

Contrôle TD n° 1 : Version corrigée

Licence 1^{er} année, Math2C, groupe MI2-M

20 Février 2024

Exercice 1

Trouver la primitive de les fonctions suivantes et indiquer le domaine de définition de chaque primitive:

1. $f(x) = x^3 e^{x^2}$ (Indication: utiliser le changement de variable $u(x) = x^2$ puis intégration par parties).

Solution : Soit le changement de variable $u = x^2$, ça implique que $du = 2xdx$ (en fait $du/2 = xdx$), alors on obtient que

$$\int x^3 e^{x^2} dx = \frac{1}{2} \int u e^u du.$$

En faisant intégration par parties, on pose $v = u$ et $w' = e^u$, donc $v' = 1$ et $w = e^u$, puis

$$\int u e^u du = u e^u - \int e^u du = e^u (u - 1) + c.$$

Finalement, $\int x^3 e^{x^2} dx = \frac{e^{x^2}}{2} (x^2 - 1) + c$, où c est une constante réelle. Clairement le domaine de définition est $D = \mathbb{R}$.

2. $g(x) = \frac{6x}{(x+1)(x-2)}$ (Indication: utiliser fractions partielles)

Solution : On écrit $\frac{6x}{(x+1)(x-2)} = \frac{a}{x+1} + \frac{b}{x-2}$, alors

$$\begin{aligned} \frac{a}{x+1} + \frac{b}{x-2} &= \frac{a(x-2) + b(x+1)}{(x+1)(x-2)} \\ &= \frac{x(a+b) + (-2a+b)}{(x+1)(x-2)} \end{aligned}$$

d'où on obtient le système d'équations

$$\begin{cases} a + b = 6 \\ -2a + b = 0 \end{cases}$$

c'est-à-dire $a = 2$ et $b = 4$. Donc

$$\begin{aligned} \int \frac{8}{(x-1)(x+3)} dx &= 2 \int \frac{dx}{x+1} + 4 \int \frac{dx}{x-2} \\ &= 2 \ln(|x+1|) + 4 \ln(|x-2|) + c \\ &= \ln((x+1)^2 (x-2)^4) + c, \end{aligned}$$

où c est une constante réelle. Domaine de définition $D = \mathbb{R} \setminus \{-1, 2\}$.

Exercice 2

Trouver la solution générale des EDO suivantes:

1. $y' + x(\sinh(x))y = 0$.

Solution : L'équation est de variables séparées (si $y(x) \neq 0$)

$$\begin{aligned}\frac{y'}{y} &= -x \sinh(x) \iff \int \frac{dy}{y} = - \int x \sinh(x) dx \\ \ln(|y|) &= -x \cosh(x) + \int \cosh(x) dx \\ \ln(|y|) &= -x \cosh(x) + \sinh(x) + c \\ |y(x)| &= K e^{-x \cosh(x) + \sinh(x)}\end{aligned}$$

où K est une constante positive. Alors la solution générale est $y(x) = K e^{-x \cosh(x) + \sinh(x)}$ où maintenant K est une constante réelle.

Addendum : Noter que si on a le problème de Cauchy

$$\begin{cases} y' + x \sinh(x)y = 0 \\ y(x_0) = y_0, \end{cases}$$

si la condition initiale y_0 est négative, alors K est négative et si $y_0 > 0$ alors $K > 0$. Si la condition initiale est égale à 0 alors on a une solution constante nulle.

Exercice 3

Résoudre les problèmes de Cauchy suivants

$$(1) \begin{cases} (1+x^2)y' + y = 1 \\ y(0) = 2, \end{cases} \quad (2) \begin{cases} (1+x^2)y' + y = 1 \\ y(0) = 1 \end{cases}$$

Solution : L'équation (2) admet une solution constante $y(x) = 1$. Pour l'équation (1) on sépare les variables

$$\begin{aligned}\frac{y'}{1-y} &= \frac{1}{1+x^2} \iff \int \frac{dy}{1-y} = \int \frac{dx}{1+x^2} \\ -\ln(|1-y|) &= \arctan(x) + c\end{aligned}$$

Évaluant dans $x = 0$ on obtient que $c = 0$. Alors $|2-y| = e^{-\arctan(x)}$, comme $y(0) = 2$ donc $1-y(0) < 0$, en particulier il existe un voisinage I contenant $x = 0$ où $2-y(x) < 0$ pour tout $x \in I$. Dans ce cas on obtient $y(x) = e^{-\arctan(x)} - 2$.

Addendum : Les solutions sont clairement continues dans $D = \mathbb{R}$. Ci-dessous, vous trouverez le champ de tangentes associé à l'équation, avec la représentation graphique des solutions.

Figure 1: Champ de tangentes avec la solution pour $y(0) = 1$.

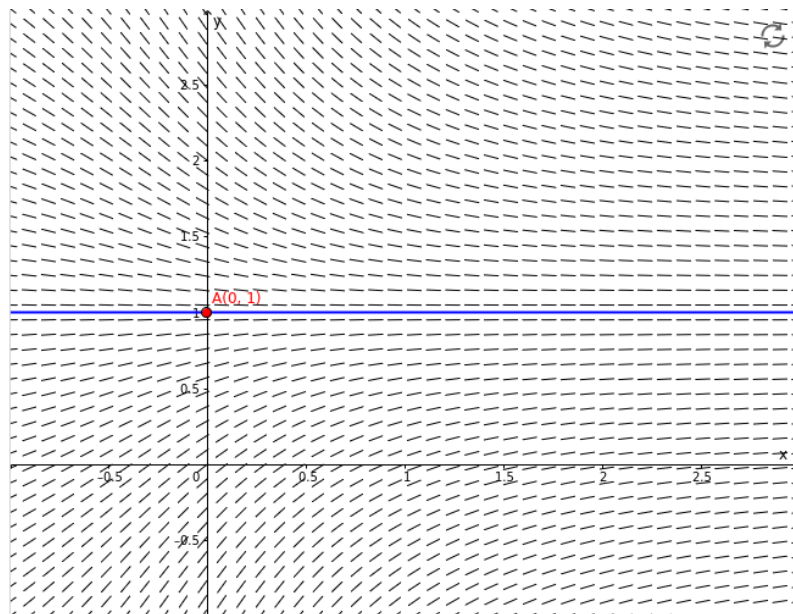


Figure 2: Champ de tangentes avec la solution pour $y(0) = 2$.

