# 1 Funckcije več spremenljivk

## 1.1 Prostor $\mathbb{R}^n$

1. Prostor $\mathbb{R}^n$
   - **Definicija.** Prostor $\mathbb{R}^n$. Seštevanje in množenje s skalarjem na $\mathbb{R}^n$. Ali je $\mathbb{R}^n$ vektorksi prostor?
   - **Definicija.** Skalarni produkt na $\mathbb{R}^n$. Norma vektorja na $\mathbb{R}^n$. Metrika na $\mathbb{R}^n$.
   - **Definicija.** Zaprt kvader. Odprt kvader.
   - *Opomba.* Ali imata prostori $(\mathbb{R}^n, d_2)$ in $(\mathbb{R}^n, d_\infty)$ isto topologijo?
   - **Izrek.** Karakterizacija kompaktnosti množic v $\mathbb{R}^n$. TODO: *
2. Zaporedja v $\mathbb{R}^n$
   - **Definicija.** Zaporedje v $\mathbb{R}^n$.
   - *Opomba.* Koliko realnih zaporedij porodi zaporedje v $\mathbb{R}^n$?
   - **Trditev.** Karakterizacija konvergence zaporedij v $\mathbb{R}^n$ (porojene podzaporedja).

## 1.2 Zveznost preslikav iz $\mathbb{R}^n$ v $\mathbb{R}^m$

1. Zveznost preslikav
   Naj bo $D \subseteq \mathbb{R}^n$, $f : D \to \mathbb{R}^m$ preslikava.
   - **Definicija.** Kadar je $f$ zvezna v točki $a \in D$? Kadar je $f$ zvezna na $D$?
   - **Trditev.** Karakterizacija zveznosti $f$ v točki $a \in D$ z zaporedji.
   - **Definicija.** Kadar je $f$ enakomerno zvezna na $D$?
   - **Trditev.** Kaj lahko povemo o zvezni preslikavi na kompaktu? TODO: *
   - **Trditev.** Kaj lahko povemo o slike zvezne preslikave na kompaktu?
   - **Definicija.** Kadar je $f$ $C$-Lipschitzova?
   - **Trditev.** V kakšni zvezi so $C$-Lipschitzovost, enakomerna zveznost in zveznost?
   - **Trditev.** Kaj lahko povemo o vsote, razlike, produktu in kvocientu zveznih v točki $a \in D$ funkcij?
   - **Trditev.** Kaj lahko povemo o kompozitume zveznih preslikav?
   - *Zgled.* Ali je projekcija zvezna na $\mathbb{R}^n$? Kaj pa polinomi in racionalne funkcije?
   - **Definicija.** Funkcija $n$-spremenljivk.
   - *Opomba.* Ali je vsaka zožitev zvezne funkcije zvezna funkcija?
   - **Trditev.** Ali je zvezna v točki $a \in D$ funkcija zvezna v točki $a \in D$ kot funkcija posameznih spremenljivk?
   - *Zgled.* Navedi primer funkcije, ki je zvezna kot funkcija posameznih spremenljivk, vendar ni zvezna.
   - *Zgled.* Navedi primer funkcije, ki ima zvezne zožitve na premice, vendar ni zvezna.
2. Zveznost preslikav iz $\mathbb{R}^n$ v $\mathbb{R}^m$
   Naj bo $D \subseteq \mathbb{R}^n$ in $F : D \to \mathbb{R}^m$ preslikava. Naj bo $x \in D$, potem $F(x) = (y_1, \ldots, y_m) \in \mathbb{R}^m$.
   Lahko pišemo $F(x) = (f_1(x), \ldots, f_m(x))$. Torej $F$ določa $m$ funkcij $n$-spremenljivk.
   - **Trditev.** Karakterizacija zveznosti $F$ v točki $a \in D$ z koordinatnimi funkciji.
   - *Zgled.* Kaj pomeni, da so linearne preslikave omejene? TODO: *
   - **Trditev.** Čemu je ekvivalentna omejenost linearnih preslikav?
   - **Trditev.** Ali so linearne preslikave zvezne? Matrična norma.
   - **Definicija.** Afina preslikava.

## 1.3 Parcialni odvodi in difrenciabilnost

1. Parcialni odvodi
   Naj bo $D \subseteq \mathbb{R}^n$, $a \in D$ notranja, $f : D \to \mathbb{R}$ funkcija.
   - **Definicija.** Kadar je $f$ parcialno odvedljiva po spremenljivke $x_j$ v točki $a \in D$? Kaj je parcialni odvod?
   - *Opomba.* Kaj lahko povemo o parcialne odvedljivosti elementarnih funkcij?
2. Diferenciabilnost
   Naj bo $D \subseteq \mathbb{R}^n$, $a \in D$ notranja, $f : D \to \mathbb{R}$ funkcija.
   - **Definicija.** Kadar je $f$ diferenciabilna v točki $a \in D$? Diferencial $f$ v točki $a \in D$.
   - *Opomba.* Ali je diferencial, če obstaja, enolično določen?
   - *Opomba.* Kaj je diferencial v smislu aproksimacije funkcije? Zapis diferenciala v matrične oblike.
   - **Trditev.** (Potrebni pogoji za diferenciabilnost). Zveza med diferencialom, parcialnimi odvodi in zveznostjo.
   - *Opomba.* Kako lahko izrazimo diferencial z parcialnimi odvodi? Gradient funkcije. Operator nabla.
   - *Zgled.* Ali je $f(x,y) = \begin{cases} \frac{2xy}{x^2+y^2}; & (x,y) \neq (0,0) \\ 0; & (x,y) = (0,0) \end{cases}$ diferenciabilna?
   - *Zgled.* Ali je $f(x,y) = \begin{cases} \frac{2x^2y}{x^2+y^2}; & (x,y) \neq (0,0) \\ 0; & (x,y) = (0,0) \end{cases}$ zvezna, parcialno odvedljiva, diferenciabilna?
   - **Izrek.** Zadosten pogoj za diferenciabilnost $f$ v točki $a \in D$. TODO: *
3. Višji parcialni odvodi
   Naj bo $f : D^{\text{odp}} \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ funkcija. Denimo, da je $f$ parcialno odvedljiva po vseh spremenljivkah na $D$. Parcialni odvodi so tudi funkcije $n$-spremenljivk in morda so tudi te parcialno odvedljive po vseh oz. nekaterih spremenljivkah.
   - **Trditev.** Zadostni pogoj za enakost mešanih odvodov. TODO: *
   - **Definicija.** Kadar je $f$ razreda $C^k$ na $D$?
   - **Definicija.** Množica $k$-krat zvezno odvedljivih funkcij. Množica gladkih funkcij. Množica zveznih funkcij.
   - *Opomba.* Kakšno strukturo ima množica $C^k(D)$ z operacijama $+$, $\circ$ in množenja s skalarji?
4. Diferenciabilnost preslikav
   Naj bo $D \subseteq \mathbb{R}^n$, $a \in D$ notranja, $F : D \to \mathbb{R}^m$ preslikava.
   - **Definicija.** Kadar je $F$ diferenciabilna v točki $a \in D$? Diferencial $F$ v točki $a \in D$.
   - *Opomba.* Ali je diferencial, če obstaja, enolično določen?
   - *Zgled.* Ali sta diferenciabilni $\mathcal{A} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ linearna, $F(x) = \mathcal{A}x$ in $F : \mathbb{R}^{n\times n} \to \mathbb{R}^{n\times n}$, $F(X) = X^2$?
   - **Izrek.** Karakterizacija diferenciabilnosti $F$ v točki $a \in D$ s koordinatnimi funkciji.
   - *Opomba.* Kako se izraža diferencial $F$ v točki $a \in D$ z koordinatnimi funkciji? Jacobijeva matrika.
   - **Posledica.** Zadosten pogoj za diferenciabilnost $F$ v točki $a$.
   - **Definicija.** Kadar je $F$ razreda $C^k$ na $D$?
   - **Izrek.** Verižno pravilo. TODO: *
   - *Opomba.* Kako se izraža diferencial kompozituma funkcij z Jacobijevimi matriki?
   - **Posledica.** Verižno pravilo za funkcijo $n$-spremenljivk. Odvod funkcije po $i$-te spremenljivke.

### 1.4 Izrek o implicitni funkciji

1. Izrek o inverzni preslikavi
   Naj bo $D, \Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ odprti, $\Phi : D \to \Omega$ preslikava razreda $C^1(D)$. Kakšne so zadostni pogoji za (lokalno) obrnljivost preslikave $\Phi$?
   - **Definicija.** Kadar rečemo, da je $\Phi$ $C^k$-difeomorfizem?
   - *Zgled.* Ali je $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^3$ difeomorfizem?
   - **Trditev.** Potreben pogoj, da je $\Phi$ difeomorfizem.
   - **Posledica.** Kako izračunamo diferencial inverzne preslikave?
   - *Zgled.* Ali velja obrat? $\Phi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $\Phi(x, y) = (e^x \cos y, e^x \sin y)$.
   - **Lema.** Lagrangeev izrek za funkcijo več spremenljivk.
   - **Posledica.** Kaj če so vsi parcialno odvodi omejeni (ocena razlike)?
   - **Posledica.** Kaj če so vsi parcialno odvodi omejeni in je $f$ preslikava (ocena razlike)?
   - **Lema.** Pomožna trditev za dokaz izreka o inverzni preslikavi.
   - **Opomba.** Poenostavitev.
   - **Izrek.** Izrek o inverzni preslikavi. Lokalni difeomorfizem. TODO: *
   - **Posledica.** Kaj če je $F$ razreda $C^k(D)$?
   - **Definicija.** Kadar rečemo, da je $\Phi$ lokalni $C^k$-difeomorfizem?
   - *Opomba.* Kaj pravi izrek, če je $n = 1$?
   - *Zgled.* Naj bo $F : \mathbb{R}^{n\times n} \to \mathbb{R}^{n\times n}$, $F(X) = X^2$. Ali je $F$ v okolici točke $I \in \mathbb{R}^{n\times n}$ lokalni difeomorfizem? Kaj to pomeni?
2. Osnovna verzija izreka o implicitni preslikavi
   Naj bo $D \subseteq \mathbb{R}^2$ odprta, $(a, b) \in D$, $f : D \to \mathbb{R}$ funkcija razreda $C^1(D)$.
   - **Izrek.** Osnovna verzija izreka o implicitni funkciji. TODO: *
   - **Posledica.** Kaj če je $f$ razreda $C^k(D)$?
   - *Zgled.* Kaj če pogoji niso izpolnjeni:
     (a) $f(x, y) = (x - y)^2$, $f(x, y) = 0$ v okolici točke $(0, 0)$. Pogoji niso zadostni.
     (b) $f(x, y) = y^3 - x$, $f(x, y) = 0$ v okolici točke $(0, 0)$. Funkcija ni odvedljiva v $x = 0$.
     (c) $f(x, y) = y^2 - x^2 - x^4$, $f(x, y) = 0$ v okolici točke $(0, 0)$. Ni enoličnosti.
     (d) $f(x, y) = y^2 + x^2 + x^4$, $f(x, y) = 0$ v okolici točke $(0, 0)$. Rešitev je točka.
3. Izrek o implicitni funkciji
   Imamo $n + m$ spremenljivk $(x, y)$, kjer $x = (x_1, \dots, x_n)$, $y = (y_1, \dots, y_m)$ in $m$ enačb. Pričakujemo, da bomo lahko $m$ spremenljivk izrazili kot funkcijo $n$ ostalih, tj. najdemo presliavo $\Phi : D \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$, da velja $y = \Phi(x)$.
   Naj bo $D \subseteq \mathbb{R}^n_x \times \mathbb{R}^m_y$ odprta, $F = (f_1, \dots, f_m) : D \to \mathbb{R}^m$ preslikava razreda $C^1(D)$.
   - **Definicija.** Parcialni diferencial na prvo spremenljivko. Parcialni diferencial na drugo spremenljivko.
   - *Opomba.* Kako se izraža parcialna difernicala z matriko? Kako se izraža diferencial $F$ z parcialnima diferenicalama?
   - *Opomba.* Kako ta diferenical deluje na vektorju $\begin{bmatrix} h \\ k \end{bmatrix}$, $h \in \mathbb{R}^n$, $k \in \mathbb{R}^m$?
   - *Opomba.* Kako lahko odvajamo izraz $F(x, \varphi(x)) = 0$ po spremenljivke $x$?
   - **Izrek.** Izrek o implicitni funkciji. TODO: *
   - **Posledica.** Kaj če je $F$ razreda $C^k(D)$?
   - *Zgled.* Naj bo $F(x, y) = x^2 + y^2 - 1$ in naj rešujemo enačbo $F(x, y) = 0$ v okolici točke $(0, 1)$. S pomočjo dokaza izreka o implicitni preslikavi določi $y = \varphi(x)$.
   - *Zgled.* Naj bosta $f(x, y, z) = y + xy + xz^2$ in $g(x, y, z) = z + zy + x^2$. Dokaži, da sistem enačb $f(x, y, z) = 0$ in $g(x, y, z) = 0$ v okolici točke $(0, 0, 0)$ enolično določa $C^\infty$ funkciji $y = y(x)$ in $z = z(x)$ in razvij jih v Taylorjevo vrsto do členov reda 2.

4. Rang preslikave

   Naj bo $D \subseteq \mathbb{R}^n$ odprta, $a \in D$ in $F : D \to \mathbb{R}^m$ preslikava razreda $C^1$.
   - *Zgled.* Naj bo $F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ funkcija. Recimo, da rešujemo enačbo $F(x, y, z) = 0$ in vemo, da $F(a, b, c) = 0$. Kakšen je zadosten pogoj za to, da bi lahko vsaj eno spremenljivko izrazili kot funkcijo ostalih?
   - *Zgled.* Naj bosta $F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ in $G : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ funkciji. Recimo, da rešujemo sistem enačb $F(x, y, z) = 0$ in $G(x, y, z) = 0$ in vemo, da $F(a, b, c) = 0$ in $G(a, b, c) = 0$. Kakšen je zadosten pogoj za to, da bi lahko vsaj dve spremenljivke izrazili kot funkcijo tretje?
   - **Definicija.** Rang preslikave $F$ v točki $a \in D$. Rang $F$. Kadar rečemo, da je $F$ v točki $a \in D$ maksimalnega ranga?
   - *Opomba.* Ali je maksimalnost ranga lokalno stabilna?
   - *Primer.* Obrnljiva matrika in permutacija koordinat. TODO
   - **Posledica IIF.** Čemu je ekvivalentna enačba $F(x) = 0$, če je $m < n$?
   - *Primer.* Naj bo $\mathcal{A} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ linearna, $m \leq n$, $\operatorname{rang} \mathcal{A} = m$. Kakšno dimenzijo ima prostor rešitev enačbe $\mathcal{A}x = b$?
   - **Posledica.** Kaj lahko povemo o $F$ v točki $a \in D$, če je $\operatorname{rang}_a F = m$, če $m \leq n$?

## 1.5 Podmnogoterosti v $\mathbb{R}^n$

Podmnogoterosti je posplošitev pojmov „krivulja“ in „ploskev“.

1. Podmnogoterosti
   - **Definicija.** Gladka podmnogoterost. Lokalne definicijske funkcije.
   - *Opomba.* Kaj je podmnogoterost, če je njena kodimenzija enaka 0?
   - *Zgled.* Gledamo v $\mathbb{R}^3$. Naj bo $\mathcal{F}_1, \mathcal{F}_2, \mathcal{F}_3 : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ linearni. Kaj dobimo, če vzamemo za definiciske funkcije eno, dve ali tri funkcije izmed $\mathcal{F}_1, \mathcal{F}_2, \mathcal{F}_3$? Kadar govorimo o krivuljah in kadar o ploskvah?
   - *Zgled.* Ugotovi, ali je podmnogoterost:
     - $M = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 + z^2 = 1\}$.
     - $M = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 + z^2 = 1,\ x + y + z = 0\}$.
     - $M = (\{0\} \times \mathbb{R}) \cup (\mathbb{R} \times \{0\})$.
     - $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R}) = \{A \in \mathbb{R}^{n \times n} \mid \det A \neq 0\}$.
     - $\mathrm{SL}_n(\mathbb{R}) = \{A \in \mathbb{R}^{n \times n} \mid \det A = 1\}$.
   - *Opomba.* Kadar rečemo, da je podmnogoterost podana implicitno?
   - **Trditev.** Karakterizacija podmnogoterosti (ali je lokalno graf?)
   - *Opomba.* Kadar rečemo, da je podmnogoterost podana eksplicitno?
   - *Zgled.* Ali je $M = \{(x, x^2) \mid x \in \mathbb{R}\}$ podmnogoterost?
2. Parametrično padajanje mnogoterosti
   - *Zgled.* Ali je parametrizacija $\varphi \mapsto (a \cos \varphi, a \sin \varphi),\ a > 0,\ \varphi \in [0, 2\pi)$ določa podmnogoterost?
   - **Trditev.**

## 1.6 Ekstremi funkcij več spremenljivk

1. Ekstremi funkcij več spremenljivk
   Naj bo $D \subseteq \mathbb{R}^n$, $a \in D$, $f : D \to \mathbb{R}$ funkcija.
   - **Definicija.** Lokalni maksimum/minimum. Strogi lokalni maksimum/minimum. Maksimum/minimum (globalni). Lokalni ekstrem. Globalni ekstrem.
   - *Opomba.* Kaj ima zvezna funkcija na kompaktu?
   - **Definicija.** Stacionarna (oz. kritična) točka $a \in D^{\text{odp}}$ diferenciabline funkcije $f$.
   - **Trditev.** Kaj če ima diferenciablina funkcija $f$ v točki $a \in D^{\text{odp}}$ lokalni ekstrem?
   - *Zgled.* Poišči minimum in maksimum $f(x,y) = x^2 - xy + y^2 - 3x + 4$ na $K = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 \leq 3\}$.
2. Potrebni in zadostni pogoji na 2. odvodi, da je kritična točka lokalni ekstrem
   Naj bo $D \subseteq \mathbb{R}^n$ odprta, $f : D \to R$ razreda $C^2$ na $D$.
   - **Definicija.** Hessejeva matrika $Hf$ 2. odvodov. Hessejeva forma.
   - *Opomba.* Kaj lahko povemo o Hessejeve matrike?
   - **Definicija.** Pozitivno (semi)definitna $Hf$. Negativno (semi)definitna $Hf$.
   - *Opomba.* Karakterizacija pozivne/negativne (semi)definitnosti s lastnimi vrednosti $Hf$.
   - **Trditev.** (Potrebni pogoji). Kaj velja, če ima $f$ v točki $a \in D$ lokalni maksimum/minimum?
   - **Trditev.** (Zadostni pogoji.) Kadar je stacionarna točka $a \in D$ funkcije $f$ lokalni minimum/maksimum? Kadar nič od tega?
   - *Zgled.* Določi $(Hf_i)(0,0)$ za $f_1(x,y) = \frac{1}{2}(x^2 + y^2)$, $f_2(x,y) = \frac{1}{2}(-x^2 - y^2)$, $f_3(x,y) = \frac{1}{2}(x^2 - y^2)$.
   - **Posledica.** Kako zgledajo zadostni pogoji za primer $n = 2$?
   - *Zgled.* Naj bo $f(x,y,z) = x^2 + y^2 + z^2 + 2xyz$. Klasificiraj vse stacionarne točke funkcije $f$.
3. Vezani ekstremi
   - **Izrek.** Obstoj Lagrangeevih multiplikatorjev.
   - *Opomba.* Lagrangeeva metoda za iskanja vezanih ekstremov.
   - *Zgled.* Določi stacionarne točke $f(x,y,z) = z$ na $M = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 + z^2 = 1;\ x + y + z = 0\}$.
   - *Zgled.* Določi stacionarne točke $f(x,y,z) = x^2 - xy + y^2 - 3x + 4$ na robu $x^2 + y^2 = 9$.

## 2 Integral s parametri

Naj bo $f : [a,b]_x \times [c,d]_y \to \mathbb{R}$ funkcija. Gledamo funkcijo $F(y) = \displaystyle\int_a^b f(x,y)\,dx$, kjer $y \in [c,d]$ je *parameter*. Zanima nas v kakšni so povezavi lastnosti funkcije $f$ in funkcije $F$.

1. Integral s parametri
   - **Definicija.** Lokalno kompaktna podmnožica.
   - **Trditev.** Zadostni pogoj za zveznost funkcije $F(u,v,y) = \int_u^v f(x,y)\,dx$.
   - **Posledica.** Zadostni pogoj za zveznost funkcije $F(y) = \int_a^b f(x,y)\,dx$.
2. Odvajanje integrala s parametri
   - **Trditev.** Zadostni pogoj, da smemo zamenjati vrstni red odvajanja in integriranja v $\frac{d}{dy}\int_a^b f(x,y)\,dx$.
     Kaj lahko povemo o funckiji $F(y) = \int_a^b f(x,y)\,dx$?
   - **Posledica.** Čemu je enako $\frac{d}{dy}\int_{\alpha(y)}^{\beta(y)} f(x,y)\,dx$? Pri kakšnih zadostnih pogojih?
   - **Posledica.** Naj bo $y \in D^{\text{odp}} \subseteq \mathbb{R}^n$. Zadostni pogoj, da smemo zamenjati vrstni red odvajanja in integriranja v $\frac{\partial}{\partial y_j}\int_a^b f(x,y)\,dx$ za vse $j \in \{1,\dots,n\}$. Kaj lahko povemo o funckiji $F(y) = \int_a^b f(x,y)\,dx$?
3. Integral integrala s parametri
   - **Trditev.** Zadostni pogoji, da smemo zamenjati vrstni red integriranja v $\int_c^d \left(\int_a^b f(x,y)\,dx\right)\,dy$.
4. Posplošeni integral s parametri
   Naj bo $Y$ neka množica, $a \in \mathbb{R}$, $f : [a,\infty)_x \times Y_y \to \mathbb{R}$ funkcija. Standardni predpostavki:
     Funkcija $f$ za vsak $y \in Y$ zvezna, tj. $x \mapsto f(x,y)$ zvezna na $[a,\infty)$ za vsak $y \in Y$.
     Za vsak $y \in Y$ obstaja integral $F(y) = \displaystyle\int_a^\infty f(x,y)\,dx$
   - **Definicija.** Kadar $F(y) = \int_a^\infty f(x,y)\,dx$ konvergira enakomerno na $Y$?
   - **Trditev.** Zadostni pogoji za zveznost funkcije $F(y) = \int_a^\infty f(x,y)\,dx$.
   - **Definicija.** Kadar $F(y) = \int_a^\infty f(x,y)\,dx$ konvergira lokalno enakomerno na $Y$?
   - **Trditev.** Test enakomerne konvergence.
   - **Trditev.** Zadostni pogoji, da smemo zamenjati vrstni red integriranja v $\int_a^\infty \left(\int_c^d f(x,y)\,dy\right)\,dx$.
   - **Trditev.** Zadostni pogoji, da smemo zamenjati vrstni red integriranja v $\int_a^\infty (\int_c^\infty f(x,y)\,dy)\,dx$, če je $f$ nenegativna.
   - **Trditev.** Zadostni pogoji, da smemo zamenjati vrstni red integriranja v $\int_a^\infty (\int_c^\infty |f(x,y)|\,dy)\,dx$.
   - **Trditev.** Zadostni pogoji, da smemo zamenjati vrstni red odvajanja in integriranja v $\frac{d}{dy}\int_a^\infty f(x,y)\,dx$.
     Kaj lahko povemo o funckiji $F(y) = \int_a^\infty f(x,y)\,dx$?
   - **Posledica.** Naj bo $y \in D^{\text{odp}} \subseteq \mathbb{R}^n$. Zadostni pogoj, da smemo zamenjati vrstni red odvajanja in integriranja v $\frac{\partial}{\partial y_j}\int_a^\infty f(x,y)\,dx$ za vse $j \in \{1,\dots,n\}$. Kaj lahko povemo o funckiji $F(y) = \int_a^\infty f(x,y)\,dx$?
5. Eulerjeva funkcija gama
   - **Definicija.** Eulerjeva funkcija gama.
   - **Trditev.** Lastnosti Eulerjeve funkcije gama.
   - **Izrek.** S čim je enolično določena Eulerjeva funkcija gama?
   - **Izrek.** Stirlingova forumla.
   - **Posledica.** Čemu je enako $\lim_{n\to\infty} \frac{n!}{n^n\, e^{-n}\,\sqrt{2\pi n}}$? Kaj to pomeni?
6. Eulerjeva funkcija beta
   - **Definicija.** Eulerjeva funkcija beta.
   - **Trditev.** Lastnosti Eulerjeve funkcije beta.
   - **Trditev.** Kaj če v $B(p,q)$ vpeljamo $x = \sin^2 t$?
   - **Trditev.** Kaj če v $B(p,q)$ vpeljamo $t = \frac{t}{1+t}$?
   - **Posledica.** Čemu je enako $B(p, 1-p)$?
   - **Posledica.** Čemu je enako $B(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$?
   - **Izrek.** Osnovna povezava med $B$ in $\Gamma$.
   - **Posledica.** Čemu je enako $\Gamma(\frac{1}{2})$?