1 Fourierjeva analiza

Naj bo funkcija $f : [-\pi, \pi]$ nezvezna v končno mnogo točkah, kjer obstajata levi in desni odvod, vmes pa je med tema točkama odvedljiva. Tedaj

$$\mathrm{FV}(f)(x) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx)),$$

kjer $a_0 = \dfrac{1}{2\pi} \displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,dx$ ter $a_n = \dfrac{1}{\pi} \displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos(nx)\,dx$ in $b_n = \dfrac{1}{\pi} \displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin(nx)\,dx$.
Za vsak $x \in [-\pi, \pi]$ Fourierjeva vrsta funkcije f konvergira proti

- $f(x)$, če je f zvezna v x in
- $\frac{f(x-)+f(x+)}{2}$, če f ni zvezna v x.

Naj bo $f : [0, \pi] \to \mathbb{R}$ funkcija. Funkcijo f s predpisom $f(x) = f(-x), x < 0$ lahko razširimo do sode funkcije ter s predpisom $f(x) = -f(-x)$ do lihe. Tedaj

$$\mathrm{FV}_{\cos}(f)(x) = \mathrm{FV}(f_{\text{soda}}(x)) \quad \text{ter} \quad \mathrm{FV}_{\sin}(f)(x) = \mathrm{FV}(f_{\text{liha}}(x))$$

Parsevalova enakost:

$$\int_{-\pi}^{\pi} f^2(x)\,dx = 2\pi a_0^2 + \pi \sum_{n=1}^{\infty} (a_n^2 + b_n^2).$$

1.1 Nasveti

- Za izračun integralov z sin in cos lahko uporabljamo enakost

$$\cos(nx) + \sin(nx) = e^{inx}.$$

- Če je funkcija soda, potem $\forall n > 1 \,.\, b_n = 0$; če je funkcija liha, potem $\forall n > 0 \,.\, a_n = 0$.
- Če želimo sešteti številsko vrsto, najprej razvijemo funkcijo v vrsto, potem vzamemo vrednost v pravi točki.
- Vsak polinom v sin in cos ima končno Fourierjevo vrsto. Dobimo jo s pomočjo trigonometrije.