

Diskretna matematika 1

21. november 2024

1 Kombinatorika

1.1 Osnovna načela kombinatorike

Trditev 1.1 (Načelo produkta). Če sta A, B končni množici, potem je

$$|A \times B| = |A| \cdot |B|.$$

Trditev 1.2 (Posplošeno načelo produkta). Če so A_1, \dots, A_k končne, potem je

$$|\prod_{i=1}^k A_i| = \prod_{i=1}^k |A_i|.$$

Trditev 1.3 (Načelo vsote). Če sta A in B končni in disjunktni množici, potem je

$$|A \cup B| = |A| + |B|.$$

Trditev 1.4 (Posplošeno načelo vsote). Če so A_1, \dots, A_k končne, paroma disjunktna množice, potem je

$$\bigcup_{i=1}^k A_i = \sum_{i=1}^k |A_i|.$$

Trditev 1.5 (Načelo enakosti). Če obstaja bijekcija $A \rightarrow B$, potem je

$$|A| = |B|.$$

Označimo z $[k] = \{1, 2, \dots, k\}$.

Primer. Naj bo A končna množica, $|A| = n$, $A = \{a_1, a_2, \dots, a_n\}$. Naj bo 2^A potenčna množica. Določi moč 2^A .

Trditev 1.6 (Načelo dvojnega preštevanja). Z njim pokažemo, da sta dva izraza/formuli enaka, če z obema na različna načina preštujemo elemente iste množice.

Primer (Eulorjeva funkcija ϕ). Za $n \in \mathbb{N}$ definiramo $\phi(n)$ = število števil iz $[n]$, ki so tuji z n . Določi $\sum_{d|n} \phi(d)$.

Trditev 1.7 (Dirichletovo načelo). Če sta $n, m \in \mathbb{N}$ in je $n > m$, potem ne obstaja injektivna preslikava $[n] \rightarrow [m]$.

Opomba (Kombinatorična interpretacija). Če n predmetov razporedimo v m predalov in je $n > m$, potem sta vsaj v enem predalu vsaj dva predmeta.

Primer. Naj bo $X \subset [100]$, $|X| = 10$. Pokaži, da X vsebuje dve disjunktni podmnožici z isto vsoto.

1.2 Število preslikav

Definicija 1.1. Množica $B^A = \{f : A \rightarrow B\}$ je množica vseh preslikav iz A v B .

Definicija 1.2. Definiramo:

- $n^{\underline{k}} = \underbrace{n(n-1) \dots (n-k+1)}_{k \text{ faktorjev}}$ je padajoča potenca.
- $n^{\overline{k}} = n(n+1) \dots (n+k-1)$ je naraščajoča potenca.
- $n! = n^{\underline{n}}$ je n fakulteta.
- Množica z n elementi se imenuje n -množica.

Trditev 1.8. Naj bosta N in K končni množici z $|N| = n$, $|K| = k$. Tedaj velja:

- $|K^N| = k^n$.
- Število injektivnih preslikav iz N v K je $k^{\underline{n}}$.
- Število bijekcij iz N v K je $n!$, če $n = k$ in je 0 sicer.

Dokaz. Za 1. in 2. točko uporabimo načelo enakosti. V 3. točki upoštevamo, kadar je preslikava iz končne množice v končno množico bijektivna. □

1.3 Binomski koeficienti in binomski izrek

Definicija 1.3. Naj bo $x \in \mathbb{C}$. Naj bo $k \in \mathbb{N}_0 = \{1, 2, \dots\}$. Definiramo $\binom{x}{k} = \frac{x^k}{k!} = \frac{x(x-1)\dots(x-k+1)}{k!}$. Števila $\binom{x}{k}$ so *binomski koeficienti*. Če je $k \notin \mathbb{N}_0$ definiramo $\binom{x}{k} = 0$.

Trditev 1.9. Če je $n \in \mathbb{N}_0$ in $k \leq n$, $k \in \mathbb{N}_0$, potem je

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}.$$

Števila $\binom{n}{k}$ so binomska števila.

Dokaz. Definicija binomskega koeficienta. □

Opomba. Tudi $\binom{0}{0} = 1$. Razlaga: $0! = 1$ je število bijektivnih preslikav iz \emptyset v \emptyset .

Opomba. Če je $0 \leq k \leq n$, potem $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$.

Definicija 1.4. Naj bo N množica. Definiramo $\binom{N}{k} = \{A \in P(N) \mid |A| = k\}$.

Trditev 1.10. Če je N n -množica in je $0 \leq k \leq n$, potem je

$$\left| \binom{N}{k} \right| = \binom{n}{k}.$$

Dokaz. Definiramo $X = \{(n_1, n_2, \dots, n_k); n_i \in \mathbb{N} \text{ paroma različni}\}$. Označimo $X_{n,k} = \left| \binom{N}{k} \right|$. Preštejemo elementi množici X na 2 načina. □

Trditev 1.11. Za $n \in \mathbb{N}$ in $1 \leq k \leq n$ velja:

$$\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k}.$$

Dokaz. Naj bo N n -množica. Naj bo $x \in N$ poljuben fiksni element.

Definiramo $\mathcal{A} = \{A \in \binom{N}{k}; x \in A\}$ in $\mathcal{B} = \{B \in \binom{N}{k}; x \notin B\}$. Potem $\binom{N}{k} = \mathcal{A} \cup \mathcal{B}$. Uporabimo prejšnjo trditev in načelo vsote. □

Definicija 1.5. *Pascalov trikotnik* je trikotnik oblike

$$\begin{array}{cccccccc} & & & & 1 & & & \\ & & & & & 1 & & \\ & & & 1 & & 2 & & 1 \\ & & 1 & & 3 & & 3 & & 1 \\ & 1 & & 4 & & 6 & & 4 & & 1 \\ 1 & & 5 & & 10 & & 10 & & 5 & & 1 \end{array}$$

Opomba. S pomočjo Paskalovega trikotnika se lahko spomnimo rekurzivno formulo za $\binom{n}{k}$ (n je številka vrstice, k je številka diagonale, ki jo gledamo z leve proti desni). Šteteti vrstice in diagonale začnemo z 0.

Izrek 1.12 (Binomski izrek). Za vsak $n \in \mathbb{N}_0$ velja:

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^k b^{n-k}.$$

Dokaz. Izberimo k -krat a izmed n oklepajev. □

Opomba. V izreku sta a in b elementi poljubnega komutativnega kolobarja.

1.4 Izbori

Naj bo N n -množica. Opazujemo izbore k -elementov.

1. Izbor je urejen (važno v kakšnem vrstnem redu izberimo elementi):
 - 1.1 Elementi si lahko ponavljajo: n^k .
 - 1.2 Elementi se ne smejo ponavljati: $n^{\underline{k}}$.
2. Izbor je neurejen:
 - 2.1 Elementi si lahko ponavljajo [trditev]: $\binom{n+k-1}{k}$.
 - 2.2 Elementi se ne smejo ponavljati: $\binom{n}{k}$.

Trditev 1.13. Število neurejenih izborov s ponavljanjem dolžine k iz n -množice N je

$$\binom{n+k-1}{k}.$$

Dokaz. Naj bo $N = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$.

Neurejenemu izboru $\underbrace{x_1 \dots x_1}_{k_1} \underbrace{x_2 \dots x_2}_{k_2} \dots \underbrace{x_n \dots x_n}_{k_n}$ priredimo niz $\underbrace{1 \dots 1}_{k_1} 0 \underbrace{1 \dots 1}_{k_2} 0 \dots 0 \underbrace{1 \dots 1}_{k_n}$. □

1.5 Permutacije in permutacije s ponavljanjem

Definicija 1.6. Naj bo A n -množica. *Permutacija množice A* je bijektivna preslikava $\pi : A \rightarrow A$.

Množico vseh permutacij velikosti n (permutacij na $[n]$) označimo z S_n . Množico vseh permutacij množice A označimo z S_A .

Trditev 1.14. $|S_n| = n!$.

Dokaz. Z indukcijo pokažemo, da je $|S_n| = n|S_{n-1}|$ in $|S_1| = 1$. □

Trditev 1.15. Vsako permutacijo lahko zapišemo kot produkt disjunktnih ciklov.

Definicija 1.7. Naj bo $\pi \in S_n$. Par je *inverzija*, če velja: $i < j$ in $\pi(i) > \pi(j)$.

Definicija 1.8. Permutacija $\pi \in S_n$ je *soda* (oz. *liha*), če ima sodo mnogo inverzij (oz. liho mnogo inverzij).

1.5.1 Multimnožice

Definicija 1.9. *Multimnožica z elementi v množici S* je preslikava $\mu : S \rightarrow \mathbb{N}_0$. Pri tem številu $\mu(a)$, $a \in S$, rečemo *kratnost elementa a v multimnožici μ* , vsoti $\sum_{a \in S} \mu(a)$ pa *moč multimnožice μ* . Multimnožica je *končna*, če je njena moč končna.

Opomba. Multimnožico M formalno podamo z urejenim parom (S, μ) . Namesto da elemente zapišemo večkrat, lahko kratnost označimo tudi s formalno potenco: $M = \{a, a, b, c, c, c\} = \{a^2, b, c^3\}$.

Multimnožica je isto kot neurejen izbor s ponavljanjem. Tojer obstaja $\binom{n+k-1}{k}$ k -elementnih multimnožic v množici z n elementi.

1.5.2 Permutacije multimnožic

Permutacija multimnožice $M = (S, \mu)$ moči n je zaporedje (x_1, \dots, x_n) , kjer je $x_i \in S$ in se vsak $a \in S$ v zaporedju pojavi $\mu(a)$ -krat.

Trditev 1.16. Število permutacij multimnožice $M = \{1^{\alpha_1}, 2^{\alpha_2}, \dots, k^{\alpha_k}\}$ moči $n = \alpha_1 + \dots + \alpha_k$ je

$$\frac{n!}{\alpha_1! \alpha_2! \dots \alpha_k!}.$$

Dokaz. Najprej izberimo položaje elementa 1, nato izberimo položaje elementa 2 itd. □

Definicija 1.10. Številu $\frac{n!}{\alpha_1! \alpha_2! \dots \alpha_k!}$ rečemo *multinomski koeficient* in ga označimo z $\binom{n}{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_k}$.

Opomba. Multinomski koeficient je splošitev binomskega koeficienta.

Trditev 1.17 (Multinomski izrek). Velja

$$(x_1 + \dots + x_k)^n = \sum \binom{n}{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_k} x_1^{\alpha_1} \dots x_k^{\alpha_k},$$

kjer vsota teče po vseh izbirah naravnih števil $\alpha_1, \dots, \alpha_k$, katerih vsota je n .

Dokaz. Število permutacij multimnožice moči n , kjer je S množica indeksov. □

1.6 Kompozicije naravnega števila

Definicija 1.11. *Kompozicija naravnega števila n je zaporedje pozitivnih naravnih števil $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_l)$, za katero velja $\lambda_1 + \dots + \lambda_l = n$. Dolžina kompozicije λ , $l(\lambda)$ je število elementov zaporedja, številu n pa rečemo *velikost kompozicije*. Števila $\lambda_1, \dots, \lambda_l$ imenujemo *členi kompozicije*.*

Trditev 1.18. *Naj bo $n \geq 1$.*

1. *Število kompozicij števila n je enako 2^{n-1} .*
2. *Število kompozicij dolžine k števila n je enako $\binom{n-1}{k-1}$.*

Dokaz. Število n lahko si predstavljamo kot zaporedje n kroglic, kompozicijo pa s pregradami med kroglicami: $\bullet \mid \bullet \bullet \mid \bullet$. □

Opomba. Lahko razumemo kompozicijo števila n s k členi kot rešitev enačbe $x_1 + \dots + x_k = n$, kjer so $x_i \in \mathbb{N}$.

1.6.1 Šibke kompozicije

Šibka kompozicija števila n ima isto definicijo kot kompozicija, le da dovolimo med členi tudi ničle.

Trditev 1.19. *Število šibkih kompozicij števila n s k členi je $\binom{n+k-1}{k-1} = \binom{n+k-1}{n}$.*

Dokaz. 1. način. Rešujemo enačbo $x_1 + \dots + x_k = n$, kjer so $x_i \in \mathbb{N}_0$.

2. način. Kroglice in pregrade.

3. način. Neurejeni izbori s ponavljanjem. □

1.7 Razčlenitve naravnega števila

Definicija 1.12. *Razčlenitev naravnega števila n je zaporedje pozitivnih naravnih števil $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_l)$, kjer je $\lambda_1 \geq \dots \geq \lambda_l$ in $\lambda_1 + \dots + \lambda_l = n$. Dolžina razčlenitve λ , $l(\lambda)$ je število elementov zaporedja, številu n pa rečemo *velikost razčlenitve*. Števila $\lambda_1, \dots, \lambda_l$ imenujemo *členi razčlenitve*. Razčlenitvam rečemo tudi *particije*.*

Definicija 1.13. *Naj bo $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_l)$ razčlenitev naravnega števila n . Ferrersov diagram λ je seznam vrstic oblike:*

$$\begin{array}{l} 1. \text{ vrsta: } \underbrace{\circ \circ \circ \dots \circ}_{\lambda_1 \text{ krožcev}} \\ 2. \text{ vrsta: } \underbrace{\circ \circ \dots \circ}_{\lambda_2 \text{ krožcev}} \\ \vdots \\ k. \text{ vrsta: } \underbrace{\circ \dots \circ}_{\lambda_l \text{ krožcev}} \end{array}$$

Definicija 1.14. *Naj bo $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_l)$ razčlenitev naravnega števila n . Konjugirana razčlenitev $\bar{\lambda}$ je razčlenitev, ki ima transponiran Ferrersov diagram.*

Uvedemo oznake:

- $p(n)$ je število razčlenitev števila n . Funkciji $p(n)$ rečemo tudi *razčlenitvena funkcija*.
- $p_k(n)$ je število razčlenitev števila n s k členi.
- $\bar{p}_k(n)$ je število razčlenitev števila n z največ k členi.

Trditev 1.20. *Za naravni števili n in k velja:*

1. $p_k(n) = p_{k-1}(n-1) + p_k(n-k)$.
2. $p_k(n) = \bar{p}_k(n-k)$.
3. $\bar{p}_k(n) = \bar{p}_{k-1}(n) + \bar{p}_k(n-k)$.

Dokaz. Pomagamo si z Ferrersovim diagramom.

1. Razbijemo razčlenitve na tiste, ki vsebujejo 1 in tiste, ki jo ne vsebujejo.
2. Odštejemo od prvega stolpca 1.
3. Razčlenitev n z največ k členi ima bodisi natanko k členov bodisi kvečjemi $k-1$ členov. □

1.8 Stirlingova števila I. vrste

Definicija 1.15. Naj bo $1 \leq k \leq n$. *Stirlingovo število I. vrste* $C(n, k)$ je število permutacij množice $[n]$, ki se zapišejo kot produkt k disjunktnih ciklov. Velja: $C(n, 0) = 0$, $n > 0$ in $C(0, 0) = 1$.

Primer. Izračunaj $C(n, n)$, $C(n, 1)$, $C(4, 2)$.

Trditev 1.21. Naj bo $1 \leq k \leq n$. Velja:

$$C(n, k) = C(n-1, k-1) + (n-1)C(n-1, k).$$

Dokaz. Permutacije $[n]$ s k cikli razdelimo takole:

1. tiste, kjer je n negibna točka in
2. ostale.

□

Za izračun $C(n, k)$ lahko si pomagamo s Stirlingovo matriko I. vrste, ki jo dobimo s pomočjo rekurzivne zveze.

Trditev 1.22. $x^{\overline{n}} = \sum_{k=0}^{\infty} C(n, k)x^k$.

Dokaz. Indukcija po n .

□

Primer. Izračunaj $x^{\overline{4}}$.

1.9 Stirlingova števila II. vrste in Bellova števila

Definicija 1.16. *Razdelitev množice* X je družina podmnožic $\{X_i\}_{i \in I}$ za katero velja:

1. $\bigcup_{i \in I} X_i = X$,
2. $X_i \cap X_j = \emptyset$ za vsaka $i, j \in I$, $i \neq j$.

Definicija 1.17. Naj bo $1 \leq k \leq n$. *Stirlingovo število II. vrste* $S(n, k)$ je število razdelitev množice $[n]$ v k nepraznih razredov. Velja: $S(n, 0) = 0$, $n > 0$ in $S(0, 0) = 1$.

Primer. Izračunaj $S(n, n)$, $S(n, 1)$, $S(n, 2)$.

Definicija 1.18. *Bellovo število* $B(n) = \sum_{k=0}^{\infty} S(n, k)$ je število vseh razdelitev n -množice v neprazne razrede.

Trditev 1.23. Naj bo $1 \leq k \leq n$. Velja:

$$S(n, k) = S(n-1, k-1) + kS(n-1, k).$$

Dokaz. Vzemimo množico $[n]$. Razdelitve v k razredov razdelimo takole:

1. tiste, ki imajo $\{n\}$ kot samostojni del in
2. ostale.

□

Za izračun $S(n, k)$ lahko si pomagamo s Stirlingovo matriko II. vrste, ki jo dobimo s pomočjo rekurzivne zveze.

Trditev 1.24. $x^n = \sum_{k=0}^{\infty} S(n, k)x^{\overline{k}}$.

Dokaz. **TODO**

□

Opomba. Če dva polinoma stopnje n ujemata v $n+1$ točk, potem sta enaka.

Izrek 1.25. Število surjektiv iz n -množice v k -množico je enako

$$k!S(n, k).$$

Dokaz. Vsaka surjektiv določa razdelitev n -množice v k nepraznih razredov.

□

Trditev 1.26. $B(n+1) = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{n}{k} B(k)$.

Dokaz. **TODO**

□

Definicija 1.19. Naj bo $1 \leq k \leq n$. *Lahovo število* $L(n, k)$ je število razdelitev n -množice v k linearno urejenih kosov.

1.10 Dvajnastera pot

Naj bo N n -množica (predmetov) in K k -množica (predalov). Gledamo „funkcijo“ $f : N \rightarrow K$, ki predmeti razporedi po predalih.

Imamo 12 možnosti: predmeti in predali lahko bodisi ločimo med seboj bodisi ne ločimo med seboj, funkcija lahko poljubna, injektivna (vsak predal ima kvečjemu 1 predmet) ali surjektivna (noben predal ni prazen).

Izrek 1.27 (Dvajnastera pot). *Velja:*

<i>ločimo predmeti/predali</i>	<i>poljubna</i>	<i>injektivna</i>	<i>surjektivna</i>
DA/DA	k^n	k^n	$k!S(n, k)$
DA/NE	$\sum_{i \leq k} S(n, i)$	$\begin{cases} 1; & n \leq k \\ 0; & \text{sicer} \end{cases}$	$S(n, k)$
NE/DA	$\binom{n+k-1}{k-1}$	$\begin{cases} \binom{k}{n}; & n \leq k \\ 0; & \text{sicer} \end{cases}$	$\binom{n-1}{k-1}$
NE/NE	$\bar{p}_k(n)$	$\begin{cases} 1; & n \leq k \\ 0; & \text{sicer} \end{cases}$	$p_k(n)$

Dokaz. Uporabimo že znane rezultate (kompozicije, razčlenitve) itd. □

1.11 Načelo vključitev in izključitev

Recimo, da sta A, B poljubni množici, potem $|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|$.

Primer. Koliko so števil v [30] ni tujih s 30? Koliko so tujih?

Izrek 1.28 (Načelo vključitev in izključitev). *Naj bo A_1, \dots, A_n množice. Velja:*

$$\left| \bigcup_{i=1}^n A_i \right| = \sum_{j=1}^n (-1)^{j+1} \sigma_j,$$

$$\text{kjer je } \sigma_j = \sum_{I \in \binom{[n]}{j}} \left| \bigcap_{i \in I} A_i \right|.$$

Dokaz. Pokažemo, da če $x \in \bigcup_{i=1}^n A_i$, potem prispeva natanko 1 k formuli. □

Primer. Na koliko načinov lahko razporedimo n označenih predmetov v k označenih predalov, če je vsaj en predal prazen?

Posledica 1.28.1. Če je X N -množica in so $A_1, \dots, A_n \subset X$, potem je število elementov množice X , ki niso v nobeni izmed množic A_1, \dots, A_n enako

$$N + \sum_{j=1}^n (-1)^j \sigma_j.$$

Definicija 1.20. Premestitev množice $[n]$ je permutacija $\pi \in S_n$ brez negibnih točk.

Primer. Izračunaj število premestitev množice $[n]$.

Izrek 1.29. Če je $n = p_1^{e_1} \dots p_r^{e_r}$ razcep $n \in \mathbb{N}$ na prafaktorji, potem je

$$\phi(n) = n \left(1 - \frac{1}{p_1}\right) \dots \left(1 - \frac{1}{p_r}\right) \text{ (Eulorjeva funkcija).}$$

Dokaz. TODO □