Matemática para Negocios II (in0071c)

Listado 2: La Derivada

R.A.1: Utilizar reglas y propiedades del álgebra de cálculo diferencial en una y dos variables para resolver problemas para economía y negocios.

1 Incrementos y Tasas

Definición: Un cambio o incremento de cualquier variable, denotado Δ, es la diferencia entre dos de sus valores $\Delta y = y_2 - y_1$.
Ejemplo: Si las ventas de gasolina de cierta estación de servicio depende del precio por litro, están dadas por $q = 500(150 - p)$, donde p es el precio por litro. Calcule el cambio en las ventas que corresponde a un incremento en el precio de \$120 a \$130 por litro.
Solución: Note que p es la variable independiente y q la función de p. El incremento de p es $\Delta p = p_2 - p_1 = 130 - 120 = 10$. El incremento en q es:

$$\begin{aligned}\Delta q &= q_2 - q_1\\ &= 500(150 - p_2) - 500(150 - p_1)\\ &= 500(150 - 130) - 500(150 - 120)\\ &= 10000 - 15000 = -5000\end{aligned}$$

Δq mide el crecimiento en q y el hecho de que sea negativo significa que q en realidad decrece. El volumen de ventas decrece en 5000 litros por día si el precio se incrementa de 120 a 130 centavos.

En algunas de las aplicaciones nos convendrá que el incremento Δx sea muy pequeño ($\Delta x \longrightarrow 0$), sí $y = f(x)$ y $x_2 = x_1 + \Delta x$.
Definición: La tasa de cambio promedio de una función f sobre un intervalo de x a $x + \Delta x$ se define por la razón $\Delta y/\Delta x$. Por tanto, la tasa de cambio promedio de y con respecto a x es

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

.
Ejemplo: Una empresa determina el costo de producir uno de sus artículos es $C(x) = 100 + 4x$, donde x es la cantidad de artículos producidos. Determinar la tasa de costo promedio de incrementar la producción de 10 a 12 unidades.
Solución: Note que $x_1 = 10$ y $x_2 = 12$, luego

$$\frac{\Delta C}{\Delta x} = \frac{C(12) - C(10)}{12 - 10} = \frac{(100 + 4(12)) - (100 + 4(10))}{2} = \frac{148 - 140}{2} = 4$$

El costo promedio es de \$4 por unidad.

Ejercicios:

1. Un fabricante de productos químicos advierte que el costo por semana de producir x toneladas de cierto fertilizante está dado por $C(x) = 20,000 + 40x$ dólares y el ingreso obtenido por la venta de x toneladas está dado por $R(x) = 100x + 0.01x^2$. La compañía actualmente produce 3100 toneladas por semana; pero está considerando incrementar la producción a 3200 toneladas por semana. Calcule los incrementos resultantes en el costo, el ingreso y la utilidad. Determine la tasa de cambio promedio de la utilidad por las toneladas extra producidas.

2. Un fabricante descubre que el costo de producir x artículos está dado por $C = 0.001x^3 - 0.3x^2 + 40x + 1000$. Determine:

   (a) el incremento en el costo cuando el número de unidades se incrementa de 50 a 60

   (b) el costo promedio por unidad adicional de incremento en la producción de 50 a 60 unidades.

   (c) el costo promedio por unidad adicional en incremento de la producción de 90 a 100 unidades.

2 Definición de La Derivada

Dada una función $f(x)$ definida en todo su dominio, la derivada de f denotada $f'(x)$ en cada punto donde fuese posible, está dada por el límite

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}.$$

Si $y = f(x)$, otras notaciones para la derivada son

$$y'(x), \qquad f'(x),$$

$$\frac{dy}{dx}(x), \qquad \frac{df}{dx}(x), \qquad D_x(f).$$

Derivada de Funciones Básicas:

$$f(x) = k \quad \Leftrightarrow \quad f'(x) = 0$$

$$f(x) = x \quad \Leftrightarrow \quad f'(x) = 1$$

$$f(x) = kx \quad \Leftrightarrow \quad f'(x) = k$$

$$f(x) = x^n \quad \Leftrightarrow \quad f'(x) = nx^{n-1}, \ n \neq 0$$

$$f(x) = e^x \quad \Leftrightarrow \quad f'(x) = e^x$$

$$f(x) = \ln(x) \quad \Leftrightarrow \quad f'(x) = \frac{1}{x}$$

Álgebra de derivadas. Si f y g son funciones derivables en x y $a \in \mathbb{R}$, entonces:

- $(f+g)'(x) = f'(x) + g'(x)$.
- $(af)'(x) = af'(x)$.
- $(fg)'(x) = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$.
- $\left(\dfrac{f}{g}\right)'(x) = \dfrac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{[g(x)]^2}$.
- $[f(g(x))]' = f(g(x)) \cdot g'(x)$, o bien $\dfrac{df}{dx} = \dfrac{df}{dg} \cdot \dfrac{dg}{dx}$ (Ver regla de la Cadena)

Ejercicios:

1. Usando la definición determine la derivada de:

   (a) $f(x) = 6x$ (b) $f(x) = 3x^2$ (c) $f(x) = 5x - 2$ (d) $f(x) = \sqrt{x}$

2. Usando regla de las potencias, determine la derivada de:

   (a) $f(x) = \dfrac{6x}{2x^3}$
   (b) $f(x) = 3x^2$
   (c) $f(x) = \dfrac{2}{x^3} - 4$
   (d) $f(x) = \sqrt{x} - 2x^5$
   (e) $f(x) = 4x^6 - 2x + 3$
   (f) $f(x) = \dfrac{4}{\sqrt{x}} - 2$
   (g) $y = 3x^{3/2} - 4x^{5/2}$
   (h) $y = x^2 + x - x^0 - x^{-1}$
   (i) $f(t) = 3\sqrt{t} - \dfrac{4}{\sqrt[3]{t}}$
   (j) $f(t) = \sqrt[3]{t} - 2$

3. Usando regla del producto, determine la derivada de:

   (a) $f(x) = (x^2 + 3x)(2x^3 - 4)$
   (b) $f(x) = (x^2 + 1)(x^3 - 2)$
   (c) $f(x) = (x^3 - 2)e^x$
   (d) $f(x) = \sqrt{x}\ln(x)$
   (e) $f(x) = x^2\ln(x)$
   (f) $f(x) = \left(\dfrac{4}{\sqrt{x}} - 2\right)(x^4 - 5x)$
   (g) $y = (\sqrt{x} - \sqrt{x^3})(x - 1)$
   (h) $y = (x^2 + x)e^x$
   (i) $y = \ln(x)e^x$
   (j) $y = (x^2 + 3x - 2)\ln(x)$

4. Usando regla del cociente, determine la derivada de:

   (a) $f(x) = \dfrac{x^2 + 3x}{2x^3 - 4}$
   (b) $f(x) = \dfrac{5x - 2}{x^2 + 1}$
   (c) $f(x) = \dfrac{x^2 + 3x2}{e^x}$
   (d) $f(x) = \dfrac{\ln(x)}{\sqrt{x}}$
   (e) $f(x) = \dfrac{x^2 - 3x + 4}{x^3 - 4}$
   (f) $f(x) = \dfrac{x}{x - 3}$
   (g) $y = \dfrac{x^2 - 1}{x + 5}$
   (h) $y = \dfrac{x^2 + x}{e^x}$
   (i) $y = \dfrac{\ln(x)}{e^x - 1}$
   (j) $y = \dfrac{x^2 + 3x - 2}{\ln(x)}$

3 Interpretación de La Derivada

3.1 Tasa de Cambio

Para $y = f(x)$, note que en la definición de tasa de cambio promedio si $\Delta x = h \to 0$, se tiene la derivada de la función $f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \dfrac{\Delta y}{\Delta x}$. Por lo tanto, la derivada mide la tasa de cambio de la función.

Ejemplo: Una empresa observa que su ingreso diario $I(t)$ en dólares, en función del tiempo t en días, está dado por $I(t) = 500 + 20t$. Calcula la tasa de cambio del ingreso diario después de 5 días.
Solución: La tasa de cambio del ingreso diario se calcula como la derivada de $I(t)$ con respecto a t:

$$I'(t) = 20,$$

esto indica que la tasa de cambio del ingreso es constante y vale 20 dólares por día. Es decir, que por cada día, el ingreso diario de la empresa aumenta en 20 dólares. Después de 5 días, la tasa de cambio sigue siendo 20 dólares por día: $I'(5) = 20$.

3.2 Recta Tangente

Dados dos puntos $A(x_1, y_1)$ y $B(x_2, y_2)$, se define la pendiente de la recta que contiene a A y B como $m = \dfrac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$. Dado, un punto $A(x_1, y_1)$ y la pendiente m de la recta, se define la ecuación de la recta

$$\mathcal{L}: \; y - y_1 = m(x - x_1),$$

la ecuación anterior recibe el nombre de punto-pendiente, la cual puede escribirse en la forma pendiente-intercepto: $y = mx + b$.
Definición: Sea f una función real de variable real, definida en un intervalo abierto que contiene a $x = c$. La derivada de f en el punto $(c, f(c))$, es la pendiente de la recta tangente a la gráfica de esta función en el mismo punto. Es decir,

$$m_T = f'(c) = \lim_{x \to c} \frac{f(x) - f(c)}{x - c},$$

siempre y cuando exista el límite. La recta tangente a f en $x = c$ existe siempre que $f'(c)$ exista. Su ecuación es

$$\mathcal{L}_T: \quad y - f(c) = f'(c)(x - c).$$

Note que en la definición $f'(c) = \lim_{x \to c} \dfrac{f(x) - f(c)}{x - c}$, haciendo el cambio de variable $h = x - c$, se tiene:

$$f'(c) = \lim_{h \to 0} \frac{f(c + h) - f(c)}{h},$$

Ejercicios:

1. Encontrar la ecuación de la recta tangente a la gráfica de $f(x) = x^2$ cuando $x = 2$. Graficar la función y la recta encontrada.

2. Determina la ecuación de la recta tangente a las siguientes funciones en el punto tal que $x = 1$:

   (a) $f(x) = 2x^3$
   (b) $f(x) = \dfrac{1}{x}$
   (c) $f(x) = \sqrt{x} + 1$
   (d) $f(x) = \dfrac{x}{2}$

3. Determina la ecuación de la recta tangente a las siguientes funciones en el punto indicado:

   (a) $f(x) = \dfrac{x}{x - 3}; \quad \left(1, -\frac{1}{3}\right).$
   (b) $f(x) = \dfrac{x^2 - 2}{3x}; \quad \left(-1, \frac{1}{3}\right).$

4 Derivadas de orden Superior

Consideremos una función f con derivada f'. Si f' es derivable, entonces definimos la segunda derivada de f por la relación

$$f''(x) = \frac{d}{dx}(f'(x)).$$

Análogamente, es posible definir la n-ésima derivada de f, con $n \in \mathbb{N}$, mediante la relación:

$$f^{(n)}(x) = \frac{d}{dx}(f^{(n-1)}(x)),$$

de donde $f^{(0)} = f(x)$. Otras formas de denotar la n-ésima derivada de $y = f(x)$ son

$$y^{(n)}(x), \qquad \frac{d^n f}{dx^n}(x), \qquad \frac{d^n y}{dx^n}(x).$$

Ejemplo: Calcular $g^{(4)}(x)$ de $g(x) = x^3 + e^x - 1$.
Solución:

$$g'(x) = 3x^2 + e^x, \qquad g''(x) = 6x + e^x$$
$$g^{(3)}(x) = 6 + e^x, \qquad g^{(4)}(x) = e^x.$$

Ejercicios:

1. Calcule las derivadas de orden 4 de las siguientes funciones

   (a) $f(x) = \ln(x)$

   (b) $f(x) = x^6 + 2x^2 - 3$

   (c) $f(x) = 2x^3 - 2x - 3$

   (d) $f(x) = \dfrac{1}{2x}$

2. Verifique si la función $f(x) = \dfrac{2x}{x-1}$ satisface la ecuación

$$(x-1)^3 f''(x) + (x-1)^2 f'(x) = 2$$

5 Derivada de la función compuesta: Regla de la Cadena

Sea u derivable en x y $f(x)$ derivable en $u(x)$, entonces $f \circ u$ es derivable en x. Su derivada es

$$(f \circ u)'(x) = f'(u(x)) \cdot u'(x), \quad \text{o bien} \quad \frac{df}{dx} = \frac{df}{du} \cdot \frac{du}{dx}.$$

Derivada de funciones compuestas. Si u depende de x

$$f(x) = k \quad \Leftrightarrow \quad f'(x) = 0$$
$$f(x) = u \quad \Leftrightarrow \quad f'(x) = u'$$
$$f(x) = ku \quad \Leftrightarrow \quad f'(x) = ku'$$

$$f(x) = u^n \quad \Leftrightarrow \quad f'(x) = nu^{n-1}u', \; n \neq 0$$
$$f(x) = e^u \quad \Leftrightarrow \quad f'(x) = e^u \cdot u'$$
$$f(x) = \ln(u) \quad \Leftrightarrow \quad f'(x) = \frac{1}{u} \cdot u'.$$

Ejercicios:

1. Determine la derivada de las siguientes funciones

   (a) $f(x) = (4x^2 + 2)^2$

   (b) $f(x) = (2x - e^x)^6$

   (c) $f(x) = (x^3 - 2x - 3)^3$

   (d) $f(x) = \dfrac{1}{(2x+3)^3}$

   (e) $f(x) = \sqrt{2x+3}$

   (f) $f(x) = \sqrt{x^2 - 4x + 6}$

   (g) $f(x) = \sqrt[3]{x^2 + 6x}$

   (h) $f(x) = \left(\dfrac{x^2+5}{\sqrt{x}}\right)^3$

   (i) $f(x) = \sqrt{\dfrac{x^2 - 4x + 6}{x}}$

   (j) $f(x) = x^2\sqrt{x^2 - 6}$

   (k) $f(x) = x(x^5 - 4x + 6)^4$

   (l) $f(x) = \ln(\sqrt{4x+6})$

   (m) $f(x) = \ln(3x - 2)$

   (n) $f(x) = e^{x^2 - 4x + 6}$

   (o) $f(x) = e^{x^3 - 4}$

   (p) $f(x) = \ln(x^3 - 2x - 2)$

   (q) $f(x) = e^{x(x^2-4)}$

   (r) $f(x) = \dfrac{e^{3x-4}}{e^{4x-2}}$

   (s) $f(x) = e^{(x^3-4)(x-1)}$

   (t) $f(x) = e^{2x}\ln(x-3)$

   (u) $f(x) = \ln^4(2x - 6)$

   (v) $f(x) = \ln((2x-6)^4)$

   (w) $f(x) = \ln((x^3-4)(x-1))$