Zveznost

Zveznost v $(0,0)$ (če ni $(0,0)$ še premaknemo) pokažemo tako:

1. Naredimo oceno $|f(r\cos\phi, r\sin\phi) - f(0,0)| \leq g(r)$.
2. Če je $\lim_{r\to 0} g(r) = 0 \Rightarrow f$ je zvezna v $(0,0)$.

Diferenciabilnost

Naj bo $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ diferenciabilna. $Df(a)$ predstavljamo z **Jacobijevo matriko** $Jf(a)$ (v standardnih bazah):

$$Jf(a) = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ \frac{\partial f_m}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial f_m}{\partial x_n} \end{bmatrix} (a).$$

Oznaka: $Jf(a) =: \frac{\partial(f_1,\dots,f_m)}{\partial(x_1,\dots,x_n)}(a)$.

Vpeljava novih spremenljivk

Naj bo $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ funkcija. Recimo, da velja:

- $y = (y_1, \dots, y_n) = y(x) = y(x_1, \dots, x_n)$.
- $x = (x_1, \dots, x_n) = x(y) = x(y_1, \dots, y_n)$.

Potem $g(y) = g(y_1, \dots, y_n) = f(x(y))$. Nove spremenljivke vpeljamo takole:

$$\frac{\partial}{\partial x_k} = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial y_i}{\partial x_k} \cdot \frac{\partial}{\partial y_i}.$$

Recimo, da stare spremenljivke y, x so izražene preko novih u, v. Lahko računamo takole:

$$\begin{bmatrix} z_x \\ z_y \end{bmatrix} = \left(\left(\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} \right)^{-1} \right)^T \begin{bmatrix} z_u \\ z_v \end{bmatrix}.$$

Izrek o inverzni preslikavi in izrek o implicitni funkciji

Izračunamo matriko parcialnih odvodov po spremenljivkah, ki jih želimo izraziti.

Podmnogoterosti

M je C^r **podmnogoterost** dimenzije m, če za vsak $x \in M$ obstaja $U^{\text{odp}} \subseteq \mathbb{R}^n$ okolica točke x in $V^{\text{odp}} \subseteq \mathbb{R}^n$ okolica točke 0, da $F \in C^r(U, V)$ difeomorfizem: $F(M \cap U) = V \cap (\mathbb{R}^m \times \{0\}^{n-m})$.
Izskaže se: M je podmnogoterost, če v okolici vsakega $x \in M$, M sovpada z grafom neke C^r preslikave ($(n-m)$ koordinat izrazimo s preostalimi m koordinatami).
M podajamo kot $F(\underbrace{x_1, \dots, x_n}_{x}) = 0$. ($M = F^*(0)$ ... rešitve enačbe $F = 0$), kjer $F = (f_1, \dots, f_{n-m})$.

Recept: Če je rang $\frac{\partial F}{\partial x}(a) = n - m$ največji možen (maksimalen) za vsak $a \in M$, potem M je C^r podmnogoterost dimenzije m.
Tangentni prostor: Če je $M = F^*(0)$ podmnogoterost, $a \in M$, rang $JF(a)$ maksimalen, potem $T_a M = \ker JF(a)$.

Taylorjeva formula

Izrek 0.0.1. Recimo, da velja

1. Množica $D \subseteq \mathbb{R}^n$ odprta, $a \in D$.
2. $f : D^{\text{odp}} \to \mathbb{R}$ funkcija razreda $C^{k+1}(D)$.
3. Vektor $h \in \mathbb{R}^n$ tak, da daljica med a in $a + h$ leži v D.

Tedaj obstaja tak $\theta \in (0,1)$, da je

$$f(a+h) = f(a) + (D_h f)(a) + \frac{1}{2!}(D_h^2 f)(a) + \dots + \frac{1}{k!}(D_h^k f)(a) + R_k \ (*),$$

kjer je $D_h = h_1 D_1 + h_2 D_2 + \dots + h_n D_n$ **odvod v smeri** h in $R_k = \frac{1}{(k+1)!}(D_h^{k+1} f)(a + \theta h)$ **ostanek**.
Izraz (*) je **Taylorjeva formula** za funkcijo več spremenljivk.

Iskanje odvodov:
$f(x,y) = \ldots + \underbrace{C_{nm}(x-a)^n(y-b)^m}_{\text{red } r=n+m} + \ldots$ je Taylorjeva vrsta okoli (a,b). Potem

$$C_{nm} = \frac{1}{r!}\binom{r}{n} \cdot \frac{\partial^r}{\partial x^n \partial y^m}(a,b) \Rightarrow \frac{\partial^r}{\partial x^n \partial y^m}(a,b) = C_{nm} n! m!.$$

Za razvoj okoli točke $(a,b) \neq (0,0)$ vpeljamo $u = x-a,\ v = y-b$.