Izračun skupnih negibnih točk odsekoma linearnih funkcij

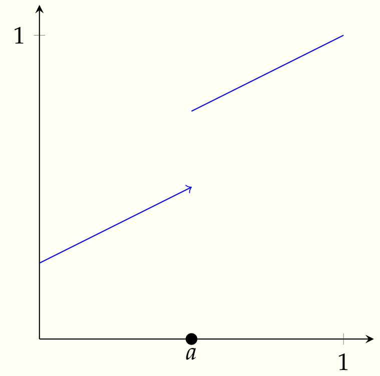
Ruslan Urazbakhtin

24. november 2025

Dober dan. Moja diplomska tema je »Izračun skupnih negibnih točk odsekoma linearnih funkcij.« Danes bi rad na kratko predstavil, kaj sploh so odsekoma linearne funkcije, katere med njimi imajo negibne točke in zakaj, ter s kakšnimi težavami se srečamo pri njihovem izračunu.

Odsekoma linearne funkcije

Preden se lotimo uradne definicije, si oglejmo preprost primer odsekoma linearne funkcije, ki preslika interval $[0, 1]$ vase. Vidimo, da ta funkcija ni zvezna, vendar je linearna (afina) na vsakem posameznem kosu domene. Da bi takšno funkcijo natančno opisali, je dovolj, da podamo njen predpis, kar najlažje naredimo po posameznih kosih.



$$f(x) = \begin{cases} q_0 + q_1 x; & 0 \le x,\ x < a; \\ q_0' + q_1' x; & a \le x,\ x \le 1. \end{cases}$$

Odsekoma linearne funkcije

Definicija

Linearni izraz v spremenljivkah $x_1, x_2, \ldots, x_n$ je izraz

$$q_0 + q_1 x_1 + q_2 x_2 + \ldots + q_n x_n,$$

kjer so $q_0, \ldots, q_n \in \mathbb{R}$.

Definicija

Pogojni linearni izraz je par $C \vdash e$, kjer je e linearni izraz in C končna množica neenačb med linearni izrazi, torej vsak element množice C je ene izmed oblik

$$e_1 \leq e_2, \quad e_1 < e_2.$$

Za vsak $\vec{r} \in \mathbb{R}^n$ z $C(\vec{r})$ označimo konjunkcijo neenačb, kjer nadomestimo spremenljivke v C z števili $r_1, \ldots, r_n$.

- Označi vse nove termine v primeru.
- Z pomočjo pogojnega linearnega izraza lahko opišemo en kos funkcije:
  - Domena kosa je $\{\vec{r} \in \mathbb{R}^n \mid C(\vec{r}) = \top\}$;
  - Linearni izraz e podaja linearno funkcijo nad domeno.

Odsekoma linearne funkcije

Definicija

Pravimo, da je funkcija $f : [0,1]^n \to [0,1]$ *odsekoma linearna*, če obstaja končna množica $\mathcal{F}$ pogojnih linearnih izrazov v spremenljivkah $x_1, \ldots, x_n$, da velja:

1. $\forall \vec{r} \in [0,1]^n \,.\, \exists (C \vdash e) \in \mathcal{F} \,.\, C(\vec{r}) = \top$ in
2. $\forall \vec{r} \in [0,1]^n \,.\, \forall (C \vdash e) \in \mathcal{F} \,.\, C(\vec{r}) = \top \implies f(\vec{r}) = e(\vec{r})$.

Pravimo, da množica $\mathcal{F}$ *predstavlja* funkcijo f.

1. točka pomeni celovitost, 2. točka pa enoličnost.

Vprašanje: Kakšni so zadostni pogoji za funkcijo f, da ima negibno točko?

Izrek Knaster-Tarskega

Če bi bila funkcija f zvezna, bi lahko uporabili Brouwerjev izrek o negibni točki. Vendar pa so odsekoma linearne funkcije v splošnem nezvezne, zato potrebujemo drug pristop. Na srečo obstaja ustrezen izrek v teoriji delno urejenih množic in mrež, ki nam bo v pomoč.

Izrek Knaster-Tarskega

Definicija

Naj bo S poljubna množica in $f : S \to S$ preslikava. *Negibna točka* preslikave f je element $x \in S$, da velja $f(x) = x$. Množico vseh negibnih točk preslikave f označimo z $\mathrm{Fix}(f)$.

Izrek (Knaster-Tarski)

Naj bo $(S, \leq)$ polna mreža in $f : S \to S$ monotona preslikava. Tedaj sta $\inf(\mathrm{Fix}(f))$ in $\sup(\mathrm{Fix}(f))$ elementi $\mathrm{Fix}(f)$.

- Se spomni vse definicije.
- Povej, da je $[0, 1]$ polna mreža in da je monotonost zadostni pogoj za preslikavo f, da ima negibno točko.
- Postavi problem v algoritmični obliki.