RAGIONAMENTO PER ASSURDO :

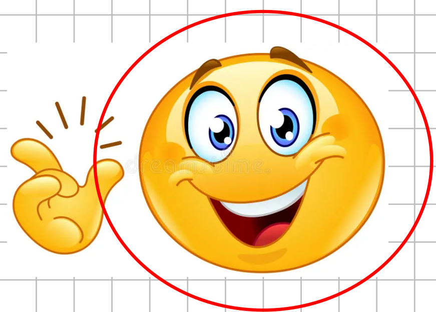
PER DIMOSTRARE $I \models P$, OVVERO P È CONSEGUENZA LOGICA DI I, È SUFFICIENTE DIMOSTRARE CHE L'UNIONE DELLE PREMESSE CON LA NEGAZIONE DI P $(\neg P)$ PORTA AD UNA CONTRADDIZIONE. (INSODDISFACIBILE)

$\Downarrow$

OVVERO $I \cup \{\neg P\}$

PASSAGGI :

1. ASSUMI IL CONTRARIO : SI ASSUME CHE LA NEGAZIONE $(\neg P)$ SIA VERA.
2. TROVA LA CONTRADDIZIONE : SI USA L'INSIEME DELLE PREMESSE (I) E L'IPOTESI $(\neg P)$ PER DEDURRE UNA CONCLUSIONE FALSA O CHE CONTRADDICE LE PREMESSE DI I.
3. CONCLUSIONE : SE $\neg P$ PORTA AD UNA CONTRADDIZIONE, $\neg P$ È FALSA, DI CONSEGUENZA LA TESI ORIGINALE P È VERA.



$\Longrightarrow$ TU IN QUESTO MOMENTO.

ES: IRRAZIONALITÀ DI $\sqrt{2}$

$$\neg P = \sqrt{2} \text{ È RAZIONALE} \Rightarrow a \in \mathbb{Q},\ m \text{ e } n \in \mathbb{Z} \text{ t.c.}$$

$$\boxed{a = \frac{m}{n}}$$

DOVE m E n NON HANNO FATTORI COMUNI (RIDOTTI AI MINIMI TERMINI)

QUINDI : $\sqrt{2} = \frac{m}{n}$

ELEVIAMO TUTTO AL QUADRATO :

QUINDI: $2 = \frac{m^2}{n^2} \Rightarrow \underline{m^2 = 2n^2} \to \underline{m^2 \text{ É PARI}}$

QUINDI ANCHE m È PARI, INFATTI SE PER ASSURDO m FOSSE DISPARI:

$$m = 2k+1 \quad k \in \mathbb{Z} \qquad m^2 = (2k+1)^2 = 4k^2+4k+1 =$$
$$= \underline{2(2k^2+2k)+1} \to \text{DISPARI} \Rightarrow \text{MA È ASSURDO QUINDI } m \text{ È PARI!}$$

QUINDI $m = 2k \Rightarrow (2k)^2 = 2n^2 \Rightarrow 4k^2 = 2n^2 \Rightarrow$
$\Rightarrow 2k^2 = n^2$

QUINDI n^2 È PARI $\Rightarrow n$ È PARI PER LO STESSO CONCETTO.

MA ALLORA n E m SE SONO ENTRAMBI PARI HANNO IL 2 COME FATTORE COMUNE, QUINDI NON SONO RIDOTTI AI MINIMI TERMINI E QUINDI È UNA CONTRADDIZIONE.

$\neg P$ = È FALSA
P = È VERA
$\sqrt{2}$ È IRRAZIONALE

RAGIONAMENTO PER INDUZIONE:

LA DIMOSTRAZIONE PER INDUZIONE È UN METODO PER PROVARE CHE UNA PROPRIETÀ È VERA PER TUTTI I NUMERI NATURALI ($\mathbb{N}$).

SIA A L'INSIEME DEI NUMERI NATURALI CHE GODONO DI UNA CERTA PROPRIETÀ.
PER DIMOSTRARE CHE $A = \mathbb{N}$ È SUFFICIENTE:

1. PASSO BASE: IL NUMERO INIZIALE (0 o 1) APPARTIENE A A.
2. PASSO INDUTTIVO: PER OGNI n_I, SE n APPARTIENE A A, ALLORA ANCHE $n+1$ APPARTIENE A A. (TESI INDUTTIVA).

ES: FORMULA DI GAUSS (SOMMA DEI PRIMI n INTERI):

DIMOSTRARE LA SEGUENTE FORMULA: $\boxed{\sum_{I=1}^{n} I = \frac{n(n+1)}{2}}$

① PASSO BASE: $n = 1$

$$\sum_{I=1}^{1} I = \frac{1 \cdot (1+1)}{2} = 1 \quad \checkmark$$

② PASSO INDUTTIVO:

- IPOTESI INDUTTIVA:

SUPPONIAMO CHE LA FORMULA SIA VERA PER n:

$$\sum_{I=1}^{n} I = \frac{n(n+1)}{2}$$

- TESI INDUTTIVA:

VOGLIAMO DIMOSTRARE CHE LA FORMULA È VERA PER $n+1$:

$$\sum_{I=1}^{n+1} I = \frac{(n+1)(n+2)}{2}$$

DIMOSTRAZIONE:

$$\sum_{I=1}^{n+1} I = \left(\sum_{I=1}^{n} I\right) + (n+1)$$ $\Rightarrow$ SOSTITUENDO L'IPOTESI INDUTTIVA.

$$\Downarrow$$

$$\sum_{I=1}^{n+1} I = \frac{n(n+1)}{2} + (n+1) = \frac{n(n+1) + (2n+2)}{2} = \frac{n(n+1) + 2(n+1)}{2} =$$

$$= \boxed{\frac{(n+1)(n+2)}{2}}$$ $\Rightarrow$ È ESATTAMENTE LA FORMULA PER $n+1$.

A cosa ci serve la dimostrazione per induzione?

Nella LP (Logica Proposizionale) molte formule si dimostrano per induzione.
Può essere fatto sull'altezza della sua corrispondente struttura ad albero.
Questo metodo è chiamato principio di induzione strutturale sulle formule.

Teorema del principio di induzione strutturale:

Sia $\mathcal{H}$ una proprietà sulle formule in LP e F una formula in LP.
Usiamo la notazione $\mathcal{H}(F)$ per indicare che "la formula F soddisfa la proprietà $\mathcal{H}$.

Se valgono i seguenti 3 punti, allora per ogni formula F in LP, vale $\mathcal{H}(F)$:

1. Per ogni formula atomica P, vale $\mathcal{H}(P)$ (caso base).
2. Per ogni formula F in LP, se vale $\mathcal{H}(F)$ (ipotesi induttiva) allora vale anche $\mathcal{H}(\neg F)$.
3. Per ogni formula F, G in LP, se valgono $\mathcal{H}(F)$ e $\mathcal{H}(G)$ (ipotesi induttiva) allora valgono anche $\mathcal{H}(F \wedge G)$, $\mathcal{H}(F \vee G)$ e $\mathcal{H}(F \Rightarrow G)$

Quindi in poche parole se una certa proprietà $\mathcal{H}$ vale per le formule atomiche (caso base) e per i connettori logici $(\neg, \vee, \wedge, \Rightarrow)$, e quindi per le sotto-formule implica allora che vale anche per le formule più complesse (passo induttivo).

ES: F = una formula in LP. P = formula atomica di F

v, w = assegnazioni

Se per ogni formula atomica P in F vale $v(P) = w(P)$ allora vale che $v^*(P) = w^*(P)$.

Dimostrazione per induzione strutturale:

① ABBIAMO LA PREMESSA $v(p) = w(p)$.

② ASSUMIAMO $v^*(F) = w^*(F)$ ALLORA

$$\boxed{v^*(\neg F)} = 1 - v^*(F) = 1 - w^*(F) = \boxed{w^*(\neg F)}$$

③ DIMOSTRIAMO PER $\vee$: SIANO F, G IN LP, ASSUMIAMO $v^*(F) = w^*(F)$ E $v^*(G) = w^*(G)$ ALLORA:

$$\boxed{v^*(F \vee G)} = v^*(F) \cdot v^*(G) = w^*(F) \cdot w^*(G) = \boxed{w^*(F \vee G)}$$

TEOREMA (DEDUCIBILITÁ E TAUTOLOGIA):

$$\boxed{\underline{G \models F} \text{ SE E SOLO SE } \underline{\models G \Rightarrow F}}$$

SONO UGUALI

DIMOSTRAZIONE 1:

ASSUMIAMO $G \models F$, OVVERO SE G PER OGNI ASSEGNAZIONE v É VERA ALLORA ANCHE F È VERA, NON CI SARĀ MAI $v^*(G) = 1$ E $v^*(F) = 0$, QUINDI $v^*(G \Rightarrow F) = 1$, CHE SI SCRIVE $\models G \Rightarrow F$.

DIMOSTRAZIONE 2:

ASSUMIAMO $\models G \Rightarrow F$ CIŌ SIGNIFICA CHE $v^*(G \Rightarrow F) = 1$ PER OGNI v. QUINDI NON C'É MAI IL CASO $v^*(G) = 1$ E $v^*(F)$, PROPRIO PER IL SIGNIFICATO DI IMPLICAZIONE VERA. PERCIŌ PER OGNI v $v^*(G) = 1$ E $v^*(F) = 1$ CIOÉ:
$G \models F$.

ORA METTIAMO CASO DI AVERE QUESTE PREMESSE E DI VOLER DEDURRE (e):

(a) Se Carlo è un filosofo e Giovanni non è un matematico, allora Elena è una musicista

(b) Se Elena è una musicista, allora Lucia è una pittrice oppure Giovanni è un matematico

(c) Se Lucia non è una pittrice, allora Carlo è un filosofo

(d) Giovanni non è un matematico

Vogliamo dimostrare che queste quattro affermazioni implicano la seguente:

(e) Lucia è una pittrice

LE CODIFICHIAMO USANDO VARIABILI PROPOSIZIONALI :

Associamo le seguenti proposizioni atomiche alle parti che costituiscono le affermazioni precedenti nel seguente modo:

- la lettera A sta per "Carlo è un filosofo"
- la lettera B sta per "Giovanni è un matematico"
- la lettera C sta per "Elena è una musicista"
- la lettera D sta per "Lucia è una pittrice"

Le affermazioni sopra vengono dunque tradotto in formule in LP nel seguente modo:

(a) $(A \wedge \neg B) \Rightarrow C$

(b) $C \Rightarrow (D \vee B)$

(c) $\neg D \Rightarrow A$

(d) $\neg B$

(e) D

QUINDI VOGLIAMO DIMOSTRARE CHE :

$$\{(A \wedge \neg B) \Rightarrow C, C \Rightarrow (D \vee B), \neg D \Rightarrow A, \neg B\} \models D$$

POSSIAMO MOSTRARE CHE È UNA TAUTOLOGIA :

$$(((A \wedge \neg B) \Rightarrow C) \wedge (C \Rightarrow (D \vee B)) \wedge (\neg D \Rightarrow A) \wedge (\neg B)) \Rightarrow D$$

A	B	C	D	(a)	(b)	(c)	(d)	$(a) \wedge (b) \wedge (c) \wedge (d)$	P
0	0	0	0	1	1	0	1	0	1
0	0	0	1	1	1	1	1	1	1
0	0	1	0	1	0	0	1	0	1
0	0	1	1	1	1	1	1	1	1
0	1	0	0	1	1	0	0	0	1
0	1	0	1	1	1	1	0	0	1
0	1	1	0	1	1	0	0	0	1
0	1	1	1	1	1	1	0	0	1
1	0	0	0	0	1	1	1	0	1
1	0	0	1	0	1	1	1	0	1
1	0	1	0	1	0	1	1	0	1
1	0	1	1	1	1	1	1	1	1
1	1	0	0	1	1	1	0	0	1
1	1	0	1	1	1	1	0	0	1
1	1	1	0	1	1	1	0	0	1
1	1	1	1	1	1	1	0	0	1

CONSEGUENZA LOGICA E CONNETTIVO $\vee$ (OR):

DATE 2 FORMULE F, G, OSSERVIAMO CHE $\Gamma \models F \vee G$ NON SEGUE:

$$\boxed{\cancel{\Gamma \models F \text{ OPPURE } \Gamma \models G.}}$$

NO!!

CONSEGUENZA LOGICA E CONNETTIVO $\wedge$ (AND):

DATE 2 FORMULE F, G, OSSERVIAMO CHE $\Gamma \models F \wedge G$ SEGUE:

$$\boxed{\Gamma \models F \quad \text{E} \quad \Gamma \models G.}$$

SOSTITUZIONE DI VARIABILI PROPOSIZIONALI:

DEF: 2 FORMULE SI DICONO SINTATTICAMENTE EQUIVALENTI $(F \equiv G)$ SE VALE $\models F \iff G$, OVVERO $v^*(F) = v^*(G)$ PER DEFINIZIONE DI DOPPIA IMPLICAZIONE.

DEF: F, G SONO 2 FORMULE IN LP, P UNA VARIABILE ATOMICA, $F[G|P]$ È LA FORMULA CHE SI OTTIENE RIMPIAZZANDO TUTTE LE OCCORRENZE DI P CON G.

ES: $F = (p \wedge q) \Rightarrow (\neg p \wedge r)$, $G = q \vee r$ QUINDI:

$$\boxed{F = ((q \vee r) \wedge q) \Rightarrow (\neg(q \vee r) \wedge r).}$$

UNA FORMULA IN LP È DETTA:

- LETTERALE $\rightarrow$ SE F È UNA VARIABILE ATOMICA O UNA NEGAZIONE DI ESSA.
- DISGIUNZIONE $\rightarrow$ $F = L_1 \vee L_2 \vee \dots \vee L_k$, DOVE L_i SONO LETTERALI, PER OGNI $1 \leq i \leq k$.
- CONGIUNZIONE $\rightarrow$ $F = L_1 \wedge L_2 \wedge \dots L_k$, DOVE L_i SONO LETTERALI, PER OGNI $1 \leq i \leq k$.

Forma normale congiuntiva:

Una formula $F = D_1 \wedge D_2 \wedge \ldots \wedge D_N$ è una forma normale congiuntiva (FNC) dove D_I sono disgiunzioni con $1 \leq I \leq N$.

Forma normale disgiuntiva:

Una formula $F = D_1 \vee D_2 \vee \ldots \vee D_N$ è una forma normale disgiuntiva (FNC) dove D_I sono congiunzioni con $1 \leq I \leq N$.

ES:

- $F = (p \vee \neg q) \wedge (\neg p \vee r)$ FNC
- $F = (p \wedge \neg q) \vee (\neg p \wedge r)$ FND
- $F = \neg p \wedge q$ FND e FND $(I = 1)$

Per ogni formula F esiste G in FNC e H in FND tali che:

$$\boxed{F \equiv G \quad e \quad F \equiv H}$$

Come si trovano le FNC e FND?

ES: $F = (A \Rightarrow C) \Rightarrow (\neg B \vee A)$

A	B	C	$A \Rightarrow C$	$\neg B \vee A$	Y	
0	0	0	1	1	1	FND
0	0	1	1	1	1	
0	1	0	1	0	0	FNC
0	1	1	1	0	0	
1	0	0	0	1	1	FND
1	0	1	1	1	1	
1	1	0	0	1	1	
1	1	1	1	1	1	

FNC PREVEDE CHE OGNI ASSEGNAZIONE VERA (1) SI NEGA QUINDI:

A	B	C			
0	1	0	1	0	0
0	1	1	1	0	0

FNC

$$F \equiv (A \lor \neg B \lor C) \land (A \lor \neg B \lor \neg C)$$

FND PREVEDE CHE OGNI ASSEGNAZIONE FALSA (0) SI NEGA QUINDI:

A	B	C			
0	0	0	1	1	1
0	0	1	1	1	1
1	0	0	0	1	1
1	0	1	1	1	1
1	1	0	0	1	1
1	1	1	1	1	1

FND

FND

$$F \equiv (\neg A \land \neg B \land \neg C) \lor (\neg A \land \neg B \land C) \lor (A \land \neg B \land \neg C) \lor$$
$$(A \land \neg B \land C) \lor (A \land B \land \neg C) \lor (A \land B \land C)$$

SISTEMI DEDUTTIVI:

IMMAGINIAMO DI AVERE $\Gamma = \{A \Rightarrow B,\ A \Rightarrow (B \Rightarrow C)\}$ E VOGLIAMO DEDURRE $A \Rightarrow C$:

↳ ASSUMENDO A VOGLIAMO DEDURRE C.

ASSUMIAMO A, CON $A \Rightarrow B$, POSSIAMO DEDURRE B (SE $A = 1$, ALLORA ANCHE $B = 1$), CON $A \Rightarrow (B \Rightarrow C)$, POSSIAMO DEDURRE $B \Rightarrow C$, E VISTO CHE ABBIAMO DEDOTTO SIA B CHE $B \Rightarrow C$, ALLORA POSSIAMO DEDURRE C. QUINDI SIAMO PARTITI ASSUMENDO A E SIAMO ARRIVATI A DEDURRE C, E DA QUANTO CONTENUTO IN Γ, POSSIAMO DEDURRE $A \Rightarrow C$.

INTRODUCIAMO LA NOTAZIONE:

$$\boxed{\Gamma \vdash F}$$

INSIEME DI FORMULE IN LP.

DEDURRE F.

CON UNA SERIE DI PRECISE REGOLE DI DEDUZIONE OTTENERE DA ALCUNE FORMULE ALTRE FORMULE CON I CONNETTIVI LOGICI.

QUESTE SONO LE SEGUENTI REGOLE DI DEDUZIONE:

- REGOLA 1: $\wedge$- ELIMINAZIONE:

$$\boxed{F \wedge G \vdash F}$$

K. $F \wedge G$

K+1. F

PARTENDO DA $F \wedge G$ POSSO DEDURRE F.

OVVIAMENTE VALE ANCHE:

$$\boxed{F \wedge G \vdash G}$$

K. $F \wedge G$

K+1. G

- REGOLA 2: $\wedge$- INTRODUZIONE:

$$\boxed{F, G \vdash F \wedge G}$$

K. F

. . .

N. G

N+1. $F \wedge G$

PARTENDO DA F, G POSSO DEDURRE $F \wedge G$.

- REGOLA 3: $\vee$ - INTRODUZIONE:

$$\boxed{F \vdash F \vee G}$$

K. F

K+1. $F \vee G$

PARTENDO DA F POSSO DEDURRE $F \vee G$ (SE HO F ALLORA 'V' SARÀ SEMPRE VERO)

- REGOLA 4: ∨-ELIMINAZIONE:

$$\boxed{F \vee G, \neg G \vdash F}$$

K. $F \vee G$
. . .
N. $\neg G$
N+1. F

A PARTIRE DA $F \vee G$ E $\neg G$ POSSO DEDURRE F.
(SE HO $F \vee G$ E $\neg G$, $F \vee \neg G$ È VERO SOLO CON F)

- REGOLA 5: ⇒-ELIMINAZIONE (MODUS PONENS):

$$\boxed{F \Rightarrow G, F \vdash G}$$

K. $F \Rightarrow G$
. . .
N. F
N+1. G

A PARTIRE DA $F \Rightarrow G$ E F, DEDUCO G ($F \Rightarrow G$ CON F È VERO CON G VERO)

- REGOLA 6: ⇒-INTRODUZIONE (CON SOTTODERIVAZIONE)

. . .
K*. F
* . . .
N*. G
N+1. $F \Rightarrow G$

IN UN MONDO IPOTETICO ASSUMIAMO F E DEDUCIAMO G ALLORA $F \Rightarrow G$

- REGOLA 7: ¬-INTRODUZIONE (CON SOTTODERIVAZIONE)

. . .
K*. F
* . . .
M*. G
* . . .
N*. $\neg G$
N+1. $\neg F$

CONTRADDIZIONE

SE SEMPRE NEL MONDO IPOTETICO ASSUMESSIMO F E DEDUCESSIMO SIA G CHE $\neg G$, ALLORA LA F IN PARTENZA È SBAGLIATA QUINDI $\neg F$.

ES:

$$\Gamma = \{A \Rightarrow B,\ A \Rightarrow (B \Rightarrow C)\}$$

$$\boxed{\Gamma \vdash A \Rightarrow C}$$

1.	$A \Rightarrow B$	(PREMESSA)
2.	$A \Rightarrow (B \Rightarrow C)$	(PREMESSA)
3*.	A	(ASSUNZIONE)
4*.	$A \Rightarrow B$	(IMPORTAZIONE DA 1.)
5*.	B	($\Rightarrow$-ELIM. DA 3 E 4)
6*.	$A \Rightarrow (B \Rightarrow C)$	(IMPORT. DA 2.)
7*.	$B \Rightarrow C$	($\Rightarrow$-ELIM. DA 3 E 6)
8*.	C	($\Rightarrow$-ELIM. DA 5 E 7)
9	$A \Rightarrow C$	($\Rightarrow$-INTROD. DA 3 E 8)