Uvod v geometrijsko topologijo

22. april 2025

Uvod

Cilj topologije Razumeti prostore in preslikave med njimi.

Preslikave

- Vedno zvezne;
- Pomembne: Homeomorfizmi, vložitve;
- Odprte ali zaprte.

Prostori

- Osnovni interes so metrični prostori;
- Različne konstrukcije dajo prostore, ki niso nujno metrični ali pa ne takoj jasno da so – zato si pomagamo s topološkimi lastnostmi.

Konstrukcije prostorov

- **Podprostor**. Naj bo $(X, \mathcal{T})$ topološki prostor in $A \subseteq X$. Potem
$$\mathcal{T}_A = \{A \cap U \mid U \in \mathcal{T}\}$$
topologija na A in $(A, \mathcal{T}_A)$ topološki prostor.
- **Vsota (oz. disjunktna unija)**. Naj bodo $\{(X_\lambda, \mathcal{T}_\lambda) \mid \lambda \in \Lambda\}$ topološki prostori in $X = \bigcup_{\lambda\in\Lambda} X_\lambda \times \{\lambda\}$. Potem
$$\mathcal{T} = \{U \subseteq X \mid \forall \lambda \in \Lambda \,.\, U \cap X_\lambda \text{ odprta v } X_\lambda\}$$
je topologija na X porojena z bazo $\bigcup_{\lambda\in\Lambda} \mathcal{T}_\lambda$.
- **Produkt**. Naj bodo $\{(X_\lambda, \mathcal{T}_\lambda) \mid \lambda \in \Lambda\}$ topološki prostori in $\prod_{\lambda\in\Lambda} X_\lambda = \{(x_\lambda)_{\lambda\in\Lambda} \mid x_\lambda \in X_\lambda\}$.
  - Na $X \times Y$ definiramo bazo
  $$\mathcal{B} = \left\{U \times V \mid U^{\text{odp}} \subseteq X,\ V^{\text{odp}} \subseteq Y\right\}.$$
  Topologija $\mathcal{T}_{A\times B}$ na množici $X \times Y$ je topologija porojena z bazo $\mathcal{B}$.

    Opomba. Baza $\mathcal{B}$ pride iz predbaze, ki je določena z pogojem, da so projekcije na faktorje zvezne.
  - Množico $\prod_{\lambda\in\Lambda} X_\lambda = \{(x_\lambda)_{\lambda\in\Lambda} \mid x_\lambda \in X_\lambda\}$ opremimo z najslabšo topologijo, glede na katero so vse projekcije
  $$\gamma_\mu : \prod_{\lambda\in\Lambda} X_\lambda \to X_\mu,\ \mu \in \Lambda$$
  zvezni.
  Predbazo sestavljajo
  $$\gamma_\mu^*(U_\mu) = U_\mu \times \prod_{\lambda\neq\mu} X_\lambda,\ \text{kjer } U_\mu^{\text{odp}} \subseteq X_\mu.$$
  Bazne množice so
  $$U_{\mu_1} \times U_{\mu_2} \times \ldots \times U_{\mu_k} \times \prod_{\lambda\neq\mu_1,\ldots,\mu_k} X_\lambda.$$
- **Kompaktifikacija z 1 točko**.
- **„Slika prostora pri zvezni preslikavi“**. Naj bo $f : X \to Y$ preslikava. Gledamo $f_*(X)$. $f_*(X)$ dobi topologijo iz Y. Problem, da topologijo na Y lahko menjamo. Hočemo jo dobiti odvisno od X.
Družina $\{f^*(y) \mid y \in f_*(X)\}$ je **razdelitev** množice X. V tej družine so množice paroma disjunktne. Torej ta družina določa ekvivalenčno relacijo na X in obratno, vsaka ekvivalenčna relacija na X določna razdelitev na ekvivalenčne razrede.

1 Kvocientni prostori

1.1 Kvocientna topologija

Definicija. Naj bo X množica, $\sim$ ekvivalenčna relacija na X.

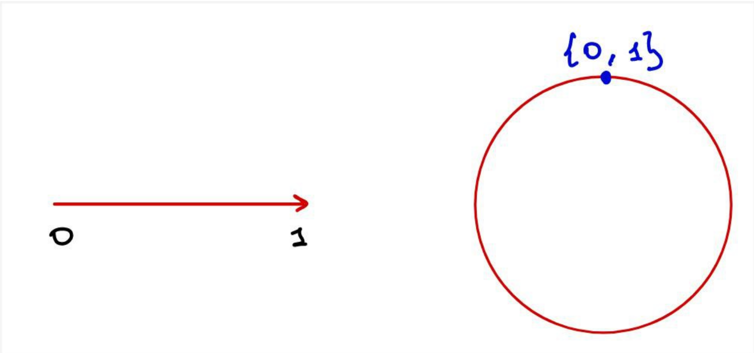
- Za poljuben $x \in X$ označimo $[x] = \{y \in X \mid y \sim x\}$ **ekvivalenčni razred**, ki pripada x.
- **Kvocientna množica** množice X po relacije $\sim$ je množica vseh ekvivalenčnih razredov $\{[x] \mid x \in X\} =: X/_\sim$.
- Preslikava $q : X \to X/_\sim,\ q(x) = [x]$ je **kvocientna projekcija**.

Opomba. Ekvivalenčni razredi predstavljamo kot točke.

Primer. Naj bo $X = [0, 1]$. Ekvivalenčna relacija $\sim$ določna z

$$0 \sim 1 \quad (1 \sim 0, \forall x \in X \,.\, x \sim x).$$

Kako si lahko predstavljamo kvocientno množico $X/_\sim$? Bodisi kot interval $[0, 1)$ bodisi kot krožnico.



Opomba.

- Pri opisu ekvivalenčne relacije bomo običajno navedli le netrivialne relacije, ki generirajo ekvivalenčno relacijo, ob upoštevanju lastnosti ekvivalenčnih relacij.
- Ekvivalenčna relacija $\sim$ na X določa razdelitev množice X na ekvivalenčne razrede. To razdelitev označimo z $\mathcal{R} = \{[x] \mid x \in X\} \subseteq P(X)$. Kvocientno množico lahko označimo z $X/_\sim = X/_\mathcal{R}$.
- Če $\sim$ določa le en netrivialen ekvivalenčni razred $A \subseteq X,\ |A| \neq 1$, potem kvocientno množico označimo z $X/_A$.

Če je X topološki prostor in $\sim$ ekvivalenčna relacija na X, želimo $X/_\sim$ opremiti z topologijo tako, da bo ta odražala lastnosti prostora X. Posebej želimo, da je kvocientna projekcija $q : X \to X/_\sim$ zvezna.
Pogoj

$$\forall V^{\text{odp}} \subseteq X/_\sim \,.\, q^*(V) \subseteq X \text{ je odprta}$$

topologije na $X/_\sim$ ne določa enolično – če neka topologija na $X/_\sim$ temu ustreza, ustreza tudi vsaka šibkejša. Zato je $X/_\sim$ smiselno opremiti z najmočnejšo topologijo, pri kateri je q zvezna. Torej za odprte množice v $X/_\sim$ vzamemo vse, ki imajo odprte praslike v X.

Definicija. Naj bo $(X, \mathcal{T})$ topološki prostor in $\sim$ ekvivalenčna relacija na X.

- **Kvocientna topologija** na $X/_\sim$ je

$$\mathcal{T}_\sim = \{V \subseteq X/_\sim \mid q^*(V) \subseteq X \text{ odprta}\}\,.$$

Trditev. $\mathcal{T}_\sim$ je topologija na $X/_\sim$.

Dokaz. Preverimo lastnosti. □

Opomba. V kvocientni topologiji na $X/_\sim$ velja:

$$V \subseteq X/_\sim \text{ je odprta} \iff q^*(V) \subseteq X \text{ je odprta.}$$

$(\Rightarrow)$ je zveznost preslikave q;
$(\Leftarrow)$ je največjost $\mathcal{T}_\sim$.
Velja tudi:

$$Z \subseteq X/_\sim \text{ je zaprta} \iff q^*(Z) \subseteq X \text{ je zaprta.}$$

Primer. Ali je torej q odprta in zaprta? Ni nujno!

- Naj bo $X = [0, 1],\ \mathcal{R} = \{[0, 1), \{1\}\}$. Kaj je $X/_\mathcal{R}$? Ali sta $\{[0]\}$ in $\{[1]\}$ odprti? Ali je q zaprta?
- Naj bo $X = [0, 2],\ [1, 2]$ edini netrivialni ekvivalenčni razred. Kaj je $X/_{[1,2]}$? Ali je q odprta?
- Naj bo $X = [0, 1],\ A = X \cap \mathbb{Q},\ B = X \setminus \mathbb{Q}$. Kaj je $X/_{\{A,B\}}$? Kaj je kvocientna topologija?

Definicija. Naj bo X množica in $\sim$ ekvivalenčna relacija.

- Za $A \subseteq X$ je njeno **nasičenje** enako

$$q^*(q_*(A)) = \bigcup_{x \in A} [x] = \text{unija vseh ekvivalenčnih razredov, ki sekajo } A.$$

Trditev. Naj bo X topološki prostor, $\sim$ ekvivalenčna relacija, $A \subseteq X$. Velja:

- $q_*(A) \subseteq X/_\sim$ je odprta/zaprta $\iff$ nasičenje $q^*(q_*(A))$ odprto/zaprto.
- $\forall U^{\text{odp}} \subseteq X \,.\, q^*(q_*(U))$ odprto/zaprto $\implies$ q je odprta/zaprta.

Dokaz. Definicija nasičenosti. □

Cilj Imamo nek topološki prostor X in ekvivalenčno relacijo $\sim$. Če je to mogoče, želimo poiskati nek geometrični model Y za kvocient $X/_\sim$ in jasno pokazati, da je $X/_\sim \approx Y$.

Primer.

- Naj bo $X = \mathbb{R}$, $A = \mathbb{Z}$. Kaj je $\mathbb{R}/_A$?
- Naj bo $X = [0,1]$, $A = \left\{\frac{1}{n} \mid n \in \mathbb{N}\right\} \cup \{0\}$. Kaj je $\mathbb{R}/_A$? Ali je kompakten?

V obeh primerih imamo števno mnogo krožnic, spetih v eni točki. Ali sta ta prostora homeomorfna?

1.2 Kvocientne preslikave

Cilj Razumeti preslikave iz kvocientov.
Naj bo X topološki prostor, $\sim$ ekvivalenčna relacija.

$$\begin{tikzcd} X \arrow[d, "q"'] \arrow[dr, "f := g \circ q"] & \\ X/_\sim \arrow[r, "g"'] & Y \end{tikzcd}$$

Zvezna preslikava $g : X/_\sim \to Y$ določa zvezno preslikavo $f = g \circ q : X \to Y$.
Če je $x \sim y$ v X, je $[x] = q(x) = q(y) = [y]$ in zato je $f(x) = g(q(x)) = g(q(y)) = f(y)$. Torej ta f je konstantna na ekvivalenčnih razredih, tj. ekvivalentne točke slika v iste.
Želimo obratno: za preslikavo $f : X \to Y$ poiskati pogoje, da določa preslikavo iz $X/_\sim$ v Y.

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "f"] \arrow[d, "q"'] & Y \\ X/_\sim \arrow[ur, dashed, "\overline{f}"'] & \end{tikzcd}$$

Če naj diagram komutira, mora biti f konstantna na ekvivalenčnih razredih:

$$\forall x, y \in X \,.\, x \sim y \implies f(x) = f(y).$$

Če to velja, potem definiramo

$$\overline{f}([x]) := f(x).$$

$\overline{f}$ je preslikava, inducirana s f.

Trditev. Naj bo X topološki prostor, $\sim$ ekvivalenčna relacija, $f : X \to Y$ funkcija, ki je konstantna na ekvivalenčnih razredih. Potem f določa dobro definirano preslikavo

$$\overline{f} : X/_\sim \to Y,$$

za katero velja:

$$\overline{f} \circ q = f.$$

Poleg tega velja:

- Če je f zvezna, potem je tudi $\overline{f}$ zvezna.
- Če je f surjektivna, je $\overline{f}$ surjektivna.
- Če za $\forall x, y \in X \,.\, x \not\sim y \implies f(x) \neq f(y)$, potem je $\overline{f}$ injektivna, tj. f loči ekvivalenčne razrede.

Dokaz. Definicija kvocientne topologije. □

Zanima nas, kdaj bo $\overline{f}$ homeomorfizem. Velja:
$\overline{f} : X/_\sim \to Y$ je homeomorfizem, če

- zvezna, bijektivna in inverz zvezen oz.
- bijekcija iz $X/_\sim$ v Y in porodi bijekcijo med topologiji na $X/_\sim$ in Y.

Torej NTSE

- $\overline{f}$ je homeomorfizem.
- $\overline{f}$ je bijekcija iz $X/_\sim$ v Y in porodi bijekcijo med odprtimi množici.
- $\overline{f}$ je bijekcija in velja:

$$\begin{aligned}\forall V \subseteq Y \,.\, V \text{ je odprta} &\iff \overline{f}^*(V) \subseteq X/_\sim \text{ je odprta (bijekcija med topologiji)}\\ &\iff q^*(\overline{f}^*(V)) \text{ je odprta (definicija kvociente topologije)}\\ &\iff f^*(V) \subseteq X \text{ je odprta (diagram komutira)}\end{aligned}$$

Definicija. Naj bosta X, Y topološka prostora in $f : X \to Y$ funkcija. Če je f surjektivna in če

$$\forall V \subseteq Y \,.\, V \text{ je odprta} \iff f^*(V) \subseteq X \text{ je odprta,}$$

potem f imenujemo **kvocientna preslikava**.

Opomba.

- Po definiciji kvocientne topologiji, je kvocientna projekcija kvocientna preslikava.
  Obratno: vsako kvocientno preslikavo $f : X \to Y$ lahko obravnavamo kot kvocientno projekcijo pri ekvivalenčni relaciji, določeni z razbitjem X na praslike točk.
- Kvocientna preslikava je vedno zvezna, ni pa nujno odprta niti zaprta.
- Implikacija ($\Leftarrow$) v definiciji je posebna lastnost, tej včasih rečemo **kvocientnost v ožjem smislu**.
  Za zvezno surjekcijo je za njeno kvocientnost potrebno preveriti le ta pogoj.
- Surjektivna funkcija f je kvocientna preslikava natanko tedaj, ko

$$\forall Z \subseteq Y \,.\, Z \text{ je zaprta} \iff f^*(Z) \subseteq X \text{ je zaprta.}$$

Lema. Naj bo funkcija $f : X \to Y$ zvezna in surjektivna. Če je f odprta ali zaprta, je kvocientna.

Dokaz. Preveriti je treba le kvocientnost v ožjem smislu. $\square$

Izrek (O prepoznavi kvocienta)**.** Naj bosta X, Y topološka prostora in $\sim$ ekvivalenčna relacija na X. Naj bo $f : X \to Y$ kvocientna preslikava, ki naredi enake identifikacije kot $\sim$, tj. f je konstantna na ekvivalenčnih razredih in loči ekvivalenčne razrede:

$$\forall x, y \in X \,.\, x \sim y \iff f(x) = f(y).$$

Potem je inducirana preslikava $\overline{f} : X/_\sim \to Y$ homeomorfizem.

Dokaz. Sledi iz izpeljave zgoraj. $\square$

Primer. Poišči podprostor kakega evklidskega prostora, ki mu homeomorfen kvocient:

- $[0,1]/_{\{0,1\}}$
- $[0,1] \times [0,1]/_\sim$, kjer $\forall y \in [0,1] \,.\, (0,y) \sim (1,y)$
- $[0,1] \times [0,1]/_\sim$, kjer $\forall y \in [0,1] \,.\, (0,y) \sim (1,1-y)$

  Opomba. Mobiusov trak lahko vložimo v $S^1 \times B^2$: začnemo z daljico v B^2 in jo vzdolž faktorja S^1 zavrtimo za kot π.
- $[0,1] \times [0,1]/_\sim$, kjer $\forall y \in [0,1] \,.\, (0,y) \sim (1,y)$ in $\forall x \in [0,1] \,.\, (x,0) \sim (x,1)$
- $B^2/_{S^1}$
- $(\mathrm{I}^2 + \mathrm{I}^2)/_\sim$, kjer $\forall y \in [0,1] \,.\, \mathrm{in}_1(1,y) \sim \mathrm{in}_2(0, f(y))$, kjer je $f : \mathrm{I} \to \mathrm{I}$ poljuben homomorfizem

Operacije s kvocientnimi preslikavami

Trditev. Naj bosta $f : X \to Y$ in $g : Y \to Z$ preslikavi.

1. Če sta f, g kvocientni, potem $g \circ f$ kvocientna.
2. Če je $g \circ f$ kvocientna in sta f, g zvezni, potem je g kvocientna.

Dokaz. Definicija kvocientne preslikave. $\square$

Opomba. 1. točka nam pove, da lahko identifikacijo razdelimo na več delov.

Trditev. Naj bo X topološki prostor in $\sim_X$ ekvivalenčna relacija na X. Naj bo $f : X \to Y$ homeomorfizem, ki določa ekvivalenčno relacijo $\sim_Y$ na Y, usklajeno z $\sim_X$, tj.

$$y_1 \sim_Y y_2 \iff f^{-1}(y_1) \sim_X f^{-1}(y_2),$$

potem

$$X/_{\sim_X} \approx Y/_{\sim_Y}$$

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[r, "f"] \arrow[d, "q_X"'] \arrow[dr, "q_Y \circ f"] & Y \arrow[d, "q_Y"] \\
X/_{\sim_X} \arrow[r, dashed, "\overline{f}"'] & Y/_{\sim_Y}
\end{tikzcd}$$

Dokaz. Preslikava $q_Y \circ f$ je kompozitum dveh kvocientnih preslikav, torej je kvocienta. Torej je dovolj preveriti, da preslikava $q_Y \circ f$ dela iste identifikacije kot $\sim_X$. □

Primer. Naj bo $1 \in S^1 \subseteq \mathbb{C} \equiv \mathbb{R}^2$. Naj bo $A = S^1 \times \{1\} \cup \{1\} \times S^1 \subseteq S^1 \times S^1 = \mathbb{T}$, kjer je $\mathbb{T}$ **torus**. Kaj je $T/_A$?
Ideja: Torus prerežemo vzdolž A, da dobimo kvadrat z identifikacijami na robu.

1.3 Deljivost topoloških lastnosti

Definicija. Topološka lastnost $\mathcal{L}$ je **deljiva**, če za vsak topološki prostor $X \in \mathcal{L}$ in vsako ekvivalenčno relacijo $\sim$ na X velja, da $X/_\sim \in \mathcal{L}$.
Ekvivalentno: Lastnost $\mathcal{L}$ je deljiva, če se ohranja pro kvocientnih preslikavah.

Trditev. Naj bo X topološki prostor in $\sim$ ekvivalenčna relacija na X. Velja:

$$X/_\sim \in T_1 \iff \text{ekvivalenčni razredi so zaprti.}$$

Dokaz. Karakterizacija T_1 in definicija kvocientne projekcije. □

Izrek (Aleksandrov)**.** Za poljuben metrični kompakt X obstaja zvezna surjekcija $f : C \to X$

Opomba.
- Cantorjeva množica C je popolnoma nepovezan metrični kompakt brez izoliranih točk (karakterizacija C).
- Taka f je kvocientna, saj je surjektivna, zvezna in zaprta, ker slika iz kompakta v T_2 prostor.
- Dokaz tega izreka je zelo težek, ampak lahko eksplicitno zapišemo preslikavo iz C v $[0, 1]$, npr.

$$\begin{aligned} f : C &\longrightarrow [0,1] \\ \sum_{i=1}^{\infty} \frac{c_i}{3^i} &\longmapsto \sum_{i=1}^{\infty} \frac{c_i/2}{2^i}, \; c_i \in \{0,2\} \end{aligned}$$

Trditev.
1. Deljive so naslednje topološki lastnosti:
   - Kompaktnost
   - Povezanost (s potmi)
   - Lokalna povezanost (s potmi)
   - Separablinost
   - Trivialnost, diskretnost
2. Nedeljive so naslednje topološki lastnosti:
   - Separacijske: $T_0 - T_4$
   - Lokalna kompaktnost
   - 1-števnost in 2-števnost
   - Metrizabilnost
   - Popolna nepovezanost

Dokaz.
1. Deljivost:
   - Kompaktnost, povezanost (s potmi), separabilnost, trivialnost in diskretnost: se ohranjajo pri zveznih surjektivnih preslikavah.
   - Lokalna povezanost (s potmi): Prostor je lokalno povezan $\iff$ Komponente vsake odprte množice so odprte.

2. Nedeljivost:
   - T_0: $X = [0,1],\ A = X \cap \mathbb{Q},\ B = X \setminus \mathbb{Q} \rightsquigarrow X/_{\{A,B\}}$
   - T_1: $X = [0,1],\ \mathcal{R} = \{[0,1), \{1\}\} \rightsquigarrow X/_{\mathcal{R}}$
   - $T_2,\ T_3,\ T_4$, metrizabilnost: $X = \mathbb{R} \times \{0,1\}$, $\forall x > 0\,.\,(x,0) \sim (x,1) \rightsquigarrow X/_{\sim}$
   - 1-števnost, 2-števnost, lokalna kompaktnost: $X = [0,1] \times \mathbb{N}$, $A = \{0\} \times \mathbb{N} \rightsquigarrow X/_A$
   - Popolna nepovezanost: Izrek Aleksandrova $\square$

2 Osnovni izreki topologije evklidskih prostorov

2.1 Brouwerjev izrek o negibni točki

Definicija. Naj bo $f : X \to X$ preslikava. Pravimo, da je $a \in X$ **negibna točka** za preslikavo f, če $f(a) = a$.

Opomba.
- Negibne točke lahko povežemo z reševanjem enačb.
  Negibna točka je rešitev enačbe $f(x) = x$ oz. $g(x) := f(x) - x = 0$.
- Obstoj negibne točke je odvisen tako od lastnosti prostora X kot od lastnosti preslikave f.
- Banachovo skrčitveno načelo je primer izreka o negivni točki, ki deluje na presej splošnih prostorih (poln metrični prostor), je pa zelo restriktiven glede preslikave (skrčitev). Brouwerjev izrek pa zelo omeji topološki tip prostora, preslikava pa je lahko poljubna (zvezna).

Naj bo $n \in \mathbb{N}$
Izrek A_n (Brouwerjev izrek o negibni točki). Poljubna zvezna preslikava $f : B^n \to B^n$ ima negibno točko.

Dokaz. TODO: □

Opomba. Enako velja za vsako prostor, ki je homeomorfen B^n.

Definicija. Prostor X **ima lastnost negibne točke** (LNT), če ima vsaka zvezna preslikava $f : X \to X$ negibno točko.

Opomba. Izrek A_n velja natanko tedaj, ko $B^n \in$ LNT.

Zgled. Pri $n = 1$ dobimo znani izrek o vmesni vrednosti iz Analize 1.

Primer. Ali so sferi imajo LNT?
- $S^1 \notin$ LNT, saj netrivialne rotacije ne fiksirajo nobene točke.
- Preslikava $f : S^m \to S^m,\ f(x) = -x$ nima negibne točke sledi, da $S^m \notin$ LNT.

Definicija. Naj bo X prostor, $A \subseteq X$. Zvezna preslikava $r : X \to A$ je **retrakcija**, če je $r|_A = \mathrm{id}_A$. V tem primeru rečemo, da je A **retrakt** prostora X.

Primer. Retrakti.
- Naj bo X prostor, $x_0 \in X$. Trdimo, da je $A = \{x_0\}$ retrakt prostora X in, da je $r : X \to A,\ f(x) = x_0$ retrakcija.
- $S^n_+ = \{x \in R^{n+1} \mid x_{n+1} \geq 0\}$ je retrakt prostora S^n.
  Iskana retrakcija je $r : S^n \to S^n_+,\ r(x_1, \ldots, x_n, x_{n+1}) = (x_1, \ldots, x_n, |x_{n+1}|)$.
- Poišči vse retrakcije iz $I = [0, 1]$ na $A = \{0, 1\}$. Namig: zvezna slika povezanega prostora.

Trditev. Naj bo X topološki prostor.
1. Retrakt povezanega (s potmi) prostora je povezan (s potmi).
2. Retrakt kompaktnega prostora je kompakten prostor.
3. Če je $X \in T_2$, je retrakt prostora X zaprt v X.

Dokaz. 1. - 2. TODO:
3. Uporabimo, da se zvezni preslikavi $f, g : X \to Y \in T_2$ ujemata na zaprti množici. □

Trditev. Naj bo X topološki prostor. Če ima X LNT, ima tudi vsak njegov retrakt LNT.

Dokaz. Definicija retrakta, LNT in inkluzija. □

Primer. Retrakti diska B^2. TODO: Slika.

Definicija. Prostor Y je **absolutni ekstenzor** za neki razred topoloških prostorov $\mathcal{R}$ (npr. T_2 prostori), če

$$\forall X \in \mathcal{R} \,.\, \forall A^{\text{zap}} \subseteq X \,.\, \forall f^{\text{zv}} : A \to Y \,.\, \exists F^{\text{zv}} : X \to Y \,.,$$

kjer je preslikava F razširitev preslikave f, tj. $F|_A = f$.

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "f"] \arrow[d, hook, "i"'] & Y \\ X \arrow[ur, "F"'] & \end{tikzcd}$$

Primer. Enojci so absolutni ekstenzorji.

Opomba. Tietzejev razširitvini izrek.