Kunci Kode Soal Ujian: B

Soal 1 [Bobot 15%]

(a) Menentukan Frekuensi Dasar ω_0

Frekuensi komponen penyusun sinyal adalah:

- $\omega_1 = \frac{2\pi}{5}$ rad/s
- $\omega_2 = \frac{4\pi}{5}$ rad/s

Frekuensi dasar (ω_0) adalah faktor persekutuan terbesar (FPB) dari kedua frekuensi tersebut:

$$\omega_0 = \text{FPB}\left(\frac{2\pi}{5}, \frac{4\pi}{5}\right) = \frac{2\pi}{5} \text{ rad/s}$$

Dengan demikian:

- Komponen cosinus berada pada harmonik ke-1 ($k = 1$).
- Komponen sinus berada pada harmonik ke-2 ($k = 2$).

(b) Menentukan Koefisien Deret Fourier a_k

Ubah ke bentuk eksponensial menggunakan rumus Euler ($1/j = -j$):

$$\begin{aligned}
x(t) &= 1 - 4\left(\frac{e^{j\omega_0 t} + e^{-j\omega_0 t}}{2}\right) + 3\left(\frac{e^{j2\omega_0 t} - e^{-j2\omega_0 t}}{2j}\right) \\
&= 1 - 2e^{j\omega_0 t} - 2e^{-j\omega_0 t} + \frac{3}{2j}e^{j2\omega_0 t} - \frac{3}{2j}e^{-j2\omega_0 t} \\
&= 1 - 2e^{j\omega_0 t} - 2e^{-j\omega_0 t} - 1.5je^{j2\omega_0 t} + 1.5je^{-j2\omega_0 t}
\end{aligned}$$

Maka, nilai koefisien a_k adalah:

- $a_0 = 1$
- $a_1 = -2$
- $a_{-1} = -2$
- $a_2 = -1.5j$
- $a_{-2} = 1.5j$
- $a_k = 0$ untuk nilai k lainnya.

Soal 2 [Bobot 10%]

Hasil Akhir

$$X(\omega) = \frac{e^{-j\omega}}{4 + j\omega}$$

Langkah Pengerjaan Singkat

Kita menggunakan **properti pergeseran waktu** (*time shifting property*) pada pasangan transformasi standar.

1. **Transformasi Standar:** Diketahui bahwa transformasi untuk sinyal eksponensial dasar $e^{-at}u(t)$ dengan $a = 4$ adalah:

$$e^{-4t}u(t) \overset{\mathcal{F}}{\longleftrightarrow} \frac{1}{4 + j\omega}$$

2. **Properti Pergeseran Waktu:** Jika sinyal digeser sebesar t_0 (tertunda), maka transformasinya dikalikan dengan $e^{-j\omega t_0}$:

$$x(t - t_0) \overset{\mathcal{F}}{\longleftrightarrow} e^{-j\omega t_0}X(\omega)$$

3. **Aplikasi:** Karena sinyal digeser sejauh -1 (menjadi $t - 1$), maka kita kalikan hasil standar dengan $e^{-j\omega(1)}$:

$$X(\omega) = e^{-j\omega} \cdot \frac{1}{4 + j\omega}$$

Soal 3 [Bobot 15%]

(a) Transformasi Laplace

Menggunakan pasangan transformasi standar $\mathcal{L}\{e^{-at}u(t)\} = \frac{1}{s+a}$:

$$X(s) = \frac{3}{s+2} - \frac{1}{s+5}$$

Untuk menentukan zero, kita samakan penyebutnya:

$$X(s) = \frac{3(s+5) - 1(s+2)}{(s+2)(s+5)} = \frac{3s + 15 - s - 2}{(s+2)(s+5)}$$

$$X(s) = \frac{2s + 13}{(s+2)(s+5)}$$

(b) Daerah Konvergensi (ROC)

Sinyal ini bersifat *causal* (karena adanya $u(t)$), sehingga ROC berada di sebelah kanan pole paling kanan.

- Suku pertama (e^{-2t}): $\text{Re}(s) > -2$
- Suku kedua (e^{-5t}): $\text{Re}(s) > -5$

Irisan dari kedua daerah tersebut adalah:

ROC: $\mathrm{Re}(s) > -2$

(c) Pole dan Zero

Berdasarkan bentuk rasional $X(s) = \frac{2s+13}{(s+2)(s+5)}$:

- **Pole** (akar penyebut):

$$s = -2 \quad \text{dan} \quad s = -5$$

- **Zero** (akar pembilang):

$$2s + 13 = 0 \implies s = -6.5$$

Soal 4 [Bobot 15%]

Berdasarkan pasangan transformasi Laplace standar untuk fungsi kosinus:

$$\mathcal{L}\{\cos(\omega t)u(t)\} = \frac{s}{s^2 + \omega^2}$$

Dengan mengidentifikasi $\omega = 5$ dan adanya faktor pengali 5, serta karena ROC $\mathrm{Re}\{s\} > 0$ menandakan sistem kausal, maka fungsi waktunya adalah:

$$x(t) = 5\cos(5t)u(t)$$

Soal 5 [Bobot 45%]

Berikut adalah analisis sistem RLC dengan parameter baru: * $R = 5\,\Omega$ * $L = 6\,H$ * $C = 1\,F$

(a) Dinamika Sistem

Menggunakan prinsip yang sama (KVL pada rangkaian seri), persamaan dasarnya adalah:

$$x(t) = LC\frac{d^2y(t)}{dt^2} + RC\frac{dy(t)}{dt} + y(t)$$

Substitusikan nilai komponen $R = 5, L = 6, C = 1$:

$$x(t) = (6)(1)\frac{d^2y(t)}{dt^2} + (5)(1)\frac{dy(t)}{dt} + y(t)$$

Persamaan Diferensial:

$$6\frac{d^2y(t)}{dt^2} + 5\frac{dy(t)}{dt} + y(t) = x(t)$$

(b) Fungsi Alih (*Transfer Function*)

Lakukan Transformasi Laplace pada persamaan diferensial (asumsi kondisi awal nol):

$$6s^2Y(s) + 5sY(s) + Y(s) = X(s)$$

$$Y(s)(6s^2 + 5s + 1) = X(s)$$

Fungsi Alih:

$$H(s) = \frac{1}{6s^2 + 5s + 1}$$

(c) Pole-Zero

- **Zero:** Tidak ada (pembilang konstan).
- **Pole:** Akar-akar dari penyebut $6s^2 + 5s + 1 = 0$. Kita faktorkan persamaan kuadrat ini:

$$(2s + 1)(3s + 1) = 0$$

  Maka akar-akarnya adalah:

  1. $2s + 1 = 0 \Rightarrow s_1 = -0.5$
  2. $3s + 1 = 0 \Rightarrow s_2 = -1/3 \approx -0.333$

Lokasi Pole:

$$s_1 = -0.5$$

$$s_2 = -0.333$$

*(Berbeda dengan soal sebelumnya, kali ini kedua pole adalah bilangan **real** dan berbeda, menandakan sistem* overdamped*).*

(d) Daerah Konvergensi (ROC)

Untuk sistem kausal, ROC berada di sebelah kanan dari pole paling kanan (pole dengan nilai real terbesar). Pole paling kanan adalah $s = -1/3$ (karena $-0.333 > -0.5$).

ROC:

$$\mathrm{Re}\{s\} > -1/3$$

(e) Kestabilan

- Semua pole ($s_1 = -0.5$ dan $s_2 = -0.333$) bernilai negatif (berada di *Left Half Plane*).
- ROC ($\mathrm{Re}\{s\} > -1/3$) mencakup sumbu imajiner ($j\omega$).

Kesimpulan: Sistem tersebut **Stabil**.

(f) Respon Frekuensi $H(j\omega)$

Substitusikan $s = j\omega$ ke $H(s)$:

$$H(j\omega) = \frac{1}{6(j\omega)^2 + 5(j\omega) + 1}$$

$$H(j\omega) = \frac{1}{-6\omega^2 + j5\omega + 1}$$

Kelompokkan bagian Real dan Imajiner:

$$H(j\omega) = \frac{1}{(1 - 6\omega^2) + j(5\omega)}$$

(g) Magnitude dan Phase

Misalkan $A = 1 - 6\omega^2$ dan $B = 5\omega$.

Magnitude $M(\omega)$:

$$M(\omega) = \frac{1}{\sqrt{A^2 + B^2}} = \frac{1}{\sqrt{(1 - 6\omega^2)^2 + (5\omega)^2}}$$

$$M(\omega) = \frac{1}{\sqrt{36\omega^4 - 12\omega^2 + 1 + 25\omega^2}}$$

$$M(\omega) = \frac{1}{\sqrt{36\omega^4 + 13\omega^2 + 1}}$$

Phase $\Phi(\omega)$:

$$\Phi(\omega) = -\arctan\left(\frac{B}{A}\right)$$

$$\Phi(\omega) = -\arctan\left(\frac{5\omega}{1 - 6\omega^2}\right)$$

(h) Jenis Tapis

Mari kita analisis limitnya:

1. **Saat $\omega \to 0$:** $H(j0) = \frac{1}{1} = 1$ (Lolos).
2. **Saat $\omega \to \infty$:** $H(j\infty) \approx 0$ (Diredam).

Kesimpulan: Rangkaian ini tetap bersifat sebagai **Lowpass Filter (Tapis Lolos Bawah)**.

(i) Respon Impuls $h(t)$

Kita cari Transformasi Laplace Balik dari $H(s)$ menggunakan metode pecahan parsial (*Partial Fraction Expansion*).

$$H(s) = \frac{1}{(2s + 1)(3s + 1)}$$

Kita pecah menjadi bentuk jumlahan:

$$\frac{1}{(2s + 1)(3s + 1)} = \frac{A}{2s + 1} + \frac{B}{3s + 1}$$

Mencari koefisien A dan B:

1. $A(3s + 1) + B(2s + 1) = 1$
2. Untuk mencari A, pilih s yang membuat suku B nol ($s = -0.5$): $A(3(-0.5) + 1) = 1 \Rightarrow A(-0.5) = 1 \Rightarrow \mathbf{A = -2}$
3. Untuk mencari B, pilih s yang membuat suku A nol ($s = -1/3$): $B(2(-1/3) + 1) = 1 \Rightarrow B(1/3) = 1 \Rightarrow \mathbf{B = 3}$

Maka:

$$H(s) = \frac{-2}{2s + 1} + \frac{3}{3s + 1}$$

Agar sesuai dengan tabel transformasi Laplace standar ($\frac{1}{s+a}$), kita bagi pembilang dan penyebut masing-masing suku dengan koefisien s-nya:

- Suku pertama: bagi 2 $\to \frac{-1}{s+0.5}$
- Suku kedua: bagi 3 $\to \frac{1}{s+1/3}$

$$H(s) = \frac{1}{s + 1/3} - \frac{1}{s + 0.5}$$

Transformasi Laplace Balik:

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s + a}\right\} = e^{-at}u(t)$$

Respon Impuls:

$$h(t) = \left(e^{-t/3} - e^{-t/2}\right) u(t)$$

Atau dalam desimal:

$$h(t) = \left(e^{-0.333t} - e^{-0.5t}\right) u(t)$$