Fraktalna dimenzija

5. maj 2025

1 Uvod

> Much of the beauty of fractals is to be found in their mathematics.
> — Kenneth Falconer

Danes bomo spoznali, katere množice imenujemo **fraktale**, kaj pomeni **fraktalna dimenzija**, katere vrste poznamo in po čem se razlikujejo. Izračunali bomo dimenzije različnih matematičnih in naravnih fraktalov, da bi bolje razumeli matematiko, ki se skriva v ozadju.
Zgodovinsko gledano so se matematiki ukvarjali predvsem z množicami in funkcijami, ki jih je bilo mogoče obravnavati s klasičnimi metodami analize – torej z gladkimi množicami, zveznimi in odvedljivimi funkcijami. Strukture, ki so bile videti nenaravne, so pogosto označili kot patološke primere in jih praviloma prezrli.
V sodobni matematiki pa pomembno vlogo igrajo tudi fraktali, ki niso presenetljivo pogosto najboljše modele za naravne (fizične) objekte, v primerjavi s klasičnimi geometrijskimi liki. Fraktalna geometrija nam ponuja osnovno konstrukcijo za obravnavo množic, ki izgledajo nekako nenaravno.

Oglejmo si nekaj primerov "patoloških"množic:

Primer. (Cantorjeva množica) Definiramo jo tako: Začnemo z zaprtim intervalom $C_0 = [0, 1]$, nato iz njega izrežemo srednjo tretjino, tj. interval $(\frac{1}{3}, \frac{2}{3})$. Ostaneta zaprta intervala $C_1 = [0, \frac{1}{3}] \cup [\frac{2}{3}, 1]$. Postopek ponavljamo, torej na vsakem koraku iz preostalih intervalov izrežimo srednjo tretjino. **Cantorjevo množico C** nato definiramo kot presek množic C_n:

$$C = \bigcap_{n=0}^{\infty} C_n.$$

Lastnosti Cantorjeve množice:

- Generacija C_k vsebuje 2^k intervalov dolžine $\frac{1}{3^k}$;
- Samopodobna: levi in desni del C, sta kopiji (geometrično podobni) C, ki sta zmanjšani za factor $\frac{1}{3}$;
- Ima dolžino 0 (za poljubno smiselno definicijo dolžine): dolžina izrezanih intervalov je

$$\frac{1}{3} + 2 \cdot \frac{1}{9} + 4 \cdot \frac{1}{81} + \ldots = \frac{1}{3}\left(1 + \frac{2}{3} + \left(\frac{2}{3}\right)^2 + \ldots\right) = 1;$$

- Kljub temu, da ima dolžino 0, C ima neštevno mnogo točk;
- Ima fino strukturo, tj. vsebuje podrobnosti pri vsaki povečavi;
- Ima preprosto konstrukcijo, ker je definirana rekurzivno. Lahko jo poljubno dobro aproksimiramo z množicami C_n;
- Cantorjeva množica nima izoliranih točk, v okolici vsake točke C je neštevno mnogo drugih točk na različnih razdaljah, torej je težko opisati geometrijo množice C.

Primer. (Kochova krivulja) Definiramo jo tako: Začnemo z daljico dolžine 1, ki jo razdelimo na tri enako velike dele. Nato odstranimo srednji del in ga nadomestimo z dvema enako dolgima deloma, tako da tvorita trikotnik nad odstranjeno daljico. V naslednjem koraku enak postopek ponovimo na vsaki od dobljenih štirih daljic. Ta postopek ponavljamo v neskončnost. Lahko si vprašamo, kakšno dolžino ima dobljena krivulja? k-ta generacija sestoji iz 4^k premic, vsaka premica ima dolžino $\frac{1}{3^k}$, torej dolžina krivulje na k-te generacije je enaka $\left(\frac{4}{3}\right)^k$. To geometrijsko zaporedje divergira, ker $\frac{4}{3} > 1$, torej Kochova krivulja ima neskončno dolžino. Po drugi strani, Kochova krivulja ima ploščino (Lebesguevo $\mathcal{L}^2$ mero) enako 0.

Kaj je narobe s temi primeri? Izkaže se, da dolžina, ploščina, volumen itn. (kaj bi to ni pomenilo) niso ustrezne dimenzije za opis nekaterih množic. Ampak kaj potem sploh so »prave« dimenzije?

Besedo „fraktal“ je uvedel matematik Benoit Mandelbrot v svojem temeljnem eseju leta 1975. Izvira iz latinske besede „fractus“, kar pomeni „zlomljen“. To besedo Mendelbrot je uporabljal za opis patoloških množic, ki niso bili usklajene z običajno evklidsko geometrijo.
Izkaže se, da metode iz klasične geometrije in analize ni uporabne za študij značilnosti fraktalov, zato potrebujemo neko drugo orodje in to orodje je fraktalna dimenzija, ki jo lahko definiramo na različne načine. Za nas je precej naravna ideja, da (gladke) krivulje imajo dimenzijo 1, geometrijske like kot so kvadre, krogle itn. imajo dimenzijo 2. Manj očitno pa je, zakaj ima Cantorjeva množica dimenzijo $\frac{\ln 2}{\ln 3} = 0.631...$ in zakaj Kochova krivulja ima dimenzijo $\frac{\ln 4}{\ln 3} = 1.262...$ Vendar to je vsaj skladno z intuicijo, ker Cantorjeva množica ima neštevno mnogo točk (torej ni končna množica točk, torej ni 0-dim), ampak ima dolžino 0 (torej je preprosta, da bi bila 1-dim daljica) in Kochova krivulja ima neskončno dolžino, ampak ima ploščino 0.
V splošnem lahko definiramo podobnostno dimenzijo:

Definicija. Naj bo množica F sestavljena iz m kopij same sebe, kjer je vsaka kopija zmanjšana za faktor r. Potem rečemo, da ima množica F podobnastno dimenzijo enako $\frac{\ln m}{\ln r}$.

Opomba. V koliko krat se poveča masa, če 2-krat povečamo dolžino?

Kaj je problem te definicije? Problem je v tem, da samopodobnih množic je zelo malo. Recimo, že krožnica ni taka, vendar za nekatere preproste primere, se izkaže, da je enaka tudi drugim.
Na srečo obstajajo tudi druge definicije dimenzije, kot sta Hausdorffova dimenzija ali škatlasta dimenzija, ki ju lahko definiramo za poljubno podmnožico v $\mathbb{R}^n$. Zelo na grobo povedano nam dimenzija množice pove, koliko prostora ta zavzema v ambientnem prostoru. Dimenzija meri kompleksnost množice na poljubno majhnih skalah ter opisuje nekatere njene geometrijske in topološke lastnosti.

V svojem originalnem eseju Benoit Mendelbrot je definiral fraktal kot množico, ki ima Hausdorffovo dimenzijo strogo večjo od njene topološke dimenzije.

Definicija (Lebesgueva topološka dimenzija)**.** Naj bo X normalni topološki prostor (posebej: metrizabilen). **Lebesgueva dimenzija** prostora X je najmanjše število $n \in \mathbb{N}_0$, za katero velja: za vsako končno odprto pokritje $\mathcal{U} = \{U_i\}_{1 \leq i \leq n}$ prostora X obstaja končno odprto pokritje $\mathcal{V} = \{V_j\}_{1 \leq j \leq m}$ prostora X, za katero velja:
- $\forall V \in \mathcal{V} \,.\, \exists i \in [n] \,.\, V \subseteq U_i$;
- Vsaka točka $x \in X$ je vsebovana k večjemu v $n + 1$ članicah pokritja $\mathcal{V}$.

Primer.
- Ta definicija se ujema z običajno definicijo evklidske dimenzije.
- Cantorjeva množica C ima topološko dimenzijo 0: TODO:

Izkaže se, da to ni najboljša definicija, ker ne vključuje množice, ki so gotovo fraktali, npr. Peanova krivulja ima topološko dimenzijo 2.
Raje opišemo lastnosti, ki jih imajo fraktali. Če rečemo, da je neka množica F fraktal, potem se mislimo, da
1. F ima fino strukturo, tj. podrobnosti na vseh skalah.
2. F je dovolj nenaravna, da bi jo lahko opisali s pomočjo elementarne geometrije tako lokalno kot globalno.
3. F včasih ima samopodobno obliko;
4. Običajno fraktalna dimenzija F je večja od njene topološke dimenzije;
5. V večini primerov F je definirana na zelo preprost način, običajno rekurzivno.

1.1 Matematično ozadje

Teorija množic

Definicija. Naj bo $A \subseteq \mathbb{R}^n,\ \delta > 0$. **$\delta$-okolcija A_δ množice A** je

$$A_\delta = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \exists y \in A\,.\,|x - y| \leq \delta\}$$

Definicija. Naj bosta $A, B \subseteq \mathbb{R}^n$ in $\lambda \in \mathbb{R}$, definiramo
- **Vektorsko vsoto**: $A + B = \{x + y \mid x \in A \wedge y \in B\}$;
- **Skalarno množenje**: $\lambda A = \{\lambda x \mid x \in A\}$.

Definicija. Naj bo $A \subseteq \mathbb{R}^n,\ A \neq \emptyset$. **Premer množice A** je

$$|A| = \sup\{|x - y| \mid x, y \in A\}$$

Opomba.
- $|A| \in [0, \infty) \cup \{\infty\}$;
- $|B(x, r)| = 2r,\ |C(x, \delta)| = 2\delta\sqrt{n}$, kjer $C(x, \delta) = \{y = (y_1, \ldots, y_n) \in \mathbb{R}^n \mid \forall i \in [n]\,.\,|y_i - x_i| \leq \delta\}$

Definicija. Množica $A \subseteq \mathbb{R}^n$ je **omejena**, če $|A| < \infty$ (ekvivalentno: $\exists \delta > 0\,.\,A \subseteq K(0, \delta)$).

Funkcije in limite

Zanimive so:
- Preslikave, ki ohranjajo geometrijski lastnosti množic: izometrije, translacije, rotacije, zrcaljenja.

Definicija. **Podobnostna preslikava** z koeficientom podobnosti $c > 0$ je preslikava $P : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, za katero velja:

$$\forall x, y \in \mathbb{R}^n\,.\,|P(x) - P(y)| = c|x - y|$$

Definicija. Naj bosta $X \subseteq \mathbb{R}^n$ in $Y \subseteq \mathbb{R}^m$.
- Preslikava $f : X \to Y$ je **Hölderjeva** stopnje $\alpha > 0$, če

$$\exists c > 0\,.\,\forall x, y \in X\,.\,|f(x) - f(y)| \leq c|x - y|^\alpha$$

- Če je $\alpha = 1$, potem pravimo, da je preslikava f je **Lipschitzova**:

$$\exists c > 0\,.\,\forall x, y \in X\,.\,|f(x) - f(y)| \leq c|x - y|$$

- Preslikava $f : X \to Y$ je **bi-Lipschitzova**, če

$$\exists c_1, c_2 > 0\,.\,\forall x, y \in X\,.\,c_1|x - y| \leq |f(x) - f(y)| \leq c_2|x - y|$$

Naj bo $f : \mathbb{R}_{>0} \to \mathbb{R}$ funkcija. Nas ponavadi bo zanimalo obnašanje funkcije f v okolici točke 0. Za ta name definiramo spodnjo in zgornjo limito funkcije f:

Definicija. Naj bo $f : \mathbb{R}_{>0} \to \mathbb{R}$ funkcija.
- **Spodnja limita** funkcije f ko gre x proti 0 je

$$\underline{\lim}_{x\to\infty} f(x) := \lim_{r\to 0} \left(\inf\{f(x) \mid 0 < x < r\}\right)$$

- **Zgornja limita** funkcije f ko gre x proti 0 je

$$\overline{\lim}_{x\to\infty} f(x) := \lim_{r\to 0} \left(\sup\{f(x) \mid 0 < x < r\}\right)$$

Opomba.
- Če $A \subseteq B \subseteq \mathbb{R}$, potem $\inf(A) \geq \inf(B)$ in $\sup(A) \geq \sup(B)$. Torej $\inf : \mathcal{P}(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ je naraščajoča funkcija in $\sup : \mathcal{P}(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ je padajoča funkcija. Posledično, to pomeni, da spodnja in zgornja limita vedno obstajata (končni ali $\pm\infty$) in te limiti opisujeta ekstremne vrednosti funkcije f v okolici točke 0.
- Če $\underline{\lim}_{x\to\infty} f(x) = \overline{\lim}_{x\to\infty} f(x) = L$, potem $\lim_{x\to 0} f(x)$ obstaja in $\lim_{x\to 0} f(x) = L$.
- Zakaj potrebujemo spodnjo in zgornjo limito? Problematična funkcija: $f(x) = \sin\frac{1}{x}$

Teorija mere

- Če želimo govoriti o fraktalne dimenzije, moramo poznati kaj je mera, vendar za naš namen bo dovolj poznati le osnovne ideje.
- Bomo obravnavali le mere na $\mathbb{R}^n$.
- Mera je način opisati „velikost“ množice.

Definicija.
- Družina podmnožic Σ množice $\mathbb{R}^n$ je σ-algebra, če:
  - $\mathbb{R}^n \in \Sigma$;
  - Če je $A \in \Sigma$, potem $A^c \in \Sigma$;
  - Poljubna števna unija (presek) množic iz Σ je element Σ
- Najmanjšo σ-algebro na $\mathbb{R}^n$, ki vsebuje vse odprte množice imenujemo **Borelova σ-algebra** in jo označimo z $B(\mathbb{R}^n)$.
- Podmnožica $A \subseteq \mathbb{R}^n$ je **Borelova**, če pripada Borelovi σ-algebri.

Opomba.
- Vse odprte in vse zaprte množice so Borelovi.
- Poljubna števna unija (presek) odprtih (zaprtih) množic je Borelova množica.
- Vsi množici, ki smo jih bomo obravnavali bodo Borelovi.

Definicija. Preslikava $\mu : \mathcal{P}(\mathbb{R}^n) \to [0, \infty) \cup \{\infty\}$ je **mera** na $\mathbb{R}^n$, če
1. $\mu(\emptyset) = 0$;
2. Če je $A \subseteq B$, potem $\mu(A) \leq \mu(B)$;
3. Če je $\{A_i\}$ števna (ali končna) družina, potem
$$\mu\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) \leq \sum_{i=1}^{\infty} \mu(A_i)$$
4. Če je $\{A_i\}$ števna (ali končna) družina paroma disjunktnih Borelovih množic, potem
$$\mu\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) = \sum_{i=1}^{\infty} \mu(A_i)$$

Pravimo tudi, da je $\mu(A)$ **mera** množice A.

Opomba.
- $\mu(A)$ lahko si predstavljamo kot „velikost“ množice A, ki je izmerjena na nek način.
- 4. pogoj pravi, da če množico A razbijemo na števno mnogo paroma disjunktnih Borelovih množic, potem vsota mer delov je enaka mere celotne množice (ponavadi ga težko dokazati).

Lema. Če sta $A, B \subseteq \mathbb{R}^n$ Borelovi in $B \subseteq A$, potem
$$\mu(A \setminus B) = \mu(B) - \mu(A)$$

Dokaz. $A = B \cup (A \setminus B)$ je disjunktna unija. □

Lema. Če je $A_1 \subseteq A_2 \subseteq \ldots$ naraščajoče zaporedje Borelovih množic v $\mathbb{R}^n$, potem
$$\lim_{i\to\infty} \mu(A_i) = \mu\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right)$$

Dokaz. $\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i = A_1 \cup (A_2 \setminus A_1) \cup (A_3 \setminus A_2) \cup \ldots$ je disjunktna unija Borelovih množic. □

Primer. Primeri mer:
- **Mera štetja.**
  Naj bo $A \subseteq \mathbb{R}^n$. Definiramo $\mu(A) = \begin{cases} n; & |A| = n \in \mathbb{N}, \\ \infty; & \text{sicer} \end{cases}$. Potem μ je mera na R^n.
- **Točkasta masa.** Naj bo $a \in \mathbb{R}^n$, $A \subseteq \mathbb{R}^n$. Definiramo $\mu(A) = \begin{cases} 1; & a \in A, \\ 0; & \text{sicer} \end{cases}$. Potem μ je mera (porazdelitev mase) na $\mathbb{R}^n$.

- **Lebesgueva mera $\mathcal{L}^n$ na $\mathbb{R}^n$**
  - Lebesgueva mera na $\mathbb{R}^n$ je posplošitev pojmov „dolžina“, „ploščina“, „volumen“ itn. na večji razred množic.

  Naj bo $A = \{(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n \mid a_i \leq x_i \leq b_i\}$ kvader v $\mathbb{R}^n$, potem n-dimenzionalni volumen množice A je $\mathrm{vol}^n(A) := (b_1 - a_1)(b_2 - a_2) \dots (b_n - a_n)$.

  Definicija. **Lebesgueva mera** $\mathcal{L}^n : \mathcal{P}(\mathbb{R}^n) \to [0, \infty]$ je

  $$\mathcal{L}^n(A) = \inf \left\{ \sum_{i=1}^{\infty} \mathrm{vol}^n(A_i) \mid A \subseteq \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \right\},$$

  kjer so A_i kvadri.

  Opomba.
  - Gledamo vsa pokritja množice A z kvadri in vzemimo najmanjši možen volumen.
  - $\mathcal{L}^1$ je posplošitev pojma „dolžina“, $\mathcal{L}^2$ je posplošitev pojma „ploščina“ itn.

2 Hausdorffova mera in dimenzija

- Pojem „dimenzija“ je osrednji v fraktalni geometriji.
- Na grobo povedano nam dimenzija množice pove, koliko prostora ta zavzema v ambientnem prostoru.
- Hausdorffova dimenzija izmed vseh „fraktalnih“ dimenzij, ki jih ljudje uporabljajo, je najbolj stara in verjetno najbolj pomembna. Lahko jo definiramo za poljubno množico in matematično je zelo priročna, ker je osnovana na mere, s katero lahko relativno preprosto kaj naredimo.
- Glavna pomanjkljivost je, da jo v večini situacij težko izračunati ali oceniti z numerični metodi.
- Nujna za razumevanje matematike fraktalov.

2.1 Hausdorffova mera

Definicija. Naj bo $F \subseteq \mathbb{R}^n$. Naj bo $\{U_i\}$ števna družina množic iz R^n, za katero velja:
1. $\forall i \in \mathbb{N} \,.\, 0 \leq |U_i| \leq \delta$;
2. $F \subseteq \bigcup_{i=1}^{\infty} U_i$.

Potem $\{U_i\}$ imenujemo **δ-pokritje** množice F.

Naj bo $F \subseteq \mathbb{R}^n$ in $s \geq 0$. Za vsak $\delta > 0$ definiramo

$$\mathcal{H}^s_\delta(F) = \inf \left\{ \sum_{i=1}^{\infty} |U_i|^s \;\middle|\; \{U_i\} \text{ je } \delta\text{-pokritje } F \right\}$$

Ko $\delta \to 0$, razred možnih pokritij F se zmanjšuje, torej inf narašča, torej lahko definiramo:

$$\mathcal{H}^s(F) = \lim_{\delta \to 0} \mathcal{H}^s_\delta(F)$$

Ta limita vedno obstaja za vsako $F \subseteq \mathbb{R}^n$ in običajno 0 ali ∞. Število $\mathcal{H}^s(F)$ imenujemo **s-dimenzionalna Hausdorffova mera** množice F.

Trditev. $\mathcal{H}^s$ je mera na $\mathbb{R}^n$.

Dokaz.
1. $\{\emptyset\}$ je pokritje $\emptyset$ za vse $\delta > 0$.
2. Če je $E \subseteq F$, potem je vsako δ-pokritje množice F tudi δ-pokritje množice E sledi, da $\mathcal{H}^s(E) \leq \mathcal{H}^s(F)$, ker gledamo infimum manjše množice.
3. Naj bo $\epsilon > 0$. Izberimo pokritje $\{A_{ij}\}_j$ množice A_i tako, da $\sum_{j=1}^{\infty} |A_{ij}|^s < \mathcal{H}^s_\delta(A_i) + \frac{\epsilon}{2^i}$.
   Družina $\{A_ij\}_{i \geq 1, j \geq 1}$ je pokritje množice A (unije). Torej

   $$\mathcal{H}^s_\delta(A) \leq \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{\infty} |A_{ij}|^s < \sum_{i=1}^{\infty} \mathcal{H}^s_\delta(A_i) \frac{\epsilon}{2^i} = \left(\sum_{i=1}^{\infty} \mathcal{H}^s_\delta(A_i) \right) + \epsilon.$$

   V limiti $\epsilon \to 0$ dobimo želeno neenakost.
4. Dokaz je težek. □

Opomba. Hausdorffova mera je posplošitev Lebesgueve mere na necele dimenzije. Se da pokazati, da

$$\mathcal{H}^n(F) = \frac{1}{c_n} \mathcal{L}^n(F),$$

kjer c_n je volumen n-dim krogle z polmerom $\frac{1}{2}$, tj.

$$c_n = \frac{\pi^{(n/2)}}{2^n \, \Gamma(n/2 + 1)}$$

Lastnosti skaliranja

lastnosti skaliranja so temeljne za teorijo fraktalov. Dobro vemo, da je:
- $\mathcal{L}^1(\lambda F) = \lambda \mathcal{L}^1(F)$
- $\mathcal{L}^2(\lambda F) = \lambda^2 \mathcal{L}^1(F)$
- $\mathcal{L}^3(\lambda F) = \lambda^3 \mathcal{L}^1(F)$

Ali isto velja za $\mathcal{H}^s$?

Trditev. Naj bo $P : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ podobnostna preslikava z podobnostnim koeficientom $\lambda > 0$ in $F \subseteq \mathbb{R}^n$. Velja:

$$\mathcal{H}^s(P_*(F)) = \lambda^s \mathcal{H}^s(F)$$

Dokaz. Naj bo $\{U_i\}$ δ-pokritje množice F, potem $\{P_*(U_i)\}$ je $\lambda\delta$-pokritje množice $P_*(F)$, torej

$$\sum_{i=1}^{\infty} |S(U_i)|^s = \lambda^s \sum_{i=1}^{\infty} |U_i|$$

Vzemimo infimum in dobimo:

$$\mathcal{H}^s_{\lambda\delta}(P_*(F)) \leq \lambda^s \mathcal{H}^s_\delta$$

Zdaj limita $\delta \to 0$ implicira

$$\mathcal{H}^s(P(F)) \leq \lambda^s \mathcal{H}^s(F).$$

Obratno: zamenjamo P na P^{-1}, λ na $1/\lambda$ in F na $P(F)$. □

Z podobnim argumentom dobimo:

Trditev. Naj bo $F \subseteq \mathbb{R}^n$ in $f : F \to \mathbb{R}^n$ Höldorjeva preslikava stopnje $\alpha > 0$. Potem za vsak $s \geq 0$ velja:

$$\mathcal{H}^{s/\alpha}(f_*(F)) \leq c^{s/\alpha} \mathcal{H}^s(F)$$

Dokaz. TODO: □

Opomba.

- Posebej pomemben primer, ko je f Lipschitzova, tj. $\alpha = 1$. Tedaj dobimo:

$$\mathcal{H}^s(f_*(F)) \leq c^s \mathcal{H}^s(F)$$

- Če je f izometrija, potem

$$\mathcal{H}^s(f_*(F)) = c^s \mathcal{H}^s(F)$$

2.2 Hausdorffova dimenzija

Naj bo $F \subseteq \mathbb{R}^n$. Gledamo funkcijo $\mathcal{H}_F : [0, \infty) \to [0, \infty]$, $\mathcal{H}_F(s) = \mathcal{H}^s(F)$.

Lema. Naj bo $f \subseteq \mathbb{R}^n$. Če je $\mathcal{H}^s(F) < \infty$, potem $\mathcal{H}^t(F) = 0$ za vse $t > s$.

Dokaz. Naj bo $\{U_i\}$ δ-pokritje množice F, potem

$$\sum_{i=1}^{\infty} |U_i|^t = \sum_{i=1}^{\infty} |U_i|^{t-s} |U_i|^s \leq \delta^{t-s} \sum_{i=1}^{\infty} |U_i|^s$$

Vzemimo infimum in dobimo:

$$\mathcal{H}^t_\delta(F) \leq \delta^{t-s} \mathcal{H}^s_\delta(F)$$

V limiti $\delta \to 0$ dobimo želeni rezultat. □

Če oglejmo si graf funkcije $\mathcal{H}_F$ vidimo, da obstaja kritična točka s_0, ko $\mathcal{H}_F$ skoči z ∞ do 0.

Definicija. Hausdorffova dimenzija množice F je

$$\dim_H F = \inf\{s \geq 0 \mid \mathcal{H}^s(F) = 0\} = \sup\{s \geq 0 \mid \mathcal{H}^s(F) = \infty\}$$

Opomba.

- Po dogovoru $\sup(\emptyset) = 0$.
- Ta dimenzija je definirana za poljubno podmnožico $\mathbb{R}^n$.

Imamo:

$$\mathcal{H}^s(F) = \begin{cases} \infty; & 0 \leq s < \dim_H F \\ 0; & s > \dim_H F; \end{cases}$$

Če je $s = \dim_H F$, potem $\mathcal{H}^s(F)$ lahko 0, ∞ ali $a \in \mathbb{R}$

Primer. $F = B^2 \subseteq \mathbb{R}^3$. TODO:

Lastnosti Hausdorffove dimenzije

(1) Monotonost. Če je $E \subseteq F$, potem $\dim_H E \leq \dim_H F$.

Dokaz. To sledi iz lastnosti mere: $\mathcal{H}^s(E) \leq \mathcal{H}^s(F)$ □

(2) Števna stabilnost. Če je $F_1, F_2, \ldots$ števno zaporedje množic, potem

$$\dim_H \bigcup_{i=1}^{\infty} F_i = \sup_{1 \leq i < \infty} (\dim_H F_i)$$

Dokaz. Ker za vsak $j \in \mathbb{N}$ velja, da $F_j \subseteq \bigcup_{i=1}^{\infty} F_i$ sledi (monotonost), da $\dim_H F_j \leq \dim_H \bigcup_{i=1}^{\infty} F_i$, torej

$$\dim_H \bigcup_{i=1}^{\infty} F_i \geq \sup_{1 \leq i < \infty} (\dim_H F_i)$$

Po drugi strani: Označimo z $s = \sup_{1 \leq i < \infty}(\dim_H F_i)$. Naj bo $\epsilon > 0$ sledi, da za vsak $i \in \mathbb{N}$ velja, da $\dim_H F_i < s + \epsilon$, torej $\mathcal{H}^{s+\epsilon}(F_i) = 0$. Iz lastnosti mere sledi, da $\mathcal{H}^{s+\epsilon}\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} F_i\right) \leq \sum_{i=1}^{\infty} \mathcal{H}^{s+\epsilon}(F_i) = 0$. Od tod sledi, da $\dim_H \bigcup_{i=1}^{\infty} F_i \leq s + \epsilon$. V limiti $\epsilon \to 0$ dobimo želeno neenakost. □

(3) Dimenzija števnih množic. Če je F števna, potem $\dim_H F = 0$

Dokaz. Elementi F lahko zapišemo v zaporedje: $x_1, x_2, \ldots$
Če pišimo $F_i = \{x_i\}$, potem $\mathcal{H}^0(F_i) = 1$, torej $\dim_H F_i = 0$. Po (2) je $\dim_H \bigcup_{i=1}^{\infty} F_i = 0$. □

(4) Dimenzija odprtih množic. Naj bo $F \subseteq \mathbb{R}^n$ odprta. Potem $\dim_H F = n$.

Dokaz. Odprte krogle tvorijo bazo evklidske topologije. Ker je F odprta sledi, da vsebuje n-dim kroglo. Po (1) sledi, da $\dim_H F \geq n$.
Pu drugi strani, ker je $\mathbb{R}^n$ števna unija krogel, po (2) sledi, da $\dim_H \mathbb{R}^n = n$. Zdaj po (1) sledi, da $\dim_H F \leq n$. □

(5) Dimenzija gladkih podmnogoterosti. Naj bo $F \subseteq \mathbb{R}^n$ gladka podmnogoterost dimenzije m, potem $\dim_H F = m$. Posebej:

- Če je F gladka krivulja, potem $\dim_H F = 1$;
- Če je F gladka ploskev, potem $\dim_H F = 2$.

Dokaz. Se da dokazati preko zveze med $\mathcal{H}^n$ in $\mathcal{L}^n$ □

Transformacijske lastnosti

Trditev. Naj bo $F \subseteq \mathbb{R}^n$ in $f : F \to \mathbb{R}^n$ Höldorjeva preslikava stopnje $\alpha > 0$. Potem

$$\dim_H f_*(F) \leq \frac{1}{\alpha} \dim_H F$$

Dokaz. Če je $s > \dim_H(F)$, potem $\mathcal{H}^{s/\alpha}(f_*(F)) \leq c^{s/\alpha} \mathcal{H}^s(F) = 0$. Torej $\dim_H f_*(F) \leq \frac{s}{\alpha}$ za vse $s > \dim_H(F)$. □

Posledica.

1. Če je $f : F \to \mathbb{R}^n$ Lipschitzova, potem $\dim_H f_*(F) \leq \dim_H(F)$.
2. Če je $f : F \to \mathbb{R}^n$ bi-Lipschitzova, potem $\dim_H f_*(F) = \dim_H(F)$.

Dokaz. 2. Uporabimo $f^{-1} : f_*(F) \to F$ na $f_*(F)$ in dobimo obratno neenakost. □

Posledica pove, da je $\dim_H$ invariantna glede na bi-Lipschitzeve preslikave. V posebnem, če sta množici imata različni Hausdorffovi dimenziji, potem ne obstaja bi-Lipschitzova preslikava med njima.

Topološke lastnosti

Trditev. Naj bo $F \subseteq \mathbb{R}^n$. Če je $\dim_H F < 1$, potem je F popolnoma nepovezana.

Dokaz. Naj bo $x, y \in F$, $x \neq y$. Definiramo

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R}^n &\longrightarrow [0, \infty) \\ z &\longmapsto |z - x| \end{aligned}$$

Velja:

$$|f(z) - f(w)| = ||z - x| - |w - x|| \leq |(z - x) - (w - x)| = |z - w|$$

Torej je f Lipschitzova. Sledi, da je $\dim_H f_*(F) \leq \dim_H F < 1$. Ker je $\dim_H [0, \infty) = 1$, sledi, da f ni surjektivna. Izberimo $r \in f_*(F)$ tak, da $0 < r < f(y)$. Dobimo razcep množice F na disjunktni odprti množici:

$$F = \{z \in F \mid |z - x| < r\} \cup \{z \in F \mid |z - x| > r\}$$

Velja: $x \in \{z \in F \mid |z - x| < r\}$ in $y \in \{z \in F \mid |z - x| > r\}$. Torej sta x in y v dveh različnih komponentah za povezanost in to velja za poljubne dve različne točke, torej komponente so enojci. □

2.3 Primeri računanja Hausdorffove dimenzije

Opomba.

- Ponavadi naredimo spodnjo in zgornjo oceno in upamo, da sta enaki.

Primer. (Cantorjev prah) Naj bo F Cantorjev prah kot na slike.
Velja: $1 \leq \mathcal{H}^1(F) \leq \sqrt{2}$. Posledično: $\dim_H F = 1$.

Dokaz. Naj bo E_k k-ta generacija konstrukcije:

- Vsebuje 4^k kvadrov s stranico $\frac{1}{4^k}$ in premerom $\frac{\sqrt{2}}{4^k}$.

Naj bo $\delta > 0$. Obstaja $k \in \mathbb{N}$, da $\frac{\sqrt{2}}{4^k} \leq \delta$. Za δ-pokritje F vzemimo kvadre iz E_k, dobimo oceno:

$$\mathcal{H}^1_\delta \leq 4^k 4^{-k} \sqrt{2} = \sqrt{2}$$

V limiti $\delta \to 0$ dobimo:

$$\mathcal{H}^1(F) \leq \sqrt{2}$$

Od tod sledi, da je $\dim_H P(F) \leq 1$
Obratna neenakost: Naj bo $P : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ projekcija na x-os.
Projekcija je Lipschitzova, sledi da $\dim_H P(F) \leq \dim_H F$. Velja: $P(F) = [0, 1]$, torej $\dim_H P(F) = 1$. □

Primer. (Cantorjeva množica) Naj bo C Cantorjeva množica.
Velja: $\dim_H C = s = \frac{\ln 2}{\ln 3}$.

Dokaz. TODO: Zgornja ocena in uporaba samopodobnosti. □

Opomba.

- Se da pokazati, da $\mathcal{H}^s(C) = 1$.
- Vidimo, da je računanje komplicirano že za preproste množice.