Tugas Besar 1 IF2123 Aljabar Linier dan Geometri

Matriks, Sistem Persamaan Linier, Determinan, dan Aplikasinya

Semester I Tahun Ajaran 2021/2022

13520107 Azka Syauqy Irsyad

13520114 Kevin Roni

13520141 Yoseph Alexander

BAB I

DESKRIPSI MASALAH

Sistem persamaan linier (SPL) banyak ditemukan di dalam bidang sains dan rekayasa. Sembarang SPL dapat diselesaikan dengan beberapa metode, seperti metode eliminasi Gauss, metode eliminasi Gauss-Jordan, metode matriks balikan (x = A-1b), dan kaidah *Cramer* (khusus untuk SPL dengan n peubah dan n persamaan).

Solusi untuk sebuah SPL memiliki 3(tiga) kemungkinan, yaitu mungkin tidak ada, banyak (tidak berhingga), atau hanya satu (unik/tunggal).

Di dalam Tugas Besar 1 ini, kami diminta untuk membuat satu atau lebih *library* aljabar linier dalam Bahasa Java. Library tersebut berisi fungsi-fungsi seperti eliminasi Gauss, eliminasi Gauss-Jordan, menentukan balikan matriks, menghitung determinan, kaidah Cramer (kaidah Cramer khusus untuk SPL dengan n peubah dan n persamaan). Selanjutnya, *library* tersebut akan digunakan di dalam program Java untuk menyelesaikan berbagai persoalan yang dimodelkan dalam bentuk SPL, menyelesaikan persoalan interpolasi, dan persoalan regresi.

BAB II

TEORI SINGKAT

a) Metode Eliminasi Gauss dan Gauss-Jordan

Metode eliminasi Gauss dan Gauss-Jordan adalah Sebagian dari metode yang dapat digunakan untuk menyelesaikan persoalan SPL. Untuk menyelesaikan sebuah persoalan SPL, persamaan yang ada dapat direpresentasikan secara ringkas melalui sebuah matriks. Matriks tersebut dikenal sebagai matriks augmented.

$$[A \mid \mathbf{b}] = \left[\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} & b_m \end{array}\right]$$

Elemen yang ada pada satu baris merupakan representasi dari satu persamaan, sedangkan elemen yang ada pada satu kolom merepresentasikan koefisien dari satu variable yang sama dalam bebapa persamaan. Bagian A merepresentasikan peubah dan bagian b merepresentasikan hasil dari persamaan.

- Contoh:

$$\begin{aligned} x_1 + 3x_2 - 6x_3 &= 9 \\ 2x_1 - 6x_2 + 4x_3 &= 7 \\ 5x_1 + 2x_2 - 5x_3 &= -2 \end{aligned} \quad \Longrightarrow \quad \begin{bmatrix} 1 & 3 & -6 & 9 \\ 2 & -6 & 4 & 7 \\ 5 & 2 & -5 & -2 \end{bmatrix}$$

Dalam metode eliminasi Gauss dan Gauss-Jordan, matriks yang akan digunakan adalah matriks augmented yang menjadi representasi dari persoalan SPL. Untuk mengolah matriks augmented tersebut, digunakan sebuah operasi yang disebut Operasi Baris Elementer (OBE). Ada tiga operasi dalam OBE terhadap matriks augmented, yaitu mengalikan sebuah baris dengan konstanta tidak nol, menukarkan dua buah baris dan menambahkan sebuah baris dengan kelipatan baris lainnya.

Sebuah matriks yang dilakukan operasi OBE pada akhirnya akan membentuk sebuah matriks yang disebut matriks eselon. Matriks eselon baris adalah matriks yang memiliki 1 utama pada setiap baris, kecuali baris yang seluruhnya nol. Suatu baris dikatakan memiliki 1 utama apabila pada baris tersebut elemen bukan nol pertama yang ditemukannya adalah angka 1 (satu).

Selain matriks eselon baris, terdapat juga matriks eselon baris tereduksi. Pada dasarnya perbedaan dari keduanya, matriks eselon baris tereduksi adalah matriks eselon baris yang tiap kolomnya yang memiliki 1 utama maka elemen lainnya adalah angka 0(nol).

Dalam eliminasi Gauss dan Gauss-Jordan, kedua matriks tersebut adalah inti dari metode ini. Matriks augmented yang ada akan diproses dengan OBE dan pada akhirnya akan menghasilkan sebuah matriks eselon. Apabila pada akhirnya didapatkan matriks eselon baris saja maka metode tersebut adalah metode eliminasi Gauss sedangkan apabila pada akhirnya didapatkan matriks eselon baris tereduksi maka metode tersebut adalah metode Gauss-Jordan.

Contoh :
$$\begin{aligned} 2x_1 + 3x_2 - x_3 &= 5 \\ 4x_1 + 4x_2 - 3x_3 &= 3 \\ -2x_1 + 3x_2 - x_3 &= 1 \end{aligned}$$
, persoalan SPL di samping apabila dinyatakan

dalam matriks augmented akan berbentuk $\begin{bmatrix} 2 & 3 & -1 & 5 \\ 4 & 4 & -3 & 3 \\ -2 & 3 & -1 & 1 \end{bmatrix}$ yang apabila

dilakukan operasi OBE akan didapatkan $\begin{bmatrix} 1 & 3/2 & -1/2 & 5/2 \\ 0 & 1 & 1/2 & 7/2 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{bmatrix}$

dengan solusi
$$\begin{aligned} x_1 + 3/2x_2 - 1/2x_3 &= 5/2 && \text{(i)} \\ x_2 + 1/2x_3 &= 7/2 && \text{(ii)} \\ x_3 &= 3 && \text{(iii)} \end{aligned}$$

Metode yang digunakan dalam personalan diatas adalah metode eliminasi Gauss karena matriks augmented diproses dengan operasi OBE menjadi matriks eselon baris dan bukan matriks eselon baris tereduksi.

b) Determinan

Determinan adalah sebuah *value* atau nilai yang hanya dapat ditemukan pada sebuah matriks persegi N x N. Determinan sebuah matriks dapat bernilai 0 (nol) dan tidak nol. Matriks yang memiliki determinan 0 menandakan bahwa matriks tersebut tidak bersifat *invertible* sedangkan matriks yang determinannya bernilai tidak 0 berarti matriks tersebut bersifat *invertible.* Matriks yang bersifat invertible adalah matriks yang apabila dinamakan A dan ada matriks B sehingga AB = BA = matriks identitas, atau dapat dikatakan B adalah invers dari matriks A.

Untuk matriks 2x2, determinan dapat dengan mudah ditentukan. Apabila ada sebuah matriks

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$$

maka determinannya adalah $a_{22}*a_{11}$ – $a_{12}*a_{21}$.

Untuk matriks 3x3, 4x4 dan seterusnya, mencari nilai dari determinan matriks tersebut akan semakin sulit. Untuk itu diperkenalkan sebuah konsep determinan dari matriks segitiga. Ada dua matriks segitiga yang digunakan yaitu,

1. Matriks segitiga atas (*upper triangular*): semua elemen <u>di bawah</u> diagonal utama adalah nol

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ 0 & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ 0 & 0 & a_{33} & a_{34} \\ 0 & 0 & 0 & a_{44} \end{bmatrix} \Longrightarrow \det(A) = a_{11}a_{22}\,a_{33}a_{44}$$

2. Matriks segitiga bawah (*lower triangular*): semua elemen *di atas* diagonal utama adalah nol

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & 0 & 0 & 0 \\ a_{21} & a_{22} & 0 & 0 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & 0 \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{bmatrix} \Longrightarrow \det(A) = a_{11}a_{22}\,a_{33}a_{44}$$

dan dapat dirumuskan bahwa untuk matriks segitiga NxN, determinan dari matriks itu adalah $a_{11}a_{22}\,a_{33}\dots\,a_{nn}$.

Lalu bagaimana dengan matriks persegi lainnya yang tidak berbentuk seperti matriks segitiga di atas? Matriks persegin NxN dapat dicari nilai determinannya dengan memanfaatkan operasi OBE yang pada akhirnya akan menghasilkan matriks seperti matriks segitiga bawah di atas.

$$[A] \overset{\text{OBE}}{\sim} [\text{matriks segitiga bawah}]$$

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix} \overset{\text{OBE}}{\sim} \begin{bmatrix} a'_{11} & a'_{12} & \dots & a'_{1n} \\ 0 & a'_{22} & \dots & a'_{2n} \\ \vdots & \vdots & \dots & a'_{3n} \\ 0 & 0 & 0 & a'_{nn} \end{bmatrix}$$

$$\text{maka } \det(A) = (-1)^p \, a'_{11}a'_{22} \dots a'_{nn}$$

p menyatakan banyaknya operasi pertukaran baris di dalam OBE

Jika selama reduksi baris ada OBE berupa perkalian baris-baris matriks dengan $k_1, k_2, \dots, k_m$, maka

$$\text{maka } \det(A) = \frac{(-1)^p \, a'_{11} \; a'_{22} \dots a'_{mm}}{k_1 k_2 \dots k_m}$$

Selain dengan menggunakan metode OBE, determinan dari sebuah matriks juga dapat ditentukan menggunkan metode ekspansi kofaktor. Untuk espansi kofaktor ada satu hal penting yang selalu diingat yaitu tanda positif dan negatif pada kofaktor yang diambil dari -1 dipangkatkan dengan penjumlahan baris dan kolom dari elemen tersebut. Untuk mempermudah mengingat dan mengetahui tanda dari kofaktor dapat digunakan pola seperti berikut

$$\begin{bmatrix} + & - & + & - & \dots \\ - & + & - & + & \dots \\ + & - & + & - & \dots \\ - & + & - & + & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \end{bmatrix}$$

Untuk mendapatkan nilai dari kofator itu sendiri dapat digunakan persamaan

$$C_{ij} = (-1)^{i+j}(M_{ij}),$$

dengan M_{ij} menyatakan minor dari a_{ij} yang merupakan determinan yang didapatkan dari submatriks yang diperoleh dengan mencoret baris ke-*i* dan semua kolom ke-*j*.

Untuk menghitung nilai determinan menggunakan ekspansi kofaktor tadi, dilakukan pencoretan dengan memilih satu baris atau kolom utama dan dicoret juga kolom atau baris secara satu per satu sekaligus juga untuk membentuk submatriks untuk mendapatkan nilai minor. Hasil kofaktor yang didapat lalu dikalikan dengan perpotongan baris dan kolom yang dicoret dan dijumlahkan seluruhnya pada baris atau kolom utama yang dipilih

c) Matriks Balikan

Matriks yang bersifat invertible adalah matriks yang apabila dinamakan A dan ada matriks B sehingga AB = BA = matriks identitas, atau dapat dikatakan B adalah invers dari matriks A. Balikan / *Inverse* dari suatu matriks misal A biasa dilambangkan dengan A^{-1}.

Sebuah persoalan sistem misal Ax = B dapat diselesaikan dengan memanfaatkan matriks balikan sehingga didapatkan $x = A^{-1} B$:

$$\begin{aligned} Ax &= B \\ A^{-1} A x &= A^{-1} B \\ I x &= A^{-1} B \\ x &= A^{-1} B \end{aligned}$$

Selain dengan cara diatas, suatu persoalan SPL juga dapat diselesaikan saat persoalan itu direpresentasikan dengan matriks. Persoalan itu dapat diselesaikan dengan memanfaatkan konsep matriks Augmented yang akan dikerjakan dengan metode eliminasi Gauss-Jordan.

$$[A|I] \sim\text{(Gauss-Jordan)}\sim [I|A^{-1}],$$

Matriks yang sudah direpresentasikan dalam bentuk matriks akan dibuat menjadi matriks augmented dengan menggabungkannya dengan matriks identitas yang berukuran sama. Setelah itu, matriks augmented tersebut akan dilakukan metode eliminasi Gauss=Jordan hingga pada akhirnya matriks augmented bagian kiri akan berbentuk matriks identitas dan bagian kanan yang awalnya adalah matriks identitas akan berubah dan menjadi balikan / *Inverse* dari matriks representasi persoalan SPL.

Selain menggunakan metode eliminasi Gauss-Jordan, balikan matriks A juga bisa ditentukan dengan memanfaatkan determinan dari matriks A, matriks Cofactor dan matriks Adjoint dari matriks A dengan persamaan

$$A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} \operatorname{adj}(A)$$

d) Matriks Cofactor

Misal A adalah sebuah matriks persegi n x n maka matriks cofactor dari A adalah A^c yang juga berukuran n x n dengan elementnya adalah kofaktor dari tiap elemen pada matriks A.

Nilai cofactor dari setiap elemen pada matriks A (a_{ij}) dapat dicari dengan persamaan

$$C_{ij} = (-1)^{i+j}(M_{ij}),$$

sehingga matriks cofactornya akan seperti berikut

$$\begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & \cdots & C_{1n} \\ C_{21} & C_{22} & \cdots & C_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ C_{n1} & C_{n2} & \cdots & C_{nn} \end{bmatrix}$$

e) Matriks Adjoint

Misalkan A adalah matriks persegi n x n dan A^c adalah matriks cofactor dari A maka matriks Adjoint dari A atau *adj* A adalah transpose dari A^c (matriks cofactor dari A).

Transpose adalah operasi dalam matriks yang menukar elemen pada baris dan kolom matriks. Sehingga apabila elemen pada matriks A adalah a_{ij} maka elemen dari matriks tranposenya adalah a_{ji}.

Matriks adjoint dar A (*adj* A) juga dapat digunakan untuk mencari balikan/*Inverse* dari matriks A, dengan persamaan

$$A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} \operatorname{adj}(A)$$

f) Kaidah Cramer

Kaidah Cramer adalah salah satu metode yang dapat digunakan untuk menyelesaikan persamaan SPL. Persamaan SPL yang dapat diselesaikan hanya terkhusus pada persamaan yang hanya memiliki n peubah dan n persamaan yang sedemikian hingga nilai determinannya ≠ 0. Persamaan SPL tersebut akan memiliki solusi unik seperti berikut

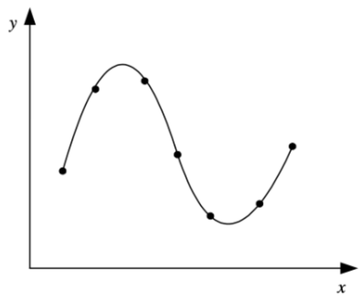
$$x_1 = \frac{\det(A_1)}{\det(A)}, \quad x_2 = \frac{\det(A_2)}{\det(A)}, \quad \ldots, \quad x_n = \frac{\det(A_n)}{\det(A)}$$

yang dalam hal ini, A_j adalah matriks yang diperoleh dengan mengganti entri pada kolom ke-j dari A dengan entri dari matriks

$$\mathbf{b} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix}$$

g) Interpolasi Polinom

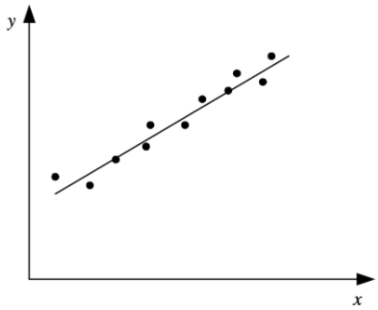
Apabila terdapat beberapa titik (x_1, y_1), (x_2, y_2), ..., (x_n, y_n) dan semua titik tersebut terletak pada suatu kurva $p_n(x)$ maka $p_n(x)$ dikatakan menginterpolasi atau melewati seluruh titik itu sehingga $y_i = p_n(x_i)$ dengan i = 0…n .



Polinom interpolasi $p_n(x)$ tersebut dapat digunakan untuk melakukan taksiran atau kisaran pada suatu suatu nilai sembarang x yang terletak di antara x_1 dan x_n .

h) Regresi Linier Berganda

Untuk memprediksi nilai atau memberikan kisaran bisa digunakan metode selain interpolasi polinom yaitu dengan metode regresi linear berganda,



Regresi linear adalah suatu pendekatan secara linear antara variable independent/bebas (x) dengan variable dependen/terikat (y). Pada regresi linear berganda, pendekatan dilakukan pada lebih dari satu variable bebas($x_1, x_2, \ldots, x_n$). Persamaan umum untuk regresi linear berganda adalah

$$y_i = \beta_0 + \beta_1 x_{1i} + \beta_2 x_{2i} + \cdots + \beta_k x_{ki} + \epsilon_i$$

dengan y adalah variabel terikat, x adalah variabel bebas, β_0 adalah konstanta apabila nilai β_i lainnya = 0. β_i dengan i = 1…n adalah koefisien regresi.

Nilai βi dapat dicari menggunakan *Normal Estimation Equation*
for Multiple Linear Regression yang dapat diselesaikan dengan metode eliminasi Gauss-Jordan.

BAB III

IMPLEMENTASI

Program kami dibagi ke dalam dua file, yaitu file untuk segala proses matriks dan perhitungan serta file untuk menjalankan program (menu).

1. Matriks.java

Terdiri dari beberapa atribut dan method sebagai berikut.

a) Atribut RowMin, ColMin, RowMax, serta ColMax yang mengeset indeks minimum dan maksimum untuk baris dan kolom.
b) Atribut Row dan Col yang nantinya untuk memberi nilai jumlah baris dan kolom dari matriks yang akan dibuat nantinya.
c) Atribut countSwap yang menghitung berapa kali terjadi pertukaran baris yang berguna untuk perhitungan determinan menggunakan OBE.
d) Atribut saveDividers yang menyimpan nilai pembagi yang dilakukan pada proses mencari determinan OBE dengan mengalikannya.
e) Atribut hasInverse yang memberikan diset true jika mempunyai inverse dan false jika tidak mempunyai inverse.
f) Method createMatriks untuk membuat matriks dengan mengeset nilai baris dan kolomnya.
g) Method getFirstIdxRow untuk mengembalikan indeks baris pertama dari matriks.
h) Method getFirstColRow untuk mengembalikan indeks kolom pertama dari matriks.
i) Method getLastIdxRow untuk mengembalikan indeks baris terakhir dari matriks,
j) Method getLastColRow untuk mengembalikan indeks kolom terakhir dari matriks.
k) Method countElmt untuk mengembalikan total anggota dari matriks.

l) Method getElmt untuk mengembalikan value dari suatu baris dan kolom tertentu.
m) Method setElmt untuk melakukan pemasukan nilai untuk suatu kolom dan baris tertentu dari pengguna.
n) Method setValueElmt untuk memberikan value yang sudah ditentukan ke dalam suatu kolom dan baris tertentu.
o) Method readMatrix untuk membaca matriks dari masukan keyboard.
p) Method readMatrixHilbert untuk membuat matriks Hilbert sesuai masukan user.
q) Method polynomRead untuk membaca titik yang kemudian dibuat ke dalam matriks khusus untuk polinom.
r) Method readPolynomFromFile untuk membaca titik masukan yang berasal dari file masukan.
s) Method readMatrixFromFile untuk membaca matriks dari file masukan.
t) Method writeMatrix untuk menuliskan matriks ke layar.
u) Method writeMatrixInvToFile untuk menuliskan matriks ke dalam file.
v) Method writeMatrixDetToFile untuk menuliskan nilai determinan OBE ke dalam file.
w) Method writeMatrixDetCofToFile untuk menuliskan nilai determinan kofaktor ke dalam file
x) Method isSquare untuk mengecek apakah matriks persegi atau tidak.
y) Method isIdentity untuk mengecek apakah matriks identitas atau tidak.
z) Method isZero untuk melihat apakah value 0 atau tidak.
aa) Method isBelowZero untuk melihat apakah dibawah value tersebut 0 atau tidak.
bb) Method Swap untuk melakukan pertukaran baris.
cc) Method swapZero untuk melakukan pertukaran baris jika di bawahnya 0.
dd) Method multiplyRow untuk mengalikan baris tertentu.
ee) Method multiplyCol untuk mengalikan kolom tertentu.
ff) Method divideRow untuk membagi baris tertentu.
gg) Method plusRow untuk menambahkan baris tertentu.
hh) Method minusRow untuk mengurangkan baris tertentu.
ii) Method transpose untuk melakukan transpose terhadap matriks.
jj) Method elimGauss untuk melakukan metode eliminasi gauss.
kk) Method elimGaussJordan untuk melakukan metode eliminasi gauss Jordan.

ll) Method determinanOBE untuk menghitung determinan dengan cara OBE.

mm) Method getDeterminanOBE untuk mencetak nilai dari determinan OBE.

nn) Method subMatriks untuk membuat matriks minor untuk perhitungan matriks kofaktor

oo) Method determinanC untuk menghitung nilai determinan dengan kofaktor.

pp) Method getDeterminantC untuk mencetak nilai determinan dengan metode matriks kofaktor

qq) Method cofactor untuk membuat matriks kofaktor.

rr) Method kaidah_crammer untuk menghitung dengan menggunakan kaidah crammer

ss) Method adjoint_invers untuk membuat invers matriks dengan adjoin.

tt) Method inversGaussWrite untuk menuliskan matriks invers dengan metode gauss.

uu) Method findsplwithGauss untuk menghitung solusi persamaan dengan metode gauss.

vv) Method findsplwithGaussJordan untuk menghitung solusi persamaan dengan metode gauss Jordan.

ww) Method findSPLwithInv untuk menghitung solusi persamaan dengan metode invers matrix.

xx) Method polynomInterpolate untuk melakukan perhitungan interpolasi polinom.

yy) Method double_regression untuk melakukan perhitungan regresi berganda.

2. Main.java

Merupakan file untuk menjalankan code yang telah dibuat di file sebelumnya, atau biasa disebut dengan file driver. Masukan input dari user harus sesuai dengan instruksi yang ada dalam program

BAB IV

EKSPERIMEN

1. a

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 & -1 \\ 2 & 5 & -7 & -5 \\ 2 & -1 & 1 & 3 \\ 5 & 2 & -4 & 2 \end{bmatrix}, \quad b = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 4 \\ 6 \end{bmatrix}$$

Dengan menggunakan metode invers matriks, didapatkan:

```
Matriks tidak mempunyai invers
Solusi tidak bisa dicari.%
```

b.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & -3 & 0 \\ 2 & -1 & 0 & 1 & -1 \\ -1 & 2 & 0 & -2 & -1 \end{bmatrix}, \quad b = \begin{bmatrix} 3 \\ 6 \\ 5 \\ -1 \end{bmatrix}$$

Dengan menggunakan metode gauss, didapatkan:

```
SPL memiliki banyak solusi
X1 = a
X2 = b
X3 = c
X4 = d
X5 = e
X1 = 3.00 + 1.00b -1.00e X2 = 1.50 + 1.50d + 0.50e X4 = -1.00 +
1.00e
```

c.

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad b = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Dengan menggunakan metode gauss-jordan, didapatkan

```
SPL memiliki banyak solusi
X1 = a
X2 = b
X3 = c
X4 = d
X5 = e
X6 = f
X2 = 1.00 -1.00f X4 = -2.00 -1.00f X5 = 1.00 + 1.00f
```

d.

$$H = \begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \cdots & \frac{1}{n} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \frac{1}{4} & \cdots & \frac{1}{n+1} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{4} & \frac{1}{5} & \cdots & \frac{1}{n+2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ \frac{1}{n} & \frac{1}{n+1} & \frac{1}{n+2} & \cdots & \frac{1}{2n+1} \end{bmatrix}, \quad b = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}$$

Dengan mengggunakan metode invers matriks, untuk nilai n = 6 dan n = 10 didapatkan:

```
x1 = 36.00000
x2 = -630.00000
x3 = 3360.00000
x4 = -7560.00000
x5 = 7560.00000
x6 = -2772.00000
```

```
x1 = 99.99635
x2 = -4949.68266
x3 = 79193.21483
x4 = -600538.13695
x5 = 2522224.25868
x6 = -6305485.54719
x7 = 9608261.78323
x8 = -8750305.21420
x9 = 4375119.56550
x10 = -923630.23496
```

2. a

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 & -1 & -1 \\ 2 & 1 & -2 & -2 & -2 \\ -1 & 2 & -4 & 1 & 1 \\ 3 & 0 & 0 & -3 & -3 \end{bmatrix}.$$

Dengan menggunakan metode gauss Jordan, didapatkan

```
SPL memiliki banyak solusi
X1 = a
X2 = b
X3 = c
X4 = d
X1 = -1.00 + 1.00d X2 = 2.00c
```

b.

$$\begin{bmatrix} 2 & 0 & 8 & 0 & 8 \\ 0 & 1 & 0 & 4 & 6 \\ -4 & 0 & 6 & 0 & 6 \\ 0 & -2 & 0 & 3 & -1 \\ 2 & 0 & -4 & 0 & -4 \\ 0 & 1 & 0 & -2 & 0 \end{bmatrix}.$$

dengan menggunakan metode gauss, didapatkan

```
SPL memiliki solusi unik
Solusi adalah:
X1 = 0.00
X2 = 2.00
X3 = 1.00
X4 = 1.00
```

3. a

$$
\begin{aligned}
8x_1 + x_2 + 3x_3 + 2x_4 &= 0 \\
2x_1 + 9x_2 - x_3 - 2x_4 &= 1 \\
x_1 + 3x_2 + 2x_3 - x_4 &= 2 \\
x_1 + 6x_3 + 4x_4 &= 3
\end{aligned}
$$

Dengan menggunakan metode invers matriks, didapatkan:

```
x1 = -0.20000
x2 = 0.17647
x3 = 0.70588
x4 = -0.25882
```

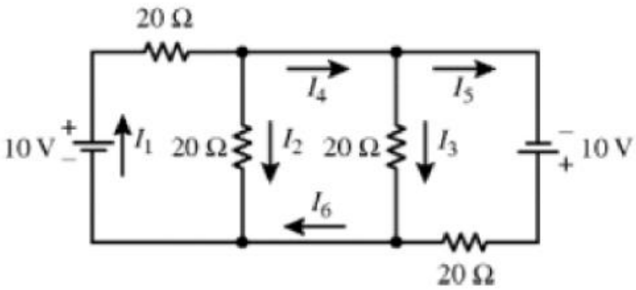
b.

$$
\begin{aligned}
x_7 + x_8 + x_9 &= 13.00 \\
x_4 + x_5 + x_6 &= 15.00 \\
x_1 + x_2 + x_3 &= 8.00 \\
0.04289(x_3 + x_5 + x_7) + 0.75(x_6 + x_8) + 0.61396x_9 &= 14.79 \\
0.91421(x_3 + x_5 + x_7) + 0.25(x_2 + x_4 + x_6 + x_8) &= 14.31 \\
0.04289(x_3 + x_5 + x_7) + 0.75(x_2 + x_4) + 0.61396x_1 &= 3.81 \\
x_3 + x_6 + x_9 &= 18.00 \\
x_2 + x_5 + x_8 &= 12.00 \\
x_1 + x_4 + x_7 &= 6.00 \\
0.04289(x_1 + x_5 + x_9) + 0.75(x_2 + x_6) + 0.61396x_3 &= 10.51 \\
0.91421(x_1 + x_5 + x_9) + 0.25(x_2 + x_4 + x_6 + x_8) &= 16.13 \\
0.04289(x_1 + x_5 + x_9) + 0.75(x_4 + x_8) + 0.61396x_7 &= 7.04
\end{aligned}
$$

Dengan menggunakan metode gauss, didapatkan:

```
SPL memiliki solusi unik
Solusi adalah:
X1 = 24.00
X2 = 2532.99
X3 = -2548.99
X4 = -2548.19
X5 = 2816.00
X6 = -252.81
X7 = -256.00
X8 = 285.00
X9 = -16.00
```

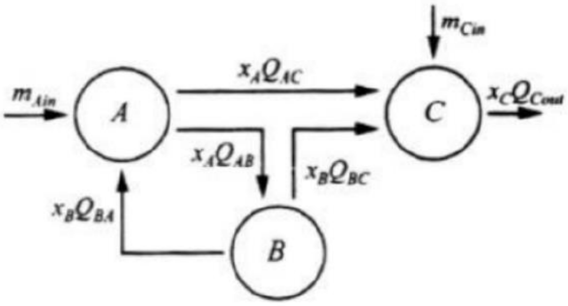
4. Tentukan arus yang mengalir pada rangkaian listrik di bawah ini:



dengan memisalkan In = Xn, dengan menggunakan metode gauss, didapatkan:

```
SPL memiliki solusi unik
Solusi adalah:
X1 = 0.50
X2 = 0.00
X3 = -0.00
X4 = 0.50
X5 = 0.50
X6 = 0.50
```

5. Lihatlah sistem reaktor pada gambar berikut



Dengan laju volume Q dalam m^3/s dan input massa m_{in} dalam mg/s. Konservasi massa pada tiap inti reaktor adalah sebagai berikut:

$$\begin{aligned}
&\text{A:} \quad m_{A_{in}} + Q_{BA}x_B - Q_{AB}x_A - Q_{AC}x_A = 0 \\
&\text{B:} \quad Q_{AB}x_A - Q_{BA}x_B - Q_{BC}x_B = 0 \\
&\text{C:} \quad m_{C_{in}} + Q_{AC}x_A + Q_{BC}x_B - Q_{C_{out}}x_C = 0
\end{aligned}$$

Tentukan solusi x_A, x_B, x_C dengan menggunakan parameter berikut : $Q_{AB} = 40$, $Q_{AC} = 80$, $Q_{BA} = 60$, $Q_{BC} = 20$ dan $Q_{Cout} = 150$ m^3/s dan $m_{Ain} = 1300$ dan $m_{Cin} = 200$ mg/s.

Dengan menggunakan metode eliminasi gauss, serta memisalkan Xa = X1, Xb = X2, Xc = X3, didapatkan:

```
SPL memiliki solusi unik
Solusi adalah:
X1 = 14.44
X2 = 7.22
X3 = 10.00
```

6. a

x	0.1	0.3	0.5	0.7	0.9	1.1	1.3
$f(x)$	0.003	0.067	0. 148	0.248	0.370	0.518	0.697

Dengan melakukan perhitungan, didapatkan hasil untuk:

x = 0.2

```
P(0.20000) = 0.03296
```

x = 0.55

```
P(0.55000) = 0.17112
```

x = 0.85

```
P(0.85000) = 0.33724
```

x = 1.28

```
P(1.28000) = 0.67754
```

6. b

Tanggal	Tanggal (desimal)	Jumlah Kasus Baru
17/06/2021	6,567	12.624
30/06/2021	7	21.807
08/07/2021	7,258	38.391
14/07/2021	7,451	54.517
17/07/2021	7,548	51.952
26/07/2021	7,839	28.228
05/08/2021	8,161	35.764
15/08/2021	8,484	20.813
22/08/2021	8,709	12.408
31/08/2021	9	10.534

Dengan melakukan perhitungan, didapatkan hasil untuk:

16/07/2021 =

```
P(7.51600) = 53566.80859
```

Dengan begitu, perkiraan ada 53.567 kasus.

10/08/2021 =

```
P(8.32300) = 36331.72266
```

Dengan begitu, perkiraan ada 36.332 kasus.

05/09/2021 =

```
P(9.16600) = -658969.26563
```

Dengan begitu, dapat diperkiraan bahwa sudah tidak ada lagi kasus yang terjadi.

6. c

Sederhanakan fungsi

$$f(x) = \frac{x^2 + \sqrt{x}}{e^x + x}$$

dengan polinom interpolasi derajat *n* di dalam selang [0, 2]. Sebagai contoh, jika *n* = 5, maka titik-titik *x* yang diambil di dalam selang [0, 2] berjarak *h* = (2 – 0)/5 = 0.4.

Didapatkan persamaan sebagai berikut.

```
P(x) = 0.00000 + 2.03526x^1 + (-3.55268x^2) + 3.23711x^3 + (-1.42127x^4) + 0.23626x^5
```

7.

Table 12.1: Data for Example 12.1

Nitrous Oxide, y	Humidity, x_1	Temp., x_2	Pressure, x_3	Nitrous Oxide, y	Humidity, x_1	Temp., x_2	Pressure, x_3
0.90	72.4	76.3	29.18	1.07	23.2	76.8	29.38
0.91	41.6	70.3	29.35	0.94	47.4	86.6	29.35
0.96	34.3	77.1	29.24	1.10	31.5	76.9	29.63
0.89	35.1	68.0	29.27	1.10	10.6	86.3	29.56
1.00	10.7	79.0	29.78	1.10	11.2	86.0	29.48
1.10	12.9	67.4	29.39	0.91	73.3	76.3	29.40
1.15	8.3	66.8	29.69	0.87	75.4	77.9	29.28
1.03	20.1	76.9	29.48	0.78	96.6	78.7	29.29
0.77	72.2	77.7	29.09	0.82	107.4	86.8	29.03
1.07	24.0	67.7	29.60	0.95	54.9	70.9	29.37

Source: Charles T. Hare, "Light-Duty Diesel Emission Correction Factors for Ambient Conditions," EPA-600/2-77-116. U.S. Environmental Protection Agency.

Dengan system persamaan linearnya adalah

$$20b_0 + 863.1b_1 + 1530.4b_2 + 587.84b_3 = 19.42$$

$$863.1b_0 + 54876.89b_1 + 67000.09b_2 + 25283.395b_3 = 779.477$$

$$1530.4b_0 + 67000.09b_1 + 117912.32b_2 + 44976.867b_3 = 1483.437$$

$$587.84b_0 + 25283.395b_1 + 44976.867b_2 + 17278.5086b_3 = 571.1219$$

Maka didapat taksirannya sebagai berikut.

```
Taksiran atau estimasi nilainya adalah:  Y = 0.938434%
```

BAB V

KESIMPULAN, SARAN, DAN REFLEKSI

1. Kesimpulan

    Dalam menyelesaikan Sistem Persamaan Linier dapat dilakukan dengan berbagai macam metode. Dari hasil pengerjaan tugas besar ini, kami berhasil menentukan hasil Sistem Persamaan Linier dengan menggunakan empat metode, yaitu Eliminasi Gauss, Eliminasi Gauss-Jordan, Invers, dan Kaidah Crammer.

    Menggunakan metode Eliminasi Gauss dan Gauss-Jordan merupakan metode yang paling umum karena tidak memiliki banyak ketentuan. Menggunakan metode ini pun dapat dicapai 3 kemungkinan solusi SPL. Kemungkinan solusi unik dapat dilihat pada eksperimen 2b, solusi banyak akan menghasilkan persamaan parametriks yang dapat dilihat pada eksperimen 1c, serta solusi tidak ada. Untuk mencari solusi SPL menggunakan metode balikan matriks ada syarat yang harus terpenuhi, yaitu matriks A pada SPL Ax = B haruslah bersifat invertible, yang artinya matriks tersebut harus memiliki determinan yang tidak sama dengan 0. Dapat dilihat pada eksperimen 1a solusi tidak dapat dicari karena matriks tidak memiliki invers. Menggunakan metode kaidah crammer, matriks haruslah matriks augmented dari persamaan SPL dengan n peubah dan n persamaan.

    Metode-metode yang digunakan dalam penyelesaian SPL di atas dapat diaplikasikan untuk menyelesaikan persoalan dengan metode Interpolasi Polinom dan Regresi Linier Berganda. Kedua metode tersebut dapat digunakan untuk memprediksi atau mengestimasi nilai dari suatu data terhadap analisis yang sudah diterapkan kepada kumpulan data yang diberikan.

    Pada eksperimen nomor 6b, dapat diberikan prediksi mengenai jumlah kasus Covid pada beberapa tanggal tertentu. Interpolasi juga bisa digunakan untuk menyederhanakan fungsi seperti pada contoh 6c. Pada eksperimen nomor 7, dapat dilihat taksiran nilai nitrous oxide diberikan kondisi tertentu.

2. Saran dan Refleksi

Selama mengerjakan tugas besar ini, harus diluangkan waktu untuk mengecek test case yang lebih banyak lagi, agar apabila ada kondisi yang tidak terakomodasi dapat dilakukan debugging pada program yang sudah dibuat. Selain itu, dapat dibuat primitif-primitif yang dirasa berguna untuk banyak metode agar program lebih efisien.

Banyak pelajaran yang kami dapatkan selama kami mengerjakan tugas besar ini, yang paling penting adalah kerja sama. Selama mengerjakan tugas besar ini apabila tidak ada komunikasi yang baik antar anggota kelompok maka akan terjadi banyak error ketika program akan di-*compile*. Selain itu, mengerjakan program haruslah runtut agar tidak dapat diketahui primitif-primitif yang dibutuhkan.

Referensi

https://informatika.stei.itb.ac.id/~rinaldi.munir/AljabarGeometri/2021-2022/algeo21-22.htm (diakses secara berkala)

modul Tubes1-Algeo-2021 (diakses secara berkala)