

# Clase\_1

August 11, 2025

## 1 Capítulo 1: Límites

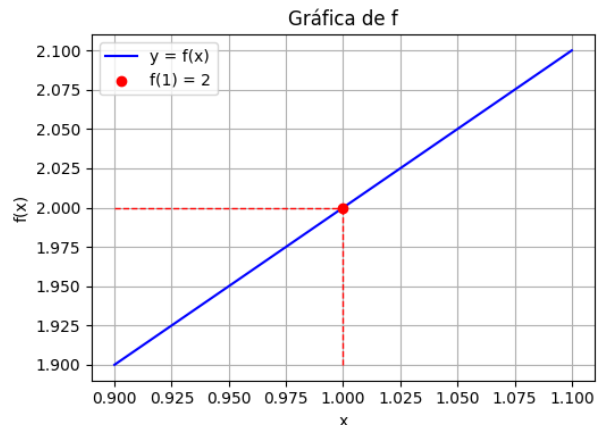
Consideremos un intervalo abierto  $I = (a, b)$ , un punto  $c \in \mathbb{R}$  y una función  $f : I \setminus \{c\} \rightarrow \mathbb{R}$ . Aunque  $f$  no este definida en  $c$  (pues  $c$  no existe como preimagen de la función  $f$  ya que no esta definida en su dominio, por lo tanto no existe la imagen  $f(c)$ ), si se analiza el comportamiento de  $f(x)$  para puntos  $x \in I \setminus \{c\}$  muy próximos a  $c$ , es posible que dichas imágenes se aproximen a un valor  $L \in \mathbb{R}$

**Ejemplo 1.1** Estudiemos la siguiente función  $f : (0, 2) \setminus \{1\} \rightarrow \mathbb{R}$ , definida por  $f(x) = \frac{x^2 - 1}{x - 1}$ . A la izquierda la tabla muestra algunas aproximaciones de la imagen  $f(x)$  cuando  $x$  es cercano a 1, punto donde la función no esta definida. A la derecha se muestra la gráfica de la función.

```
/var/folders/4w/js2qgjy52hqch0g1cczbv_sc0000gn/T/ipykernel_17851/644362722.py:9:  
FutureWarning: DataFrame.applymap has been deprecated. Use DataFrame.map  
instead.
```

```
df = df.applymap(lambda x: f"{x:.3f}")
```

x	f(x)
0.900	1.900
0.990	1.990
0.999	1.999
1.000	2.000
1.001	2.001
1.010	2.010
1.100	2.100



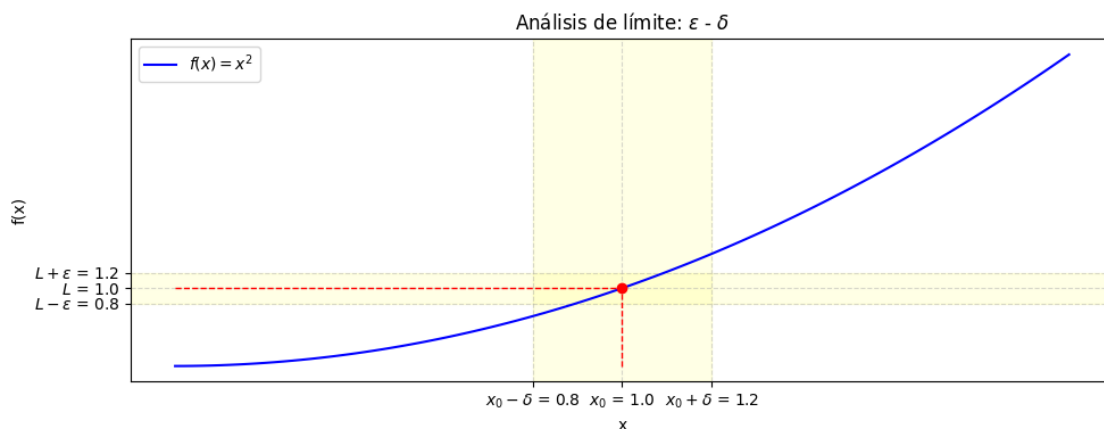
Podemos observar que cuando el valor de  $x$  tiende a 1, dicha función se aproxima al valor límite  $L = 2$ . Esta notación (de límite) se representa como:

$$\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = 2$$

**Definición 1.1. (de Límite)** Sea un intervalo abierto y acotado  $I = (a, b)$ , un punto  $c \in I$ , una función  $f : I \setminus \{c\} \rightarrow \mathbb{R}$  y  $L \in \mathbb{R}$ . Se dice que  $\lim_{x \rightarrow c} f(x) = L$  si y sólo si

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists \delta > 0)(\forall x \in I) \quad 0 < |x - c| < \delta \implies |f(x) - L| < \varepsilon$$

Es importante precisar que, de acuerdo a esta definición, el valor de  $\delta$  depende del valor de  $\varepsilon$ . Es por ello que, en ocasiones, se denota  $\delta = \delta(\varepsilon)$  señalando la dependencia funcional entre  $\delta$  y  $\varepsilon$ . Por otra parte, la desigualdad  $0 < |x - c|$  explicita que la función podría no estar definida en  $c$  (dado que la desigualdad no se cumple cuando  $x = c$ ). Incluso, si la función estuviese bien definida en  $c$ , existen muchos casos en los que  $\lim_{x \rightarrow c} f(x) = f(c)$ .



**Teorema 1.1. (Álgebra de Límites)** Sean  $n \in \mathbb{N}$ ,  $f$  y  $g$  funciones tales que  $\lim_{x \rightarrow c} f(x) = L_1$ , y  $\lim_{x \rightarrow c} g(x) = L_2$ , entonces:

1.  $\lim_{x \rightarrow c} k = k, \forall k \in \mathbb{R}$
2.  $\lim_{x \rightarrow c} x = c$
3.  $\lim_{x \rightarrow c} [f(x) + g(x)] = \lim_{x \rightarrow c} f(x) + \lim_{x \rightarrow c} g(x) = L_1 + L_2$
4.  $\lim_{x \rightarrow c} [k \cdot f(x)] = k \cdot \lim_{x \rightarrow c} f(x) = k \cdot L_1$
5.  $\lim_{x \rightarrow c} [f(x) \cdot g(x)] = \lim_{x \rightarrow c} f(x) \cdot \lim_{x \rightarrow c} g(x) = L_1 \cdot L_2$
6.  $\lim_{x \rightarrow c} \left[ \frac{f(x)}{g(x)} \right] = \frac{\lim_{x \rightarrow c} f(x)}{\lim_{x \rightarrow c} g(x)} = \frac{L_1}{L_2}, \text{ con } L_2 \neq 0$
7.  $\lim_{x \rightarrow c} [f(x)]^n = \left[ \lim_{x \rightarrow c} f(x) \right]^n = (L_1)^n$

### Ejemplo 1.2

<IPython.lib.display.IFrame at 0x10dd35310>

**Ejemplo 1.3** Para la función  $f(x) = \sin\left(\frac{1}{x}\right)$ , definida para  $x \neq 0$ , estudie el límite

$$\lim_{x \rightarrow 0} \sin\left(\frac{1}{x}\right)$$

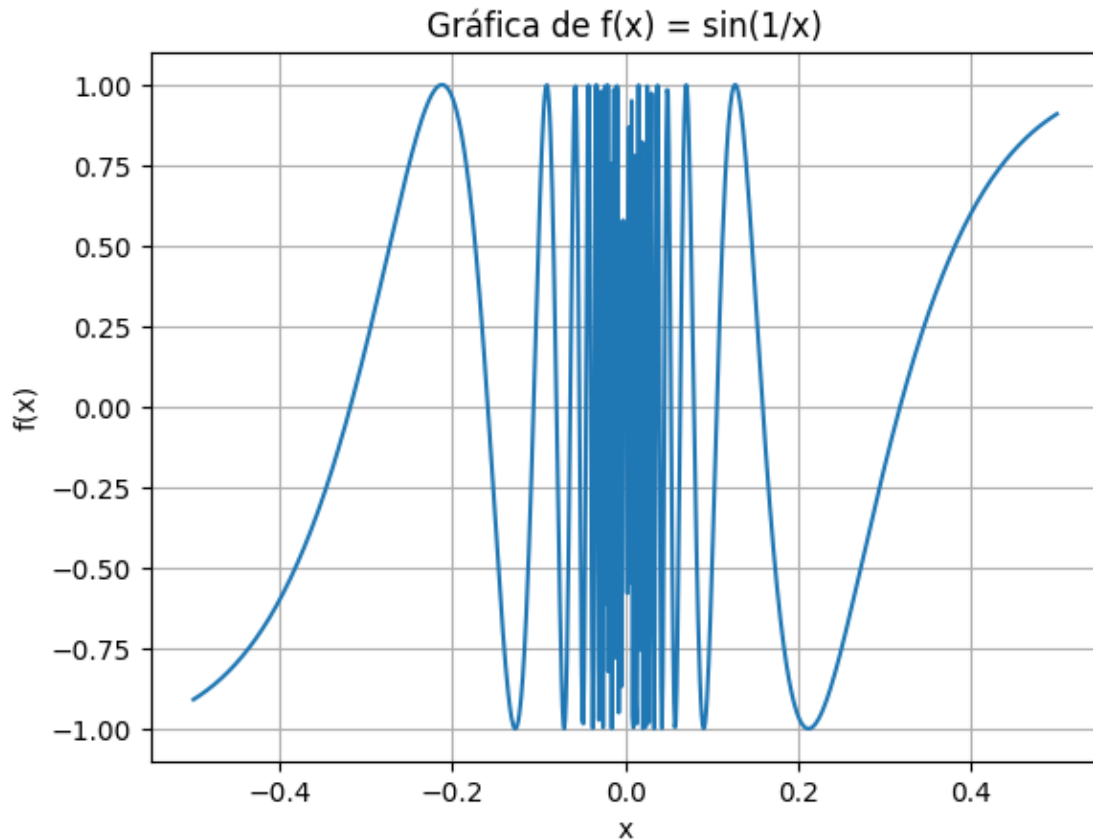
Para esto: 1. Construya una table de valores para  $f$  considerando al menos 50 valores para  $x$ , con  $0 < x < 0.1$ . 2. Considere la sucesión  $x_n = \frac{1}{n\pi}$ . Calcule  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n$  y  $\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n)$ . 3. Considere la sucesión  $y_n = \frac{1}{\pi/2 + 2n\pi}$ . Calcule  $\lim_{n \rightarrow \infty} y_n$  y  $\lim_{n \rightarrow \infty} f(y_n)$ . 4. Es posible que  $\lim_{x \rightarrow 0} \sin\left(\frac{1}{x}\right) = L$ , para algún  $L \in \mathbb{R}$ . 5. Grafique la función  $f$  para  $-1/2 < x < 1/2$

```
/var/folders/4w/js2qgjy52hqch0g1cczbv_sc0000gn/T/ipykernel_17851/3828301438.py:2
: RuntimeWarning: divide by zero encountered in divide
  return np.sin(1/x)
/var/folders/4w/js2qgjy52hqch0g1cczbv_sc0000gn/T/ipykernel_17851/3828301438.py:2
: RuntimeWarning: invalid value encountered in sin
  return np.sin(1/x)
```

	x	f(x)
0	0.000	NaN
1	0.002	-0.467772
2	0.004	-0.970528
3	0.006	-0.161545
4	0.008	-0.616040
5	0.010	-0.506366
6	0.012	0.996711
7	0.014	0.736620
8	0.016	-0.325796
9	0.018	-0.837730
10	0.020	-0.262375
11	0.022	0.995148
12	0.024	-0.735200
13	0.026	0.690678
14	0.028	-0.915507
15	0.030	0.940530
16	0.032	-0.165166
17	0.034	-0.907558
18	0.036	0.476400
19	0.038	0.925763
20	0.040	-0.132352
21	0.042	-0.969509
22	0.044	-0.671421
23	0.046	0.249359
24	0.048	0.915928
25	0.050	0.912945
26	0.052	0.372047
27	0.054	-0.325024
28	0.056	-0.837348

29	0.058	-0.999301
30	0.060	-0.818447
31	0.062	-0.408736
32	0.064	0.082868
33	0.066	0.528174
34	0.068	0.842593
35	0.070	0.988987
36	0.072	0.969337
37	0.074	0.811750
38	0.076	0.557627
39	0.078	0.251415
40	0.080	-0.066322
41	0.082	-0.362779
42	0.084	-0.614387
43	0.086	-0.806651
44	0.088	-0.933026
45	0.090	-0.993333
46	0.092	-0.992071
47	0.094	-0.936853
48	0.096	-0.837061
49	0.098	-0.702784
50	0.100	-0.544021

	$x_n$	$f(x_n)$	$y_n$	$f(y_n)$
40	0.007764	0.003858	0.003858	1.0
41	0.007579	0.003767	0.003767	1.0
42	0.007403	0.003680	0.003680	1.0
43	0.007234	0.003597	0.003597	1.0
44	0.007074	0.003517	0.003517	1.0
45	0.006920	0.003441	0.003441	1.0
46	0.006773	0.003368	0.003368	1.0
47	0.006631	0.003299	0.003299	1.0
48	0.006496	0.003232	0.003232	1.0
49	0.006366	0.003167	0.003167	1.0



```
[NbConvertApp] Converting notebook Clase_1.ipynb to html
[NbConvertApp] WARNING | Alternative text is missing on 3 image(s).
[NbConvertApp] Writing 434096 bytes to Clase_1.html
[NbConvertApp] Converting notebook Clase_1.ipynb to pdf
[NbConvertApp] Support files will be in Clase_1_files/
[NbConvertApp] Making directory ./Clase_1_files
[NbConvertApp] Writing 28621 bytes to notebook.tex
[NbConvertApp] Building PDF
[NbConvertApp] Running xelatex 3 times: ['xelatex', 'notebook.tex', '-quiet']
[NbConvertApp] Running bibtex 1 time: ['bibtex', 'notebook']
[NbConvertApp] WARNING | bibtex had problems, most likely because there were no
citations
[NbConvertApp] PDF successfully created
[NbConvertApp] Writing 149880 bytes to Clase_1.pdf
[NbConvertApp] Converting notebook Clase_1.ipynb to latex
[NbConvertApp] Support files will be in Clase_1_files/
[NbConvertApp] Making directory Clase_1_files
[NbConvertApp] Writing 28621 bytes to Clase_1.tex
```