

# **Matematični izrazi in uporaba paketa beamer**

*Matematičnih nalog ni treba reševati!*

---

Univerza v Ljubljani, Fakulteta za matematiko in fiziko

# Kratek pregled

Paket beamer

Paketa amsmath in amsfonts

Matematika, 1. del

Stolpci in slike

Paket beamer in tabele

Matematika, 2. del

## **Paket beamer**

---

## Posebnosti prosojnic

Za prosojnice je značilna uporaba okolja frame, s katerim definiramo posamezno prosojnjico,

## Posebnosti prosojnic

Za prosojnice je značilna uporaba okolja frame, s katerim definiramo posamezno prosojnjico, postopno odkrivanje prosojnic,

## Posebnosti prosojnic

Za prosojnice je značilna uporaba okolja `frame`, s katerim definiramo posamezno prosojnico, postopno odkrivanje prosojnic, ter nekateri drugi ukazi, ki jih najdemo v paketu `beamer`.

# Posebnosti prosojnic

Za prosojnice je značilna uporaba okolja `frame`, s katerim definiramo posamezno prosojnico, postopno odkrivanje prosojnic, ter nekateri drugi ukazi, ki jih najdemo v paketu `beamer`.

## Primer

Verjetno ste že opazili, da za naslovno prosojnico niste uporabili ukaza `maketitle`, ampak ukaz `titlepage`.

## Opomba

Okolja za poudarjene bloke so `block`, `exampleblock` in `alertblock`.

## Pozor!

Začetek poudarjenega bloka (ukaz `begin`) vedno sprejme dva parametra: okolje in naslov bloka. Drugi parameter (za naslov) je lahko prazen.

# Tudi v predstavitevah lahko pišemo izreke in dokaze

## Izrek

*Praštevil je neskončno mnogo.*

## Dokaz.

Denimo, da je praštevil končno mnogo.

- Naj bo  $p$  največje praštevilo.

## Tudi v predstavitevah lahko pišemo izreke in dokaze

### Izrek

*Praštevil je neskončno mnogo.*

### Dokaz.

Denimo, da je praštevil končno mnogo.

- Naj bo  $p$  največje praštevilo.
- Naj bo  $q$  produkt števil  $1, 2, \dots, p$ .

## Tudi v predstavitevah lahko pišemo izreke in dokaze

### Izrek

*Praštevil je neskončno mnogo.*

### Dokaz.

Denimo, da je praštevil končno mnogo.

- Naj bo  $p$  največje praštevilo.
- Naj bo  $q$  produkt števil  $1, 2, \dots, p$ .
- Število  $q + 1$  ni deljivo z nobenim praštevilom, torej je  $q + 1$  praštevilo.

# Tudi v predstavitevah lahko pišemo izreke in dokaze

## Izrek

*Praštevil je neskončno mnogo.*

## Dokaz.

Denimo, da je praštevil končno mnogo.

- Naj bo  $p$  največje praštevilo.
- Naj bo  $q$  produkt števil  $1, 2, \dots, p$ .
- Število  $q + 1$  ni deljivo z nobenim praštevilom, torej je  $q + 1$  praštevilo.
- To je protislovje, saj je  $q + 1 > p$ . □

## Paketa amsmath **in** amsfonts

---

# Matrike

Izračunajte determinanto

$$\begin{vmatrix} -1 & 4 & 4 & -2 \\ 1 & 4 & 5 & -1 \\ 1 & 4 & -2 & 2 \\ 3 & 8 & 4 & 3 \end{vmatrix}$$

V pomoč naj vam bo Overleaf dokumentacija o matrikah:

► Matrices

## Okolje align in align\*

Dokaži *binomsko formulo*: za vsaki realni števili  $a$  in  $b$  in za vsako naravno število  $n$  velja

$$(a + b)^n = \dots$$

$$= \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^{n-k} b^k$$

## Okolje align in align\*

Dokaži *binomsko formulo*: za vsaki realni števili  $a$  in  $b$  in za vsako naravno število  $n$  velja

$$(a + b)^n = (a + b)(a + b) \dots (a + b)$$

$$= \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^{n-k} b^k$$

## Okolje align in align\*

Dokaži *binomsko formulo*: za vsaki realni števili  $a$  in  $b$  in za vsako naravno število  $n$  velja

$$\begin{aligned}(a + b)^n &= (a + b)(a + b) \dots (a + b) \\&= a^n + na^{n-1}b + \dots + \binom{n}{k} a^{n-k}b^k + \dots + nab^{n-1} + b^n \\&= \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^{n-k}b^k\end{aligned}$$

## Še ena uporaba okolja align\*

Nariši grafe funkcij:

$$y = x^2 - 3|x| + 2$$

$$y = 3 \sin(\pi + x) - 2$$

$$y = \log_2(x - 2) + 3$$

$$y = 2\sqrt{x^2 + 15} + 6$$

$$y = 2^{x-3} + 1$$

$$y = \cos(x - 3) + \sin^2(x + 1)$$

## Okolje multiline

Poisci vse rešitve enačbe

$$\begin{aligned}(1 + x + x^2) \cdot (1 + x + x^2 + x^3 + \dots + x^9 + x^{10}) &= \\ &= (1 + x + x^2 + x^3 + x^4 + x^5 + x^6)^2.\end{aligned}$$

Dana je funkcija

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{3x^2y - y^3}{x^2 + y^2}; & (x, y) \neq (0, 0), \\ a; & (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

- Določi  $a$ , tako da izračunaš limito  $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f(x)$ .
- Izračunaj parcialna odvoda  $f_x(x, y)$  in  $f_y(x, y)$ .

# **Matematika, 1. del**

## **Analiza, logika, množice**

---

# Logika in množice

1. Poišči preneksno obliko formule

$$\exists x : P(x) \wedge \forall x : Q(x) \Rightarrow \forall x : R(x).$$

2. Definiramo množici  $A = [2, 5]$  in  $B = \{0, 1, 2, 3, 4, \dots\}$ . V ravnino nariši:

2.1  $A \cap B \times \emptyset$

2.2  $(A \cup B)^c \times \mathbb{R}$

3. Dokaži:

- $(A \Rightarrow B) \sim (\neg B \Rightarrow \neg A)$
- $\neg(A \vee B) \sim \neg A \wedge \neg B$

1. Pokaži, da je funkcija  $x \mapsto \sqrt{x}$  enakomerno zvezna na  $[0, \infty)$ .
2. Katero krivuljo določa sledeč parametričen zapis?

$$x(t) = a \cos t, \quad y(t) = b \sin t, \quad t \in [0, 2\pi]$$

3. Pokaži, da ima  $f(x) = 3x + \sin(2x)$  inverzno funkcijo in izračunaj  $(f^{-1})'(3\pi)$ .
4. Izračunaj integral  $\int \frac{2 + \sqrt{x+1}}{(x+1)^2 - \sqrt{x+1}} dx$
5. Naj bo  $g$  zvezna funkcija. Ali posplošeni integral  $\int_0^1 \frac{g(x)}{x^2} dx$  konvergira ali divergira? Utemelji.

# Kompleksna števila

1. Naj bo  $z$  kompleksno število,  $z \neq 1$  in  $|z| = 1$ . Dokaži, da je število  $i \frac{z+1}{z-1}$  realno.
2. Poenostavi izraz:

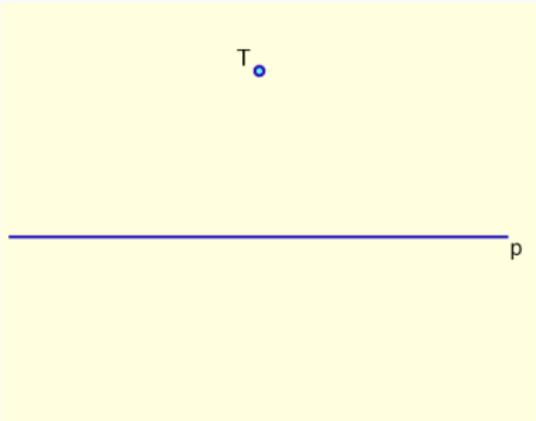
$$\frac{\frac{3+i}{2-2i} + \frac{7i}{1-i}}{1 + \frac{i-1}{4} - \frac{5}{2-3i}}$$

## Stolpci in slike

---

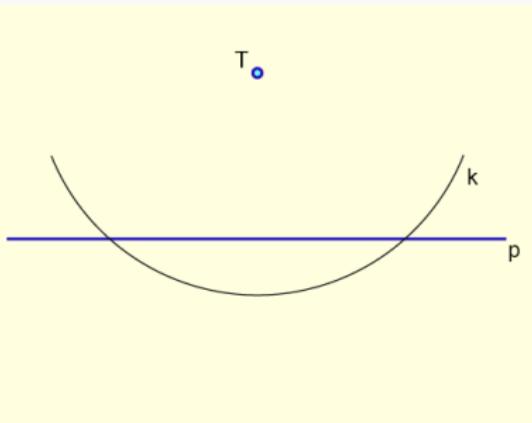
## Konstrukcija pravokotnice na premico $p$ skozi točko $T$

- Dani sta premica  $p$  in točka  $T$ .



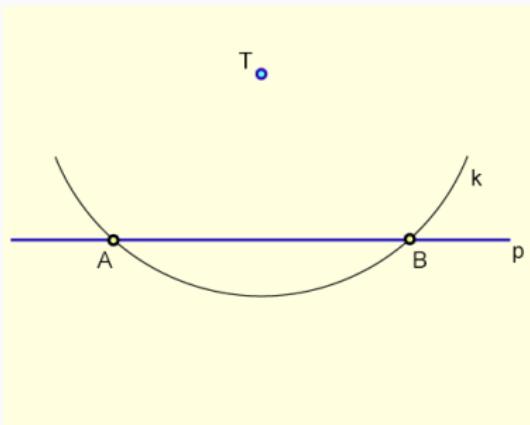
## Konstrukcija pravokotnice na premico $p$ skozi točko $T$

- Dani sta premica  $p$  in točka  $T$ .
- Nariši lok  $k$  središčem v  $T$ .



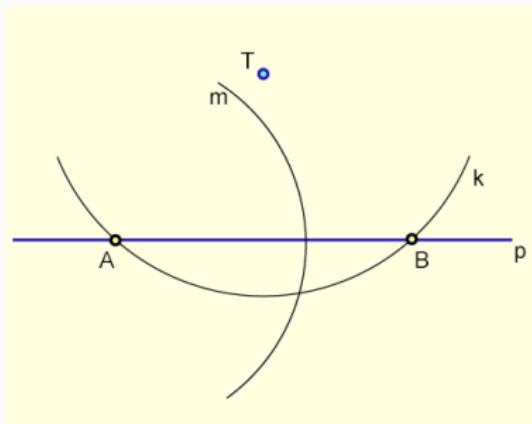
## Konstrukcija pravokotnice na premico $p$ skozi točko $T$

- Dani sta premica  $p$  in točka  $T$ .
- Nariši lok  $k$  središčem v  $T$ .
- Premico  $p$  seče v točkah  $A$  in  $B$ .



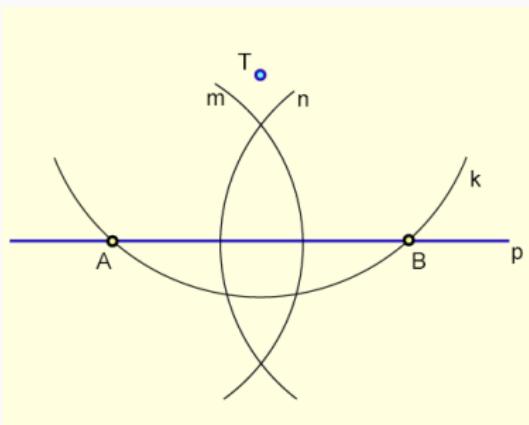
## Konstrukcija pravokotnice na premico $p$ skozi točko $T$

- Dani sta premica  $p$  in točka  $T$ .
- Nariši lok  $k$  s središčem v  $T$ .
- Premico  $p$  seče v točkah  $A$  in  $B$ .
- Nariši lok  $m$  s središčem v  $A$ .



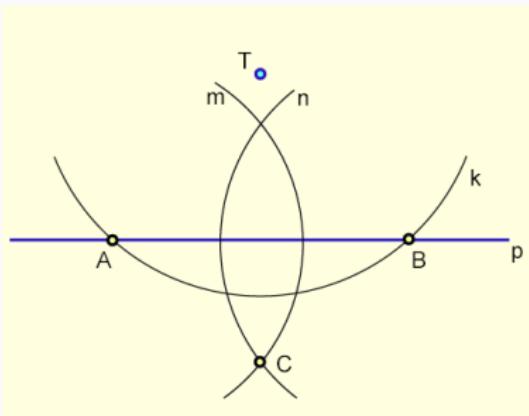
## Konstrukcija pravokotnice na premico $p$ skozi točko $T$

- Dani sta premica  $p$  in točka  $T$ .
- Nariši lok  $k$  s središčem v  $T$ .
- Premico  $p$  seče v točkah  $A$  in  $B$ .
- Nariši lok  $m$  s središčem v  $A$ .
- Nariši lok  $n$  s središčem v  $B$  in z enakim polmerom.



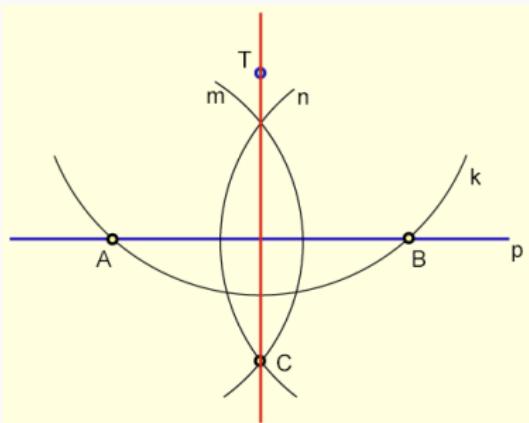
## Konstrukcija pravokotnice na premico $p$ skozi točko $T$

- Dani sta premica  $p$  in točka  $T$ .
- Nariši lok  $k$  s središčem v  $T$ .
- Premico  $p$  seče v točkah  $A$  in  $B$ .
- Nariši lok  $m$  s središčem v  $A$ .
- Nariši lok  $n$  s središčem v  $B$  in z enakim polmerom.
- Loka se sečeta v točki  $C$ .



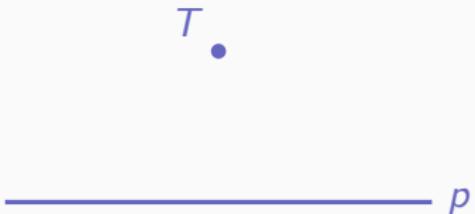
## Konstrukcija pravokotnice na premico $p$ skozi točko $T$

- Dani sta premica  $p$  in točka  $T$ .
- Nariši lok  $k$  s središčem v  $T$ .
- Premico  $p$  seče v točkah  $A$  in  $B$ .
- Nariši lok  $m$  s središčem v  $A$ .
- Nariši lok  $n$  s središčem v  $B$  in z enakim polmerom.
- Loka se sečeta v točki  $C$ .
- Premica skozi točki  $T$  in  $C$  je pravokotna na  $p$ .



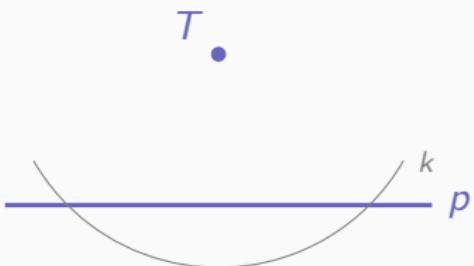
## Konstrukcija pravokotnice na premico $p$ skozi točko $T$

- Dani sta premica  $p$  in točka  $T$ .



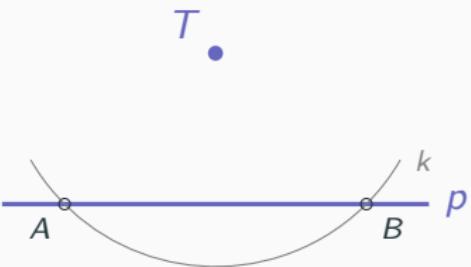
## Konstrukcija pravokotnice na premico $p$ skozi točko $T$

- Dani sta premica  $p$  in točka  $T$ .
- Nariši lok  $k$  središčem v  $T$ .



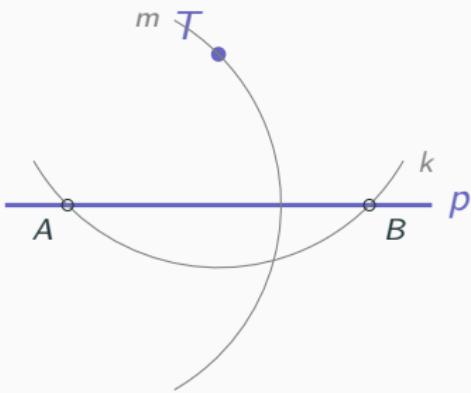
## Konstrukcija pravokotnice na premico $p$ skozi točko $T$

- Dani sta premica  $p$  in točka  $T$ .
- Nariši lok  $k$  središčem v  $T$ .
- Premico  $p$  seče v točkah  $A$  in  $B$ .



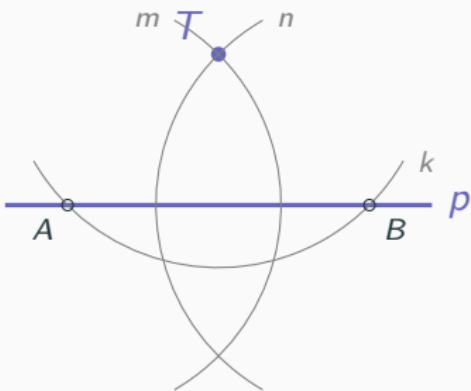
## Konstrukcija pravokotnice na premico $p$ skozi točko $T$

- Dani sta premica  $p$  in točka  $T$ .
- Nariši lok  $k$  s središčem v  $T$ .
- Premico  $p$  seče v točkah  $A$  in  $B$ .
- Nariši lok  $m$  s središčem v  $A$ .



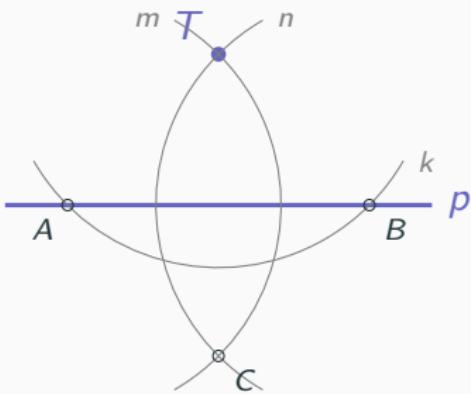
## Konstrukcija pravokotnice na premico $p$ skozi točko $T$

- Dani sta premica  $p$  in točka  $T$ .
- Nariši lok  $k$  s središčem v  $T$ .
- Premico  $p$  seče v točkah  $A$  in  $B$ .
- Nariši lok  $m$  s središčem v  $A$ .
- Nariši lok  $n$  s središčem v  $B$  in z enakim polmerom.



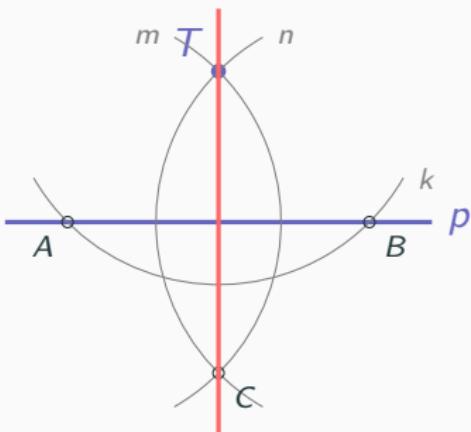
## Konstrukcija pravokotnice na premico $p$ skozi točko $T$

- Dani sta premica  $p$  in točka  $T$ .
- Nariši lok  $k$  s središčem v  $T$ .
- Premico  $p$  seče v točkah  $A$  in  $B$ .
- Nariši lok  $m$  s središčem v  $A$ .
- Nariši lok  $n$  s središčem v  $B$  in z enakim polmerom.
- Loka se sečeta v točki  $C$ .

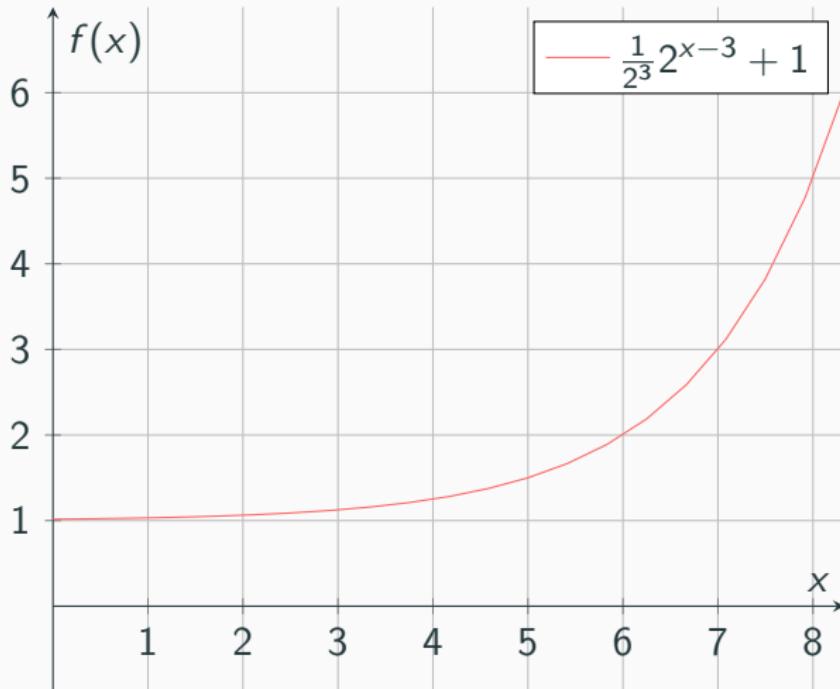


## Konstrukcija pravokotnice na premico $p$ skozi točko $T$

- Dani sta premica  $p$  in točka  $T$ .
- Nariši lok  $k$  s središčem v  $T$ .
- Premico  $p$  seče v točkah  $A$  in  $B$ .
- Nariši lok  $m$  s središčem v  $A$ .
- Nariši lok  $n$  s središčem v  $B$  in z enakim polmerom.
- Loka se sečeta v točki  $C$ .
- Premica skozi točki  $T$  in  $C$  je pravokotna na  $p$ .



# Graf funkcije s TikZ



## Paket beamer **in** tabelle

---

# Odkrivanje tabele po vrsticah

Včasih pride prav, da tabelo odkrivamo postopoma po vrsticah.

Oznaka	A	B	C	D
--------	---	---	---	---

## Odkrivanje tabele po vrsticah

Včasih pride prav, da tabelo odkrivamo postopoma po vrsticah.

Oznaka	A	B	C	D
X	1	2	3	4

# Odkrivanje tabele po vrsticah

Včasih pride prav, da tabelo odkrivamo postopoma po vrsticah.

Oznaka	A	B	C	D
X	1	2	3	4
Y	3	4	5	6

## Odkrivanje tabele po vrsticah

Včasih pride prav, da tabelo odkrivamo postopoma po vrsticah.

Oznaka	A	B	C	D
X	1	2	3	4
Y	3	4	5	6
Z	5	6	7	8

# Odkrivanje tabele po stolpcih

Tabelo lahko odkrivamo tudi po stolpcih, čeprav ni najlažje.

Oznaka	
X	
Y	
Z	

## Odkrivanje tabele po stolpcih

Tabelo lahko odkrivamo tudi po stolpcih, čeprav ni najlažje.

Oznaka	A
X	1
Y	3
Z	5

## Odkrivanje tabele po stolpcih

Tabelo lahko odkrivamo tudi po stolpcih, čeprav ni najlažje.

Oznaka	A	B
X	1	2
Y	3	4
Z	5	6

## Odkrivanje tabele po stolpcih

Tabelo lahko odkrivamo tudi po stolpcih, čeprav ni najlažje.

Oznaka	A	B	C
X	1	2	3
Y	3	4	5
Z	5	6	7

## Odkrivanje tabele po stolpcih

Tabelo lahko odkrivamo tudi po stolpcih, čeprav ni najlažje.

Oznaka	A	B	C	D
X	1	2	3	4
Y	3	4	5	6
Z	5	6	7	8

# **Matematika, 2. del**

## **Zaporedja, algebra, grupe**

---

# Zaporedja, vrste in limite

1. Naj bo  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  absolutno konvergentna vrsta in  $a_n \neq -1$ .  
Dokaži, da je tudi vrsta  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{1+a_n}$  absolutno konvergentna.
2. Izračunaj limito

$$\lim_{x \rightarrow \infty} (\sin \sqrt{x+1} - \sin \sqrt{x}).$$

3. Za dani zaporedji preveri, ali sta konvergentni.

$$a_n = \underbrace{\sqrt{2 + \sqrt{2 + \cdots + \sqrt{2}}}}_{n \text{ korenov}}$$

$$b_n = \underbrace{\sin(\sin(\dots(\sin 1)\dots))}_{n \text{ sinusov}}$$

1. Vektorja  $\vec{c} = \vec{a} + 2\vec{b}$  in  $\vec{d} = \vec{a} - \vec{b}$  sta pravokotna in imata dolžino 1. Določi kot med vektorjema  $\vec{a}$  in  $\vec{b}$ .
2. Izračunaj  $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 4 & 5 & 2 & 6 & 3 & 1 \end{pmatrix}^{-2025}$

## Velika determinanta

Izračunaj naslednjo determinanto  $2n \times 2n$ , ki ima na neoznačenih mestih ničle.

$$\begin{vmatrix} 1 & & & 1 \\ & 2 & & 2 \\ & & \ddots & \vdots \\ & & & n-1 & n-1 \\ 1 & 2 & \cdots & n-1 & n & n+1 & n+2 & \cdots & 2n \\ & & & & n+1 & n+1 \\ & & & & n+2 & & n+2 \\ & & & & & \vdots & \ddots \\ & & & & 2n & & 2n \end{vmatrix}$$

Naj bo

$$G = \{z \in \mathbb{C}; z = 2^k(\cos(m\pi\sqrt{2}) + i \sin(m\pi\sqrt{2})), k, m \in \mathbb{Z}\}$$

$$H = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; x, y \in \mathbb{Z}\}$$

1. Pokaži, da je  $G$  podgrupa v grupi  $(\mathbb{C} \setminus \{0\}, \cdot)$  neničelnih kompleksnih števil za običajno množenje.
2. Pokaži, da je  $H$  podgrupa v aditivni grupi  $(\mathbb{R}^2, +)$  ravninskih vektorjev za običajno seštevanje po komponentah.
3. Pokaži, da je preslikava  $f : H \rightarrow G$ , podana s pravilom

$$(x, y) \mapsto 2^x(\cos(y\pi\sqrt{2}) + i \sin(y\pi\sqrt{2}))$$

izomorfizem grup  $G$  in  $H$ .