

Soal 1

(a) Apakah \mathbf{a} , \mathbf{b} , dan \mathbf{c} merupakan himpunan orthogonal?

Tiga vektor adalah orthogonal jika hasil kali titik antara setiap pasangannya adalah nol.

1. $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}$

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = (2)(0) + (0)(4) + (-4)(-2) = 0 + 0 + 8 = 8$$

2. $\mathbf{a} \cdot \mathbf{c}$

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{c} = (2)(2) + (0)(-4) + (-4)(0) = 4 + 0 + 0 = 4$$

3. $\mathbf{b} \cdot \mathbf{c}$

$$\mathbf{b} \cdot \mathbf{c} = (0)(2) + (4)(-4) + (-2)(0) = 0 - 16 + 0 = -16$$

Karena $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = 8 \neq 0$, $\mathbf{a} \cdot \mathbf{c} = 4 \neq 0$, dan $\mathbf{b} \cdot \mathbf{c} = -16 \neq 0$, maka \mathbf{a} , \mathbf{b} , dan \mathbf{c} **bukan** merupakan himpunan orthogonal.

(b) Tentukan panjang vektor proyeksi orthogonal \mathbf{c} pada vektor \mathbf{a} .

Rumus untuk panjang proyeksi \mathbf{c} pada \mathbf{a} adalah:

$$|\text{proj}_{\mathbf{a}} \mathbf{c}| = \frac{|\mathbf{c} \cdot \mathbf{a}|}{\|\mathbf{a}\|}$$

Langkah 1: Hitung $\mathbf{c} \cdot \mathbf{a}$ (sama dengan $\mathbf{a} \cdot \mathbf{c}$)

$$\mathbf{c} \cdot \mathbf{a} = 4$$

Langkah 2: Hitung panjang (norm) vektor \mathbf{a} , $\|\mathbf{a}\|$

Vektor $\mathbf{a} = (2, 0, -4)$.

$$\|\mathbf{a}\| = \sqrt{2^2 + 0^2 + (-4)^2} = \sqrt{4 + 0 + 16} = \sqrt{20} = 2\sqrt{5}$$

Langkah 3: Hitung panjang proyeksi

$$|\text{proj}_{\mathbf{a}} \mathbf{c}| = \frac{|\mathbf{c} \cdot \mathbf{a}|}{\|\mathbf{a}\|} = \frac{|4|}{\sqrt{20}} = \frac{4}{2\sqrt{5}} = \frac{2}{\sqrt{5}}$$

Rasionalisasi:

$$\frac{2}{\sqrt{5}} \times \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{5}} = \frac{2\sqrt{5}}{5}$$

Kesimpulan:

(a) **Tidak**. Ketiga vektor **bukan** himpunan orthogonal karena hasil kali titik antar pasangan vektor tidak nol. (b) Panjang vektor proyeksi orthogonal \mathbf{c} pada \mathbf{a} adalah $\frac{2\sqrt{5}}{5}$.

Soal 2

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 2 & 2 & 0 \\ 3 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

1. Reduksi Matriks A ke Bentuk Eselon Baris Tereduksi (RREF)

Pertama, kita lakukan Operasi Baris Elementer (OBE) untuk mendapatkan RREF.

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 2 & 2 & 0 \\ 3 & 1 & 2 \end{bmatrix} \xrightarrow{B_2 \leftarrow B_2 - 2B_1} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 4 & -4 \\ 3 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{B_3 \leftarrow B_3 - 3B_1} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 4 & -4 \\ 0 & 4 & -4 \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{B_2 \leftarrow \frac{1}{4}B_2} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 4 & -4 \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{B_3 \leftarrow B_3 - 4B_2} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (\text{Bentuk Eselon Baris - REF})$$

$$\xrightarrow{B_1 \leftarrow B_1 + B_2} R = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (\text{Bentuk Eselon Baris Tereduksi - RREF})$$

(a) Basis Ruang Kolom ($\text{Col}(A)$)

Basis ruang kolom diambil dari **kolom-kolom matriks** A yang berkorespondensi dengan kolom yang memiliki satu utama (**pivot**) pada matriks RREF (R).

- Satu utama (pivot) terdapat pada **kolom ke-1** dan **kolom ke-2** dari R .
- Kolom ke-1 dan ke-2 dari matriks **asli** A adalah $\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}$ dan $\begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}$.

$$\text{Basis}(\text{Col}(A)) = \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$$

(b) Basis Ruang Baris (Row(A))

Basis ruang baris diambil dari **vektor-vektor baris bukan nol** pada matriks RREF (R).

- Baris bukan nol dari R adalah $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ dan $\begin{bmatrix} 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}$.

$$\text{Basis}(\text{Row}(A)) = \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix} \right\}$$

(c) Basis Ruang Null (Null(A))

Ruang null adalah solusi dari $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$. Kita gunakan RREF (R) untuk sistem persamaan:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Sistem persamaan:

1. $x_1 + x_3 = 0 \implies x_1 = -x_3$
2. $x_2 - x_3 = 0 \implies x_2 = x_3$

Variabel bebas adalah x_3 . Misalkan $\mathbf{x}_3 = t$, di mana $t \in \mathbb{R}$.

Vektor solusi \mathbf{x} :

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -t \\ t \\ t \end{bmatrix} = t \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Basis ruang null adalah vektor yang merentang solusi tersebut.

$$\text{Basis}(\text{Null}(A)) = \left\{ \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$$

Jawaban Ringkas:

- **Basis Ruang Kolom:** $\left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$
- **Basis Ruang Baris:** $\left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix} \right\}$
- **Basis Ruang Null:** $\left\{ \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$

Soal 3

(a) Formulasi Matematis Menggunakan Perkalian Titik

Jawaban Ringkas:

$$C = (10 - (\mathbf{d} \cdot \mathbf{w} \pmod{10})) \pmod{10}$$

Verifikasi Kode ISBN-13

Diberikan 12 digit awal \mathbf{d} adalah 978316118410. Digit uji yang tercetak (C_{tercetak}) adalah 8.

$$\mathbf{d} = (9, 7, 8, 3, 1, 6, 1, 1, 8, 4, 1, 0)$$

$$\mathbf{w} = (1, 3, 1, 3, 1, 3, 1, 3, 1, 3, 1, 3)$$

Langkah Perhitungan

1. Hitung Total Perkalian S ($\mathbf{d} \cdot \mathbf{w}$)

- Posisi Ganjil (kali 1): $9 + 8 + 1 + 1 + 8 + 1 = 28$
- Posisi Genap (kali 3): $7 \times 3 + 3 \times 3 + 6 \times 3 + 1 \times 3 + 4 \times 3 + 0 \times 3$

$$= 21 + 9 + 18 + 3 + 12 + 0 = 63$$

$$S = (\text{Total Ganjil}) + (\text{Total Genap})$$

$$S = 28 + 63$$

$$S = 91$$

2. Hitung Modulo 10 (M)

$$M = S \pmod{10} = 91 \pmod{10}$$

$$M = 1$$

3. Hitung Digit Uji yang Benar (C_{hitung})

$$C_{\text{hitung}} = (10 - M) \pmod{10}$$

$$C_{\text{hitung}} = (10 - 1) \pmod{10}$$

$$C_{\text{hitung}} = 9 \pmod{10}$$

$$C_{\text{hitung}} = 9$$

Kesimpulan Verifikasi

- Digit Uji Hasil Perhitungan (C_{hitung}) = 9
- Digit Uji yang Tercetak (C_{tercetak}) = 8

Karena $C_{\text{hitung}} \neq C_{\text{tercetak}}$ ($9 \neq 8$), maka kode ISBN-13 yang diberikan adalah **kode yang salah (tidak valid)**.

Jawaban Ringkas: Salah (Tidak Valid)

Soal 4

Perhitungan Gaya Gerak Listrik (GGL) Terinduksi (ε)

GGL terinduksi (ε) pada kawat lurus dihitung dengan rumus perkalian tripel skalar:

$$\varepsilon = (\mathbf{v} \times \mathbf{B}) \cdot \mathbf{L}$$

Diketahui vektor-vektor:

- Kecepatan konduktor: $\mathbf{v} = 1\mathbf{i} - 3\mathbf{j} + 2\mathbf{k}$ m/s
- Medan magnet: $\mathbf{B} = -2\mathbf{i} + 1\mathbf{j} - 3\mathbf{k}$ Tesla
- Vektor panjang kawat: $\mathbf{L} = 0\mathbf{i} + 0\mathbf{j} + 0.3\mathbf{k}$ meter

(a) Hitung nilai GGL terinduksi

Langkah 1: Hitung perkalian silang $\mathbf{v} \times \mathbf{B}$

$$\mathbf{v} \times \mathbf{B} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 1 & -3 & 2 \\ -2 & 1 & -3 \end{vmatrix}$$

$$\mathbf{v} \times \mathbf{B} = \mathbf{i}((-3)(-3) - (2)(1)) - \mathbf{j}((1)(-3) - (2)(-2)) + \mathbf{k}((1)(1) - (-3)(-2))$$

$$\mathbf{v} \times \mathbf{B} = \mathbf{i}(9 - 2) - \mathbf{j}(-3 - (-4)) + \mathbf{k}(1 - 6)$$

$$\mathbf{v} \times \mathbf{B} = \mathbf{i}(7) - \mathbf{j}(-3 + 4) + \mathbf{k}(-5)$$

$$\mathbf{v} \times \mathbf{B} = 7\mathbf{i} - 1\mathbf{j} - 5\mathbf{k}$$

Langkah 2: Hitung perkalian titik $(\mathbf{v} \times \mathbf{B}) \cdot \mathbf{L}$

$$\varepsilon = (7\mathbf{i} - 1\mathbf{j} - 5\mathbf{k}) \cdot (0\mathbf{i} + 0\mathbf{j} + 0.3\mathbf{k})$$

$$\varepsilon = (7)(0) + (-1)(0) + (-5)(0.3)$$

$$\varepsilon = 0 + 0 - 1.5$$

$$\varepsilon = -1.5 \text{ Volt}$$

(Tanda negatif menunjukkan arah GGL terinduksi).

Jawaban Ringkas (a): -1.5 Volt

Perhitungan Arus Induksi (I)

(b) Hitung Arus (I)

Berdasarkan Hukum Ohm, arus (I) yang mengalir dalam rangkaian tertutup akibat GGL terinduksi (ε) adalah:

$$I = \frac{|\varepsilon|}{R}$$

Diketahui:

- GGL terinduksi: $|\varepsilon| = |-1.5| \text{ Volt} = 1.5 \text{ Volt}$
- Resistansi rangkaian: $R = 2 \text{ Ohm}$

$$I = \frac{1.5 \text{ V}}{2 \Omega}$$

$$I = 0.75 \text{ Ampere}$$

Jawaban Ringkas (b): 0.75 Ampere

Soal 5

Tentu, berikut adalah penyelesaian untuk Soal 5, menggunakan rentang 7-bit (0 hingga 127).

Analisis Vektor Ruang Warna RGB (7-bit)

Ruang warna RGB adalah \mathbb{R}^3 , dengan nilai intensitas maksimum 127.

(a) Basis Ruang Warna RGB

Untuk menentukan apakah himpunan $\{\mathbf{c}_1, \mathbf{c}_2, \mathbf{c}_3\}$ membentuk **basis** untuk \mathbb{R}^3 , kita dapat memeriksa kebebasan linear dengan menghitung determinan dari matriks yang dibentuk oleh vektor-vektor tersebut.

$$\text{Vektor yang diberikan adalah: } \mathbf{c}_1 = \begin{bmatrix} 127 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \mathbf{c}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 127 \\ 0 \end{bmatrix}, \mathbf{c}_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 127 \end{bmatrix}.$$

Matriks $A = [\mathbf{c}_1 \mid \mathbf{c}_2 \mid \mathbf{c}_3]$:

$$A = \begin{bmatrix} 127 & 0 & 0 \\ 0 & 127 & 0 \\ 0 & 0 & 127 \end{bmatrix}$$

Hitung determinan A :

$$\det(A) = 127 \cdot (127 \cdot 127 - 0 \cdot 0) - 0 + 0$$

$$\det(A) = 127^3$$

Karena $\det(A) = 127^3 \neq 0$, matriks A adalah **invertible**, yang berarti vektor-vektor $\mathbf{c}_1, \mathbf{c}_2, \mathbf{c}_3$ adalah **bebas linear**. Karena ada 3 vektor yang bebas linear di ruang 3-dimensi, mereka membentuk basis untuk ruang warna RGB.

Jawaban Ringkas: Ya

(b) Kombinasi Linear untuk Warna Sian (\mathbf{c}_4)

Kita ingin menyatakan $\mathbf{c}_4 = \begin{bmatrix} 0 \\ 64 \\ 64 \end{bmatrix}$ sebagai kombinasi linear dari basis $\{\mathbf{c}_1, \mathbf{c}_2, \mathbf{c}_3\}$:

$$\mathbf{c}_4 = k_1 \mathbf{c}_1 + k_2 \mathbf{c}_2 + k_3 \mathbf{c}_3$$

$$\begin{bmatrix} 0 \\ 64 \\ 64 \end{bmatrix} = k_1 \begin{bmatrix} 127 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + k_2 \begin{bmatrix} 0 \\ 127 \\ 0 \end{bmatrix} + k_3 \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 127 \end{bmatrix}$$

Ini menghasilkan sistem persamaan:

1. $127k_1 = 0 \implies k_1 = 0$
2. $127k_2 = 64 \implies k_2 = \frac{64}{127}$
3. $127k_3 = 64 \implies k_3 = \frac{64}{127}$

Maka, kombinasi linearnya adalah:

$$\mathbf{c}_4 = 0\mathbf{c}_1 + \frac{64}{127}\mathbf{c}_2 + \frac{64}{127}\mathbf{c}_3$$

Jawaban Ringkas: $\mathbf{c}_4 = 0\mathbf{c}_1 + \frac{64}{127}\mathbf{c}_2 + \frac{64}{127}\mathbf{c}_3$

(c) Kombinasi Linear untuk Warna Baru (\mathbf{c}_5)

Kita ingin menyatakan $\mathbf{c}_5 = \begin{bmatrix} 96 \\ 0 \\ 96 \end{bmatrix}$ sebagai kombinasi linear dari basis $\{\mathbf{c}_1, \mathbf{c}_2, \mathbf{c}_3\}$:

$$\mathbf{c}_5 = k_1 \mathbf{c}_1 + k_2 \mathbf{c}_2 + k_3 \mathbf{c}_3$$

$$\begin{bmatrix} 96 \\ 0 \\ 96 \end{bmatrix} = k_1 \begin{bmatrix} 127 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + k_2 \begin{bmatrix} 0 \\ 127 \\ 0 \end{bmatrix} + k_3 \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 127 \end{bmatrix}$$

Ini menghasilkan sistem persamaan:

1. $127k_1 = 96 \implies k_1 = \frac{96}{127}$
2. $127k_2 = 0 \implies k_2 = 0$
3. $127k_3 = 96 \implies k_3 = \frac{96}{127}$

Maka, kombinasi linearnya adalah:

$$\mathbf{c}_5 = \frac{96}{127} \mathbf{c}_1 + 0 \mathbf{c}_2 + \frac{96}{127} \mathbf{c}_3$$

Jawaban Ringkas: $\mathbf{c}_5 = \frac{96}{127} \mathbf{c}_1 + 0 \mathbf{c}_2 + \frac{96}{127} \mathbf{c}_3$

(d) Ruang Rentangan (Span) $\text{span}\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2\}$

Kita perlu menentukan apakah $\mathbf{c}_5 = \begin{bmatrix} 96 \\ 96 \\ 0 \end{bmatrix}$ berada dalam $\text{span}\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2\}$, di mana $\mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ dan

$$\mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Kita cari skalar a dan b sehingga:

$$\mathbf{c}_5 = a \mathbf{v}_1 + b \mathbf{v}_2$$

$$\begin{bmatrix} 96 \\ 96 \\ 0 \end{bmatrix} = a \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + b \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a \\ a+b \\ b \end{bmatrix}$$

Ini menghasilkan sistem persamaan linear: 1. $a = 96$ 2. $a + b = 96$ 3. $b = 0$

Substitusikan $a = 96$ dan $b = 0$ ke persamaan (2):

$$96 + 0 = 96$$

$$96 = 96$$

Karena sistem persamaan ini **konsisten** (solusi ada: $a = 96, b = 0$), maka \mathbf{c}_5 berada dalam ruang rentangan yang dibentuk oleh \mathbf{v}_1 dan \mathbf{v}_2 .

Jawaban Ringkas: Ya, karena $\mathbf{c}_5 = 96\mathbf{v}_1 + 0\mathbf{v}_2$, yang berarti $\mathbf{c}_5 \in \text{span}\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2\}$

(e) Norma Euclidean (Jarak)

Hitung norma Euclidean antara Biru ($\mathbf{c}_B = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 127 \end{bmatrix}$) dan Kuning ($\mathbf{c}_K = \begin{bmatrix} 127 \\ 127 \\ 0 \end{bmatrix}$).

Jarak antara kedua warna adalah norma dari vektor perbedaan $\mathbf{d} = \mathbf{c}_K - \mathbf{c}_B$:

$$\mathbf{d} = \begin{bmatrix} 127 - 0 \\ 127 - 0 \\ 0 - 127 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 127 \\ 127 \\ -127 \end{bmatrix}$$

Norma Euclidean $\|\mathbf{d}\|$ dihitung sebagai:

$$\|\mathbf{d}\| = \sqrt{(127)^2 + (127)^2 + (-127)^2}$$

$$\|\mathbf{d}\| = \sqrt{3 \cdot (127)^2}$$

$$\|\mathbf{d}\| = 127\sqrt{3}$$

Jawaban Ringkas: $127\sqrt{3}$