Universidad de Concepción
Facultad de Ciencias Físicas y Matemáticas
Departamento de Ingeniería Matemática

# A QUASI-PERIODIC HDG METHOD FOR THE HELMHOLTZ EQUATION IN HETEROGENEOUS DOMAINS

Autor

**Ignacio Sebastian Ruminot Aburto**

Tesis presentada a la Facultad de Ciencias Físicas y Matemáticas de la Universidad de Concepción para optar al título profesional de Ingeniero Civil Matemático

Profesores Guía: Dr. Manuel E. Solano Dr. Patrick Vega.

**Septiembre de 2024, Concepción, Chile.**

**A QUASI-PERIODIC HDG METHOD FOR THE HELMHOLTZ EQUATION IN HETEROGENEOUS DOMAINS** **COMISIÓN EVALUADORA** Dr. Manuel E. Solano [Profesor guía] CI$^2$MA y Departamento de Ingeniería Matemática, Universidad de Concepción, Chile. Dr. Patrick Vega [Profesor guía] Departamento de Matemática y Ciencia de la Computación, Universidad de Santiago de Chile, Chile. **FECHA DE DEFENSA: .**

# Agradecimientos

AQUÍ VAN LOS AGRADECIMIENTOS

# Índice general

# Índice de figuras

# Abstract

# Resumen

# Capítulo 1

# Introducción

# Capítulo 2

# Un método HDG aplicado a la ecuación de Helmholtz.

## 2.1. Preliminares y dominio computacional.

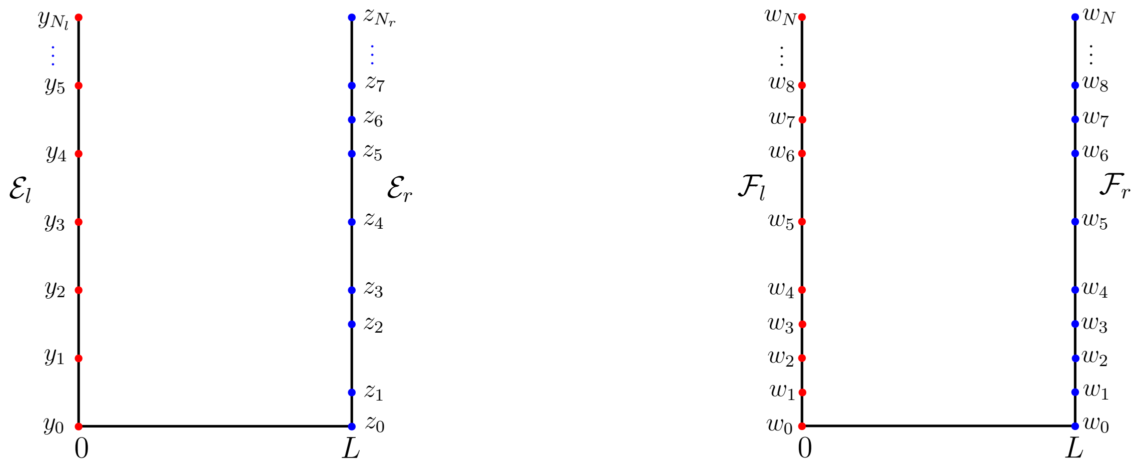
Para realizar el estudio del método HDG aplicado a la formulación (AQUI FALTA), es necesario definir la notación a utilizar. Primero se define

$$(\cdot,\cdot)_{\mathcal{T}_h} := \sum_{K\in\mathcal{T}_h} (\cdot,\cdot)_K \quad , \quad \langle\cdot,\cdot\rangle_{\partial\mathcal{T}_h} := \sum_{K\in\mathcal{T}_h} \langle\cdot,\cdot\rangle_{\partial K} \quad , \quad \langle\cdot,\cdot\rangle_{\partial\mathcal{T}_h\setminus\Gamma} := \sum_{e\in\mathcal{E}_h} \langle\cdot,\cdot\rangle_e .$$

Donde $(\cdot,\cdot)_K$, $\langle\cdot,\cdot\rangle_{\partial K}$ y $\langle\cdot,\cdot\rangle_e$ es el producto interior estandar de $L2$ sobre el elemento $K$, su frontera $\partial K$ y lado $e$, respectivamente. Sea $\{\mathcal{T}_h\}_{h>0}$ una familia de triangulaciones SHAPE-REGULAR de $\Omega$, formada por triángulos $K$ cuyos lados se denominan $e$, donde el diametro se denota por $h_K$ y $\boldsymbol{n}$ es el vector normal exterior. También, sean $\partial\mathcal{T}_h := \{\partial K : K \in \mathcal{T}_h\}$ y $\mathcal{E}_h := \mathcal{E}_o \cup \mathcal{E}_t \cup \mathcal{E}_b \cup \mathcal{E}_l \cup \mathcal{E}_r$, donde $\mathcal{E}_o$, $\mathcal{E}_t$, $\mathcal{E}_b$, $\mathcal{E}_l$, $\mathcal{E}_r$ denotan los lados interiores, de frontera superior, inferior, izquierda y derecha, respectivamente.

Como el dominio es quasi-periódico, la partición $\mathcal{E}_l$ induce una nueva partición sobre sobre la frontera derecha $\Gamma_r$, que denotamos por $\mathcal{F}_r$. Del mismo modo, $\mathcal{E}_r$ induce una nueva partición sobresla frontera izquierda $\Gamma_l$ que denotamos $\mathcal{F}_l$.

En otras palabras, sean $\mathcal{N}_l := \{(0,y_0),\ldots,(0,y_{N_l})\}$ el conjunto de nodos de la partición $\mathcal{E}_l$ con $y_0 < y_1 < \ldots < y_{N_l}$ y $\mathcal{N}_r := \{(L,z_0),\ldots,(L,z_{N_r})\}$ el conjunto de nodos de la partición $\mathcal{E}_r$ con $z_0 < z_1 < \ldots < z_{N_r}$. Una manera de poder hacer coincidir la cantidad de nodos en ambas nuevas particiones inducidas es considerar el conjunto $\{w_j\}_{j=0}^{N}$ formado por la unión de $\{y_j\}_{j=0}^{N_l}$ y $\{z_j\}_{j=0}^{N_r}$ excluyendo repeticiones tal que $w_0 < w_1 < \ldots < w_N$. Así, las particiones inducidas se definen de la forma $\mathcal{F}_l := \{(0,w_0),\ldots,(0,w_N)\}$ y $\mathcal{F}_r := \{(L,w_0),\ldots,(L,w_N)\}$ de las fronteras $\Gamma_l$ y $\Gamma_r$ respectivamente.




(a) En rojo los nodos de $\mathcal{E}_l$ y en azul los nodos de $\mathcal{E}_r$.

(b) En rojo los nodos de $\mathcal{F}_l$ y en azul los nodos de $\mathcal{F}_r$.

Figura 2.1: Representación de las particiones.

Dado un elemento $K \in \mathcal{T}_h$, un lado $e \in \mathcal{E}_h$ y un entero no negativo $k$, $\mathcal{P}_k(K)$ y $\mathcal{P}_k(e)$ denotan los espacios de polinomios de grado menor o igual a $k$ sobre $K$ y $e$ respectivamente. También se define $\boldsymbol{P}_k := [\mathcal{P}_k(K)]^d$. Luego, para $* \in \{l, r\}$, denotamos $P_{\mathcal{F}_*}^{k_\mathcal{F}}$ a la proyección ortogonal $L^2(\Gamma_*)$ sobre $\mathcal{P}_{k_\mathcal{F}}(\mathcal{F}_*)$.

## 2.2. El esquema HDG.

Introducimos los siguientes espacios discretos asociados a la triangulación $\mathcal{T}_h$

$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{V}_h &:= \left\{\boldsymbol{v} \in \boldsymbol{L}^2(\mathcal{T}_h) : \boldsymbol{v}|_K \in \boldsymbol{P}_k(K) \quad \forall K \in \mathcal{T}_h\right\}, \\
W_h &:= \left(w \in L^2(\mathcal{T}_h) : w|_K \in \mathcal{P}_k(K) \quad \forall K \in \mathcal{T}_h\right), \\
M_h &:= \left\{\mu \in L^2(\mathcal{E}_h) : \mu|_e \in \mathcal{P}_k(e) \quad \forall e \in \mathcal{E}_h\right\}, \\
M_h^{qp} &:= \left\{\mu \in M_h : P_{\mathcal{F}_l}^{k_\mathcal{F}}\left(\mu|_{\mathcal{E}_l}\right) = e^{i\alpha L} P_{\mathcal{F}_r}^{k_\mathcal{F}}\left(\mu|_{\mathcal{E}_r}\right)\right\}.
\end{aligned}
$$

## Capítulo 3

# Implementación Computacional.

hola