Analiza 2a

20. oktober 2024

1 Funkcije več spremenljivk

1.1 Prostor $\mathbb{R}^n$

$\mathbb{R}^n$ je vektorski prostor nad $\mathbb{R}$. Če je $x, y \in \mathbb{R}^n$, potem $x = (x_1, \ldots, x_n)$, $y = (y_1, \ldots, y_n)$.
Naj bo $\alpha \in \mathbb{R}$. Operaciji $x + y$ in αx sta definirani po komponentah.

Definicija 1.1. *Standardna baza* prostora $\mathbb{R}^n$ je množica $\{e_j;\ j = 1, \ldots, n\}$, kjer $e_j = (0, \ldots, 0, 1_j, 0, \ldots, 0)$.

Opomba. V prostorah $\mathbb{R},\ \mathbb{R}^2,\ \mathbb{R}^3$ ponavadi koordinate točk označimo z x, y, z.

Definicija 1.2. Standardna baza prostora $\mathbb{R}^3$ je množica $\left\{\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\right\}$.

Definicija 1.3. *Standardni skalarni produkt vektrojev $x, y \in \mathbb{R}^n$* je $x \cdot y = \sum_{j=1}^n x_j y_j$.
Norma vektorja $x \in \mathbb{R}^n$ je $||x||_2 = \sqrt{x \cdot x} = \sqrt{x_1^2 + \ldots + x_n^2}$.
Razdalja med vektorjama $x, y \in \mathbb{R}^n$ je $d_2(x, y) = ||x - y||_2 = \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + \ldots + (x_n - y_n)^2}$.

Definicija 1.4. *Odprta krogla s središčem v $a \in \mathbb{R}^n$ in polmerom $r > 0$* je množica $K(a, r) = \{x \in \mathbb{R}^n;\ d_2(x, a) < r\}$.
Zaprta krogla s središčem v $a \in \mathbb{R}^n$ in polmerom $r > 0$ je množica $K(a, r) = \{x \in \mathbb{R}^n;\ d_2(x, a) \leq r\}$.
Sfera je množica $S(a, r) = \{x \in \mathbb{R}^n;\ d_2(x, a) = r\}$

Metrični prostor $(\mathbb{R}^n, d_2)$ porodi topologijo na $\mathbb{R}^n$. Oznaki: D^{odp} je odprta množica, Z je zaprta množica.

Opomba. Metrična prostora $(\mathbb{R}^n, d_2)$ in $(\mathbb{R}^n, d_\infty)$ imata isto topologijo.

Trditev 1.1. *Naj bo (M, d) metrični prostor in $K \subset M$. Če je K kompaktna, potem je zaprta in omejena.*

Izrek 1.2. *Naj bo $K \subset \mathbb{R}^n$, potem*

$$K \text{ je kompaktna} \Leftrightarrow K \text{ je zaprta in omejena.}$$

Definicija 1.5. Naj bo $a, b \in \mathbb{R}^n,\ a = (a_1, \ldots, a_n),\ b = (b_1, \ldots, b_n)$. Definiramo:

$$a \leq b \Leftrightarrow \forall j = 1, \ldots, n \,.\, a_j \leq b_j.$$
$$a < b \Leftrightarrow \forall j = 1, \ldots, n \,.\, a_j < b_j.$$

Definicija 1.6. Naj bo $a, b \in \mathbb{R}^n,\ a < b$. *Odprti kvader* (a, b) je množica $(a, b) = \{x \in \mathbb{R}^n;\ a < x < b\}$.
Naj bo $a, b \in \mathbb{R}^n,\ a \leq b$. *Zaprti kvader* $[a, b]$ je množica $[a, b] = \{x \in \mathbb{R}^n;\ a \leq x \leq b\}$.

Opomba. Dolžine stranic kvadra $[a, b]$ je $b_j - a_j$. Volumen kvadra $[a, b]$ je $\Pi_{j=1}^n (b_j - a_j)$.
Če so vse strani kvadra enaki, potem kvader je *kocka*.

1.2 Zaporedja v $\mathbb{R}^n$

Definicija 1.7. *Zaporedje v* $\mathbb{R}^n$ je preslikava $a : \mathbb{N} \to \mathbb{R}^n$. Namesto $a(m)$ pišimo a_m, $a_m = (a_1^m, \ldots, a_n^m)$.

Opomba. Zaporedje v $\mathbb{R}^n$ porodi n zaporedij v $\mathbb{R}$.

Trditev 1.3. *Naj bo* $(a_m)_m$ *zaporedje v* $\mathbb{R}^n$, $a_m = (a_1^m, \ldots, a_n^m)$. *Velja:*

$$\text{Zaporedje } (a_m)_m \text{ konvergia } \Leftrightarrow \text{ konvergira zaporedja } (a_1^m)_m, \ldots, (a_n^m)_m.$$

V primeru konvergence velja:

$$\lim_{m\to\infty} a_m = (\lim_{m\to\infty} a_1^m, \ldots, \lim_{m\to\infty} a_n^m).$$

Dokaz. Definicija limite. □

1.3 Zveznost preslikav iz $\mathbb{R}^n$ v $\mathbb{R}^m$

1.3.1 Zveznost preslikav iz $\mathbb{R}^n$ v $\mathbb{R}$

Opomba. Če je $m = 1$, potem preslikave rečemo *funkcija.*

Definicija 1.8. Naj bo $f : D \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ preslikava. Naj bo $a \in D$. *Preslikava* f *je zvezna v* a, če

$$\forall \epsilon > 0 \,.\, \exists \delta > 0 \,.\, \forall x \in D \,.\, d(x, a) \Rightarrow d(f(x), f(a)).$$

Definicija 1.9. Naj bo $f : D \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ preslikava. Preslikava f je *zvezna na* D, če je zvezna v vsaki točki $a \in D$.

Definicija 1.10. Naj bo $f : D \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ preslikava. Preslikava f je *enakomerno zvezna na* D, če

$$\forall \epsilon > 0 \,.\, \exists \delta > 0 \,.\, \forall x, x' \in D \,.\, d(x, x') < \delta \Rightarrow d(f(x), f(x')) < \epsilon.$$

Opomba. Velja karakterizacija zveznosti v točki z zaporedji.

Opomba. Zvezna preslikava na kompaktne množice je enakomerno zvezna.

Trditev 1.4. *Naj bosta* $f, g : D \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ *zvezni funkciji v* $a \in D$. *Naj bo* $\lambda \in \mathbb{R}$. *Tedaj so v* a *zvezni tudi funkcije:*

$$f + g,\ f - g,\ \lambda f,\ fg.$$

Dokaz. Z zaporedji kot pri analizi 1. □

Zgled. Nekaj primerov zveznih preslikav.

- Preslikava $\Pi_j(x_1, \ldots, x_n) = x_j$ je zvezna na $\mathbb{R}^n$ za vsak $j = 1, \ldots, n$.
- Vsi polinomi v n-spremenljivkah so zvezne funkcije na $\mathbb{R}^n$.
- Vse racionalne funkcije so zvezne povsod, razen tam, kjer je imenovalec enak 0.

Definicija 1.11. Preslikava $f : D \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ je *funkcija n-spremenljivk.*

Opomba. Naj bo (M, d) metrični prostor in $N \subset M$. Naj bo $f : M \to \mathbb{R}$ zvezna funkcija na M. Potem $f|_N$ je tudi zvezna funkcija na N.

Trditev 1.5. *Naj bosta* $D \subseteq \mathbb{R}^n$ *in* $D_j = \Pi_j(D)$. *Naj bo* $a \in D$, $a = (a_1, \ldots, a_n)$ *in* $f : D \to \mathbb{R}$ *zvezna v* a. *Tedaj za vsak* $j = 1, \ldots, n$ *funkcija* $\varphi_j : D_j \to \mathbb{R}$, $\varphi_j(t) = f(a_1, \ldots, a_{j-1}, t, a_{j+1}, \ldots, a_n)$ *zvezna v* a_j.

Dokaz. Definicija zveznosti v točki. □

Opomba. Če je funkcija več spremenljivk zvezna v neki točki $a \in \mathbb{R}^n$, je zvezna tudi kot funkcija posameznih spremenljivk.

Zgled. Naj bo $f(x, y) = \begin{cases} \frac{2xy}{x^2+y^2}; & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0; & (x, y) = (0, 0) \end{cases}$. Ali je f zvezna kot funkcija vsake spremenljivke posebej? Ali je f zvezna na $\mathbb{R}^2$?

Zgled. Naj bo $f(x, y) = \begin{cases} \frac{2x^2y}{x^4+y^2}; & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0; & (x, y) = (0, 0) \end{cases}$. Ali je f zvezna kot funkcija vsake spremenljivke posebej? Ali je zvezna na vsaki premici? Ali je f zvezna na $\mathbb{R}^2$?

1.3.2 Zveznost preslikav iz $\mathbb{R}^n$ v $\mathbb{R}^m$

Naj bo $D \subseteq \mathbb{R}^n$ in $F : D \to \mathbb{R}^m$ preslikava. Naj bo $x \in D$, potem $F(x) \in \mathbb{R}^m,\ F(x) = y = (y_1, \ldots, y_m)$. Lahko pišemo $F(x) = (f_1(x), \ldots, f_m(x))$. Torej F določa m funkcij n-spremenljivk.

Trditev 1.6. *Naj bo $a \in D \subseteq \mathbb{R}^n$. Naj bo $F = (f_1, \ldots, f_m) : D \to \mathbb{R}^m$ preslikava. Velja:*

$$\textit{Preslikava } F \textit{ je zvezna v } a \Leftrightarrow f_1, \ldots, f_m \textit{ so zvezne v } a.$$

Dokaz. Definicija zveznosti v točki. □