0)^{n+1}$$
$$(\xi=x_0+\theta(x-x_0)(0<\theta<1))$$

五个基本初等函数的麦克劳林公式（拉格朗日余项）

$$x \in (-\infty,+\infty),\ \theta{\in}(0{,}1)$$

$$
\begin{aligned}
&(1) \quad & e^x &= \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!} + \frac{1}{(n+1)!} e^{\theta x} x^{n+1} \\
&(2) \quad & \sin x &= \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k-1} \frac{x^{2k-1}}{(2k-1)!} + (-1)^n \frac{\cos \theta x}{(2n+1)!} x^{2n+1} \\
&(3) \quad & \cos x &= \sum_{k=0}^{n} (-1)^{k} \frac{x^{2k}}{(2k)!} + (-1)^{n+1} \frac{\cos \theta x}{(2n+2)!} x^{2n+2} \\
&(4) \quad & (1+x)^\alpha &= 1 + \sum_{k=1}^{n} \frac{\prod_{i=1}^{k}(\alpha+1-i) \Big| A_\alpha^k}{k!} x^k + \frac{\prod_{i=1}^{n+1}(\alpha+1-i)}{(n+1)!} (1+\theta x)^{\alpha-n-1} x^{n+1} \\
&(5) \quad & \ln(1+x) &= \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k-1} x^k}{k} + \frac{(-1)^n x^{n+1}}{(n+1)(1+\theta x)^{n+1}}
\end{aligned}
$$

矩阵和、差、积的秩

$$
\begin{gathered}
R(A)-R(B) \le R(A \pm B) \le R(A)+R(B) \\
R(A)+R(B)-n \le R(AB) \le \min\{R(A), R(B)\} \\
s \times n, n \times m
\end{gathered}
$$

各种分布

分布	概率密度	分布函数
$X \sim (0-1)$		
$X \sim B(n,p)$		$P\{X=k\} = C_n^k p^k q^{n-k}$
$X \sim P(\lambda)$		$P\{X=k\} = \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}$
几何分布$p(1-p)^{k-1}$		
$X \sim U(a,b)$	$\frac{1}{b-a}(a<x<b)$	$\frac{x-a}{b-a}$
$X \sim E(\lambda)$	$\lambda e^{-\lambda x}(x>0)$	$1-e^{-\lambda x}$
$X \sim N(\mu,\sigma^2)$	$\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \exp\left[-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}\right]$	$\Phi(x)$

常见随机变量的数学期望和方差

分布	期望	方差
$X \sim (0-1)$	p	pq
$X \sim B(n,p)$	np	npq
$X \sim P(\lambda)$	λ	λ
几何分布$p(1-p)^{k-1}$	$\frac{1}{p}$	$\frac{q}{p^2}$
$X \sim U(a,b)$	$\frac{a+b}{2}$	$\frac{(b-a)^2}{12}$
$X \sim E(\lambda)$	$\frac{1}{\lambda}$	$\frac{1}{\lambda^2}$
$X \sim N(\mu,\sigma^2)$	μ	σ^2

Γ函数

$$\Gamma(\alpha)=\int_0^{+\infty} x^{\alpha-1}e^{-x}\mathrm{d}x\ (\alpha>0)$$

性质

$$\Gamma(\alpha+1)=\alpha\Gamma(\alpha)$$
$$\Gamma(1)=1$$
$$\Gamma(n+1)=n!$$
$$\Gamma(\frac{1}{2})=\sqrt{\pi}$$

切比雪夫不等式

$$\boldsymbol{P}\{|X-\boldsymbol{E}X|\geq\varepsilon\}\leq\frac{\boldsymbol{D}X}{\varepsilon^2}$$
$$\boldsymbol{P}\{|X-\boldsymbol{E}X|<\varepsilon\}\geq 1-\frac{\boldsymbol{D}X}{\varepsilon^2}$$

大数定理

名称	条件	意义
切比雪夫	独立，$\exists EX_i, \exists DX_i < \boxed{\mathrm{M}}$	$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \boldsymbol{E}X_i) \rightarrow 0$
伯努利	$X_n \sim B(n,p)$	$\frac{\mu_A}{n} \rightarrow p$
辛钦	独立同分布，$EX_i = \mu$	$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i \rightarrow \mu$

列维-林德伯格定理（独立同分布的中心极限定理）

- 意义：$\sum X_i \xrightarrow{P} \sim N(n\mu, n\sigma^2)$
- 条件：

1. 独立
2. 同分布
3. 数学期望与方差存在

$$
\begin{gathered}
X_1, X_2, \cdots, X_n, \cdots, \\
PX_i PX_j = P(X_i, X_j) = (PX_i)^2, \\
EX_k = \mu, DX_k = \sigma^2 > 0 (k \in \mathbb{N}^*) \\
\lim_{n \rightarrow \infty} \boldsymbol{P}\left\{\frac{1}{\sigma\sqrt{n}}\left(\sum_{i=1}^{n} X_i - n\mu\right) \leq x\right\} = \Phi(x)
\end{gathered}
$$

棣莫弗-拉普拉斯定理（二项分布以正态分布为其极限分布）

$$
\begin{gathered}
Y_n \sim B(n,p), \forall x \\
\lim_{n \rightarrow \infty} \boldsymbol{P}\left\{\frac{Y_n - np}{\sqrt{np(1-p)}} \leq x\right\} = \Phi(x)
\end{gathered}
$$

样本期望与方差

$$\boldsymbol{E}\overline{X} = \boldsymbol{E}X = \mu$$
$$\boldsymbol{D}\overline{X} = \frac{\boldsymbol{D}X}{n} = \frac{\sigma^2}{n}$$
$$\boldsymbol{E}S^2 = \boldsymbol{D}X = \sigma^2$$

χ^2分布

定义

$$X_i \sim N(0,1) \wedge P(X_i, X_j) = PX_iPX_j$$
$$\chi^2 = \sum_{i=1}^{n} X_i^2 \rightarrow \chi^2 \sim \chi^2(n)$$

分位点

$$\boldsymbol{P}\{\chi^2 > \chi^2_\alpha(n)\} = \alpha$$

性质

$$\begin{aligned}
&1. \quad \boldsymbol{E}(\chi^2(n)) = n, \boldsymbol{D}(\chi^2(n)) = 2n \\
&2. \quad \chi^2_{1,2} \sim \chi^2(n_{1,2}), F(\chi^2_1, \chi^2_2) = F(\chi^2_1)F(\chi^2_2) \\
&\quad\quad \rightarrow \chi^2_1 + \chi^2_2 \sim \chi^2(n_1 + n_2)
\end{aligned}$$

t分布

定义

$$X \sim N(0,1), Y \sim \chi^2(n), PXY = PXPY$$
$$\rightarrow t = \frac{X}{\sqrt{Y/n}} \sim t(n)$$

分位点

$$\boldsymbol{P}\{t > t_\alpha(n)\} = \alpha$$

性质

$$\lim_{n\to\infty} f(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-t^2/2}$$
$$t \sim t(n) \to t^2 \sim F(1,n)$$

F分布

定义

$$X \sim \chi^2(n_1), Y \sim \chi^2(n_2)$$
$$\to F = \frac{X/n_1}{Y/n_2} \sim F(n_1,n_2)$$

分位点

$$\boldsymbol{P}\{F > F_\alpha(n_1,n_2)\} = \alpha$$

性质

$$F \sim F(n_1,n_2) \to \frac{1}{F} \sim F(n_2,n_1)$$
$$F_{1-\alpha}(n_1,n_2) = \frac{1}{F_\alpha(n_2,n_1)}$$

样本方差

$$\frac{(n-1)S^2}{\sigma^2} = \sum_{i=1}^{n}\left(\frac{X_i - \overline{X}}{\sigma}\right)^2 \sim \chi^2(n-1)$$

$\overline{X}$与S^2相互独立。