■ 이항분포의 정규근사

- $X \sim B(n,p)$, n이 크고
  - ○ p가 작은 경우 ⇒ 포아송 근사
  - ○ p가 큰 경우 ⇒ 포아송 근사
  - ○ p가 0.5에서 많이 벗어나지 않은 경우 ⇒ 정규근사

◉ $X \sim B(100, 0.4)$, $E(X) = 40$

$$P(X \le 35) = \sum_{x=0}^{35} \binom{100}{x} 0.4^x 0.6^{100-x} = \mathbf{0.1795}$$

$$\not\Leftrightarrow \quad \sum_{x=0}^{35} \frac{e^{-40} 40^x}{x!} = \mathbf{0.2424}$$

- $X \sim B(n,p)$
  - X_i : i 번째 베르누이 확률변수

    ⇨ $E(X_i) = p$, $Var(X_i) = p(1-p)$
  - $X = X_1 + X_2 + \cdots + X_n$
  - $E(X) = np$, $Var(X) = np(1-p)$
  - 표본비율 : $\hat{p} = X/n = \overline{X}$
  - $E(\hat{p}) = p$
  - $Var(\hat{p}) = Var(X)/n^2 = \dfrac{p(1-p)}{n}$

- n 이 큰 경우, 중심극한정리에 의해, $\hat{p} \simeq N\left(p, \frac{p(1-p)}{n}\right)$

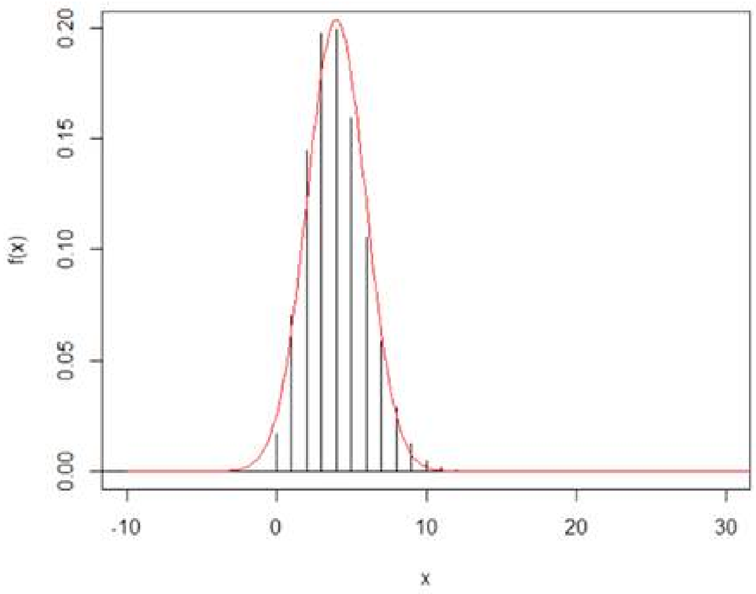
표준화 $\Rightarrow \frac{\hat{p}-p}{\sqrt{p(1-p)/n}} \simeq N(0,1)$

$\Rightarrow \frac{X-np}{\sqrt{np(1-p)}} \simeq N(0,1)$

$\Rightarrow X \simeq N(np, np(1-p))$

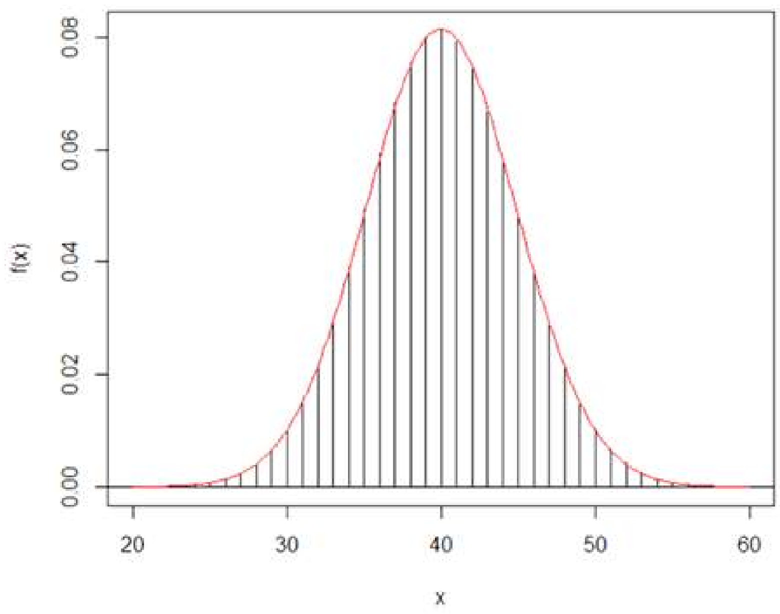
$X \sim B(100, 0.04)$

◉ $E(X) = 4$, $Var(X) = 3.84$



$X \sim B(100, 0.4)$

◉ $E(X) = 40$, $Var(X) = 24$

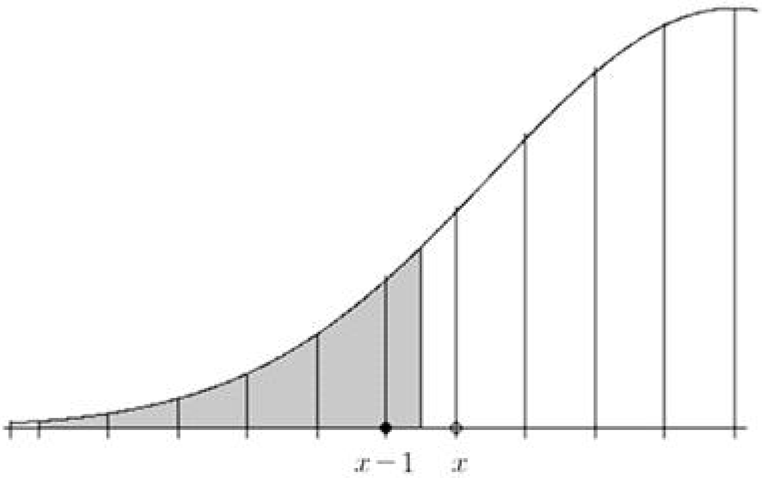


- 이항분포는 이산형이고 정규분포는 연속형
  - X가 연속확률변수이면
  - X가 이상확률변수이면

$$
\begin{array}{ccccc}
P(X \le x-1) & = & P(X < x) & \neq & P(X \le x) \\
\updownarrow & & \updownarrow & & \updownarrow \\
P\left(Z \le \dfrac{x-1-np}{\sqrt{np(1-p)}}\right) & \neq & P\left(Z < \dfrac{x-np}{\sqrt{np(1-p)}}\right) & = & P\left(Z \le \dfrac{x-np}{\sqrt{np(1-p)}}\right)
\end{array}
$$

  - $X \sim B(n, p)$일 때, $x = 0, 1, \ldots, n$ 에 대해,

$$P(X > x) = P(X \ge x+1), \quad P(X \ge x) = P(X > x-1)$$



$$\Rightarrow\ P(X<x) \simeq P\left(Z< \frac{x-1/2-np}{\sqrt{np(1-p)}}\right) \simeq P(X \le x-1)$$

$$\Rightarrow\ P(X>x) \simeq P\left(Z> \frac{x+1/2-np}{\sqrt{np(1-p)}}\right) \simeq P(X \ge x+1)$$

○ 연속성 수정(continuity correction)

◉ 여론조사

- 전체 국민 중 60%가 A 정책에 대해 찬성한다고 주장
- 150명을 무작위로 뽑아 찬성하는 사람의 비율을 알아보려고 할 때 적극 찬성하는 사람이 78명 이하일 확률은?
  - $X \sim B(150, 0.6)$ 일 때 $P(X \le 78)$?
  - 이항분포 가정 하에서의 정확한 확률 = 0.0284
  - $X \simeq N(90, 36)$

$$P(X \le 78) \simeq P\left(Z \le \frac{78-90}{6}\right) = 0.0228$$

$$P(X \le 78) \simeq P\left(Z \le \frac{78+1/2-90}{6}\right) = 0.0276$$