Soal 1

(a) Apakah $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$, dan $\mathbf{w}$ merupakan himpunan orthogonal?

Tiga vektor $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$, dan $\mathbf{w}$ dikatakan membentuk **himpunan orthogonal** jika hasil kali titik (dot product) antara setiap pasangan vektor adalah **nol**.

Vektor-vektor yang diberikan adalah:

$$\mathbf{u} = (2, -4, 0)$$
$$\mathbf{v} = (0, 4, -2)$$
$$\mathbf{w} = (2, 0, -4)$$

1. $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}$
$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = (2)(0) + (-4)(4) + (0)(-2) = 0 - 16 + 0 = -16$$

2. $\mathbf{u} \cdot \mathbf{w}$
$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{w} = (2)(2) + (-4)(0) + (0)(-4) = 4 + 0 + 0 = 4$$

3. $\mathbf{v} \cdot \mathbf{w}$
$$\mathbf{v} \cdot \mathbf{w} = (0)(2) + (4)(0) + (-2)(-4) = 0 + 0 + 8 = 8$$

Karena $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = -16 \neq 0$, $\mathbf{u} \cdot \mathbf{w} = 4 \neq 0$, dan $\mathbf{v} \cdot \mathbf{w} = 8 \neq 0$, maka $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$, dan $\mathbf{w}$ **bukan** merupakan himpunan orthogonal.

(b) Tentukan panjang vektor proyeksi orthogonal $\mathbf{u}$ pada vektor $\mathbf{w}$.

Panjang vektor proyeksi orthogonal $\mathbf{u}$ pada $\mathbf{w}$, dilambangkan sebagai $|\text{proj}_{\mathbf{w}}\mathbf{u}|$, dihitung menggunakan rumus:

$$|\text{proj}_{\mathbf{w}}\mathbf{u}| = \frac{|\mathbf{u} \cdot \mathbf{w}|}{||\mathbf{w}||}$$

Langkah 1: Hitung $\mathbf{u} \cdot \mathbf{w}$

Dari bagian (a), kita sudah hitung:

$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{w} = (2)(2) + (-4)(0) + (0)(-4) = 4 + 0 + 0 = 4$$

Langkah 2: Hitung panjang (norm) vektor $\mathbf{w}$, $||\mathbf{w}||$

Vektor $\mathbf{w} = (2, 0, -4)$.

$$||\mathbf{w}|| = \sqrt{2^2 + 0^2 + (-4)^2} = \sqrt{4 + 0 + 16} = \sqrt{20}$$

Kita dapat menyederhanakan $\sqrt{20}$ menjadi $\sqrt{4 \times 5} = 2\sqrt{5}$.

Langkah 3: Hitung panjang proyeksi

$$|\text{proj}_{\mathbf{w}}\mathbf{u}| = \frac{|\mathbf{u}\cdot\mathbf{w}|}{||\mathbf{w}||} = \frac{|4|}{\sqrt{20}} = \frac{4}{\sqrt{20}}$$

Rasionalisasi penyebut:

$$\frac{4}{\sqrt{20}} = \frac{4}{2\sqrt{5}} = \frac{2}{\sqrt{5}}$$
$$\frac{2}{\sqrt{5}} \times \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{5}} = \frac{2\sqrt{5}}{5}$$

Panjang vektor proyeksi orthogonal $\mathbf{u}$ pada $\mathbf{w}$ adalah $\mathbf{\frac{2\sqrt{5}}{5}}$ (atau $\frac{4}{\sqrt{20}}$).

Ringkasan Jawaban:

(a) Tidak, karena hasil kali titik antara pasangan vektor tidak semuanya nol (misalnya, $\mathbf{u}\cdot\mathbf{v} = -16$).
(b) Panjang proyeksi adalah $\mathbf{\frac{2\sqrt{5}}{5}}$.

Soal 2

Untuk menentukan basis ruang kolom, ruang baris, dan ruang null dari matriks A, kita perlu mereduksi matriks A ke **bentuk eselon baris (Row Echelon Form - REF)** atau **bentuk eselon baris tereduksi (Reduced Row Echelon Form - RREF)** menggunakan **Operasi Baris Elementer (OBE)**.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 2 & 2 & 2 \\ 3 & 1 & 5 \end{bmatrix}$$

1. Reduksi Matriks A ke Bentuk Eselon Baris

Lakukan OBE:

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 2 & 2 & 2 \\ 3 & 1 & 5 \end{bmatrix} \xrightarrow{B_2 \leftarrow B_2 - 2B_1} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 0 & 4 & -4 \\ 3 & 1 & 5 \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{B_3 \leftarrow B_3 - 3B_1} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 0 & 4 & -4 \\ 0 & 4 & -4 \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{B_2 \leftarrow \frac{1}{4}B_2} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 4 & -4 \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{B_3 \leftarrow B_3 - 4B_2} R = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{(Bentuk Eselon Baris - REF)}$$

2. Basis Ruang Kolom (Col(A))

Basis ruang kolom diambil dari **kolom-kolom matriks A yang berkorespondensi dengan kolom yang memiliki satu utama (leading 1) pada matriks eselon baris (R).**

- Satu utama terdapat pada **kolom ke-1** dan **kolom ke-2** dari R.
- Kolom ke-1 dan ke-2 dari A adalah $\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}$ dan $\begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}$.

Basis ruang kolom:

$$\text{Basis}(\text{Col}(A)) = \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$$

3. Basis Ruang Baris (Row(A))

Basis ruang baris diambil dari **vektor-vektor baris bukan nol pada matriks eselon baris (R).**

- Baris bukan nol dari R adalah $\begin{bmatrix} 1 & -1 & 3 \end{bmatrix}$ dan $\begin{bmatrix} 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}$.

Basis ruang baris:

$$\text{Basis}(\text{Row}(A)) = \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 3 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix} \right\}$$

(Vektor-vektor baris ini sering ditulis sebagai vektor kolom untuk konsistensi notasi, atau sebagai vektor baris $\{(1,-1,3),(0,1,-1)\}$. Di sini digunakan notasi vektor kolom untuk konsistensi dengan jawaban ringkas).

---

4. Basis Ruang Null (Null(A))

Ruang null adalah ruang solusi dari sistem persamaan linier homogen $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$. Kita gunakan matriks eselon baris tereduksi (RREF) untuk menemukan solusinya.

Lanjutkan OBE dari R:

$$R = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow{B_1 \leftarrow B_1 + B_2} \text{RREF}(A) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Sistem persamaan yang terkait dengan RREF(A):

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_3 &= 0 \\ x_2 - x_3 &= 0 \\ 0 &= 0 \end{aligned}$$

Variabel utama adalah x_1 dan x_2. Variabel bebas adalah x_3. Misalkan $x_3 = t$, di mana $t \in \mathbb{R}$.

Dari persamaan:

1. $x_2 = x_3 \implies x_2 = t$
2. $x_1 = -2x_3 \implies x_1 = -2t$

Vektor solusi $\mathbf{x}$:

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2t \\ t \\ t \end{bmatrix} = t \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Basis ruang null adalah vektor yang merentang solusi ini.

Basis ruang null:

$$\text{Basis}(\text{Null}(A)) = \left\{ \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$$

Jawaban Ringkas:

- **Basis Ruang Kolom:** $\left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$
- **Basis Ruang Baris:** $\left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 3 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix} \right\}$
- **Basis Ruang Null:** $\left\{ \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$

Soal 3

(a) Formulasi Matematis Menggunakan Perkalian Titik

Jawaban Ringkas:

$$C = (10 - (\mathbf{d} \cdot \mathbf{w} \pmod{10})) \pmod{10}$$

(b) Verifikasi Kode EAN-13

Diberikan 12 digit awal $\mathbf{d}$ adalah `871125300120`. Digit uji yang tercetak (C_{tercetak}) adalah `2`.

$$\mathbf{d} = (8, 7, 1, 1, 2, 5, 3, 0, 0, 1, 2, 0)$$
$$\mathbf{w} = (1, 3, 1, 3, 1, 3, 1, 3, 1, 3, 1, 3)$$

Langkah Perhitungan:

1. **Hitung Total Perkalian S ($\mathbf{d} \cdot \mathbf{w}$):**

$$S = (8\times1)+(7\times3)+(1\times1)+(1\times3)+(2\times1)+(5\times3)+(3\times1)+(0\times3)+(0\times1)+(1\times3)+(2\times1)+(0\times3)$$

$$S = 8 + 21 + 1 + 3 + 2 + 15 + 3 + 0 + 0 + 3 + 2 + 0$$
$$S = 58$$

2. **Hitung Modulo 10 (M):**

$$M = S \pmod{10} = 58 \pmod{10}$$

$$M = 8$$

3. **Hitung Digit Uji yang Benar (C_{hitung}):**

$$C_{\text{hitung}} = (10 - M)$$

$$C_{\text{hitung}} = 10 - 8$$
$$C_{\text{hitung}} = 2$$

4. **Verifikasi:**
   - Digit Uji Hasil Perhitungan (C_{hitung}) = **2**
   - Digit Uji yang Tercetak (C_{tercetak}) = **2**

Karena $C_{\text{hitung}} = C_{\text{tercetak}}$, maka kode EAN-13 tersebut adalah **valid**.

Jawaban Ringkas: Valid

Soal 4

Perhitungan Gaya Gerak Listrik (GGL) Terinduksi (ε)

GGL terinduksi (ε) pada kawat lurus dihitung dengan rumus:

$$\varepsilon = (\mathbf{v} \times \mathbf{B}) \cdot \mathbf{L}$$

Diketahui:

- Kecepatan konduktor: $\mathbf{v} = 2\mathbf{i} - 3\mathbf{j} + \mathbf{k}$ m/s
- Medan magnet: $\mathbf{B} = 3\mathbf{i} + \mathbf{j} - 2\mathbf{k}$ Tesla
- Vektor panjang kawat: $\mathbf{L} = 0\mathbf{i} + 0\mathbf{j} + 0.5\mathbf{k}$ meter (Perhatikan bahwa panjang kawat $L = 0.6$ m, tetapi vektor $\mathbf{L}$ yang diberikan dalam soal memiliki magnitudo $|\mathbf{L}| = 0.5$ m dan sejajar sumbu-z. Kita akan menggunakan vektor $\mathbf{L}$ yang diberikan dalam perhitungan, yaitu $\mathbf{L} = 0.5\mathbf{k}$ m.)

(a) Menghitung GGL Terinduksi

Langkah 1: Hitung perkalian silang $\mathbf{v} \times \mathbf{B}$.

$$\mathbf{v} \times \mathbf{B} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 2 & -3 & 1 \\ 3 & 1 & -2 \end{vmatrix}$$

$$\mathbf{v} \times \mathbf{B} = \mathbf{i}((-3)(-2) - (1)(1)) - \mathbf{j}((2)(-2) - (1)(3)) + \mathbf{k}((2)(1) - (-3)(3))$$

$$\mathbf{v} \times \mathbf{B} = \mathbf{i}(6 - 1) - \mathbf{j}(-4 - 3) + \mathbf{k}(2 - (-9))$$

$$\mathbf{v} \times \mathbf{B} = 5\mathbf{i} + 7\mathbf{j} + 11\mathbf{k}$$

Langkah 2: Hitung perkalian titik $(\mathbf{v} \times \mathbf{B}) \cdot \mathbf{L}$.

$$\varepsilon = (5\mathbf{i} + 7\mathbf{j} + 11\mathbf{k}) \cdot (0\mathbf{i} + 0\mathbf{j} + 0.5\mathbf{k})$$

$$\varepsilon = (5)(0) + (7)(0) + (11)(0.5)$$

$$\varepsilon = 0 + 0 + 5.5$$

$$\varepsilon = \mathbf{5.5} \text{ Volt}$$

Jawaban Ringkas (a): 5.5 Volt

Perhitungan Arus Induksi (I)

(b) Menghitung Arus (I)

GGL terinduksi (ε) menyebabkan arus mengalir dalam rangkaian tertutup. Berdasarkan **Hukum Ohm**, arus (I) dihitung sebagai berikut:

$$I = \frac{\varepsilon}{R}$$

Diketahui:

- GGL terinduksi: $\varepsilon = 5.5$ Volt (dari perhitungan (a))
- Resistansi rangkaian: $R = 1$ Ohm

$$I = \frac{5.5 \text{ V}}{1 \ \Omega}$$

$$I = \mathbf{5.5} \text{ Ampere}$$

Jawaban Ringkas (b): 5.5 Ampere

Soal 5

Analisis Vektor Ruang Warna RGB

Ruang warna RGB dapat dimodelkan sebagai ruang vektor $\mathbb{R}^3$, di mana vektor $\mathbf{c} = \begin{bmatrix} R \\ G \\ B \end{bmatrix}$ merepresentasikan suatu warna.

(a) Basis Ruang Warna RGB

Untuk menentukan apakah himpunan $\{\mathbf{c}_1, \mathbf{c}_2, \mathbf{c}_3\}$ membentuk **basis** untuk ruang warna RGB ($\mathbb{R}^3$), kita perlu memeriksa dua syarat:

1. Apakah vektor-vektor tersebut **bebas linear** (linearly independent)?
2. Apakah vektor-vektor tersebut **merentang** (span) $\mathbb{R}^3$?

Karena ada 3 vektor di ruang berdimensi 3, cukup periksa salah satu syarat, misalnya kebebasan linear, atau yang lebih mudah, periksa apakah **matriks** yang dibentuk oleh vektor-vektor ini **memiliki determinan non-nol**.

Misalkan matriks $A = [\mathbf{c}_1 \mid \mathbf{c}_2 \mid \mathbf{c}_3]$:

$$A = \begin{bmatrix} 255 & 0 & 0 \\ 0 & 255 & 0 \\ 0 & 0 & 255 \end{bmatrix}$$

Hitung determinan A:

$$\det(A) = 255 \cdot (255 \cdot 255 - 0 \cdot 0) - 0 + 0$$
$$\det(A) = 255^3$$

Karena $\det(A) = 255^3 \neq 0$, vektor-vektor $\mathbf{c}_1, \mathbf{c}_2, \mathbf{c}_3$ adalah **bebas linear**.

Karena ada 3 vektor yang bebas linear di ruang vektor 3 dimensi ($\mathbb{R}^3$), mereka juga merentang $\mathbb{R}^3$. Oleh karena itu, himpunan $\{\mathbf{c}_1, \mathbf{c}_2, \mathbf{c}_3\}$ membentuk basis untuk ruang warna RGB.

Jawaban Ringkas: Ya

(b) Kombinasi Linear untuk Warna Ungu ($\mathbf{c}_4$)

Kita ingin menyatakan $\mathbf{c}_4 = \begin{bmatrix} 128 \\ 0 \\ 128 \end{bmatrix}$ sebagai kombinasi linear dari basis $\{\mathbf{c}_1, \mathbf{c}_2, \mathbf{c}_3\}$.

$$\mathbf{c}_4 = k_1\mathbf{c}_1 + k_2\mathbf{c}_2 + k_3\mathbf{c}_3$$

$$\begin{bmatrix} 128 \\ 0 \\ 128 \end{bmatrix} = k_1 \begin{bmatrix} 255 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + k_2 \begin{bmatrix} 0 \\ 255 \\ 0 \end{bmatrix} + k_3 \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 255 \end{bmatrix}$$

Ini menghasilkan sistem persamaan linear:

1. $255k_1 = 128 \implies k_1 = \frac{128}{255}$
2. $255k_2 = 0 \implies k_2 = 0$

3. $255k_3 = 128 \implies k_3 = \frac{128}{255}$

Maka, kombinasi linearnya adalah:

$$\mathbf{c}_4 = \frac{128}{255}\mathbf{c}_1 + 0\mathbf{c}_2 + \frac{128}{255}\mathbf{c}_3$$

Jawaban Ringkas: $\mathbf{c}_4 = \frac{128}{255}\mathbf{c}_1 + 0\mathbf{c}_2 + \frac{128}{255}\mathbf{c}_3$

(c) Kombinasi Linear untuk Warna Baru ($\mathbf{c}_5$)

Kita ingin menyatakan $\mathbf{c}_5 = \begin{bmatrix} 192 \\ 192 \\ 0 \end{bmatrix}$ sebagai kombinasi linear dari basis $\{\mathbf{c}_1, \mathbf{c}_2, \mathbf{c}_3\}$.

$$\mathbf{c}_5 = k_1\mathbf{c}_1 + k_2\mathbf{c}_2 + k_3\mathbf{c}_3$$

$$\begin{bmatrix} 192 \\ 192 \\ 0 \end{bmatrix} = k_1 \begin{bmatrix} 255 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + k_2 \begin{bmatrix} 0 \\ 255 \\ 0 \end{bmatrix} + k_3 \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 255 \end{bmatrix}$$

Ini menghasilkan sistem persamaan linear:

1. $255k_1 = 192 \implies k_1 = \frac{192}{255}$
2. $255k_2 = 192 \implies k_2 = \frac{192}{255}$
3. $255k_3 = 0 \implies k_3 = 0$

Sederhanakan pecahan $\frac{192}{255}$ dengan membagi pembilang dan penyebut dengan **3** (karena $1+9+2 = 12$ dan $2+5+5 = 12$, keduanya habis dibagi 3), lalu bagi dengan **17** (atau langsung bagi dengan $3 \times 17 = 51$).

$$\frac{192}{255} = \frac{192 \div 3}{255 \div 3} = \frac{64}{85}$$

Catatan: 64 dan 85 tidak memiliki faktor persekutuan selain 1, jadi ini adalah bentuk paling sederhana.

Maka, kombinasi linearnya adalah:

$$\mathbf{c}_5 = \frac{64}{85}\mathbf{c}_1 + \frac{64}{85}\mathbf{c}_2 + 0\mathbf{c}_3$$

Jawaban Ringkas: $\mathbf{c}_5 = \frac{64}{85}\mathbf{c}_1 + \frac{64}{85}\mathbf{c}_2 + 0\mathbf{c}_3$

(d) Ruang Rentangan (Span) span$\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2\}$

Warna $\mathbf{c}_5 = \begin{bmatrix} 192 \\ 192 \\ 0 \end{bmatrix}$ dapat dihasilkan oleh kombinasi linear dari $\mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ dan $\mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ jika dan hanya jika $\mathbf{c}_5$ berada dalam span$\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2\}$. Ini berarti kita harus dapat menemukan skalar a dan b sehingga:

$$\mathbf{c}_5 = a\mathbf{v}_1 + b\mathbf{v}_2$$

$$\begin{bmatrix} 192 \\ 192 \\ 0 \end{bmatrix} = a \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + b \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Ini menghasilkan sistem persamaan linear:

1. $a = 192$
2. $a + b = 192$
3. $b = 0$

Substitusikan nilai a dan b dari persamaan (1) dan (3) ke persamaan (2):

$$192 + 0 = 192$$

$$192 = 192$$

Karena sistem persamaan ini **konsisten** (solusi ada, yaitu $a = 192$ dan $b = 0$), maka $\mathbf{c}_5$ berada dalam ruang rentangan yang dibentuk oleh $\mathbf{v}_1$ dan $\mathbf{v}_2$.

Jawaban Ringkas: Ya, karena $\mathbf{c}_5 = 192\mathbf{v}_1 + 0\mathbf{v}_2$, yang berarti $\mathbf{c}_5 \in \text{span}\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2\}$

(e) Norma Euclidean (Jarak) antara Hitam dan Putih

Warna Hitam adalah $\mathbf{c}_H = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ dan Putih adalah $\mathbf{c}_P = \begin{bmatrix} 255 \\ 255 \\ 255 \end{bmatrix}$.

Norma Euclidean (panjang vektor) dari perbedaan antara dua vektor $\mathbf{c}_P$ dan $\mathbf{c}_H$ didefinisikan sebagai:

$$\|\mathbf{c}_P - \mathbf{c}_H\| = \sqrt{(R_P - R_H)^2 + (G_P - G_H)^2 + (B_P - B_H)^2}$$

Hitung perbedaannya:

$$\mathbf{c}_P - \mathbf{c}_H = \begin{bmatrix} 255 - 0 \\ 255 - 0 \\ 255 - 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 255 \\ 255 \\ 255 \end{bmatrix}$$

Hitung normanya:

$$\|\mathbf{c}_P - \mathbf{c}_H\| = \sqrt{(255)^2 + (255)^2 + (255)^2}$$
$$\|\mathbf{c}_P - \mathbf{c}_H\| = \sqrt{3 \cdot (255)^2}$$
$$\|\mathbf{c}_P - \mathbf{c}_H\| = 255\sqrt{3}$$

Nilai perkiraan (opsional, tapi baik untuk konteks): $255\sqrt{3} \approx 255 \times 1.732 \approx 441.67$.

Jawaban Ringkas: $255\sqrt{3}$