Diskretna matematika 1

8. januar 2025

1 Kombinatorika

1.1 Osnovna načela kombinatorike

Trditev (Načelo produkta)**.** Če sta A, B končni množici, potem je
$$|A \times B| = |A| \cdot |B|.$$
Trditev (Posplošeno načelo produkta)**.** Če so $A_1, \dots, A_k$ končne, potem je
$$|\Pi_{i=1}^{k} A_i| = \Pi_{i=1}^{k} |A_i|.$$
Trditev (Načelo vsote)**.** Če sta A in B končni in disjunktni množici, potem je
$$|A \cup B| = |A| + |B|.$$
Trditev (Posplošeno načelo vsote)**.** Če so $A_1, \dots, A_k$ končne, paroma disjunktne množice, potem je
$$\bigcup_{i=1}^{k} A_i = \sum_{i=1}^{k} |A_i|.$$
Trditev (Načelo enakosti)**.** Če obstaja bijekcija $A \to B$, potem je
$$|A| = |B|.$$
Označimo z $[k] = \{1, 2, \dots, k\}$.
Primer. Naj bo A končna množica, $|A| = n$, $A = \{a_1, a_2, \dots, a_n\}$. Naj bo 2^A potenčna množica. Določi moč 2^A.

Trditev (Načelo dvojnega preštevanja)**.** Z njim pokažemo, da sta dva izraza/formuli enaka, če z obema na različna načina preštejemo elemente iste množice.

Primer (Eulorjeva funkcija ϕ). Za $n \in \mathbb{N}$ definiramo $\phi(n) =$ število števil iz $[n]$, ki so tuji z n. Določi $\sum_{d|n} \phi(d)$.

Trditev (Dirichletovo načelo)**.** Če sta $n, m \in \mathbb{N}$ in je $n > m$, potem ne obstaja injektivna preslikava $[n] \to [m]$.

Opomba (Kombinatorična interpretacija). Če n predmetov razporedimo v m predalov in je $n > m$, potem sta vsaj v enem predalu vsaj dva predmeta.
Primer. Naj bo $X \subset [100]$, $|X| = 10$. Pokaži, da X vsebuje dve disjunktni podmnožici z isto vsoto.

1.2 Število preslikav

Definicija. Množica $B^A = \{f : A \to B\}$ je *množica vseh preslikav iz A v B.*

Definicija. Definiramo:
- $n^{\underline{k}} = \underbrace{n(n-1)\dots(n-k+1)}_{k \text{ faktorjev}}$ je *padajoča potenca.*
- $n^{\overline{k}} = n(n+1)\dots(n+k-1)$ je *naraščajoča potenca.*
- $n! =^{\underline{n}}$ je n *fakulteta.*
- Množica z n elementi se imenuje *n-množica.*

Trditev. Naj bosta N in K končni množici z $|N| = n$, $|K| = k$. Tedaj velja:
1. $|K^N| = k^n$.
2. Število injektivnih preslikav iz N v K je $k^{\underline{n}}$.
3. Število bijekcij iz N v K je $n!$, če $n = k$ in je 0 sicer.

Dokaz. Za 1. in 2. točko uporabimo načelo enakosti. V 3. točki upoštevamo, kadar je preslikava iz končne množice v končno množico bijektivna. □

1.3 Binomski koeficienti in binomski izrek

Definicija. Naj bo $x \in \mathbb{C}$. Naj bo $k \in \mathbb{N}_0 = \{1, 2, \ldots\}$. Definiramo $\binom{x}{k} = \frac{x^{\underline{k}}}{k!} = \frac{x(x-1)\ldots(x-k+1)}{k!}$. Števila $\binom{x}{k}$ so *binomski koeficienti.* Če je $k \notin \mathbb{N}_0$ definiramo $\binom{x}{k} = 0$.

Trditev. Če je $n \in \mathbb{N}_0$ in $k \leq n,\ k \in \mathbb{N}_0$, potem je

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}.$$

Števila $\binom{n}{k}$ so *binomska števila.*

Dokaz. Definicija binomskega koeficienta. □

Opomba. Tudi $\binom{0}{0} = 1$. Razlaga: $0! = 1$ je število bijektivnih preslikav iz $\emptyset$ v $\emptyset$.

Opomba. Če je $0 \leq k \leq n$, potem $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$.

Definicija. Naj bo N množica. Definiramo $\binom{N}{k} = \{A \in P(N) \mid |A| = k\}$.

Trditev. Če je N n-množica in je $0 \leq k \leq n$, potem je

$$\left|\binom{N}{k}\right| = \binom{n}{k}.$$

Dokaz. Definiramo $X = \{(n_1, n_2, \ldots, n_k);\ n_i \in \mathbb{N} \text{ paroma različni}\}$. Označimo $X_{n,k} = \left|\binom{N}{k}\right|$. Preštejemo elementi množici X na 2 načina. □

Trditev. Za $n \in \mathbb{N}$ in $1 \leq k \leq n$ velja:

$$\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k}.$$

Dokaz. Naj bo N n-množica. Naj bo $x \in N$ poljuben fiksen element.
Definiramo $\mathcal{A} = \left\{A \in \binom{N}{k};\ x \in A\right\}$ in $\mathcal{B} = \left\{B \in \binom{N}{k};\ x \notin B\right\}$. Potem $\binom{N}{k} = \mathcal{A} \cup \mathcal{B}$. Uporabimo prejšnjo trditev in načelo vsote. □

Definicija. *Pascalov trikotnik* je trikotnik oblike

$$\begin{array}{ccccccccccc}
 & & & & & 1 & & & & & \\
 & & & & 1 & & 1 & & & & \\
 & & & 1 & & 2 & & 1 & & & \\
 & & 1 & & 3 & & 3 & & 1 & & \\
 & 1 & & 4 & & 6 & & 4 & & 1 & \\
1 & & 5 & & 10 & & 10 & & 5 & & 1
\end{array}$$

Opomba. S pomočjo Paskalovega trikotnika se lahko spomnimo rekurzivno formulo za $\binom{n}{k}$ (n je številka vrstice, k je številka diagonale, ki jo gledamo z leve proti desni). Šteteti vrstice in diagonale začnemo z 0.

Izrek (Binomski izrek)**.** Za vsak $n \in \mathbb{N}_0$ velja:

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k}.$$

Dokaz. Izberimo k-krat a izmed n oklepajev. □

Opomba. V izreku sta a in b elementi poljubnega komutativnega kolobarja.

1.4 Izbori

Naj bo N n-mnižica. Opazujemo izbori k-elementov.

1. Izbor je urejen (važno v kakšnem vrstnem redu izberimo elementi):
   1.1 Elementi si lahko ponavljajo: n^k.
   1.2 Elementi se ne smejo ponavljati: $n^{\underline{k}}$.
2. Izbor je neurejen:
   2.1 Elementi si lahko ponavljajo [trditev]: $\binom{n+k-1}{k}$.
   2.2 Elementi se ne smejo ponavljati: $\binom{n}{k}$.

Trditev. Število neurejenih izborov s ponavljanjem dolžine k iz n-množice N je

$$\binom{n+k-1}{k}.$$

Dokaz. Naj bo $N = \{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$.
Neurejenemu izboru $\underbrace{x_1 \ldots x_1}_{k_1}\underbrace{x_2 \ldots x_2}_{k_2}\ldots\underbrace{x_n \ldots x_n}_{k_n}$ priredimo niz $\underbrace{1\ldots1}_{k_1}0\underbrace{1\ldots1}_{k_2}0\ldots0\underbrace{1\ldots1}_{k_n}$. □

1.5 Permutacije in permutacije s ponavljanjem

Definicija. Naj bo A n-množica. *Permutacija množice* A je bijektivna preslikava $\pi : A \to A$.
Množico vseh permutacij velikosti n (permutacij na $[n]$) označimo z S_n. Množico vseh permutacij množice A označimo z S_A.

Trditev. $|S_n| = n!$.

Dokaz. Z indukcijo pokažemo, da je $|S_n| = n|S_{n-1}|$ in $|S_1| = 1$. □

Trditev. Vsako permutacijo lahko zapišemo kot produkt disjunknih ciklov.

Definicija. Naj bo $\pi \in S_n$. Par je *inverzija*, če velja: $i < j$ in $\pi(i) > \pi(j)$.

Definicija. Permutacija $\pi \in S_n$ je *soda* (oz. *liha*), če ima sodo mnogo inverzij (oz. liho mnogo inverzij).

1.5.1 Multimnožice

Definicija. *Multimnožica z elementi v množici* S je preslikava $\mu : S \to \mathbb{N}_0$. Pri tem številu $\mu(a), a \in S$, rečemo *kratnost elementa* a *v multimnožici* μ, vsoti $\sum_{a\in S} \mu(a)$ pa *moč multimnožice* μ. Multimnožica je *končna*, če je njena moč končna.

Opomba. Multimnožico M formalno podamo z urejenim parom (S, μ). Namesto da elemente zapišemo večkrat, lahko kratnost označimo tudi s formalno potenco: $M = \{a, a, b, c, c, c\} = \{a^2, b, c^3\}$.
Multimnožica je isto kot neurejen izbor s ponavljanjem. Tojer obstaja $\binom{n+k-1}{k}$ k-elementnih multimnožic v množici z n elementi.

1.5.2 Permutacije multimnožic

Permutacija multimnožice $M = (S, \mu)$ moči n je zaporedje $(x_1, \ldots, x_n)$, kjer je $x_i \in S$ in se vsak $a \in S$ v zaporedju pojavi $\mu(a)$-krat.

Trditev. Število permutacij multimnožice $M = \{1^{\alpha_1}, 2^{\alpha_2}, \ldots, k^{\alpha_k}\}$ moči $n = \alpha_1 + \ldots + \alpha_k$ je

$$\frac{n!}{\alpha_1!\alpha_2!\ldots\alpha_k!}.$$

Dokaz. Najprej izberimo položaje elementa 1, nato izberimo položaje elementa 2 itd. □

Definicija. Številu $\frac{n!}{\alpha_1!\alpha_2!\ldots\alpha_k!}$ rečemo *multinomski koeficient* in ga označimo z $\binom{n}{\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_k}$.

Opomba. Multinomski koeficient je posplošitev binomskega koeficienta.

Trditev (Multinomski izrek)**.** Velja

$$(x_1 + \ldots + x_k)^n = \sum \binom{n}{\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k} x_1^{\alpha_1} \ldots x_k^{\alpha_k},$$

kjer vsota teče po vseh izbirah naravnih števil $\alpha_1, \ldots, \alpha_k$, katerih vsota je n.

Dokaz. Število permutacij multimnožice moči n, kjer je S množica indeksov. □

1.6 Kompozicije naravnega števila

Definicija. *Kompožicija naravnega števila* n je zaporedje pozitivnih naravnih števil $\lambda = (\lambda_1, \ldots, \lambda_l)$, za katero velja $\lambda_1 + \ldots + \lambda_l = n$. *Dolžina* kompozicije λ, $l(\lambda)$ je število elemetnov zaporedja, številu n pa rečemo *velikost kompozicije*. Števila $\lambda_1, \ldots, \lambda_l$ imenujemo *členi kompozicije*.

Trditev. Naj bo $n \geq 1$.
1. Število kompožicij števila n je enako 2^{n-1}.
2. Število kompožicij dolžine k števila n je enako $\binom{n-1}{k-1}$.

Dokaz. Število n lahko si predstavljamo kot zaporedje n kgoglic, kompozicijo pa s pregradami med kroglicami: $\bullet \mid \bullet\,\bullet \mid \bullet$. □

Opomba. Lahko razumemo kompozicijo števila n s k členi kot rešitev enačbe $x_1 + \ldots + x_k = n$, kjer so $x_i \in \mathbb{N}$.

1.6.1 Šibke kompozicije

Šibka kompozicija števila n ima isto definicijo kot kompozicija, le da dovolimo med členi tudi ničle.

Trditev. Število šibkih kompozicij števila n s k členi je $\binom{n+k-1}{k-1} = \binom{n+k-1}{n}$.

Dokaz. 1. način. Rešujemo enačbo $x_1 + \ldots + x_k = n$, kjer so $x_i \in \mathbb{N}_0$.
2. način. Kroglice in pregrade.
3. način. Neurejeni izbori s ponavljanjem. □

1.7 Razčlenitve naravnega števila

Definicija. *Razčlenitev naravnega števila* n je zaporedoje pozitivnih naravnih števil $\lambda = (\lambda_1, \ldots, \lambda_l)$, kjer je $\lambda_1 \geq \ldots \lambda_l$ in $\lambda_1 + \ldots + \lambda_l = n$. *Dolžina* razčlenitve λ, $l(\lambda)$ je število elemetnov zaporedja, številu n pa rečemo *velikost razčlenitve*. Števila $\lambda_1, \ldots, \lambda_l$ imenujemo *členi razčlenitve*. Razčlenitvam rečemo tudi *particije*.

Definicija. Naj bo $\lambda = (\lambda_1, \ldots, \lambda_l)$ račlenitev naravnega števila n. *Ferrersov diagram* λ je seznam vrstic oblike:

$$
\begin{aligned}
&1.\ \text{vrsta: } \underbrace{\circ\ \circ\ \circ\ \ldots\ \circ}_{\lambda_1 \text{ krožcev}}\\
&2.\ \text{vrsta: } \underbrace{\circ\ \circ\ \ldots\ \circ}_{\lambda_2 \text{ krožcev}}\\
&\qquad\qquad\vdots\\
&\text{k. vrsta: } \underbrace{\circ\ \ldots\ \circ}_{\lambda_l \text{ krožcev}}
\end{aligned}
$$

Definicija. Naj bo $\lambda = (\lambda_1, \ldots, \lambda_l)$ račlenitev naravnega števila n. *Konjugirana razčlenitev* $\overline{\lambda}$ je razčlenitev, ki ima transponiran Ferrersov diagram.

Uvedemo oznake:
- $p(n)$ je število razčlenitev števila n. Funkciji $p(n)$ rečemo tudi *razčlenitvena funkcija*.
- $p_k(n)$ je število razčlenitev števila n s k členi.
- $\overline{p}_k(n)$ je število razčlenitev števila n z največ k členi.

Trditev. Za naravni števili n in k velja:
1. $p_k(n) = p_{k-1}(n-1) + p_k(n-k)$.
2. $p_k(n) = \overline{p}_k(n-k)$.
3. $\overline{p}_k(n) = \overline{p}_{k-1}(n) + \overline{p}_k(n-k)$.

Dokaz. Pomagamo si z Ferrersovim diagramom.
1. Razbijemo razčlinitve na tiste, ki vsebujejo 1 in tiste, ki jo ne vsebujejo.
2. Odštejemo od prvega stolpca 1.
3. Razčlenitev n z največ k členi ima bodisi natanko k členov bodisi kvečjemi $k-1$ členov. □

1.8 Stirlingova števila I. vrste

Definicija. Naj bo $1 \leq k \leq n$. *Stirlingovo število I. vrste* $C(n,k)$ je število permutacij množice $[n]$, ki se zapišejo kot produkt k disjunktnih ciklov. Velja: $C(n,0) = 0,\ n > 0$ in $C(0,0) = 1$.

Primer. Izračunaj $C(n,n),\ C(n,1),\ C(4,2)$.

Trditev. Naj bo $1 \leq k \leq n$. Velja:

$$C(n,k) = C(n-1,k-1) + (n-1)C(n-1,k).$$

Dokaz. Permutacije $[n]$ s k cikli razdelimo takole:

1. tiste, kjer je n negibna točka in
2. ostale.

$\square$

Za izračun $C(n,k)$ lahko si pomagamo s Stirlingovo matriko I. vrste, ki jo dobimo s pomočjo rekurzivne zveze.

Trditev. $x^{\overline{n}} = \sum_{k=0}^{\infty} C(n,k)x^k$.

Dokaz. Indukcija po n. $\square$

Primer. Izračunaj $x^{\overline{4}}$.

1.9 Stirlingova števila II. vrste in Bellova števila

Definicija. *Razdelitev množice* X je družina podmnožic $\{X_i\}_{i \in I}$ za katero velja:

1. $\bigcup_{i=I} X_i = X$,
2. $X_i \cap X_j = \emptyset$ za vsaka $i, j \in I,\ i \neq j$.

Definicija. Naj bo $1 \leq k \leq n$. *Stirlingovo število II. vrste* $S(n,k)$ je število razdelitev množice $[n]$ v k nepraznih razredov. Velja: $S(n,0) = 0,\ n > 0$ in $S(0,0) = 1$.

Primer. Izračunaj $S(n,n),\ S(n,1),\ S(n,2)$.

Definicija. *Bellovo število* $B(n) = \sum_{k=0}^{\infty} S(n,k)$ je število vseh razdelitev n-množice v neprazne razrede.

Trditev. Naj bo $1 \leq k \leq n$. Velja:

$$S(n,k) = S(n-1,k-1) + kS(n-1,k).$$

Dokaz. Vzemimo množico $[n]$. Razdelitve v k razredov razdelimo takole:

1. tiste, ki imajo $\{n\}$ kot samostojni del in
2. ostale.

$\square$

Za izračun $S(n,k)$ lahko si pomagamo s Stirlingovo matriko II. vrste, ki jo dobimo s pomočjo rekurzivne zveze.

Trditev. $x^n = \sum_{k=0}^{\infty} S(n,k)x^{\underline{k}}$.

Dokaz. TODO $\square$

Opomba. Če dva polinoma stopnje n ujemata v $n+1$ točk, potem sta enaka.

Izrek. Število surjekcij iz n-množice v k-množico je enako

$$k!S(n,k).$$

Dokaz. Vsaka surjekcija določa razdelitev n-množice v k nepraznih razredov. $\square$

Trditev. $B(n+1) = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{n}{k} B(k)$.

Dokaz. TODO $\square$

Definicija. Naj bo $1 \leq k \leq n$. *Lahovo število* $L(n,k)$ je število razdelitev n-množice v k linearno urejenih kosov.

1.10 Dvajnastera pot

Naj bo N n-množica (predmetov) in K k-množica (predalov). Gledamo „funkcijo“ $f : N \to K$, ki predmeti razporedi po predalih.
Imamo 12 možnosti: predmeti in predali lahko bodisi ločimo med seboj bodisi ne ločimo med seboj, funkcija lahko poljubna, inkjektivna (vsak predal ima kvečjemu 1 predmet) ali surjektivna (noben predal ni prazen).

Izrek (Dvajnastera pot)**.** Velja:

ločimo predmeti/predali	poljubna	injektivna	surjektivna
DA/DA	k^n	$k^{\underline{n}}$	$k!S(n,k)$
DA/NE	$\sum_{i\leq k} S(n,i)$	$\begin{cases} 1; & n \leq k \\ 0; & \text{sicer} \end{cases}$	$S(n,k)$
NE/DA	$\binom{n+k-1}{k-1}$	$\begin{cases} \binom{k}{n}; & n \leq k \\ 0; & \text{sicer} \end{cases}$	$\binom{n-1}{k-1}$
NE/NE	$\overline{p}_k(n)$	$\begin{cases} 1; & n \leq k \\ 0; & \text{sicer} \end{cases}$	$p_k(n)$

Dokaz. Uporabimo že znane rezultate (kompozicije, razčlenitve) itd. □

1.11 Načelo vključitev in izključitev

Recimo, da sta A, B poljubni množici, potem $|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|$.

Primer. Koliko so števil v $[30]$ ni tujih s 30? Koliko so tujih?

Izrek (Načelo vključitev in izključitev)**.** Naj bo $A_1, \ldots, A_n$ množice. Velja:

$$\left|\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right| = \sum_{j=1}^{n} (-1)^{j+1} \sigma_j,$$

kjer je $\sigma_j = \sum_{I \in \binom{[n]}{j}} \left|\bigcap_{i\in I} A_i\right|$.

Dokaz. Pokažemo, da če $x \in \bigcup_{i=1}^{n} A_i$, potem prispeva natanko 1 k formuli. □

Primer. Na koliko načinov lahko razporedimo n označenih predmetov v k označenih predalov, če je vsaj en predal prazen?

Posledica. Če je X N-množica in so $A_1, \ldots, A_n \subset X$, potem je število elementov množice X, ki niso v nobeni izmed množic $A_1, \ldots, A_n$ enako

$$N + \sum_{j=1}^{n} (-1)^j \sigma_j.$$

Definicija. *Premestitev množice* $[n]$ je permutacija $\pi \in S_n$ brez negibnih točk.

Primer. Izračunaj število premestitev množice $[n]$.

Izrek. Če je $n = p_1^{e_1} \ldots p_r^{e^r}$ razcep $n \in \mathbb{N}$ na prafaktorji, potem je

$$\phi(n) = n(1 - \frac{a}{p_1}) \ldots (1 - \frac{1}{p_r}) \text{ (Eulorjeva funkcija).}$$

Dokaz. TODO □

1.12 Rekurzivne enačbe

Primer. Na koliko načinov lahko prehodimo n stopnic, če vsakič pregodimo 1 ali 2?

Primer. Koliko je dvojiških dreves s korenom z n vozlišč?

Izrek. Naj bo zaporedje $(a_n)_{n\geq 0}$ podano takole:

$$a_0 = b_0,\ a_1 = b_1,\ a_n = Aa_{n-1} + Ba_{n-2},\ n \geq 2,$$

kjer so b_0, b_1, A, B fiksna števila. Naj bosta α in β korena **karakteristične enačbe** $x^2 = Ax + B$. Tedaj velja:

1. Če je $\alpha \neq \beta$, potem obstajata konstanti K_1, K_2, tako da je
$$a_n = K_1\alpha^n + K_2\beta^n.$$
2. Če je $\alpha = \beta$, potem obstajata konstanti K_1, K_2, tako da je
$$a_n = (K_1 + K_2 n)\alpha^n.$$

Splošen primer

Zaporedje $(a_n)_{n\geq 0}$ je podano takole:

1. $a_0 = b_0, a_1 = b_1, \ldots, a_{d-1} = d_{d-1}$, kjer so $b_0, b_1, \ldots, b_{d-1}$ fiksna števila.
2. $c_d a_{n+d} + c_{d-1}a_{n+d-1} + \ldots + c_1 a_{n+1} + c_0 a_n = f(n)$ $(*)$, kjer so $c_d, \ldots, c_0$ fiksna števila, $f(n) : \mathbb{N}_0 \to \mathbb{C}$.

Definicija. (*) je **d-člena linearna rekurzija s konstantnimi koeficienti**. Če je $f(n) \equiv 0$, potem rečemo, da je rekurzija (*) **homogena**.

Kako rešemo homogeno rekurzijo?

Zaporedja gledamo v prostoru $\mathbb{C}^{\mathbb{N}_0}$ vseh kompleksnih zaproedij. Naredimo vektorski prostor $(\mathbb{C}^{\mathbb{N}_0}, +, \cdot)$ na naraven način. Gledamo še prostor $\text{End}(\mathbb{C}^{\mathbb{N}_0})$ in naredimo vektorski prostor $(\text{End}(\mathbb{C}^{\mathbb{N}_0}), +, \circ)$.
Naj bo $E \in (\text{End}(\mathbb{C}^{\mathbb{N}_0}))$, $E(a_0, a_1, a_2, \ldots) = (a_1, a_2, \ldots)$ (odrežemo prvi člen). BŠS: $c_d = 1$.

1. Priredimo polinom: $Q(x) = x^d + c_{d-1}x^{d-1} + \ldots + c_1 x + c_0$.
2. **(!)** Poglejmo $\ker Q(E)$:
$$\begin{aligned}(a_n)_n \in \ker Q(E) &\Leftrightarrow Q(E)((a_n)_n) = 0 \Leftrightarrow (E^d + c_{d-1}E^{d-1} + \ldots + c_1 E + c_0 I)(a_n)_n = 0 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow E^d(a_n)_n + c_{d-1}E^{d-1}(a_n)_n + \ldots + c_1 E(a_n)_n + c_0 I(a_n)_n = 0 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow (a_d, a_{d+1}, \ldots) + c_{d-1}(a_{d-1}, a_d, \ldots) + \ldots + c_1(a_1, a_2, \ldots) + c_0(a_0, a_1, \ldots) = 0 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow (a_d + c_{d-1}a_{d-1} + \ldots + c_1 a_1 + c_0 a_0,\ a_{d+1} + c_{d-1}a_d + \ldots + c_1 a_2 + c_0 a_1, \ldots) = 0 \Leftrightarrow (a_n)_n \text{ reši } (*).\end{aligned}$$
Torej splošne rešitve homogene enačbe so natanko elementi iz $\ker(Q(E))$.
3. Polinom $Q(x)$ lahko zapišemo v obliki $Q(x) = (x - \lambda_1)^{s_1} \ldots (x - \lambda_k)^{s_k}$, potem
$$\ker Q(E) = \ker((E - \lambda_1 I)^{s_1}) \oplus \ldots \oplus \ker((E - \lambda_k I)^{s_k}).$$
Hočemo torej določiti $\ker((E - \lambda I)^s)$.
4. Vemo: $\dim(\ker((E - \lambda I)^s)) = s$. Baza prostora je $(\lambda^n)_{n\geq 0}, (n\lambda^n)_{n\geq 0}, \ldots, (n^{s-1}\lambda^n)_{n\geq 0}$ (dokaz težek).

Izrek. $(a_n)_{n\geq 0} \in \ker((E - \lambda I)^s) \Leftrightarrow a_n$ je oblike $a_n = P(n)\lambda^n$, kjer je $P(n)$ polinom stopnje kvečjemu $s - 1$.

Izrek. Splošna rešitev enačbe
$$c_d a_{n+d} + c_{d-1}a_{n+d-1} + \ldots + c_1 a_{n+1} + c_0 a_n = 0$$
je oblike
$$A_1(n)\lambda_1^n + \ldots + A_k(n)\lambda_k^n,$$
kjer so λ_i ničla karakterističnega polinoma kratnosti s_i, in je $A_i(n)$ polinom stopnje k večjemu $s_i - 1$ za vse $i \in [k]$.

Kako rešemo nehomogeno rekurzijo?

Rešitev nehomogene enačbe

$$c_d a_{n+d} + c_{d-1} a_{n+d-1} + \ldots + c_1 a_{n+1} + c_0 a_n = f(n) \; (*)$$

je oblike

$$z_n + b_n,$$

kjer je z_n splošna rešitev ustrezne homogene enačbe in je b_n neka partikularna rešitev enačbe (*).
Pri tem b_n praviloma iščemo z ustreznim nastavkom, pri čemer upoštevamo, da če je $f(n)$ aditivna, torej

$$f(n) \;=\; f_1(n) \;+\; \ldots \;+\; f_t(n),$$

potem b_n lahko dobimo kot vsoto partikularnih rešitev od

$$c_d a_{n+d} + c_{d-1} a_{n+d-1} + \ldots + c_1 a_{n+1} + c_0 a_n = f_i(n).$$

Primer. Pri začetnih pogojah $a_0 = 0,\; a_1 = 1$, reši enačbo $a_n = 4a_{n-1} - 4a_{n-2} - 2n + 5 \cdot 3^n$.

1.13 Formalne potenčne vrste (Rodovne funkcije)

Definicija. Naj bo $a : \mathbb{N} \to \mathbb{C}$ zaporedje. Vrsta $\sum_{n \geq 0} a_n x^n$ je **formalna potenčna vrsta** zaporedja a_n.

Definicija. Naj bo $(a_n)_n,\ (b_n)_n \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}_0}$.

- $\sum_{n\geq 0} a_n x^n + \sum_{n \geq 0} b_n x^n = \sum_{n\geq 0}(a_n + b_n)x^n$.
- $\lambda \cdot \sum_{n\geq 0} a_n x^n = \sum_{n\geq 0}(\lambda a_n)x^n$.
- $(\sum_{n\geq 0} a_n x^n) \cdot (\sum_{n\geq 0} b_n x^n) = \sum_{n\geq 0} c_n x^n$, kjer $c_n = \sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k}$.

Opomba. Formalne potenčne vrste tvorijo algebro.

Definicija. F. p. v. $A(x)$ je **obrnljiva**, če obstaja f. p. v. $B(x)$, da velja $A(x) \cdot B(x) = (1, 0, 0, \ldots)$.

Trditev. Formalna potenčna vrsta $A(x)$ je obrnljiva natanko tedaj, ko $a_0 \neq 0$

Dokaz. ($\Rightarrow$) Definicija množenja.
($\Leftarrow$) Induktivno konstruiramo členi f. p. v. $B(x)$. □

Definicija. Če je $(a_n)_n$ zaporedje, ki je rešitev nekega kombinatoričnega problema, potem $\sum_{n\geq 0} a_n x^n$ pravimo **rodovna funkcija**. Pišemo: $G(x) = \sum_{n \geq 0} a_n x^n$.

Primer. Določi rodovno funkcijio Fibonaccijeva zaporedja.

Definicija. Naj bo $A(x) = \sum_{n\geq 0} a_n x^n$ f. p. v. **Odvod** f. p. v. je $A'(x) = \sum_{n\geq 1} n a_n x^{n-1} = \sum_{n \geq 0}(n+1)a_n x^n$.

Trditev. $(A(x) \cdot B(x))' = A'(x)B(x) + A(x)B'(x)$.

Dokaz. Račun. □

Reševanje rekurzij z rodovnimi funkcijami

Primer. Naj bo $a_0 = 2, a_1 = 3, a_n = 2a_{n-1} - a_{n-2}, n \geq 2$. Določi splošno formulo za a_n.

Koraki splošnega reševanja nekega kombinatoričnega problema

1. Rešitev problema zapišemo z rekurzivno enačbo.
2. Zapišemo rodovno funkcijio zaporedja z pomočjo rekurzivne zveze.
3. Z algebro nad rodovnimi funkcijami, rodovno funkcijo razvijemo v vrsto.
4. Iz razvoja preberemo rešitev našega začetnega problema.

1.14 Catalanova števila

Imejmo produkt n števil $x_1 x_2 \ldots x_n$. Na koliko načinov lahko izračunamo ta produkt, če po vrsti zmnožimo dve zaporedni števili in jih nadomestimo s produktom?

Definicija. **Catalanovo število** C_n je število načinov, s katerimi lahko izračunamo produkt $x_1 x_2 \ldots x_n$.

Trditev. $C_n = \frac{1}{n+1}\binom{2n}{n}$.

Dokaz. Rodovne funkcije. □

2 Teorija grafov

2.1 Osnovni pojmi

Definicija. **Graf** G je urejen par $(V(G), E(G))$, kjer je $V(G)$ množica **vozlišč** grafa G in $E(G)$ množica **povezav** grafa G, kjer je $E(G) \subseteq \binom{V(G)}{2}$.

Opomba. Če ne povemo drugače, bo množica $V(G)$ končna.

Opomba. Naj bo $\{u, v\} \in E(G)$:

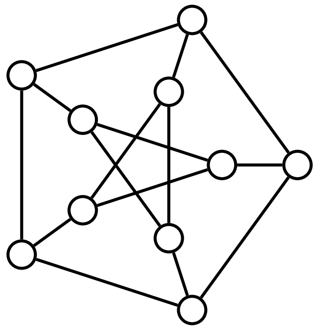
- Krajše pišemo uv.
- Pravimo, da sta u in v **krajišči** povezave e in, da sta u in v **sosedni** vozlišči. Pišemo: $u \sim v$ ali $u \sim_G v$.

Definicija. Naj bo G graf, $u \in V(G)$:

- $N_G(u) = \{v \in V(G) \mid uv \in E(G)\}$ je **soseščina** vozlišča u.
- $\deg_G(u) = |N_G(u)|$ je **stopnja** vozlišča u.

Definicija. Graf G je **regularen**, če imajo vsa vozlišča isto stopnjo.

Opomba. Če je ta stopnja r, pravimo, da je G r-regularen graf.

Primer. Petersenov graf P je graf 

Primer. Grafe lahko predstavimo tudi z matrikami. Možnosti:

1. **Matrika sosednosti.** Za graf G z vozlišči $v_1, \dots, v_n$ je matrika sosednosti matrika $A(G) \in \mathbb{R}^{n \times n}$, definirana z
$$a_{ij} = \begin{cases} 1, & v_i \sim v_j, \\ 0, & v_i \nsim v_j. \end{cases}.$$

2. **Incidenčna matrika**. Če ima graf G vozlišča $v_1, \dots, v_n$ in povezave $e_1, \dots, e_m$, je to matrika $B(G) \in \mathbb{R}^{n \times m}$, podana s predpisom
$$b_{ij} = \begin{cases} 1, & v_i \in e_j, \\ 0, & v_i \notin e_j. \end{cases}.$$

2.2 Lema o rokovanju

Lema (o rokovanju)**.** Naj bo G graf. Velja:
$$\sum_{u \in V(G)} \deg_G(u) = 2 \cdot |E(G)|.$$

Dokaz. Incidenčna matrika in načelo dvojnega preštevanja. □

Posledica. Število vozlišč lihe stopnje danega grafa je sodo.

Dokaz. Razbijemo vsoto na vozlišče sode in lihe stopnje. □

2.3 Podgrafi

Definicija. Naj bosta G in H grafa. Če velja $V(H) \subseteq V(G)$ in $E(H) \subseteq E(G)$, tedaj rečemo, da je H **podgraf** grafa G, in pišemo $H \leq G$. Pri tem:

- Pograf H je **vpet** podgraf, če je $V(H) = V(G)$ (odstranimo nekaj povezav).
- Podgraf H je **porojen** (oz. **induciran**), če velja: $\forall u, v \in V(H) \,.\, u \sim_G v \Rightarrow u \sim_H v$ (odstranimo nekaj vozlišč).