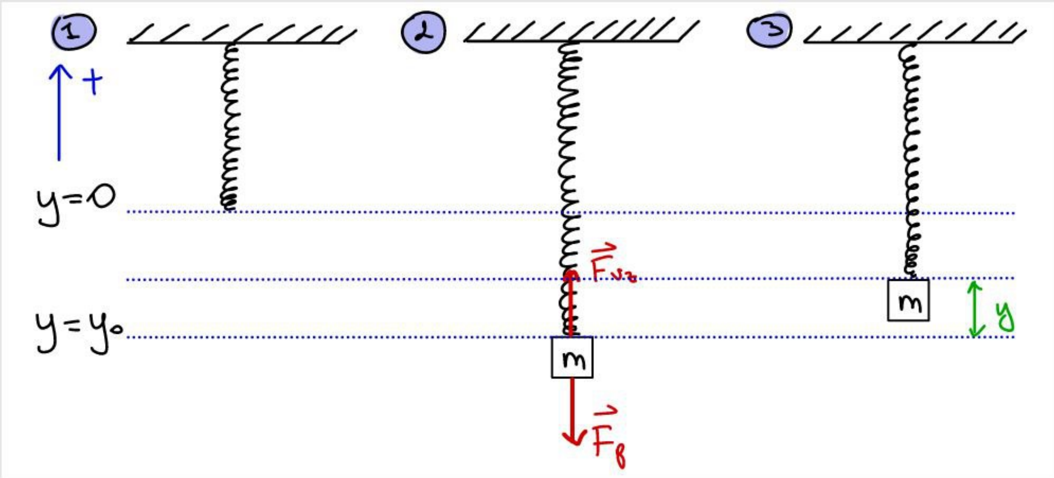
Fizika 2

26. februar 2025

1 Mehansko nihanje in valovanje

1.1 Enostavna nihala - enačba (dušenega) nihanja

Utež na vijačni vzmeti



1. Vzmet je neraztegnjena.
2. Obesimo vzmet z utežjo mase m. Izračunamo y_0 (ravnovesno lego):
   - Zapišemo sile, ki delujejo na utež:

     (1) Sila teže: $\vec{F}_{\text{g}} = \begin{bmatrix} 0 \\ -mg_0 \\ 0 \end{bmatrix}$, kjer je $g_0 = 10\, m/s^2$ težni pospešek;

     (2) Sila vzmeti: $\vec{F}_{\text{vz}} = \begin{bmatrix} 0 \\ -ky_0 \\ 0 \end{bmatrix}$, kjer je $k > 0$ koeficient vzmeti.
   - Zapišemo II. Newtonov zakon:
     $$\vec{a} = 0 \iff \vec{F} = m\vec{a} = 0 \implies \vec{F}_{\text{g}} + \vec{F}_{\text{vz}} = 0.$$
     Torej
     $$-mg_0 - ky_0 = 0 \implies mg_0 = -ky_0 \implies y_0 = -\frac{mg_0}{k} \qquad (*)$$
3. Zdaj odmikamo utež od ravnovesne lege. Izračunamo $y = y(t)$:
   - Utež ima hitrost v smeri y: $v_y = \dot{y} = \frac{dy}{dt} \neq 0$.
   - Zapišemo sile, ki delujejo na utež:

     (1) Sila teže: $\vec{F}_{\text{g}} = -mg_0\widehat{e}_y$, kjer je $\widehat{e}_y$ enotski vektor;

     (2) Sila vzmeti: $\vec{F}_{\text{vz}} = -ky\widehat{e}_y$;

     (3) Sila upora: $\vec{F}_{\text{u}} = -C\vec{v} = -C\dot{y}\widehat{e}_y$. Sila upora se pojavi, ker nismo v vakuumu.
   - Zapišemo II. Newtonov zakon:
     - $\vec{F} = \vec{F}_{\text{g}} + \vec{F}_{\text{vz}} + \vec{F}_{\text{u}}$;
     - $\vec{F} = m\vec{a} = m\ddot{y}\widehat{e}_y$.

     Torej
     $$-C\dot{y}\widehat{e}_y - ky\widehat{e}_y - mg_0\widehat{e}_y = m\ddot{y}\widehat{e}_y \implies \left(\ddot{y} + \frac{C}{m}\dot{y} + \frac{k}{m}y + g_0\right)\widehat{e}_y = 0 \implies \ddot{y} + \frac{C}{m}\dot{y} + \frac{k}{m}y + g_0 = 0.$$
   - Vpeljemo oznake $\beta := \frac{C}{m}$, $[\beta] = s^{-1}$; $\omega_0^2 := \frac{k}{m}$, $[\omega_0^2] = s^{-2}$. Dobimo enačbo:
     $$\ddot{y} + \beta\dot{y} + \omega_0^2 y + g_0 = 0.$$
   - Iz $(*)$ sledi, da $g_0 = -\frac{k}{m}y_0 = -\omega_0^2 y_0$. **Enačba dušenega nihanja** je:
     $$\ddot{y} + \beta\dot{y} + \omega_0^2(y - y_0) = 0.$$

Opomba. Enačba $\ddot{y} + \beta\dot{y} + \omega_0^2 y = \omega_0^2 y_0$ je
- Diferencialna enačba 2. reda za y.
- Linearna (členi y, $\dot{y}$, $\ddot{y}$ imajo 1. potenco).
- Koeficienti so konstantni (niso odvisni od časa).
- Pogojno nehomogena (lahko jo spravimo v homogeno enačbo).

Postopek reševanja enačbe dušenega nihanja

1. Definiramo $y' := y - y_0$. S tem enačba postane homogena.
2. Enačbo rešujemo z nastavkov $y' = Ae^{\lambda t}$, kjer sta $A,\ \lambda$ neki konstanti, $[\lambda] = s^{-1},\ [A] = m$.
   Dobimo karakteristični polinom $\lambda^2 + \beta\lambda + \omega_0^2 = 0$.
3. Karakteristični polinom ima diskriminanto $D = \beta^2 - 4\omega_0^2$. Definiramo $\omega^2 := \omega_0^2 - \left(\frac{\beta}{2}\right)^2$. Dobimo $D = -4\omega^2$.
   Ločimo možnosti.

(a) $D < 0$ ($\omega^2 > 0$). V tem primeru dobimo **podkritično dušenje**.
Splošna rešitev je TODO (izpeljava)

$$y' = \exp\left(-\frac{\beta}{2}t\right)\left(A_1\exp(i\omega t) + A_2\exp(-i\omega t)\right) = \exp\left(-\frac{\beta}{2}t\right)\left(B_1\cos(\omega t) + B_2\sin(\omega t)\right) = B\exp\left(-\frac{\beta}{2}t\right)\sin(\omega t + \delta),$$

kjer je δ **fazni zamik**.