

# 1 Kvocientni prostori

## 1.1 Kvocientna topologija

### 1. Kvocientna topologija

Naj bo  $(X, \mathcal{T})$  topološki prostor in  $\sim$  ekvivalenčna relacija na  $X$ .

- **Definicija.** Ekvivalenčni razred elementa  $x \in X$ . Kvocientna množica. Kvocientna projekcija.
- **Opomba.** Kako si lahko predstavljamo ekvivalenčni razredi?
- **Definicija.** Kvocientna topologija.
- **Trditev.**  $\mathcal{T}/\sim$  je topologija na  $X/\sim$
- **Opomba.** Karakteriziraj odprte/zaprte množice v  $X/\sim$ . Kaj pomeni vsaka implikacija posebej?
- **Primer.** Ali je kvocientna projekcija vedno odprta/zaprta?
- **Definicija.** Nasičenje množice  $A \subseteq X$
- **Trditev.** Naj bo  $A \subseteq X$ 
  - Kdaj je  $q_*(A) \subseteq X/\sim$  odprta/zaprta?
  - Zadosten pogoj, da je kvocientna projekcija odprta/zaprta.

## 1.2 Kvocientne preslikave

### 1. Kvocientne preslikave

Naj bo  $(X, \mathcal{T})$  topološki prostor in  $\sim$  ekvivalenčna relacija na  $X$ .

- **Trditev.** Kdaj je  $f$  določa preslikavo  $\bar{f} : X/\sim \rightarrow Y$ ? Kaj za njo velja? Kdaj je  $\bar{f}$  zvezna, surjektivna ali injektivna?

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{f} & Y \\ q \downarrow & \nearrow \bar{f} & \\ X/\sim & & \end{array}$$

- **Opomba.** Kdaj je  $\bar{f}$  homeomorfizem v jeziku množic iz  $Y$ ?
- **Definicija.** Kvocientna preslikava. Kvocientnost v ožjem smislu.
- **Opomba.** Ali je kvocientna projekcija kvocientna preslikava?
- **Lema.** Naj bo  $f : X \rightarrow Y$  zvezna in surjektivna. Zadosten pogoj, da je  $f$  kvocientna.
- **Izrek.** O prepoznavi kvocienta.

### 2. Operacije s kvocientnimi preslikavami

- **Trditev.** Naj bosta  $f : X \rightarrow Y$  in  $g : Y \rightarrow Z$  preslikavi.
  - Kaj lahko povemo o kompozitumu kvocientnih preslikav?
  - Kaj če je  $g \circ f$  kvocientna in sta  $f, g$  zvezni?
- **Trditev.** Zadostni pogoji na  $f$ , da porodi homeomorfizem  $\bar{f}$ :

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{f} & Y \\ q_X \downarrow & \searrow q_Y \circ f & \downarrow q_Y \\ X/\sim_X & \xrightarrow{\bar{f}} & Y/\sim_Y \end{array}$$

## 1.3 Deljivost topoloških lastnosti

### 1. Deljivost topoloških lastnosti

Naj bo  $(X, \mathcal{T})$  topološki prostor in  $\sim$  ekvivalenčna relacija na  $X$ .

- **Definicija.** Kdaj rečemo, da je topološka lastnost deljiva?
- **Trditev.** Karakterizacija  $T_1$  za prostor  $X/\sim$
- **Izrek.** Izrek Aleksandrova [brez dokaza]
- **Opomba.** Kako lahko karakteriziramo Cantorjevo množico? Kako jo lahko surjektivno zvezno preslikamo na interval  $[0, 1]$ ? Ali je preslikava iz izreka Aleksandrova kvocientna?
- **Trditev.** Deljive in nedeljive lastnosti.

## 1.4 Topološke grupe in delovanja

### 1. Topološke grupe

- **Definicija.** Topološka grupa.
- **Primer.** Topološke grupe:
  - Poljubna grupa  $G$ , opremljena z diskretno topologijo.
  - Podgrupa  $H \leq G$  topološke grupe  $G$  z inducirano topologijo.
  - $(\mathbb{R}, +)$ ,  $(\mathbb{C}, +)$ ,  $(\mathbb{H}, +)$ , tudi  $(\mathbb{R}^*, \cdot)$ ,  $(\mathbb{C}^*, \cdot)$ ,  $(\mathbb{H}^*, \cdot)$
  - Norma je multiplikativna  $\leadsto (S^0, \cdot)$ ,  $(S^1, \cdot)$ ,  $(S^3, \cdot)$ . Ali tudi  $S^2$  dopušča strukturo topološke grupe?
  - Produkt topoloških grup, opremljen z operacijama po komponentah in produktno topologijo.
  - Topološke grupe linearnih izomorfizmov  $(\mathrm{GL}_n(\mathbb{F}))$  in njihove standardne podgrupe.
- **Definicija.** Leva (desna) translacija.
- **Trditev.** Ali je leva (desna) translacija homeomorfizem?
- **Posledica.** Ali je topološka grupa homogen prostor? Kaj to pomeni?

### 2. Delovanja grup

- **Definicija.** Levo delovanje topološke grupe  $G$  na prostor  $X$ .
- **Opomba.** Ali tudi delovanje določa translacijo, ki je homeomorfizem prostora  $X$ ?
- **Opomba.** Kaj lahko povemo o orbitah delovanja? Kaj to pomeni za nas?
- **Definicija.** Prostor orbit.
- **Definicija.** Stabilizatorska podgrupa  $G_x$ .
- **Opomba.** V kakšnem odnosu sta  $G \cdot x$  in  $G/G_x$ ?
- **Trditev.** Ali je kvocientna projekcija na prostor orbit vedno odprta?

## 1.5 Konstrukcije kvocientov

### 1. Zlepki

- **Definicija.** Zlepek prostorov  $X$  in  $Y$ .
- **Opomba.** Kako izgledajo ekvivalenčni razredi v zlepku?
- **Izrek.** Zadosten pogoj za normalnost zlepka.
- **Trditev.** Zadosten pogoj, da je zlepek 2-števen. Zadosten pogoj, da je zlepek  $T_2$ .