

Fraktalne dimenzije

Ruslan Urazbakhtin

Fakulteta za matematiko in fiziko, Univerza v Ljubljani

6. maj 2025

„Much of the beauty of fractals is to be found in their mathematics“
— Kenneth Falconer

Kazalo

Fraktalne dimenzije

Ruslan
Urazbakhtin

Uvod

Kaj so fraktali?

Podobnostna
dimenzija

Hausdorffova dimenzija

Hausdorffova mera

Hausdorffova
dimenzija

Lastnosti
Hausdorffove
dimenzije

Primeri računanja
Hausdorffove
dimenzije

Škatlasta dimenzija

Ekvivalentne
definicije

Relacija med
Hausdorffovo in
škatlasto dimenzijo

Lastnosti škatlaste
dimenzije

1 Uvod

- Kaj so fraktali?
- Podobnostna dimenzija

2 Hausdorffova dimenzija

- Hausdorffova mera
- Hausdorffova dimenzija
- Lastnosti Hausdorffove dimenzije
- Primeri računanja Hausdorffove dimenzije

3 Škatlasta dimenzija

- Ekvivalentne definicije
- Relacija med Hausdorffovo in škatlasto dimenzijo
- Lastnosti škatlaste dimenzije

Kaj so fraktali?

Fraktalne dimenzije

Ruslan
Urazbakhtin

Uvod

Kaj so fraktali?

Podobnostna
dimenzija

Hausdorffova dimenzija

Hausdorffova mera

Hausdorffova
dimenzija

Lastnosti
Hausdorffove
dimenzije

Primeri računanja
Hausdorffove
dimenzije

Škatlasta dimenzija

Ekvivalentne
definicije

Relacija med
Hausdorffovo in
škatlasto dimenzijo

Lastnosti škatlaste
dimenzije



Kaj so fraktali?

Fraktalne dimenzije

Ruslan
Urazbakhtin

Uvod

Kaj so fraktali?

Podobnostna
dimenzija

Hausdorffova dimenzija

Hausdorffova mera

Hausdorffova
dimenzija

Lastnosti
Hausdorffove
dimenzije

Primeri računanja
Hausdorffove
dimenzije

Škatlasta dimenzija

Ekvivalentne
definicije

Relacija med
Hausdorffovo in
škatlasto dimenzijo

Lastnosti škatlaste
dimenzije

- Besedo „fraktal“ je uvedel matematik Benoit Mandelbrot v svojem temeljnem eseju leta 1975. Izvira iz latinske besede „fractus“.
- Besedo „fraktal“ Mandelbrot je uporabljal za opis patoloških množic, ki niso bili usklajene z običajno evklidsko geometrijo.
- V svojem originalnem eseju Benoit Mandelbrot je definiral fraktal kot množico, ki ima Hausdorffovo dimenzijo strogo večjo od njene topološke dimenzije.

Kaj so fraktali?

Fraktalne dimenzije

Ruslan
Urazbakhtin

Uvod

Kaj so fraktali?

Podobnostna
dimenzija

Hausdorffova
dimenzija

Hausdorffova mera

Hausdorffova
dimenzija

Lastnosti
Hausdorffove
dimenzije

Primeri računanja
Hausdorffove
dimenzije

Škatlasta
dimenzija

Ekvivalentne
definicije

Relacija med
Hausdorffovo in
škatlasto dimenzijo

Lastnosti škatlaste
dimenzije

Če rečemo, da je neka množica F fraktal, potem si mislimo, da

- 1 F ima fino strukturo, tj. podrobnosti se vidijo vedno enako (neodvisno od skale);
- 2 F je dovolj nenaravna, da je ne moremo opisat s pomočjo elementarne geometrije tako lokalno kot globalno;
- 3 F včasih ima samopodobno obliko;
- 4 Običajno je fraktalna dimenzija F večja od njene topološke dimenzije;
- 5 V večini primerov je F definirana na zelo preprost način, običajno rekurzivno.

Zakaj potrebujemo fraktalno dimenzijo?

Fraktalne dimenzije

Ruslan
Urazbakhtin

Uvod

Kaj so fraktali?

Podobnostna
dimenzija

Hausdorffova dimenzija

Hausdorffova mera

Hausdorffova
dimenzija

Lastnosti
Hausdorffove
dimenzije

Primeri računanja
Hausdorffove
dimenzije

Škatlasta dimenzija

Ekvivalentne
definicije

Relacija med
Hausdorffovo in
škatlasto dimenzijo

Lastnosti škatlaste
dimenzije

- Metode iz evklidske geometrije/analize niso dovolj, da opišemo lastnosti fraktalov.
- Fraktalna geometrija nam ponuja osnovno konstrukcijo za obravnavo množic, ki izgledajo nekako nenaravno.
- Zelo na grobo povedano nam dimenzija množice pove, koliko prostora ta zavzema v ambientnem prostoru.
- Dimenzija meri kompleksnost množice na poljubno majhnih skalah ter opisuje nekatere njene geometrijske in topološke lastnosti.

Borelova σ -algebra

Fraktalne
dimenzije

Ruslan
Urazbakhtin

Uvod

Kaj so fraktali?

Podobnostna
dimenzija

Hausdorffova
dimenzija

Hausdorffova mera

Hausdorffova
dimenzija

Lastnosti
Hausdorffove
dimenzije

Primeri računanja
Hausdorffove
dimenzije

Škatlasta
dimenzija

Ekvivalentne
definicije

Relacija med
Hausdorffovo in
škatlasto dimenzijo

Lastnosti škatlaste
dimenzije

Definicija

Družina podmnožic Σ množice \mathbb{R}^n je **σ -algebra**, če:

- 1 $\mathbb{R}^n \in \Sigma$;
- 2 Če je $A \in \Sigma$, potem $A^c \in \Sigma$;
- 3 Poljubna števna unija množic iz Σ je element Σ .

Borelova σ -algebra

Fraktalne
dimenzije

Ruslan
Urazbakhtin

Uvod

Kaj so fraktali?

Podobnostna
dimenzija

Hausdorffova
dimenzija

Hausdorffova mera

Hausdorffova
dimenzija

Lastnosti
Hausdorffove
dimenzije

Primeri računanja
Hausdorffove
dimenzije

Škatlasta
dimenzija

Ekvivalentne
definicije

Relacija med
Hausdorffovo in
skatlasto dimenzijo

Lastnosti škatlaste
dimenzije

Definicija

Družina podmnožic Σ množice \mathbb{R}^n je **σ -algebra**, če:

- 1 $\mathbb{R}^n \in \Sigma$;
- 2 Če je $A \in \Sigma$, potem $A^c \in \Sigma$;
- 3 Poljubna števna unija množic iz Σ je element Σ .

Definicija

- Najmanjšo σ -algebro na \mathbb{R}^n , ki vsebuje vse odprte podmnožice \mathbb{R}^n , imenujemo **Borelova σ -algebra**.
- Podmnožica $A \subseteq \mathbb{R}^n$ je **Borelova**, če pripada Borelovi σ -algebri.

Borelova σ -algebra

Fraktalne
dimenzije

Ruslan
Urazbakhtin

Uvod

Kaj so fraktali?

Podobnostna
dimenzija

Hausdorffova
dimenzija

Hausdorffova mera
Hausdorffova
dimenzija

Lastnosti
Hausdorffove
dimenzije

Primeri računanja
Hausdorffove
dimenzije

Škatlasta
dimenzija

Ekvivalentne
definicije

Relacija med
Hausdorffovo in
škatlasto dimenzijo

Lastnosti škatlaste
dimenzije

Definicija

- Najmanjšo σ -algebro na \mathbb{R}^n , ki vsebuje vse odprte podmnožice \mathbb{R}^n , imenujemo **Borelova σ -algebra**.
- Podmnožica $A \subseteq \mathbb{R}^n$ je **Borelova**, če pripada Borelovi σ -algebri.

Opomba

- Vse odprte in vse zaprte množice so Borelovi.
- Poljubna števna unija (presek) odprtih (zaprtih) množic je Borelova množica.
- Vsi množici, ki smo jih bomo obravnavali, bodo Borelovi.

Mera na \mathbb{R}^n

Fraktalne
dimenzije

Ruslan
Urazbakhtin

Uvod

Kaj so fraktali?

Podobnostna
dimenzija

Hausdorffova
dimenzija

Hausdorffova mera

Hausdorffova
dimenzija

Lastnosti
Hausdorffove
dimenzije

Primeri računanja
Hausdorffove
dimenzije

Škatlasta
dimenzija

Ekvivalentne
definicije

Relacija med
Hausdorffovo in
škatlasto dimenzijo

Lastnosti škatlaste
dimenzije

Definicija

Preslikava $\mu : \mathcal{P}(\mathbb{R}^n) \rightarrow [0, \infty) \cup \{\infty\}$ je **mera** na \mathbb{R}^n , če

- 1 $\mu(\emptyset) = 0$;
- 2 Če je $A \subseteq B$, potem $\mu(A) \leq \mu(B)$;
- 3 Če je $\{A_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ števna družina podmnožic \mathbb{R}^n , potem

$$\mu \left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \right) \leq \sum_{i=1}^{\infty} \mu(A_i)$$

- 4 Če je $\{A_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ števna družina paroma disjunktnih Borelovih podmnožic \mathbb{R}^n , potem

$$\mu \left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \right) = \sum_{i=1}^{\infty} \mu(A_i)$$

Mera na \mathbb{R}^n

Fraktalne
dimenzije

Ruslan
Urazbakhtin

Uvod

Kaj so fraktali?

Podobnostna
dimenzija

Hausdorffova
dimenzija

Hausdorffova mera

Hausdorffova
dimenzija

Lastnosti
Hausdorffove
dimenzije

Primeri računanja
Hausdorffove
dimenzije

Škatlasta
dimenzija

Ekvivalentne
definicije

Relacija med
Hausdorffovo in
škatlasto dimenzijo

Lastnosti škatlaste
dimenzije

Definicija

Pravimo tudi, da je $\mu(A)$ **mera množice A** .

Opomba

- $\mu(A)$ lahko si predstavljamo kot „velikost“ množice A , ki je izmerjena na nek način.
- 4. pogoj pravi, da če množico A razbijemo na števno mnogo paroma disjunktih Borelovih množic, potem vsota mer delov je enaka mere celotne množice (ponavadi ga težko dokazati).

Primeri mer

Fraktalne
dimenzije

Ruslan
Urazbakhtin

Uvod

Kaj so fraktali?

Podobnostna
dimenzija

Hausdorffova
dimenzija

Hausdorffova mera

Hausdorffova
dimenzija

Lastnosti
Hausdorffove
dimenzije

Primeri računanja
Hausdorffove
dimenzije

Škatlasta
dimenzija

Ekvivalentne
definicije

Relacija med
Hausdorffovo in
škatlasto dimenzijo

Lastnosti škatlaste
dimenzije

■ Mera štetja.

Naj bo $A \subseteq \mathbb{R}^n$. Definiramo $\mu(A) = \begin{cases} n; & |A| = n \in \mathbb{N}, \\ \infty; & \text{sicer} \end{cases}$.

Potem μ je mera na \mathbb{R}^n .

■ Točkasta masa.

Naj bo $a \in \mathbb{R}^n$, $A \subseteq \mathbb{R}^n$. Definiramo $\mu(A) = \begin{cases} 1; & a \in A, \\ 0; & \text{sicer} \end{cases}$.

Potem μ je mera (porazdelitev mase) na \mathbb{R}^n .

Lebesgueva \mathcal{L}^n mera

Fraktalne
dimenzije

Ruslan
Urazbakhtin

Uvod

Kaj so fraktali?

Podobnostna
dimenzija

Hausdorffova
dimenzija

Hausdorffova mera

Hausdorffova
dimenzija

Lastnosti
Hausdorffove
dimenzije

Primeri računanja
Hausdorffove
dimenzije

Škatlasta
dimenzija

Ekvivalentne
definicije

Relacija med
Hausdorffovo in
škatlasto dimenzijo

Lastnosti škatlaste
dimenzije

Lebesgueva \mathcal{L}^n mera na \mathbb{R}^n je posplošitev evklidskih pojmov „dolžina“, „ploščina“, „volumen“ itn. na večji razred množic.

Lebesgueva \mathcal{L}^n mera

Fraktalne
dimenzije

Ruslan
Urazbakhtin

Uvod

Kaj so fraktali?

Podobnostna
dimenzija

Hausdorffova
dimenzija

Hausdorffova mera

dimenzija

Lastnosti
Hausdorffove
dimenzije

Primeri računanja
Hausdorffove
dimenzije

Škatlasta
dimenzija

Ekvivalentne
definicije

Relacija med
Hausdorffovo in
škatlasto dimenzijo

Lastnosti škatlaste
dimenzije

Naj bo $A = \{(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n \mid a_i \leq x_i \leq b_i\}$ kvader v \mathbb{R}^n , potem n -dim volumen množice A je

$$\text{vol}^n(A) := (b_1 - a_1)(b_2 - a_2) \dots (b_n - a_n).$$

Definicija

Lebesgueva mera $\mathcal{L}^n : \mathcal{P}(\mathbb{R}^n) \rightarrow [0, \infty]$ je definirana s predpisom

$$\mathcal{L}^n(A) = \inf \left\{ \sum_{i=1}^{\infty} \text{vol}^n(A_i) \mid A \subseteq \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \right\},$$

kjer so A_i kvadri.

Cantorjeva množica C

Fraktalne
dimenzije

Ruslan
Urazbakhtin

Uvod

Kaj so fraktali?

Podobnostna
dimenzija

Hausdorffova
dimenzija

Hausdorffova mera

Hausdorffova
dimenzija

Lastnosti
Hausdorffove
dimenzije

Primeri računanja
Hausdorffove
dimenzije

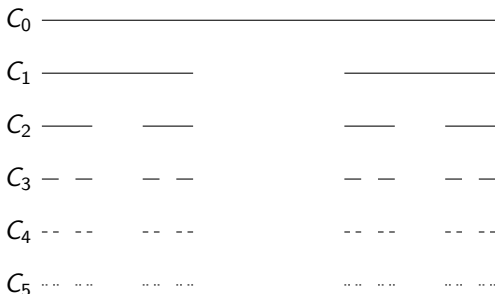
Škatlasta
dimenzija

Ekvivalentne
definicije

Relacija med
Hausdorffovo in
skatlasto dimenzijo

Lastnosti škatlaste
dimenzije

Izračunamo dolžino $\mathcal{L}^1(C)$ Cantorjeve množice $C = \bigcup_{n=1}^{\infty} C_n$.



Lema

Naj bosta $A, B \subseteq \mathbb{R}^n$ Borelovi, $A \subseteq B$. Naj bo μ mera na \mathbb{R}^n .
Potem $\mu(B \setminus A) = \mu(B) - \mu(A)$.

Kochova krivulja K

Fraktalne dimenzije

Ruslan
Urazbakhtin

Uvod

Kaj so fraktali?

Podobnostna
dimenzija

Hausdorffova
dimenzija

Hausdorffova mera

Hausdorffova
dimenzija

Lastnosti
Hausdorffove
dimenzije

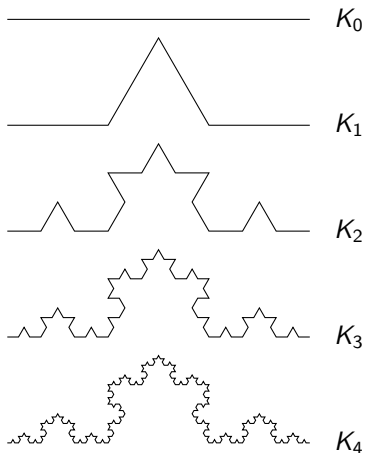
Primeri računanja
Hausdorffove
dimenzije

Škatlasta
dimenzija

Ekvivalentne
definicije

Relacija med
Hausdorffovo in
škatlasto dimenzijo

Lastnosti škatlaste
dimenzije



Kaj je narobe z C in K ?

Fraktalne dimenzije

Ruslan
Urazbakhtin

Uvod

Kaj so fraktali?

Podobnostna
dimenzija

Hausdorffova
dimenzija

Hausdorffova mera

Hausdorffova
dimenzija

Lastnosti
Hausdorffove
dimenzije

Primeri računanja
Hausdorffove
dimenzije

Škatlasta
dimenzija

Ekvivalentne
definicije

Relacija med
Hausdorffovo in
škatlasto dimenzijo

Lastnosti škatlaste
dimenzije

Kaj je narobe z C in K ?

Fraktalne dimenzije

Ruslan
Urazbakhtin

Uvod

Kaj so fraktali?

Podobnostna
dimenzija

Hausdorffova
dimenzija

Hausdorffova mera

Hausdorffova
dimenzija

Lastnosti
Hausdorffove
dimenzije

Primeri računanja
Hausdorffove
dimenzije

Škatlasta
dimenzija

Ekvivalentne
definicije

Relacija med
Hausdorffovo in
škatlasto dimenzijo

Lastnosti škatlaste
dimenzije

- Očitno je, da je pri izbiri dimenzije nekaj narobe (torej z nami).
- Ni možnosti, da bi dobili kaj pametnega, če bi računali ploščino daljice ali šteli njene točke.

Ali obstaja boljša možnost za izbiro dimenzije?

Fraktalne dimenzije

Ruslan
Urazbakhtin

Uvod

Kaj so fraktali?

Podobnostna
dimenzija

Hausdorffova
dimenzija

Hausdorffova mera

Hausdorffova
dimenzija

Lastnosti
Hausdorffove
dimenzije

Primeri računanja
Hausdorffove
dimenzije

Škatlasta
dimenzija

Ekvivalentne
definicije

Relacija med
Hausdorffovo in
škatlasto dimenzijo

Lastnosti škatlaste
dimenzije

Ali obstaja boljša možnost za izbiro dimenzije?

Fraktalne
dimenzije

Ruslan
Urazbakhtin

Obstaja.

Uvod

Kaj so fraktali?

Podobnostna
dimenzija

Hausdorffova
dimenzija

Hausdorffova mera

Hausdorffova
dimenzija

Lastnosti
Hausdorffove
dimenzije

Primeri računanja
Hausdorffove
dimenzije

Škatlasta
dimenzija

Ekvivalentne
definicije

Relacija med
Hausdorffovo in
škatlasto dimenzijo

Lastnosti škatlaste
dimenzije

Podobnostna dimenzija

Fraktalne dimenzije

Ruslan
Urazbakhtin

Uvod

Kaj so fraktali?

Podobnostna
dimenzija

Hausdorffova
dimenzija

Hausdorffova mera

Hausdorffova
dimenzija

Lastnosti
Hausdorffove
dimenzije

Primeri računanja
Hausdorffove
dimenzije

Škatlasta
dimenzija

Ekvivalentne
definicije

Relacija med
Hausdorffovo in
škatlasto dimenzijo

Lastnosti škatlaste
dimenzije

- Kaj lahko povemo o masi daljice, če dvakrat zmanjšamo njeno dolžino?
- Kaj lahko povemo o masi kvadrata, če dvakrat zmanjšamo dolžino njegove stranice?

Podobnostna dimenzija

Fraktalne dimenzije

Ruslan
Urazbakhtin

Uvod

Kaj so fraktali?

Podobnostna
dimenzija

Hausdorffova
dimenzija

Hausdorffova mera

Hausdorffova
dimenzija

Lastnosti
Hausdorffove
dimenzije

Primeri računanja
Hausdorffove
dimenzije

Škatlasta
dimenzija

Ekvivalentne
definicije

Relacija med
Hausdorffovo in
škatlasto dimenzijo

Lastnosti škatlaste
dimenzije

- Kaj lahko povemo o masi daljice, če dvakrat zmanjšamo njeno dolžino?
- Kaj lahko povemo o masi kvadrata, če dvakrat zmanjšamo dolžino njegove stranice?

Torej

$$m(\lambda D) = \lambda^s m(D).$$

Podobnostna dimenzija

Fraktalne
dimenzije

Ruslan
Urazbakhtin

Uvod

Kaj so fraktali?

Podobnostna
dimenzija

Hausdorffova
dimenzija

Hausdorffova mera

Hausdorffova
dimenzija

Lastnosti
Hausdorffove
dimenzije

Primeri računanja
Hausdorffove
dimenzije

Škatlasta
dimenzija

Ekvivalentne
definicije

Relacija med
Hausdorffovo in
škatlasto dimenzijo

Lastnosti škatlaste
dimenzije

Torej

$$m(\lambda D) = \lambda^s m(D).$$

Kaj se zgodi z maso Cantorjeve množice, če trikrat zmanjšamo začetni interval?



Podobnostna dimenzija

Fraktalne
dimenzije

Ruslan
Urazbakhtin

Uvod

Kaj so fraktali?

Podobnostna
dimenzija

Hausdorffova
dimenzija

Hausdorffova mera

Hausdorffova
dimenzija

Lastnosti
Hausdorffove
dimenzije

Primeri računanja
Hausdorffove
dimenzije

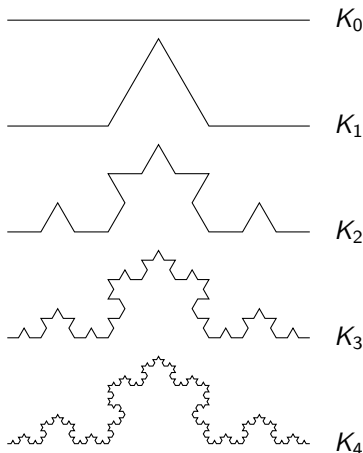
Škatlasta
dimenzija

Ekvivalentne
definicije

Relacija med
Hausdorffovo in
škatlasto dimenzijo

Lastnosti škatlaste
dimenzije

Kaj se zgodi z maso Kochove krivulje, če trikrat zmanjšamo začetni interval?



Podobnostna dimenzija

Fraktalne
dimenzije

Ruslan
Uzrabakhtin

Uvod

Kaj so fraktali?

Podobnostna
dimenzija

Hausdorffova
dimenzija

Hausdorffova mera

Hausdorffova
dimenzija

Lastnosti
Hausdorffove
dimenzije

Primeri računanja
Hausdorffove
dimenzije

Škatlasta
dimenzija

Ekvivalentne
definicije

Relacija med
Hausdorffovo in
škatlasto dimenzijo

Lastnosti škatlaste
dimenzije

Definicija

Naj bo množica $F \subseteq \mathbb{R}^n$ sestavljena iz m kopij same sebe, kjer je vsaka kopija zmanjšana za faktor r . Potem rečemo, da ima množica F **podobnostno dimenzijo** enako $\log_r m$.

Podobnostna dimenzija

Fraktalne
dimenzije

Ruslan
Uzrabakhtin

Uvod

Kaj so fraktali?

Podobnostna
dimenzija

Hausdorffova
dimenzija

Hausdorffova mera

Hausdorffova
dimenzija

Lastnosti
Hausdorffove
dimenzije

Primeri računanja
Hausdorffove
dimenzije

Škatlasta
dimenzija

Ekvivalentne
definicije

Relacija med
Hausdorffovo in
škatlasto dimenzijo

Lastnosti škatlaste
dimenzije

Definicija

Naj bo množica $F \subseteq \mathbb{R}^n$ sestavljena iz m kopij same sebe, kjer je vsaka kopija zmanjšana za faktor r . Potem rečemo, da ima množica F **podobnostno dimenzijo** enako $\log_r m$.

Spet imamo en problem...

Podobnostna dimenzija

Fraktalne
dimenzije

Ruslan
Uzrabakhtin

Uvod

Kaj so fraktali?

Podobnostna
dimenzija

Hausdorffova
dimenzija

Hausdorffova mera

Hausdorffova
dimenzija

Lastnosti
Hausdorffove
dimenzije

Primeri računanja
Hausdorffove
dimenzije

Škatlasta
dimenzija

Ekvivalentne
definicije

Relacija med
Hausdorffovo in
škatlasto dimenzijo

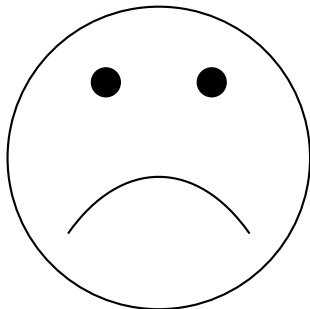
Lastnosti škatlaste
dimenzije

Definicija

Naj bo množica $F \subseteq \mathbb{R}^n$ sestavljena iz m kopij same sebe, kjer je vsaka kopija zmanjšana za faktor r . Potem rečemo, da ima množica F **podobnostno dimenzijo** enako $\log_r m$.

Spet imamo en problem...

Samopodobnih množic je zelo malo. Recimo, že krožnica ni taka.



Podobnostna dimenzija

Fraktalne
dimenzije

Ruslan
Uzrabakhtin

Uvod

Kaj so fraktali?

Podobnostna
dimenzija

Hausdorffova
dimenzija

Hausdorffova mera

Hausdorffova
dimenzija

Lastnosti
Hausdorffove
dimenzije

Primeri računanja
Hausdorffove
dimenzije

Škatlasta
dimenzija

Ekvivalentne
definicije

Relacija med
Hausdorffovo in
škatlasto dimenzijo

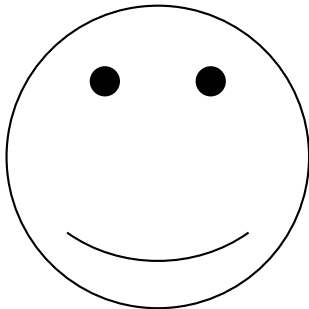
Lastnosti škatlaste
dimenzije

Definicija

Naj bo množica $F \subseteq \mathbb{R}^n$ sestavljena iz m kopij same sebe, kjer je vsaka kopija zmanjšana za faktor r . Potem rečemo, da ima množica F **podobnostno dimenzijo** enako $\log_r m$.

Spet imamo en problem...

Samopodobnih množic je zelo malo. Recimo, že krožnica ni taka.



Hausdorffova dimenzija

Fraktalne dimenzije

Ruslan
Urazbakhtin

Uvod

Kaj so fraktali?

Podobnostna
dimenzija

Hausdorffova dimenzija

Hausdorffova mera

Hausdorffova
dimenzija

Lastnosti
Hausdorffove
dimenzije

Primeri računanja
Hausdorffove
dimenzije

Škatlasta dimenzija

Ekvivalentne
definicije

Relacija med
Hausdorffovo in
škatlasto dimenzijo

Lastnosti škatlaste
dimenzije

- Hausdorffova dimenzija izmed vseh „fraktalnih“ dimenzij, ki jih ljudje uporabljajo, je najbolj stara in verjetno najbolj pomembna.
- Lahko jo definiramo za poljubno množico in matematično je zelo priročna, ker je osnovana na meri, s katero lahko relativno preprosto kaj naredimo.
- Glavna pomanjkljivost je, da jo v večini situacij težko izračunati ali oceniti z numerični metodi.

Hausdorffova mera

Fraktalne
dimenzije

Ruslan
Uzrabakhtin

Uvod

Kaj so fraktali?

Podobnostna
dimenzija

Hausdorffova
dimenzija

Hausdorffova mera

Hausdorffova
dimenzija

Lastnosti
Hausdorffove
dimenzije

Primeri računanja
Hausdorffove
dimenzije

Škatlasta
dimenzija

Ekvivalentne
definicije

Relacija med
Hausdorffovo in
škatlasto dimenzijo

Lastnosti škatlaste
dimenzije

Definicija

Naj bo $F \subseteq \mathbb{R}^n$. Naj bo $\{U_i\}$ števna družina množic iz \mathbb{R}^n , za katero velja:

1 $\forall i \in \mathbb{N}. 0 \leq |U_i| \leq \delta;$

2 $F \subseteq \bigcup_{i=1}^{\infty} U_i.$

Potem $\{U_i\}$ imenujemo **δ -pokritje** množice F .

Hausdorffova mera

Fraktalne dimenzije

Ruslan
Urazbakhtin

Uvod

Kaj so fraktali?

Podobnostna
dimenzija

Hausdorffova dimenzija

Hausdorffova mera

Hausdorffova
dimenzija

Lastnosti
Hausdorffove
dimenzije

Primeri računanja
Hausdorffove
dimenzije

Škatlasta dimenzija

Ekvivalentne
definicije

Relacija med
Hausdorffovo in
škatlasto dimenzijo

Lastnosti škatlaste
dimenzije

Naj bo $F \subseteq \mathbb{R}^n$ in $s \geq 0$. Za vsak $\delta > 0$ definiramo

$$\mathcal{H}_\delta^s(F) = \inf \left\{ \sum_{i=1}^{\infty} |U_i|^s \mid \{U_i\} \text{ je } \delta\text{-pokritje } F \right\}$$

Hausdorffova mera

Fraktalne
dimenzije

Ruslan
Urazbakhtin

Uvod

Kaj so fraktali?

Podobnostna
dimenzija

Hausdorffova
dimenzija

Hausdorffova mera

Hausdorffova
dimenzija

Lastnosti
Hausdorffove
dimenzije

Primeri računanja
Hausdorffove
dimenzije

Škatlasta
dimenzija

Ekvivalentne
definicije

Relacija med
Hausdorffovo in
škatlasto dimenzijo

Lastnosti škatlaste
dimenzije

Naj bo $F \subseteq \mathbb{R}^n$ in $s \geq 0$. Za vsak $\delta > 0$ definiramo

$$\mathcal{H}_\delta^s(F) = \inf \left\{ \sum_{i=1}^{\infty} |U_i|^s \mid \{U_i\} \text{ je } \delta\text{-pokritje } F \right\}$$

Ko $\delta \rightarrow 0$, razred možnih pokritij F se zmanjšuje, torej inf narašča, torej lahko definiramo:

$$\mathcal{H}^s(F) = \lim_{\delta \rightarrow 0} \mathcal{H}_\delta^s(F)$$

Ta limita vedno obstaja za vsako množico $F \subseteq \mathbb{R}^n$.

Hausdorffova mera

Fraktalne
dimenzije

Ruslan
Urazbakhtin

Uvod

Kaj so fraktali?

Podobnostna
dimenzija

Hausdorffova
dimenzija

Hausdorffova mera

Hausdorffova
dimenzija

Lastnosti
Hausdorffove
dimenzije

Primeri računanja
Hausdorffove
dimenzije

Škatlasta
dimenzija

Ekvivalentne
definicije

Relacija med
Hausdorffovo in
skatlasto dimenzijo

Lastnosti škatlaste
dimenzije

Naj bo $F \subseteq \mathbb{R}^n$ in $s \geq 0$. Za vsak $\delta > 0$ definiramo

$$\mathcal{H}_\delta^s(F) = \inf \left\{ \sum_{i=1}^{\infty} |U_i|^s \mid \{U_i\} \text{ je } \delta\text{-pokritje } F \right\}$$

Ko $\delta \rightarrow 0$, razred možnih pokritij F se zmanjšuje, torej inf narašča, torej lahko definiramo:

$$\mathcal{H}^s(F) = \lim_{\delta \rightarrow 0} \mathcal{H}_\delta^s(F)$$

Ta limita vedno obstaja za vsako množico $F \subseteq \mathbb{R}^n$.

Število $\mathcal{H}^s(F)$ imenujemo **s-dim Hausdorffova mera** množice F .

Trditev

\mathcal{H}^s je mera na \mathbb{R}^n .

Hausdorffova mera

Fraktalne
dimenzije

Ruslan
Urazbakhtin

Uvod

Kaj so fraktali?

Podobnostna
dimenzija

Hausdorffova
dimenzija

Hausdorffova mera

Hausdorffova
dimenzija

Lastnosti
Hausdorffove
dimenzije

Primeri računanja
Hausdorffove
dimenzije

Škatlasta
dimenzija

Ekvivalentne
definicije

Relacija med
Hausdorffovo in
škatlasto dimenzijo

Lastnosti škatlaste
dimenzije

Opomba

Hausdorffova mera je posplošitev Lebesgueve mere na necele dimenzije. Se da pokazati, da

$$\mathcal{H}^n(F) = \frac{1}{c_n} \mathcal{L}^n(F),$$

kjer je c_n volumen n -dim krogle z polmerom $\frac{1}{2}$, tj.

$$c_n = \frac{\pi^{(n/2)}}{\Gamma(n/2 + 1)} \left(\frac{1}{2}\right)^n$$

Lastnosti skaliranja

Fraktalne
dimenzije

Ruslan
Uzrabakhtin

Uvod

Kaj so fraktali?

Podobnostna
dimenzija

Hausdorffova
dimenzija

Hausdorffova mera

Hausdorffova
dimenzija

Lastnosti
Hausdorffove
dimenzije

Primeri računanja
Hausdorffove
dimenzije

Škatlasta
dimenzija

Ekvivalentne
definicije

Relacija med
Hausdorffovo in
škatlasto dimenzijo

Lastnosti škatlaste
dimenzije

Definicija

Podobnostna preslikava z koeficientom podobnosti $c > 0$ je preslikava $P : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$, za katero velja:

$$\forall x, y \in \mathbb{R}^n. |P(x) - P(y)| = c|x - y|$$

Lastnosti skaliranja

Fraktalne
dimenzije

Ruslan
Urazbakhtin

Uvod

Kaj so fraktali?

Podobnostna
dimenzija

Hausdorffova
dimenzija

Hausdorffova mera

Hausdorffova
dimenzija

Lastnosti
Hausdorffove
dimenzije

Primeri računanja
Hausdorffove
dimenzije

Škatlasta
dimenzija

Ekvivalentne
definicije

Relacija med
Hausdorffovo in
škatlasto dimenzijo

Lastnosti škatlaste
dimenzije

Naj bo $P : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ podobnostna preslikava z podobnostnim koeficientom $c > 0$. Naj bo $F \subseteq \mathbb{R}^n$.

Dobro poznamo lastnosti skaliranja dolžine, ploščine, volumna, npr.

$$\blacksquare \mathcal{L}^1(P_*(F)) = c\mathcal{L}^1(F)$$

$$\blacksquare \mathcal{L}^2(P_*(F)) = c^2\mathcal{L}^2(F)$$

$$\blacksquare \mathcal{L}^3(P_*(F)) = c^3\mathcal{L}^3(F)$$

Ali velja enako tudi za \mathcal{H}^s ?

Lastnosti skaliranja

Fraktalne
dimenzije

Ruslan
Urazbakhtin

Uvod

Kaj so fraktali?

Podobnostna
dimenzija

Hausdorffova
dimenzija

Hausdorffova mera

Hausdorffova
dimenzija

Lastnosti
Hausdorffove
dimenzije

Primeri računanja
Hausdorffove
dimenzije

Škatlasta
dimenzija

Ekvivalentne
definicije

Relacija med
Hausdorffovo in
škatlasto dimenzijo

Lastnosti škatlaste
dimenzije

Naj bo $P : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ podobnostna preslikava z podobnostnim koeficientom $c > 0$. Naj bo $F \subseteq \mathbb{R}^n$.

Trditev

$$\mathcal{H}^s(P_*(F)) = c^s \mathcal{H}^s(F)$$

Lastnosti skaliranja

Fraktalne
dimenzije

Ruslan
Uzrabakhtin

Uvod

Kaj so fraktali?

Podobnostna
dimenzija

Hausdorffova
dimenzija

Hausdorffova mera

Hausdorffova
dimenzija

Lastnosti
Hausdorffove
dimenzije

Primeri računanja
Hausdorffove
dimenzije

Škatlasta
dimenzija

Ekvivalentne
definicije

Relacija med
Hausdorffovo in
škatlasto dimenzijo

Lastnosti škatlaste
dimenzije

Definicija

Naj bosta $X \subseteq \mathbb{R}^n$ in $Y \subseteq \mathbb{R}^m$. Preslikava $f : X \rightarrow Y$ je **Hölderjeva** stopnje $\alpha > 0$, če

$$\exists c > 0. \forall x, y \in X. |f(x) - f(y)| \leq c|x - y|^\alpha$$

Lastnosti skaliranja

Fraktalne
dimenzije

Ruslan
Urazbaktin

Uvod

Kaj so fraktali?

Podobnostna
dimenzija

Hausdorffova
dimenzija

Hausdorffova mera

Hausdorffova
dimenzija

Lastnosti
Hausdorffove
dimenzije

Primeri računanja
Hausdorffove
dimenzije

Škatlasta
dimenzija

Ekvivalentne
definicije

Relacija med
Hausdorffovo in
skatlasto dimenzijo

Lastnosti škatlaste
dimenzije

Definicija

Naj bosta $X \subseteq \mathbb{R}^n$ in $Y \subseteq \mathbb{R}^m$. Preslikava $f : X \rightarrow Y$ je **Höldorjeva** stopnje $\alpha > 0$, če

$$\exists c > 0. \forall x, y \in X. |f(x) - f(y)| \leq c|x - y|^\alpha$$

Trditev

Naj bo $F \subseteq \mathbb{R}^n$ in $f : F \rightarrow \mathbb{R}^n$ Höldorjeva preslikava stopnje $\alpha > 0$. Potem za vsak $s \geq 0$ velja:

$$\mathcal{H}^{s/\alpha}(f_*(F)) \leq c^{s/\alpha} \mathcal{H}^s(F)$$

Lastnosti skaliranja

Fraktalne
dimenzije

Ruslan
Uzrabakhtin

Uvod

Kaj so fraktali?

Podobnostna
dimenzija

Hausdorffova
dimenzija

Hausdorffova mera

Hausdorffova
dimenzija

Lastnosti
Hausdorffove
dimenzije

Primeri računanja
Hausdorffove
dimenzije

Škatlasta
dimenzija

Ekvivalentne
definicije

Relacija med
Hausdorffovo in
škatlasto dimenzijo

Lastnosti škatlaste
dimenzije

Trditev

Naj bo $F \subseteq \mathbb{R}^n$ in $f : F \rightarrow \mathbb{R}^n$ Höldorjeva preslikava stopnje $\alpha > 0$.
Potem za vsak $s \geq 0$ velja:

$$\mathcal{H}^{s/\alpha}(f_*(F)) \leq c^{s/\alpha} \mathcal{H}^s(F)$$

Posledica

Če je $f : F \rightarrow \mathbb{R}^n$ Lipschitzova, tj.

$$\exists c > 0. \forall x, y \in X. |f(x) - f(y)| \leq c|x - y|,$$

potem

$$\mathcal{H}^s(f_*(F)) \leq c^s \mathcal{H}^s(F)$$

Hausdorffova dimenzija

Fraktalne
dimenzije

Ruslan
Urazbakhtin

Uvod

Kaj so fraktali?

Podobnostna
dimenzija

Hausdorffova
dimenzija

Hausdorffova mera

Hausdorffova
dimenzija

Lastnosti
Hausdorffove
dimenzije

Primeri računanja
Hausdorffove
dimenzije

Škatlasta
dimenzija

Ekvivalentne
definicije

Relacija med
Hausdorffovo in
škatlasto dimenzijo

Lastnosti škatlaste
dimenzije

Naj bo $F \subseteq \mathbb{R}^n$. Gledamo funkcijo

$$\begin{aligned}\mathcal{H}_F : [0, \infty) &\longrightarrow [0, \infty] \\ s &\longmapsto \mathcal{H}^s(F)\end{aligned}$$

Lema

Naj bo $F \subseteq \mathbb{R}^n$. Če je $\mathcal{H}^s(F) < \infty$, potem $\mathcal{H}^t(F) = 0$ za vse $t > s$.

Hausdorffova dimenzija

Fraktalne
dimenzije

Ruslan
Uzrabakhtin

Uvod

Kaj so fraktali?

Podobnostna
dimenzija

Hausdorffova
dimenzija

Hausdorffova mera

Hausdorffova
dimenzija

Lastnosti
Hausdorffove
dimenzije

Primeri računanja
Hausdorffove
dimenzije

Škatlasta
dimenzija

Ekvivalentne
definicije

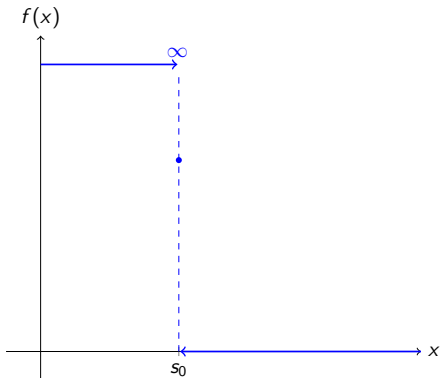
Relacija med
Hausdorffovo in
škatlasto dimenzijo

Lastnosti škatlaste
dimenzije

Lema

Naj bo $F \subseteq \mathbb{R}^n$. Če je $\mathcal{H}^s(F) < \infty$, potem $\mathcal{H}^t(F) = 0$ za vse $t > s$.

Oglejmo si graf funkcije \mathcal{H}_F :



Hausdorffova dimenzija

Fraktalne
dimenzije

Ruslan
Urazbakhtin

Uvod

Kaj so fraktali?

Podobnostna
dimenzija

Hausdorffova
dimenzija

Hausdorffova mera

**Hausdorffova
dimenzija**

Lastnosti
Hausdorffove
dimenzije

Primeri računanja
Hausdorffove
dimenzije

Škatlasta
dimenzija

Ekvivalentne
definicije

Relacija med
Hausdorffovo in
škatlasto dimenzijo

Lastnosti škatlaste
dimenzije

Definicija

Hausdorffova dimenzija množice $F \subseteq \mathbb{R}^n$ je

$$\dim_H F = \inf \{s \geq 0 \mid \mathcal{H}^s(F) = 0\} = \sup \{s \geq 0 \mid \mathcal{H}^s(F) = \infty\}$$

Hausdorffova dimenzija

Fraktalne
dimenzije

Ruslan
Urazbakhtin

Uvod

Kaj so fraktali?

Podobnostna
dimenzija

Hausdorffova
dimenzija

Hausdorffova mera

Hausdorffova
dimenzija

Lastnosti
Hausdorffove
dimenzije

Primeri računanja
Hausdorffove
dimenzije

Škatlasta
dimenzija

Ekvivalentne
definicije

Relacija med
Hausdorffovo in
škatlasto dimenzijo

Lastnosti škatlaste
dimenzije

Definicija

Hausdorffova dimenzija množice $F \subseteq \mathbb{R}^n$ je

$$\dim_H F = \inf \{s \geq 0 \mid \mathcal{H}^s(F) = 0\} = \sup \{s \geq 0 \mid \mathcal{H}^s(F) = \infty\}$$

Opomba

- Po dogovoru $\sup(\emptyset) = 0$.
- Ta dimenzija je definirana za poljubno podmnožico \mathbb{R}^n .

Hausdorffova dimenzija

Fraktalne
dimenzije

Ruslan
Urazbakhtin

Uvod

Kaj so fraktali?

Podobnostna
dimenzija

Hausdorffova
dimenzija

Hausdorffova mera

Hausdorffova
dimenzija

Lastnosti
Hausdorffove
dimenzije

Primeri računanja
Hausdorffove
dimenzije

Škatlasta
dimenzija

Ekvivalentne
definicije

Relacija med
Hausdorffovo in
škatlasto dimenzijo

Lastnosti škatlaste
dimenzije

Definicija

Hausdorffova dimenzija množice $F \subseteq \mathbb{R}^n$ je

$$\dim_H F = \inf \{s \geq 0 \mid \mathcal{H}^s(F) = 0\} = \sup \{s \geq 0 \mid \mathcal{H}^s(F) = \infty\}$$

Imamo:

$$\mathcal{H}^s(F) = \begin{cases} \infty; & 0 \leq s < \dim_H F \\ 0; & s > \dim_H F; \end{cases}$$

Če je $s = \dim_H F$, potem $\mathcal{H}^s(F)$ lahko 0, ∞ ali $a \in \mathbb{R}$.

Hausdorffova dimenzija krogle B^n

Fraktalne
dimenzije

Ruslan
Urazbakhtin

Uvod

Kaj so fraktali?

Podobnostna
dimenzija

Hausdorffova
dimenzija

Hausdorffova mera

**Hausdorffova
dimenzija**

Lastnosti
Hausdorffove
dimenzije

Primeri računanja
Hausdorffove
dimenzije

Škatlasta
dimenzija

Ekvivalentne
definicije

Relacija med
Hausdorffovo in
škatlasto dimenzijo

Lastnosti škatlaste
dimenzije

Lema

$$\dim_H B^n = n$$

Hausdorffova dimenzija krogle B^n

Fraktalne
dimenzije

Ruslan
Urazbakhtin

Uvod

Kaj so fraktali?

Podobnostna
dimenzija

Hausdorffova
dimenzija

Hausdorffova mera

Hausdorffova
dimenzija

Lastnosti
Hausdorffove
dimenzije

Primeri računanja
Hausdorffove
dimenzije

Škatlasta
dimenzija

Ekvivalentne
definicije

Relacija med
Hausdorffovo in
škatlasto dimenzijo

Lastnosti škatlaste
dimenzije

Lema

$$\dim_H B^n = n$$

Spomnimo se

Lema

$$\mathcal{H}^n(F) = \frac{1}{c_n} \mathcal{L}^n(F),$$

kjer je c_n volumen n -dim krogle z polmerom $\frac{1}{2}$, tj.

$$c_n = \frac{\pi^{(n/2)}}{\Gamma(n/2 + 1)} \left(\frac{1}{2}\right)^n$$

Lastnosti Hausdorffove dimenzije

Fraktalne
dimenzije

Ruslan
Urazbakhtin

Uvod

Kaj so fraktali?

Podobnostna
dimenzija

Hausdorffova
dimenzija

Hausdorffova mera

Hausdorffova
dimenzija

**Lastnosti
Hausdorffove
dimenzije**

Primeri računanja
Hausdorffove
dimenzije

Škatlasta
dimenzija

Ekvivalentne
definicije

Relacija med
Hausdorffovo in
škatlasto dimenzijo

Lastnosti škatlaste
dimenzije

(1) **Monotonost.** Če je $E \subseteq F$, potem $\dim_H E \leq \dim_H F$.

Lastnosti Hausdorffove dimenzije

Fraktalne dimenzije

Ruslan
Urazbakhtin

Uvod

Kaj so fraktali?

Podobnostna
dimenzija

Hausdorffova dimenzija

Hausdorffova mera

Hausdorffova
dimenzija

Lastnosti Hausdorffove dimenzije

Primeri računanja
Hausdorffove
dimenzije

Škatlasta dimenzija

Ekvivalentne
definicije

Relacija med
Hausdorffovo in
škatlasto dimenzijo

Lastnosti škatlaste
dimenzije

- (1) **Monotonost.** Če je $E \subseteq F$, potem $\dim_H E \leq \dim_H F$.
- (2) **Števena stabilnost.** Če je F_1, F_2, \dots števno zaporedje množic, potem

$$\dim_H \bigcup_{i=1}^{\infty} F_i = \sup_{1 \leq i < \infty} (\dim_H F_i)$$

Lastnosti Hausdorffove dimenzije

Fraktalne dimenzije

Ruslan
Urazbakhtin

Uvod

Kaj so fraktali?

Podobnostna
dimenzija

Hausdorffova dimenzija

Hausdorffova mera

Hausdorffova
dimenzija

Lastnosti Hausdorffove dimenzije

Primeri računanja
Hausdorffove
dimenzije

Škatlasta dimenzija

Ekvivalentne
definicije

Relacija med
Hausdorffovo in
škatlasto dimenzijo

Lastnosti škatlaste
dimenzije

- (1) **Monotonost.** Če je $E \subseteq F$, potem $\dim_H E \leq \dim_H F$.
- (2) **Števena stabilnost.** Če je F_1, F_2, \dots števno zaporedje množic, potem

$$\dim_H \bigcup_{i=1}^{\infty} F_i = \sup_{1 \leq i < \infty} (\dim_H F_i)$$

- (3) **Dimenzija števnih množic.** Če je F števna, potem $\dim_H F = 0$.

Lastnosti Hausdorffove dimenzije

Fraktalne dimenzije

Ruslan
Urazbakhtin

Uvod

Kaj so fraktali?

Podobnostna
dimenzija

Hausdorffova dimenzija

Hausdorffova mera

Hausdorffova
dimenzija

Lastnosti Hausdorffove dimenzije

Primeri računanja
Hausdorffove
dimenzije

Škatlasta dimenzija

Ekvivalentne
definicije

Relacija med
Hausdorffovo in
škatlasto dimenzijo

Lastnosti škatlaste
dimenzije

- (1) **Monotonost.** Če je $E \subseteq F$, potem $\dim_H E \leq \dim_H F$.
- (2) **Števena stabilnost.** Če je F_1, F_2, \dots števno zaporedje množic, potem

$$\dim_H \bigcup_{i=1}^{\infty} F_i = \sup_{1 \leq i < \infty} (\dim_H F_i)$$

- (3) **Dimenzija števnih množic.** Če je F števna, potem $\dim_H F = 0$.
- (4) **Dimenzija odprtih množic.** Naj bo $F \subseteq \mathbb{R}^n$ odprta podmnožica. Potem $\dim_H F = n$.

Lastnosti Hausdorffove dimenzije

Fraktalne
dimenzije

Ruslan
Urazbakhtin

Uvod

Kaj so fraktali?

Podobnostna
dimenzija

Hausdorffova
dimenzija

Hausdorffova mera

Hausdorffova
dimenzija

Lastnosti
Hausdorffove
dimenzije

Primeri računanja
Hausdorffove
dimenzije

Škatlasta
dimenzija

Ekvivalentne
definicije

Relacija med
Hausdorffovo in
škatlasto dimenzijo

Lastnosti škatlaste
dimenzije

(1) **Monotonost.** Če je $E \subseteq F$, potem $\dim_H E \leq \dim_H F$.

(2) **Števena stabilnost.** Če je F_1, F_2, \dots števno zaporedje množic, potem

$$\dim_H \bigcup_{i=1}^{\infty} F_i = \sup_{1 \leq i < \infty} (\dim_H F_i)$$

(3) **Dimenzija števnih množic.** Če je F števna, potem $\dim_H F = 0$.

(4) **Dimenzija odprtih množic.** Naj bo $F \subseteq \mathbb{R}^n$ odprta podmnožica. Potem $\dim_H F = n$.

(5) **Dimenzija gladkih podmnogoterosti.** Naj bo $F \subseteq \mathbb{R}^n$ gladka podmnogoterost dimenzije m , potem $\dim_H F = m$. Posebej:

- Če je F gladka krivulja, potem $\dim_H F = 1$;
- Če je F gladka ploskev, potem $\dim_H F = 2$.

Transformacijske lastnosti Hausdorffove dimenzije

Fraktalne
dimenzije

Ruslan
Uzrabakhtin

Uvod

Kaj so fraktali?

Podobnostna
dimenzija

Hausdorffova
dimenzija

Hausdorffova mera

Hausdorffova
dimenzija

Lastnosti
Hausdorffove
dimenzije

Primeri računanja
Hausdorffove
dimenzije

Škatlasta
dimenzija

Ekvivalentne
definicije

Relacija med
Hausdorffovo in
škatlasto dimenzijo

Lastnosti škatlaste
dimenzije

Trditev

Naj bo $F \subseteq \mathbb{R}^n$ in $f : F \rightarrow \mathbb{R}^n$ Höldorjeva preslikava stopnje $\alpha > 0$.
Potem

$$\dim_H f_*(F) \leq \frac{1}{\alpha} \dim_H F$$

Transformacijske lastnosti Hausdorffove dimenzije

Fraktalne
dimenzije

Ruslan
Uzrabakhtin

Uvod

Kaj so fraktali?

Podobnostna
dimenzija

Hausdorffova
dimenzija

Hausdorffova mera

Hausdorffova
dimenzija

Lastnosti
Hausdorffove
dimenzije

Primeri računanja
Hausdorffove
dimenzije

Škatlasta
dimenzija

Ekvivalentne
definicije

Relacija med
Hausdorffovo in
škatlasto dimenzijo

Lastnosti škatlaste
dimenzije

Trditev

Naj bo $F \subseteq \mathbb{R}^n$ in $f : F \rightarrow \mathbb{R}^n$ Höldorjeva preslikava stopnje $\alpha > 0$.
Potem

$$\dim_H f_*(F) \leq \frac{1}{\alpha} \dim_H F$$

Spomnimo se

Trditev

Naj bo $F \subseteq \mathbb{R}^n$ in $f : F \rightarrow \mathbb{R}^n$ Höldorjeva preslikava stopnje $\alpha > 0$.
Potem za vsak $s \geq 0$ velja:

$$\mathcal{H}^{s/\alpha}(f_*(F)) \leq c^{s/\alpha} \mathcal{H}^s(F)$$

Transformacijske lastnosti Hausdorffove dimenzije

Fraktalne
dimenzije

Ruslan
Uzrabakhtin

Uvod

Kaj so fraktali?

Podobnostna
dimenzija

Hausdorffova
dimenzija

Hausdorffova mera

Hausdorffova
dimenzija

Lastnosti
Hausdorffove
dimenzije

Primeri računanja
Hausdorffove
dimenzije

Škatlasta
dimenzija

Ekvivalentne
definicije

Relacija med
Hausdorffovo in
škatlasto dimenzijo

Lastnosti škatlaste
dimenzije

Trditev

Naj bo $F \subseteq \mathbb{R}^n$ in $f : F \rightarrow \mathbb{R}^n$ Höldorjeva preslikava stopnje $\alpha > 0$.
Potem

$$\dim_H f_*(F) \leq \frac{1}{\alpha} \dim_H F$$

Posledica

- Če je $f : F \rightarrow \mathbb{R}^n$ Lipschitzova, potem $\dim_H f_*(F) \leq \dim_H(F)$.

Transformacijske lastnosti Hausdorffove dimenzije

Fraktalne
dimenzije

Ruslan
Urazbakhtin

Uvod

Kaj so fraktali?

Podobnostna
dimenzija

Hausdorffova
dimenzija

Hausdorffova mera

Hausdorffova
dimenzija

Lastnosti
Hausdorffove
dimenzije

Primeri računanja
Hausdorffove
dimenzije

Škatlasta
dimenzija

Ekvivalentne
definicije

Relacija med
Hausdorffovo in
škatlasto dimenzijo

Lastnosti škatlaste
dimenzije

Trditev

Naj bo $F \subseteq \mathbb{R}^n$ in $f : F \rightarrow \mathbb{R}^n$ Höldorjeva preslikava stopnje $\alpha > 0$.
Potem

$$\dim_H f_*(F) \leq \frac{1}{\alpha} \dim_H F$$

Posledica

- Če je $f : F \rightarrow \mathbb{R}^n$ Lipschitzova, potem $\dim_H f_*(F) \leq \dim_H(F)$.
- Če je $f : F \rightarrow \mathbb{R}^n$ bi-Lipschitzova, tj.

$$\exists c_1, c_2 > 0. \forall x, y \in X. c_1|x - y| \leq |f(x) - f(y)| \leq c_2|x - y|,$$

$$\text{potem } \dim_H f_*(F) = \dim_H(F).$$

Topološke lastnosti Hausdorffove dimenzije

Fraktalne dimenzije

Ruslan
Uzrabakhtin

Uvod

Kaj so fraktali?

Podobnostna
dimenzija

Hausdorffova dimenzija

Hausdorffova mera

Hausdorffova
dimenzija

Lastnosti Hausdorffove dimenzije

Primeri računanja
Hausdorffove
dimenzije

Škatlasta dimenzija

Ekvivalentne
definicije

Relacija med
Hausdorffovo in
škatlasto dimenzijo

Lastnosti škatlaste
dimenzije

Trditev

Naj bo $F \subseteq \mathbb{R}^n$. Če je $\dim_H F < 1$, potem je $F \dots$

Topološke lastnosti Hausdorffove dimenzije

Fraktalne dimenzije

Ruslan
Uzrabakhtin

Uvod

Kaj so fraktali?

Podobnostna
dimenzija

Hausdorffova dimenzija

Hausdorffova mera

Hausdorffova
dimenzija

Lastnosti Hausdorffove dimenzije

Primeri računanja
Hausdorffove
dimenzije

Škatlasta dimenzija

Ekvivalentne
definicije

Relacija med
Hausdorffovo in
škatlasto dimenzijo

Lastnosti škatlaste
dimenzije

Trditev

Naj bo $F \subseteq \mathbb{R}^n$. Če je $\dim_H F < 1$, potem je F popolnoma nepovezana.

Hausdorffova dimenzija Cantorjeva praha

Fraktalne dimenzije

Ruslan
Urazbakhtin

Uvod

Kaj so fraktali?

Podobnostna
dimenzija

Hausdorffova dimenzija

Hausdorffova mera

Hausdorffova
dimenzija

Lastnosti
Hausdorffove
dimenzije

Primeri računanja
Hausdorffove
dimenzije

Škatlasta dimenzija

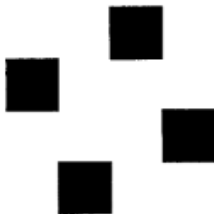
Ekvivalentne
definicije

Relacija med
Hausdorffovo in
škatlasto dimenzijo

Lastnosti škatlaste
dimenzije



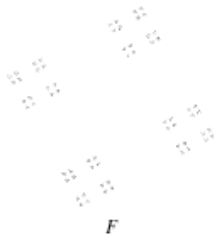
E_0



E_1



E_2



F

Hausdorffova dimenzija Cantorjeve množice in Kochove krivulje

Fraktalne
dimenzije

Ruslan
Uzrabakhtin

Uvod

Kaj so fraktali?

Podobnostna
dimenzija

Hausdorffova
dimenzija

Hausdorffova mera

Hausdorffova
dimenzija

Lastnosti
Hausdorffove
dimenzije

Primeri računanja
Hausdorffove
dimenzije

Škatlasta
dimenzija

Ekvivalentne
definicije

Relacija med
Hausdorffovo in
škatlasto dimenzijo

Lastnosti škatlaste
dimenzije

Primer

Naj bo C Cantorjeva množica in K Kochova krivulja, potem

- $\dim_H C = \log_3 2 = 0.6309 \dots$
- $\dim_H K = \log_3 4 = 1.2618 \dots$

Druge vrste dimenzij

Fraktalne
dimenzije

Ruslan
Urazbakhtin

Uvod

Kaj so fraktali?

Podobnostna
dimenzija

Hausdorffova
dimenzija

Hausdorffova mera

Hausdorffova
dimenzija

Lastnosti
Hausdorffove
dimenzije

Primeri računanja
Hausdorffove
dimenzije

Škatlasta
dimenzija

Ekvivalentne
definicije

Relacija med
Hausdorffovo in
škatlasto dimenzijo

Lastnosti škatlaste
dimenzije

Opomba

- Hausdorffova dimenzija je osnova.
- Ni res, da vse definicije delujejo za vse množice.
- Osnovna ideja za vse dimenzije je „meritev“ v skali $\delta > 0$, tj. za vsak $\delta > 0$ merimo množico na način, ki ignorira nepravilnosti, ki so manjše od δ . Nato pa gledamo, kaj se zgodi v limiti $\delta \rightarrow 0$.

Škatlasta dimenzija

Fraktalne
dimenzije

Ruslan
Urazbakhtin

Uvod

Kaj so fraktali?

Podobnostna
dimenzija

Hausdorffova
dimenzija

Hausdorffova mera

Hausdorffova
dimenzija

Lastnosti
Hausdorffove
dimenzije

Primeri računanja
Hausdorffove
dimenzije

Škatlasta
dimenzija

Ekvivalentne
definicije

Relacija med
Hausdorffovo in
škatlasto dimenzijo

Lastnosti škatlaste
dimenzije

Definicija

Naj bo $f : \mathbb{R}_{>0} \rightarrow \mathbb{R}$ funkcija.

- **Spodnja limita** funkcije f ko gre x proti 0 je

$$\underline{\lim}_{x \rightarrow 0} f(x) := \lim_{r \rightarrow 0} (\inf \{f(x) \mid 0 < x < r\})$$

- **Zgornja limita** funkcije f ko gre x proti 0 je

$$\overline{\lim}_{x \rightarrow 0} f(x) := \lim_{r \rightarrow 0} (\sup \{f(x) \mid 0 < x < r\})$$

Škatlasta dimenzija

Fraktalne dimenzije

Ruslan
Urazbakhtin

Uvod

Kaj so fraktali?

Podobnostna
dimenzija

Hausdorffova dimenzija

Hausdorffova mera

Hausdorffova
dimenzija

Lastnosti
Hausdorffove
dimenzije

Primeri računanja
Hausdorffove
dimenzije

Škatlasta dimenzija

Ekvivalentne
definicije

Relacija med
Hausdorffovo in
škatlasto dimenzijo

Lastnosti škatlaste
dimenzije

Naj bo $F \subseteq \mathbb{R}^n$ omejena in neprazna. Označimo z $N_\delta(F)$ najmanjšo število množic s premerom kvečjemu $\delta > 0$, ki jih potrebujemo za pokritje F .

Škatlasta dimenzija

Fraktalne
dimenzije

Ruslan
Urazbakhtin

Uvod

Kaj so fraktali?

Podobnostna
dimenzija

Hausdorffova
dimenzija

Hausdorffova mera

Hausdorffova
dimenzija

Lastnosti
Hausdorffove
dimenzije

Primeri računanja
Hausdorffove
dimenzije

Škatlasta
dimenzija

Ekvivalentne
definicije

Relacija med
Hausdorffovo in
škatlasto dimenzijo

Lastnosti škatlaste
dimenzije

Naj bo $F \subseteq \mathbb{R}^n$ omejena in neprazna. Označimo z $N_\delta(F)$ najmanjšo število množic s premerom kvečjemu $\delta > 0$, ki jih potrebujemo za pokritje F .

Definicija

- **Spodnja škatlasta dimenzija** množice F je

$$\underline{\dim}_B F = \lim_{\delta \rightarrow 0} \frac{\ln N_\delta(F)}{-\ln \delta}$$

- **Zgornja škatlasta dimenzija** množice F je

$$\overline{\dim}_B F = \overline{\lim}_{\delta \rightarrow 0} \frac{\ln N_\delta(F)}{-\ln \delta}$$

Škatlasta dimenzija

Fraktalne
dimenzije

Ruslan
Urazbakhtin

Uvod

Kaj so fraktali?

Podobnostna
dimenzija

Hausdorffova
dimenzija

Hausdorffova mera

Hausdorffova
dimenzija

Lastnosti
Hausdorffove
dimenzije

Primeri računanja
Hausdorffove
dimenzije

Škatlasta
dimenzija

Ekvivalentne
definicije

Relacija med
Hausdorffovo in
škatlasto dimenzijo

Lastnosti škatlaste
dimenzije

Definicija

- **Spodnja škatlasta dimenzija** množice F je

$$\underline{\dim}_B F = \lim_{\delta \rightarrow 0} \frac{\ln N_\delta(F)}{-\ln \delta}$$

- **Zgornja škatlasta dimenzija** množice F je

$$\overline{\dim}_B F = \overline{\lim}_{\delta \rightarrow 0} \frac{\ln N_\delta(F)}{-\ln \delta}$$

- Če $\underline{\dim}_B F = \overline{\dim}_B F$, potem skupno število imenujemo
Škatlasta dimenzija množice F , tj.

$$\dim_B F = \lim_{\delta \rightarrow 0} \frac{\ln N_\delta(F)}{-\ln \delta}$$

Škatlasta dimenzija (ekvivalentne oblike)

Fraktalne
dimenzije

Ruslan
Urazbakhtin

Uvod

Kaj so fraktali?

Podobnostna
dimenzija

Hausdorffova
dimenzija

Hausdorffova mera

Hausdorffova
dimenzija

Lastnosti
Hausdorffove
dimenzije

Primeri računanja
Hausdorffove
dimenzije

Škatlasta
dimenzija

Ekvivalentne
definicije

Relacija med
Hausdorffovo in
škatlasto dimenzijo

Lastnosti škatlaste
dimenzije

Definicija

Naj bo $F \subseteq \mathbb{R}^n$ omejena in neprazna. **Škatlasta dimenzija** množice F je

$$\dim_B F = \lim_{\delta \rightarrow 0} \frac{\ln N_\delta(F)}{-\ln \delta}$$

kjer je $N_\delta(F)$ lahko:

- najmanjše število množic s premerom kvečjemu δ , ki pokrivajo F ;
- najmanjše število zaprtih krogel z radijem δ , ki pokrivajo F ;
- najmanjše število zaprtih kvadrov s stranico δ , ki pokrivajo F ;
- število δ -mreža kvadrov, ki sekajo F ;
- največje število disjunktnih zaprtih krogel z radijem δ in središči na množici F .

δ -mreža

Fraktalne dimenzije

Ruslan
Urazbakhtin

Uvod

Kaj so fraktali?

Podobnostna
dimenzija

Hausdorffova dimenzija

Hausdorffova mera

Hausdorffova
dimenzija

Lastnosti
Hausdorffove
dimenzije

Primeri računanja
Hausdorffove
dimenzije

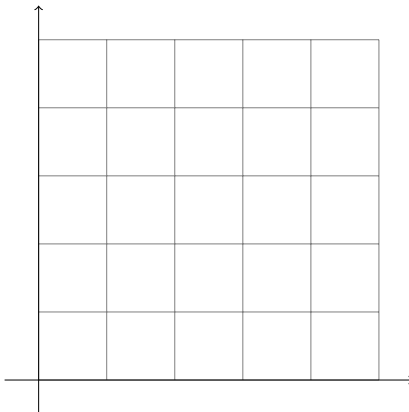
Škatlasta dimenzija

Ekvivalentne
definicije

Relacija med
Hausdorffovo in
škatlasto dimenzijo

Lastnosti škatlaste
dimenzije

$$\dim_B F = \lim_{\delta \rightarrow 0} \frac{\ln N_\delta(F)}{-\ln \delta}$$



Disjunktne zaprte krogle

Fraktalne dimenzije

Ruslan
Urazbakhtin

Uvod

Kaj so fraktali?

Podobnostna
dimenzija

Hausdorffova dimenzija

Hausdorffova mera

Hausdorffova
dimenzija

Lastnosti
Hausdorffove
dimenzije

Primeri računanja
Hausdorffove
dimenzije

Škatlasta dimenzija

Ekvivalentne
definicije

Relacija med
Hausdorffovo in
škatlasto dimenzijo

Lastnosti škatlaste
dimenzije

$$\dim_B F = \lim_{\delta \rightarrow 0} \frac{\ln N_\delta(F)}{-\ln \delta}$$

Škatlasta dimenzija Cantorjeve množice

Fraktalne
dimenzije

Ruslan
Urazbakhtin

Uvod

Kaj so fraktali?

Podobnostna
dimenzija

Hausdorffova
dimenzija

Hausdorffova mera

Hausdorffova
dimenzija

Lastnosti
Hausdorffove
dimenzije

Primeri računanja
Hausdorffove
dimenzije

Škatlasta
dimenzija

Ekvivalentne
definicije

Relacija med
Hausdorffovo in
škatlasto dimenzijo

Lastnosti škatlaste
dimenzije

Primer

Naj bo C Cantorjeva množica, potem

$$\dim_H C = \log_3 2 = 0.6309 \dots$$

Relacija med Hausdorffovo in škatlasto dimenzijo

Fraktalne
dimenzije

Ruslan
Urazbakhtin

Uvod

Kaj so fraktali?

Podobnostna
dimenzija

Hausdorffova
dimenzija

Hausdorffova mera

Hausdorffova
dimenzija

Lastnosti
Hausdorffove
dimenzije

Primeri računanja
Hausdorffove
dimenzije

Škatlasta
dimenzija

Ekvivalentne
definicije

Relacija med
Hausdorffovo in
škatlasto dimenzijo

Lastnosti škatlaste
dimenzije

Trditev

$$\dim_H F \leq \underline{\dim}_B F \leq \overline{\dim}_B F$$

Relacija med Hausdorffovo in škatlasto dimenzijo

Fraktalne
dimenzije

Ruslan
Urazbakhtin

Uvod

Kaj so fraktali?

Podobnostna
dimenzija

Hausdorffova
dimenzija

Hausdorffova mera

Hausdorffova
dimenzija

Lastnosti
Hausdorffove
dimenzije

Primeri računanja
Hausdorffove
dimenzije

Škatlasta
dimenzija

Ekvivalentne
definicije

Relacija med
Hausdorffovo in
škatlasto dimenzijo

Lastnosti škatlaste
dimenzije

Trditev

$$\dim_H F \leq \underline{\dim}_B F \leq \overline{\dim}_B F$$

Opomba

V splošnem enakost NE velja, ne glede na to, da za nekatere lepe množice enakost drži.

Lastnosti škatlaste dimenzije

Fraktalne
dimenzije

Ruslan
Urazbakhtin

Uvod

Kaj so fraktali?

Podobnostna
dimenzija

Hausdorffova
dimenzija

Hausdorffova mera

Hausdorffova
dimenzija

Lastnosti
Hausdorffove
dimenzije

Primeri računanja
Hausdorffove
dimenzije

Škatlasta
dimenzija

Ekvivalentne
definicije

Relacija med
Hausdorffovo in
škatlasto dimenzijo

Lastnosti škatlaste
dimenzije

(1) **Monotonost.** $\underline{\dim}_B$ in $\overline{\dim}_B$ sta monotoni.

Lastnosti škatlaste dimenzije

Fraktalne dimenzije

Ruslan
Uzbekhtin

Uvod

Kaj so fraktali?

Podobnostna
dimenzija

Hausdorffova dimenzija

Hausdorffova mera

Hausdorffova
dimenzija

Lastnosti
Hausdorffove
dimenzije

Primeri računanja
Hausdorffove
dimenzije

Škatlasta dimenzija

Ekvivalentne
definicije

Relacija med
Hausdorffovo in
škatlasto dimenzijo

Lastnosti škatlaste
dimenzije

- (1) **Monotonost.** $\underline{\dim}_B$ in $\overline{\dim}_B$ sta monotoni.
- (2) **Končna stabilnost.** $\overline{\dim}_B$ je končno stabilna, tj.

$$\overline{\dim}_B(E \cup F) = \max(\overline{\dim}_B E, \overline{\dim}_B F).$$

Ta identiteta v splošnem NE velja za $\underline{\dim}_B$.

Lastnosti škatlaste dimenzije

Fraktalne dimenzije

Ruslan
Urazbakhtin

Uvod

Kaj so fraktali?

Podobnostna
dimenzija

Hausdorffova dimenzija

Hausdorffova mera

Hausdorffova
dimenzija

Lastnosti
Hausdorffove
dimenzije

Primeri računanja
Hausdorffove
dimenzije

Škatlasta dimenzija

Ekvivalentne
definicije

Relacija med
Hausdorffovo in
škatlasto dimenzijo

Lastnosti škatlaste
dimenzije

- (1) **Monotonost.** $\underline{\dim}_B$ in $\overline{\dim}_B$ sta monotoni.
- (2) **Končna stabilnost.** $\overline{\dim}_B$ je končno stabilna, tj.

$$\overline{\dim}_B(E \cup F) = \max(\overline{\dim}_B E, \overline{\dim}_B F).$$

Ta identiteta v splošnem NE velja za $\underline{\dim}_B$.

- (3) **Dimenzija odprtih množic.** Naj bo $F \subseteq \mathbb{R}^n$ odprta podmnožica. Potem $\dim_B F = n$.

Lastnosti škatlaste dimenzije

Fraktalne dimenzije

Ruslan
Urazbakhtin

Uvod

Kaj so fraktali?

Podobnostna
dimenzija

Hausdorffova dimenzija

Hausdorffova mera

Hausdorffova
dimenzija

Lastnosti
Hausdorffove
dimenzije

Primeri računanja
Hausdorffove
dimenzije

Škatlasta dimenzija

Ekvivalentne
definicije

Relacija med
Hausdorffovo in
škatlasto dimenzijo

Lastnosti škatlaste
dimenzije

- (1) **Monotonost.** $\underline{\dim}_B$ in $\overline{\dim}_B$ sta monotoni.
- (2) **Končna stabilnost.** $\overline{\dim}_B$ je končno stabilna, tj.

$$\overline{\dim}_B(E \cup F) = \max(\overline{\dim}_B E, \overline{\dim}_B F).$$

Ta identiteta v splošnem NE velja za $\underline{\dim}_B$.

- (3) **Dimenzija odprtih množic.** Naj bo $F \subseteq \mathbb{R}^n$ odprta podmnožica. Potem $\dim_B F = n$.
- (4) **Dimenzija gladih podmnogoterosti.** Naj bo $F \subseteq \mathbb{R}^n$ gladka podmnogoterost dimenzije m , potem $\dim_B F = m$.

Težave škatlaste dimenzije

Fraktalne dimenzije

Ruslan
Urazbakhtin

Uvod

Kaj so fraktali?

Podobnostna
dimenzija

Hausdorffova dimenzija

Hausdorffova mera

Hausdorffova
dimenzija

Lastnosti
Hausdorffove
dimenzije

Primeri računanja
Hausdorffove
dimenzije

Škatlasta dimenzija

Ekvivalentne
definicije

Relacija med
Hausdorffovo in
škatlasto dimenzijo

Lastnosti škatlaste
dimenzije

Trditev

Naj bo $F \subseteq \mathbb{R}^n$ omejena in neprazna. Velja:

$$1 \quad \underline{\dim}_B \operatorname{Cl} F = \underline{\dim}_B F.$$

$$2 \quad \overline{\dim}_B \operatorname{Cl} F = \overline{\dim}_B F.$$

Težave škatlaste dimenzije

Fraktalne
dimenzije

Ruslan
Urazbakhtin

Uvod

Kaj so fraktali?

Podobnostna
dimenzija

Hausdorffova
dimenzija

Hausdorffova mera

Hausdorffova
dimenzija

Lastnosti
Hausdorffove
dimenzije

Primeri računanja
Hausdorffove
dimenzije

Škatlasta
dimenzija

Ekvivalentne
definicije

Relacija med
Hausdorffovo in
škatlasto dimenzijo

Lastnosti škatlaste
dimenzije

Trditev

Naj bo $F \subseteq \mathbb{R}^n$ omejena in neprazna. Velja:

1 $\underline{\dim}_B \text{Cl } F = \underline{\dim}_B F.$

2 $\overline{\dim}_B \text{Cl } F = \overline{\dim}_B F.$

Posledica

V splošnem

$$\dim_B \bigcup_{i=1}^{\infty} F_i \neq \sup_{1 \leq i < \infty} (\dim_B F_i)$$

Težave škatlaste dimenzije

Fraktalne
dimenzije

Ruslan
Urazbakhtin

Uvod

Kaj so fraktali?

Podobnostna
dimenzija

Hausdorffova
dimenzija

Hausdorffova mera

Hausdorffova
dimenzija

Lastnosti
Hausdorffove
dimenzije

Primeri računanja
Hausdorffove
dimenzije

Škatlasta
dimenzija

Ekvivalentne
definicije

Relacija med
Hausdorffovo in
škatlasto dimenzijo

Lastnosti škatlaste
dimenzije

Ali bomo še vedno imeli težave, če bomo gledali le zaprte množice?

Težave škatlaste dimenzije

Fraktalne
dimenzije

Ruslan
Urazbakhtin

Uvod

Kaj so fraktali?

Podobnostna
dimenzija

Hausdorffova
dimenzija

Hausdorffova mera

Hausdorffova
dimenzija

Lastnosti
Hausdorffove
dimenzije

Primeri računanja
Hausdorffove
dimenzije

Škatlasta
dimenzija

Ekvivalentne
definicije

Relacija med
Hausdorffovo in
škatlasto dimenzijo

Lastnosti škatlaste
dimenzije

Ali bomo še vedno imeli težave, če bomo gledali le zaprte množice?
Bomo...

Težave škatlaste dimenzije

Fraktalne
dimenzije

Ruslan
Urazbakhtin

Uvod

Kaj so fraktali?

Podobnostna
dimenzija

Hausdorffova
dimenzija

Hausdorffova mera

Hausdorffova
dimenzija

Lastnosti
Hausdorffove
dimenzije

Primeri računanja
Hausdorffove
dimenzije

Škatlasta
dimenzija

Ekvivalentne
definicije

Relacija med
Hausdorffovo in
škatlasto dimenzijo

Lastnosti škatlaste
dimenzije

Ali bomo še vedno imeli težave, če bomo gledali le zaprte množice?

Primer

Naj bo $F = \left\{ \frac{1}{n} \mid n \in \mathbb{N} \right\} \cup \{0\}$.

F je kompaktna množica z $\dim_B F = \frac{1}{2}$.

Od kod pride ta težava?

Fraktalne
dimenzije

Ruslan
Urazbakhtin

Uvod

Kaj so fraktali?

Podobnostna
dimenzija

Hausdorffova
dimenzija

Hausdorffova mera

Hausdorffova
dimenzija

Lastnosti
Hausdorffove
dimenzije

Primeri računanja
Hausdorffove
dimenzije

Škatlasta
dimenzija

Ekvivalentne
definicije

Relacija med
Hausdorffovo in
škatlasto dimenzijo

Lastnosti škatlaste
dimenzije

Opomba

- Pri računanju Hausdorffove dimenzije privzamemo, da množice pokritja $\{U_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ imajo različne velikosti.
- Pri računanju škatlaste dimenzije pa je velikost množic pokritja $\{U_i\}_{1 \leq i \leq k}$ vedno fiksna (je enaka δ).

Od kod pride ta težava?

Fraktalne
dimenzije

Ruslan
Urazbakhtin

Uvod

Kaj so fraktali?

Podobnostna
dimenzija

Hausdorffova
dimenzija

Hausdorffova mera

Hausdorffova
dimenzija

Lastnosti
Hausdorffove
dimenzije

Primeri računanja
Hausdorffove
dimenzije

Škatlasta
dimenzija

Ekvivalentne
definicije

Relacija med
Hausdorffovo in
škatlasto dimenzijo

Lastnosti škatlaste
dimenzije

Opomba

- Pri računanju Hausdorffove dimenzije privzamemo, da množice pokritja $\{U_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ imajo različne velikosti.
- Pri računanju škatlaste dimenzije pa je velikost množic pokritja $\{U_i\}_{1 \leq i \leq k}$ vedno fiksna (je enaka δ).
- Se nam zdi, da bi bilo smiselno definirati mero

$$\nu(F) = \lim_{\delta \rightarrow 0} N_\delta(F) \delta^s$$

Povzetek o škatlasti dimenziji

Fraktalne dimenzije

Ruslan
Uzbekhtin

Uvod

Kaj so fraktali?

Podobnostna
dimenzija

Hausdorffova dimenzija

Hausdorffova mera

Hausdorffova
dimenzija

Lastnosti
Hausdorffove
dimenzije

Primeri računanja
Hausdorffove
dimenzije

Škatlasta dimenzija

Ekvivalentne
definicije

Relacija med
Hausdorffovo in
škatlasto dimenzijo

Lastnosti škatlaste
dimenzije

- Škatlasta dimenzija je zelo uporabna v praksi.
- Pogosto se da dokazati, da je enaka Hausdorffovi.

Fraktalne dimenzije

Ruslan
Urazbakhtin

Uvod

Kaj so fraktali?

Podobnostna
dimenzija

Hausdorffova dimenzija

Hausdorffova mera

Hausdorffova
dimenzija

Lastnosti
Hausdorffove
dimenzije

Primeri računanja
Hausdorffove
dimenzije

Škatlasta dimenzija

Ekvivalentne
definicije

Relacija med
Hausdorffovo in
škatlasto dimenzijo

Lastnosti škatlaste
dimenzije

Hvala za pozornost!