UNIVERSIDAD DE CONCEPCIÓN
FACULTAD DE CIENCIAS
FÍSICAS Y MATEMÁTICAS
DEPARTAMENTO DE INGENIERÍA MATEMÁTICA

Tarea 1 Introducción a los Estimadores de Error A posteriori 525564-1

1. Desarrollar con más detalles, lo descrito en la Sección 4 del apunte de Endre Süli, compartido en Teams / Infoda. Puede introducir resultados previos, contenidos en el mismo apunte, que son invocados por el autor en su análisis.

   En base a ello, luego proceda a resolver los siguientes problemas.

2. Considere el problema de valor de contorno

$$\begin{cases} -u''(x) + 20u'(x) + 10u(x) = 1\,, & x \in \Omega := (0,1) \\ u(0) = 0\,, u(1) = 0\,, \end{cases}$$

   cuya solución exacta es

$$u(x) = \left(\frac{e^{\lambda_2} - 1}{10(e^{\lambda_1} - e^{\lambda_2})}\right) e^{\lambda_1 x} + \left(\frac{1 - e^{\lambda_1}}{10(e^{\lambda_1} - e^{\lambda_2})}\right) e^{\lambda_2 x} + \frac{1}{10}\,, \quad \text{siendo} \quad \lambda_1 = 10 + \sqrt{110}\,, \, \lambda_2 = 10 - \sqrt{110}\,.$$

   (a) Deduzca una formulación débil del problema, y discuta la existencia y unicidad de solución.

   (b) Resuelva el problema usando el método de elementos finitos del orden más bajo de aproximación posible, y tabule los errores en $||\cdot||_{H^1(\Omega)}$ y $||\cdot||_{L^2(\Omega)}$, así como los órdenes de convergencia experimentales correspondientes en una tabla como la que se muestra a continuación para $h = \frac{1}{2^n}$, $n \in \{1,2,3,4,5,6,7,8,9,10\}$ (**refinamiento uniforme**).

h	$\|\|u-u_h\|\|_{H^1(\Omega)}$	$r_1(u)$	$\|\|u-u_h\|\|_{L^2(\Omega)}$	$r_0(u)$

   ¿Cuáles son sus conclusiones al respecto?

   (c) Implemente el algoritmo de refinamiento adaptativo presentado en clase, teniendo en cuenta el estimador de error a posteriori asociado a la norma L^2 del error (revisar apuntes de clase). Tabule los errores en $||\cdot||_{H^1(\Omega)}$ y $||\cdot||_{L^2(\Omega)}$, así como los órdenes de convergencia experimentales correspondientes en una tabla (similar a la descrita en (2b)), partiendo con $h_0 = 1/10$. Incluya una última columna con los índices de eficiencia. Ponga de manifiesto sus observaciones y conclusiones. Incluya gráficas de algunas mallas adaptadas, y del error en L^2 vs. el estimador a posteriori.

3. Considere el problema de convección-difusión unidimensional (con $\nu > 0$)

$$-\nu\, u''(x) \,+\, \beta\, u'(x) \,=\, 1 \quad x \in \Omega := (0,1) \quad ; \quad u(0) \,=\, u(1) \,=\, 0\,,$$

   cuya solución está dada por la función $u(x) = \dfrac{1}{\beta}\left(x - \dfrac{1 - e^{\lambda x}}{1 - e^{\lambda}}\right)$, siendo $\lambda := \frac{\beta}{\nu}$.

   (a) Deduzca una formulación débil del problema, y discuta la existencia y unicidad de solución.

   (b) Considere el espacio de elementos finitos (conforme) de funciones P_1 por tramo sobre una partición uniforme de $\bar{\Omega}$ de tamaño $h = 1/(N+1)$. Exprese la formulación débil a nivel discreta asociada, y justifique su solubilidad. Luego, deduzca que la matriz del sistema inducido es

$$\boldsymbol{A} = \frac{\nu}{h}\text{tridiag}\left(-1 - \frac{\gamma}{2}, 2, -1 + \frac{\gamma}{2}\right)\,,$$

   donde $\gamma := \frac{\beta\, h}{\nu}$ es el conocido **número de Péclet**.

   (c) Implemente el esquema anterior. Luego considerando $\beta = 1$ y $N = 9$, calcule las soluciones de elementos finitos para $\nu \in \{1, 0.1, 0.01, 0.001\}$ (el problema se vuelve cada vez más convección dominante), y tabule los errores en $||\cdot||_{1,\Omega}$ y $||\cdot||_{0,\Omega}$ en cada caso. Verificar que las aproximaciones comienzan a oscilar y eventualmente se vuelven inestables. ¿A qué puede deberse esto?

   d) Implemente el algoritmo de refinamiento adaptativo, propuesto por Súli, partiendo con $h_0 = 1/10$, teniendo en cuenta el estimador de error a posteriori asociado a la norma L^2 del error y tolerancia $\text{T}\small{\text{OL}} = 10^{-4}$ (revisar apuntes de Süli). Para cada (ν, β) dados, tabule los errores en $||\cdot||_{1,\Omega}$ y $||\cdot||_{0,\Omega}$, así como los órdenes de convergencia experimentales correspondientes en una tabla (similar a la descrita en (2b)), partiendo con $h_0 = 1/10$. Incluya una última columna con los índices de eficiencia. Ponga de manifiesto sus observaciones y conclusiones. Incluya gráficas de algunas mallas adaptadas, y del error en L^2 y el estimador a posteriori en una misma gráfica.

Deadline: Sábado 30.03.2024.

RBP/rbp 15.03.2024