Contrôle TD n° 2

Licence 1$^{\text{er}}$ année, Math2C

26 avril 2023

Exercice 1

Résoudre les équations differentielles suivantes:

1. $y'' - y' + 6y = xe^{-x} + e^{4x}$;

   Le polynôme associé à cette équation est $P(r) = r^2 - r + 6$ d'où on obtient les racines $r_1 = \dfrac{1 + i\sqrt{23}}{2}$ et $r_2 = \dfrac{1 - i\sqrt{23}}{2}$, alors la solution homogène est

$$y_h(x) = e^{x/2}\left(c_1 \cos\left(\frac{\sqrt{23}}{2}x\right) + c_2 \sin\left(\frac{\sqrt{23}}{2}x\right)\right).$$

   Puis que $\alpha_1 = -1$ et $\alpha_2 = 4$ ne sont pas des racines de $P(r)$, on a que la solution particulière est de la forme

$$\begin{aligned} y_p(x) &= y_{p_1}(x) + y_{p_2}(x) \\ &= (ax + b)e^{-x} + ce^{4x}. \end{aligned}$$

   Pour déterminer les constantes a, b et c on fait de qui suit :

$$\begin{aligned} y'_{p_1}(x) &= -(ax + b)e^{-x} + ae^{-x} \\ y''_{p_1}(x) &= (ax + b)e^{-x} - 2ae^{-x}, \end{aligned}$$

   alors,

$$\begin{aligned} y''_{p_1}(x) - y'_{p_1}(x) + 6y_{p_1}(x) &= (ax + b)e^{-x} - 2ae^{-x} + (ax + b)e^{-x} - ae^{-x} + 6(ax + b)e^{-x} \\ &= 8(ax + b)e^{-x} - 3ae^{-x} \\ &= (8ax + 8b - 3a)e^{-x} = xe^{-x}. \end{aligned}$$

   Alors $8a = 1$ et $8b - 3a = 0$, c'est-à-dire $y_{p_1}(x) = \left(\dfrac{x}{8} + \dfrac{3}{64}\right)e^{-x}$. Pour $y_{p_2}(x)$ on a $y'_{p_2}(x) = 4ce^{4x}$ et $y''_{p_2}(x) = 16ce^{4x}$, alors

$$\begin{aligned} y''_{p_2}(x) - y'_{p_2}(x) + 6y_{p_2}(x) &= (16c - 4c + 6c)e^{4x} \\ &= 18ce^{4x} = e^{4x}. \end{aligned}$$

   Alors on obtient la solution

$$y(x) = e^{x/2}\left(c_1 \cos\left(\frac{\sqrt{23}}{2}x\right) + c_2 \sin\left(\frac{\sqrt{23}}{2}x\right)\right) + \left(\frac{x}{8} + \frac{3}{64}\right)e^{-x} + \frac{1}{18}e^{4x}.$$

2. $2yy' + \dfrac{1+y^2}{x^2} = 0$;

   Cette équation est de varibles separées, alors

$$\begin{aligned} 2yy' + \frac{1+y^2}{x} = 0 &\iff \frac{2yy'}{1+y^2} = -\frac{1}{x^2} \\ &\implies \ln(1+y^2) = \frac{1}{x} + c \\ &\iff 1+y^2 = ce^{\frac{1}{x}} \\ &\iff y(x) = \pm\sqrt{ce^{\frac{1}{x}} - 1}. \end{aligned}$$

1 Exercice 2

Considere l'équation differentielle $x^2y'' + 2xy' - 6y = 0$:

1. Soit $\mathcal{S}$ l'ensemble des solutions réelles de l'équation. Montrer que S est un espace vectoriel réel.

   Clarement $0 \in \mathcal{S}$. Soient $y_1, y_2 \in \mathcal{S}$ deux solutions et $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. On pose $y(x) := \alpha y_1(x) + \beta y_2(x)$, alors $y'(x) = \alpha y_1'(x) + \beta y_2'(x)$ et $y''(x) = \alpha y_1''(x) + \beta y_2''(x)$, si on remplace y dans l'équation

$$\begin{aligned} x^2y'' + 2xy' - 6y &= x^2\left(\alpha y_1'' + \beta y_2''\right) + 2x\left(\alpha y_1' + \beta y_2'\right) - 6\left(\alpha y_1 + \beta y_2\right) \\ &= \alpha \underbrace{\left(x^2y_1'' + 2xy_1' - 6y_1\right)}_{=0} + \beta \underbrace{\left(x^2y_2'' + 2xy_2' - 6y_2\right)}_{=0} \\ &= 0 \end{aligned}$$

   Alors $y \in \mathcal{S}$.

2. En sachant que les solutions ont la forme $x \mapsto x^n$, où $n \in \mathbb{R}$, trouver une base de $\mathcal{S}$.

   Soit $y = x^n$ une solution, alors $y'(x) = nx^{n-1}$ et $y''(x) = n(n-1)x^{n-2}$. En utilisant les expression on a

$$\begin{aligned} x^2y'' + 2xy' - 6y &= x^2n(n-1)x^{n-2} + 2xnx^{n-1} - 6x^n \\ &= x^n\left(n(n-1) + 2n - 6\right) \\ &= x^n\left(n^2 + n - 6\right) \qquad = 0, \end{aligned}$$

   d'où on obtient que $n^2 + n - 6 = 0$ alors $n_1 = -3$ et $n_2 = 2$. Donc la solution de l'équation est

$$y(x) = \frac{c_1}{x^3} + c_2x^2.$$

   Une base pour $\mathcal{S}$ est $\{x^{-3}, x^2\}$.

3. Trouver la solution de $x^2y'' + 2xy' - 6y = x^3$

   En sachant que las solutions de l'équation homogène associée est $y_1(x) = \frac{1}{x^3}$ et $y_2(x) = x^2$, on peut utiliser la méthode du wrosnkien. Dans sa forme canonique, la fonction $q(x)$ est égale à x, et le wronskien est

$$W[y_1, y_2](x) = \frac{1}{x^3} \cdot 2x + \frac{3}{x^4} \cdot x^2 = \frac{5}{x^2}$$

Puis

$$\begin{aligned}
u(x) &= -\int^x \frac{y_2(t)q(t)}{W[y_1,y_2](t)}dt \\
&= -\int^x \frac{t^2\cdot t\cdot t^2}{5}dt \\
&= -\frac{x^6}{30} \\
v(x) &= \int^x \frac{y_1(t)q(t)}{W[y_1,y_2](t)}dt \\
&= \int^x \frac{t\cdot t^2}{5t^3}dt \\
&= \int^x \frac{1}{5}dt = \frac{x}{5}
\end{aligned}$$

Alors la solution particulière est de la forme

$$\begin{aligned}
y_p(x) &= u(x)y_1(x) + v(x)y_2(x) \\
&= -\frac{x^6}{30}\cdot\frac{1}{x^3} + \frac{x}{5}\cdot x^2 = \frac{x^3}{6}
\end{aligned}$$

et finalement, $y(x) = \dfrac{c_1}{x^7} + c_2x^3 + \dfrac{x^3}{6}$.

Exercice 2

Résoudre le problème de Cauchy suivant:

$$\begin{cases} y'' + 2y' - 3y = 0, \\ y(0) = 1, \\ y'(0) = 2. \end{cases} \tag{1}$$

Le polynôme associé à l'équation est $P(r) = r^2 + 2r - 3$, alors les racines sont $r_1 = 1$ et $r_2 = -3$, donc la solution est

$$y(x) = c_1e^x + c_2e^{-3x}$$

Pour déterminer les constantes c_1 et c_2, on dérive la fonction $y(x)$ en résultant $y'(x) = c_1e^x - 3c_2e^{-3x}$, alors

$$\begin{aligned}
y(0) &= c_1 + c_2 = 1 \\
y'(0) &= c_1 - 3c_2 = 2
\end{aligned}$$

alors $c_2 = -1/4$ et $c_1 = 5/4$, puis $y(x) = \dfrac{5e^{-x}}{4} - \dfrac{e^{3x}}{4}$