

■ 베이즈 정리(Bayes' theorem)

- 사건 A 가 주어졌을 때 사건 B 의 조건부 확률

$$P(B|A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)}, \quad P(A) > 0$$

- $P(A \cap B) = P(A)P(B|A) = P(B)P(A|B)$
- $P(B) = P(A \cap B) + P(A^c \cap B)$
 $= P(A)P(B|A) + P(A^c)P(B|A)$

- $P(B|A)$ 은 순서적으로 볼 때, 대부분 사건 A 가 먼저 발생하고 B 가 이어 발생하는 상황에 대한 확률
 - A 는 원인, B 는 결과의 형태를 가짐
 - ⇒ **코호트 연구** (Cohort Study)
 - 전향적 연구(prospective study): 원인 \Rightarrow 결과
 - 원인의 가능성인 $P(A)$ 또는 $P(A^c)$ 는 사건 B 가 관측되기 이전의 확률 ⇒ **사전확률**(prior probability)

- 어떤 문제에서는 결과를 얻은 상태에서 그 결과가 발생하게 된 원인을 역으로 추정

⇒ 사례-대조연구(case-control study)

- 후향적 연구(retrospective study): 결과 ⇒ 원인
- 결과 B 의 관측했을 때 그 원인이 A 일 사건의 확률은?

$$P(A|B)$$

- 사건 B 가 관측된 후의 A 의 확률

⇒ 사후확률(posterior probability)

● 암진단

- 암 간이진단 검사를 실시
 - 암에 걸렸을 때 양성반응이 나올 확률은 0.96
 - 암에 걸리지 않았을 때 양성반응이 나올 확률이 0.05

Q. 만약 검사에서 양성반응이 나왔다면, 암에 걸렸을 확률은?

- 확률적 표현: A 를 암에 걸린 사건
 - $P(+|A) = 0.96, \quad P(+|A^c) = 0.05$
 - 양성반응이 나왔을 때 암에 걸렸을 확률은 $P(A|+)$
$$P(+|A) \neq P(A|+)$$

- 베이즈 정리

- 베이즈(Thomas Bayes, 1701-1973)

- $P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}, \quad P(B) > 0$

- $P(A \cap B) = P(A)P(B|A)$

- $P(B) = P(A)P(B|A) + P(A^c)P(B|A^c)$

$$\Rightarrow P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{P(A) P(B|A)}{P(A) P(B|A) + P(A^c) P(B|A^c)}$$

● 암진단

$$P(A|+) = \frac{P(A)P(+|A)}{P(A)P(+|A) + P(A^c)P(+|A^c)}$$

- $P(+|A) = 0.96$, $P(+|A^c) = 0.05$
- $P(A)$: 해당 그룹에서 암에 걸릴 확률 \Leftarrow 사전정보필요
 - 만약 $P(A) = 0.001$ 이라고 하면

$$\begin{aligned} P(A|+) &= \frac{0.001 \times 0.96}{0.001 \times 0.96 + 0.999 \times 0.05} \\ &= \frac{0.00096}{0.05091} = 0.01886 \end{aligned}$$

- 암일 가능성은 19배 정도 높아졌으나 여전히 낮은 수준

- 베이즈 정리의 일반식
 - 사건 A_1, \dots, A_n 은 표본공간 Ω 의 분할
 - 모든 i 에 대해 $P(A_i) > 0$ 이면

$$P(A_k|B) = \frac{P(A_k)P(B|A_k)}{P(B)} = \frac{P(A_k) P(B|A_k)}{\sum_{i=1}^n P(A_i) P(B|A_i)}$$

◎ 스팸메일 필터

- $P(S) = 0.4, P(N) = 0.6$
- $P(A|S) = 0.25, P(A|N) = 0.02$
 $\Rightarrow P(A) = 0.112$

Q. 수신메일 내용에 "A"라는 단어가 있을 때 이 메일이 스팸메일일 확률은?

· 확률식: $P(S|A) = \frac{P(S \cap A)}{P(A)}$

· $P(S \cap A) = P(S)P(A|S) = 0.4 \times 0.25 = 0.1$

$$\Rightarrow P(S|A) = \frac{P(S \cap A)}{P(A)} = \frac{0.1}{0.112} = 0.8929$$

- 정리

- 베이즈 정리

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{P(A) P(B|A)}{P(A) P(B|A) + P(A^c) P(B|A^c)}$$

- 원인과 결과 형태의 문제에서 결과에 대한 원인 분석 가능