확률(probability)　　　통계적 추론(statistical inference)

- (설문)조사(survey)
- 실험(experiment)
- 관찰(observation)

⋮

■ 확률(Probability)이란?

◉ 확률이 발생하는 상황

① 주사위 던지기
② 앞면이 나올 때까지 동전 던지기
③ 휴대전화의 수명

- 실험을 시행하기 전에 발생할 수 있는 **모든 결과는 알 수 있음**

  ① $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$

  ② 앞면을 H, 뒷면을 T이라고 하면, $\{H, TH, TTH, \cdots\}$

  ③ x를 수명(단위 일)이라고 하면, $\{x \mid 0 \leq x\}$

- 실험을 하기 전까지 이들 결과 중 **어떤 것이 발생할 것인지에 대해 확실하게 예측할 수 없음 ⇒ 불확실성**

- **확률실험(random experiment)**: 위의 두 성질을 가지는 실험

- **표본공간(sample space, Ω)**: 확률실험에서 발생 가능한 모든 결과들의 집합

- **사건(event)**: 표본공간 내에서의 관심 부분집합
  ① 예】 홀수가 나오는 경우
  ② 예】 3번 이하로 던지는 경우
  ③ 예】 10년 이상 사용하는 경우

- **확률(probability)**: 어떤 사건이 발생할 가능성이 얼마나 되는지를 나타내는 [0,1]의 수치적 척도
  - 확률을 언급하기 위해서는 확률실험이 전제
    - ⇨ 표본공간과 사건이 설정되어야 함

- 집합연산 정의와 법칙
  - A와 B의 합(union)사건:

$$A \cup B = \{\omega \mid \omega \in A \text{ 또는 } \omega \in B\}$$

  - A와 B의 곱(intersection, 교)사건:

$$A \cap B = \{\omega \mid \omega \in A \text{ 그리고 } \omega \in B\}$$

  - A의 여(complement)사건:

$$A^c = \{\omega \mid \omega \notin A \text{ 그리고 } \omega \in \Omega\}$$

  - **배반사건(disjoint, mutually exclusive)**:

    임의의 두 사건 A와 B가 공통부분이 없는 경우

    $A \cap B = \varnothing$

○ 분배법칙(distributive law):

$$(A\cup B)\cap C=(A\cap C)\cup(B\cap C)$$

$$(A\cap B)\cup C=(A\cup C)\cap(B\cup C)$$

○ 드 모르간(De Morgan)의 법칙:

$$(A\cup B)^c=A^c\cap B^c,\ (A\cap B)^c=A^c\cup B^c$$

○ $\bigcup_{i=1}^{n}A_i=A_1\cup A_2\cup\ \cdots\ \cup A_n$

○ $\bigcap_{i=1}^{n}A_i=A_1\cap A_2\cap\ \cdots\ \cap A_n$

◉ 정사면체 주사위 두 개를 던지기

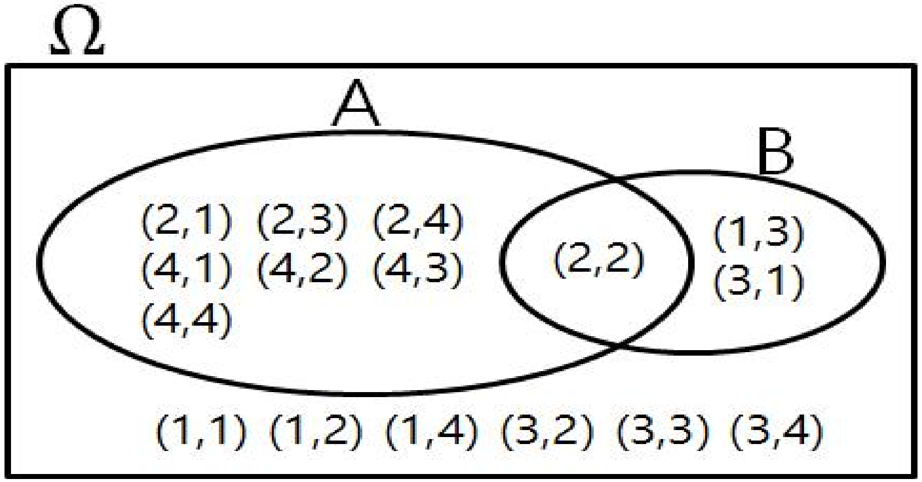
$$\Omega = \{(i,j) \mid i=1,2,3,4, \;\; j=1,2,3,4\}$$

○ A: 첫 번째 주사위가 짝수인 사건

$$A = \{(i,j) \mid i=2,4, \quad j=1,2,3,4\}$$

○ B: 두 주사위의 합이 4인 사건

$$B = \{(i,j) \mid i+j=4\} = \{(1,3),\; (2,2),\; (3,1)\}$$



- $A^c \cap B = \{(1,3), (3,1)\}$
- $A^c \cap B^c = (A \cup B)^c$
  $= \{(1,1), (1,2), (1,4), (3,2), (3,3), (3,4)\}$

■ 고전적 확률

- 17세기 중반 도박문제(파스칼, 페르마)
  - 카드게임에서 어떤 패가 더 높은 패인지를 결정하기 위해 각 패의 발생할 수 있는 빈도를 계산
  - 예】 5 cards game에서 2 pair vs triple

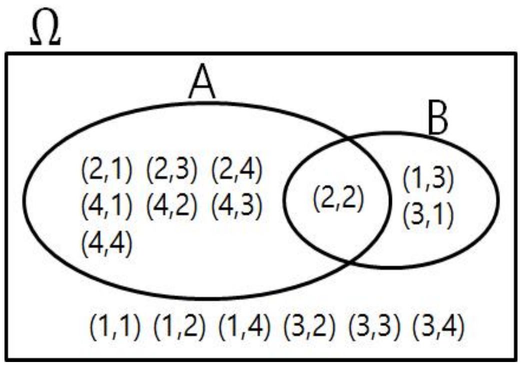
- 가정: 표본공간의 각 원소(근원사건)의 **발생가능성이 동일(equally likely)**
    - n: 표본공간의 원소개수
    - k: 사건 A의 원소개수
    - 사건 A의 확률:

$$P(A) = \frac{k}{n}$$

- 경우의 수

◉ 정사면체 주사위

- 각 눈이 나올 가능성은 동일
- A: 첫 번째 주사위 짝수, B: 두 주사위의 합 4
  - $P(A) = \dfrac{8}{16} = \dfrac{1}{2}$
  - $P(B) = \dfrac{3}{16}$
  - $P(A^c \cap B) = \dfrac{2}{16} = \dfrac{1}{8}$
  - $P(A^c \cap B^c) = \dfrac{6}{16} = \dfrac{3}{8}$



SOOKMYUNG WOMEN'S UNIVERSITY K-MOOC

● 연속표본공간

○ 발생가능성이 동일한 상황을 선이나 평면 등을 이용

○ 사건 A가 발생한다는 것은, Ω내에서 무작위로 한 점을 선택할 때 이 점이 영역 A에 있다는 의미

○ 사건 A의 확률은 전체 영역에서 A가 차지하는 비율

$$P(A) = \frac{\|A\|}{\|\Omega\|}$$

· $\|\cdot\|$는 길이, 면적, 부피 등을 의미

◉ 두 사람이 0시~1시 사이에 만나기로 함

- ○ 각각의 사람은 0시~1시 사이에 무작위로 도착
- ○ 먼저 도착한 사람이 다른 사람을 만날 때까지 20분 이상 기다릴 확률은?

- 정리
  - 확률실험: 표본공간+불확실성
  - 확률: 사건의 발생 가능성을 [0,1]로 표시한 것
  - 고전적 확률: 발생가능성이 동일, k/n