

Kunci Kode Soal Ujian: C

Soal 1 [Bobot 15%]

(a) Menentukan Frekuensi Dasar ω_0

Frekuensi komponen penyusun sinyal adalah:

- $\omega_1 = \frac{6\pi}{7}$ rad/s
- $\omega_2 = \frac{9\pi}{7}$ rad/s

Frekuensi dasar (ω_0) adalah faktor persekutuan terbesar (FPB) dari kedua frekuensi tersebut. Kita dapat mengeluarkan faktor $\frac{\pi}{7}$:

$$\omega_0 = \frac{\pi}{7} \times \text{FPB}(6, 9) = \frac{\pi}{7} \times 3 = \frac{3\pi}{7} \text{ rad/s}$$

Dengan demikian harmoniknya adalah:

- Komponen cosinus (ω_1): $k = \frac{6\pi/7}{3\pi/7} = 2$ (Harmonik ke-2).
- Komponen sinus (ω_2): $k = \frac{9\pi/7}{3\pi/7} = 3$ (Harmonik ke-3).

(b) Menentukan Koefisien Deret Fourier a_k

Ubah ke bentuk eksponensial menggunakan rumus Euler ($1/j = -j$):

$$\begin{aligned} x(t) &= 5 + 6 \left(\frac{e^{j2\omega_0 t} + e^{-j2\omega_0 t}}{2} \right) + 2 \left(\frac{e^{j3\omega_0 t} - e^{-j3\omega_0 t}}{2j} \right) \\ &= 5 + 3(e^{j2\omega_0 t} + e^{-j2\omega_0 t}) - j(e^{j3\omega_0 t} - e^{-j3\omega_0 t}) \\ &= 5 + 3e^{j2\omega_0 t} + 3e^{-j2\omega_0 t} - je^{j3\omega_0 t} + je^{-j3\omega_0 t} \end{aligned}$$

Maka, nilai koefisien a_k adalah:

- $a_0 = 5$
- $a_2 = 3$
- $a_{-2} = 3$
- $a_3 = -j$
- $a_{-3} = j$
- $a_k = 0$ untuk nilai k lainnya.

Soal 2 [Bobot 10%]

Berikut adalah transformasi Fourier untuk sinyal tersebut.

Hasil Akhir

$$X(\omega) = \frac{e^{-j3\omega}}{2 + j\omega}$$

Langkah Pengerjaan Singkat

Kita menggunakan **properti pergeseran waktu** (*time shifting property*).

1. **Transformasi Standar:** Diketahui bahwa transformasi untuk sinyal eksponensial dasar $e^{-at}u(t)$ dengan $a = 2$ adalah:

$$e^{-2t}u(t) \xleftrightarrow{\mathcal{F}} \frac{1}{2 + j\omega}$$

2. **Properti Pergeseran Waktu:** Karena sinyal digeser sejauh $t_0 = 3$ (tertunda), maka transformasinya dikalikan dengan faktor fasa $e^{-j\omega t_0}$:

$$x(t - 3) \xleftrightarrow{\mathcal{F}} e^{-j\omega 3} X(\omega)$$

3. **Aplikasi:** Menggabungkan langkah 1 dan 2:

$$X(\omega) = e^{-j3\omega} \cdot \frac{1}{2 + j\omega}$$

Soal 3 [Bobot 15%]

(a) Transformasi Laplace

Menggunakan pasangan transformasi standar $\mathcal{L}\{e^{-at}u(t)\} = \frac{1}{s+a}$:

$$X(s) = \frac{1}{s+1} + \frac{4}{s+3}$$

Menyamakan penyebut untuk mendapatkan bentuk rasional tunggal:

$$X(s) = \frac{1(s+3) + 4(s+1)}{(s+1)(s+3)} = \frac{s+3+4s+4}{(s+1)(s+3)}$$

$$X(s) = \frac{5s+7}{(s+1)(s+3)}$$

(b) Daerah Konvergensi (ROC)

Karena sinyal ini bersifat *causal* (menggunakan $u(t)$), ROC berada di sebelah kanan pole paling kanan (terbesar).

- Suku pertama (e^{-t}): $\text{Re}(s) > -1$
- Suku kedua (e^{-3t}): $\text{Re}(s) > -3$

Irisan keduanya adalah daerah di sebelah kanan -1 :

ROC: $\text{Re}(s) > -1$

(c) Pole dan Zero

Berdasarkan bentuk rasional $X(s) = \frac{5s+7}{(s+1)(s+3)}$:

- **Pole** (akar penyebut):

$$s = -1 \quad \text{dan} \quad s = -3$$

- **Zero** (akar pembilang):

$$5s + 7 = 0 \implies s = -1.4$$

Soal 4 [Bobot 15%]

Kita dapat memecah fungsi $X(s)$ menjadi dua bagian berdasarkan sifat linearitas:

$$X(s) = \frac{s}{s^2 + 4} + \frac{2}{s^2 + 4}$$

Dengan mengidentifikasi $\omega = 2$ ($2^2 = 4$) dan menggunakan pasangan transformasi standar:

1. $\frac{s}{s^2 + 2^2} \leftrightarrow \cos(2t)u(t)$
2. $\frac{2}{s^2 + 2^2} \leftrightarrow \sin(2t)u(t)$

Karena $\text{Re}\{s\} > 0$ (kausal), maka fungsi waktunya adalah:

$$x(t) = (\cos(2t) + \sin(2t))u(t)$$

Soal 5 [Bobot 45%]

Berikut adalah analisis untuk variasi ketiga dari sistem RLC dengan parameter: * $R = 8 \Omega$ * $L = 6 H$ * $C = 1 F$

(a) Dinamika Sistem

Menggunakan persamaan dasar KVL untuk rangkaian seri RLC:

$$x(t) = LC \frac{d^2 y(t)}{dt^2} + RC \frac{dy(t)}{dt} + y(t)$$

Substitusikan nilai komponen $R = 8, L = 6, C = 1$:

$$x(t) = (6)(1) \frac{d^2 y(t)}{dt^2} + (8)(1) \frac{dy(t)}{dt} + y(t)$$

Persamaan Diferensial:

$$6 \frac{d^2 y(t)}{dt^2} + 8 \frac{dy(t)}{dt} + y(t) = x(t)$$

(b) Fungsi Alih (*Transfer Function*)

Transformasi Laplace pada persamaan diferensial dengan kondisi awal nol:

$$6s^2 Y(s) + 8s Y(s) + Y(s) = X(s)$$

$$Y(s)(6s^2 + 8s + 1) = X(s)$$

Fungsi Alih:

$$H(s) = \frac{1}{6s^2 + 8s + 1}$$

(c) Pole-Zero

- **Zero:** Tidak ada.
- **Pole:** Akar-akar dari penyebut $6s^2 + 8s + 1 = 0$.
Gunakan rumus abc:

$$s_{1,2} = \frac{-8 \pm \sqrt{8^2 - 4(6)(1)}}{2(6)}$$

$$s_{1,2} = \frac{-8 \pm \sqrt{64 - 24}}{12}$$

$$s_{1,2} = \frac{-8 \pm \sqrt{40}}{12}$$

Sederhanakan $\sqrt{40} = \sqrt{4 \times 10} = 2\sqrt{10}$:

$$s_{1,2} = \frac{-8 \pm 2\sqrt{10}}{12} = \frac{-4 \pm \sqrt{10}}{6}$$

Karena $\sqrt{10} \approx 3.162$, maka:

1. $s_1 = \frac{-4 + 3.162}{6} \approx -0.14$
2. $s_2 = \frac{-4 - 3.162}{6} \approx -1.19$

Lokasi Pole (Overdamped):

$$s_1 = \frac{-4 + \sqrt{10}}{6}$$

$$s_2 = \frac{-4 - \sqrt{10}}{6}$$

(d) Daerah Konvergensi (ROC)

Untuk sistem kausal, ROC berada di kanan pole paling kanan (terbesar). Antara -0.14 dan -1.19 , yang paling kanan (lebih besar) adalah s_1 .

ROC:

$$\text{Re}\{s\} > \frac{-4 + \sqrt{10}}{6} \quad (\text{atau } \text{Re}\{s\} > -0.14)$$

(e) Kestabilan

- Kedua pole ($s_1 \approx -0.14$ dan $s_2 \approx -1.19$) bernilai real negatif (berada di *Left Half Plane*).
- ROC mencakup sumbu $j\omega$.

Kesimpulan: Sistem tersebut **Stabil**.

(f) Respon Frekuensi $H(j\omega)$

Substitusi $s = j\omega$:

$$H(j\omega) = \frac{1}{6(j\omega)^2 + 8(j\omega) + 1}$$

$$H(j\omega) = \frac{1}{-6\omega^2 + j8\omega + 1}$$

Kelompokkan bagian Real dan Imajiner:

$$H(j\omega) = \frac{1}{(1 - 6\omega^2) + j(8\omega)}$$

(g) Magnitude dan Phase

Misalkan $A = 1 - 6\omega^2$ dan $B = 8\omega$.

Magnitude $M(\omega)$:

$$M(\omega) = \frac{1}{\sqrt{(1 - 6\omega^2)^2 + (8\omega)^2}}$$

$$M(\omega) = \frac{1}{\sqrt{1 - 12\omega^2 + 36\omega^4 + 64\omega^2}}$$

$$M(\omega) = \frac{1}{\sqrt{36\omega^4 + 52\omega^2 + 1}}$$

Phase $\Phi(\omega)$:

$$\Phi(\omega) = -\arctan\left(\frac{8\omega}{1 - 6\omega^2}\right)$$

(h) Jenis Tapis

1. **Saat $\omega \rightarrow 0$:** $H(j0) = 1$ (Lolos).
2. **Saat $\omega \rightarrow \infty$:** $H(j\infty) \approx 0$ (Diredam).

Kesimpulan: Rangkaian adalah **Lowpass Filter (Tapis Lolos Bawah)**.

(i) Respon Impuls $h(t)$

Kita mencari invers Laplace dari:

$$H(s) = \frac{1}{6s^2 + 8s + 1}$$

Keluarkan faktor 6 dari penyebut agar koefisien s^2 menjadi 1:

$$H(s) = \frac{1}{6} \left[\frac{1}{s^2 + \frac{8}{6}s + \frac{1}{6}} \right] = \frac{1}{6} \left[\frac{1}{s^2 + \frac{4}{3}s + \frac{1}{6}} \right]$$

Kita gunakan teknik melengkapi kuadrat sempurna:

$$\begin{aligned} s^2 + \frac{4}{3}s + \frac{1}{6} &= \left(s + \frac{2}{3}\right)^2 - \left(\frac{2}{3}\right)^2 + \frac{1}{6} \\ &= \left(s + \frac{2}{3}\right)^2 - \frac{4}{9} + \frac{3}{18} \\ &= \left(s + \frac{2}{3}\right)^2 - \frac{8}{18} + \frac{3}{18} \\ &= \left(s + \frac{2}{3}\right)^2 - \frac{5}{18} \end{aligned}$$

Bentuk ini adalah bentuk sinus hiperbolik (\sinh), karena tanda negatif di antara kedua suku kuadrat. Bentuk standar: $\mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{k}{(s+a)^2 - k^2} \right\} = e^{-at} \sinh(kt)$.

Di sini:

- $a = \frac{2}{3}$
- $k^2 = \frac{5}{18} \Rightarrow k = \sqrt{\frac{5}{18}} = \frac{\sqrt{5}}{3\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{10}}{6}$

Agar pembilang sesuai dengan k , kita kalikan dan bagi dengan k :

$$H(s) = \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{k} \cdot \frac{k}{(s + \frac{2}{3})^2 - k^2}$$

$$H(s) = \frac{1}{6(\frac{\sqrt{10}}{6})} \cdot \frac{k}{(s + \frac{2}{3})^2 - k^2}$$

$$H(s) = \frac{1}{\sqrt{10}} \cdot \frac{k}{(s + \frac{2}{3})^2 - k^2}$$

Respon Impuls (Bentuk Hiperbolik):

$$h(t) = \frac{1}{\sqrt{10}} e^{-\frac{2}{3}t} \sinh\left(\frac{\sqrt{10}}{6}t\right) u(t)$$

(Alternatif: Jika Anda lebih suka bentuk eksponensial biasa, kita bisa menguraikan $\sinh(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$):

$$h(t) = \frac{1}{2\sqrt{10}} \left(e^{(-\frac{2}{3} + \frac{\sqrt{10}}{6})t} - e^{(-\frac{2}{3} - \frac{\sqrt{10}}{6})t} \right) u(t)$$

Yang mana eksponennya sama persis dengan pole s_1 dan s_2 yang kita hitung di langkah (c).