Soal 1

(a) Apakah $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$, dan $\mathbf{c}$ merupakan himpunan orthogonal?

Himpunan vektor dikatakan orthogonal jika hasil kali titik (*dot product*) dari setiap pasangan vektornya sama dengan nol.

1. $\mathbf{d} \cdot \mathbf{e}$
$$\mathbf{d} \cdot \mathbf{e} = (0)(2) + (4)(-4) + (-2)(0) = 0 - 16 + 0 = \mathbf{-16}$$
2. $\mathbf{d} \cdot \mathbf{f}$
$$\mathbf{d} \cdot \mathbf{f} = (0)(2) + (4)(0) + (-2)(-4) = 0 + 0 + 8 = \mathbf{8}$$
3. $\mathbf{e} \cdot \mathbf{f}$
$$\mathbf{e} \cdot \mathbf{f} = (2)(2) + (-4)(0) + (0)(-4) = 4 + 0 + 0 = \mathbf{4}$$

Karena $\mathbf{d} \cdot \mathbf{e} = -16 \neq 0$, $\mathbf{d} \cdot \mathbf{f} = 8 \neq 0$, dan $\mathbf{e} \cdot \mathbf{f} = 4 \neq 0$, maka $\mathbf{d}$, $\mathbf{e}$, dan $\mathbf{f}$ **bukan** merupakan himpunan orthogonal.

(b) Tentukan panjang vektor proyeksi orthogonal $\mathbf{e}$ pada vektor $\mathbf{f}$.

Panjang vektor proyeksi orthogonal $\mathbf{e}$ pada $\mathbf{f}$, disimbolkan $|\text{proj}_{\mathbf{f}}\mathbf{e}|$, dihitung dengan rumus:

$$|\text{proj}_{\mathbf{f}}\mathbf{e}| = \frac{|\mathbf{e} \cdot \mathbf{f}|}{||\mathbf{f}||}$$

1. Hitung $\mathbf{e} \cdot \mathbf{f}$

Dari bagian (a):

$$\mathbf{e} \cdot \mathbf{f} = 4$$

2. Hitung panjang (norm) vektor $\mathbf{f}$, $||\mathbf{f}||$

Vektor $\mathbf{f} = (2, 0, -4)$.

$$||\mathbf{f}|| = \sqrt{2^2 + 0^2 + (-4)^2} = \sqrt{4 + 0 + 16} = \sqrt{20} = 2\sqrt{5}$$

3. Hitung panjang proyeksi

$$|\text{proj}_{\mathbf{f}}\mathbf{e}| = \frac{|\mathbf{e} \cdot \mathbf{f}|}{||\mathbf{f}||} = \frac{|4|}{\sqrt{20}} = \frac{4}{2\sqrt{5}} = \frac{2}{\sqrt{5}}$$

Rasionalisasi:

$$\frac{2}{\sqrt{5}} \times \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{5}} = \mathbf{\frac{2\sqrt{5}}{5}}$$

Kesimpulan:

(a) Tidak. Vektor $\mathbf{d}$, $\mathbf{e}$, dan $\mathbf{f}$ **bukan** himpunan orthogonal. **(b)** Panjang vektor proyeksi orthogonal $\mathbf{e}$ pada $\mathbf{f}$ adalah $\mathbf{\frac{2\sqrt{5}}{5}}$.

Soal 2

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 6 & 0 \\ 3 & 7 & 2 \end{bmatrix}$$

1. Reduksi Matriks A ke Bentuk Eselon Baris Tereduksi (RREF)

Kita gunakan Operasi Baris Elementer (OBE):

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 6 & 0 \\ 3 & 7 & 2 \end{bmatrix} \xrightarrow{B_2 \leftarrow B_2 - 2B_1} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 4 & -4 \\ 3 & 7 & 2 \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{B_3 \leftarrow B_3 - 3B_1} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 4 & -4 \\ 0 & 4 & -4 \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{B_2 \leftarrow \frac{1}{4}B_2} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 4 & -4 \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{B_3 \leftarrow B_3 - 4B_2} R_{REF} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{(Bentuk Eselon Baris - REF)}$$

Lanjutkan ke RREF:

$$R_{REF} \xrightarrow{B_1 \leftarrow B_1 - B_2} R = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{(Bentuk Eselon Baris Tereduksi - RREF)}$$

(a) Basis Ruang Kolom (Col(A))

Basis ruang kolom diambil dari kolom-kolom **matriks asli** A yang berkorespondensi dengan kolom yang memiliki satu utama (**pivot**) pada matriks RREF (R).

- Satu utama (pivot) terdapat pada **kolom ke-1** dan **kolom ke-2** dari R.
- Kolom ke-1 dan ke-2 dari matriks A adalah $\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}$ dan $\begin{bmatrix} 1 \\ 6 \\ 7 \end{bmatrix}$.

$$\text{Basis(Col}(A)) = \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 6 \\ 7 \end{bmatrix} \right\}$$

(b) Basis Ruang Baris (Row(A))

Basis ruang baris diambil dari **vektor-vektor baris bukan nol** pada matriks RREF (R).

- Baris bukan nol dari R adalah $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 \end{bmatrix}$ dan $\begin{bmatrix} 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}$.

$$\text{Basis}(\text{Row}(A)) = \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix} \right\}$$

(c) Basis Ruang Null (Null(A))

Ruang null adalah solusi dari $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$. Kita gunakan RREF (R) untuk sistem persamaan:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Sistem persamaan: 1. $x_1 + 3x_3 = 0 \implies x_1 = -3x_3$ 2. $x_2 - x_3 = 0 \implies x_2 = x_3$

Variabel bebas adalah x_3. Misalkan $\mathbf{x_3} = t$, di mana $t \in \mathbb{R}$.

Vektor solusi $\mathbf{x}$:

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3t \\ t \\ t \end{bmatrix} = t \begin{bmatrix} -3 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Basis ruang null adalah vektor yang merentang solusi tersebut.

$$\text{Basis}(\text{Null}(A)) = \left\{ \begin{bmatrix} -3 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$$

Jawaban Ringkas:

- **Basis Ruang Kolom:** $\left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 6 \\ 7 \end{bmatrix} \right\}$
- **Basis Ruang Baris:** $\left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix} \right\}$
- **Basis Ruang Null:** $\left\{ \begin{bmatrix} -3 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$

Soal 3

(a) Formulasi Matematis Menggunakan Perkalian Titik

Jawaban Ringkas:

$$C = (10 - (\mathbf{d} \cdot \mathbf{w} \pmod{10})) \pmod{10}$$

Tentu, saya akan memverifikasi validitas kode ISSN-13 yang diberikan. Sama seperti EAN-13 dan ISBN-13, **ISSN-13 juga menggunakan aturan bobot yang identik** $(1, 3, 1, 3, ...)$ untuk menghitung digit uji.

Verifikasi Kode ISSN-13

Diberikan 12 digit awal $\mathbf{d}$ adalah `977204936300`. Digit uji yang tercetak (C_{tercetak}) adalah `2`.

$$\mathbf{d} = (9, 7, 7, 2, 0, 4, 9, 3, 6, 3, 0, 0)$$
$$\mathbf{w} = (1, 3, 1, 3, 1, 3, 1, 3, 1, 3, 1, 3)$$

Langkah Perhitungan

1. Hitung Total Perkalian S $(\mathbf{d} \cdot \mathbf{w})$

- **Posisi Ganjil (kali 1):** $9 + 7 + 0 + 9 + 6 + 0 = 31$
- **Posisi Genap (kali 3):** $7 \times 3 + 2 \times 3 + 4 \times 3 + 3 \times 3 + 3 \times 3 + 0 \times 3$

$$= 21 + 6 + 12 + 9 + 9 + 0 = 57$$

$$S = (\text{Total Ganjil}) + (\text{Total Genap})$$
$$S = 31 + 57$$
$$S = 88$$

2. Hitung Modulo 10 (M)

$$M = S \pmod{10} = 88 \pmod{10}$$
$$M = 8$$

3. Hitung Digit Uji yang Benar (C_{hitung})

$$C_{\text{hitung}} = (10 - M) \pmod{10}$$
$$C_{\text{hitung}} = (10 - 8) \pmod{10}$$
$$C_{\text{hitung}} = 2 \pmod{10}$$
$$C_{\text{hitung}} = 2$$

Kesimpulan Verifikasi

- Digit Uji Hasil Perhitungan (C_{hitung}) = **2**
- Digit Uji yang Tercetak (C_{tercetak}) = **2**

Karena $C_{\text{hitung}} = C_{\text{tercetak}}$ $(2 = 2)$, maka kode ISSN-13 yang diberikan adalah **kode yang valid**.

Jawaban Ringkas: Valid

Soal 4

Perhitungan Gaya Gerak Listrik (GGL) Terinduksi (ε)

GGL terinduksi (ε) pada kawat lurus dihitung dengan rumus perkalian tripel skalar:

$$\varepsilon = (\mathbf{v} \times \mathbf{B}) \cdot \mathbf{L}$$

Diketahui vektor-vektor:

- Kecepatan konduktor: $\mathbf{v} = -3\mathbf{i} + 1\mathbf{j} + 2\mathbf{k}$ m/s
- Medan magnet: $\mathbf{B} = 1\mathbf{i} - 2\mathbf{j} - 3\mathbf{k}$ Tesla
- Vektor panjang kawat: $\mathbf{L} = 0\mathbf{i} + 0\mathbf{j} + 0.3\mathbf{k}$ meter

(a) Hitung nilai GGL terinduksi

Langkah 1: Hitung perkalian silang $\mathbf{v} \times \mathbf{B}$

$$\mathbf{v} \times \mathbf{B} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ -3 & 1 & 2 \\ 1 & -2 & -3 \end{vmatrix}$$

$$\mathbf{v} \times \mathbf{B} = \mathbf{i}((1)(-3) - (2)(-2)) - \mathbf{j}((-3)(-3) - (2)(1)) + \mathbf{k}((-3)(-2) - (1)(1))$$

$$\mathbf{v} \times \mathbf{B} = \mathbf{i}(-3 - (-4)) - \mathbf{j}(9 - 2) + \mathbf{k}(6 - 1)$$

$$\mathbf{v} \times \mathbf{B} = \mathbf{i}(1) - \mathbf{j}(7) + \mathbf{k}(5)$$

$$\mathbf{v} \times \mathbf{B} = 1\mathbf{i} - 7\mathbf{j} + 5\mathbf{k}$$

Langkah 2: Hitung perkalian titik $(\mathbf{v} \times \mathbf{B}) \cdot \mathbf{L}$

$$\varepsilon = (1\mathbf{i} - 7\mathbf{j} + 5\mathbf{k}) \cdot (0\mathbf{i} + 0\mathbf{j} + 0.3\mathbf{k})$$

$$\varepsilon = (1)(0) + (-7)(0) + (5)(0.3)$$

$$\varepsilon = 0 + 0 + 1.5$$

$$\varepsilon = \mathbf{1.5} \text{ Volt}$$

Jawaban Ringkas (a): 1.5 Volt

Perhitungan Arus Induksi (I)

(b) Hitung Arus (I)

Berdasarkan **Hukum Ohm**, arus (I) yang mengalir dalam rangkaian tertutup akibat GGL terinduksi (ε) adalah:

$$I = \frac{|\varepsilon|}{R}$$

Diketahui:

- GGL terinduksi: $|\varepsilon| = 1.5$ Volt (dari perhitungan (a))
- Resistansi rangkaian: $R = 6$ Ohm

$$I = \frac{1.5 \text{ V}}{6 \ \Omega}$$

$$I = \mathbf{0.25} \text{ Ampere}$$

Jawaban Ringkas (b): 0.25 Ampere

Soal 5

Analisis Vektor Ruang Warna RGB (6-bit)

Ruang warna RGB dimodelkan sebagai $\mathbb{R}^3$, dengan nilai intensitas maksimum 63.

(a) Basis Ruang Warna RGB

Untuk menentukan apakah himpunan $\{\mathbf{c}_1, \mathbf{c}_2, \mathbf{c}_3\}$ membentuk **basis** untuk $\mathbb{R}^3$, kita periksa kebebasan linear dengan menghitung determinan dari matriks A yang dibentuk oleh vektor-vektor tersebut.

Vektor yang diberikan: $\mathbf{c}_1 = \begin{bmatrix} 63 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$, $\mathbf{c}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 63 \\ 0 \end{bmatrix}$, $\mathbf{c}_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 63 \end{bmatrix}$.

Matriks $A = [\mathbf{c}_1 \mid \mathbf{c}_2 \mid \mathbf{c}_3]$:

$$A = \begin{bmatrix} 63 & 0 & 0 \\ 0 & 63 & 0 \\ 0 & 0 & 63 \end{bmatrix}$$

Hitung determinan A:

$$\det(A) = 63 \cdot (63 \cdot 63 - 0 \cdot 0) - 0 + 0$$

$$\det(A) = 63^3$$

Karena $\det(A) = 63^3 \neq 0$, vektor-vektor tersebut **bebas linear** dan merentang $\mathbb{R}^3$. Oleh karena itu, himpunan $\{\mathbf{c}_1, \mathbf{c}_2, \mathbf{c}_3\}$ membentuk basis.

Jawaban Ringkas: Ya

(b) Kombinasi Linear untuk Warna Kuning ($\mathbf{c}_4$)

Kita ingin menyatakan $\mathbf{c}_4 = \begin{bmatrix} 32 \\ 32 \\ 0 \end{bmatrix}$ sebagai kombinasi linear dari basis $\{\mathbf{c}_1, \mathbf{c}_2, \mathbf{c}_3\}$:

$$\mathbf{c}_4 = k_1\mathbf{c}_1 + k_2\mathbf{c}_2 + k_3\mathbf{c}_3$$

$$\begin{bmatrix} 32 \\ 32 \\ 0 \end{bmatrix} = k_1 \begin{bmatrix} 63 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + k_2 \begin{bmatrix} 0 \\ 63 \\ 0 \end{bmatrix} + k_3 \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 63 \end{bmatrix}$$

Ini menghasilkan sistem persamaan:

1. $63k_1 = 32 \implies k_1 = \frac{32}{63}$
2. $63k_2 = 32 \implies k_2 = \frac{32}{63}$
3. $63k_3 = 0 \implies k_3 = 0$

Maka, kombinasi linearnya adalah:

$$\mathbf{c}_4 = \frac{32}{63}\mathbf{c}_1 + \frac{32}{63}\mathbf{c}_2 + 0\mathbf{c}_3$$

Jawaban Ringkas: $\mathbf{c}_4 = \frac{32}{63}\mathbf{c}_1 + \frac{32}{63}\mathbf{c}_2 + 0\mathbf{c}_3$

(c) Kombinasi Linear untuk Warna Baru (c_5)

Kita ingin menyatakan $\mathbf{c}_5 = \begin{bmatrix} 0 \\ 48 \\ 48 \end{bmatrix}$ (Hijau + Biru) sebagai kombinasi linear dari basis $\{\mathbf{c}_1, \mathbf{c}_2, \mathbf{c}_3\}$:

$$\mathbf{c}_5 = k_1\mathbf{c}_1 + k_2\mathbf{c}_2 + k_3\mathbf{c}_3$$

$$\begin{bmatrix} 0 \\ 48 \\ 48 \end{bmatrix} = k_1 \begin{bmatrix} 63 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + k_2 \begin{bmatrix} 0 \\ 63 \\ 0 \end{bmatrix} + k_3 \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 63 \end{bmatrix}$$

Ini menghasilkan sistem persamaan:

1. $63k_1 = 0 \implies k_1 = 0$
2. $63k_2 = 48 \implies k_2 = \frac{48}{63}$
3. $63k_3 = 48 \implies k_3 = \frac{48}{63}$

Sederhanakan pecahan $\frac{48}{63}$ dengan membagi pembilang dan penyebut dengan **9**:

$$\frac{48}{63} = \frac{48 \div 3}{63 \div 3} = \frac{16}{21}$$

Catatan: 16 dan 21 tidak memiliki faktor persekutuan selain 1.

Maka, kombinasi linearnya adalah:

$$\mathbf{c}_5 = 0\mathbf{c}_1 + \frac{16}{21}\mathbf{c}_2 + \frac{16}{21}\mathbf{c}_3$$

Jawaban Ringkas: $\mathbf{c}_5 = 0\mathbf{c}_1 + \frac{16}{21}\mathbf{c}_2 + \frac{16}{21}\mathbf{c}_3$

(d) Ruang Rentangan (Span) span$\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2\}$

Kita perlu menentukan apakah $\mathbf{c}_5 = \begin{bmatrix} 48 \\ 48 \\ 0 \end{bmatrix}$ (gunakan $\mathbf{c}_5$ dari soal, bukan dari sub-bagian c) dapat dihasilkan oleh kombinasi linear dari $\mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ dan $\mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$.

Kita cari skalar a dan b sehingga:

$$\mathbf{c}_5 = a\mathbf{v}_1 + b\mathbf{v}_2$$

$$\begin{bmatrix} 48 \\ 48 \\ 0 \end{bmatrix} = a \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + b \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a \\ a + b \\ b \end{bmatrix}$$

Ini menghasilkan sistem persamaan linear:

1. $a = 48$
2. $a + b = 48$
3. $b = 0$

Substitusikan $a = 48$ dan $b = 0$ ke persamaan (2):

$$48 + 0 = 48$$

$$48 = 48$$

Karena sistem persamaan ini **konsisten** (solusi ada: $a = 48, b = 0$), maka $\mathbf{c}_5$ **berada dalam ruang rentangan** yang dibentuk oleh $\mathbf{v}_1$ dan $\mathbf{v}_2$.

Jawaban Ringkas: Ya, karena $\mathbf{c}_5 = 48\mathbf{v}_1 + 0\mathbf{v}_2$, yang berarti $\mathbf{c}_5 \in \text{span}\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2\}$

(e) Norma Euclidean (Jarak)

Hitung norma Euclidean antara Hijau ($\mathbf{c}_G = \begin{bmatrix} 0 \\ 63 \\ 0 \end{bmatrix}$) dan Ungu ($\mathbf{c}_U = \begin{bmatrix} 63 \\ 0 \\ 63 \end{bmatrix}$).

Jarak antara kedua warna adalah norma dari vektor perbedaan $\mathbf{d} = \mathbf{c}_U - \mathbf{c}_G$:

$$\mathbf{d} = \begin{bmatrix} 63 - 0 \\ 0 - 63 \\ 63 - 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 63 \\ -63 \\ 63 \end{bmatrix}$$

Norma Euclidean $\|\mathbf{d}\|$ dihitung sebagai:

$$\|\mathbf{d}\| = \sqrt{(63)^2 + (-63)^2 + (63)^2}$$

$$\|\mathbf{d}\| = \sqrt{3 \cdot (63)^2}$$

$$\|\mathbf{d}\| = 63\sqrt{3}$$

Jawaban Ringkas: $63\sqrt{3}$