■ 기댓값(expectation, expected value)

◉ 표본평균

○ {1,2,3,4,5,6}으로 이루어진 모집단으로부터 5개의 표본을 무작위로 선택: 1, 1, 2, 5, 6

○ 표본평균

$$\bar{x} = (1+1+2+5+6)/5$$
$$= 1\times\frac{2}{5}+2\times\frac{1}{5}+3\times\frac{0}{5}+4\times\frac{0}{5}+5\times\frac{1}{5}+6\times\frac{1}{5}=3$$

⇨ 관측된 값에 자료 중 그 값이 차지하는 비율을 곱하여 더한 것으로 표시

○ 표본크기 n, $x_i = i$

- n_i 값이 i 표본의 수

$$\bar{x} = \frac{x_1 n_1 + \cdots + x_6 n_6}{n} = \sum_{i=1}^{6} x_i \frac{n_i}{n} = \sum_{i=1}^{6} x_i p_i$$

- $p_i = n_i / n$: 값이 i 인 표본의 비율

○ n 이 계속 커지면

- $p_i \rightarrow f(x_i)$ 표본 → 모집단, 표본평균 → 모평균

$$\bar{x} = \sum_i x_i p_i \quad \longrightarrow \quad \sum_i x_i f(x_i) = \mu$$

- 확률변수의 기댓값(expected value)

  ○ 확률변수에 대해 평균적으로 기대하는 값
  = 모평균(population mean)
  ⇨ 확률분포(또는 모집단)의 무게중심

  ○ 이산확률변수 X의 기댓값 계산

$$E(X) = \sum_{x} x\,f(x) = \mu$$

- 연속확률변수의 기댓값

  ○ 이산형의 기댓값에서

  ■ $\cdot \sum \Rightarrow \int$

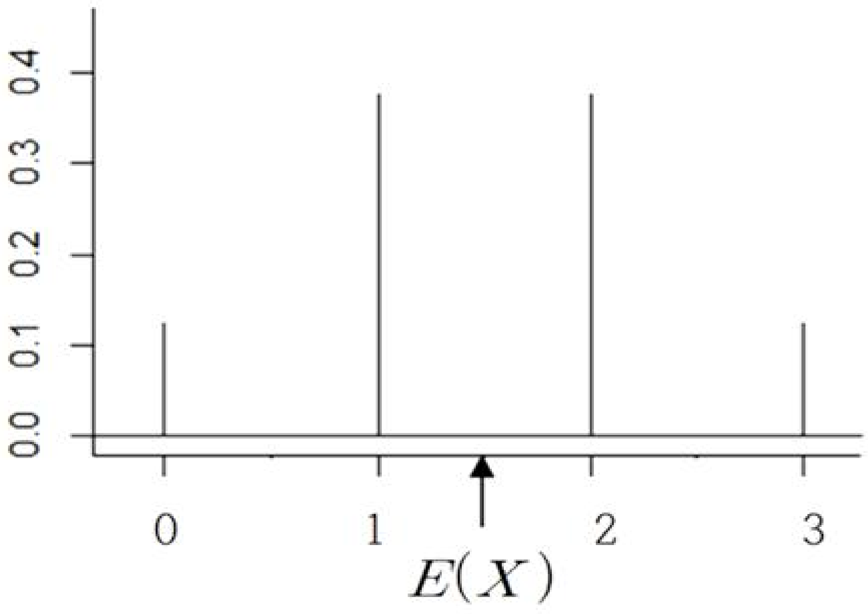
  ■ 확률질량함수 $f(x) = P(X = x)$

  $\Rightarrow f(x)\,dx$ = 확률밀도함수×단위길이

- $E(X) = \int x f(x)\,dx = \mu$

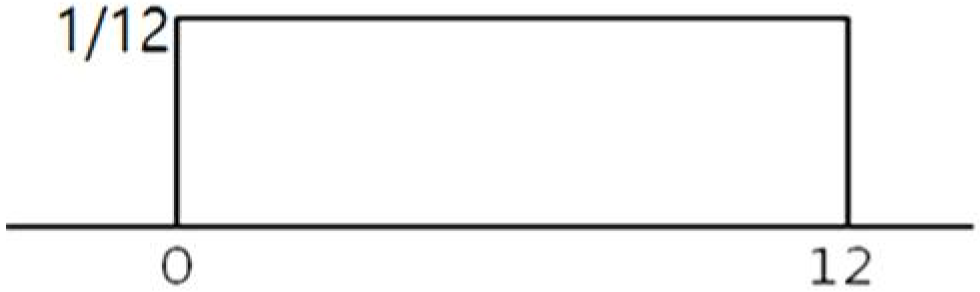
◉ 동전 세 번 던지기

○ X: 앞면의 수 $0\times\frac{1}{8}+1\times\frac{3}{8}+2\times\frac{3}{8}+3\times\frac{1}{8}=\frac{12}{8}=1.5$



◉ 돌림판

○ $f(x) = 1/12$, $0 < x \le 12$



$$\int_0^{12} x \frac{1}{12} dx = \frac{1}{12} \int_0^{12} x dx = \frac{1}{12} \frac{12^2}{2} = 6$$

● 변환된 변수의 기댓값

◉ x의 확률분포 & $W = X^2$

x	-1	0	1	2
w	1	0	1	4
$P(X=x)$	0.1	0.3	0.2	0.4

- $P(W=0) = 0.3$
- $P(W=1) = 0.1 + 0.2 = 0.3$
- $P(W=4) = 0.4$

○ **W의 기댓값은?** $E(W) = \sum_{w} w f_W(w)$

$$E(W) = 0 \times 0.3 + 1 \times 0.3 + 4 \times 0.4 = 1.9$$

$\cdot\, 1 \times 0.3 = (-1)^2 \times 0.1 + 1^2 \times 0.2$

$$\Rightarrow \; E(W) = \sum_{x=-1}^{2} x^2 f_X(x) = E(X^2)$$

- 확률변수 X의 함수 $Y = g(X)$ 의 기댓값
  - 이산확률변수

$$E(Y) = E(g(X)) = \sum_x g(x) f_X(x)$$

  - 연속확률변수

$$E(Y) = E(g(X)) = \int g(x) f_X(x)\, dx$$

  - 예】 X^2 의 기댓값

· 이산확률변수: $E(X^2) = \sum_x x^2 f(x)$

· 연속확률변수: $E(X^2) = \int x^2 f(x)\, dx$

■ 기댓값의 성질

① 임의의 상수 a의 기댓값:

$$E(a) = \sum_x a f(x) = a \sum_x f(x) = a$$

② aX+b의 기댓값:

$$\begin{aligned} E(aX+b) &= \sum_x (ax+b) f(x) \\ &= a \sum_x x f(x) + b = a\,E(X) + b \end{aligned}$$

SOOKMYUNG WOMEN'S UNIVERSITY K-MOOC

③ 임의의 함수 g_1, g_2 에 대해,

$$
\begin{aligned}
E(g_1(X)+g_2(X)) &= \sum_x \{g_1(x)+g_2(x)\}f(x) \\
&= \sum_x g_1(x)f(x) + \sum_x g_2(x)f(x) \\
&= E(g_1(X)) + E(g_2(X))
\end{aligned}
$$

◉ 동전 세 개 던지기: X= 앞면의 수

- $E(X) = 1.5$

- $$E(X^2) = \sum_{x=0}^{3} x^2 f_X(x) = 3$$

- $$E((X-1.5)^2) = \sum_{x=0}^{3} (x-1.5)^2 f_X(x)$$
$$= \sum_{x=0}^{3} x^2 f_X(x) - \sum_{x=0}^{3} 3x f_X(x) + \sum_{x=0}^{3} 1.5^2 f_X(x)$$
$$= E(X^2) - 3E(X) + 1.5^2 = 0.75$$

■ 요약

- 모평균(μ) : $E(X)=\begin{cases}\sum xf(x)\\ \int xf(x)\,dx\end{cases}$

- $E(g(X))=\begin{cases}\sum g(x)f(x)\\ \int g(x)f(x)\,dx\end{cases}$

- 상수 a,b에 대해, $E(aX+b)=aE(X)+b$
- 임의의 함수 g,h에 대해,

$$E(g(X)+h(X))=E(g(X))+E(h(X))$$