

Analiza 2b

4. marec 2025

Kazalo

1	Hilbertovi prostori	3
1.1	Vektorski prostori s skalarnim produktom	3
1.2	Hilbertovi prostori	3
1.3	Prostor $L^2([a, b])$	4
1.4	Ortogonalnost	5

1 Hilbertovi prostori

1.1 Vektorski prostori s skalarnim produktom

Naj bo X vektorski prostor nad \mathbb{R} (ali nad \mathbb{C}).

Definicija. Skalarni produkt $\langle \cdot, \cdot \rangle$ je preslikava $\langle \cdot, \cdot \rangle : X \times X \rightarrow \mathbb{R}$ (oz. \mathbb{C}) za katero velja:

1. $\forall x \in X. \langle x, x \rangle \geq 0$;
2. $\forall x \in X. \langle x, x \rangle = 0 \Leftrightarrow x = 0$;
3. $\forall x, y \in X. \langle x, y \rangle = \overline{\langle y, x \rangle}$;
4. $\forall x, y, z \in X. \forall \lambda, \mu \in \mathbb{R}$ (oz. \mathbb{C}). $\langle \lambda x + \mu y, z \rangle = \lambda \langle x, z \rangle + \mu \langle y, z \rangle$.

Opomba. 1. – 2. je **pozitivna definitnost** skalarnega produkta, 3. je **poševna simetričnost** (**simetričnost** nad \mathbb{R}), 4. je linearnost v prvem faktorju.

Trditev (Cauchy-Schwartzova neenakost). Naj bo $\langle \cdot, \cdot \rangle$ skalarni produkt na X . Velja:

$$\forall x, y \in X. |\langle x, y \rangle| \leq \sqrt{\langle x, x \rangle} \cdot \sqrt{\langle y, y \rangle} = \|x\| \cdot \|y\|.$$

Dokaz. Nad \mathbb{R} : Definiramo $t \rightarrow \langle x + ty, x + ty \rangle = f(t) \geq 0$.

Nad \mathbb{C} : Naj bo $x, y \in X$. Obstaja $\alpha \in \mathbb{C}$, $|\alpha| = 1$, da $\langle x, y \rangle = \alpha \cdot |\langle x, y \rangle|$. □

Definicija. Norma na vektorskem prostoru X je preslikava $\|\cdot\| : X \rightarrow \mathbb{R}$ za katero velja:

1. $\forall x \in X. \|x\| \geq 0$;
2. $\forall x \in X. \|x\| = 0 \Leftrightarrow x = 0$;
3. $\forall \lambda \in \mathbb{R}$ (oz. \mathbb{C}). $\|\lambda x\| = |\lambda| \cdot \|x\|$;
4. Trikotniška neenakost: $\forall x, y \in X. \|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$.

Trditev. Naj bo $(X, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ vektorski prostor s skalarnim produktom. Potem je $(X, \|\cdot\|)$, kjer je $\forall x \in X. \|x\| = \sqrt{\langle x, x \rangle}$, vektorski prostor z normo.

Dokaz. Preverimo lastnosti. Za trikotniško neenakost uporabimo CS neenakost. □

Trditev. Naj bo $(X, \|\cdot\|)$ vektorski prostor s normo. Potem je (X, d) , kjer je $\forall x, y \in X. d(x, y) = \|x - y\|$, metrični prostor.

Dokaz. Preverimo lastnosti. □

1.2 Hilbertovi prostori

Definicija. Hilbertov prostor je vektorski prostor X s skalarnim produktom $\langle \cdot, \cdot \rangle$, ki je v metriki, porojeni iz skalarnega produkta, poln metrični prostor.

Opomba. $(X, \langle \cdot, \cdot \rangle) \rightsquigarrow (X, \|\cdot\|) \rightsquigarrow (X, d)$, kjer je $\forall x, y \in X. d(x, y) = \|x - y\|$.

Opomba. **Banachov prostor** je vektorski prostor X z normo $\|\cdot\|$, ki je v metriki, porojeni iz norme, poln metrični prostor.

Zgled.

1. Naj bo $X = \mathbb{R}^n$. Definiramo skalarni produkt. Naj bo $x, y \in \mathbb{R}^n$, $x = (x_1, \dots, x_n)$, $y = (y_1, \dots, y_n)$. **Standardni skalarni produkt** je

$$x \cdot y = \sum_{k=1}^n x_k y_k.$$

Ta skalarni produkt nam da normo

$$\|x\| = \sqrt{\sum_{k=1}^n x_k^2},$$

ki porodi metriko

$$d_2(x, y) = \sqrt{\sum_{k=1}^n (x_k - y_k)^2}.$$

Vemo, da je (\mathbb{R}^n, d_2) poln metrični prostor. Torej (\mathbb{R}^n, \cdot) Hilbertov prostor.

2. Na \mathbb{R}^n lahko definiramo tudi druge norme, npr.

- $\|x\|_\infty = \max\{|x_1|, \dots, |x_n|\}$;
- $\|x\|_1 = |x_1| + \dots + |x_n|$.

Te dve normi ne prideta iz skalarnega produkta, ker za njih ne velja paralelogramsko pravilo.

$(\mathbb{R}^n, \|\cdot\|_\infty)$ in $(\mathbb{R}^n, \|\cdot\|_1)$ sta Banachova prostora.

3. Naj bo $X = \mathbb{C}^n$. Definiramo skalarni produkt. Naj bo $z, w \in \mathbb{C}^n$, $z = (z_1, \dots, z_n)$, $w = (w_1, \dots, w_n)$. **Standardni skalarni produkt** je

$$z \cdot w = \sum_{k=1}^n z_k \overline{w_k}.$$

Ta skalarni produkt nam da normo

$$\|z\| = \sqrt{\sum_{k=1}^n |z_k|^2},$$

ki porodi metriko

$$d_2(z, w) = \sqrt{\sum_{k=1}^n |z_k - w_k|^2}.$$

Vemo, da je (\mathbb{C}^n, d_2) poln metrični prostor. Torej (\mathbb{C}^n, \cdot) Hilbertov prostor.

1.3 Prostor $L^2([a, b])$

Trditev. Naj bo $C([a, b])$ vektorski prostor nad \mathbb{R} . Potem je s predpisom

$$\forall f, g \in C([a, b]) \cdot \langle f, g \rangle = \int_a^b f(x)g(x) dx$$

definiran skalarni produkt na $C([a, b])$.

Dokaz. Preverimo lastnosti. □

Trditev. $(C([a, b]), \langle \cdot, \cdot \rangle)$ ni Hilbertov prostor.

Dokaz. Definiramo $f_n(x) = \begin{cases} 1; & \frac{1}{n} \leq x \leq 1 \\ nx; & -\frac{1}{n} < x < \frac{1}{n} \\ -1; & -1 \leq x \leq -\frac{1}{n} \end{cases}$. Pokažemo, da je $(f_n)_n$ Cauchyjevo zaporedje v $C([a, b])$, ki nima limite. □

Definicija. Naj bo (M, d) metrični prostor. Pravimo, da lahko **napolnimo** prostor M , če obstaja prostor $(\overline{M}, \overline{d})$, za kateri velja:

1. $(\overline{M}, \overline{d})$ je poln metrični prostor;
2. $M \subseteq \overline{M}$;
3. $\overline{d}|_{M \times M} = d$;
4. M je gost v \overline{M} , tj. $\text{Cl } M = \overline{M}$.

Prostoru \overline{M} rečemo **napolnitev** prostora M .

Opomba. Ideja: \overline{M} je prostor vseh limit Cauchyjevih zaporedij v M (+ kvocient).

Primer. Naj bo $M = (0, 1)$, $d_2(x, y) = |x - y|$. Potem napolnitev \overline{M} prostora M je $\overline{M} = [0, 1]$.

Opomba. Označili smo z $L^1(A) = \{f : A \rightarrow \mathbb{R} \mid \int_A |f| dx \text{ obstaja}\} / \sim$ prostor vseh absolutno integrabilnih funkcij, kjer je $\forall f, g \in L^1 \cdot f \sim g \Leftrightarrow f = g$ s.p.

Vpeljemo zdaj s kvadratom integrabilne funkcije:

$$L^2([a, b]) = \left\{ f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R} \mid \int_a^b f^2(x) dx \text{ obstaja} \right\} / \sim,$$

kjer je $\forall f, g \in L^2 \cdot f \sim g \Leftrightarrow f = g$ s.p.

V tem prostoru gotovo so

- Zvezne funkcije: $C([a, b]) \subseteq L^2([a, b])$;
- Odsekoma zvezni funkciji;
- $f(x) = \frac{1}{\sqrt[4]{x-a}}$ itd.

Cilj Želimo posplošiti prostor (\mathbb{R}, \cdot) .

Naj bo $f, g \in L^2$, potem $|f \cdot g| \leq \frac{|f|^2 + |g|^2}{2} \Rightarrow f \cdot g \in L^1([a, b])$. Torej lahko definiramo

$$\langle f, g \rangle = \int_a^b f(x)g(x) dx.$$

Trditev. $L^2([a, b])$ je vektorski prostor.

Dokaz. Preverimo lastnosti. □

Torej $L^2([a, b])$ je vektorski prostor nad \mathbb{R} s skalarnim produktom

$$\langle f, g \rangle = \int_a^b f(x)g(x) dx.$$

Očitno, da je $C([a, b]) \subseteq L^2([a, b])$.

Izrek. $L^2([a, b])$ je Hilbertov in $L^2([a, b])$ je napolnitev $C([a, b])$.

Opomba.

$$\forall f \in L^2([a, b]) . \exists f_n \in C([a, b]) . \lim_{n \rightarrow \infty} f_n = f \Leftrightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} \|f_n - f\| = 0 \Leftrightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{\int_a^b (f_n(x) - f(x))^2 dx} = 0$$

Opomba. Nad \mathbb{C} : $f = u + iv$, $u, v : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$. Potem

$$\int_a^b f(x) dx = \int_a^b u(x) dx + i \int_a^b v(x) dx$$

in

$$\langle f, g \rangle = \int_a^b f(x)\overline{g(x)} dx.$$

Zgled. Vzemimo $[0, 1]$. Definiramo $f_n(x) = \begin{cases} \sqrt{n}; & 0 < x \leq \frac{1}{n} \\ 0; & \text{sicer} \end{cases}$.

Velja: $\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = 0$ za $x \in [0, 1]$. Ali je $\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = 0$ v $L^2([0, 1])$?

Zgled. **TODO**

1.4 Ortogonalnost

Definicija. Naj bo $(X, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ vektorski prostor s skalarnim produktom, $A \subseteq X$, $A \neq \emptyset$. Naj bosta $x, y \in X$.

- x je **pravokoten** na y , če $\langle x, y \rangle = 0$, tj. $x \perp y \Leftrightarrow \langle x, y \rangle = 0$.
- Ortogonalni komplement** množice A je $A^\perp = \{x \in X \mid \forall a \in A . x \perp a\}$.

Trditev. A^\perp je vektorski podprostor v X .

Dokaz. Preverimo homogenost in linearnost. □

Opomba. $A \subseteq (A^\perp)^\perp$.

Trditev. Naj bo $(X, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ vektorski prostor s skalarnim produktom, $v \in X$. Definiramo $f : X \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \langle x, v \rangle$. Potem f je zvezna na X .

Dokaz. Pokažemo, da je f Lipshitzeva. □

Posledica. A^\perp je zaprt vektorski podprostor.

Dokaz. Pokažemo, da je limita vsakega zaporedja v A^\perp tudi leži v A^\perp . □

Opomba. $C([a, b]) \subseteq L^2([a, b])$ ni zaprt podprostor.

Opomba. Če je $(X, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ Hilbertov in $A \subseteq X$ zaprt podprostor, potem

$$(A^\perp)^\perp = A.$$

Trditev (Pitagorjev izrek). Naj bo $(X, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ vektorski prostor s skalarnim produktom. Naj bodo $x_1, \dots, x_n \in X$ taki, da $\forall i, j \in [n] . i \neq j \Rightarrow x_j \perp x_i$. Tedaj

$$\|x_1 + \dots + x_n\|^2 = \|x_1\|^2 + \dots + \|x_n\|^2.$$

Dokaz. Izračunamo normo po definiciji. □

Definicija. Naj bo $(X, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ vektorski prostor s skalarnim produktom in $Y \leq X$ podprostor X . Naj bo $x \in X$. **Pravokotna projekcija** vektorja x na podprostor Y (če obstaja) je tak vektor $P_Y(x) \in Y$, da je

$$x - P_Y(x) \in Y^\perp.$$

Trditev. Če je pravokotna projekcija x na Y obstaja, je enolično določena. Če obstaja, je to najboljša aproksimacija vektorja x z vektorji iz Y , tj.

$$\|x - P_Y(x)\| = \min_{w \in Y} \|x - w\|.$$

Dokaz. Enoličnost: Običajen način.

Aproksimacija: Pitagorjev izrek. □

Zgled. Naj bosta $Y = C([a, b])$ in $X = L^2([a, b])$. Če si izberimo $f \in X \setminus Y$, potem f nima najboljše aproksimacije z zveznimi funkcijami.