Matemática para Negocios II (IN0071C)

Listado 1: Límites

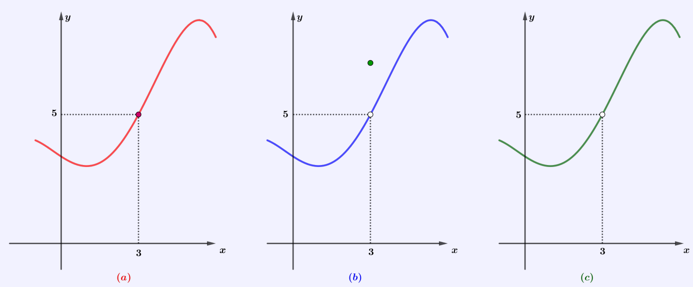
R.A.1: Utilizar reglas y propiedades del álgebra de cálculo diferencial en una y dos variables para resolver problemas para economía y negocios.

1 Definición Intuitiva de Límite

Definición. El límite de la función $f(x)$ en el punto c es L, se escribe

$$\lim_{x \to c} f(x) = L,$$

y significa que cuando x está cerca de c (pero diferente de c), entonces $f(x)$ está cerca de L.



Teorema: Álgebra de Límites Sean $n \in \mathbb{N}$, f y g funciones tales que $\lim_{x \to c} f(x) = L_1$, y $\lim_{x \to c} g(x) = L_2$, entonces:

- $\lim_{x \to c} k = k$. $\forall k \in \mathbb{R}$
- $\lim_{x \to c} x = c$.
- $\lim_{x \to c} [f(x) + g(x)] = \lim_{x \to c} f(x) + \lim_{x \to c} g(x) = L_1 + L_2$.
- $\lim_{x \to c} k \cdot f(x) = k \cdot \lim_{x \to c} f(x) = k \cdot L_1$.
- $\lim_{x \to c} f(x) \cdot g(x) = \lim_{x \to c} f(x) \cdot \lim_{x \to c} g(x) = L_1 \cdot L_2$.
- $\lim_{x \to c} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{\lim_{x \to c} f(x)}{\lim_{x \to c} g(x)} = \dfrac{L_1}{L_2}$, con $L_2 \neq 0$.
- $\lim_{x \to c} [f(x)]^n = \left[\lim_{x \to c} f(x)\right]^n = (L_1)^n$.
- $\lim_{x \to c} \sqrt[n]{f(x)} = \sqrt[n]{\lim_{x \to c} f(x)} = \sqrt[n]{L_1}$, con $L_1 \geq 0$ si n es par.

1. Suponga que $\lim_{x\to a} f(x) = 4$ y $\lim_{x\to a} g(x) = -2$. Determine

   (a) $\lim_{x\to a}[f(x)-2]g(x)$

   (b) $\lim_{x\to a}\sqrt{[f(x)]^2+[g(x)]^2}$

   (c) $\lim_{x\to a}[f(x)+g(x)]^2$

   (d) $\lim_{x\to a}\dfrac{f(x)-3g(x)}{3f(x)-g(x)}$

   (e) $\lim_{x\to a} 2f(x)$

   (f) $\lim_{x\to a}\dfrac{-3g(x)}{f^2(x)}$

2. Calcule los siguientes límites:

   (a) $\lim_{x\to 3}(4x-3)$

   (b) $\lim_{x\to -2}(2x^2-1)$

   (c) $\lim_{x\to 0}\dfrac{2x+3}{2x-1}$

   (d) $\lim_{x\to 0}\sqrt{x}$

   (e) $\lim_{x\to 1}\sqrt{1+2x^2-x}$

   (f) $\lim_{x\to -2} x-4$

Formas Indeterminadas. Si al calcular un límite nos da la forma indeterminada $\dfrac{0}{0}$, podemos simplificar la función utilizando factorización o racionalización (puede ser tanto al numerador como del denominador). Luego, debemos volver a evaluar para ver si obtenemos un número real o se necesita hacer otro arreglo algebraico.
Ejemplos:

- $\lim_{x\to 1}\dfrac{x^3-1}{x-1} = \lim_{x\to 1}\dfrac{(x-1)(x^2+x+1)}{x-1} = \lim_{x\to 1}\dfrac{x^3-1}{x-1} = \lim_{x\to 1}(x^2+x+1) = 3.$
- $\lim_{x\to 0}\dfrac{x^2-2x}{x} = \lim_{x\to 0}\dfrac{x(x-2)}{x} = \lim_{x\to 0} x-2 = -2.$
- $\lim_{x\to 4}\dfrac{x-4}{\sqrt{x}-2} = \lim_{x\to 4}\dfrac{x-4}{\sqrt{x}-2}\cdot\dfrac{\sqrt{x}+2}{\sqrt{x}+2} = \lim_{x\to 4}\dfrac{(x-4)(\sqrt{x}+2)}{\sqrt{x}^2-2^2} = \lim_{x\to 4}\dfrac{(x-4)(\sqrt{x}+2)}{x-4}$
  $= \lim_{x\to 4}(\sqrt{x}+2) = 2+2 = 4.$

Recordar que:

$(a+b)^2 = a^2+2ab+b^2$
$(a-b)^2 = a^2-2ab+b^2$
$(a+b)(a-b) = a^2-b^2$
$(a+b)^3 = a^3+3a^2b+3ab^2 \pm b^3$
$(a-b)^3 = a^3-3a^2b+3ab^2-b^3$
$(a+b+c)^2 = a^2+b^2+c^2+2ab+2ac+2bc$
$a^3+b^3 = (a+b)(a^2-ab+b^2)$
$a^3-b^3 = (a-b)(a^2+ab+b^2)$

Ejercicios:

1. Calcule los siguientes límites:

1.1. $\lim_{x\to 1} \dfrac{x^2-1}{x-1}$

1.2. $\lim_{x\to 3} \dfrac{2(x-3)+x^2-9}{x^2-2x-3}$

1.3. $\lim_{x\to 0} \dfrac{x^2+x}{3x+1}$

1.4. $\lim_{z\to 0} \dfrac{z^{2/3}}{z^2-1}$

1.5. $\lim_{t\to 3} \dfrac{t^3-9t}{t^2+t-12}$

1.6. $\lim_{x\to 0} \dfrac{\sqrt{x+2}-\sqrt{2}}{x}$

1.7. $\lim_{x\to 1} \dfrac{x^2-5x+4}{x^2-1}$

1.8. $\lim_{x\to 1} \dfrac{\sqrt{5-x}-2}{\sqrt{x-1}}$

1.9. $\lim_{x\to 2} \dfrac{\sqrt{x+2}-2}{\sqrt{x-1}-1}$

1.10. $\lim_{x\to 3} \dfrac{2x-6}{-3+x}$

1.11. $\lim_{x\to 2} \dfrac{x^3-9x}{x^2+x-12}$

1.12. $\lim_{x\to 1} \dfrac{\sqrt{5-x}-2}{\sqrt{x-1}}$

1.13. $\lim_{x\to 2} \dfrac{\sqrt{x+2}-2}{\sqrt{x-1}-1}$

1.14. $\lim_{x\to 0} \dfrac{\sqrt{3+x}-\sqrt{3-x}}{\sqrt{4-x^2}-\sqrt{4-2x}}$

1.15. $\lim_{x\to 1} \dfrac{x^2-1}{x^2+2x-3}$

1.16. $\lim_{x\to 2} \dfrac{x+\sqrt{4x^4-7x^2}}{2x+\sqrt{18+x}}$

1.17. $\lim_{x\to 5} \dfrac{25-x^2}{x-\sqrt{x^2+x-5}}$

1.18. $\lim_{x\to 1} \dfrac{x^2-1}{1-\sqrt{x}}$

1.19. $\lim_{x\to 1} \dfrac{x^3-1}{1-\sqrt{x}}$

1.20. $\lim_{x\to 1} \dfrac{2-\sqrt{3+x^2}}{x-1}$

1.21. $\lim_{x\to -1} \dfrac{3x+1}{x^2+1}$

1.22. $\lim_{x\to 2} \dfrac{x^2-7x+10}{x^2+2x-8}$

1.23. $\lim_{x\to 1} \left(\dfrac{3}{1-x^3}-\dfrac{1}{1-x}\right)$

1.24. $\lim_{x\to 5} \dfrac{2-\sqrt{x-1}}{x-5}$

1.25. $\lim_{x\to 0} \dfrac{\sqrt{x^2-4}-2}{\sqrt{x^2-9}-3}$

1.26. $\lim_{x\to -1} \dfrac{x+\sqrt{x-2}}{1-x^2}$

1.27. $\lim_{x\to 1} \dfrac{\sqrt{x-1}}{\sqrt[4]{x-1}}$

1.28. $\lim_{x\to 1} \dfrac{\sqrt[3]{x}-1}{x-1}$

1.29. $\lim_{x\to 1} \dfrac{\sqrt[3]{7+x^3}-2}{x-1}$

1.30. $\lim_{y\to 0} \dfrac{\sqrt[3]{1+y}-1}{1-\sqrt{1+y}}$

1.31. $\lim_{x\to 1} \dfrac{\sqrt[3]{3-2x}-1}{1-x}$

2. Verifique los siguientes límites:

(a) $\lim_{x\to -2} \dfrac{4-x^2}{2+x} = 4$

(b) $\lim_{x\to 3} \dfrac{x^2-4x+3}{x^2-x-6} = \dfrac{2}{5}$

(c) $\lim_{x\to 1} \dfrac{x^3-1}{5x-5} = \dfrac{3}{5}$

(d) $\lim_{x\to -2} \dfrac{8+x^3}{4-x^2} = 3$

(e) $\lim_{x\to 2} \dfrac{x^4-16}{8-x^3} = -\dfrac{8}{3}$

(f) $\lim_{x\to 1} \dfrac{\sqrt{x}-1}{x-1} = \dfrac{1}{2}$

(g) $\lim_{x\to -1} \dfrac{1-x^2}{x+\sqrt{2+x}} = \dfrac{4}{3}$

(h) $\lim_{x\to 7} \dfrac{2-\sqrt{x-3}}{x^2-49} = -\dfrac{1}{56}$

(i) $\lim_{x\to 4} \dfrac{3-\sqrt{5+x}}{1-\sqrt{5-x}} = -\dfrac{1}{3}$

(j) $\lim_{x\to -1} \dfrac{x^3+1}{x^2+1} = -\dfrac{3}{2}$

(k) $\lim_{x\to 3} \dfrac{\sqrt{x+1}-2}{x-3} = \dfrac{1}{4}$

(l) $\lim_{x\to 0} \dfrac{\sqrt{x+2}-\sqrt{2}}{x} = \dfrac{1}{2\sqrt{2}}$

(m) $\lim_{x\to 2} \dfrac{x^2-4x+4}{x^2-2x} = 0$

2 Límites Laterales

En caso de que la función tenga expresiones diferentes a la izquierda y a la derecha del punto de interés c, se hace necesario analizar el límites desde ambas direcciones.

Definición. Sea $f : A \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ y $c \in \mathbb{R}$:

- **Límite de $f(x)$ cuando x tiende a c por la derecha**: Denotado por

$$\lim_{x \to c^+} f(x) = L,$$

significa que cuando x está cerca pero a la derecha de c, entonces $f(x)$ está cerca de L.

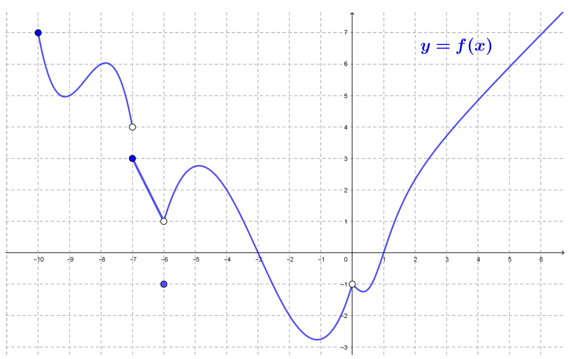
- **Límite de $f(x)$ cuando x tiende a c por la izquierda**: Denotado por

$$\lim_{x \to c^-} f(x) = L,$$

significa que cuando x está cerca pero a la izquierda de c, entonces $f(x)$ está cerca de L.

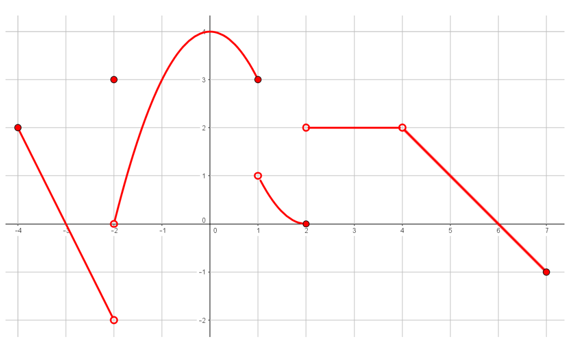
- El límite de $f(x)$ cuando x tiende a c existe y es L si y sólo si ambos límites laterales existen y son iguales a L.

1. Considere la función $f(x)$, cuya gráfica es la siguiente y encuentre (si acaso existe) los límites:



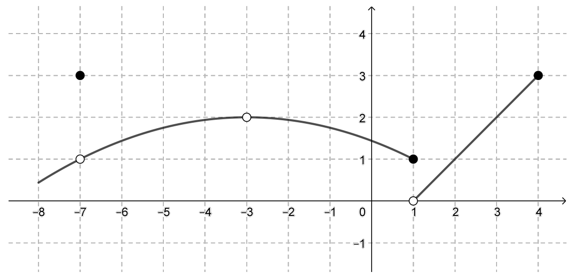
(a) $\lim_{x \to -10^+} f(x)$
(b) $\lim_{x \to -7} f(x)$
(c) $\lim_{x \to -6} f(x)$
(d) $\lim_{x \to 0} f(x)$
(e) $\lim_{x \to 6} f(x)$
(f) $\lim_{x \to -7} f(x)$

2. Considere la función $y = f(x)$, cuya gráfica es la siguiente y determine, si existiesen:



(a) $\lim_{x \to -4} f(x)$
(b) $\lim_{x \to -2} f(x)$
(c) $\lim_{x \to -1} f(x)$
(d) $\lim_{x \to 0} f(x)$
(e) $\lim_{x \to 1} f(x)$
(f) $\lim_{x \to 2} f(x)$
(g) $\lim_{x \to 3} f(x)$
(h) $\lim_{x \to 4} f(x)$
(i) $\lim_{x \to 5} f(x)$
(j) $\lim_{x \to 7} f(x)$
(k) $f(-2)$
(l) $f(0)$
(m) $f(2)$
(n) $f(4)$
(o) $f(7)$

3. Considere la función $y = f(x)$, cuya gráfica es la siguiente y determine, si existiesen:



(a) $f(-7)$

(b) $f(-3)$

(c) $f(1)$

(d) $\lim_{x \to -7} f(x)$

(e) $\lim_{x \to -3} f(x)$

(f) $\lim_{x \to 1} f(x)$

4. Bosqueje la gráfica de $f(x) = \begin{cases} x - 2, & x < 3, \\ -1, & x \geq 3. \end{cases}$ Luego, determine los siguientes valores

(a) $f(3)$ (b) $f(1)$ (c) $\lim_{x \to 3} f(x)$ (d) $\lim_{x \to 1} f(x)$

5. Bosqueje la gráfica de $f(x) = \begin{cases} x, & x < 0, \\ -x^2, & 0 \leq x < 1 \\ x - 1, & x \geq 1. \end{cases}$ Luego, determine los siguientes valores

(a) $f(0)$ (b) $f(1)$ (c) $\lim_{x \to 0} f(x)$ (d) $\lim_{x \to 1} f(x)$

3 Aplicación de Límites

1. Una compañía tiene una función de costo total de $C(x) = 6820 + \dfrac{81 - x^2}{9 - x}$ miles de pesos al producir x unidades de cierto producto. El gerente de la empresa les solicita la siguiente información:
   (a) A qué valor tienden los costos si se tiende a producir una unidad.
   (b) A qué valor tienden los costos si se tiende a producir nueve unidades.

2. Una cooperativa agrícola ha determinado que su función de costo total para producir x toneladas de un nuevo fertilizante orgánico es $C(x) = 3500 + \dfrac{x^2 - 25}{x - 5}$ en euros. El jefe de producción necesita conocer la siguiente información para un reporte de viabilidad:
   (a) ¿A qué valor tienden los costos si la producción se acerca a las 10 toneladas?
   (b) ¿A qué valor tienden los costos si la producción se acerca a las 5 toneladas?

3. Una compañía estima que el costo en dólares de producir x motores de autos $C(x) = 0.007x^2 + 4x + 1700$. Encuentre el costo promedio $\dfrac{C(x)}{x}$ de producir 1000 motores de autos.