Zveznost

Zveznost v $(0,0)$ (če ni $(0,0)$ še premaknemo) pokažemo tako:
1. Naredimo oceno $|f(r\cos\phi, r\sin\phi) - f(0,0)| \leq g(r)$.
2. Če je $\lim_{r\to 0} g(r) = 0 \Rightarrow f$ je zvezna v $(0,0)$.

Parcialni odvodi in diferenciabilnost

Verižno pravilo: $D(G\circ F)(a) = (DG)(F(a)) \circ (DF)(a)$

Nasveti
- Poskusimo opaziti kakšno simetrijo funkcije, da bi imeli manjše dela.
- Včasih lahko ne gledamo zveznost parcialnih odvodov, če ne treba.
- Linearna presliava je bijektivna, če ima trivialno jedro.

Vpeljava novih spremenljivk

Nove spremenljivke $y_1, \ldots, y_n$ vpeljamo takole: $\dfrac{\partial}{\partial x_k} = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial y_i}{\partial x_k} \cdot \frac{\partial}{\partial y_i}$.

Recimo, da stare spr. x, y sta izraženi preko novih u, v: $x = x(u),\ y = y(v)$. Potem: $\begin{bmatrix} f_x \\ f_y \end{bmatrix} = \left(\left(\dfrac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\right)^{-1}\right)^T \begin{bmatrix} f_u \\ f_v \end{bmatrix}$.

Izrek o inverzni preslikavi

Potreben pogoj: Če je F difeomorfizem, potem $\det(DF) \neq 0$ na D_F.
Diferencial inverza: $(DF^{-1})(F(x)) = (DF)^{-1}(x)$.
Izrek o inverzni preslikavi: Naj bo $D \subseteq \mathbb{R}^n$ odprta, $F : D \to \mathbb{R}^n$ preslikava razreda C^1, $a \in D$ in $b = F(a)$.
Če je $\det(DF)(a) \neq 0$, potem obstajata okolici $a \in U \subseteq \mathbb{R}^n$ in $b \in V \subseteq \mathbb{R}^n$, da je $F : U \to V$ C^1-difeomorfizem.

Izrek o implicitni funkciji

Izrek o implicitni funkciji: Naj bo $D \subseteq \mathbb{R}^n_x \times \mathbb{R}^m_y$ odprta množica, $(a,b) \in D$, $F : D \to \mathbb{R}^m$ preslikava razreda C^1. Naj velja:
1. $F(a,b) = 0$,
2. $\det(\frac{\partial F}{\partial y}(a,b)) \neq 0$ (to preverjamo).

Tedaj obstaja okolica $a \in U \subseteq \mathbb{R}^n$ in okolica $b \in V \subseteq \mathbb{R}^m$ in enolično določena preslikava $\varphi : U \to V$ razreda C^1, da:
1. $\varphi(a) = b$.
2. $\forall (x,y) \in U \times V \,.\, F(x,y) = 0 \Leftrightarrow y = \varphi(x)$ (rešitve te enačbe je isto kot graf φ znotraj $U \times V$).
3. $(D\varphi)(x) = -\left(\frac{\partial F}{\partial y}(x,y)\right)^{-1} \cdot \frac{\partial F}{\partial x}(x,y),\ y = \varphi(x)$ za vsak $x \in U$.

Podmnogoterosti

Naj bo $M \subseteq \mathbb{R}^{n+m},\ M \neq \emptyset$. Množica M je **gladka podmnogoterost** dimenzije n prostora $\mathbb{R}^{n+m}$, če za vsako točko $a \in M$ obstaja okolica U v $\mathbb{R}^{n+m}$ in take C^1 funkcije $F_1, \ldots, F_m : U \to \mathbb{R}$, da velja:
1. $M \cap U = \{x \in U \mid F_1(x) = \ldots = F_m(x) = 0\} = F^*(\{0\})$.
2. $\mathrm{rang}(F_1, \ldots, F_m) = m$ na U.

M podajamo kot $F(\underbrace{x_1, \ldots, x_n}_{x}) = 0$, kjer $F = (f_1, \ldots, f_{n-m})$ (v $M = F^*(0)$ so rešitve enačbe $F(x) = 0$).
Recept: Če je rang $JF(a) = n-m$ (maksimalen) za vsak $a \in M$, potem M je C^r podmnogoterost dimenzije m.
Tangentni prostor: Če je $M = F^*(0)$ podmnogoterost, $a \in M$, rang $JF(a)$ maksimalen, potem $T_aM = \ker JF(a)$.

Taylorjeva formula

Taylorjeva formula: $f(a+h) = f(a) + (D_h f)(a) + \dfrac{1}{2!}(D_h^2 f)(a) + \ldots + \dfrac{1}{k!}(D_h^k f)(a) + R_k$,
kjer je $D_h = h_1 D_1 + h_2 D_2 + \ldots + h_n D_n$ **odvod v smeri** h in $R_k = \frac{1}{(k+1)!}(D_h^{k+1} f)(a+\theta h)$ **ostanek**.

Iskanje odvodov: $\dfrac{\partial^{i+j}}{\partial x^i \partial y^j}(a,b) = C_{ij}\, i!j!$, kjer je C_{ij} koeficient pred členom $x^i y^j$ v razvoju f v Taylorjevo vrsto.

Nasveti

- Za razvoj okoli točke $(a,b) \neq (0,0)$ vpeljamo $u = x - a,\ v = y - b$.

Splošno

Norma matrik

Naj bo $A = [a_{ij}]_{1 \leq i,j \leq n},\ B = [B_{ij}]_{1 \leq i,j \leq n}$. Definiramo $||A|| = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} a_{ij}^2}$. Dokažemo, da velja $||A \cdot B|| \leq ||A|| \cdot ||B||$.

Dokaz. Matriki množimo tako: $A \cdot B = \begin{bmatrix} \vec{a}_1 \\ \vdots \\ \vec{a}_n \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \vec{b}_1 & \dots & \vec{b}_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \vec{a}_1 \cdot \vec{b}_1 & \dots & \vec{a}_n \cdot \vec{b}_n \end{bmatrix}$.

Za vsak element produkta velja: $||(A \cdot B)_{ij}||^2 = ||\vec{a}_i \cdot \vec{b}_j||^2 \leq ||\vec{a}_i||^2 \cdot ||\vec{b}_j||^2$.

Torej $||A \cdot B||^2 = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} ||(A \cdot B)_{ij}||^2 \leq \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} ||\vec{a}_i||^2 \cdot ||\vec{b}_j||^2 = \sum_{i=1}^{n} ||\vec{a}_i||^2 \sum_{j=1}^{n} ||\vec{b}_j||^2 = ||A||^2 \cdot ||B||^2$. $\square$

Inverz 2×2 matriki

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}^{-1} = \frac{1}{ad - bc} \begin{bmatrix} d & -c \\ -b & a \end{bmatrix}.$$

Hiperbolične funkcije

$$\sinh x = \frac{e^x - e^{-x}}{2},\ \cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2},\ \tanh x = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}},\ \cosh^2 x - \sinh^2 x = 1.$$

1 Ekstremi

Kako poiščemo ekstreme funkcije f na množici K?

1. Kandidati v $\operatorname{Int} K$ so stacionarne točke.
2. Ekstremi na robu ∂K:
   (a) Parametriziramo rob.
   (b) Tvorimo Lagrangeevo funkcijo $L = f(x) - \sum_{i=1}^{n} \lambda_i g_i$, kjer g_i so pogoji, in iščemo njene stac. točke.

2 Integrali s parametri

Običajen integral s parametri. Naj bo $F(y) = \int_u^v f(x,y)\,dx,\ u, v \in I,\ y \in D$.

	Zveznost	Odvod	Vrstni red integriranja
Zveznost $f(x,y)$ na $I \times I \times D$	$+$	$+$	$+$
Zveznost $\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)$ na $I \times I \times D$		$+$	

Velja: $F'(y) = \int_{\alpha(y)}^{\beta(y)} \frac{\partial f}{\partial y}(x,y)\,dx + \beta'(y) f(\beta(y),y) - \alpha'(y) f(\alpha(y),y)$

Posplošeni integral s parametri. Naj bo $F(y) = \int_a^\infty f(x,y)\,dx,\ a \in \mathbb{R},\ y \in D$.

	Zveznost	Odvod	Vrstni red integriranja
Zveznost $f(x,y)$ na $[a,\infty] \times D$	$+$	$+$	$+$
L.E.K. $y \mapsto \int_a^\infty f(x,y)$ na D	$+$		$+$
Zveznost $\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)$ na $[a,\infty] \times D$		$+$	
L.E.K. $y \mapsto \int_a^\infty \frac{\partial f}{\partial y}(x,y)$ na D		$+$	
Obstoj $y \mapsto \int_a^\infty f(x,y)$ v $y_0 \in D$		$+$	

Definicija. Integral $F(y) = \int_a^\infty f(x,y)\,dx$ **konvergira enakomerno** na D, če

$$\forall \epsilon > 0 \,.\, \exists b_0 \geq a \,.\, \forall b \geq b_0 \,.\, \forall y \in D \,.\, \left| \int_b^\infty f(x,y)\,dx \right| < \epsilon.$$

2.1 Funkciji gama in beta

Definicija. $\Gamma(s) = \int_0^\infty x^{s-1} e^{-x}\,dx$ je **Eulerjeva funkcija gama**. Velja: $D_\Gamma = (0,\infty)$.

Trditev. Lastnosti Eulerjeve funkcije gama:

- $\Gamma(s+1) = s\Gamma(s)$. Če je $n \in \mathbb{N}$, potem $\Gamma(n) = (n-1)!$.
- $\Gamma^{(k)} = \Gamma(s) = \int_0^\infty x^{s-1} \ln^k x\, e^{-x}\,dx$, $\Gamma \in C^\infty((0,\infty))$.

Definicija. $B(p,q) = \int_0^1 x^{p-1}(1-x)^{q-1}\,dx$ je **Eulerjeva funkcija beta**. Velja: $D_B = (0,\infty) \times (0,\infty)$.

Trditev. $\frac{1}{2} B(\frac{\alpha+1}{2}, \frac{\beta+1}{2}) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^\alpha t \cos^\beta t\,dt$ za $\alpha, \beta > -1$.

Trditev. $B(p,q) = \int_0^\infty \frac{t^{p-1}}{(1+t)^{p+q}}\,dt$.

Posledica. $B(p,1-p) = \int_0^\infty \frac{t^{p-1}}{1+t}\,dt$ za $0 < p < 1$.

Opomba. Za $p \in (0,1)$ velja:

$$B(p,1-p) = \frac{\pi}{\sin(p\pi)}.$$

Izrek (Stirlingova formula)**.**

$$\lim_{s \to \infty} \frac{\Gamma(s+1)}{s^s\, e^{-s} \sqrt{2\pi s}} = 1.$$

3 Riemannov integral

Izrek (Uvedba novih spremenljivk)**.** Naj bo $D \subseteq \mathbb{R}^n$. Našo spremenljivko $x = (x_1, \ldots, x_n) \in D$ podamo kot funkcijo novih, tj. $(x_1, \ldots, x_n) = F(u_1, \ldots, u_n)$, kjer $F : \Delta \to D$ difeomorfizem. Potem

$$\int_D f(x_1, \ldots, x_n)\, dx_1 \ldots dx_n = \int_\Delta f(F(u_1, \ldots, u_n))|\det JF(u_1, \ldots, u_n)|\, du_1, \ldots, du_n.$$

Vpeljava novih spremenljivk

	Polarne	Valjne	Sferične	Torusne $(0 < a < R)$
x	$r\cos\phi$	$r\cos\phi$	$r\cos\phi\cos\psi$	$(R + r\cos\psi)\cos\phi$
y	$r\sin\phi$	$r\sin\phi$	$r\sin\phi\cos\psi$	$(R + r\cos\psi)\sin\phi$
z		z	$r\sin\psi$	$r\sin\psi$
$\det JF$	r	r	$r^2\cos\psi$	$r(R + r\cos\psi)$
Omejitve	$\phi \in [0, 2\pi]$	$\phi \in [0, 2\pi]$	$\phi \in [0, 2\pi]$ in $\psi \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$	$\phi, \psi \in [0, 2\pi]$ in $r \in [0, a]$

Fizikalne količine

1. Vztrajnostni moment okoli z-osi:
   - Nehomogeno telo: $J_z = \int_D (x^2 + y^2)\rho(x, y, z)\, dV$.
   - Homogeno telo: $J_z = \frac{m(D)}{V(D)} \int_D (x^2 + y^2)\, dV$, ker $\rho_0 = \frac{m(D)}{V(D)}$.
2. Težišče (x-koordinata):
   - Nehomogeno telo: $x_T(D) = \frac{1}{m(D)} \int_D x\, \rho(x, y, z)\, dV$, kjer $m(D) = \int_D \rho(x, y, z) dV$.
   - Homogeno telo: $x_T(D) = \frac{1}{V(D)} \int_D x\, dV$

4 Splošno

4.1 Ideji in nasveti

- Odvod lihe funkcije je soda funkcija. Odvod sode funkcije je liha funkcija.
- $\int_0^{2\pi} \cos^{2k+1}\psi\, d\psi = 0$ za $k = 0, 1, \ldots$
- Za izračun gravitacijske sile sprojecirajmo vse sile na os rezultante.
- 3D sliko lahko si predstavljamo s pomočjo nivojnic.
- Opazimo simetrije, npr. rotacijsko: $f(z, x^2 + y^2)$ itd.

4.2 Prostornine

- Tetraedr: $V = \frac{1}{3} S_o h$.
- Valj: $V = \pi r^2 h,\ S = 2\pi r h + 2\pi r^2$.
- Sfera: $V = \frac{4}{3}\pi r^3,\ S = 4\pi r^2$.

4.3 Teylor

Taylorjeva formula: $f(a + h) = f(a) + (D_h f)(a) + \dfrac{1}{2!}(D_h^2 f)(a) + \ldots + \dfrac{1}{k!}(D_h^k f)(a) + R_k$,
kjer je $D_h = h_1 D_1 + h_2 D_2 + \ldots + h_n D_n$ **odvod v smeri h** in $R_k = \frac{1}{(k+1)!}(D_h^{k+1} f)(a + \theta h)$ **ostanek**.

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}\ (R = \infty) \qquad \sin x = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}\ (R = \infty)$$

$$\cos x = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!}\ (R = \infty) \qquad \ln(1 + x) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n}\ (R = 1)$$

$$(1 + x)^\alpha = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{\alpha}{n} x^n\ (R = 1)$$

4.4 Hiperbolične funkcije

$$\sinh x = \frac{e^x - e^{-x}}{2},\ \cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2},\ \tanh x = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}},\ \cosh^2 x - \sinh^2 x = 1.$$

4.5 Trigonometrija

$$\begin{aligned} \sin x + \sin y &= 2\sin\tfrac{x+y}{2}\cos\tfrac{x-y}{2} & \sin x\cos y &= \tfrac{1}{2}\left(\sin(x+y)+\sin(x-y)\right) \\ \cos x + \cos y &= 2\cos\tfrac{x+y}{2}\cos\tfrac{x-y}{2} & \cos x\cos y &= \tfrac{1}{2}\left(\cos(x+y)+\cos(x-y)\right) \\ \cos x - \cos y &= -2\sin\tfrac{x+y}{2}\sin\tfrac{x-y}{2} & \sin x\sin y &= \tfrac{1}{2}\left(\cos(x-y)-\cos(x+y)\right) \end{aligned}$$

4.6 Nedoločeni integral

4.6.1 Integracija racionalnih funkcij

Metoda nastavka. Integriramo $R(x) = p(x) + \frac{r(x)}{q(x)}$.

$$\frac{1}{(x-a)^k} \rightsquigarrow A\ln|x-a|, \qquad \frac{1}{(x^2+bx+c)^l} \rightsquigarrow B\ln|x^2+bx+c| + C\arctan\frac{2x+b}{\sqrt{4c-b^2}}, \qquad \frac{\widetilde{r}(x)}{\widetilde{q}(x)},$$

kjer polinom $\widetilde{q}$ dobimo iz polinoma q z znižanjem potence vsakega faktorja za ena, polinom $\widetilde{r}$ pa ima stopnji za eno nižjo kot $\widetilde{q}$. Število neznak je enako stopnje polinoma q.

4.6.2 Integracija korenckih funkcij

- Integrale oblike $\displaystyle\int R(x, \sqrt[n]{\frac{ax+b}{cx+d}})\,dx$ integriramo z uvedbo nove spremenljivke $t = \sqrt[n]{\frac{ax+b}{cx+d}}$. Tako dobimo integral racionalne funkcije v spremenljivke t.
- Integrale oblike $\displaystyle\int \frac{p(x)}{\sqrt{ax^2+bx+c}}\,dx$ računamo z postopkom:
  1. Če je p konstanta, z zapisom v temenski obliki integral prevedemo:
  $$\int\frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}} = \arcsin\left(\frac{x}{a}\right) + C \qquad \int\frac{dx}{\sqrt{x^2-a^2}} = \ln|x+\sqrt{x^2-a^2}| + C$$
  $$\int\frac{dx}{\sqrt{x^2+a^2}} = \ln|x+\sqrt{x^2+a^2}| + C$$
  2. Če je p poljuben, pa uporabimo nastavek:
  $$\int\frac{p(x)}{\sqrt{ax^2+bx+c}}\,dx = \widetilde{p}(x)\sqrt{ax^2+bx+c} + \int\frac{A\,dx}{\sqrt{ax^2+bx+c}},$$
  kjer $\widetilde{p}$ ima stopnjo 1 manj kot p in je A konstanta.
- Integrale oblike $\displaystyle\int R\left(x, \sqrt{ax^2+bx+c}\right)dx$ vedno lahko z univerzalno substitucijo prevedemo na integral racionalne funkcije:
  $$a>0:\ \sqrt{ax^2+bx+c} = \sqrt{a}(u-x) \qquad a<0:\ \sqrt{ax^2+bx+c} = \sqrt{-a}(x-x_1)u,$$
  kjer je x_1 ničla kvadratne funkcije. Ta metoda v principu vedno deluje, ni pa nujno najbolj optimalna.
- Pri integralih oblike $\displaystyle\int\frac{dx}{(x+\alpha)^k\sqrt{ax^2+bx+c}}$ se splača uvesti novo spremenljivko $t = \frac{1}{x+\alpha}$.

4.6.3 Integracija trigonometričnih funkcij

- Integrale oblike $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^p x\cos^q x\,dx$, kjer sta $p, q > -1$, računamo s beto funkcijo.
- Integrale oblike $\displaystyle\int R(\sin x, \cos x)\,dx$ lahko z univerzalno trigonometrično substitucijo $t = \tan\left(\frac{x}{2}\right)$ prevedemo na integral racionalne funkcije spremenljivke t. Pri tem:
  - $dx = \dfrac{2dt}{1+t^2}$
  - $\cos x = \dfrac{1-t^2}{1+t^2}$
  - $\sin x = \dfrac{2t}{1+t^2}$

  Pri uporabe metode, če se da, poskusimo na začetku z uporabo adicijskih izrekov potence čim bolj znižati, da dobimo bolj enostavno racionalno funkcijo.

Dodatek

$$e^{ax}\sin(bx)\,dx = \frac{e^{ax}}{a^2+b^2}(a\sin(bx) - b\cos(bx)) \qquad e^{ax}\cos(bx)\,dx = \frac{e^{ax}}{a^2+b^2}(a\cos(bx) + b\sin(bx))$$

$$\frac{dx}{x^2-a^2} = \frac{1}{2a}\ln\left|\frac{x-a}{x+a}\right| \qquad \int \frac{dx}{a^2+b^2x^2} = \frac{1}{ab}\arctan\left(\frac{bx}{a}\right) + C$$