SOOKMYUNG WOMEN'S UNIVERSITY K-MOOC

■ 공리적 확률(Probability Axioms)

- 1933년 콜모고로프(A. N. Kolmogorov, 1903-1987)

【공리 1】 $P(\Omega) = 1$

【공리 2】 $0 \leq P(A) \leq 1, \quad A \subset \Omega$

【공리 3】 서로 배반인 사건 $A_1, A_2, \ldots, A_n$에 대해,

$$P\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right) = \sum_{i=1}^{n} P(A_i)$$

- P (·): 확률측도(probability measure)

■ 확률의 기본정리

① $P(A^c) = 1 - P(A)$

- 증명】 $1 = P(\Omega) = P(A \cup A^c) = P(A) + P(A^c)$
- $P(\varnothing) = 0$

◉ 생일문제

- k명 중 적어도 두 사람 이상이 생일이 같을 확률
- A = k명의 사람이 모두 다른 생일을 가지는 사건

$$P(A^c) = 1 - P(A)$$

◉ 1000장 중 4장이 당첨복권

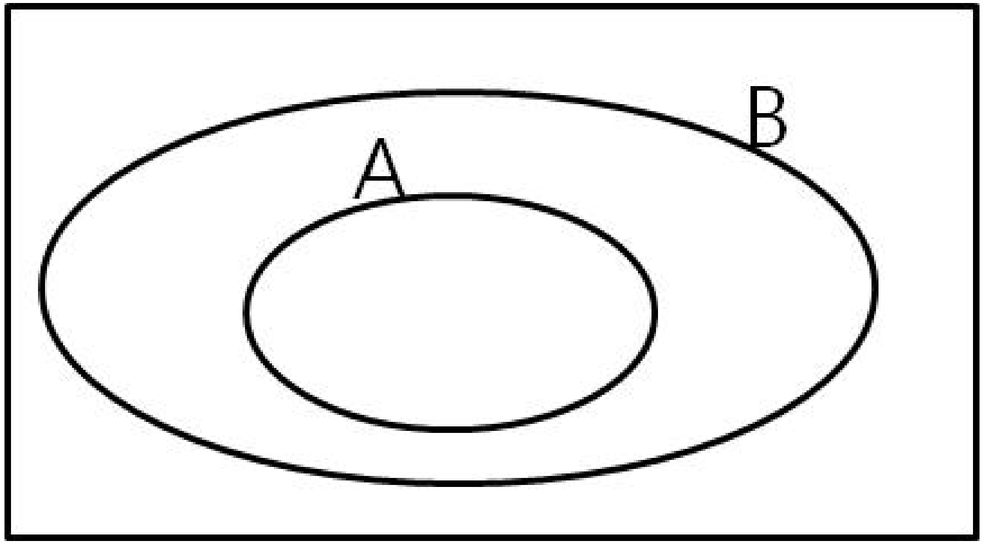
- 4장의 복권을 구입한다면 적어도 한 장 이상의 당첨복권을 구입하게 될 확률은?
- A: 한 장 이상의 당첨복권을 구입할 사건
  = 당첨복권이 한 장, 두 장, 세 장, 네 장인 경우

⇨ A^c: 구입한 4장 모두 당첨되지 않을 사건

$$P(A^c) = \frac{996 \times 995 \times 994 \times 993}{1000 \times 999 \times 998 \times 997} = 0.9841$$

⇨ $P(A) = 1 - P(A^c) = 0.0159$

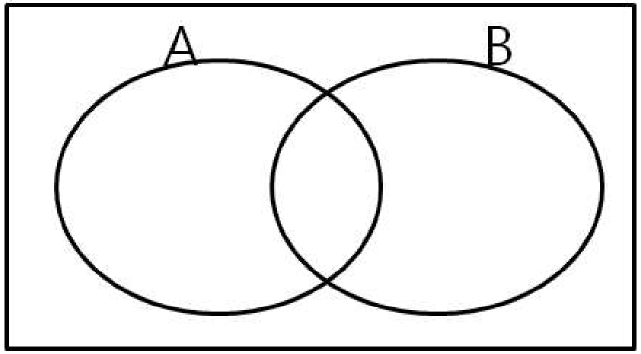
② $A \subset B$이면 $P(A) \le P(B)$



○ $B = A \cup (B \cap A^c)$

○ $P(B) = P(A) + P(B \cap A^c)$

③ $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$



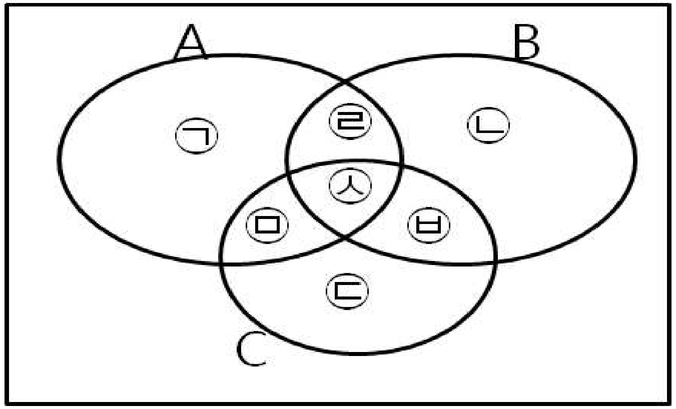
○ $A = (A \cap B) \cup (A \cap B^c)$, $B = (A \cap B) \cup (A^c \cap B)$

$$P(A) = P(A \cap B) + P(A \cap B^c)$$

$$P(B) = P(A \cap B) + P(A^c \cap B)$$

○ $P(A \cup B) = P(A \cap B^c) + P(A \cap B) + P(A^c \cap B)$

○ 사건 A, B, C



$$P(A\cup B\cup C)=P(\text{㉠})+P(\text{㉡})+P(\text{㉢})+P(\text{㉣})+P(\text{㉤})+P(\text{㉥})+P(\text{㉦})$$

$$\Rightarrow\ P(A\cup B\cup C)=P(A)+P(B)+P(C)-P(A\cap B)$$
$$-P(A\cap C)-P(B\cap C)+P(A\cap B\cap C)$$

○ n 개의 사건 $A_1, A_2, \ldots, A_n$ 에 대해

$$P\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right) = \sum_{i=1}^{n} P(A_i) - \sum_{1 \le i < j \le n} P(A_i \cap A_j)$$

$$+ \cdots + (-1)^{n-1} P(A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_n)$$

④ $P(A \cup B) \leq P(A) + P(B)$

- 부울의 부등식(Boole's inequality):

$$P\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right) \leq \sum_{i=1}^{n} P(A_i)$$

- $P(A^c \cup B^c) \leq P(A^c) + P(B^c)$

⇨ $P(A^c \cup B^c) = 1 - P(A \cap B) \leq 2 - \{P(A) + P(B)\}$

- 본페로니 부등식(Bonferroni's inequality)

$$P\left(\bigcap_{i=1}^{n} A_i\right) \geq \sum_{i=1}^{n} P(A_i) - (n-1)$$

◉ 1000장 중 4장이 당첨복권

- A_i: i 번째 복권이 당첨될 사건 ⇨ $P(A_i) = 0.004$

- $A = \bigcup_{i=1}^{4} A_i$ 로 표시

$$P(A) = P\left(\bigcup_{i=1}^{4} A_i\right) = 0.0159 \le \sum_{i=1}^{4} P(A_i) = 0.016$$

- 정리

① $P(A^c) = 1 - P(A)$

② $A \subset B$이면 $P(A) \le P(B)$

③ $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$

④ $P(A \cup B) \le P(A) + P(B)$