

Introducción a los Estimadores de Error A posteriori

Tarea 1: Elementos Finitos 1D

Ignacio S. Ruminot Aburto¹

¹Departamento de Ingeniería Matemática, Universidad de Concepción, Concepción, Chile
iruminot@udec.cl

17 de junio de 2024

Índice

1. Introducción.	1
2. Problema 1.	3
2.1. Formulación variacional continua.	3
2.2. Análisis de existencia y unicidad.	3
2.3. Formulación variacional discreta.	4
2.4. Análisis a priori del error.	4
2.5. Análisis a posteriori del error.	5
3. Problema 2.	7
3.1. Análisis de existencia y unicidad.	7
3.2. Implementación computacional de refinamiento uniforme.	8
3.3. Implementación computacional de refinamiento adaptativo.	10
4. Problema 3.	13
4.1. Análisis de existencia y unicidad.	13
4.2. Discretización.	13
4.3. Matriz de rigidez.	14
4.4. Implementación computacional de refinamiento uniforme.	15
4.5. Implementación computacional de refinamiento adaptativo.	21

1. Introducción.

El método de los elementos finitos (FEM, por sus siglas en inglés) es una técnica numérica de gran relevancia para la resolución de problemas complejos en ingeniería y física, los cuales están gobernados por ecuaciones diferenciales parciales (PDEs). Este método se ha consolidado como una herramienta fundamental en campos como la mecánica de sólidos, la transferencia de calor, la dinámica de fluidos y el electromagnetismo, entre otros. La premisa básica del FEM es descomponer un dominio complejo en elementos más pequeños y manejables, típicamente de forma triangular o tetraédrica. En cada uno de estos elementos, se pueden aproximar soluciones locales que, al combinarse, proporcionan una solución global

aproximada.

Para asegurar la precisión y confiabilidad de las soluciones obtenidas mediante el método de elementos finitos, es crucial realizar un análisis de error. El error de aproximación se refiere a la diferencia entre la solución exacta del problema y la solución aproximada obtenida mediante el FEM. Este error puede deberse a varios factores, incluyendo la discretización del dominio, la elección de las funciones de interpolación y los métodos numéricos empleados para resolver las ecuaciones resultantes. El análisis de error permite identificar y cuantificar las fuentes de error, proporcionando así una medida de la calidad de la solución aproximada. Mientras que las estimaciones de error a priori predicen el comportamiento del error antes de realizar el cálculo, las estimaciones de error a posteriori, calculadas después de obtener la solución aproximada, son fundamentales para implementar estrategias de refinamiento adaptativo.

La idea del refinamiento adaptativo es mejorar la precisión de las soluciones concentrando los recursos computacionales en las áreas con mayores errores de aproximación. En lugar de refinar uniformemente todo el dominio, esta técnica identifica y refina dinámicamente solo las regiones problemáticas, lo que permite reducir significativamente el consumo de memoria y tiempo de procesamiento. Este proceso se lleva a cabo mediante un ciclo iterativo que incluye la evaluación del error, el marcado de los nodos a refinar y el ajuste de la malla. Este ciclo de refinamiento adaptativo comienza con la evaluación del error utilizando estimadores de error a posteriori para evaluar el error de aproximación en cada elemento de la malla. A continuación, se identifican los elementos con los errores más grandes, que superan un cierto umbral predefinido. La malla se refina en las regiones identificadas, aumentando la densidad de nodos y elementos para capturar mejor las variaciones de la solución. Este ciclo se repite hasta que el error global esté dentro de los límites aceptables o hasta que se alcance un número máximo de iteraciones.

El objetivo de este trabajo es explorar y aplicar el método de los elementos finitos, con un enfoque particular en el análisis de error y la implementación de estimadores a posteriori para el refinamiento adaptativo de la malla. Mediante el uso de estas técnicas, se busca optimizar la eficiencia del proceso de solución sin comprometer la exactitud de la solución global.

2. Problema 1.

Problema 1. Desarrollar con más detalles, lo descrito en la Sección 4 del apunte de Endre Sulli, compartido en Teams/Infoda. Puede introducir resultados previos, contenidos en el mismo apunte, que son invocados por el autor en su análisis.

2.1. Formulación variacional continua.

Considere el siguiente problema de valores de contorno:

$$-u'' + bu' + cu = f, \quad x \in \Omega := (0, 1), \quad (1a)$$

$$u(0) = 0, \quad (1b)$$

$$u(1) = 0, \quad (1c)$$

con $b \in W_\infty^1(\Omega)$, $c \in L_\infty(\Omega)$ y $f \in L_2(\Omega)$. Multiplicando (1a) por una función v lo suficientemente suave y que se anule en los extremos de Ω , e integrando por partes

$$\begin{aligned} & - \int_{\Omega} u'' v + \int_{\Omega} bu' v + \int_{\Omega} cuv = \int_{\Omega} f v \\ \Leftrightarrow & \int_{\Omega} u' v' - (u' v)|_0^1 + \int_{\Omega} bu' v + \int_{\Omega} cuv = \int_{\Omega} f v \\ \Leftrightarrow & \underbrace{\int_{\Omega} u' v' + \int_{\Omega} bu' v + \int_{\Omega} cuv}_{a(u,v)} = \underbrace{\int_{\Omega} f v}_{F(v)} \end{aligned}$$

de lo anterior se define la forma bilineal $a : H_0^1(\Omega) \times H_0^1(\Omega) \rightarrow \mathbb{R}$ y el funcional lineal $F : H_0^1(\Omega) \rightarrow \mathbb{R}$. Luego, la FORMULACIÓN VARIACIONAL CONTINUA se puede escribir como

$$\text{HALLAR } u \in H_0^1(\Omega) \text{ TAL QUE } a(u, v) = F(v), \quad \forall v \in H_0^1(\Omega)$$

2.2. Análisis de existencia y unicidad.

Para poder asegurar la existencia y unicidad de solución, debemos probar que la forma bilineal a es continua y coerciva, y además el funcional lineal F es continuo.

Demostración.

i) a es acotado. En efecto, sean $u, v \in H_0^1(\Omega)$:

$$\begin{aligned} |a(u, v)| & \leq \int_{\Omega} |u'| |v'| + \int_{\Omega} |b| |u'| |v| + \int_{\Omega} |c| |u| |v| \\ & \leq \|u'\|_{0,\Omega} \|v'\|_{0,\Omega} + \left(\max_{x \in \Omega} |b| \right) \|u'\|_{0,\Omega} \|v\|_{0,\Omega} + \left(\max_{x \in \Omega} |c| \right) \|u\|_{0,\Omega} \|v\|_{0,\Omega} \\ & \leq \underbrace{\left(1 + \left(\max_{x \in \Omega} |b| \right) + \left(\max_{x \in \Omega} |c| \right) \right)}_k \|u\|_{1,\Omega} \|v\|_{1,\Omega} \end{aligned}$$

ii) a es coerciva sobre $H_0^1(\Omega)$. En efecto, sea $u \in H_0^1(\Omega)$:

$$a(u, u) = \int_{\Omega} |u'|^2 + \int_{\Omega} bu'u + \int_{\Omega} c|u|^2 \quad (2)$$

$$= \int_{\Omega} |u'|^2 + \int_{\Omega} \left(c - \frac{1}{2} b' \right) |u|^2$$

agregando la hipótesis adicional: $\exists c_0 > 0 : c - \frac{1}{2} b' \geq c_0$ en $\bar{\Omega}$

$$\implies a(u, u) \geq |u|_{1,\Omega}^2 + c_0 \|u\|_{0,\Omega}^2 \geq c \|u\|_{1,\Omega}^2, \quad \text{con } c = \begin{cases} \min\{1, c_0\} & , c_0 \neq 0 \\ c_p & , c_0 = 0 \end{cases},$$

donde c_p es la constante de Poincaré.

iii) F es acotado. En efecto, sea $v \in H_0^1(\Omega)$:

$$|F(v)| \leq \int_{\Omega} |f| |v| \leq \|f\|_{0,\Omega} \|v\|_{1,\Omega}$$

Y gracias al **Teorema de Lax-Milgram**, $\exists! u \in H_0^1(\Omega)$ tal que $a(u, v) = F(v)$, $\forall v \in H_0^1(\Omega)$, además

$$\|u\|_{1,\Omega} \leq \frac{k}{c} \|f\|_{0,\Omega}$$

2.3. Formulación variacional discreta.

Consideremos una partición del intervalo Ω no necesariamente uniforme dada por $0 = x_0 < x_1 < \dots < x_j < \dots < x_{N-1} < x_N = 1$, y se define el espacio de elementos finitos $V_h \subset H_0^1(\Omega)$ de la forma

$$V_h := \{v \in C(\bar{\Omega}) : \forall j \in \{0, \dots, N\} \ v|_{\bar{\Omega}_j} \in \mathbb{P}_1(\bar{\Omega}_j), v(x_0) = v(x_N) = 0\},$$

con $\dim V_h = N$. Luego, la FORMULACIÓN VARIACIONAL DISCRETA se puede escribir como

$$\text{HALLAR } u_h \in V_h \text{ TAL QUE } a(u_h, v_h) = F(v_h), \forall v_h \in V_h.$$

Como V_h hereda las propiedades del espacio continuo al ser un subespacio de $H_0^1(\Omega)$ y por **Teorema de Lax-Milgram**, se puede asegurar que $\exists! u_h \in V_h$ tal que $a(u_h, v_h) = F(v_h)$, $\forall v_h \in V_h$.

2.4. Análisis a priori del error.

Dado que $V_h \subset H_0^1(\Omega)$, se tiene $a(u, v) = F(v)$, $\forall v \in V_h$ lo cual permite establecer la relación de ortogonalidad $\forall v \in V_h : a(u - u_h, v) = 0$, y nhb la estimación de Céa

$$\|u - u_h\|_{1,\Omega} \leq \frac{k}{c} \inf_{v \in V_h} \|u - v\|_{1,\Omega}.$$

Supongamos que $u \in H_0^1(\Omega) \cap H^2(\Omega)$, y se define el interpolador

$$I_h^1 : H_0^1(\Omega) \longrightarrow V_h$$

$$u \longmapsto I_h^1(u) = \sum_{j=0}^N u(x_j) \varphi_j$$

2.5. Análisis a posteriori del error.

Utilizando un argumento de dualidad: sean $u, v \in C_0^\infty(\Omega)$

$$\begin{aligned}
 (Lu, v) &= \int_{\Omega} (-u'' + bu' + cu) v \\
 &= - \int_{\Omega} u'' v + \int_{\Omega} bu' v + \int_{\Omega} cuv \\
 &= \int_{\Omega} u' v' - u' v|_0^1 - \int_{\Omega} u (bv)' + u (bv)|_0^1 + \int_{\Omega} cuv \\
 &= - \int_{\Omega} v'' u + v' u|_0^1 - \int_{\Omega} (bv)' u + \int_{\Omega} cvu \\
 &= \int_{\Omega} (-v'' - (bv)' + cv) u \\
 &= (u, L^* v)
 \end{aligned}$$

Luego definimos el problema adjunto

$$-z'' - (bz)' + cz = u - u_h, \quad x \in \Omega := (0, 1), \quad (3a)$$

$$z(0) = 0, \quad (3b)$$

$$z(1) = 0, \quad (3c)$$

$$\begin{aligned}
 \|u - u_h\|_{0,\Omega}^2 &= a(u - u_h, z) \\
 &= a(u - u_h, z - I_h(z)) \\
 &= a(u, z - I_h(z)) - a(u_h, z - I_h(z)) \\
 &= F(z - I_h(z)) - a(u_h, z - I_h(z)) \\
 &= \int_{\Omega} f(z - I_h(z)) - \left(\int_{\Omega} u_h'(z - I_h(z))' + \int_{\Omega} bu_h'(z - I_h(z)) + \int_{\Omega} cu_h(z - I_h(z)) \right) \quad (4)
 \end{aligned}$$

Por otra parte, se tiene que

$$\int_{\Omega} u_h'(z - I_h(z))' = \sum_{j=1}^N \int_{\Omega_j} u_h'(z - I_h(z))' = \sum_{j=1}^N \left(- \int_{\Omega_j} u_h''(z - I_h(z)) + (u_h'(z - I_h(z)))|_{x_{j-1}}^{x_j} \right)$$

Como z y su interpolador $I_h(z)$ coinciden en los nodos x_j , $\forall j = 1, \dots, N$, podemos concluir que

$$\int_{\Omega} u_h'(z - I_h(z))' = - \sum_{j=1}^N \int_{\Omega_j} u_h''(z - I_h(z)). \quad (5)$$

Reemplazando (5) en (4), queda

$$\begin{aligned}
 \|u - u_h\|_{0,\Omega}^2 &= \sum_{j=1}^N (f + u_h'' - bu_h' - cu_h)(z - I_h(z)) \\
 &\stackrel{C-S}{\leq} \sum_{j=1}^N \|f + u_h'' - bu_h' - cu_h\|_{0,\Omega_j} \|z - I_h(z)\|_{0,\Omega_j} \quad (6)
 \end{aligned}$$

$$\stackrel{C-S}{\leq} \frac{1}{\pi^2} \left(\sum_{j=1}^N h_j^4 \|f + u_h'' - bu_h' - cu_h\|_{0,\Omega_j}^2 \right)^{1/2} |z|_{2,\Omega_j}$$

Además, de la ecuación (3a) despejamos z''

$$z'' = u_h - u - bz' + (c - b')z$$

Luego acotando

$$\begin{aligned} |z|_{2,\Omega} &\leq \|u - u_h\|_{0,\Omega} + \|b\|_{\infty,\Omega} |z|_{1,\Omega} + \|c - b'\|_{\infty,\Omega} \|z\|_{0,\Omega} \\ \implies |z|_{2,\Omega} &\leq \|u - u_h\|_{0,\Omega} + \left(\|b\|_{\infty,\Omega} + \|c - b'\|_{\infty,\Omega} \right) \|z\|_{1,\Omega} \end{aligned} \quad (7)$$

Ahora, multiplicando por z a la ecuación (3a) del problema adjunto e integrando por partes, se tiene

$$\begin{aligned} & - \int_{\Omega} z'' z - \int_{\Omega} (bz)' z + \int_{\Omega} cz^2 = \int_{\Omega} (u - u_h) z \\ \iff & \|z'\|_{0,\Omega}^2 + \frac{1}{2} \int_{\Omega} b' (z^2)' + \int_{\Omega} cz^2 = \int_{\Omega} (u - u_h) z \\ \iff & \|z'\|_{0,\Omega}^2 + \int_{\Omega} \underbrace{\left(c - \frac{1}{2} b' \right)}_{\geq c_0 \geq 0} z^2 = \int_{\Omega} (u - u_h) z \\ \iff & \|z'\|_{0,\Omega}^2 + c_0 \|z\|_{0,\Omega}^2 \leq \|u - u_h\|_{0,\Omega} \|z\|_{0,\Omega} \\ \implies & c \|z\|_{1,\Omega}^2 \leq \|u - u_h\|_{0,\Omega} \|z\|_{1,\Omega} \\ \iff & \|z\|_{1,\Omega} \leq \frac{1}{c} \|u - u_h\|_{0,\Omega} \end{aligned} \quad (8)$$

Reemplazando (8) en (7) obtenemos una cota para

$$|z|_{2,\Omega} \leq \left(1 + \frac{1}{c} \left(\|b\|_{\infty,\Omega} + \|c - b'\|_{\infty,\Omega} \right) \right) \|u - u_h\|_{0,\Omega}$$

Por lo tanto, el estimador de error a posteriori corresponde a

$$\|u - u_h\|_{0,\Omega} \leq \frac{\left(1 + \frac{1}{c} \left(\|b\|_{\infty,\Omega} + \|c - b'\|_{\infty,\Omega} \right) \right)}{\pi^2} \left(\sum_{j=1}^N h_j^4 \|f + u_h'' - bu_h' - cu_h\|_{0,\Omega_j}^2 \right)^{1/2}$$

De manera más resumida, podemos escribir

$$\|u - u_h\|_{0,\Omega} \leq C\eta$$

donde $C := \frac{\left(1 + \frac{1}{c} \left(\|b\|_{\infty,\Omega} + \|c - b'\|_{\infty,\Omega} \right) \right)}{\pi^2}$ y $\eta := \left(\sum_{j=1}^N \eta_j^2 \right)^{1/2}$, $\forall j \in \{1, \dots, N\}$, con el indicador local

$$\eta_j := h_j^2 \|f + u_h'' - bu_h' - cu_h\|_{0,\Omega_j}$$

3. Problema 2.

Problema 2. Considere el problema de valor de contorno

$$-u'' + 20u' + 10u = 1, \quad x \in \Omega := (0, 1), \quad (9a)$$

$$u(0) = 0, \quad (9b)$$

$$u(1) = 0, \quad (9c)$$

cuya solución es

$$u(x) = \left(\frac{e^{\lambda_2} - 1}{10(e^{\lambda_1} - e^{\lambda_2})} \right) e^{\lambda_1 x} + \left(\frac{1 - e^{\lambda_1}}{10(e^{\lambda_1} - e^{\lambda_2})} \right) e^{\lambda_2 x} + \frac{1}{10}, \quad \text{siendo } \lambda_1 = 10 + \sqrt{110}, \quad \lambda_2 = 10 - \sqrt{110}.$$

- (a) Deduzca una formulación débil del problema, y discuta la existencia y unicidad de solución.
- (b) Resuelva el problema usando el método de elementos finitos de orden más bajo de aproximación posible, y tabule los errores en $\|\cdot\|_{H^1(\Omega)}$ y $\|\cdot\|_{L^2(\Omega)}$, así como los órdenes de convergencia experimentales correspondientes en una tabla para $h = \frac{1}{2^n}$, $n \in \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$ (**refinamiento uniforme**). ¿Cuáles son sus conclusiones al respecto?
- (c) Implemente el algoritmo de refinamiento adaptativo presentado en clase, teniendo en cuenta el estimador de error a posteriori asociado a la norma L^2 del error (revisar apuntes de clase). Tabule los errores en $\|\cdot\|_{H^1(\Omega)}$ y $\|\cdot\|_{L^2(\Omega)}$, así como los órdenes de convergencia experimentales correspondientes en una tabla, partiendo con $h_0 = 1/10$. Incluya una última columna con los índices de eficiencia. Ponga de manifiesto sus observaciones y conclusiones. Incluya gráficas de algunas mallas adaptadas, y del error en L^2 vs. el estimador a posteriori.

3.1. Análisis de existencia y unicidad.

Teniendo en cuenta el desarrollo elaborado en el **Problema 1**, y además que en este caso $b, c \in \mathbb{R}$, podemos identificar la forma bilineal $a : H_0^1(\Omega) \times H_0^1(\Omega) \rightarrow \mathbb{R}$ y el funcional lineal $F : H_0^1(\Omega) \rightarrow \mathbb{R}$ de la forma

$$a(u, v) := \int_{\Omega} u'v' + 20 \int_{\Omega} u'v + 10 \int_{\Omega} uv, \quad F(v) := \int_{\Omega} v$$

Así la FORMULACIÓN VARIACIONAL CONTINUA se puede escribir como

$$\text{HALLAR } u \in H_0^1(\Omega) \text{ TAL QUE } a(u, v) = F(v), \quad \forall v \in H_0^1(\Omega).$$

Donde a y F son acotados: sean $u, v \in H_0^1(\Omega)$

$$|a(u, v)| \leq 31 \|u\|_{1,\Omega} \|v\|_{1,\Omega}, \quad |F(v)| \leq \|v\|_{1,\Omega}$$

y a además es coercivo:

$$a(u, u) \geq |u|_{1,\Omega}^2 + 10 \|u\|_{0,\Omega}^2 \geq \|u\|_{1,\Omega}^2$$

Y gracias al **Teorema de Lax-Milgram**, $\exists! u \in H_0^1(\Omega)$ tal que $a(u, v) = F(v)$, $\forall v \in H_0^1(\Omega)$, además

$$\|u\|_{1,\Omega} \leq 31$$

3.2. Implementación computacional de refinamiento uniforme.

Para la implementación computacional se utiliza la librería de elementos finitos llamada NETGEN/NG-Solve en Python. NGSolve es una potente herramienta de código abierto diseñada para resolver problemas complejos de análisis numérico mediante el método de elementos finitos. NGSolve es altamente versátil y admite una amplia gama de aplicaciones, desde la resolución de ecuaciones diferenciales parciales hasta la simulación de problemas multifísicos. Su interfaz en Python facilita la programación y la integración con otras bibliotecas científicas, haciendo que sea accesible tanto para investigadores como para ingenieros que buscan soluciones precisas y eficientes en el ámbito del análisis numérico. Para visualizar el código que se utiliza [acceder aquí](#).

A continuación, en la Tabla (1) se puede ver la disminución de los errores en norma $\|\cdot\|_{H^1(\Omega)}$ y $\|\cdot\|_{L^2(\Omega)}$ cuando el tamaño de paso disminuye a la mitad en cada iteración. Además el orden de convergencia experimental de las normas $\|\cdot\|_{H^1(\Omega)}$ y $\|\cdot\|_{L^2(\Omega)}$ se estabilizan en aproximadamente 1 y 2 respectivamente, lo que se condice con lo predicho en la teoría. En la Figura (1) se observan las curvas de error en escala logarítmica para ambas normas. Se puede observar que el error disminuye al aumentar la cantidad de grados de libertad o equivalentemente al disminuir el tamaño de paso en cada iteración del refinamiento uniforme.

n	dofs	h	$\ u - u_h\ _{1,\Omega}$	$r_1(u)$	$\ u - u_h\ _{0,\Omega}$	$r_0(u)$
1	1	0.500000	1.3080e-01	-	1.5167e-02	-
2	3	0.250000	1.1552e-01	0.179220	6.8380e-03	1.149289
3	7	0.125000	7.7637e-02	0.573326	2.3196e-03	1.559698
4	15	0.062500	4.3685e-02	0.829606	6.5712e-04	1.819647
5	31	0.031250	2.2613e-02	0.949986	1.7038e-04	1.947401
6	63	0.015625	1.1409e-02	0.986980	4.3003e-05	1.986247
7	127	0.007812	5.7178e-03	0.996640	1.0777e-05	1.996482
8	255	0.003906	2.8606e-03	0.999142	2.6958e-06	1.999170
9	511	0.001953	1.4305e-03	0.999798	6.7405e-07	1.999786
10	1023	0.000977	7.1527e-04	0.999960	1.6852e-07	1.999936

Tabla 1: Tabla de convergencia con refinamiento uniforme.

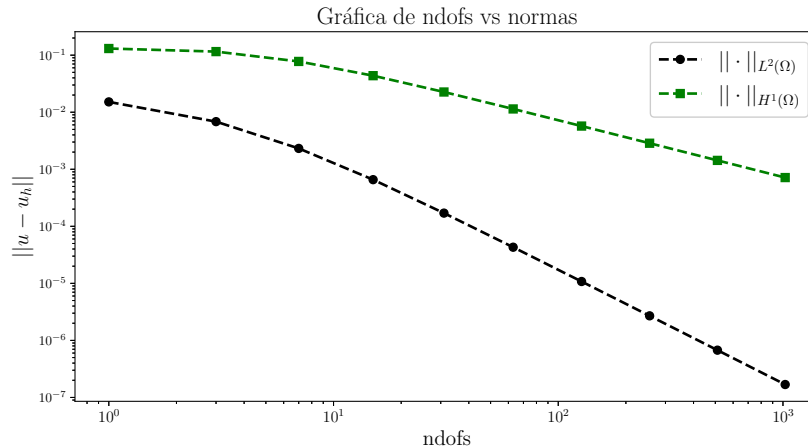


Figura 1: Curvas de error en $H^1(\Omega)$ y $L^2(\Omega)$.

En las Figuras (2a)-(2b)-(2c)-(2d) se ilustran distintas iteraciones del refinamiento uniforme, donde se puede observar el aumento de grados de libertad (y como consecuencia el uso de memoria) y con ello como la aproximación va convergiendo a la solución exacta.

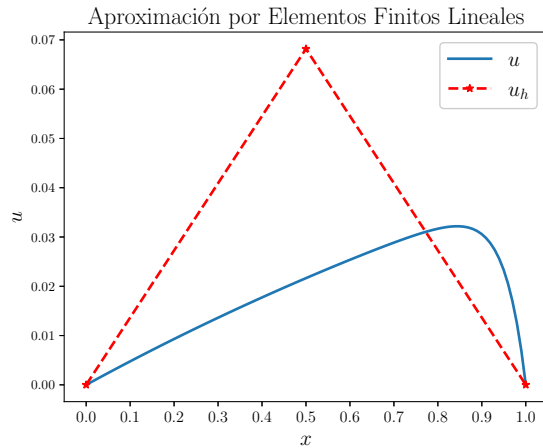
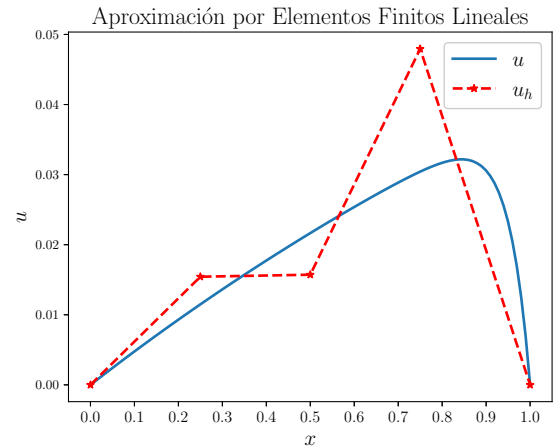
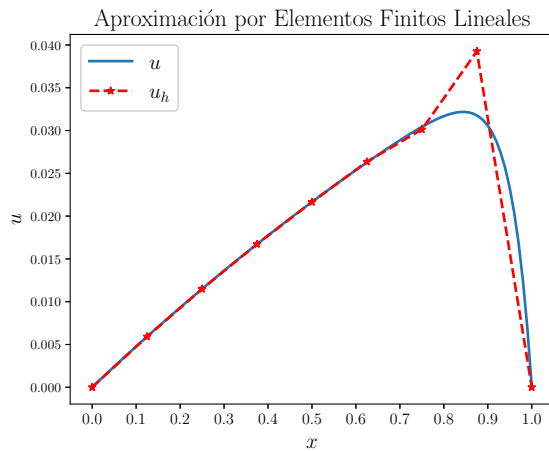
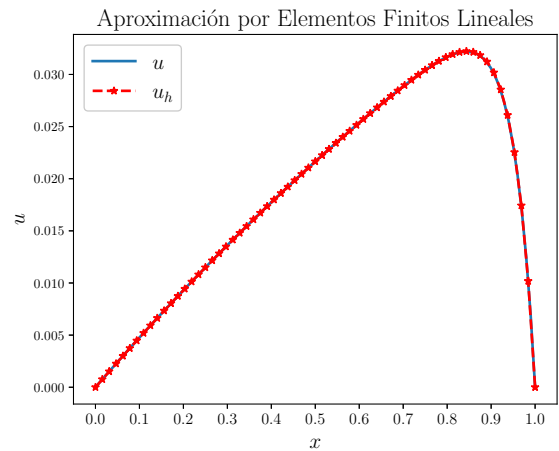
(a) $h_1 = \frac{1}{2}$, dofs= 1(b) $h_2 = \frac{1}{4}$, dofs= 3(c) $h_3 = \frac{1}{8}$, dofs= 7(d) $h_6 = \frac{1}{32}$, dofs= 63

Figura 2: Sucesión de iteraciones del refinamiento uniforme.

3.3. Implementación computacional de refinamiento adaptativo.

Para el refinamiento adaptativo se considera la estrategia o algoritmo

$$\text{Solve} \longrightarrow \text{Estimation} \longrightarrow \text{Mark} \longrightarrow \text{Refine}.$$

Donde SOLVER utiliza un espacio de elementos finitos lineales V_h que se define como

$$V_h := \left\{ v \in \mathcal{C}(\overline{\Omega}) : \forall j \in \{1, \dots, N\} : v|_{\overline{\Omega}_j} \in \mathbb{P}_1(\overline{\Omega}_j), v(x_0) = v(x_{N+1}) = 0 \right\}.$$

Para ESTIMATE se utiliza un estimador a posteriori definido como $\eta := \left(\sum_{j=1}^{N+1} \eta_j^2 \right)^{1/2}$, $\eta_j := h_j^2 \|f - \beta u'_h\|_{0,\Omega_j}$.

En MARK se utiliza la estragia de marcado del máximo, es decir $\forall \mathcal{T}_h : \eta_h \geq \frac{1}{4} \max_j \{\eta_j\}$. Y por último RE-FINE toma el mallado \mathcal{T}_h y refina en todos los elementos marcados x_k agregando nuevos nodos $\frac{x_k + x_{k+1}}{2}$, generando un nuevo mallado refinado \mathcal{T}_h y resolviendo nuevamente con esta nueva malla.

En la Tabla (2) se observan 10 iteraciones del refinamiento adaptativo, donde los errores en norma $\|\cdot\|_{H^1(\Omega)}$ y $\|\cdot\|_{L^2(\Omega)}$ disminuyen al ir aumento la cantidad de grados de libertad. Notemos que el error en norma $\|\cdot\|_{L^2(\Omega)}$ se estanca en la última iteración lo que nos arroja que desde ese momento, el orden de convergencia experimental de dicha norma es 0, es decir, que el error no variará desde esa iteración. Respecto a la norma $\|\cdot\|_{H^1(\Omega)}$ se puede observar que el orden de convergencia experimental es aproximadamente 0.8 y el cálculo de su error tiende a seguir disminuyendo. El estimador a posteriori global disminuye al aumentar los grados de libertad, pues los errores van disminuyendo al momento de ir aumentando los nodos focalizadamente.

N	dofs	$\ u - u_h\ _{1,\Omega}$	$r_1(u)$	$\ u - u_h\ _{0,\Omega}$	$r_0(u)$	η
11	9	6.5497e-02	-	1.5706e-03	-	2.5278e-02
12	10	3.6117e-02	6.840952	4.3468e-04	14.763620	6.8545e-03
15	13	1.8610e-02	2.971471	1.1429e-04	5.986599	1.8084e-03
20	18	9.8631e-03	2.206945	3.7090e-05	3.911928	6.2051e-04
36	34	4.9559e-03	1.170870	1.6426e-05	1.385676	1.7772e-04
54	52	2.8613e-03	1.354747	1.4146e-05	0.368548	6.8522e-05
94	92	1.6140e-03	1.032923	1.3711e-05	0.056346	2.1674e-05
167	165	9.8086e-04	0.866612	1.3665e-05	0.005848	6.8903e-06
293	291	6.0929e-04	0.846947	1.3665e-05	0.000000	2.2756e-06

Tabla 2: Tabla de convergencia con refinamiento adaptativo.

En la Figura (3) vemos como las normas van decreciendo no de manera lineal, pues la idea es que el error se vaya disminuyendo a medida que el estimador marca los nodos a refinar, por lo que las normas presentan este comportamiento curvo (en escala logarítmica). Evidentemente el error disminuye a medida que aumentan los grados de libertad. Además, en la Figura (4) se observa la tendencia de la norma $\|\cdot\|_{L^2(\Omega)}$ a disminuir a medida que el estimador va disminuyendo, pues al estabilizar el estimador la norma igual se estabiliza.

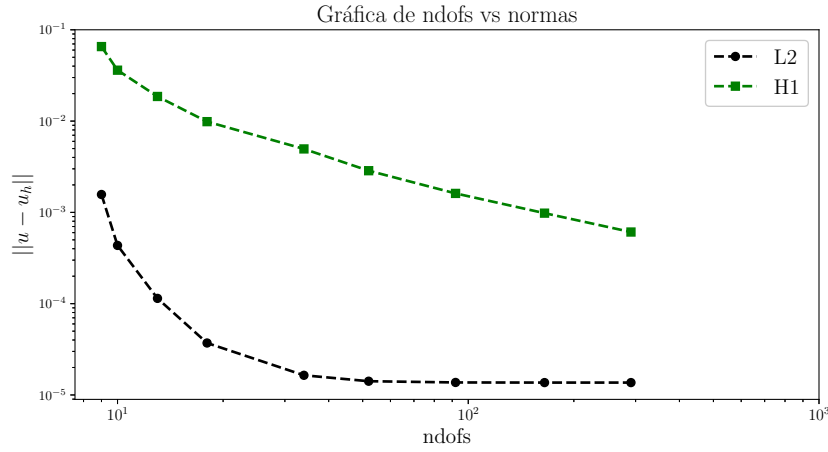


Figura 3: Curvas de error en $H^1(\Omega)$ y $L^2(\Omega)$.

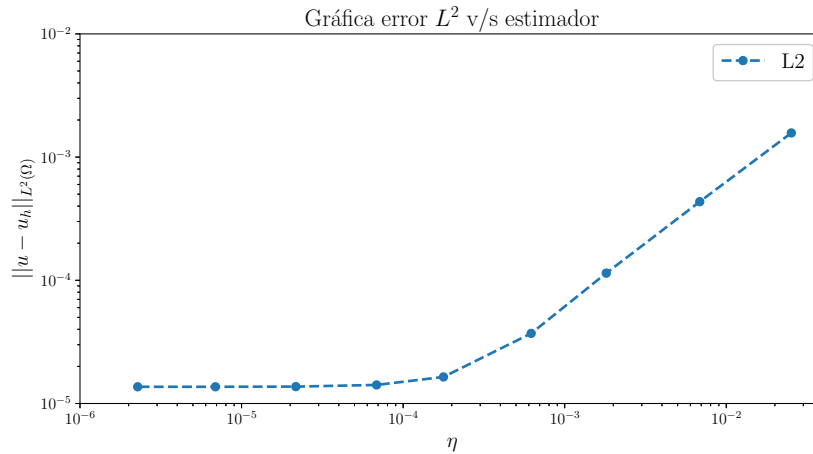
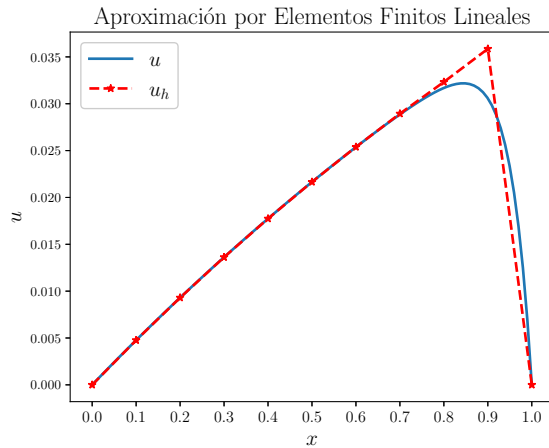
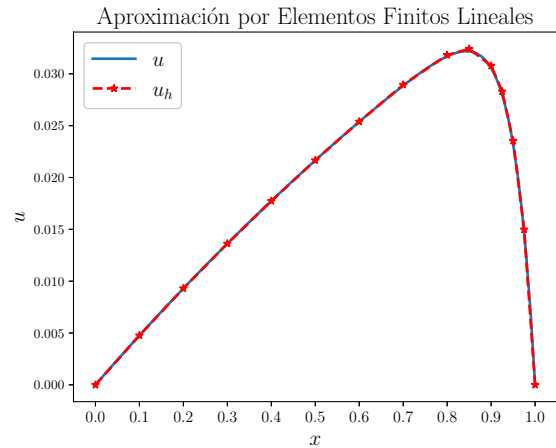


Figura 4: Estimador de error A posteriori η .

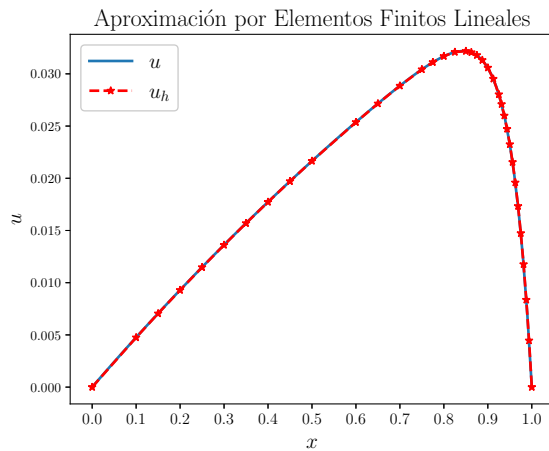
En las Figuras (5a)-(5b)-(5c)-(5d) se ilustran distintas iteraciones del refinamiento adaptativo, donde se puede observar el aumento de grados de libertad concentrados en los intervalos donde se concentra el mayor error, y con ello como la aproximación va convergiendo a la solución exacta.



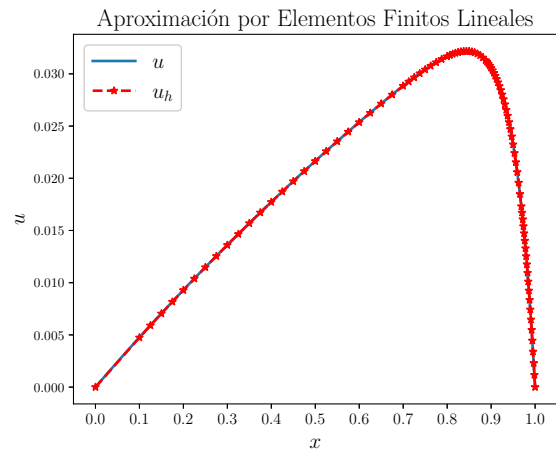
(a) dofs= 1



(b) dofs= 3



(c) dofs= 7



(d) dofs= 63

Figura 5: Sucesión de iteraciones del refinamiento adaptativo.

4. Problema 3.

Problema 3. Considere el problema de convección-difusión unidimensional (con $\nu > 0$)

$$-\nu u''(x) + \beta u'(x) = 1, \quad x \in \Omega := (0, 1) \quad ; \quad u(0) = u(1) = 0,$$

cuya solución está dada por la función $u(x) = \frac{1}{\beta} \left(x - \frac{1 - e^{\lambda x}}{1 - e^{\lambda}} \right)$, siendo $\lambda := \frac{\beta}{\nu}$.

- Deduzca la formulación débil del problema, y discuta la existencia y unicidad de solución.
- Considere el espacio de elementos finitos (conforme) de funciones P_1 por tramo sobre una partición uniforme de $\bar{\Omega}$ de tamaño $h = 1/(N+1)$. Exprese la formulación débil a nivel discreta asociada, y justifique su solubilidad. Luego, deduzca que la matriz del sistema inducido es

$$\mathbf{A} = \frac{\nu}{h} \text{tridiag} \left(-1 - \frac{\gamma}{2}, 2, -1 + \frac{\gamma}{2} \right),$$

donde $\gamma := \frac{\beta h}{\nu}$ es el conocido **numero de Péclet**.

4.1. Análisis de existencia y unicidad.

Teniendo en cuenta el desarrollo elaborado en el **Problema 1**, y además que en este caso $b \in \mathbb{R}$, podemos identificar la forma bilineal $a : H_0^1(\Omega) \times H_0^1(\Omega) \rightarrow \mathbb{R}$ y el funcional lineal $F : H_0^1(\Omega) \rightarrow \mathbb{R}$ de la forma

$$a(u, v) := \int_{\Omega} u'v' + \frac{\beta}{\nu} \int_{\Omega} u'v, \quad F(v) := \frac{1}{\nu} \int_{\Omega} v$$

Así la FORMULACIÓN VARIACIONAL CONTINUA se puede escribir como

$$\text{HALLAR } u \in H_0^1(\Omega) \text{ TAL QUE } a(u, v) = F(v), \quad \forall v \in H_0^1(\Omega).$$

Donde a y F son acotados: sean $u, v \in H_0^1(\Omega)$

$$|a(u, v)| \leq \left(1 + \frac{\beta}{\nu} \right) \|u\|_{1,\Omega} \|v\|_{1,\Omega}, \quad |F(v)| \leq \frac{1}{\nu} \|v\|_{1,\Omega}$$

y a además es coercivo: utilizando el **Teorema Fundamental del Cálculo**

$$a(u, u) = |u|_{1,\Omega}^2 + \frac{\beta}{\nu} \int_{\Omega} u'u = |u|_{1,\Omega}^2 + \frac{\beta}{2\nu} \int_{\Omega} (u^2)' = |u|_{1,\Omega}^2 \geq c_p \|u\|_{1,\Omega}^2$$

con c_p la constante de Poincaré. Gracias al **Teorema de Lax-Milgram**, $\exists! u \in H_0^1(\Omega)$ tal que $a(u, v) = F(v)$, $\forall v \in H_0^1(\Omega)$, además

$$\|u\|_{1,\Omega} \leq \frac{1}{c_p} \left(1 + \frac{\beta}{2\nu} \right)$$

4.2. Discretización.

Consideremos una partición del intervalo Ω no necesariamente uniforme dada por $0 = x_0 < x_1 < \dots < x_j < \dots < x_N < x_{N+1} = 1$, y se define el espacio de elementos finitos $V_h \subset H_0^1(\Omega)$ de la forma

$$V_h := \{v \in C(\bar{\Omega}) : \forall j \in \{0, \dots, N+1\} \ v|_{\bar{\Omega}_j} \in \mathbb{P}_1(\bar{\Omega}_j), v(x_0) = v(x_{N+1}) = 0\},$$

con $\dim V_h = N$. Luego, la FORMULACIÓN VARIACIONAL DISCRETA se puede escribir como

$$\text{HALLAR } u_h \in V_h \text{ TAL QUE } a(u_h, v_h) = F(v_h), \quad \forall v_h \in V_h.$$

Como V_h hereda las propiedades del espacio continuo al ser un subespacio de $H_0^1(\Omega)$ y por **Teorema de Lax-Milgram**, se puede asegurar que $\exists! u_h \in V_h$ tal que $a(u_h, v_h) = F(v_h)$, $\forall v_h \in V_h$.

4.3. Matriz de rigidez.

Sea $\{e_j\}_{j=1}^N$ una base de V_h , considerando $h_j = h_{j+1} = h$, es decir, un mallado uniforme y las funciones techo

$$e_j := \begin{cases} \frac{x - x_{j-1}}{x_j - x_{j-1}} & , x_{j-1} < x < x_j \\ \frac{x_{j+1} - x}{x_{j+1} - x_j} & , x_j < x < x_{j+1} \\ 0 & , \text{e.o.c.} \end{cases} = \begin{cases} \frac{x - x_{j-1}}{h} & , x_{j-1} < x < x_j \\ \frac{x_{j+1} - x}{h} & , x_j < x < x_{j+1} \\ 0 & , \text{e.o.c.} \end{cases}.$$

Sea $j \in \{1, \dots, N\}$:

$$\begin{aligned} a_{jj} &:= a(e_j, e_j) \\ &= \nu \int_{x_{j-1}}^{x_{j+1}} (e'_j)^2 + \beta \int_{x_{j-1}}^{x_{j+1}} e'_j e_j \\ &= \nu \left(\int_{x_{j-1}}^{x_j} \frac{1}{h^2} + \int_{x_j}^{x_{j+1}} \frac{1}{h^2} \right) + \beta \left(\int_{x_{j-1}}^{x_j} \frac{1}{h^2} (x - x_{j-1}) - \int_{x_j}^{x_{j+1}} \frac{1}{h^2} (x_{j+1} - x) \right) \\ &= \frac{2\nu}{h} \end{aligned}$$

Sea $j \in \{1, \dots, N-1\}$:

$$\begin{aligned} a_{jj+1} &:= a(e_j, e_{j+1}) \\ &= \nu \int_{x_{j-1}}^{x_{j+1}} e'_j e'_{j+1} + \beta \int_{x_{j-1}}^{x_{j+1}} e'_j e_{j+1} \\ &= -\nu \int_{x_j}^{x_{j+1}} \frac{1}{h^2} - \beta \int_{x_j}^{x_{j+1}} \frac{1}{h^2} (x - x_j) \\ &= -\frac{\nu}{h} - \frac{\beta}{2} \\ &= \frac{\nu}{h} \left(-1 - \frac{\beta h}{2\nu} \right) \\ &= \frac{\nu}{h} \left(-1 - \frac{\gamma}{2} \right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} a_{j+1j} &:= a(e_{j+1}, e_j) \\ &= \nu \int_{x_{j-1}}^{x_{j+1}} e'_{j+1} e'_j + \beta \int_{x_{j-1}}^{x_{j+1}} e'_{j+1} e_j \\ &= -\nu \int_{x_j}^{x_{j+1}} \frac{1}{h^2} + \beta \int_{x_j}^{x_{j+1}} \frac{1}{h^2} (x_{j+1} - x) \\ &= -\frac{\nu}{h} + \frac{\beta}{2} \\ &= \frac{\nu}{h} \left(-1 + \frac{\beta h}{2\nu} \right) \\ &= \frac{\nu}{h} \left(-1 + \frac{\gamma}{2} \right) \end{aligned}$$

Por lo tanto, la matriz de rigidez nos queda

$$\mathbf{A} = \frac{\nu}{h} \text{tridiag} \left(-1 - \frac{\gamma}{2}, 2, -1 + \frac{\gamma}{2} \right),$$

4.4. Implementación computacional de refinamiento uniforme.

Para poder visualizar el código de implementación [acceder aquí](#).

En la Tabla (3) se muestran los datos de las distintas iteraciones para valores de $\nu \in \{1, 0.1, 0.01\}$ (no se incluyen los datos para $\nu = 0.001$, pues los valores daban indeterminaciones). Se observa que para el valor $\nu = 1$, las normas $\|\cdot\|_{H^1(\Omega)}$ y $\|\cdot\|_{L^2(\Omega)}$ se comportan de manera similar al **Problema 2**, donde los ordenes de convergencia experimentales son aproximadamente 1 y 2 respectivamente. Se puede concluir que la función es suave en Ω , esto se evidencia en la Figura (7) donde podemos ver que la solución es suave, y por lo tanto la aproximación se va haciendo más suave a medida que aumenta el numero de grados de libertad.

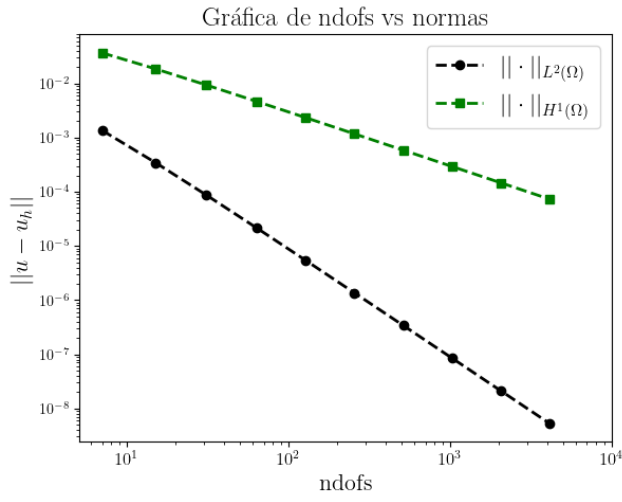
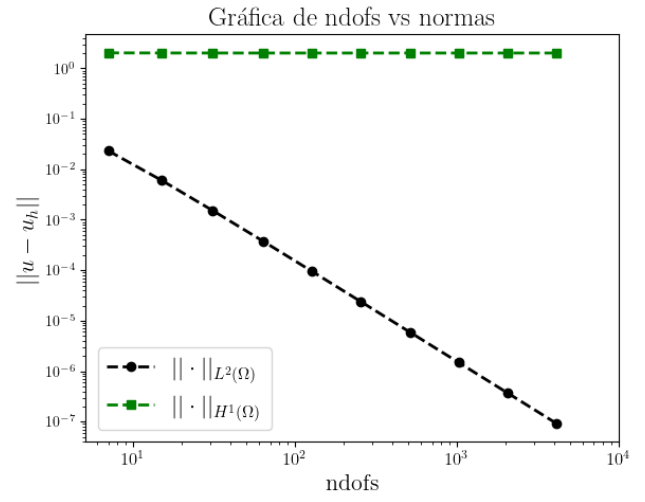
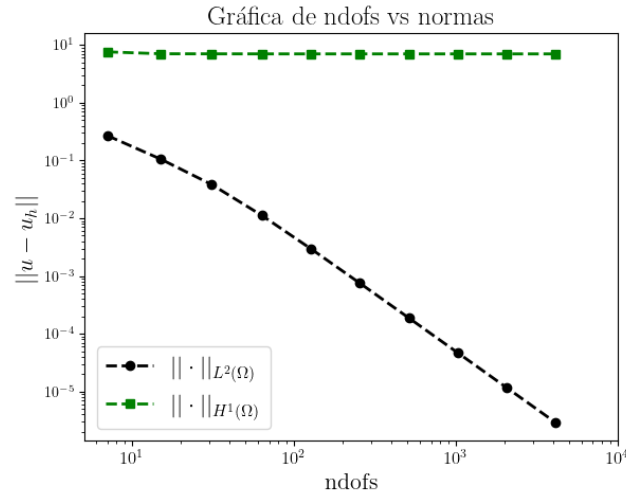
Para el valor $\nu = 0.1$, observamos que el error $\|\cdot\|_{H^1(\Omega)}$ no disminuye a medida que aumentan los grados de libertad a diferencia de la norma $\|\cdot\|_{L^2(\Omega)}$, la cual mantiene su orden de convergencia experimental que es aproximadamente 2. Podemos ver en la Figura (8), que la solución exacta ya no es tan suave como en el caso anterior, por lo que la norma $\|\cdot\|_{H^1(\Omega)}$ no logra rescatar la tendencia a la baja del error, lo que se concluye en que la función va perdiendo suavidad en Ω .

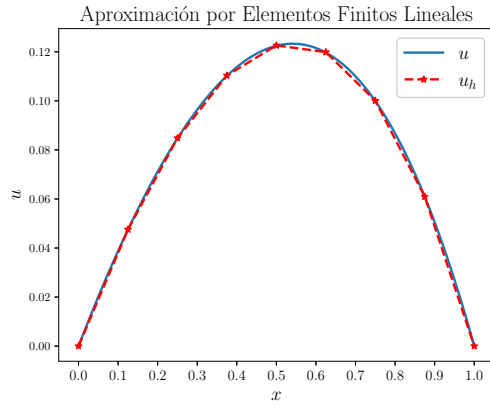
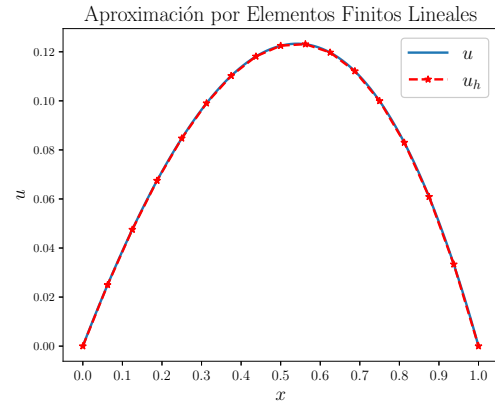
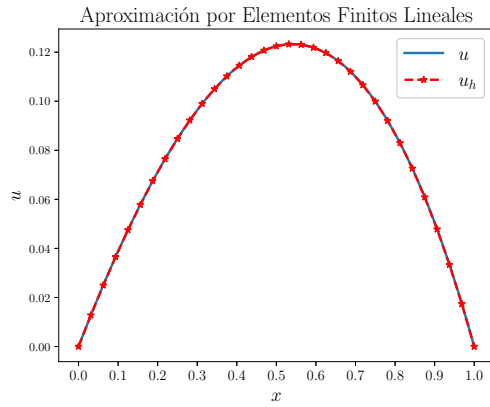
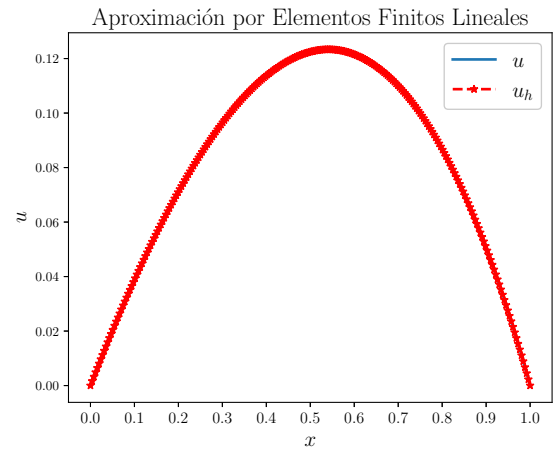
Para $\nu = 0.01$ podemos ver que sigue la misma tendencia con la norma $\|\cdot\|_{L^2(\Omega)}$ y su orden de convergencia experimental, pero la norma $\|\cdot\|_{H^1(\Omega)}$ no decreciendo al disminuir los grados de libertad. Evidentemente, aquí se acentúa la observación del valor ν anterior, la función ya no es suave en el intervalo Ω , lo que se evidencia en la Figura (9).

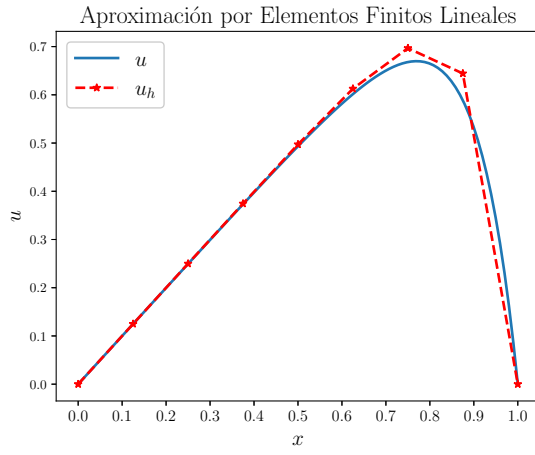
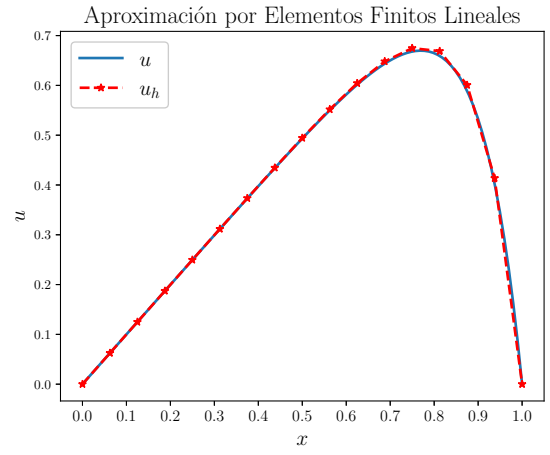
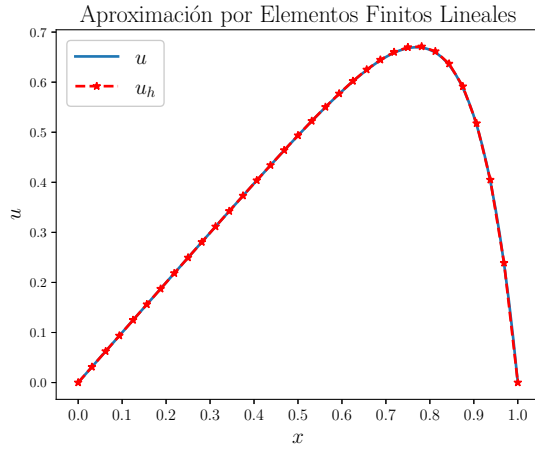
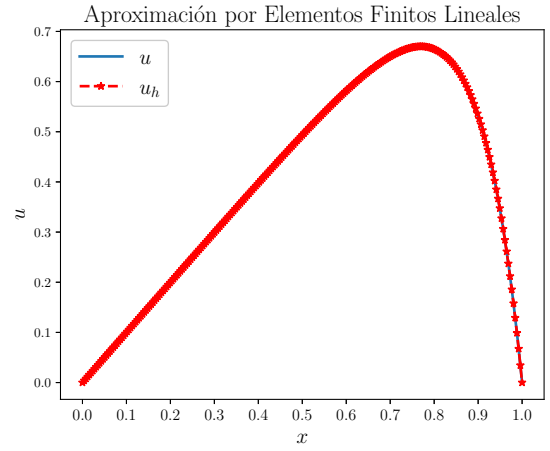
Por ultimo, para $\nu = 0.001$, en la Figura (6) la solución exacta, y por consecuencia, la solución aproximada pierde totalmente la suavidad de la función en el intervalo Ω , por lo que el método de elementos finitos no logra rescatar numericamente la solución y se observan esas oscilaciones numéricas.

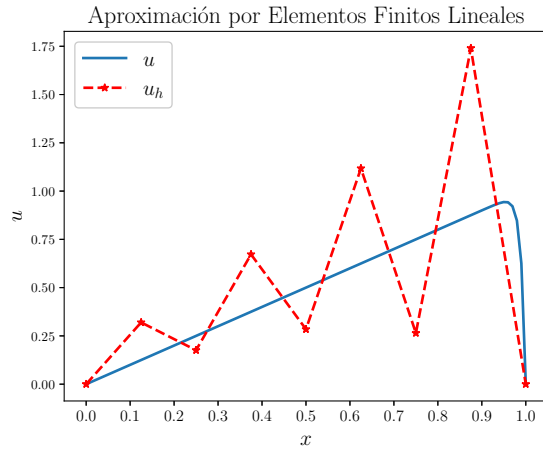
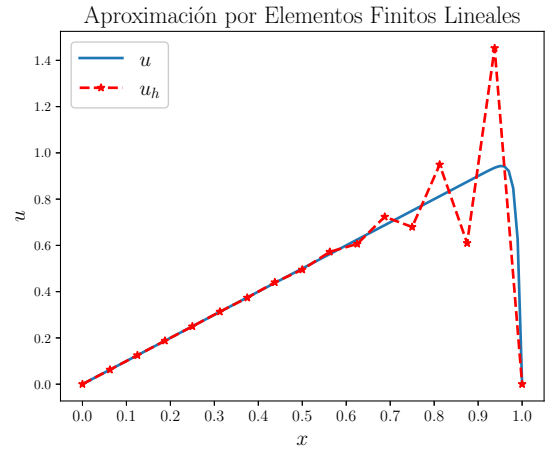
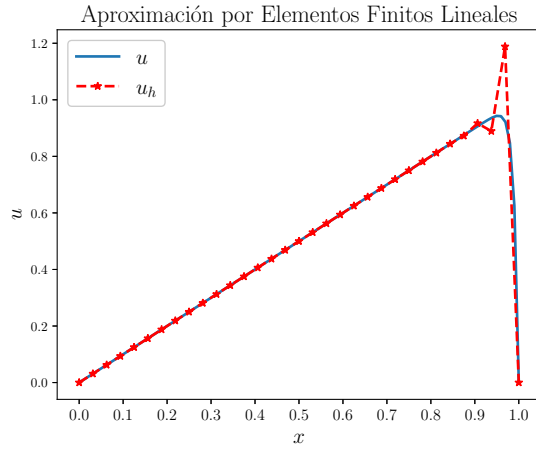
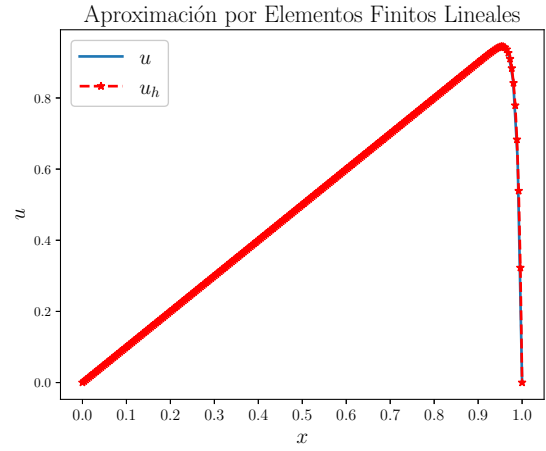
ν	dofs	$\ u - u_h\ _{1,\Omega}$	$r_1(u)$	$\ u - u_h\ _{0,\Omega}$	$r_0(u)$
1	7	3.6689e-02	-	1.3595e-03	-
	15	1.8570e-02	0.982374	3.4425e-04	1.981548
	31	9.3361e-03	0.992082	8.6576e-05	1.991418
	63	4.6801e-03	0.996281	2.1706e-05	1.995873
	127	2.3430e-03	0.998182	5.4342e-06	1.997954
	255	1.1722e-03	0.999138	1.3595e-06	1.998992
	511	5.8629e-04	0.999532	3.3999e-07	1.999512
	1023	2.9319e-04	0.999779	8.5013e-08	1.999737
	2047	1.4661e-04	0.999852	2.1255e-08	1.999881
	4095	7.3306e-05	0.999980	5.3141e-09	1.999905
0.1	7	2.0274e+00	-	2.3282e-02	-
	15	2.0165e+00	0.007777	6.0178e-03	1.951907
	31	2.0136e+00	0.002076	1.5176e-03	1.987445
	63	2.0128e+00	0.000573	3.8024e-04	1.996809
	127	2.0126e+00	0.000143	9.5112e-05	1.999211
	255	2.0126e+00	0.000000	2.3781e-05	1.999818
	511	2.0126e+00	0.000000	5.9455e-06	1.999939
	1023	2.0126e+00	0.000000	1.4864e-06	1.999976
	2047	2.0126e+00	0.000000	3.7160e-07	2.000000
	4095	2.0126e+00	0.000000	9.2899e-08	2.000016
0.01	7	7.5931e+00	-	2.7024e-01	-
	15	7.0381e+00	0.109503	1.0541e-01	1.358229
	31	7.0191e+00	0.003900	3.8206e-02	1.464141
	63	7.0067e+00	0.002551	1.1237e-02	1.765542
	127	7.0021e+00	0.000947	2.9551e-03	1.926978
	255	7.0008e+00	0.000268	7.4883e-04	1.980497
	511	7.0005e+00	0.000062	1.8785e-04	1.995057
	1023	7.0004e+00	0.000021	4.7003e-05	1.998756
	2047	7.0004e+00	0.000000	1.1753e-05	1.999724
	4095	7.0004e+00	0.000000	2.9385e-06	1.999877

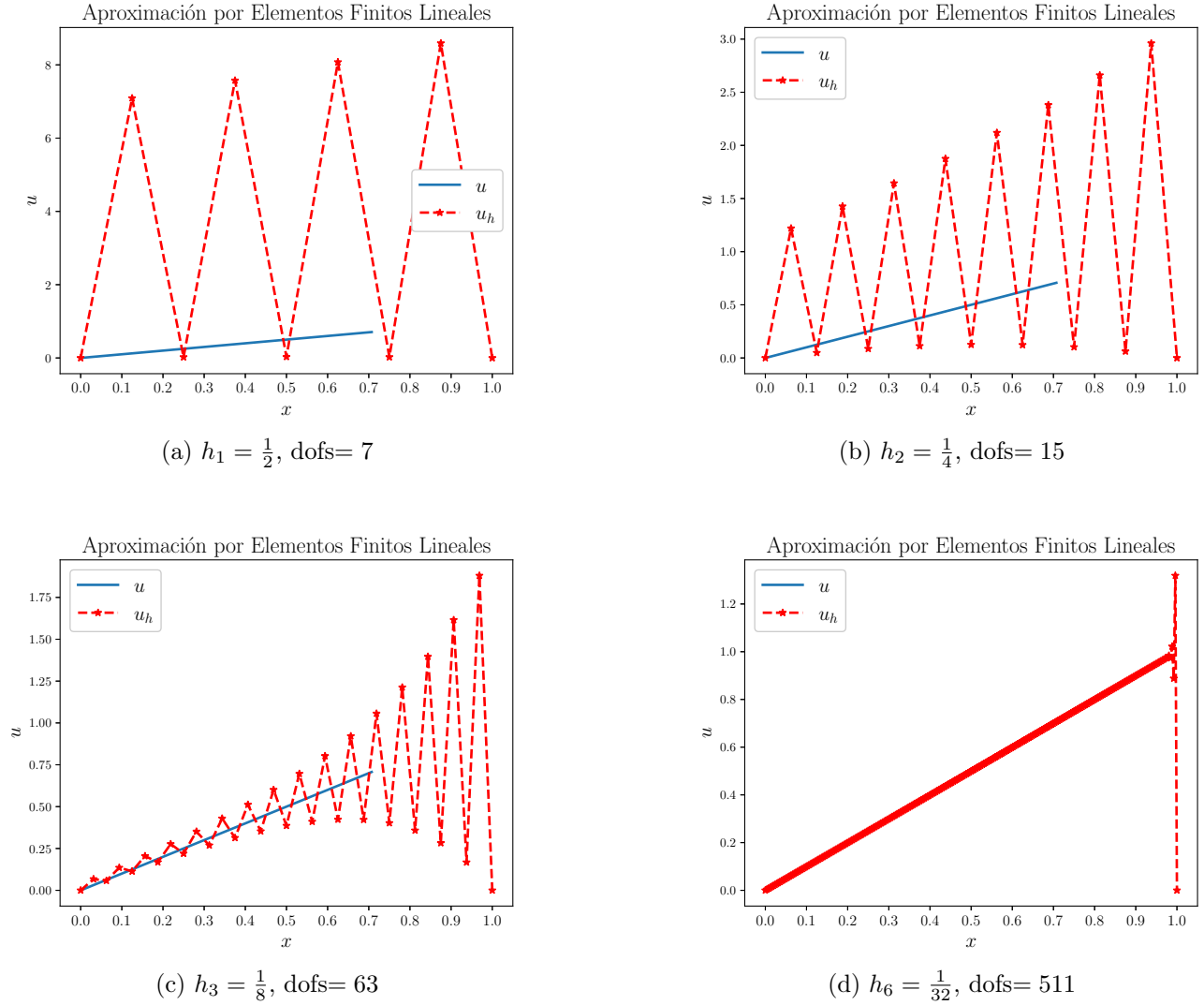
Tabla 3: Tabla de convergencia con refinamiento uniforme.

(a) $\nu = 1$ (b) $\nu = 0.1$ (c) $\nu = 0.01$ Figura 6: Curvas de error en $H^1(\Omega)$ y $L^2(\Omega)$.

(a) $h_1 = \frac{1}{2}$, dofs= 7(b) $h_2 = \frac{1}{4}$, dofs= 15(c) $h_3 = \frac{1}{8}$, dofs= 63(d) $h_6 = \frac{1}{32}$, dofs= 511Figura 7: Sucesión de iteraciones del refinamiento uniforme con $\nu = 1$.

(a) $h_1 = \frac{1}{2}$, dofs= 7(b) $h_2 = \frac{1}{4}$, dofs= 15(c) $h_3 = \frac{1}{8}$, dofs= 63(d) $h_6 = \frac{1}{32}$, dofs= 511Figura 8: Sucesión de iteraciones del refinamiento uniforme con $\nu = 0.1$.

(a) $h_1 = \frac{1}{2}$, dofs= 7(b) $h_2 = \frac{1}{4}$, dofs= 15(c) $h_3 = \frac{1}{8}$, dofs= 63(d) $h_6 = \frac{1}{32}$, dofs= 511Figura 9: Sucesión de iteraciones del refinamiento uniforme con $\nu = 0.01$.

Figura 10: Sucesión de iteraciones del refinamiento uniforme con $\nu = 0.001$.

4.5. Implementación computacional de refinamiento adaptativo.

Para el refinamiento adaptativo se considera la estrategia o algoritmo

$$\text{Solve} \longrightarrow \text{Estimation} \longrightarrow \text{Mark} \longrightarrow \text{Refine}.$$

Donde SOLVER utiliza un espacio de elementos finitos lineales V_h que se define como

$$V_h := \left\{ v \in \mathcal{C}(\overline{\Omega}) : \forall j \in \{1, \dots, N\} : v|_{\overline{\Omega}_j} \in \mathbb{P}_1(\overline{\Omega}_j), v(x_0) = v(x_{N+1}) = 0 \right\}.$$

Para ESTIMATE se utiliza un estimador a posteriori definido como $\eta := \left(\sum_{j=1}^{N+1} \eta_j^2 \right)^{1/2}$, $\eta_j := h_j^2 \|f - \beta u_h'\|_{0, \Omega_j}$.

En MARK se utiliza la estrategia de marcado del máximo, es decir $\forall \mathcal{T}_h : \eta_h \geq \frac{1}{4} \max_j \{\eta_j\}$. Y por último RE-FINE toma el mallado \mathcal{T}_h y refina en todos los elementos marcados x_k agregando nuevos nodos $\frac{x_k + x_{k+1}}{2}$,

generando un nuevo mallado refinado \mathcal{T}_h y resolviendo nuevamente con esta nueva malla.

A diferencia del problema anterior, aquí se considera un criterio de detención que consiste en considerar una tolerancia $TOL = 10^{-4}$ de acuerdo al apunte de Süli.

En la Tabla (4) vemos que el error en norma $\|\cdot\|_{L^2(\Omega)}$ disminuye a medida que aumenta la cantidad de grados de libertad para cada valor de ν , pero a la vez, el error en la norma $\|\cdot\|_{H^1(\Omega)}$, lo que quiere decir es que la no suavidad de la función se sigue acentuando al disminuir el valor de ν hasta el punto de oscilar en su solución.

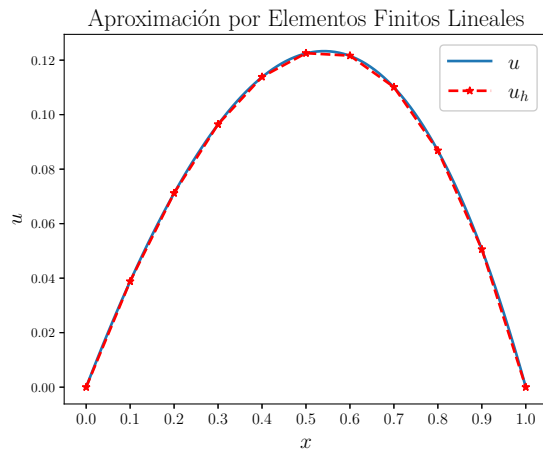
En las Figuras (11)-(12)-(13)-(14) muestran el aumento de grados de libertad focalizados en los lugares donde se concentra el error. El análisis es similar al caso del refinamiento uniforme.

Además, en la Figura (15) observamos las curvas de error para ambas normas, donde vemos la disminución de la norma $\|\cdot\|_{L^2(\Omega)}$, pero el estancamiento de la norma $\|\cdot\|_{H^1(\Omega)}$.

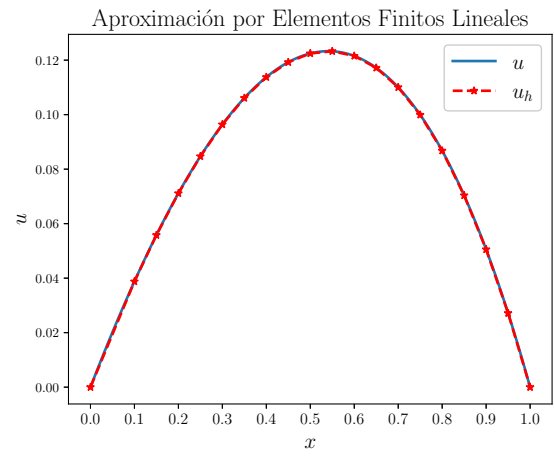
Y por último, la Figura (16) muestra la norma $\|\cdot\|_{L^2(\Omega)}$ respecto al estimador a posteriori.

ν	dofs	$\ u - u_h\ _{1,\Omega}$	$r_1(u)$	$\ u - u_h\ _{0,\Omega}$	$r_0(u)$	η
1	9	2.9502e-02	-	8.7469e-04	-	1.0217e-02
	18	1.4751e-02	1.159425	2.3299e-04	2.212767	2.5547e-03
	36	7.3759e-03	1.079830	7.4501e-05	1.776390	6.3871e-04
	72	3.6883e-03	1.039871	3.7788e-05	1.018518	1.5968e-04
	144	1.8448e-03	1.019503	3.0019e-05	0.338701	3.9920e-05
0.1	9	2.0223e+00	-	1.5137e-02	-	2.2361e-02
	11	2.0152e+00	0.021053	4.0465e-03	7.897381	6.2550e-03
	15	2.0133e+00	0.003516	1.2427e-03	4.400762	2.1121e-03
	25	2.0127e+00	0.000644	3.4712e-04	2.756823	6.0171e-04
	43	2.0126e+00	0.000097	1.0744e-04	2.295770	1.9162e-04
	77	2.0125e+00	0.000088	3.4961e-05	1.994898	6.0358e-05
0.01	9	7.1727e+00	-	1.9131e-01	-	7.1934e-02
	13	7.0324e+00	0.063691	7.7960e-02	2.894358	1.7680e-02
	15	7.0141e+00	0.020818	2.6262e-02	8.693237	4.4194e-03
	16	7.0047e+00	0.023462	7.3489e-03	22.281451	1.1281e-03
	17	7.0018e+00	0.007659	2.6378e-03	18.950584	4.8565e-04
	21	7.0007e+00	0.000822	7.4931e-04	6.587350	1.3327e-04
	27	7.0005e+00	0.000123	2.5885e-04	4.585404	4.9937e-05

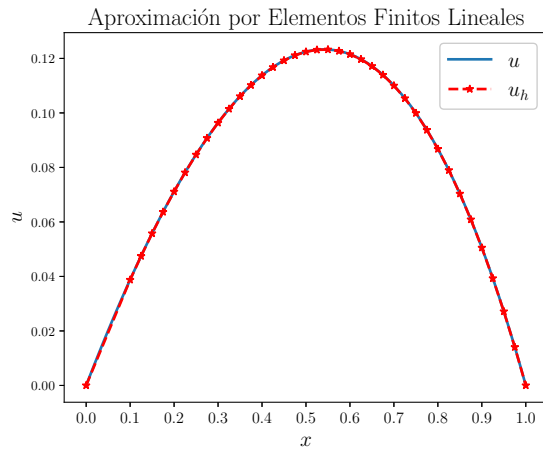
Tabla 4: Tabla de convergencia con refinamiento adaptativo.



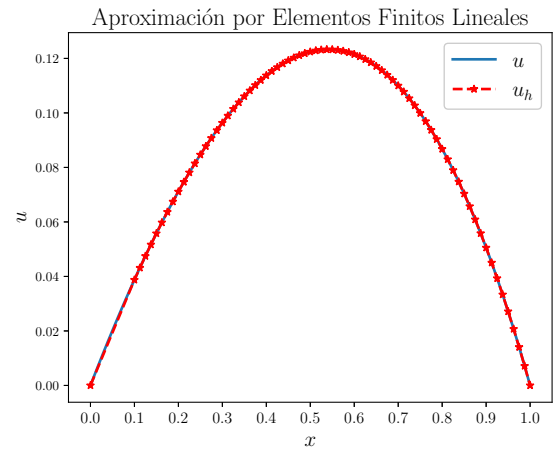
(a) dofs= 9



(b) dofs= 18

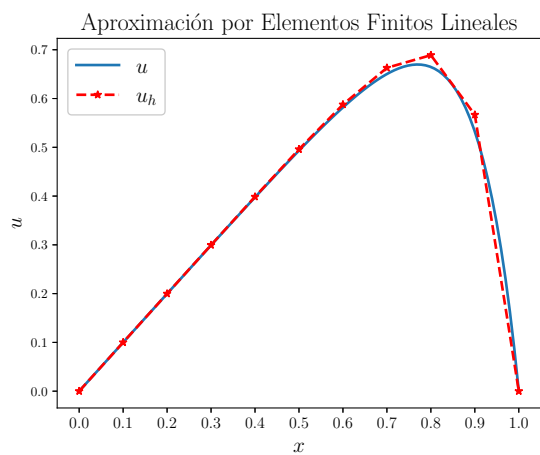


(c) dofs= 36

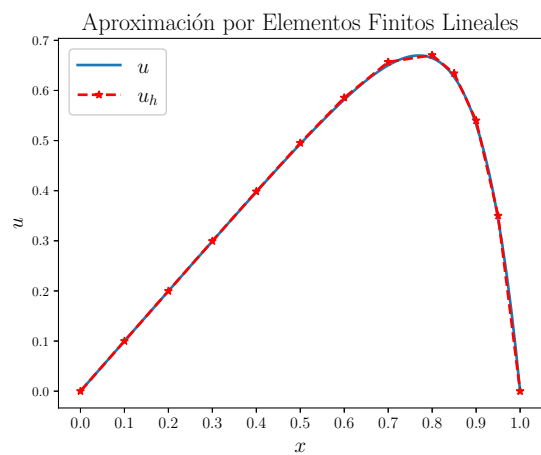


(d) dofs= 72

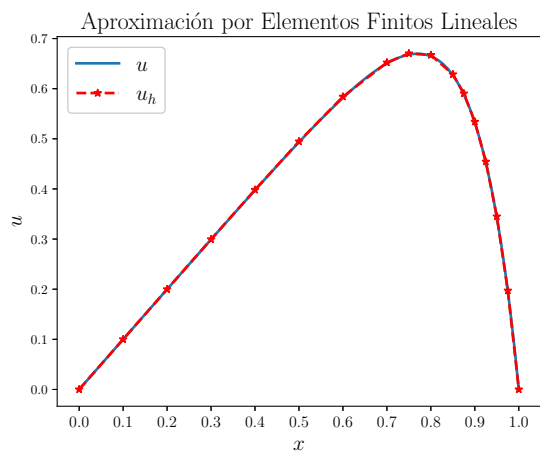
Figura 11: Sucesión de iteraciones del refinamiento adaptativo con $\nu = 1$.



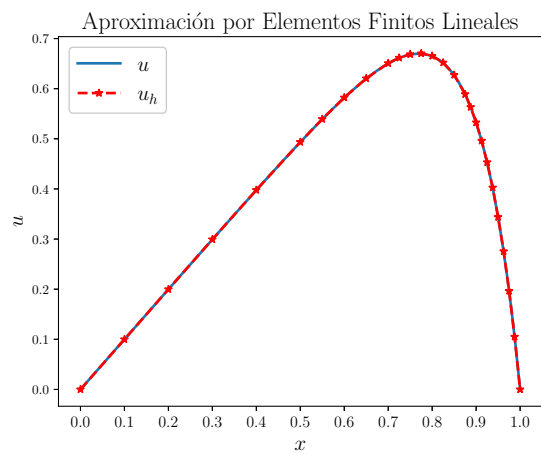
(a) dofs= 9



(b) dofs= 18

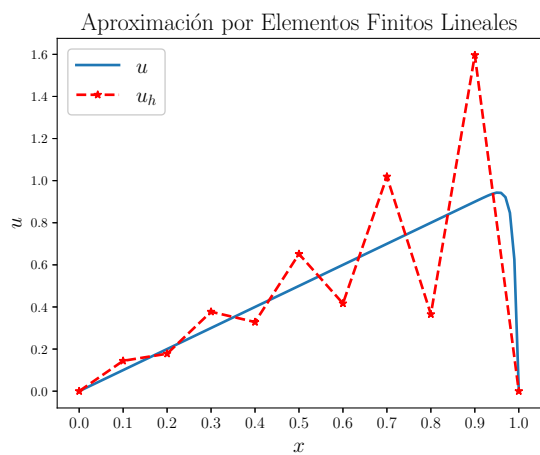


(c) dofs= 36

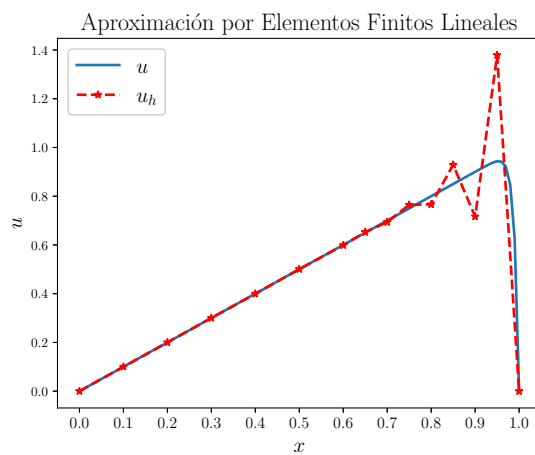


(d) dofs= 72

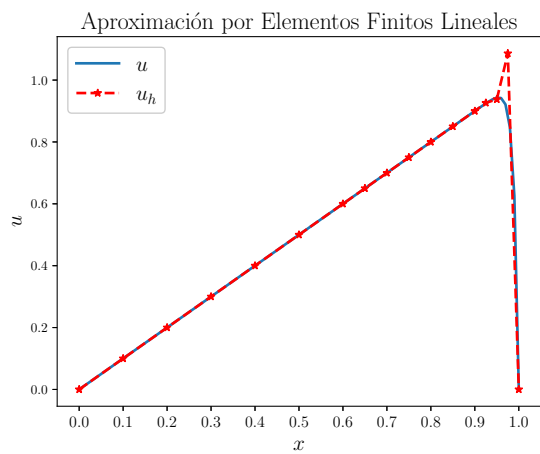
Figura 12: Sucesión de iteraciones del refinamiento adaptativo con $\nu = 0.1$.



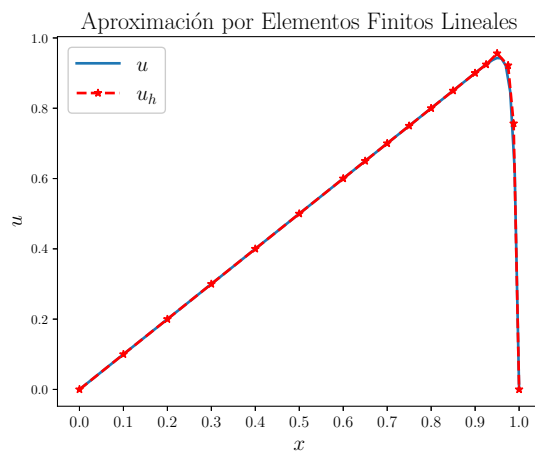
(a) dofs= 9



(b) dofs= 18



(c) dofs= 36



(d) dofs= 72

Figura 13: Sucesión de iteraciones del refinamiento adaptativo con $\nu = 0.01$.

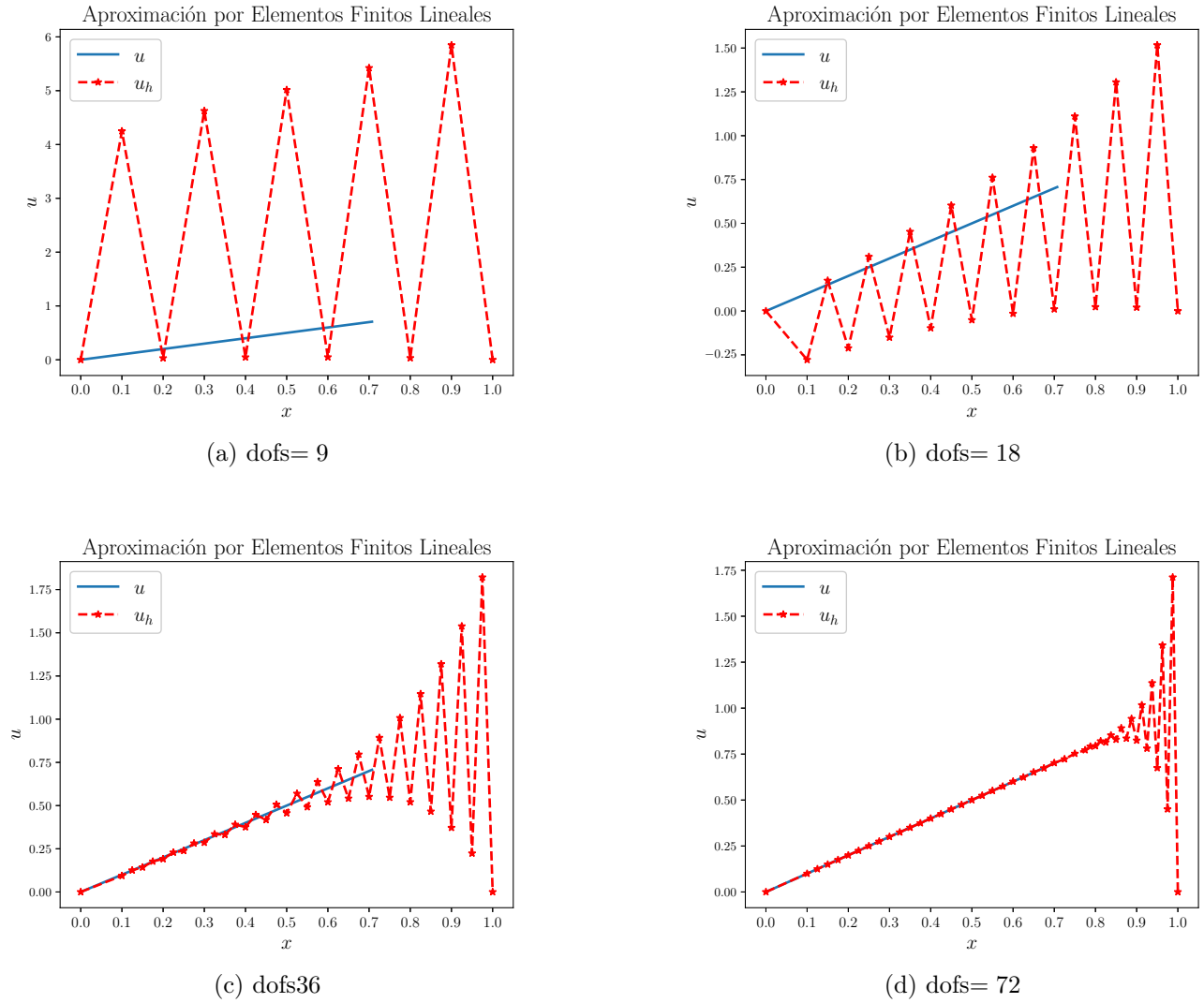
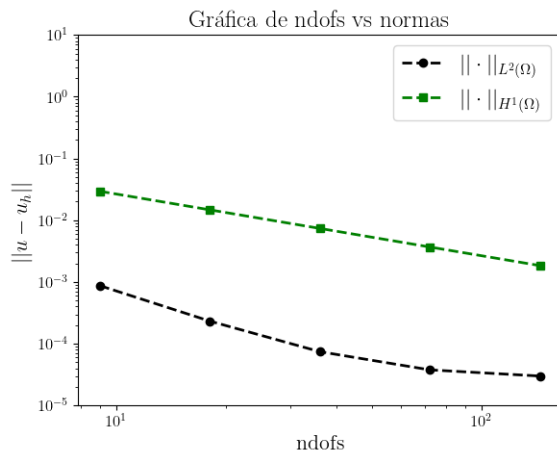
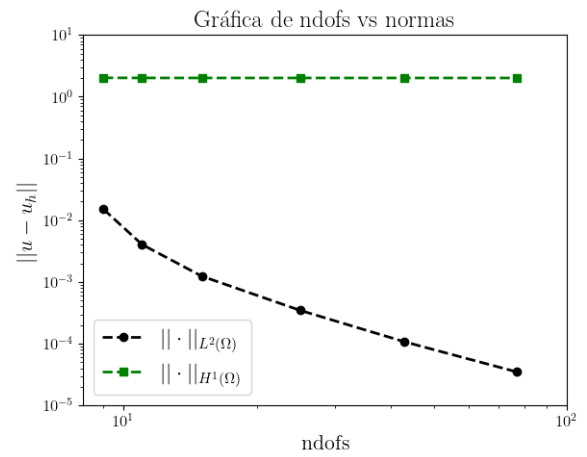
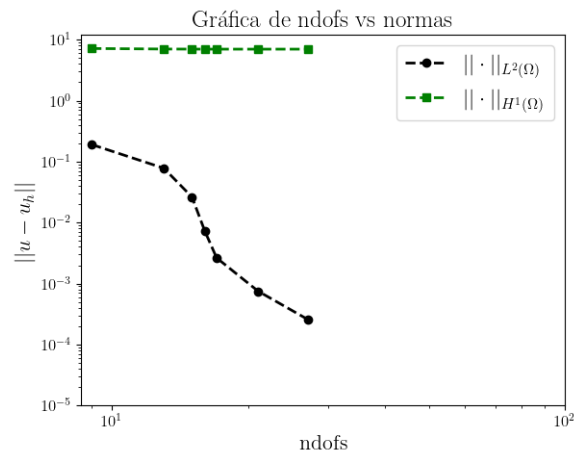
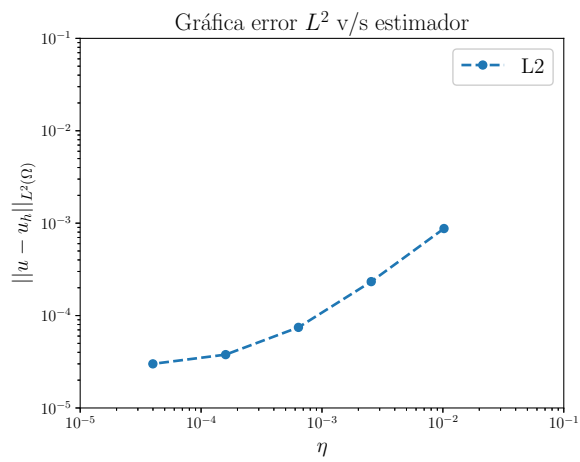
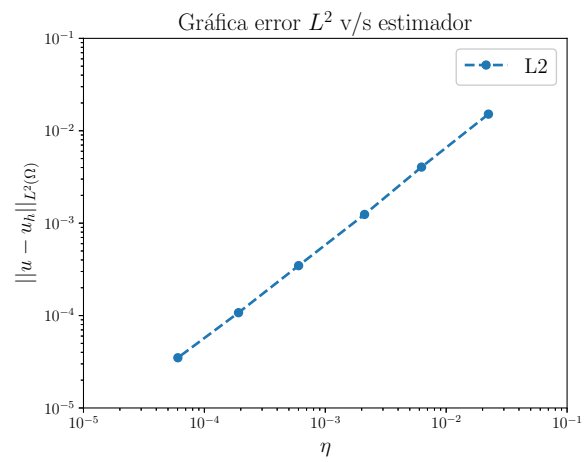
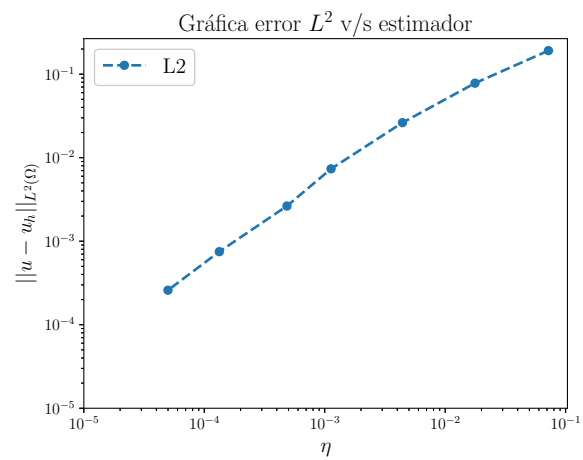


Figura 14: Sucesión de iteraciones del refinamiento adaptativo con $\nu = 0.001$.

(a) $\nu = 1$ (b) $\nu = 0.1$ (c) $\nu = 0.01$ Figura 15: Curvas de error en $H^1(\Omega)$ y $L^2(\Omega)$.

(a) $\nu = 1$ (b) $\nu = 0.1$ (c) $\nu = 0.01$ Figura 16: Estimador de error A posteriori η .