Contrôle TD n° 1

L1/S2, Mathématiques, groupe D

23 Février 2024

Exercice 1

On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = 0$ et la relation de récurrence $u_{n+1} = \frac{1}{2}u_n + \frac{1}{4}$. Montrer que la suite (v_n) définie par $v_n = u_n - \frac{1}{2}$ est géometrique de raison 1/2. En déduire l'expression générale de v_n puis celle de u_n. Déterminer $\lim_{n\to\infty} u_n$.

Solution : Soit la suite (u_n) définie par la relation de récurrence $u_{n+1} = \frac{1}{2}u_n + \frac{1}{4}$ et $v_n = u_n - \frac{1}{2}$. Si on considère v_{n+1} alors on obtient

$$\begin{aligned} v_{n+1} &= u_{n+1} - \frac{1}{2} \\ &= (\frac{1}{2}u_n + \frac{1}{4}) - \frac{1}{2} \text{ (en utilisant que } u_{n+1} = \frac{1}{2}u_n + \frac{1}{4}) \\ &= \frac{1}{2}u_n - \frac{1}{4} = \frac{1}{2}\left(u_n - \frac{1}{2}\right). \end{aligned}$$

Comme $v_n = u_n - \frac{1}{2}$, on obtient une relation de récurrence pour la suite (v_n) donnée par $v_{n+1} = \frac{1}{2}v_n$, donc (v_n) est une suite géometrique de raison $r = 2$. Par la formule vue en TD on a que la formule générale pour (v_n) est $v_n = v_0 r^n$ pour $n \geq 0$, et comme $v_0 = \frac{1}{4}$, c'est-à-dire $v_n = \dfrac{1}{4}\left(\dfrac{1}{2}\right)^n = \dfrac{1}{2^{n+2}}$. Avec cette expression, on reobtient que $v_n = \frac{1}{2^{n+2}} = u_n - \frac{1}{2}$ pour tout $n \geq 0$, donc $u_n = \frac{1}{2^{n+2}} + \frac{1}{2}$. En utilisant l'expression prédédent on a $\lim_{n\to+\infty} u_n = 1/2$.

Exercice 2

Déterminer la limite en a de la fonction f dans chacun des cas suivants :

1. $f(x) = \dfrac{x^2+2}{5x^2+x+9}$; $a = \infty$.

   Solution : La fonction $f(x)$ est le quotient de deux pôlynomes $p(x) = x^2+2$ et $q(x) = 5x^2 + x + 9$ oú $\lim_{x\to a} p(x) = +\infty$ et aussi $\lim_{x\to a} q(x) = +\infty$, donc on a une forme indeterminée ∞/∞. On regarde que la function $f(x)$ peut être écrit de la forme suivante :

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{x^2+2}{5x^2+x+9} \\ &= \frac{x^2(1+2/x^2)}{x^2(5+1/x+9/x^2)} \\ &= \frac{1+2/x^2}{5+1/x+9/x^2} \end{aligned}$$

   Donc ou peut l'écrire comme un quotient de deux fonctions $\tilde{p}(x) = 1 + 2/x^2$ et $\tilde{q}(x) = 5 + 1/x + 9/x^2$, d'où on obtient $\lim_{x\to\infty} \tilde{p}(x) = 1$ et $\lim_{x\to\infty} \tilde{q}(x) = 5$. Comme les limites de $\tilde{p}(x)$ et $\tilde{q}(x)$ existent, alors la limite de $f(x)$ dans $a = \infty$ est le quotient des limites des fonctions $\tilde{p}(x)$ et $\tilde{q}(x)$ dans $a = \infty$, alors $\displaystyle\lim_{x\to\infty} f(x) = \frac{1}{5}$.

2. $f(x) = xe^x$; $a = \infty$.

   Solution : La fonction f est le produit de deux fonctions, $q(x) = x$ et $r(x) = e^x$. Comme $\lim_{x\to+\infty} x = +\infty$ et pareil pour $\lim_{x\to+\infty} e^x = +\infty$, alors $\lim_{x\to+\infty} xe^x = +\infty$.

Exercice 3

1. Calculer la dérivée de la fonction $f(x) = \dfrac{\ln(x)}{1+x^2}$.

   Solution : On écrit la fonction comme le quotient de deux fonctions $u(x) = \ln(x)$ et $v(x) = 1 + x^2$. La formule pour la dérivée du quotient nous donne

$$\begin{aligned} f'(x) &= \left(\frac{u(x)}{v(x)}\right)' \\ &= \frac{u'(x)v(x) - u(x)v'(x)}{(v(x))^2} \end{aligned}$$

   comme $u'(x) = \frac{1}{x}$ et $v'(x) = 2x$, en reemplaçant finalement on obtient

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{\frac{1}{x}(1+x^2) - \ln(x)2x}{(1+x^2)^2} \\ &= \frac{1 + x^2 - 2x^2\ln(x)}{x(1+x^2)^2}. \end{aligned}$$

2. Déterminer le $DL_2(0)$ de la fonction $f(x) = xe^x$.

   Solution : Pour déterminer le $DL_2(0)$ il faut déterminer $f'(0)$ et $f''(0)$. Comme la fonction f est le produit de deux fonctions, on applique la formule la dérivée de produit, alors on obtient que

$$f'(x) = 1 \cdot e^x + x \cdot e^x = xe^x + e^x = (x+1)e^x.$$

   en applicant la dérivée de produit pour obtenir $f''(x)$ on a

$$f''(x) = 1 \cdot e^x + (x+1) \cdot e^x = (x+2)e^x.$$

   Alors on obtient que $f'(0) = 1$ et $f''(x) = 2$, donc le $DL_2(0)$ de f est

$$\begin{aligned} f(x) &= 0 + 1 \cdot (x-0) + \frac{2}{2}(x-0)^2 + \epsilon(x) \\ &= x + x^2 + \epsilon(x). \end{aligned}$$