1 Funckcije več spremenljivk

1.1 Prostor $\mathbb{R}^n$

1. Prostor $\mathbb{R}^n$
   - **Definicija.** Prostor $\mathbb{R}^n$. Seštevanje in množenje s skalarjem na $\mathbb{R}^n$. Ali je $\mathbb{R}^n$ vektorksi prostor?
   - **Definicija.** Skalarni produkt na $\mathbb{R}^n$. Norma vektorja na $\mathbb{R}^n$. Metrika na $\mathbb{R}^n$.
   - **Definicija.** Zaprt kvader. Odprt kvader.
   - *Opomba.* Ali imata prostori $(\mathbb{R}^n, ||\,.\,||_2)$ in $(\mathbb{R}^n, ||\,.\,||_\infty)$ isto topologijo?
   - **Izrek.** Karakterizacija kompaktnosti množic v $\mathbb{R}^n$.
2. Zaporedja v $\mathbb{R}^n$
   - **Definicija.** Zaporedje v $\mathbb{R}^n$.
   - *Opomba.* Koliko realnih zaporedij porodi zaporedje v $\mathbb{R}^n$?
   - **Trditev.** Karakterizacija konvergence zaporedij v $\mathbb{R}^n$ (porojene podzaporedja).

1.2 Zveznost preslikav iz $\mathbb{R}^n$ v $\mathbb{R}^m$

1. Zveznost preslikav iz $\mathbb{R}^n$ v R
   Naj bo $D \subseteq \mathbb{R}^n$, $f : D \to \mathbb{R}^m$ preslikava.
   - *Opomba.* Kako rečemo preslikave iz $\mathbb{R}^n$ v $\mathbb{R}$?
   - **Definicija.** Kadar je f zvezna v točki $a \in D$? Kadar je f zvezna na D?
   - **Trditev.** Karakterizacija zveznosti f v točki $a \in D$ z zaporedji.
   - **Definicija.** Kadaj je f enakomerno zvezna na D?
   - **Trditev.** Kaj lahko povemo o zvezni preslikavi na kompaktu?
   - **Trditev.** Kaj lahko povemo o slike zvezne preslikave na kompaktu?
   - **Definicija.** Kadar je f C-lipshitzova?
   - **Trditev.** V kakšni zvezi so C-lipshitzovost, enakomerna zveznost in zveznost?
   - **Trditev.** Kaj lahko povemo o vsote, razlike, produkte in kvociente zveznih v točki $a \in D$ funkcij?
   - **Trditev.** Kaj lahko povemo o kompozitume zveznih preslikav?
   - *Zgled.* Ali je projekcija zvezna na $\mathbb{R}^n$? Kaj pa polinomi in racionalne funkcije?
   - **Definicija.** Funkcija n-spremenljivk.
   - *Opomba.* Ali je vsaka zožitev zvezne funkcije zvezna funkcija?
   - **Trditev.** Ali je zvezna v točki $a \in D$ funkcija zvezna v točki $a \in D$ kot funkcija posameznih spremenljivk?
   - *Zgled.* Ali je $f(x,y) = \begin{cases} \frac{2xy}{x^2+y^2}; & (x,y) \neq (0,0) \\ 0; & (x,y) = (0,0) \end{cases}$ zvezna kot funkcija posameznih spremenljivk? Ali je f zvezna?
   - *Zgled.* Ali je $f(x,y) = \begin{cases} \frac{2x^2y}{x^4+y^2}; & (x,y) \neq (0,0) \\ 0; & (x,y) = (0,0) \end{cases}$ zvezna na vsake premice? Ali je f zvezna?
2. Zveznost preslikav iz $\mathbb{R}^n$ v $\mathbb{R}^m$
   Naj bo $D \subseteq \mathbb{R}^n$ in $F : D \to \mathbb{R}^m$ preslikava. Naj bo $x \in D$, potem $F(x) = (y_1, \ldots, y_m) \in \mathbb{R}^m$.
   Lahko pišemo $F(x) = (f_1(x), \ldots, f_m(x))$. Torej F določa m funkcij n-spremenljivk.
   - **Trditev.** Karakterizacija zveznosti F v točki $a \in D$ z koordinatnimi funkciji.
   - *Zgled.* Pokaži, da so linearne preslikave omejene: $||\mathcal{A}x|| \leq M||x||$.
   - **Trditev.** Ali so linearne preslikave zvezne?
   - **Trditev.** Čemu je ekvivalentna zveznost linearne preslikave?
   - **Definicija.** Afina preslikava.

1.3 Parcialni odvodi in difrenciabilnost

1. Parcialni odvodi
   Naj bo $D \subseteq \mathbb{R}^n$, $a \in D$ notranja, $f : D \to \mathbb{R}$ funkcija.
   - **Definicija.** Kadar je f parcialno odvedljiva po spremenljivke x_j v točki $a \in D$? Kaj je parcialni odvod?
   - *Opomba.* Kaj lahko povemo o parcialne odvedljivosti elementarnih funkcij?
2. Diferenciabilnost
   Naj bo $D \subseteq \mathbb{R}^n$, $a \in D$ notranja, $f : D \to \mathbb{R}$ funkcija.
   - **Definicija.** Kadar je f diferenciabilna v točki $a \in D$? Diferencial f v točki $a \in D$.
   - *Opomba.* Ali je diferencial, če obstaja, enolično določen?
   - *Opomba.* Kaj je diferencial v smislu aproksimacije funkcije?
   - **Trditev.** (Potrebni pogoji za diferenciabilnost). Zveza med diferencialom, parcialnimi odvodi in zveznostjo.
   - *Opomba.* Kako lahko izrazimo diferencial z parcialnimi odvodi? Gradient funkcije. Operator nabla.
   - *Zgled.* Ali je $f(x,y) = \begin{cases} \frac{2xy}{x^2+y^2}; & (x,y) \neq (0,0) \\ 0; & (x,y) = (0,0) \end{cases}$ diferenciabilna?
   - Ali je $f(x,y) = \begin{cases} \frac{2x^2y}{x^2+y^2}; & (x,y) \neq (0,0) \\ 0; & (x,y) = (0,0) \end{cases}$ zvezna, parcialno odvedljiva, diferenciabilna?
   - **Izrek.** Zadosten pogoj za diferenciabilnost f v točki $a \in D$.
3. Višji parcialni odvodi
   Naj bo $f : D^{\text{odp}} \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ funkcija. Denimo, da je f parcialno odvedljiva po vseh spremenljivkah na D. Parcialni odvodi so tudi funkcije n-spremenljivk in morda so tudi te parcialno odvedljive po vseh oz. nekaterih spremenljivkah.
   - **Trditev.** Zadostni pogoj za enakost mešanih odvodov.
   - **Definicija.** Kadar je f razreda C^k na D?
   - **Definicija.** Množica k-krat zvezno odvedljivih funkcij. Množica gladkih funkcij. Množica zveznih funkcij.
   - *Opomba.* Kakšno strukturo ima množica $C^k(D)$ z operacijama $+$, $\circ$ in množenja s skalarji?
4. Diferenciabilnost preslikav
   Naj bo $D \subseteq \mathbb{R}^n$, $a \in D$ notranja, $F : D \to \mathbb{R}^m$ preslikava.
   - **Definicija.** Kadar je F diferenciabilna v točki $a \in D$? Diferencial F v točki $a \in D$.
   - *Opomba.* Ali je diferencial, če obstaja, enolično določen?
   - *Zgled.* Ali sta diferenciabilni $\mathcal{A} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ linearna, $F(x) = \mathcal{A}x$ in $F : R^{n\times n} \to R^{n\times n}$, $F(X) = X^2$?
   - **Izrek.** Karakterizacija diferenciabilnosti F v točki $a \in D$ s koordinatnimi funkciji.
   - *Opomba.* Kako se izraže diferencial F v točki $a \in D$ z koordinatnimi funkciji? Jacobijeva matrika.
   - **Posledica.** Zadosten pogoj za diferenciabilnost F v točki a.
   - **Definicija.** Kadar je F razreda C^k na D?
   - **Izrek.** Verižno pravilo.
   - *Opomba.* Kako se izraže diferencial kompozituma funkcij z Jacobijevimi matriki?
   - **Posledica.** Verižno pravilo za funkcijo n-spremenljivk.

1.4 Izrek o implicitni funkciji

1. Izrek o inverzni preslikavi
   Naj bo $D, \Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ odprti, $\Phi : D \to \Omega$ preslikava razreda $C^1(D)$. Kakšne so zadostni pogoji za (lokalno) obrnljivost preslikave Φ?
   - **Definicija.** Kadar rečemo, da je Φ C^k-difeomorfizem?
   - *Zgled.* Ali je $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f(x) = x^3$ difeomorfizem?
   - **Lema.** Kako izračunamo diferencial inverzne preslikave?
   - **Trditev.** Potreben pogoj, da je Φ difeomorfizem.
   - *Zgled.* Ali velja obrat? $\Phi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2,\ \Phi(x, y) = (e^x \cos y, e^x \sin y)$.
   - **Lema.** 3 lemi + pomožna trditev TODO
   - **Izrek.** Izrek o inverzni preslikavi.
   - **Posledica.** Kaj če je Φ razreda $C^k(D)$?
   - **Definicija.** Kadar rečemo, da je Φ lokalni C^k-difeomorfizem?
   - *Opomba.* Kaj pravi izrek, če je $n = 1$?
   - *Zgled.* Naj bo $F : \mathbb{R}^{n\times n} \to \mathbb{R}^{n\times n},\ F(X) = X^2$. Ali je F v okolici točke $I \in \mathbb{R}^{n\times n}$ lokalni difeomorfizem? Kaj to pomeni?
2. Osnovna verzija izreka o implicitni preslikavi
   Naj bo $D \subseteq \mathbb{R}^2$ odprta, $(a, b) \in D,\ f : D \to \mathbb{R}$ funkcija razreda $C^1(D)$.
   - **Izrek.** Osnovna verzija izreka o implicitni funkciji.
   - **Posledica.** Kaj če je f razreda $C^k(D)$?
   - *Zgled.* Kaj če pogoji niso izpolnjeni:
     (a) $f(x, y) = (x - y)^2,\ f(x, y) = 0$ v okolici točke $(0, 0)$.
     (b) $f(x, y) = y^3 - x,\ f(x, y) = 0$ v okolici točke $(0, 0)$.
     (c) $f(x, y) = y^2 - x^2 - x^4,\ f(x, y) = 0$ v okolici točke $(0, 0)$.
     (d) $f(x, y) = y^2 + x^2 + x^4,\ f(x, y) = 0$ v okolici točke $(0, 0)$.
3. Izrek o implicitni funkciji
   Imamo $n + m$ spremenljivk (x, y), kjer $x = (x_1, \dots, x_n),\ y = (y_1, \dots, y_m)$ in m enačb. Pričakujemo, da bomo lahko m spremenljivk izrazili kot funkcijo n ostalih, tj. najdemo presliavo $\Phi : D \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$, da velja $y = \Phi(x)$.
   Naj bo $D \subseteq \mathbb{R}^n_x \times \mathbb{R}^m_y$ odprta, $F = (f_1, \dots, f_m) : D \to \mathbb{R}^m$ preslikava razreda $C^1(D)$.
   - **Definicija.** Parcialni diferencial na prvo spremenljivko. Parcialni diferencial na drugo spremenljivko.
   - *Opomba.* Kako se izraže parcialna difernicala z matriko? Kako se izraža diferencial F z parcialnima diferenicalama?
   - *Opomba.* Kako ta diferenical deluje na vektorju $\begin{bmatrix} h \\ k \end{bmatrix}$, $h \in \mathbb{R}^n,\ k \in \mathbb{R}^m$?
   - **Izrek.** Izrek o implicitni funkciji.
   - **Posledica.** Kaj če je F razreda $C^k(D)$?
   - *Zgled.* Naj bo $F(x, y) = x^2 + y^2 - 1$ in naj rešujemo enačbo $F(x, y) = 0$ v okolici točke $(0, 1)$.
     S pomočjo dokaza izreka o implicitni preslikavi določi $y = \varphi(x)$.
   - *Zgled.* Naj bosta $f(x, y, z) = y + xy + xz^2$ in $g(x, y, z) = z + zy + x^2$. Dokaži, da sistem enačb $f(x, y, z) = 0$ in $g(x, y, z) = 0$ v okolici točke $(0, 0, 0)$ enolično določa C^∞ funkciji $y = y(x)$ in $z = z(x)$ in razvij jih v Taylorjevo vrsto do členov reda 2.

4. Rang preslikave

Naj bo $D \subseteq \mathbb{R}^n$ odprta, $a \in D$ in $F : D \to \mathbb{R}^m$ preslikava razreda C^1.

- *Zgled.* Naj bo $F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ funkcija. Recimo, da rešujemo enačbo $F(x, y, z) = 0$ in vemo, da $F(a, b, c) = 0$. Kakšen je zadosten pogoj za to, da bi lahko vsaj eno spremenljivko izrazili kot funkcijo ostalih?
- *Zgled.* Naj bosta $F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ in $G : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ funkciji. Recimo, da rešujemo sistem enačb $F(x, y, z) = 0$ in $G(x, y, z) = 0$ in vemo, da $F(a, b, c) = 0$ in $G(a, b, c) = 0$. Kakšen je zadosten pogoj za to, da bi lahko vsaj dve spremenljivke izrazili kot funkcijo tretje?
- **Definicija.** Rang F v točki $a \in D$. Rang F. Kadar rečemo, da je F v točki $a \in D$ maksimalnega ranga?
- *Opomba.* Ali je maksimalnost ranga lokalno stabilna?
- *Primer.* Obrnljiva matrika in permutacija koordinat. TODO
- **Posledica IIF.** Čemu je ekvivalentna enačba $F(x) = 0$, če je $m < n$?
- *Primer.* Naj bo $\mathcal{A} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ linearna, $m \leq n$, $\operatorname{rang} \mathcal{A} = m$. Kakšno dimenzijo ima prostor rešitev enačbe $\mathcal{A}x = b$?
- **Posledica.** Kaj lahko povemo o F v točki $a \in D$, če je $\operatorname{rang}_a F = m$, če $m \leq n$?

1.5 Podmnogoterosti v $\mathbb{R}^n$

Podmnogoterosti je posplošitev pojmov „krivulja“ in „ploskev“.

1. Podmnogoterosti
   - **Definicija.** Gladka podmnogoterost. Lokalne definicijske funkcije.
   - *Opomba.* Kaj je podmnogoterost, če je njena kodimenzija enaka 0?
   - *Zgled.* Gledamo v $\mathbb{R}^3$. Naj bo $\mathcal{F}_1, \mathcal{F}_2, \mathcal{F}_3 : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ linearni. Kaj dobimo, če vzamemo za definiciske funkcije eno, dve ali tri funkcije izmed $\mathcal{F}_1, \mathcal{F}_2, \mathcal{F}_3$? Kadar govorimo o krivuljah in kadar o ploskvah?
   - *Zgled.* Ugotovi, ali je podmnogoterost:
     - $M = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 + z^2 = 1\}$.
     - $M = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 + z^2 = 1,\ x + y + z = 0\}$.
     - $M = (\{0\} \times \mathbb{R}) \cup (\mathbb{R} \times \{0\})$.
   - *Opomba.* Ali je rob kvadrata z stranico 2 in središčem v $(0, 0)$ gladka podmnogoterost v $\mathbb{R}^2$?
   - *Zgled.* Ugotovi, ali je podmnogoterost:
     - $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R}) = \{A \in \mathbb{R}^{n\times n} \mid \det A \neq 0\}$.
     - $\mathrm{SL}_n(\mathbb{R}) = \{A \in \mathbb{R}^{n\times n} \mid \det A = 1\}$.
   - *Opomba.* Kadar rečemo, da je podmnogoterost podana implicitno?
   - **Trditev.** Karakterizacija podmnogoterosti (ali je lokalno graf?)
   - *Opomba.* Kadar rečemo, da je podmnogoterost podana eksplicitno?
   - *Zgled.* Ali je $M = \{(x, x^2) \mid x \in \mathbb{R}\}$ podmnogoterost?
2. Parametrično padajanje mnogoterosti
   - *Zgled.* Ali je parametrizacija $\varphi \mapsto (a\cos\varphi, a\sin\varphi),\ a > 0,\ \varphi \in [0, 2\pi)$ določa podmnogoterost?
   - **Trditev.**

1.6 Ekstremi funkcij več spremenljivk

1. Ekstremi funkcij več spremenljivk
   Naj bo $D \subseteq \mathbb{R}^n$, $a \in D$, $f : D \to \mathbb{R}$ funkcija.
   - **Definicija.** Lokalni maksimum/minimum. Strogi lokalni maksimum/minimum. Maksimum/minimum (globalni). Lokalni ekstrem. Globalni ekstrem.
   - *Opomba.* Kaj ima zvezna funkcija na kompaktu?
   - **Definicija.** Stacionarna (oz. kritična) točka $a \in D^{\text{odp}}$ diferenciabline funkcije f.
   - **Trditev.** Kaj če ima diferenciablina funkcija f v točki $a \in D^{\text{odp}}$ lokalni ekstrem?
   - *Zgled.* Poišči minimum in maksimum $f(x, y) = x^2 - xy + y^2 - 3x + 4$ na $K = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 \leq 3\}$.
2. Potrebni in zadostni pogoji na 2. odvodi, da je kritična točka lokalni ekstrem
   Naj bo $D \subseteq \mathbb{R}^n$ odprta, $f : D \to R$ razreda C^2 na D.
   - **Definicija.** Hessejeva matrika Hf. 2. odvodov. Hessejeva forma.
   - *Opomba.* Kaj lahko povemo o Hessejeve matrike?
   - **Definicija.** Pozitivno (semi)definitna Hf. Negativno (semi)definitna Hf.
   - *Opomba.* Karakterizacija pozivne/negativne (semi)definitnosti s lastnimi vrednosti Hf.
   - **Trditev.** (Potrebni pogoji). Kaj velja, če ima f v točki $a \in D$ lokalni maksimum/minimum?
   - **Trditev.** (Zadostni pogoji.) Kadar je stacionarna točka $a \in D$ funkcije f lokalni minimum/maksimum? Kadar nič od tega?
   - *Zgled.* Določi $(Hf_i)(0, 0)$ za $f_1(x, y) = \frac{1}{2}(x^2 + y^2)$, $f_2(x, y) = \frac{1}{2}(-x^2 - y^2)$, $f_3(x, y) = \frac{1}{2}(x^2 - y^2)$.
   - **Posledica.** Kako zgledajo zadostni pogoji za primer $n = 2$?
   - *Zgled.* Naj bo $f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 + 2xyz$. Klasificiraj vse stacionarne točke funkcije f.
3. Vezani ekstremi
   - **Izrek.** Obstoj Lagrangeevih multiplikatorjev.
   - *Opomba.* Lagrangeeva metoda za iskanja vezanih ekstremov.
   - *Zgled.* Določi stacionarne točke $f(x, y, z) = z$ na $M = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 + z^2 = 1;\ x + y + z = 0\}$.
   - *Zgled.* Določi stacionarne točke $f(x, y, z) = x^2 - xy + y^2 - 3x + 4$ na robu $x^2 + y^2 = 9$.