■ 포아송분포(Poisson distribution)

- 이항분포에서 n 이 커지면 계산하는데 어려움이 있음

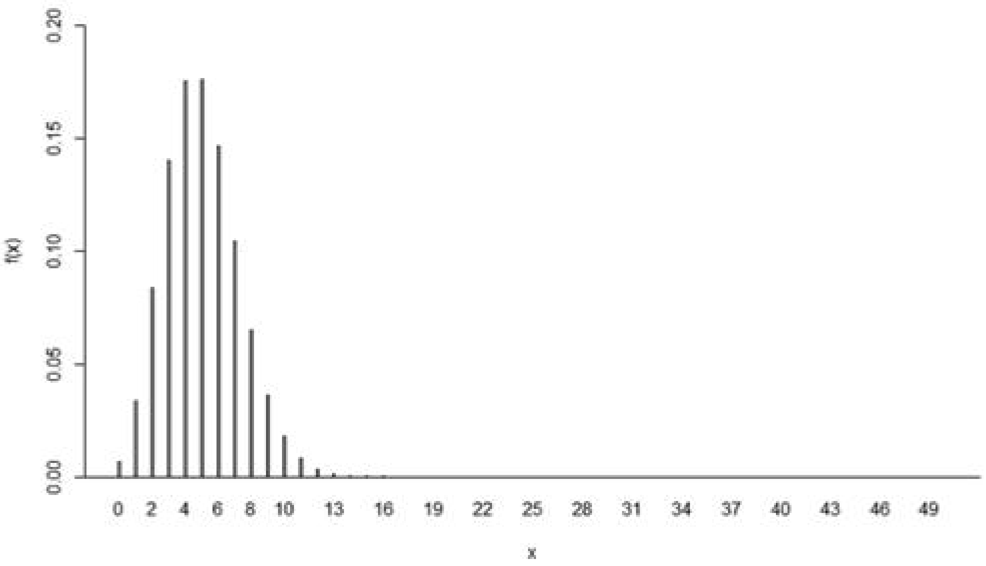
  ① p가 작은 경우(0 근처에 있는 경우)

  ② p가 큰 경우(1 근처에 있는 경우)

  ③ p가 0.5에서 멀리 떨어져 있지 않은 경우

  ○ ②의 경우 실패횟수로 문제를 바꾸면 ①과 같은 상황

- $X \sim B(n,p)$
  - ○ p가 매우 작으면 큰 x에 대한 확률은 무시할 정도로 작음
    - · 예】 $n=1000$, $p=0.005$



○ $E(X) = \lambda = np$ 라고 하면, $p = \lambda / n$

$$f(x) = \binom{n}{x} p^x (1-p)^{n-x} = \frac{n!}{x!(n-x)!}\left(\frac{\lambda}{n}\right)^x \left(1-\frac{\lambda}{n}\right)^{n-x}$$

○ n 이 커지면

- $\dfrac{n!}{(n-x)!n^x} = \dfrac{n(n-1)\cdots(n-x+1)}{n^x} \to 1$

- $\left(1-\dfrac{\lambda}{n}\right)^n \to e^{-\lambda}$, $\left(1-\dfrac{\lambda}{n}\right)^{-x} \to 1$

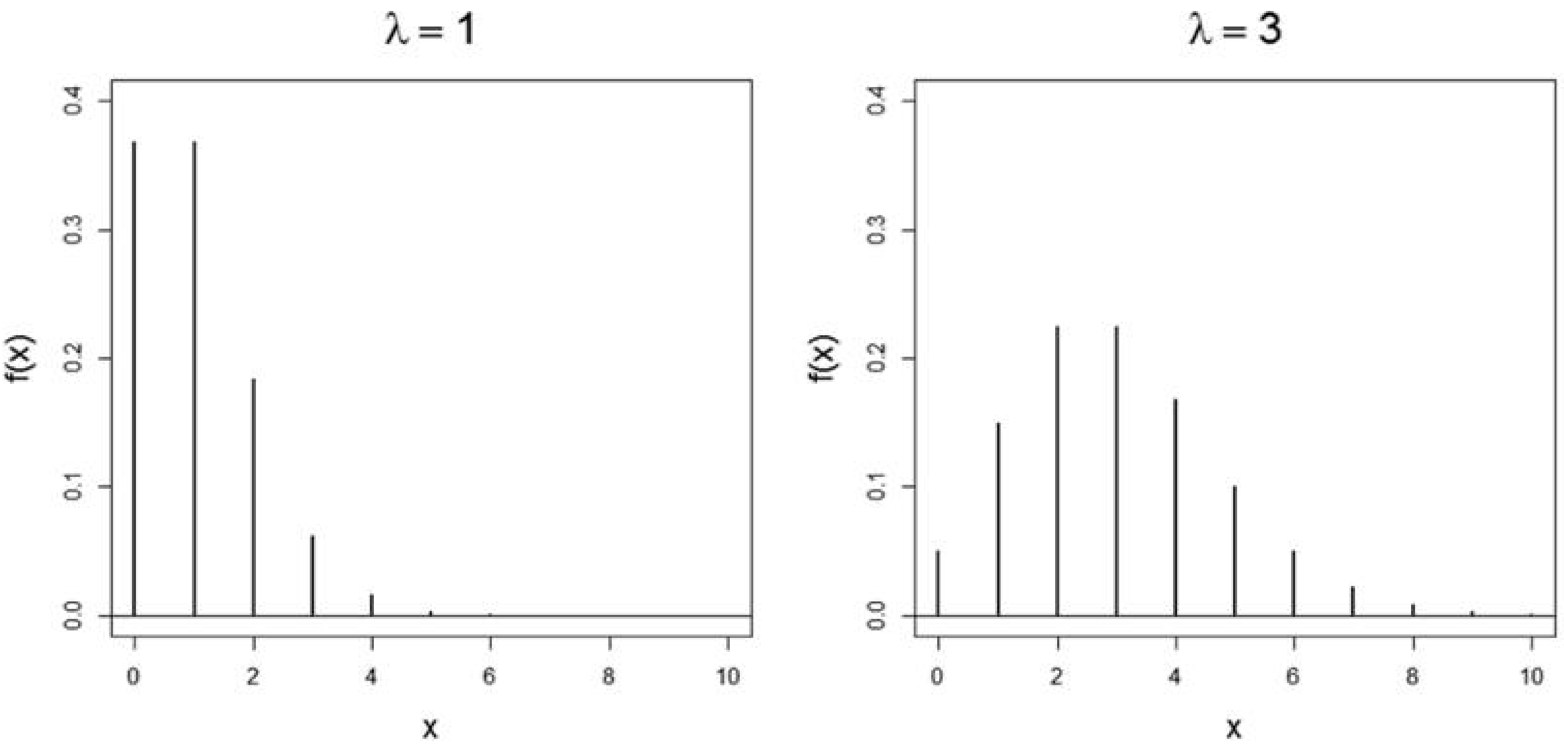
$$\Rightarrow f(x) = \binom{n}{x} p^x (1-p)^{n-x} \simeq \frac{e^{-\lambda}\lambda^x}{x!}$$

- 발생 가능성이 희박한 사건이 임의의 구간에서 평균적으로 λ번 발생
  - 구간을 나누었을 때 각 구간의 발생 빈도는 서로 독립 (independent increment)
  - 구간의 위치와 관계없이 동일 길이의 구간에서의 평균발생 빈도는 동일 (stationary increment)

- X: 위의 상황에서 해당 사건이 일어날 횟수
  - $X \sim \text{Pois}(\lambda)$

$$f(x) = \frac{e^{-\lambda}\lambda^x}{x!}, \quad x = 0, 1, \ldots .$$

  - $\displaystyle\sum_{x=0}^{\infty} \frac{\lambda^x}{x!} = e^{\lambda}$


$\lambda = 1$
f(x)
0.0
0.1
0.2
0.3
0.4
0
2
4
6
8
10
x
$\lambda = 3$
f(x)
0.0
0.1
0.2
0.3
0.4
0
2
4
6
8
10
x

◉반도체 생산 공정

- 평균 500개 중 한 개 정도가 불량품
- 불량품은 무작위로 발생
- 제작된 1500개 반도체 중 불량품이 2개 이하일 확률은?
  - · 반도체의 불량 확률 $p = 1/500$
  - · X : 1500개 반도체 중 불량품의 수

$$X \sim B(1500, 1/500)$$

$$\Rightarrow P(X \leq 2) = \sum_{x=0}^{2} \binom{1500}{x} \left(\frac{1}{500}\right)^{x} \left(\frac{499}{500}\right)^{1500-x} = 0.4230$$

· **포아송 근사:** $\lambda = 1500/500 = 3$

$$\Rightarrow P(X \leq 2) \simeq \sum_{x=0}^{2} \frac{e^{-3} 3^{x}}{x!} = 0.4232$$

● 포아송분포의 성질

○ $X \sim B(m,p)$, $Y \sim B(n,p)$ 이고, **X와 Y는 독립이면**

$$X+Y \sim B(m+n,p)$$

$\Rightarrow$ $X \sim \text{Pois}(\lambda_1)$, $Y \sim \text{Pois}(\lambda_2)$ **& X와 Y는 독립이면**

$$X+Y \sim \text{Pois}(\lambda_1+\lambda_2)$$

○ $E(X)=\lambda$

- $\displaystyle\sum_{x=0}^{\infty} x\frac{e^{-\lambda}\lambda^x}{x!} = \sum_{x=1}^{\infty} x\frac{e^{-\lambda}\lambda^x}{x!}$

- $Var(X) = \lambda$
  - 이항분포: $Var(X) = np(1-p) = \lambda(1-p) \rightarrow \lambda$
- $E(X(X-1)) = E(X^2) - E(X)$
- $Var(X) = E(X^2) - E(X)^2 = E(X(X-1)) + E(X) - E(X)^2$

● 요약

- ○ 발생가능성이 낮은 사건의 발생빈도
  - · independent increment & stationary increment
- ○ 확률질량함수: $f(x) = \dfrac{e^{-\lambda}\lambda^{x}}{x!},\ x = 0, 1, 2,\ \ldots$
- ○ $E(X) = \lambda = Var(X)$
  - · $\bar{x} \ll s^2$ 이면 포아송분포?
- ○ n 이 크고 p가 작은 이항분포의 근사확률
- ○ $X \sim \text{Pois}(\lambda_1)$, $Y \sim \text{Pois}(\lambda_2)$ X 와 Y는 독립이면

$$X + Y \sim \text{Pois}(\lambda_1 + \lambda_2)$$