

## Analiza 2a

11. november 2024

# Kazalo

<b>1</b>	<b>Funkcije več spremenljivk</b>	<b>3</b>
1.1	Prostor $\mathbb{R}^n$	3
1.1.1	Prostor $\mathbb{R}^n$	3
1.1.2	Zaporedja v $\mathbb{R}^n$	3
1.2	Zveznost preslikav iz $\mathbb{R}^n$ v $\mathbb{R}^m$	4
1.2.1	Zveznost preslikav iz $\mathbb{R}^n$ v $\mathbb{R}$	4
1.2.2	Zveznost preslikav iz $\mathbb{R}^n$ v $\mathbb{R}^m$	5
1.3	Parcialni odvodi in diferenciabilitynost	6
1.3.1	Parcialni odvod	6
1.3.2	Diferenciabilitynost	6
1.3.3	Višji parcialni odvodi	7
1.3.4	Diferenciabilitynost preslikav	7
1.4	Izrek o implicitni preslikavi	9
1.4.1	Osnovna verzija izreka o implicitni preslikavi	9
1.4.2	Izrek o inverzni preslikavi	9
1.4.3	Izrek o implicitni preslikavi	11
1.5	Podmnogoterosti v $\mathbb{R}^n$	12

# 1 Funkcije več spremenljivk

## 1.1 Prostor $\mathbb{R}^n$

### 1.1.1 Prostor $\mathbb{R}^n$

**Definicija 1.1.1.** Prostor  $\mathbb{R}^n$  je kartezični produkt  $\underbrace{\mathbb{R} \times \cdots \times \mathbb{R}}_n$ . Na njem definiramo seštevanje in množenje s skalarjem po komponentah. S tema operacijama je  $(\mathbb{R}, +, \cdot)$  vektorski prostor nad  $\mathbb{R}$ . Posebej definiramo še skalarni produkt

$$x \cdot y = \sum_{i=1}^n x_i y_i,$$

ki nam da normo  $\|x\| = \sqrt{x \cdot x}$  in metriko  $d(x, y) = \|x - y\|$ .  $(\mathbb{R}^n, d)$  je tako metrični prostor.

**Definicija 1.1.2.** Naj bosta  $a, b \in \mathbb{R}^n$  vektorja, za katera je  $a_i \leq b_i$  za vse  $i \in \{1, \dots, n\}$ . Zaprt kvader, ki ga določata  $a$  in  $b$ , je množica

$$[a, b] = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \forall i \in \{1, \dots, n\} : a_i \leq x_i \leq b_i\}.$$

Podobno definiramo odprt kvader kot

$$(a, b) = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \forall i \in \{1, \dots, n\} : a_i < x_i < b_i\}.$$

**Opomba.** Odprte množice v normah  $\|x\|_\infty$  in  $\|x\|_2$  so iste.

**Izrek 1.1.3.** Množica  $K \subseteq \mathbb{R}^n$  je kompaktna natanko tedaj, ko je zaprta in omejena.

### 1.1.2 Zaporedja v $\mathbb{R}^n$

**Definicija 1.1.4.** Zaporedje v  $\mathbb{R}^n$  je preslikava  $a : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}^n$ . Namesto  $a(m)$  pišemo  $a_m$ , kjer  $a_m = (a_1^m, \dots, a_n^m)$ .

**Opomba.** Zaporedje v  $\mathbb{R}^n$  porodi  $n$  zaporedij v  $\mathbb{R}$ .

**Trditev 1.1.5.** Naj bo  $(a_m)_m$  zaporedje v  $\mathbb{R}^n$ ,  $a_m = (a_1^m, \dots, a_n^m)$ . Velja:

$$\text{Zaporedje } (a_m)_m \text{ konvergira} \Leftrightarrow \text{konvergira zaporedja } (a_1^m)_m, \dots, (a_n^m)_m.$$

V primeru konvergence velja:

$$\lim_{m \rightarrow \infty} a_m = \left( \lim_{m \rightarrow \infty} a_1^m, \dots, \lim_{m \rightarrow \infty} a_n^m \right).$$

*Dokaz.* Definicija limite. □

## 1.2 Zveznost preslikav iz $\mathbb{R}^n$ v $\mathbb{R}^m$

### 1.2.1 Zveznost preslikav iz $\mathbb{R}^n$ v $\mathbb{R}$

**Opomba.** Če je  $m = 1$ , potem preslikave rečemo *funkcija*.

**Definicija 1.2.1.** Naj bo  $f : D \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$  preslikava. Naj bo  $a \in D$ . Preslikava  $f$  je zvezna v točki  $a$ , če

$$\forall \epsilon > 0. \exists \delta > 0. \forall x \in D. \|x - a\| < \delta \Rightarrow \|f(x) - f(a)\| < \epsilon.$$

Preslikava  $f$  je zvezna na  $D$ , če je zvezna v vsaki točki  $a \in D$ .

**Trditev 1.2.2.** Naj bo  $f : D \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$  preslikava. Naj bo  $a \in D$ . Preslikava  $f$  je zvezna v točki  $a$  natanko tedaj, ko za vsako zaporedje  $(x_n)_n$ ,  $x_n \in D$ , ki konvergira proti  $a$ , zaporedje  $(f(x_n))_n$ ,  $f(x_n) \in \mathbb{R}^m$  konvergira proti  $f(a)$ .

**Definicija 1.2.3.** Naj bo  $f : D \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$  preslikava. Preslikava  $f$  je enakomerno zvezna na  $D$ , če

$$\forall \epsilon > 0. \exists \delta > 0. \forall x, x' \in D. \|x - x'\| < \delta \Rightarrow \|f(x) - f(x')\| < \epsilon.$$

**Trditev 1.2.4.** Zvezna preslikava na kompaktni množici je enakomerno zvezna.

**Trditev 1.2.5.** Naj bo  $f : K^{\text{komp}} \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$  zvezna preslikava. Potem je  $f_*(K)$  kompaktna.

**Definicija 1.2.6.** Preslikava  $f : D \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$  je *C-lipschitzova*, če

$$\exists C \in \mathbb{R}. \forall x, x' \in D. \|f(x) - f(x')\| \leq C \|x - x'\|.$$

**Trditev 1.2.7.** Za preslikavo  $f : D \rightarrow X'$  velja:

$$f \text{ je } C\text{-lipschitzova} \Rightarrow f \text{ je enakomerno zvezna} \Rightarrow f \text{ je zvezna}.$$

**Trditev 1.2.8.** Naj bosta  $f, g : D \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  zvezni funkciji v  $a \in D$ . Naj bo  $\lambda \in \mathbb{R}$ . Tedaj so v  $a$  zvezni tudi funkcije:

$$f + g, f - g, \lambda f, fg.$$

Če za vsak  $x \in D$ ,  $g(x) \neq 0$ , tedaj so v  $a$  zvezna tudi funkcija:

$$\frac{f}{g}.$$

**Trditev 1.2.9.** Kompozitum zveznih preslikav je zvezna preslikava.

*Dokaz.* Z zaporedji kot pri analizi 1. □

**Zgled.** Nekaj primerov zveznih preslikav.

- Preslikava  $\Pi_j(x_1, \dots, x_n) = x_j$  je zvezna na  $\mathbb{R}^n$  za vsak  $j = 1, \dots, n$ .
- Vse polinomi v  $n$ -spremenljivkah so zvezne funkcije na  $\mathbb{R}^n$ .
- Vse racionalne funkcije so zvezne povsod, razen tam, kjer je imenovalec enak 0.

**Definicija 1.2.10.** Preslikava  $f : D \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  je *funkcija n-spremenljivk*.

**Opomba.** Naj bo  $(M, d)$  metrični prostor in  $N \subset M$ . Naj bo  $f : M \rightarrow \mathbb{R}$  zvezna funkcija na  $M$ . Potem  $f|_N$  je tudi zvezna funkcija na  $N$ .

**Trditev 1.2.11.** Naj bosta  $D \subseteq \mathbb{R}^n$  in  $D_j = \Pi_j(D)$ . Naj bo  $a \in D$ ,  $a = (a_1, \dots, a_n)$  in  $f : D \rightarrow \mathbb{R}$  zvezna v  $a$ . Tedaj za vsak  $j = 1, \dots, n$  funkcija  $\varphi_j : D_j \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $\varphi_j(t) = f(a_1, \dots, a_{j-1}, t, a_{j+1}, \dots, a_n)$  zvezna v  $a_j$ .

*Dokaz.* Definicija zveznosti v točki. □

**Opomba.** Če je funkcija več spremenljivk zvezna v neki točki  $a \in \mathbb{R}^n$ , je zvezna tudi kot funkcija posameznih spremenljivk.

**Zgled.** Naj bo  $f(x, y) = \begin{cases} \frac{2xy}{x^2+y^2}; & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0; & (x, y) = (0, 0) \end{cases}$ . Ali je  $f$  zvezna kot funkcija vsake spremenljivke posebej? Ali je  $f$  zvezna na  $\mathbb{R}^2$ ?

**Zgled.** Naj bo  $f(x, y) = \begin{cases} \frac{2x^2y}{x^4+y^2}; & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0; & (x, y) = (0, 0) \end{cases}$ . Ali je  $f$  zvezna kot funkcija vsake spremenljivke posebej? Ali je zvezna na vsaki premici? Ali je  $f$  zvezna na  $\mathbb{R}^2$ ?

**Opomba.** Zgleda pokažeta, da obrat v prejšnji trditvi ne velja.

### 1.2.2 Zveznost preslikav iz $\mathbb{R}^n$ v $\mathbb{R}^m$

Naj bo  $D \subseteq \mathbb{R}^n$  in  $F : D \rightarrow \mathbb{R}^m$  preslikava. Naj bo  $x \in D$ , potem  $F(x) \in \mathbb{R}^m$ ,  $F(x) = y = (y_1, \dots, y_m)$ . Lahko pišemo  $F(x) = (f_1(x), \dots, f_m(x))$ . Torej  $F$  določa  $m$  funkcij  $n$ -spremenljivk.

**Trditev 1.2.12.** Naj bo  $a \in D \subseteq \mathbb{R}^n$ . Naj bo  $F = (f_1, \dots, f_m) : D \rightarrow \mathbb{R}^m$  preslikava. Velja:

Preslikava  $F$  je zvezna v  $a \Leftrightarrow f_1, \dots, f_m$  so zvezne v  $a$ .

*Dokaz.* Definicija zveznosti v točki. □

**Zgled** (Omejenost linearnih preslikav). Naj bo  $\mathcal{A} : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$  linearna preslikava, potem

$$\exists M \in \mathbb{R}. M \geq 0. \forall x \in \mathbb{R}^n. x \neq 0. \frac{\|\mathcal{A}x\|}{\|x\|} \leq M \text{ (oz. } \|\mathcal{A}x\| \leq M\|x\|).$$

**Trditev 1.2.13.** Linearne preslikave so zvezne

*Dokaz.* Vse koordinatne funkcije linearne (polinomi 1. stopnje). □

**Trditev 1.2.14.** Naj bo  $\mathcal{A} : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$  linearna preslikava. Velja:

Preslikava  $\mathcal{A}$  je zvezna  $\Leftrightarrow$  Preslikava  $\mathcal{A}$  je zvezna v točki 0  $\Leftrightarrow$  Preslikava  $\mathcal{A}$  je omejena.

*Dokaz.* Definicija zveznosti in omejenosti. □

**Definicija 1.2.15.** Naj bo  $\mathcal{A} : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$  linearna preslikava. Preslikavo  $\mathcal{A} : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ ,  $x \mapsto \mathcal{A}x + b$ ,  $b \in \mathbb{R}^m$  imenujemo *afina preslikava*.

### 1.3 Parcialni odvodi in diferenciacijabilnost

#### 1.3.1 Parcialni odvod

**Definicija 1.3.1.** Naj bo  $f : D \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  funkcija. Naj bo  $a = (a_1, \dots, a_n) \in D$  notranja točka. Funkcija  $f$  je *parcialno odvedljiva po spremenljivki  $x_j$  v točki  $a$* , če obstaja limita

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a_1, \dots, a_{j-1}, a_j + h, a_{j+1}, \dots, a_n) - f(a_1, \dots, a_n)}{h},$$

oz. če je funkcija

$$x_j \mapsto f(a_1, \dots, a_{j-1}, x_j, a_{j+1}, \dots, a_n)$$

odvedljiva v točki  $a_j$ .

Če je ta limita obstaja, je to *parcialni odvod* funkcije  $f$  po spremenljivki  $x_j$  v točki  $a$ . Oznaki:  $\frac{\partial f}{\partial x_j}(a)$ ,  $f_{x_j}(a)$ ,  $(D_j f)(a)$ .

**Opomba.** Vse elementarne funkcije so parcialno odvedljive po vseh spremenljivkah tam, kjer so definirane.

**Zgled.** Naj bo  $f(x, y, z) = e^{x+2y} + \cos(xz^2)$ . Izračunaj  $f_x(x, y, z)$ ,  $f_y(x, y, z)$ ,  $f_z(x, y, z)$ .

#### 1.3.2 Diferenciacijabilnost

**Definicija 1.3.2.** Naj bo  $f : D \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  funkcija. Naj bo  $a = (a_1, \dots, a_n) \in D$  notranja točka. Funkcija  $f$  je *diferenciacijabilna v točki  $a$* , če obstaja tak linearen funkcional  $\mathcal{L} : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ , da velja:

$$f(a + h) = f(a) + \mathcal{L}(h) + o(h),$$

kjer  $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\|o(h)\|}{\|h\|} = 0$ .

**Opomba.** Če je tak  $\mathcal{L}$  obstaja, je enolično določen.

*Dokaz.* Pokažemo, da iz  $\mathcal{L}(h) = (\mathcal{L}_1 - \mathcal{L}_2)(h) = (o_2 - o_1)(h) = o(h)$  sledi, da je  $L = 0$ . □

**Definicija 1.3.3.** Če je  $f$  diferenciacijabilna v  $a$  je  $\mathcal{L}$  natanko določen in ga imenujemo *diferencial* funkcije  $f$  v točki  $a$ . Oznaka:  $\mathcal{L} = df_a$ . Linearen funkcional  $\mathcal{L}$  imenujemo tudi *odvod* funkcije  $f$  v točki  $a$ . Oznaka:  $(Df)(a)$ .

**Opomba.** Recimo, da je funkcija  $f$  diferenciacijabilna v točki  $a$ . Preslikava  $h \mapsto f(a) + (df_a)(h)$  je najboljša afina aproksimacija funkcije  $h \rightarrow f(a + h)$ .

**Trditev 1.3.4.** Naj bo  $f : D \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  diferenciacijabilna v notranji točki  $a \in D$ . Tedaj je  $f$  v točki  $a$  parcialno odvedljiva po vseh spremenljivkah. Poleg tega je zvezna v točki  $a$ . Pri tem za  $h = (h_1, \dots, h_n)$  velja:

$$(df_a)(h) = \frac{\partial f}{\partial x_1}(a) \cdot h_1 + \dots + \frac{\partial f}{\partial x_n}(a) \cdot h_n = f_{x_1}(a) \cdot h_1 + \dots + f_{x_n}(a) \cdot h_n$$

**Opomba.** Naj bo  $\mathcal{L} : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  linearen funkcional,  $x \in \mathbb{R}^n$ , potem  $\mathcal{L}(x) = l_1 x_1 + \dots + l_n x_n = \begin{bmatrix} l_1 & \dots & l_n \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$ ,

kjer  $\begin{bmatrix} l_1 & \dots & l_n \end{bmatrix}$  matrika linearnega funkcionala glede na standardne baze.

*Dokaz.* Zveznost pokažemo z limito. Za parcialno odvedljivost pogledajmo kaj se dogaja za  $h = (h_1, 0, \dots, 0)$ . □

**Opomba.** Trditev pove, da je  $df_a = \begin{bmatrix} \frac{\partial f}{\partial x_1}(a) & \dots & \frac{\partial f}{\partial x_n}(a) \end{bmatrix} = (\frac{\partial f}{\partial x_1}(a), \dots, \frac{\partial f}{\partial x_n}(a))$ .

Zapis:  $(\vec{\nabla} f)(a) = (\text{grad } f)(a) = (\frac{\partial f}{\partial x_1}(a), \dots, \frac{\partial f}{\partial x_n}(a))$ .

Vektor  $(\text{grad } f)(a)$  imenujemo *gradient funkcije  $f$  v točki  $a$* . Operator  $\vec{\nabla} = (\frac{\partial}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial}{\partial x_n})$  je *operator Nabla*.

**Zgled.** Naj bo  $f(x, y) = \begin{cases} \frac{2xy}{x^2+y^2}; & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0; & (x, y) = (0, 0) \end{cases}$ . Ali je  $f$  diferenciacijabilna?

**Zgled.** Naj bo  $f(x, y) = \begin{cases} \frac{2x^2y}{x^2+y^2}; & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0; & (x, y) = (0, 0) \end{cases}$ . Ali je  $f$  zvezna? Ali je  $f$  parcialno odvedljiva? Ali je  $f$  diferenciacijabilna?

**Opomba.** Zgleda pokažeta, da obrat v prejšnji trditvi ne velja

**Izrek 1.3.5.** Naj bo  $f : D \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  funkcija in naj bo  $a \in D$  notranja točka. Denimo, da je  $f$  parcialno odvedljiva po vseh spremenljivkah v točki  $a$  in so parcialni odvodi zvezni v točki  $a$ . Tedaj je  $f$  diferenciacijabilna v točki  $a$ .

*Dokaz.* Za  $n = 2$ . Definicija diferenciacijabilnosti + 2-krat Lagrangeev izrek. □

### 1.3.3 Višji parcialni odvodi

Naj bo  $f : D^{\text{odp}} \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  funkcija. Denimo, da je  $f$  parcialno odvedljiva po vseh spremenljivkah na  $D$ :  $f_{x_1}, \dots, f_{x_n}$ . To so tudi funkcije  $n$ -spremenljivk in morda so tudi te parcialno odvedljive po vseh oz. nekaterih spremenljivkah.

**Trditev 1.3.6.** Naj bo funkcija  $f$  definirana v okolici  $a \in \mathbb{R}^n$ . Naj bosta  $i, j \in \{1, 2, \dots, n\}$ . Denimo, da na tej okolici obstajata  $\frac{\partial f}{\partial x_i}, \frac{\partial f}{\partial x_j}$  in tudi druga odvoda  $\frac{\partial}{\partial x_j}(\frac{\partial f}{\partial x_i}), \frac{\partial}{\partial x_i}(\frac{\partial f}{\partial x_j})$ . Če sta  $\frac{\partial}{\partial x_j}(\frac{\partial f}{\partial x_i}), \frac{\partial}{\partial x_i}(\frac{\partial f}{\partial x_j})$  zvezna v  $a$ , potem sta enaka v točki  $a$ :

$$\frac{\partial}{\partial x_j} \left( \frac{\partial f}{\partial x_i} \right) (a) = \frac{\partial}{\partial x_i} \left( \frac{\partial f}{\partial x_j} \right) (a).$$

*Dokaz.* Dovolj za  $n = 2$ .

Definiramo  $J = f(a+h, b+k) - f(a+h, b) - f(a, b+k) + f(a, b)$  in  $\varphi(x) = f(x, b+k) - f(x, b)$ ,  $\psi(y) = f(a+h, y) - f(a, y)$ . Zapišemo  $J$  s pomočjo funkcij  $\varphi, \psi$  ter uporabimo 2-krat Lagrangeev izrek in upoštevamo zveznost.  $\square$

**Opomba.** Pravimo, da parcialni odvodi komutirajo in pišemo  $\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}$ .

**Definicija 1.3.7.** Naj bo  $D^{\text{odp}} \subseteq \mathbb{R}^n$ . Množico vseh  $k$ -krat zvezno parcialno odvedljivih funkcij označimo z  $C^k(D)$ . Množica gladkih funkcij je  $C^\infty(D) = \bigcap_{k=1}^\infty C^k(D)$ . Množica zveznih funkcij na  $D$  je  $C(D)$ .

**Opomba.** Funkcija  $f \in C^k(D)$ , če obstajajo vse parcialni odvodi funkcije  $f$  do reda  $k$  in so vse ti parcialni odvodi zvezni na  $D$ .

**Opomba.** Množica  $C^k(D)$  z operacijama seštevanja, množenja s skalarji in komponiranja preslikav je algebra nad  $\mathbb{R}$ .

### 1.3.4 Diferenciabilnost preslikav

**Definicija 1.3.8.** Naj bo  $F : D \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$  preslikava,  $a \in D$  notranja točka. Preslikava  $F$  je *diferenciabilna* v točki  $a$ , če obstaja taka linearna preslikava  $\mathcal{L} : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ , da velja:

$$F(a+h) = F(a) + \mathcal{L}(h) + o(h),$$

kjer je  $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{|o(h)|_m}{|h|_n} = 0$ .

Preslikavo  $\mathcal{L}$  imenujemo *diferencial*  $F$  v točki  $a$ . Oznaka:  $dF_a$ . Imenujemo ga tudi *odvod*  $F$  v točki  $a$ . Oznaka:  $(DF)(a)$ .

**Opomba.** Kot pri funkcijah, če je tak  $\mathcal{L}$  obstaja, je enolično določen.

**Zgled.** Obravnavaj diferenciabilnost preslikav:

- $\mathcal{A} : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$  linearna,  $F(x) = \mathcal{A}x$ .
- $F : \mathbb{R}^{n \times n} \rightarrow \mathbb{R}^{n \times n}$ ,  $F(X) = X^2$ . Namig: S pomočjo neenakosti CSB pokažimo, da  $|H^2| \leq |H|^2$ .

**Izrek 1.3.9.** Naj bo  $a \in D$  notranja točka. Naj bo  $F = (f_1, \dots, f_m) : D \rightarrow \mathbb{R}^m$  preslikava. Velja:

Preslikava  $F$  je diferenciabilna v  $a \in D \Leftrightarrow$  so  $f_1, \dots, f_m$  diferenciabilne v  $a$ .

Tedaj

$$(DF)(a) = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(a) & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n}(a) \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial f_m}{\partial x_1}(a) & \dots & \frac{\partial f_m}{\partial x_n}(a) \end{bmatrix}$$

Matrika linearne preslikave  $(DF)(a)$ , ki je zapisana v standardnih bazah, se imenuje *Jacobijeva matrika*.

*Dokaz.* ( $\Rightarrow$ ) Zapišemo enakost  $F(a+h) = F(a) + dF_a(h) + o(h)$  po komponentah.

( $\Leftarrow$ ) Definicija diferenciabilnosti.  $\square$

**Posledica 1.3.9.1.** Naj bo  $a \in D$  notranja točka. Naj bo  $F = (f_1, \dots, f_m) : D \rightarrow \mathbb{R}^m$  preslikava. Velja:

Če so vse funkcije  $f_1, \dots, f_m$  v točki  $a$  parcialno odvedljive po vseh spremenljivkah in so ti vse odvodi zvezni v točki  $a$ , potem je  $F$  diferenciabilna v točki  $a$ .

**Zgled.** Naj bo  $F(x, y, z) = (x^2 + 2y + e^z, xy + z^2)$ ,  $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$ . Določi  $(DF)(1, 0, 1)$ .

**Definicija 1.3.10.** Preslikava  $F : D^{\text{odp}} \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$  je razreda  $C^k(D)$ , če so  $f_1, \dots, f_m \in C^k(D)$ .

**Izrek 1.3.11** (Verižno pravilo). Naj bo  $a \in D \subseteq \mathbb{R}^n$  notranja točka. Naj bo  $b \in \Omega \subseteq \mathbb{R}^m$  notranja točka. Naj bo  $F : D \rightarrow \Omega$  diferenciable v točki  $a$  in velja  $F(a) = b$ . Naj bo  $G : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^k$  diferenciable v točki  $b$ . Tedaj  $G \circ F$  diferenciable v točki  $a$  in velja:

$$D(G \circ F)(a) = (DG)(b) \cdot (DF)(a) = (DG)(F(a)) \cdot (DF)(a).$$

Označimo  $F(x_1, \dots, x_n) = (f_1(x_1, \dots, x_n), \dots, f_m(x_1, \dots, x_n))$  in  $G(y_1, \dots, y_m) = (g_1(y_1, \dots, y_m), \dots, g_k(y_1, \dots, y_m))$ . Potem

$$D(G \circ F)(a) = \begin{bmatrix} \frac{\partial g_1}{\partial y_1} & \dots & \frac{\partial g_1}{\partial y_m} \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial g_k}{\partial y_1} & \dots & \frac{\partial g_k}{\partial y_m} \end{bmatrix} (b) \cdot \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial f_m}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial f_m}{\partial x_n} \end{bmatrix} (a)$$

*Dokaz.* Definicija diferenciablenosti. □

**Posledica 1.3.11.1** ( $k = 1$ ,  $G = g$  funkcija). Naj bo  $\Phi(x_1, \dots, x_n) = g(f_1(x_1, \dots, x_n), \dots, f_m(x_1, \dots, x_n))$ . Potem

$$\frac{\partial \Phi}{\partial x_j}(a) = \frac{\partial g}{\partial y_1}(b) \cdot \frac{\partial f_1}{\partial x_j}(a) + \frac{\partial g}{\partial y_2}(b) \cdot \frac{\partial f_2}{\partial x_j}(a) + \dots + \frac{\partial g}{\partial y_m}(b) \cdot \frac{\partial f_m}{\partial x_j}(a)$$

**Zgled.** Naj bo  $F(x, y) = (x^2 + y, xy)$ ,  $g(u, v) = uv + v^2$ . Naj bo  $\Phi = g \circ F$ . Izračunaj  $(D\Phi)(x, y)$  na dva načina.



## 1.4 Izrek o implicitni preslikavi

### 1.4.1 Osnovna verzija izreka o implicitni preslikavi

Radi bi poiskali zadostni pogoji na funkcijo  $f(x, y)$ , da bi enačba  $f(x, y) = 0$  lokalno v okolici točki  $(a, b)$ , za katero velja  $f(a, b) = 0$ , predstavljala graf funkcije  $y = \varphi(x)$ .

**Izrek 1.4.1** (Osnovna verzija izreka o implicitni preslikavi). Naj bo  $D \subseteq \mathbb{R}^2$  odprta,  $(a, b) \in D$ ,  $f : D^{\text{odp}} \rightarrow \mathbb{R}$  funkcija razreda  $C^1(D)$  in naj velja:

1.  $f(a, b) = 0$ .
2.  $f_y(a, b) \neq 0$ .

Potem obstajata  $\delta > 0$  in  $\epsilon > 0$ , da velja:  $I \times J \subseteq D$ , kjer je  $I = (a - \delta, a + \delta)$ ,  $J = (b - \epsilon, b + \epsilon)$  in enolično določena funkcija  $\varphi : I \rightarrow J$  razreda  $C^1$ , za katero velja:

1.  $\varphi(a) = b$ .
2.  $\forall (x, y) \in I \times J. f(x, y) = 0 \Leftrightarrow y = \varphi(x)$  (rešitve enačbe  $f(x, y) = 0$  so natanko graf funkcije  $\varphi$ ).
3.  $\varphi'(x) = -\frac{f_x(x, \varphi(x))}{f_y(x, \varphi(x))}$  za vsak  $x \in I$ .

*Dokaz.* Funkcijo  $\varphi$  konstruiramo s pomočjo izreka o bisekciji z upoštevanjem stroge monotonosti funkciji  $y \mapsto f(x, y)$ . Zveznost ( $\bar{I} \times \bar{J}$  je kompaktna), odvedljivost in zveznost odvoda pokažemo z pomočjo izraza  $f(x + \Delta x, y + \Delta y) - f(x, y) = 0$  in Lagrangeeva izreka, kjer  $x + \Delta x \in (a - \delta, a + \delta)$ ,  $y = \varphi(x)$ ,  $y + \Delta y = \varphi(x + \Delta x)$ .  $\square$

**Posledica 1.4.1.1.** Če je funkcija  $f$  razreda  $C^k$ , potem je tudi funkcija  $\varphi$  razreda  $C^k$ .

**Zgled.** Kaj če pogoji niso izpolnjeni?

1.  $f(x, y) = (x - y)^2$ ,  $f(x, y) = 0$  v okolici točke  $(0, 0)$  (pogoji ni potrebni).
2.  $f(x, y) = y^3 - x$ ,  $f(x, y) = 0$  v okolici točke  $(0, 0)$  (odvedljivost  $\varphi$ ).
3.  $f(x, y) = y^2 - x^2 - x^4$ ,  $f(x, y) = 0$  v okolici točke  $(0, 0)$  (enoličnost  $\varphi$ ).
4.  $f(x, y) = y^2 + x^2 + x^4$ ,  $f(x, y) = 0$  v okolici točke  $(0, 0)$  (množica rešitev).

### 1.4.2 Izrek o inverzni preslikavi

Naj bo  $\Phi : D^{\text{odp}} \subseteq \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^m$  preslikava,  $\Phi \in C^1(D)$ . Kakšne so zadostni pogoji za (lokalno) obrnljivost preslikave  $\Phi$ ?

**Definicija 1.4.2.** Naj bosta  $D, \Omega \subseteq \mathbb{R}^m$  odprti. Preslikava  $\Phi : D \rightarrow \Omega$  je  $C^1$ -difeomorfizem, če

1.  $\Phi$  je bijekcija,
2.  $\Phi \in C^1(D)$ ,
3.  $\Phi^{-1} \in C^1(\Omega)$ .

Podobno definiramo  $C^k$ -difeomorfizem za  $k \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$ .

**Zgled.** Ali je  $f(x) = x^3$ ,  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  difeomorfizem?

**Trditev 1.4.3.** Naj bosta  $D, \Omega \subseteq \mathbb{R}^m$  odprti. Naj bo  $\Phi : D \rightarrow \Omega$   $C^1$ -difeomorfizem. Tedaj je  $\det(D\Phi) \neq 0$  na  $D$ .

*Dokaz.* Pogledamo  $\Phi^{-1} \circ \Phi = \text{id}_D$  (verižno pravilo).  $\square$

**Posledica 1.4.3.1.**  $(D\Phi^{-1})(y) = (D\Phi)^{-1}(x)$ , kjer  $y = \Phi(x)$ .

**Zgled.** Ali velja obrat trditve? Naj bo  $\Phi(x, y) = (e^x \cos y, e^x \sin y)$ ,  $\Phi : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ . Ali je  $\Phi$  difeomorfizem?

**Lema 1.4.4** (Lagrangeev izrek za funkcijo več spremenljivk). Naj bo  $D \subseteq \mathbb{R}^n$  odprta množica, točki  $a, b \in D$  taki, da za vsak  $t \in [0, 1]$  daljica  $(1 - t)a + tb \in D$ ,  $f : D \rightarrow \mathbb{R}$  funkcija razreda  $C^1$ . Tedaj obstaja taka točka  $\xi$  iz daljice med  $a$  in  $b$ , da je  $f(b) - f(a) = (Df)(\xi)(b - a)$ .

*Dokaz.* Lagrangeev izrek za funkcijo  $\varphi(t) = f((1 - t)a + tb)$ .  $\square$

**Lema 1.4.5.** Predpostavki kot prej. Naj obstaja tak  $M \in \mathbb{R}$ , da za vsak  $j = 1, \dots, n$  in vsak  $x \in D$  velja:  $\left| \frac{\partial f}{\partial x_j}(x) \right| \leq M$ . Tedaj  $|f(b) - f(a)| \leq M\sqrt{n}|b - a|$ .

*Dokaz.* Uporabimo prejšnjo trditev.  $\square$

**Lema 1.4.6.** Naj bo  $D \subseteq \mathbb{R}^n$ ,  $a, b \in D$  kot prej. Naj bo  $F : D \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ ,  $F = (f_1, \dots, f_m)$  preslikava razreda  $C^1$ . Naj obstaja tak  $M \in \mathbb{R}$ , da za vsak  $j = 1, \dots, n$ , vsak  $i = 1, \dots, m$  in vsak  $x \in D$  velja:  $\left| \frac{\partial f_i}{\partial x_j}(x) \right| \leq M$ . Tedaj  $\|F(b) - F(a)\| \leq M\sqrt{mn}\|b - a\|$ .

**Izrek 1.4.7** (Izrek o inverzni preslikavi). Naj bo  $D \subseteq \mathbb{R}^m$  odprta,  $F : D \rightarrow \mathbb{R}^m$  preslikava razreda  $C^1$ ,  $a \in D$  in  $b = F(a)$ . Če je  $\det(DF)(a) \neq 0$ , potem obstajata okolici  $a \in U \subseteq \mathbb{R}^m$  in  $b \in V \subseteq \mathbb{R}^m$ , da je  $F : U \rightarrow V$   $C^1$ -difeomorfizem.

**Definicija 1.4.8.** Če je  $F : D \rightarrow \Omega$  preslikava med odprtimi množicami v  $\mathbb{R}^m$  in je  $\det(DF)(x) \neq 0$  za vse  $x \in D$ , pravimo, da je  $F$  *lokalni difeomorfizem*.

*Dokaz.* Dovolj, da izrek dokažemo za primer, ko  $a = b = 0$ ,  $(DF)(0) = I$ .

TODO.

□

**Posledica 1.4.8.1.** Če je  $\Phi$  razreda  $C^k$  za  $k \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$ , je  $\Phi$  lokalni  $C^k$  difeomorfizem.

**Opomba.** Če je  $m = 1$ , potem  $f : I \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ . Naj bo  $a \in I$ ,  $f \in C^1(I)$ ,  $f'(a) \neq 0$ . Potem  $f'(x) \neq 0$  v okolici  $a$ , torej  $f$  ima lokalni  $C^1$  inverz.

**Zgled.** Naj bo  $F : \mathbb{R}^{n \times n} \rightarrow \mathbb{R}^{n \times n}$ ,  $F(X) = X^2$ . Ali je  $F$  v okolici točke  $I \in \mathbb{R}^{n \times n}$  lokalni difeomorfizem? Kaj to pomeni?

### 1.4.3 Izrek o implicitni preslikavi

Imamo  $n + m$  spremenljivk:  $(x, y)$ , kjer  $x = (x_1, \dots, x_n)$ ,  $y = (y_1, \dots, y_m)$  in  $m$  enačb. Pričakujemo, da bomo lahko  $m$  spremenljivk izrazili kot funkcijo ostalih, tj. najdemo preslikavo  $\Phi : D \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ , da velja  $y = \Phi(x)$ .

**Primer** (Linearen primer). Naj bosta  $\mathcal{A} : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ ,  $\mathcal{B} : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^m$  linearni,  $b \in \mathbb{R}^m$ . Naj rešujemo enačbo  $Ax + By = b$ . Kdaj lahko za vsak  $b \in \mathbb{R}^m$  iz te enačbe  $y$  razrišemo kot funkcijo  $x$ ?

Če je  $n = 0$ , potem rešujemo enačbo  $By = b$ . Kdaj lahko to enačbo enolično rešimo za vsak  $b \in \mathbb{R}^m$ ?

Naj bo  $F : D^{\text{odp}} \subseteq \mathbb{R}_x^n \times \mathbb{R}_y^m \rightarrow \mathbb{R}^m$ ,  $F = (f_1, \dots, f_m)$  preslikava razreda  $C^1$ .

Za vsak  $y \in \mathbb{R}^m$  naj bo  $\frac{\partial F}{\partial x}$  diferencial preslikave  $x \mapsto F(x, y)$ . Imenujemo ga *parcialni diferencial na prvo spremenljivko*.

Za vsak  $x \in \mathbb{R}^n$  naj bo  $\frac{\partial F}{\partial y}$  diferencial preslikave  $y \mapsto F(x, y)$ . Imenujemo ga *parcialni diferencial na drugo spremenljivko*.

$$\text{Velja: } \frac{\partial F}{\partial x}(x, y) = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(x, y) & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n}(x, y) \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial f_m}{\partial x_1}(x, y) & \dots & \frac{\partial f_m}{\partial x_n}(x, y) \end{bmatrix} \quad \text{in} \quad \frac{\partial F}{\partial y}(x, y) = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial y_1}(x, y) & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial y_m}(x, y) \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial f_m}{\partial y_1}(x, y) & \dots & \frac{\partial f_m}{\partial y_m}(x, y) \end{bmatrix}.$$

Diferencial preslikave  $F$  je potem enak  $(DF)(x, y) = \begin{bmatrix} \frac{\partial F}{\partial x}(x, y) & \frac{\partial F}{\partial y}(x, y) \end{bmatrix}$  (bločni zapis).

**Opomba.** Za vektor  $\begin{bmatrix} h \\ k \end{bmatrix}$ , kjer je  $h \in \mathbb{R}^n$ ,  $k \in \mathbb{R}^m$  velja:  $(DF)(x, y) \begin{bmatrix} h \\ k \end{bmatrix} = \frac{\partial F}{\partial x}(x, y)h + \frac{\partial F}{\partial y}(x, y)k \in \mathbb{R}^m$ .

**Izrek 1.4.9** (Izrek o implicitni preslikavi). Naj bo  $D \subseteq \mathbb{R}_x^n \times \mathbb{R}_y^m$  odprta množica,  $(a, b) \in D$ ,  $F : D \rightarrow \mathbb{R}^m$  preslikava razreda  $C^1$ . Naj velja:

1.  $F(a, b) = 0$ ,
2.  $\det(\frac{\partial F}{\partial y}(a, b)) \neq 0$ .

Tedaj obstaja okolica  $U \subseteq \mathbb{R}^n$  točke  $a$  in okolica  $V \subseteq \mathbb{R}^m$  točke  $b$  in taka enolično določena preslikava  $\varphi : U \rightarrow V$  razreda  $C^1$ , da velja:

1.  $\phi(a) = b$ .
2.  $\forall (x, y) \in U \times V. F(x, y) = 0 \Leftrightarrow y = \varphi(x)$  (rešitve te enačbe je isto kot graf  $\varphi$  znotraj  $U \times V$ ).
3.  $(D\varphi)(x) = - \left( \frac{\partial F}{\partial y}(x, y) \right)^{-1} \frac{\partial F}{\partial x}(x, y)$ ,  $y = \varphi(x)$  za vsak  $x \in U$ .

*Dokaz.* Uporabimo izrek o inverzni preslikavi.

Definiramo preslikavo  $\Phi : D \subseteq \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$ ,  $\Phi(x, y) = (x, F(x, y))$ . Kandidata za preslikavo  $\varphi$  najdemo v obliki inverza  $\Phi^{-1}$ , nato enostavno preverimo lastnosti.  $\square$

**Posledica 1.4.9.1.** Če je preslikava  $F$  razreda  $C^k$ , je tudi preslikava  $\varphi$  razreda  $C^k$ .

**Zgled.** Naj bo  $x, y \in \mathbb{R}$ ,  $F(x, y) = x^2 + y^2 - 1$ . S pomočjo izreka o implicitni preslikavi pokaži, da v okolici točke  $(0, 1)$  rešitve enačbe  $F(x, y) = 0$  graf neke preslikave  $\varphi$ . Določi tudi preslikavo  $\varphi$ .

**Zgled.** Naj bo  $F(x, y, z) = (y + xy + xz^2, z + zy + x^2)$ ,  $F = (f, g)$  in naj rešujemo enačbo  $F(x, y, z) = 0$ . Preveri zahteve izreka v okolici točke  $(0, 0, 0)$  in zapiši spremenljivki  $y$  in  $z$  kot funkciji spremenljivke  $x$ . Določi tudi prvi in drugi odvod funkcij  $f$  in  $g$  po spremenljivke  $x$ . Kaj je rezultat?

**Zgled.** Naj bo  $F : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$  in naj rešujemo enačbo  $F(x, y, z) = 0$ . Recimo, da  $F(a, b, c) = 0$ . Kakšna povezava med zadostnimi pogajami in rangom  $(DF)(a, b, c)$ ? Kaj če gledamo preslikavo  $F : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$ ?

**Definicija 1.4.10.** Naj bo  $D^{\text{odp}} \in \mathbb{R}^n$  in  $F : D \rightarrow \mathbb{R}^m$  preslikava razreda  $C^1$ ,  $a \in D$ .

1. Rang preslikave  $F$  v točki  $a$  je  $\text{rang}_a F := \text{rang}(DF)(a)$ .
2. Če je  $\text{rang}_a F$  konstanten na  $D$ , je  $F$  tega ranga na  $D$ , tj.  $\text{rang } F = \text{rang}_a F$ .
3. Preslikava  $F$  je *maksimalnega ranga v točki  $a$* , če je  $\text{rang}_a F = \min\{m, n\}$ .

**Opomba.** Ta pogoj je lokalno stabilen, tj. če je  $\text{rang}_a F = \min\{n, m\}$ , potem obstaja okolica od  $a$ , kjer rang  $F$  maksimalen.

**Posledica 1.4.10.1.** Naj bo  $F : D^{\text{odp}} \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$  preslikava razreda  $C^k$ ,  $k \in \mathbb{N}$  in naj velja  $m < n$ . Naj bo  $a \in D$ ,  $F(a) = 0$  in  $F$  maksimalnega ranga v točki  $a$ . Tedaj obstajajo indeksi  $i_1 < i_2 < \dots < i_{n-m}$ ,  $j_1 < j_2 < \dots < j_m$ ,  $i_k \neq j_l$  za vse  $k$  in  $l$  in take funkcije  $\varphi_1, \dots, \varphi_m$  razreda  $C^k$  definirane v okolici točke  $(a_{i_1}, \dots, a_{i_{n-m}})$ , da je v neki okolici  $U$  točke  $a$  enačba  $F(x) = 0$  ekvivalentna sistemu enačb:

$$\begin{aligned} x_{j_1} &= \varphi_1(x_{i_1}, \dots, x_{i_{n-m}}) \\ &\vdots \\ x_{j_m} &= \varphi_m(x_{i_1}, \dots, x_{i_{n-m}}) \end{aligned}$$

Ekvivalentno: Obstaja permutacija  $\sigma \in S_n$ , da v okolici točke  $a$  velja:

$$F(x) = 0 \Leftrightarrow (x_{\sigma(1)}, \dots, x_{\sigma(n)}) = (x_{\sigma(1)}, \dots, x_{\sigma(n-m)}, \varphi(x'_\sigma)), \text{ kjer } \varphi = (\varphi_1, \dots, \varphi_m).$$

*Dokaz.* **TODO.** □

**Primer.** Naj bo  $\mathcal{A} : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$  linearna,  $m \leq n$ ,  $\text{rang } \mathcal{A} = m$  ( $\mathcal{A}$  je surjektivna). Rešujemo enačno  $\mathcal{A}x = b$ . Prostor rešitev je  $n - m$  dimenzialen.

**Posledica 1.4.10.2.** Naj bo  $F : D^{\text{odp}} \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$  preslikava razreda  $C^1$ ,  $m \leq n$ ,  $a \in D$  in naj velja  $\text{rang}_a F = m$ . Tedaj obstaja okolica  $V$  točke  $F(a) = b$  in okolica  $U$  točke  $a$ , da je  $F : U \rightarrow V$  surjektivna.

*Dokaz.* **TODO.** □

## 1.5 Podmnogoterosti v $\mathbb{R}^n$

Podmnogoterost je posplošitev pojmov „krivulja“ in „ploskev“.

**Definicija 1.5.1.** Naj bo  $M \subseteq \mathbb{R}^{n+m}$ ,  $M \neq \emptyset$ . Množica  $M$  je *gladka (vsaj razreda  $C^1$ ) podmnogoterost dimenzije  $n$  in kodimenzijske  $m$  prostora  $\mathbb{R}^{n+m}$* , če za vsako točko  $a \in M$  obstaja okolica  $U$  v  $\mathbb{R}^{n+m}$  in take  $C^1$  funkcije  $F_1, \dots, F_m : U \rightarrow \mathbb{R}$ , da velja:

1.  $M \cap U = \{x \in U \mid F_1(x) = \dots = F_m(x) = 0\} = F^*(\{0\})$ .
2.  $\text{rang}(F_1, \dots, F_m) = m$  na  $U$ .

**Opomba.** Funkcije  $F_1, \dots, F_m$  se imenujejo *lokalne definicijske funkcije* za  $M \cap U$ .

**Opomba.** Če  $m = 0$ :  $M$  odprta množica.