

# Analiza 2b

Ruslan Urazbakhtin

25. avgust 2025

## Kazalo

<b>1</b>	<b>Hilbertovi prostori</b>	<b>3</b>
1.1	Vektorski prostori s skalarnim produktom . . . . .	3
1.2	Hilbertovi prostori . . . . .	3
1.3	Prostor $L^2([a, b])$ . . . . .	4
1.4	Ortogonalnost . . . . .	6
1.5	Ortogonalni sistem . . . . .	8
1.6	Prostor $L^2([-\pi, \pi])$ . . . . .	10
1.6.1	Fourierjeva vrsta . . . . .	10
1.6.2	Cesarjeve delne vsote . . . . .	12

## 1 Hilbertovi prostori

### 1.1 Vektorski prostori s skalarnim produktom

Naj bo  $X$  vektorski prostor nad  $\mathbb{R}$  (ali nad  $\mathbb{C}$ ).

**Definicija 1.1. Skalarni produkt** je preslikava  $\langle \cdot, \cdot \rangle : X \times X \rightarrow \mathbb{R}$  (oz.  $\mathbb{C}$ ) za katero velja:

1.  $\forall x \in X. \langle x, x \rangle \geq 0$ ;
2.  $\forall x \in X. \langle x, x \rangle = 0 \iff x = 0$ ;
3.  $\forall x, y \in X. \langle x, y \rangle = \overline{\langle y, x \rangle}$ ;
4.  $\forall x, y, z \in X. \forall \lambda, \mu \in \mathbb{R}$  (oz.  $\mathbb{C}$ ).  $\langle \lambda x + \mu y, z \rangle = \lambda \langle x, z \rangle + \mu \langle y, z \rangle$ .

**Opomba 1.2.** 1.-2. je **pozitivna definitnost** skalarnega produkta, 3. je **poševna simetričnost** (simetričnost nad  $\mathbb{R}$ ), 4. je linearnost v prvem faktorju.

**Trditev 1.3** (Cauchy-Schwartzova neenakost). *Naj bo  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  skalarni produkt na  $X$ . Velja:*

$$\forall x, y \in X. |\langle x, y \rangle| \leq \sqrt{\langle x, x \rangle} \cdot \sqrt{\langle y, y \rangle} = \|x\| \cdot \|y\|.$$

*Dokaz.* Nad  $\mathbb{R}$ : Definiramo  $t \rightarrow \langle x + ty, x + ty \rangle = f(t) \geq 0$ .

Nad  $\mathbb{C}$ : Naj bo  $x, y \in X$ . Obstaja  $\alpha \in \mathbb{C}$ ,  $|\alpha| = 1$ , da  $\langle x, y \rangle = \alpha \cdot |\langle x, y \rangle|$ . □

**Definicija 1.4. Norma** na vektorskem prostoru  $X$  je preslikava  $\|\cdot\| : X \rightarrow \mathbb{R}$  za katero velja:

1.  $\forall x \in X. \|x\| \geq 0$ ;
2.  $\forall x \in X. \|x\| = 0 \iff x = 0$ ;
3.  $\forall \lambda \in \mathbb{R}$  (oz.  $\mathbb{C}$ ).  $\|\lambda x\| = |\lambda| \cdot \|x\|$ ;
4. **Trikotniška neenakost:**  $\forall x, y \in X. \|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$ .

**Trditev 1.5.** *Naj bo  $(X, \langle \cdot, \cdot \rangle)$  vektorski prostor s skalarnim produktom. Potem je  $(X, \|\cdot\|)$ , kjer je  $\forall x \in X. \|x\| = \sqrt{\langle x, x \rangle}$ , vektorski prostor z normo.*

*Dokaz.* Preverimo lastnosti. Za trikotniško neenakost uporabimo CS neenakost. □

**Trditev 1.6.** *Naj bo  $(X, \|\cdot\|)$  vektorski prostor s normo. Potem je  $(X, d)$ , kjer je metrika definirana s predpisom  $\forall x, y \in X. d(x, y) = \|x - y\|$ , metrični prostor.*

*Dokaz.* Preverimo lastnosti. □

### 1.2 Hilbertovi prostori

**Definicija 1.7. Hilbertov prostor** je vektorski prostor  $X$  s skalarnim produktom  $\langle \cdot, \cdot \rangle$ , ki je v metriki, porojeni iz skalarnega produkta, poln metrični prostor.

**Opomba 1.8.**  $(X, \langle \cdot, \cdot \rangle) \rightsquigarrow (X, \|\cdot\|) \rightsquigarrow (X, d)$ , kjer je  $\forall x, y \in X. d(x, y) = \|x - y\|$ .

**Opomba 1.9. Banachov prostor** je vektorski prostor  $X$  z normo  $\|\cdot\|$ , ki je v metriki, porojeni iz norme, poln metrični prostor.

**Zgled 1.10.**

1. Naj bo  $X = \mathbb{R}^n$ . Definiramo skalarni produkt. Naj bo  $x, y \in \mathbb{R}^n$ ,  $x = (x_1, \dots, x_n)$  in  $y = (y_1, \dots, y_n)$ . **Standardni skalarni produkt** je

$$x \cdot y = \sum_{k=1}^n x_k y_k.$$

Ta skalarni produkt nam da normo

$$\|x\| = \sqrt{\sum_{k=1}^n x_k^2},$$

ki porodi metriko

$$d_2(x, y) = \sqrt{\sum_{k=1}^n (x_k - y_k)^2}.$$

Vemo, da je  $(\mathbb{R}^n, d_2)$  poln metrični prostor. Torej  $(\mathbb{R}^n, \cdot)$  Hilbertov prostor.

2. Na  $\mathbb{R}^n$  lahko definiramo tudi druge norme, npr.

- $\|x\|_\infty = \max\{|x_1|, \dots, |x_n|\}$ ;
- $\|x\|_1 = |x_1| + \dots + |x_n|$ .

Te dve normi ne prideta iz skalarnega produkta, ker za njih ne velja paralelogramsko pravilo.  $(\mathbb{R}^n, \|x\|_\infty)$  in  $(\mathbb{R}^n, \|x\|_1)$  sta Banachova prostora.

3. Naj bo  $X = \mathbb{C}^n$ . Definiramo skalarni produkt. Naj bo  $z, w \in \mathbb{C}^n$ ,  $z = (z_1, \dots, z_n)$  in  $w = (w_1, \dots, w_n)$ . **Standardni skalarni produkt** je

$$z \cdot w = \sum_{k=1}^n z_k \overline{w_k}.$$

Ta skalarni produkt nam da normo

$$\|z\| = \sqrt{\sum_{k=1}^n |z_k|^2},$$

ki porodi metriko

$$d_2(z, w) = \sqrt{\sum_{k=1}^n |z_k - w_k|^2}.$$

Vemo, da je  $(\mathbb{C}^n, d_2)$  poln metrični prostor. Torej  $(\mathbb{C}^n, \cdot)$  Hilbertov prostor.

**1.3 Prostor  $L^2([a, b])$** 

**Opomba 1.11.** Števili  $a, b$  sta lahko končni ali  $\pm\infty$ .

**Trditev 1.12.** Naj bo  $C([a, b])$  vektorski prostor nad  $\mathbb{R}$ . Potem je s predpisom

$$\forall f, g \in C([a, b]) \cdot \langle f, g \rangle = \int_a^b f(x)g(x) dx$$

definiran skalarni produkt na  $C([a, b])$ .

*Dokaz.* Preverimo lastnosti. □

**Trditev 1.13.**  $(C([a, b]), \langle \cdot, \cdot \rangle)$  ni Hilbertov prostor.

*Dokaz.* Definiramo  $f_n(x) = \begin{cases} 1; & \frac{1}{n} \leq x \leq 1 \\ nx; & -\frac{1}{n} < x < \frac{1}{n} \\ -1; & -1 \leq x \leq -\frac{1}{n} \end{cases}$ . Pokažemo, da je  $(f_n)_n$  Cauchyjevo zaporedje v  $C([a, b])$ , ki nima limite. □

**Zgled 1.14.** Vzemimo prostor  $((0, 1), d_2)$ . Z dodajanjem limitnih točk  $\{-1, 1\}$  ta prostor postane poln.

**Definicija 1.15.** Naj bo  $(M, d)$  metrični prostor. Pravimo, da lahko **napolnimo** prostor  $M$ , če obstaja prostor  $(\overline{M}, \overline{d})$ , za kateri velja:

1.  $(\overline{M}, \overline{d})$  je poln metrični prostor;
2.  $M \subseteq \overline{M}$ ;
3.  $\overline{d}|_{M \times M} = d$ ;
4.  $M$  je gost v  $\overline{M}$ , tj.  $\text{Cl } M = \overline{M}$ .

Prostoru  $\overline{M}$  rečemo **napolnitev** prostora  $M$ .

**Opomba 1.16.** Ideja:  $\overline{M}$  je prostor vseh limit Cauchyjevih zaporedij v  $M$  (+ kvocient).

**Opomba 1.17.** Označili smo z  $L^1(A) = \{f : A \rightarrow \mathbb{R} \mid \int_A |f| dx \text{ obstaja, } f \text{ zvezna s.p.}\} / \sim$  prostor vseh absolutno integrabilnih funkcij, kjer je  $\forall f, g \in L^1. f \sim g \iff f = g \text{ s.p.}$

Vpeljemo zdaj s kvadratom integrabilne funkcije:

**Definicija 1.18.** Prostor  $L^2([a, b])$  je

$$L^2([a, b]) = \{f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R} \mid \int_a^b f^2(x) dx \text{ obstaja, } f \text{ zvezna s.p.}\} / \sim,$$

kjer je  $\forall f, g \in L^2. f \sim g \iff f = g \text{ s.p.}$

V tem prostoru gotovo so

- Zvezne funkcije:  $C([a, b]) \subseteq L^2([a, b])$ ;
- Odsekoma zvezni funkciji;
- $f(x) = \frac{1}{\sqrt[4]{x-a}}$  itd.

**Cilj** Želimo posplošiti prostor  $(\mathbb{R}, \cdot)$ .

Naj bo  $f, g \in L^2$ , potem  $|f \cdot g| \leq \frac{|f|^2 + |g|^2}{2} \implies f \cdot g \in L^1([a, b])$ . Torej lahko definiramo

$$\langle f, g \rangle = \int_a^b f(x)g(x) dx.$$

**Trditev 1.19.**  $L^2([a, b])$  je vektorski prostor nad  $\mathbb{R}$ .

*Dokaz.* Preverimo lastnosti. □

Torej  $L^2([a, b])$  je vektorski prostor nad  $\mathbb{R}$  s skalarnim produktom

$$\langle f, g \rangle = \int_a^b f(x)g(x) dx.$$

Očitno, da je  $C([a, b]) \subseteq L^2([a, b])$ .

**Izrek 1.20.**  $L^2([a, b])$  je Hilbertov in  $L^2([a, b])$  je napolnitev  $C([a, b])$ .

**Opomba 1.21.** Prostor  $C([a, b])$  je gost v prostoru  $L^2([a, b])$ , tj.

$$\forall f \in L^2([a, b]) . \exists f_n \in C([a, b]) . \lim_{n \rightarrow \infty} f_n = f,$$

kjer

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f_n = f \iff \lim_{n \rightarrow \infty} \|f_n - f\| = 0 \iff \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{\int_a^b (f_n(x) - f(x))^2 dx} = 0.$$

**Opomba 1.22.** Nad  $\mathbb{C}$ :  $f = u + iv$ ,  $u, v : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ . Potem

$$\int_a^b f(x) dx = \int_a^b u(x) dx + i \int_a^b v(x) dx$$

in

$$\langle f, g \rangle = \int_a^b f(x) \overline{g(x)} dx.$$

**Zgled 1.23.** Vzemimo  $[0, 1]$ . Definiramo  $f_n(x) = \begin{cases} \sqrt{n}; & 0 < x \leq \frac{1}{n} \\ 0; & \text{sicer} \end{cases}$ .

Čemu je enaka  $\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x)$  za vse  $x \in [0, 1]$  (po točkah)? Ali je  $\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = 0$  v  $L^2([0, 1])$ ?

**Zgled 1.24.** Definiramo zaporedje  $f_n : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$  po pravilu: začnemo z  $f_1 \equiv 1$ . Nato nadaljujemo

$$f_2 = \begin{cases} 1; & x \in [0, \frac{1}{2}] \\ 0, & \text{sicer} \end{cases}, f_3 = \begin{cases} 1; & x \in [\frac{1}{2}, 1] \\ 0, & \text{sicer} \end{cases}, f_4 = \begin{cases} 1; & x \in [0, \frac{1}{3}] \\ 0, & \text{sicer} \end{cases}, f_5 = \begin{cases} 1; & x \in [\frac{1}{3}, \frac{2}{3}] \\ 0, & \text{sicer} \end{cases}$$

in tako naprej. Ali obstaja limita po točkah? Ali obstaja limita v  $L^2$  smislu?

## 1.4 Ortogonalnost

**Definicija 1.25.** Naj bo  $(X, \langle \cdot, \cdot \rangle)$  vektorski prostor s skalarnim produktom,  $A \subseteq X$ ,  $A \neq \emptyset$ . Naj bosta  $x, y \in X$ .

- $x$  je **pravokoten** na  $y$ , če  $\langle x, y \rangle = 0$ , tj.  $x \perp y \iff \langle x, y \rangle = 0$ .
- **Ortogonalni komplement** množice  $A$  je  $A^\perp = \{x \in X \mid \forall a \in A . x \perp a\}$ .

**Trditev 1.26.**  $A^\perp$  je vektorski podprostor v  $X$ .

*Dokaz.* Preverimo homogenost in linearnost. □

**Opomba 1.27.**  $A \subseteq (A^\perp)^\perp$ .

**Trditev 1.28.** Naj bo  $(X, \langle \cdot, \cdot \rangle)$  vektorski prostor s skalarnim produktom,  $v \in X$ . Definiramo  $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = \langle x, v \rangle$ . Potem  $f$  je zvezna na  $X$ .

*Dokaz.* Pokažemo, da je  $f$  Lipschitzeva. □

**Posledica 1.29.**  $A^\perp$  je zaprt vektorski podprostor.

*Dokaz.* Pokažemo, da je limita vsakega konvergentnega zaporedja v  $A^\perp$  tudi leži v  $A^\perp$ . □

**Opomba 1.30.**  $C([a, b]) \subseteq L^2([a, b])$  ni zaprt podprostor.

**Opomba 1.31.** Če je  $(X, \langle \cdot, \cdot \rangle)$  Hilbertov in  $A \subseteq X$  zaprt podprostor, potem

$$(A^\perp)^\perp = A.$$

**Trditev 1.32** (Pitagorjev izrek). Naj bo  $(X, \langle \cdot, \cdot \rangle)$  vektorski prostor s skalarnim produktom. Naj bodo  $x_1, \dots, x_n \in X$  taki, da  $\forall i, j \in [n]. i \neq j \implies x_j \perp x_i$ . Tedaj

$$\|x_1 + \dots + x_n\|^2 = \|x_1\|^2 + \dots + \|x_n\|^2.$$

*Dokaz.* Izračunamo normo po definiciji. □

**Definicija 1.33.** Naj bo  $(X, \langle \cdot, \cdot \rangle)$  vektorski prostor s skalarnim produktom in  $Y \leq X$  podprostor  $X$ . Naj bo  $x \in X$ . **Pravokotna projekcija** vektorja  $x$  na podprostor  $Y$  (če obstaja) je tak vektor  $P_Y(x) \in Y$ , da je

$$x - P_Y(x) \in Y^\perp.$$

**Trditev 1.34.** Če je pravokotna projekcija  $x$  na  $Y$  obstaja, je enolično določena. Če obstaja, je to najboljša aproksimacija vektorja  $x$  z vektorji iz  $Y$ , tj.

$$\|x - P_Y(x)\| = \min_{w \in Y} \|x - w\|.$$

*Dokaz.* Enoličnost: Običajen način.

Aproksimacija: Definicija minimuma in Pitagorjev izrek 1.32. □

**Zgled 1.35.** Naj bosta  $Y = C([a, b])$  in  $X = L^2([a, b])$ . Če si izberimo  $f \in X \setminus Y$ , potem  $f$  nima najboljših aproksimacij z zveznimi funkcijami, saj, ker je  $\text{Cl}(C([a, b])) = L^2([a, b])$ , bi veljalo  $\|f - P_{C([a, b])}(f)\| = 0$  in posledično  $f \in C([a, b])$ .

**Opomba 1.36.**

1.  $P_Y^2 = P_Y$ .
2.  $\|x\| \geq \|P_Y(x)\|$ , saj  $x = \underbrace{x - P_Y(x)}_{Y^\perp} + \underbrace{P_Y(x)}_Y$ .
3. Če je  $P_Y$  definiran na  $X$ , potem je linearen in zvezen.

*Dokaz.* Definicija in enoličnost projekcije. □

4. Če je  $P_Y$  definiran na  $X$ , je  $Y$  zaprt podprostor.

*Dokaz.* Vzamemo konvergentno zaporedje v  $Y$  in upoštevamo zveznost  $P_Y$ . □

5. Če ima  $x$  pravokotno projekcijo na  $Y$ , ima tudi pravokotno projekcijo na  $Y^\perp$ .

*Dokaz.* Vzamemo  $x - P_Y(x)$ . □

**Trditev 1.37.** Naj bo  $Y \leq X$  končno dimenzionalen podprostor z ON bazo  $\{e_1, \dots, e_n\}$ , tj.  $\langle e_i, e_j \rangle = \delta_{ij}$ . Naj bo  $x \in X$ . Tedaj je

$$P_Y(x) = \sum_{j=1}^n \langle x, e_j \rangle e_j.$$

*Dokaz.* Definicija projekcije. □

**Opomba 1.38.** Vsak končno dimenzionalni podprostor ima pravokotno projekcijo definirano na  $X$  in tudi vsi tisti podprostori končne kodimenzije.

## 1.5 Ortogonalni sistem

**Definicija 1.39.** Naj bo  $(X, \langle \cdot, \cdot \rangle)$  vektorski prostor s skalarnim produktom.

- Sistem vektorjev  $(e_j)_{j=1}^\infty$  je **ortogonalni sistem (OS)**, če

$$\forall i, j \in \mathbb{N}. i \neq j \implies \langle e_i, e_j \rangle = 0.$$

- Tak sistem je **ortonormiran (ONS)**, če

$$\forall i, j \in \mathbb{N}. \langle e_i, e_j \rangle = \delta_{ij}.$$

**Trditev 1.40** (Besselova neenakost). Naj bo

- $X$  vektorski prostor s skalarnim produktom,  $x \in X$ ;
- $(e_j)_{j=1}^\infty$  ONS.

Tedaj

$$\sum_{j=1}^\infty |\langle x, e_j \rangle|^2 \leq \|x\|^2.$$

*Dokaz.* Definiramo  $Y_n = \text{Lin}(\{e_1, \dots, e_n\})$ . Uporabimo formulo za pravokotno projekcijo na končnorazsežen prostor 1.37 ter Pitagorjev izrek 1.32. □

**Posledica 1.41.**  $\lim_{j \rightarrow \infty} \langle x, e_j \rangle = 0$ .

**Opomba 1.42.**

- Absolutno vrednost potrebujemo, če gledamo prostor nad  $\mathbb{C}$ .
- $(\langle x, e_j \rangle)_{j=1}^\infty$  so **Fourierjevi koeficienti**  $x$  po ONS  $(e_j)_{j=1}^\infty$ .

**Trditev 1.43.** Naj bo

- $X$  Hilbertov prostor;
- $(e_j)_{j=1}^\infty$  ONS;
- $(c_j)_{j=1}^\infty$  zaporedje števil (bodisi  $\mathbb{R}$  bodisi  $\mathbb{C}$ );
- $\sum_{j=1}^\infty |c_j|^2 < \infty$ ;

Tedaj obstaja  $x \in X$ , za katerega velja

$$\forall j \in \mathbb{N}. c_j = \langle x, e_j \rangle.$$

Velja tudi:

$$x = \sum_{j=1}^\infty c_j e_j = \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{j=1}^N c_j e_j.$$



*Dokaz.* Trdimo, da je  $\left(\sum_{j=1}^N c_j e_j\right)_N$  Cauchyjevo zaporedje.  $\square$

**Opomba 1.44.** Naj bo  $X$  Hilbertov prostor ter  $(e_j)_{j=1}^\infty$  ONS. Vzemimo  $x \in X$ . Iz Besselovi neenakosti 1.40 sledi, da za zaporedje  $c_j = \langle x, e_j \rangle$  velja, da

$$\sum_{j=1}^{\infty} |c_j|^2 < \infty.$$

Torej po trditvi 1.43 sledi, da obstaja  $\tilde{x}$ , za kateri velja

$$\tilde{x} = \sum_{j=1}^{\infty} \langle x, e_j \rangle e_j.$$

Ali je  $\tilde{x} = x$ ?

**Definicija 1.45.** Naj bo  $X$  Hilbertov prostor. ONS  $(e_j)_{j=1}^\infty$  je **kompleten** (KONS) ali **poln**, če

$$\forall x \in X. x = \sum_{j=1}^{\infty} \langle x, e_j \rangle e_j.$$

**Izrek 1.46.** Naj bo

- $X$  Hilbertov prostor;
- $(e_j)_{j=1}^\infty$  ONS.

*NTSE*

1.  $(e_j)_{j=1}^\infty$  je KONS;
2.  $\forall x, y \in X. \langle x, y \rangle = \sum_{j=1}^{\infty} \langle x, e_j \rangle \langle e_j, y \rangle$ ;
3. Parsevalova enakost:  $\forall x \in X. \|x\|^2 = \sum_{j=1}^{\infty} |\langle x, e_j \rangle|^2$ ;
4. ONS  $(e_j)_{j=1}^\infty$  ni vsebovan v nobenem strogo večjem ONS;
5. Edini vektor, ki je pravokoten na vse vektorji  $e_j$ , je vektor 0;
6. Končne linearne kombinacije vektorjev  $e_j$  so goste v  $X$ .

*Dokaz.* Dokažemo  $(1) \implies (2) \implies (3) \implies (4) \implies (5)$  in  $(1) \implies (6) \implies (5)$ .

$(5) \implies (1)$ : Uporabimo trditev 1.43 ter oglejmo razliko  $x - \tilde{x}$ .  $\square$

**Zgled 1.47** (Modelni Hilbertov prostor). Definiramo

$$l^2 = \{(a_j)_j \mid a_j \in \mathbb{R}, \sum_{j=1}^{\infty} |a_j|^2 < \infty\}.$$

Vpeljemo skalarni produkt s predpisom

$$\langle (a_j)_j, (b_j)_j \rangle = \sum_{j=1}^{\infty} a_j b_j \quad (\text{oz. } \sum_{j=1}^{\infty} a_j \overline{b_j} \text{ nad } \mathbb{C}).$$

Tedaj velja

$$\|(a_i)_i\|_2^2 = \sum_{j=1}^{\infty} |a_j|^2.$$

Naj bo zdaj  $X$  Hilbertov prostor,  $x \in X$  ter  $(e_j)_{j=1}^\infty$  KONS. Tedaj

$$(\langle x, e_j \rangle)_j \in l^2.$$

## 1.6 Prostor $L^2([-\pi, \pi])$

### 1.6.1 Fourierjeva vrsta

Na prostoru  $L^2(-\pi, \pi)$  definiramo sistem

$$\left\{ \frac{1}{\sqrt{2\pi}}, \frac{1}{\sqrt{\pi}} \cos x, \frac{1}{\sqrt{\pi}} \sin x, \frac{1}{\sqrt{\pi}} \cos 2x, \frac{1}{\sqrt{\pi}} \sin 2x, \dots, \frac{1}{\sqrt{\pi}} \cos nx, \frac{1}{\sqrt{\pi}} \sin nx, \dots \right\}.$$

Če delamo nad  $\mathbb{C}$ , dobimo:

$$\left\{ \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{inx} \mid n \in \mathbb{N} \right\}.$$

Trdimo, da je to ONS. Kasneje bomo tudi dokazali, da je to KONS.

**Opomba 1.48.** V tem kontekstu vsako funkcijo  $f : [-\pi, \pi] \rightarrow \mathbb{R}$  vidimo kot zožitev periodične funkcije s periodo  $2\pi$  na interval  $[\pi, \pi]$ . Vsako tako periodično funkcijo želimo zapisati kot „vsoto osnovnih nihanj“.

Vpeljemo klasične Fourierjevi koeficienti

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos(nx) dx, \quad n = 1, 2, \dots \\ b_n &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin(nx) dx, \quad n = 1, 2, \dots \end{aligned}$$

Pripadajoča klasična Fourierjeva vrsta je

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx).$$

Torej za  $n = 1, 2, \dots$  velja

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos(nx) dx = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \langle f, \frac{1}{\sqrt{\pi}} \cos(nx) \rangle \\ b_n &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin(nx) dx = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \langle f, \frac{1}{\sqrt{\pi}} \sin(nx) \rangle \end{aligned}$$

ter

$$a_0 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) dx = \frac{\sqrt{2}}{\pi} \langle f, \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \rangle.$$

Iz Besselove neenakosti 1.40 sledi

**Trditev 1.49** (Riemann-Lebesgueva lema). Naj bo  $f \in L^2(-\pi, \pi)$ . Teda

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0 \quad \text{ter} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} b_n = 0.$$

Če pa vemo, da imamo KONS, dobimo Parsevalovo enakost 1.46

**Trditev 1.50** (Parsevalova enakost). Naj bo  $f \in L^2(-\pi, \pi)$ . Teda

$$\frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |f(x)|^2 dx = \frac{|a_0|^2}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (|a_n|^2 + |b_n|^2).$$

**Zgled 1.51.** Definiramo funkcijo  $f : [-\pi, \pi] \rightarrow \mathbb{R}$  s predpisom

$$f(x) = \begin{cases} 1; & 0 \leq x \leq \pi \\ 0; & -\pi < x < 0. \end{cases}$$

Razvij funkcijo  $f$  v Fourierjevo vrsto ter s pomočjo Parsevalove enakosti določi vsoto

$$S = 1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \dots$$

**Lema 1.52.** Naj bo  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  odsekoma zvezna periodična funkcija s periodo  $[2\pi]$ . Tedaj je

$$\forall a \in \mathbb{R}. \int_a^{a+p} f(x) dx = \int_0^p f(x) dx.$$

*Dokaz.*  $\int_a^{a+p} f(x) dx = \int_a^p f(x) dx + \int_p^{a+p} f(x) dx$  □

**Lema 1.53** (Dirichletovo jedro).

$$\frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \cos(kx) = \frac{1}{2} \frac{\sin((n+1/2)x)}{\sin(x/2)} =: D_n(x).$$

*Dokaz.* Kompleksna eksponenta. □

**Lema 1.54.** Za Dirichletovo jedro velja

1.  $\int_{-\pi}^{\pi} D_n(x) dx = \pi$ .
2.  $D_n(x)$  je gladka soda funkcija s periodo  $2\pi$ .
3.  $D_n(x) = \frac{1}{2} \left( \sin(nx) \frac{\cos(x/2)}{\sin(x/2)} + \cos(nx) \right)$ .

*Dokaz.* Račun. □

**Opomba 1.55.** Sode/lihe funkcije. **TODO:**

**Izrek 1.56** (Fourierjeva vrsta). Naj bo  $f$   $2\pi$  funkcija s periodo  $2\pi$ , ki je:

- odsekoma zvezna, tj. na vsakem intervalu dolžine  $2\pi$  nezvezna v končno mnogo točkah, v teh pa obstajata leva in desna limita.
- odsekoma odvedljiva, tj. na vsakem intervalu dolžine  $2\pi$  neodvedljiva v končno mnogo točkah, v teh pa obstajata levi in desni odvod.

Tedaj za vsak  $x \in \mathbb{R}$  velja

$$\frac{f(x+) + f(x-)}{2} = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx).$$

*Dokaz.* Naj bo  $x_0 \in \mathbb{R}$

1. Izrazimo  $S_N = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^N a_n \cos(nx_0) + b_n \sin(nx_0)$  z Dirichletovim jedrom.
2. Prevedemo integral na  $[-\pi, \pi]$  na integral na  $[0, \pi]$ .
3. Poglejmo razliko  $S_N(x_0) - \frac{f(x_0+) + f(x_0-)}{2}$ , pri čemer kvocient zapišemo kot integral z Dirichletovim jedrom. Vsak člen obravnavamo posebej. Upoštevamo tudi Riemann-Lebesgueovo lemo. □

**Zgled 1.57.** Vzemimo funkcijo iz zgleda 1.51. Kaj velja v točki  $x = 0$  ter v točki  $x = \frac{\pi}{2}$ ? Izračunaj

$$\sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{1}{2k+1}.$$

**Zgled 1.58.** Naj bo  $f(x) = x$  na  $[-\pi, \pi]$  periodična funkcija s periodo  $2\pi$ . Kaj velja v točkah  $0, \pi$  in  $\frac{\pi}{2}$ ? Kaj pravi Parsevalova enakost?

**Zgled 1.59.** Razvij funkcijo  $f : [-\pi, \pi] \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = \pi^2 - x^2$  v Fourierjevo vrsto. Ter seštej vsoti

$$S_1 = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{1}{n^2} \quad \text{ter} \quad S_2 = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}.$$

### 1.6.2 Cesarjeve delne vsote

Definiramo  $n$ -to delno vsoto

$$S_n(x_0) = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x_0 + y) D_n(y) dy$$

ter **Cesarjeve delne vsote**

$$G_n(x) = \frac{S_0(x) + S_1(x) + \dots + S_{n-1}(x)}{n}.$$

Velja:  $G_n(x)$  konvergira proti funkcije  $f$ . Če je  $f$  zvezna, potem konvergenca enakomerna. Definiramo **Fourierjevo jedro**

$$F_N(x) = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} D_n(x)$$

**Trditev 1.60** (Lastnosti Fourierjeva jedra).

1.  $F_N(x) = \frac{1}{2N} \left( \frac{\sin(Nx/2)}{\sin(x/2)} \right)^2$ .
2.  $F_N$  je soda funkcija.
3.  $\forall x \in D_f. F_N(x) \leq 0$ .
4.  $\frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} F_N(x) dx = 1$ .
5. Za vsak  $0 < a < \pi$  limita  $\lim_{N \rightarrow \infty} F_N(x) = 0$  je enakomerna na  $a \leq |x| \leq \pi$ .

*Dokaz.* Dovolj z pomočjo trigonometrije dokazati 1. formulo. Ostalo sledi. □

**Izrek 1.61.** Naj bo  $f$   $2\pi$  periodična zvezna funkcija. Tedaj Cesarjeve delne vsote konvergirajo k  $f$  enakomerno na  $[-\pi, \pi]$  (oz. na  $\mathbb{R}$ ).

*Dokaz.* **TODO:** □

**Izrek 1.62.** Sistem

$$\left\{ \frac{1}{\sqrt{2\pi}}, \frac{1}{\sqrt{\pi}} \cos x, \frac{1}{\sqrt{\pi}} \sin x, \frac{1}{\sqrt{\pi}} \cos 2x, \frac{1}{\sqrt{\pi}} \sin 2x, \dots, \frac{1}{\sqrt{\pi}} \cos nx, \frac{1}{\sqrt{\pi}} \sin nx, \dots \right\}.$$

je KONS v  $L^2(-\pi, \pi)$ .

**Opomba 1.63.** O trigonometričnih polinomih. **TODO:**

**Izrek 1.64** (Weierstrassov izrek). *Naj bo  $f \in C([a, b])$ . Tedaj za vsak  $\epsilon > 0$  obstaja polinom  $p$ , da velja*

$$\|f - p\|_{\infty} < \epsilon.$$

*Dokaz.* **TODO:**

□