Kunci Kode Soal Ujian: A

Soal 1 [Bobot 15%]

(a) Menentukan Frekuensi Dasar ω_0

Frekuensi komponen penyusun sinyal adalah:

- $\omega_1 = \frac{3\pi}{4}$ rad/s
- $\omega_2 = \frac{\pi}{2} = \frac{2\pi}{4}$ rad/s

Frekuensi dasar (ω_0) adalah faktor persekutuan terbesar (FPB) dari kedua frekuensi tersebut:

$$\omega_0 = \text{FPB}\left(\frac{3\pi}{4}, \frac{2\pi}{4}\right) = \frac{\pi}{4}\,\text{rad/s}$$

(b) Menentukan Koefisien Deret Fourier a_k

Ubah fungsi trigonometri ke bentuk eksponensial menggunakan rumus Euler:

- $\cos(\theta) = \frac{e^{j\theta}+e^{-j\theta}}{2}$
- $\sin(\theta) = \frac{e^{j\theta}-e^{-j\theta}}{2j}$

Substitusi ke persamaan $x(t)$:

$$\begin{aligned} x(t) &= 3 + 2\left(\frac{e^{j(3\omega_0 t)} + e^{-j(3\omega_0 t)}}{2}\right) - 5\left(\frac{e^{j(2\omega_0 t)} - e^{-j(2\omega_0 t)}}{2j}\right) \\ &= 3 + \left(e^{j3\omega_0 t} + e^{-j3\omega_0 t}\right) - \frac{5}{2j}e^{j2\omega_0 t} + \frac{5}{2j}e^{-j2\omega_0 t} \end{aligned}$$

Mengingat $\frac{1}{j} = -j$, maka:

$$x(t) = 3 + (1)e^{j3\omega_0 t} + (1)e^{-j3\omega_0 t} + \left(\frac{5j}{2}\right)e^{j2\omega_0 t} - \left(\frac{5j}{2}\right)e^{-j2\omega_0 t}$$

Maka, nilai koefisien a_k adalah:

- $a_0 = 3$
- $a_2 = \frac{5}{2}j = 2.5j$
- $a_{-2} = -\frac{5}{2}j = -2.5j$
- $a_3 = 1$
- $a_{-3} = 1$
- $a_k = 0$ untuk nilai k lainnya.

Soal 2 [Bobot 10%]

Berikut adalah transformasi Fourier untuk sinyal tersebut.

Hasil Akhir

$$X(\omega) = \frac{e^{j2\omega}}{3 + j\omega}$$

Langkah Pengerjaan Singkat

Kita menggunakan **properti pergeseran waktu** (*time shifting property*) dan pasangan transformasi standar.

1. **Transformasi Standar:** Diketahui bahwa transformasi untuk sinyal eksponensial dasar $e^{-at}u(t)$ adalah:

$$e^{-3t}u(t) \overset{\mathcal{F}}{\longleftrightarrow} \frac{1}{3 + j\omega}$$

2. **Properti Pergeseran Waktu:** Jika sinyal digeser sebesar t_0, maka transformasinya dikalikan dengan $e^{j\omega t_0}$:

$$x(t + t_0) \overset{\mathcal{F}}{\longleftrightarrow} e^{j\omega t_0}X(\omega)$$

3. **Aplikasi:** Karena sinyal digeser sejauh $+2$ (menjadi $t + 2$), maka kita kalikan hasil standar dengan $e^{j\omega(2)}$:

$$X(\omega) = e^{j2\omega} \cdot \frac{1}{3 + j\omega}$$

Soal 3 [Bobot 15%]

(a) Transformasi Laplace

Menggunakan properti linieritas dan pasangan transformasi standar $\mathcal{L}\{e^{-at}u(t)\} = \frac{1}{s+a}$:

$$X(s) = \frac{1}{s+1} + \frac{2}{s+4}$$

Untuk mempermudah penentuan *zero* nanti, kita samakan penyebutnya:

$$X(s) = \frac{(s+4) + 2(s+1)}{(s+1)(s+4)} = \frac{3s+6}{(s+1)(s+4)}$$

(b) Daerah Konvergensi (ROC)

ROC ditentukan oleh irisan dari ROC masing-masing suku. Karena kedua suku memiliki $u(t)$, sinyal ini bersifat *causal* (sisi kanan):

- Suku pertama (e^{-t}): $\text{Re}(s) > -1$
- Suku kedua (e^{-4t}): $\text{Re}(s) > -4$

Irisan keduanya adalah daerah di sebelah kanan pole paling kanan (terbesar): **ROC:** $\text{Re}(s) > -1$

(c) Pole dan Zero

Berdasarkan bentuk rasional $X(s) = \frac{3(s+2)}{(s+1)(s+4)}$:

- **Pole** (akar penyebut, nilai s saat $X(s) \to \infty$):

$$s = -1 \quad \text{dan} \quad s = -4$$

- **Zero** (akar pembilang, nilai s saat $X(s) = 0$):

$$s = -2$$

Soal 4 [Bobot 15%]

Berdasarkan pasangan transformasi Laplace standar untuk fungsi sinus:

$$\mathcal{L}\{\sin(\omega t)u(t)\} = \frac{\omega}{s^2 + \omega^2}$$

Dengan mengidentifikasi $\omega = 4$ dan karena ROC $\text{Re}\{s\} > 0$ menandakan sistem kausal (sisi kanan), maka fungsi waktunya adalah:

$$x(t) = \sin(4t)u(t)$$

Soal 5 [Bobot 45%]

Diketahui parameter komponen:

- $R = 4\,\Omega$
- $L = 5\,H$
- $C = 1\,F$

Input $x(t)$ adalah tegangan sumber, dan output $y(t)$ adalah tegangan pada kapasitor $V_C(t)$.

(a) Dinamika Sistem (Persamaan Diferensial)

Untuk mendapatkan persamaan diferensial, kita menggunakan Hukum Kirchoff tentang Tegangan (KVL) pada loop seri tersebut. Jumlah tegangan pada loop tertutup sama dengan nol (atau tegangan sumber sama dengan jumlah tegangan jatuh pada komponen pasif).

$$x(t) = V_R(t) + V_L(t) + V_C(t)$$

Kita tahu bahwa $y(t) = V_C(t)$. Arus $i(t)$ yang mengalir pada rangkaian seri kapasitor didefinisikan sebagai:

$$i(t) = C\frac{dy(t)}{dt}$$

Sekarang kita substitusi tegangan resistor (V_R) dan induktor (V_L) dalam bentuk $y(t)$:

1. $V_R(t) = R \cdot i(t) = R\left(C\frac{dy(t)}{dt}\right) = RC\frac{dy(t)}{dt}$
2. $V_L(t) = L\frac{di(t)}{dt} = L\frac{d}{dt}\left(C\frac{dy(t)}{dt}\right) = LC\frac{d^2y(t)}{dt^2}$

Substitusikan kembali ke persamaan KVL awal:

$$x(t) = LC\frac{d^2y(t)}{dt^2} + RC\frac{dy(t)}{dt} + y(t)$$

Masukkan nilai $R = 4, L = 5, C = 1$:

$$x(t) = (5)(1)\frac{d^2y(t)}{dt^2} + (4)(1)\frac{dy(t)}{dt} + y(t)$$

Persamaan Diferensial:

$$5\frac{d^2y(t)}{dt^2} + 4\frac{dy(t)}{dt} + y(t) = x(t)$$

(b) Fungsi Alih (Transfer Function) $H(s)$

Kita menerapkan Transformasi Laplace pada persamaan diferensial di atas dengan asumsi kondisi awal nol (zero initial conditions).

$$5s^2Y(s) + 4sY(s) + Y(s) = X(s)$$

$$Y(s)(5s^2 + 4s + 1) = X(s)$$

Fungsi alih $H(s) = \frac{Y(s)}{X(s)}$ adalah:

$$H(s) = \frac{1}{5s^2 + 4s + 1}$$

(c) Pole dan Zero

- **Zero:** Adalah akar-akar dari pembilang $H(s)$. Karena pembilang adalah konstanta (1), maka sistem **tidak memiliki zero**.
- **Pole:** Adalah akar-akar dari penyebut $5s^2+4s+1 = 0$. Kita gunakan rumus kuadrat (rumus abc):

$$s_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$$s_{1,2} = \frac{-4 \pm \sqrt{4^2 - 4(5)(1)}}{2(5)}$$

$$s_{1,2} = \frac{-4 \pm \sqrt{16 - 20}}{10}$$

$$s_{1,2} = \frac{-4 \pm \sqrt{-4}}{10} = \frac{-4 \pm j2}{10}$$

Lokasi Pole:

$$s_1 = -0.4 + j0.2$$

$$s_2 = -0.4 - j0.2$$

(d) Daerah Konvergensi (ROC)

Sistem dinyatakan **kausal**. Untuk sistem kausal, Daerah Konvergensi (ROC) adalah daerah di sebelah kanan dari pole yang paling kanan (pole dengan bagian real terbesar).

Bagian real dari pole adalah $\sigma = -0.4$.

ROC:

$$\text{Re}\{s\} > -0.4$$

(e) Kestabilan

Sebuah sistem LTI dikatakan **stabil BIBO (Bounded Input Bounded Output)** jika sumbu imajiner ($j\omega$) termasuk dalam daerah ROC.

- Lokasi Pole: $-0.4 \pm j0.2$ (Berada di *Left Half Plane* / Bidang Kiri, karena bagian real bernilai negatif).
- ROC: $\text{Re}\{s\} > -0.4$, yang mencakup sumbu $j\omega$ (di mana $\text{Re}\{s\} = 0$).

Kesimpulan: Sistem tersebut **Stabil**.

(f) Respon Frekuensi $H(j\omega)$

Substitusikan $s = j\omega$ ke dalam fungsi alih $H(s)$:

$$H(j\omega) = \frac{1}{5(j\omega)^2 + 4(j\omega) + 1}$$

Karena $j^2 = -1$, maka:

$$H(j\omega) = \frac{1}{-5\omega^2 + j4\omega + 1}$$

Susun bagian real dan imajiner di penyebut:

$$H(j\omega) = \frac{1}{(1 - 5\omega^2) + j(4\omega)}$$

(g) Magnitude dan Phase

Misalkan penyebut adalah bilangan kompleks $z = A + jB$, dengan $A = 1 - 5\omega^2$ dan $B = 4\omega$.

Magnitude $M(\omega) = |H(j\omega)|$:

$$M(\omega) = \frac{1}{\sqrt{A^2 + B^2}} = \frac{1}{\sqrt{(1 - 5\omega^2)^2 + (4\omega)^2}}$$

$$M(\omega) = \frac{1}{\sqrt{25\omega^4 - 10\omega^2 + 1 + 16\omega^2}}$$

$$M(\omega) = \frac{1}{\sqrt{25\omega^4 + 6\omega^2 + 1}}$$

Phase $\Phi(\omega) = \angle H(j\omega)$: Phase adalah sudut pembilang dikurangi sudut penyebut.

$$\Phi(\omega) = 0 - \arctan\left(\frac{B}{A}\right)$$

$$\Phi(\omega) = -\arctan\left(\frac{4\omega}{1 - 5\omega^2}\right)$$

(h) Jenis Tapis (Filter Type)

Mari kita uji perilaku magnitude $H(j\omega)$ pada frekuensi ekstrem:

1. **Saat $\omega \to 0$ (DC):**

   $$H(j0) = \frac{1}{1 - 0 + 0} = 1$$

   Sinyal frekuensi rendah diteruskan (passed).

2. **Saat $\omega \to \infty$ (Frekuensi tinggi):**

   $$H(j\infty) \approx \frac{1}{-5(\infty)^2} \approx 0$$

   Sinyal frekuensi tinggi diredam (blocked).

Kesimpulan: Karena sistem meloloskan frekuensi rendah dan meredam frekuensi tinggi, rangkaian RLC dengan output di kapasitor ini adalah **Lowpass Filter (Tapis Lolos Bawah)**.

(i) Respon Impuls $h(t)$

Kita mencari Transformasi Laplace Balik dari $H(s)$.

$$H(s) = \frac{1}{5s^2 + 4s + 1}$$

Keluarkan konstanta 5 agar koefisien s^2 menjadi 1:

$$H(s) = \frac{1}{5}\left(\frac{1}{s^2 + 0.8s + 0.2}\right)$$

Lakukan teknik melengkapi kuadrat sempurna pada penyebut:

$$s^2 + 0.8s + 0.2 = (s + 0.4)^2 - (0.4)^2 + 0.2$$

$$= (s + 0.4)^2 - 0.16 + 0.2$$

$$= (s + 0.4)^2 + 0.04$$

$$= (s + 0.4)^2 + (0.2)^2$$

Sehingga:

$$H(s) = \frac{1}{5}\frac{1}{(s + 0.4)^2 + (0.2)^2}$$

Kita ingin menggunakan pasangan transformasi Laplace untuk sinus teredam:

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{\omega_n}{(s+a)^2+\omega_n^2}\right\} = e^{-at}\sin(\omega_n t)u(t)$$

Di sini, $a = 0.4$ dan $\omega_n = 0.2$. Agar bentuknya sesuai, pembilang harus bernilai ω_n (yaitu 0.2). Kita manipulasi persamaan $H(s)$:

$$H(s) = \frac{1}{5} \cdot \frac{1}{0.2} \cdot \frac{0.2}{(s+0.4)^2+(0.2)^2}$$

$$H(s) = \frac{1}{1} \cdot \frac{0.2}{(s+0.4)^2+(0.2)^2}$$

Sekarang kita bisa lakukan transformasi balik:

Respon Impuls:

$$h(t) = e^{-0.4t}\sin(0.2t)u(t)$$