

Fraktalne dimenzije

Ruslan Urazbakhtin

Fakulteta za matematiko in fiziko, Univerza v Ljubljani

6. maj 2025

„Much of the beauty of fractals is to be found in their mathematics“
— Kenneth Falconer

Kazalo

Fraktalne
dimenzije

Ruslan
Urazbakhtin

Uvod

Kaj so fraktali?

Opomba o teorije
mere

Podobnostna
dimenzija

Hausdorffova
dimenzija

Hausdorffova mera

Hausdorffova
dimenzija

1 Uvod

- Kaj so fraktali?
- Opomba o teorije mere
- Podobnostna dimenzija

2 Hausdorffova dimenzija

- Hausdorffova mera
- Hausdorffova dimenzija

Kaj so fraktali?

Fraktalne
dimenzije

Ruslan
Urazbakhtin

Uvod

Kaj so fraktali?

Opomba o teorije
mere

Podobnostna
dimenzija

Hausdorffova
dimenzija

Hausdorffova mera

Hausdorffova
dimenzija



Kaj so fraktali?

Fraktalne
dimenzije

Ruslan
Urazbakhtin

Uvod

Kaj so fraktali?

Opomba o teorije
mere

Podobnostna
dimenzija

Hausdorffova
dimenzija

Hausdorffova mera

Hausdorffova
dimenzija

- Besedo „fraktal“ je uvedel matematik Benoit Mandelbrot v svojem temeljnem eseju leta 1975. Izvira iz latinske besede „fractus“.
- Besedo „fraktal“ Mandelbrot je uporabljal za opis patoloških množic, ki niso bili usklajene z običajno evklidsko geometrijo.
- V svojem originalnem eseju Benoit Mandelbrot je definiral fraktal kot množico, ki ima Hausdorffovo dimenzijo strogo večjo od njene topološke dimenzije.

Kaj so fraktali?

Fraktalne
dimenzije

Ruslan
Urazbakhtin

Uvod

Kaj so fraktali?

Opomba o teoriji
mere

Podobnostna
dimenzija

Hausdorffova
dimenzija

Hausdorffova mera

Hausdorffova
dimenzija

Če rečemo, da je neka množica F fraktal, potem si mislimo, da

- 1 F ima fino strukturo, tj. podrobnosti se vidijo vedno enako (neodvisno od skale);
- 2 F je dovolj nenaravna, da je ne moremo opisat s pomočjo elementarne geometrije tako lokalno kot globalno;
- 3 F včasih ima samopodobno obliko;
- 4 Običajno je fraktalna dimenzija F večja od njene topološke dimenzije;
- 5 V večini primerov je F definirana na zelo preprost način, običajno rekurzivno.

Zakaj potrebujemo fraktalno dimenzijo?

Fraktalne
dimenzije

Ruslan
Urazbakhtin

Uvod

Kaj so fraktali?

Opomba o teorije
mere

Podobnostna
dimenzija

Hausdorffova
dimenzija

Hausdorffova mera

Hausdorffova
dimenzija

- Metode iz evklidske geometrije/analize niso dovolj, da opišemo lastnosti fraktalov.
- Fraktalna geometrija nam ponuja osnovno konstrukcijo za obravnavo množic, ki izgledajo nekako nenaravno.
- Zelo na grobo povedano nam dimenzija množice pove, koliko prostora ta zavzema v ambientnem prostoru.
- Dimenzija meri kompleksnost množice na poljubno majhnih skalah ter opisuje nekatere njene geometrijske in topološke lastnosti.

Mera

Fraktalne
dimenzije

Ruslan
Urazbakhtin

Uvod

Kaj so fraktali?

Opomba o teorije
mere

Podobnostna
dimenzija

Hausdorffova
dimenzija

Hausdorffova mera

Hausdorffova
dimenzija

- Če želimo govoriti o fraktalnih dimenzijah, moramo poznati osnovne ideje teorije mere.
- Bomo obravnavali le mere na \mathbb{R}^n .
- Mera je način opisati „velikost“ množice, ki je izmerjena na nek način.

Borelova σ -algebra

Fraktalne
dimenzije

Ruslan
Urazbakhtin

Uvod

Kaj so fraktali?

Opomba o teoriji
mere

Podobnostna
dimenzija

Hausdorffova
dimenzija

Hausdorffova mera

Hausdorffova
dimenzija

Definicija

Družina podmnožic Σ množice \mathbb{R}^n je σ -algebra, če:

- 1 $\mathbb{R}^n \in \Sigma$;
- 2 Če je $A \in \Sigma$, potem $A^c \in \Sigma$;
- 3 Poljubna števna unija množic iz Σ je element Σ .

Borelova σ -algebra

Fraktalne
dimenzije

Ruslan
Urazbakhtin

Uvod

Kaj so fraktali?

Opomba o teorije
mere

Podobnostna
dimenzija

Hausdorffova
dimenzija

Hausdorffova mera

Hausdorffova
dimenzija

Definicija

Družina podmnožic Σ množice \mathbb{R}^n je σ -algebra, če:

- 1 $\mathbb{R}^n \in \Sigma$;
- 2 Če je $A \in \Sigma$, potem $A^c \in \Sigma$;
- 3 Poljubna števna unija množic iz Σ je element Σ .

Definicija

- Najmanjšo σ -algebro na \mathbb{R}^n , ki vsebuje vse odprte podmnožice \mathbb{R}^n , imenujemo **Borelova σ -algebra**.
- Podmnožica $A \subseteq \mathbb{R}^n$ je **Borelova**, če pripada Borelovi σ -algebri.

Borelova σ -algebra

Fraktalne
dimenzije

Ruslan
Urazbakhtin

Uvod

Kaj so fraktali?

Opomba o teoriji
mere

Podobnostna
dimenzija

Hausdorffova
dimenzija

Hausdorffova mera

Hausdorffova
dimenzija

Definicija

- Najmanjšo σ -algebro na \mathbb{R}^n , ki vsebuje vse odprte podmnožice \mathbb{R}^n , imenujemo **Borelova σ -algebra**.
- Podmnožica $A \subseteq \mathbb{R}^n$ je **Borelova**, če pripada Borelovi σ -algebri.

Opomba

- Vse odprte in vse zaprte množice so Borelovi.
- Poljubna števna unija (presek) odprtih (zaprtih) množic je Borelova množica.
- Vsi množici, ki smo jih bomo obravnavali, bodo Borelovi.

Mera na \mathbb{R}^n

Fraktalne
dimenzije

Ruslan
Urazbakhtin

Uvod

Kaj so fraktali?

Opomba o teoriji
mere

Podobnostna
dimenzija

Hausdorffova
dimenzija

Hausdorffova mera

Hausdorffova
dimenzija

Definicija

Preslikava $\mu : \mathcal{P}(\mathbb{R}^n) \rightarrow [0, \infty) \cup \{\infty\}$ je **mera** na \mathbb{R}^n , če

- 1 $\mu(\emptyset) = 0$;
- 2 Če je $A \subseteq B$, potem $\mu(A) \leq \mu(B)$;
- 3 Če je $\{A_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ števna družina podmnožic \mathbb{R}^n , potem

$$\mu \left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \right) \leq \sum_{i=1}^{\infty} \mu(A_i)$$

- 4 Če je $\{A_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ števna družina paroma disjunktnih Borelovih podmnožic \mathbb{R}^n , potem

$$\mu \left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \right) = \sum_{i=1}^{\infty} \mu(A_i)$$

Mera na \mathbb{R}^n

Fraktalne
dimenzije

Ruslan
Urazbakhtin

Uvod

Kaj so fraktali?

Opomba o teorije
mere

Podobnostna
dimenzija

Hausdorffova
dimenzija

Hausdorffova mera

Hausdorffova
dimenzija

Definicija

Pravimo tudi, da je $\mu(A)$ **mera množice A** .

Opomba

- $\mu(A)$ lahko si predstavljamo kot „velikost“ množice A , ki je izmerjena na nek način.
- 4. pogoj pravi, da če množico A razbijemo na števno mnogo paroma disjunktne Borelovih množic, potem vsota mer delov je enaka mere celotne množice (ponavadi ga težko dokazati).

Primeri mer

Fraktalne
dimenzije

Ruslan
Urazbakhtin

Uvod

Kaj so fraktali?

Opomba o teorije
mere

Podobnostna
dimenzija

Hausdorffova
dimenzija

Hausdorffova mera

Hausdorffova
dimenzija

■ Mera štetja.

Naj bo $A \subseteq \mathbb{R}^n$. Definiramo $\mu(A) = \begin{cases} n; & |A| = n \in \mathbb{N}, \\ \infty; & \text{sicer} \end{cases}$.

Potem μ je mera na \mathbb{R}^n .

■ Točkasta masa.

Naj bo $a \in \mathbb{R}^n$, $A \subseteq \mathbb{R}^n$. Definiramo $\mu(A) = \begin{cases} 1; & a \in A, \\ 0; & \text{sicer} \end{cases}$.

Potem μ je mera (porazdelitev mase) na \mathbb{R}^n .

Lebesgueva \mathcal{L}^n mera

Fraktalne
dimenzije

Ruslan
Urazbakhtin

Uvod

Kaj so fraktali?

Opomba o teorije
mere

Podobnostna
dimenzija

Hausdorffova
dimenzija

Hausdorffova mera

Hausdorffova
dimenzija

Lebesgueva \mathcal{L}^n mera na \mathbb{R}^n je posplošitev evklidskih pojmov „dolžina“, „ploščina“, „volumen“ itn. na večji razred množic.

Lebesgueva \mathcal{L}^n mera

Fraktalne
dimenzije

Ruslan
Urazbakhtin

Uvod

Kaj so fraktali?

Opomba o teoriji
mere

Podobnostna
dimenzija

Hausdorffova
dimenzija

Hausdorffova mera

Hausdorffova
dimenzija

Naj bo $A = \{(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n \mid a_i \leq x_i \leq b_i\}$ kvader v \mathbb{R}^n , potem n -dim volumen množice A je

$$\text{vol}^n(A) := (b_1 - a_1)(b_2 - a_2) \dots (b_n - a_n).$$

Definicija

Lebesgueva mera $\mathcal{L}^n : \mathcal{P}(\mathbb{R}^n) \rightarrow [0, \infty]$ je definirana s predpisom

$$\mathcal{L}^n(A) = \inf \left\{ \sum_{i=1}^{\infty} \text{vol}^n(A_i) \mid A \subseteq \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \right\},$$

kjer so A_i kvadri.

Lebesgueva \mathcal{L}^n mera

Fraktalne
dimenzije

Ruslan
Urazbakhtin

Uvod

Kaj so fraktali?

Opomba o teoriji
mere

Podobnostna
dimenzija

Hausdorffova
dimenzija

Hausdorffova mera

Hausdorffova
dimenzija

Opomba

- Gledamo vsa pokritja množice A z kvadri in vzemimo najmanjši možen volumen.
- \mathcal{L}^1 je posplošitev pojma „dolžina“, \mathcal{L}^2 je posplošitev pojma „ploščina“ itn.

Cantorjeva množica C

Fraktalne
dimenzije

Ruslan
Urazbakhtin

Uvod

Kaj so fraktali?

Opomba o teoriji
mere

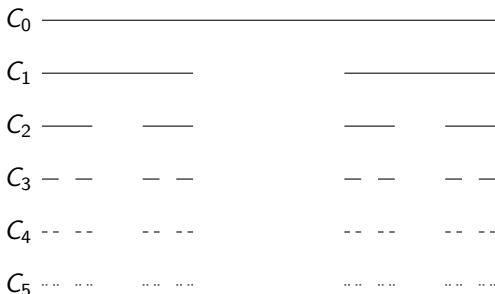
Podobnostna
dimenzija

Hausdorffova
dimenzija

Hausdorffova mera

Hausdorffova
dimenzija

Izračunamo dolžino $\mathcal{L}^1(C)$ Cantorjeve množice $C = \bigcup_{n=1}^{\infty} C_n$.



Lema

Naj bosta $A, B \subseteq \mathbb{R}^n$ Borelovi, $A \subseteq B$. Naj bo μ mera na \mathbb{R}^n .
Potem $\mu(B \setminus A) = \mu(B) - \mu(A)$.

Kochova krivulja K

Fraktalne
dimenzije

Ruslan
Urazbakhtin

Uvod

Kaj so fraktali?

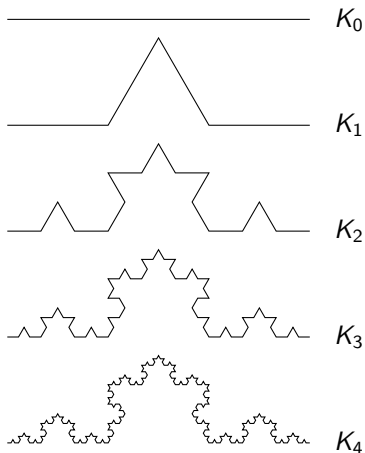
Opomba o teoriji
mere

Podobnostna
dimenzija

Hausdorffova
dimenzija

Hausdorffova mera

Hausdorffova
dimenzija



Kaj je narobe z C in K ?

Fraktalne
dimenzije

Ruslan
Urazbakhtin

Uvod

Kaj so fraktali?

Opomba o teorije
mere

Podobnostna
dimenzija

Hausdorffova
dimenzija

Hausdorffova mera

Hausdorffova
dimenzija

Kaj je narobe z C in K ?

Fraktalne
dimenzije

Ruslan
Urazbakhtin

Uvod

Kaj so fraktali?

Opomba o teorije
mere

Podobnostna
dimenzija

Hausdorffova
dimenzija

Hausdorffova mera

Hausdorffova
dimenzija

- Očitno je, da je pri izbiri dimenzije nekaj narobe (torej z nami).
- Ni možnosti, da bi dobili kaj pametnega, če bi računali ploščino daljice ali šteli njene točke.

Ali obstaja boljša možnost za izbiro dimenzije?

Fraktalne
dimenzije

Ruslan
Urazbakhtin

Uvod

Kaj so fraktali?

Opomba o teorije
mere

Podobnostna
dimenzija

Hausdorffova
dimenzija

Hausdorffova mera

Hausdorffova
dimenzija

Ali obstaja boljša možnost za izbiro dimenzije?

Fraktalne
dimenzije

Ruslan
Urazbakhtin

Uvod

Kaj so fraktali?

Opomba o teorije
mere

Podobnostna
dimenzija

Hausdorffova
dimenzija

Hausdorffova mera

Hausdorffova
dimenzija

Obstaja.

Podobnostna dimenzija

Fraktalne
dimenzije

Ruslan
Urazbakhtin

Uvod

Kaj so fraktali?

Opomba o teoriji
mere

Podobnostna
dimenzija

Hausdorffova
dimenzija

Hausdorffova mera

Hausdorffova
dimenzija

- Kaj lahko povemo o masi daljice, če dvakrat zmanjšamo njeno dolžino?
- Kaj lahko povemo o masi kvadrata, če dvakrat zmanjšamo dolžino njegove stranice?

Podobnostna dimenzija

Fraktalne
dimenzije

Ruslan
Urazbakhtin

Uvod

Kaj so fraktali?

Opomba o teorije
mere

Podobnostna
dimenzija

Hausdorffova
dimenzija

Hausdorffova mera

Hausdorffova
dimenzija

- Kaj lahko povemo o masi daljice, če dvakrat zmanjšamo njeno dolžino?
- Kaj lahko povemo o masi kvadrata, če dvakrat zmanjšamo dolžino njegove stranice?

Torej

$$m(\lambda D) = \lambda^s m(D).$$

Podobnostna dimenzija

Fraktalne
dimenzije

Ruslan
Urazbakhtin

Uvod

Kaj so fraktali?

Opomba o teoriji
mere

Podobnostna
dimenzija

Hausdorffova
dimenzija

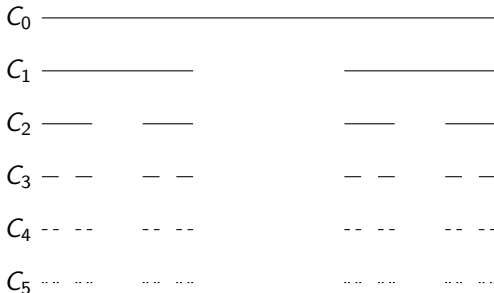
Hausdorffova mera

Hausdorffova
dimenzija

Torej

$$m(\lambda D) = \lambda^s m(D).$$

Kaj se zgodi z maso Cantorjeve množice, če trikrat zmanjšamo začetni interval?



Podobnostna dimenzija

Fraktalne
dimenzije

Ruslan
Urazbakhtin

Uvod

Kaj so fraktali?

Opomba o teoriji
mere

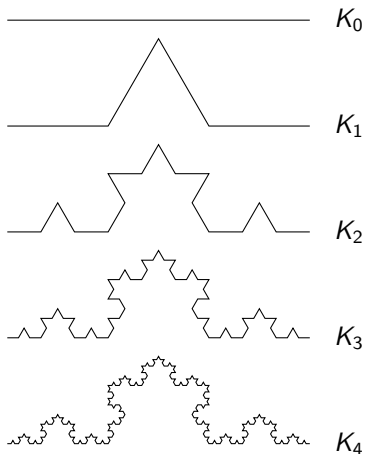
Podobnostna
dimenzija

Hausdorffova
dimenzija

Hausdorffova mera

Hausdorffova
dimenzija

Kaj se zgodi z maso Kochove krivulje, če trikrat zmanjšamo začetni interval?



Podobnostna dimenzija

Fraktalne
dimenzije

Ruslan
Urazbakhtin

Uvod

Kaj so fraktali?

Opomba o teorije
mere

Podobnostna
dimenzija

Hausdorffova
dimenzija

Hausdorffova mera

Hausdorffova
dimenzija

Definicija

Naj bo množica $F \subseteq \mathbb{R}^n$ sestavljena iz m kopij same sebe, kjer je vsaka kopija zmanjšana za faktor r . Potem rečemo, da ima množica F **podobnostno dimenzijo** enako $\log_r m$.

Podobnostna dimenzija

Fraktalne
dimenzije

Ruslan
Urazbakhtin

Uvod

Kaj so fraktali?

Opomba o teorije
mere

Podobnostna
dimenzija

Hausdorffova
dimenzija

Hausdorffova mera

Hausdorffova
dimenzija

Definicija

Naj bo množica $F \subseteq \mathbb{R}^n$ sestavljena iz m kopij same sebe, kjer je vsaka kopija zmanjšana za faktor r . Potem rečemo, da ima množica F **podobnostno dimenzijo** enako $\log_r m$.

Spet imamo en problem...

Podobnostna dimenzija

Fraktalne
dimenzije

Ruslan
Urazbakhtin

Uvod

Kaj so fraktali?

Opomba o teorije
mere

Podobnostna
dimenzija

Hausdorffova
dimenzija

Hausdorffova mera

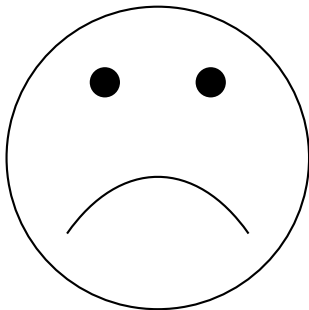
Hausdorffova
dimenzija

Definicija

Naj bo množica $F \subseteq \mathbb{R}^n$ sestavljena iz m kopij same sebe, kjer je vsaka kopija zmanjšana za faktor r . Potem rečemo, da ima množica F **podobnostno dimenzijo** enako $\log_r m$.

Spet imamo en problem...

Samopodobnih množic je zelo malo. Recimo, že krožnica ni taka.



Podobnostna dimenzija

Fraktalne
dimenzije

Ruslan
Urazbakhtin

Uvod

Kaj so fraktali?

Opomba o teorije
mere

Podobnostna
dimenzija

Hausdorffova
dimenzija

Hausdorffova mera

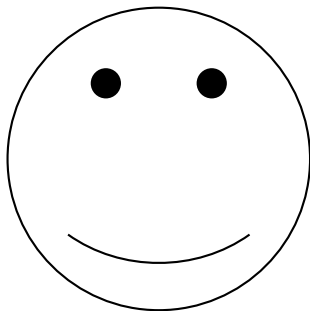
Hausdorffova
dimenzija

Definicija

Naj bo množica $F \subseteq \mathbb{R}^n$ sestavljena iz m kopij same sebe, kjer je vsaka kopija zmanjšana za faktor r . Potem rečemo, da ima množica F **podobnostno dimenzijo** enako $\log_r m$.

Spet imamo en problem...

Samopodobnih množic je zelo malo. Recimo, že krožnica ni taka.



Hausdorffova dimenzija

Fraktalne
dimenzije

Ruslan
Urazbakhtin

Uvod

Kaj so fraktali?

Opomba o teorije
mere

Podobnostna
dimenzija

Hausdorffova
dimenzija

Hausdorffova mera

Hausdorffova
dimenzija

- Hausdorffova dimenzija izmed vseh „fraktalnih“ dimenzij, ki jih ljudje uporabljajo, je najbolj stara in verjetno najbolj pomembna.
- Lahko jo definiramo za poljubno množico in matematično je zelo priročna, ker je osnovana na meri, s katero lahko relativno preprosto kaj naredimo.
- Glavna pomanjkljivost je, da jo v večini situacij težko izračunati ali oceniti z numerični metodi.

Hausdorffova mera

Fraktalne
dimenzije

Ruslan
Urazbakhtin

Uvod

Kaj so fraktali?

Opomba o teorije
mere

Podobnostna
dimenzija

Hausdorffova
dimenzija

Hausdorffova mera

Hausdorffova
dimenzija

Definicija

Naj bo $F \subseteq \mathbb{R}^n$. Naj bo $\{U_i\}$ števna družina množic iz \mathbb{R}^n , za katero velja:

1 $\forall i \in \mathbb{N}. 0 \leq |U_i| \leq \delta;$

2 $F \subseteq \bigcup_{i=1}^{\infty} U_i.$

Potem $\{U_i\}$ imenujemo **δ -pokritje** množice F .

Hausdorffova mera

Fraktalne
dimenzije

Ruslan
Urazbakhtin

Uvod

Kaj so fraktali?

Opomba o teoriji
mere

Podobnostna
dimenzija

Hausdorffova
dimenzija

Hausdorffova mera

Hausdorffova
dimenzija

Naj bo $F \subseteq \mathbb{R}^n$ in $s \geq 0$. Za vsak $\delta > 0$ definiramo

$$\mathcal{H}_\delta^s(F) = \inf \left\{ \sum_{i=1}^{\infty} |U_i|^s \mid \{U_i\} \text{ je } \delta\text{-pokritje } F \right\}$$

Hausdorffova mera

Fraktalne
dimenzije

Ruslan
Urazbakhtin

Uvod

Kaj so fraktali?

Opomba o teorije
mere

Podobnostna
dimenzija

Hausdorffova
dimenzija

Hausdorffova mera

Hausdorffova
dimenzija

Naj bo $F \subseteq \mathbb{R}^n$ in $s \geq 0$. Za vsak $\delta > 0$ definiramo

$$\mathcal{H}_\delta^s(F) = \inf \left\{ \sum_{i=1}^{\infty} |U_i|^s \mid \{U_i\} \text{ je } \delta\text{-pokritje } F \right\}$$

Ko $\delta \rightarrow 0$, razred možnih pokritij F se zmanjšuje, torej inf narašča, torej lahko definiramo:

$$\mathcal{H}^s(F) = \lim_{\delta \rightarrow 0} \mathcal{H}_\delta^s(F)$$

Ta limita vedno obstaja za vsako množico $F \subseteq \mathbb{R}^n$.

Hausdorffova mera

Fraktalne
dimenzije

Ruslan
Urazbakhtin

Uvod

Kaj so fraktali?

Opomba o teoriji
mere

Podobnostna
dimenzija

Hausdorffova
dimenzija

Hausdorffova mera

Hausdorffova
dimenzija

Naj bo $F \subseteq \mathbb{R}^n$ in $s \geq 0$. Za vsak $\delta > 0$ definiramo

$$\mathcal{H}_\delta^s(F) = \inf \left\{ \sum_{i=1}^{\infty} |U_i|^s \mid \{U_i\} \text{ je } \delta\text{-pokritje } F \right\}$$

Ko $\delta \rightarrow 0$, razred možnih pokritij F se zmanjšuje, torej inf narašča, torej lahko definiramo:

$$\mathcal{H}^s(F) = \lim_{\delta \rightarrow 0} \mathcal{H}_\delta^s(F)$$

Ta limita vedno obstaja za vsako množico $F \subseteq \mathbb{R}^n$.

Število $\mathcal{H}^s(F)$ imenujemo **s-dim Hausdorffova mera** množice F .

Trditev

\mathcal{H}^s je mera na \mathbb{R}^n .

Hausdorffova mera

Fraktalne
dimenzije

Ruslan
Urazbakhtin

Uvod

Kaj so fraktali?

Opomba o teorije
mere

Podobnostna
dimenzija

Hausdorffova
dimenzija

Hausdorffova mera

Hausdorffova
dimenzija

Opomba

Hausdorffova mera je posplošitev Lebesgueve mere na necele dimenzije. Se da pokazati, da

$$\mathcal{H}^n(F) = \frac{1}{c_n} \mathcal{L}^n(F),$$

kjer je c_n volumen n -dim krogle z polmerom $\frac{1}{2}$, tj.

$$c_n = \frac{\pi^{(n/2)}}{2^n \Gamma(n/2 + 1)}$$

Lastnosti skaliranja

Fraktalne
dimenzije

Ruslan
Urazbakhtin

Uvod

Kaj so fraktali?

Opomba o teoriji
mere

Podobnostna
dimenzija

Hausdorffova
dimenzija

Hausdorffova mera

Hausdorffova
dimenzija

Definicija

Podobnostna preslikava z koeficientom podobnosti $c > 0$ je preslikava $P : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$, za katero velja:

$$\forall x, y \in \mathbb{R}^n. |P(x) - P(y)| = c|x - y|$$

Lastnosti skaliranja

Fraktalne
dimenzije

Ruslan
Urazbakhtin

Uvod

Kaj so fraktali?

Opomba o teoriji
mere

Podobnostna
dimenzija

Hausdorffova
dimenzija

Hausdorffova mera

Hausdorffova
dimenzija

Naj bo $P : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ podobnostna preslikava z podobnostnim koeficientom $c > 0$. Naj bo $F \subseteq \mathbb{R}^n$.

Dobro poznamo lastnosti skaliranja dolžine, ploščine, volumna, npr.

- $\mathcal{L}^1(P_*(F)) = c\mathcal{L}^1(F)$
- $\mathcal{L}^2(P_*(F)) = c^2\mathcal{L}^2(F)$
- $\mathcal{L}^3(P_*(F)) = c^3\mathcal{L}^3(F)$

Ali velja enako tudi za \mathcal{H}^s ?

Lastnosti skaliranja

Fraktalne
dimenzije

Ruslan
Urazbakhtin

Uvod

Kaj so fraktali?

Opomba o teorije
mere

Podobnostna
dimenzija

Hausdorffova
dimenzija

Hausdorffova mera

Hausdorffova
dimenzija

Naj bo $P : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ podobnostna preslikava z podobnostnim koeficientom $c > 0$. Naj bo $F \subseteq \mathbb{R}^n$.

Trditev

$$\mathcal{H}^s(P_*(F)) = c^s \mathcal{H}^s(F)$$

Lastnosti skaliranja

Fraktalne
dimenzije

Ruslan
Urazbakhtin

Uvod

Kaj so fraktali?

Opomba o teoriji
mere

Podobnostna
dimenzija

Hausdorffova
dimenzija

Hausdorffova mera

Hausdorffova
dimenzija

Definicija

Podobnostna preslikava z koeficientom podobnosti $c > 0$ je preslikava $P : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$, za katero velja:

$$\forall x, y \in \mathbb{R}^n. |P(x) - P(y)| = c|x - y|$$

Lastnosti skaliranja

Fraktalne
dimenzije

Ruslan
Urazbakhtin

Uvod

Kaj so fraktali?

Opomba o teorije
mere

Podobnostna
dimenzija

Hausdorffova
dimenzija

Hausdorffova mera

Hausdorffova
dimenzija

Naj bo $P : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ podobnostna preslikava z podobnostnim koeficientom $c > 0$. Naj bo $F \subseteq \mathbb{R}^n$.

Dobro poznamo lastnosti skaliranja dolžine, ploščine, volumna, npr.

- $\mathcal{L}^1(P_*(F)) = c\mathcal{L}^1(F)$
- $\mathcal{L}^2(P_*(F)) = c^2\mathcal{L}^2(F)$
- $\mathcal{L}^3(P_*(F)) = c^3\mathcal{L}^3(F)$

Ali velja enako tudi za \mathcal{H}^s ?

Lastnosti skaliranja

Fraktalne
dimenzije

Ruslan
Urazbakhtin

Uvod

Kaj so fraktali?

Opomba o teorije
mere

Podobnostna
dimenzija

Hausdorffova
dimenzija

Hausdorffova mera

Hausdorffova
dimenzija

Naj bo $P : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ podobnostna preslikava z podobnostnim koeficientom $c > 0$. Naj bo $F \subseteq \mathbb{R}^n$.

Trditev

$$\mathcal{H}^s(P_*(F)) = c^s \mathcal{H}^s(F)$$

Lastnosti skaliranja

Fraktalne
dimenzije

Ruslan
Urazbakhtin

Uvod

Kaj so fraktali?

Opomba o teoriji
mere

Podobnostna
dimenzija

Hausdorffova
dimenzija

Hausdorffova mera

Hausdorffova
dimenzija

Definicija

Naj bosta $X \subseteq \mathbb{R}^n$ in $Y \subseteq \mathbb{R}^m$. Preslikava $f : X \rightarrow Y$ je **Hölderjeva** stopnje $\alpha > 0$, če

$$\exists c > 0. \forall x, y \in X. |f(x) - f(y)| \leq c|x - y|^\alpha$$

Lastnosti skaliranja

Fraktalne
dimenzije

Ruslan
Urazbakhtin

Uvod

Kaj so fraktali?

Opomba o teorije
mere

Podobnostna
dimenzija

Hausdorffova
dimenzija

Hausdorffova mera

Hausdorffova
dimenzija

Definicija

Naj bosta $X \subseteq \mathbb{R}^n$ in $Y \subseteq \mathbb{R}^m$. Preslikava $f : X \rightarrow Y$ je **Höldorjeva** stopnje $\alpha > 0$, če

$$\exists c > 0. \forall x, y \in X. |f(x) - f(y)| \leq c|x - y|^\alpha$$

Trditev

Naj bo $F \subseteq \mathbb{R}^n$ in $f : F \rightarrow \mathbb{R}^n$ Höldorjeva preslikava stopnje $\alpha > 0$. Potem za vsak $s \geq 0$ velja:

$$\mathcal{H}^{s/\alpha}(f_*(F)) \leq c^{s/\alpha} \mathcal{H}^s(F)$$

Lastnosti skaliranja

Fraktalne
dimenzije

Ruslan
Urazbakhtin

Uvod

Kaj so fraktali?

Opomba o teoriji
mere

Podobnostna
dimenzija

Hausdorffova
dimenzija

Hausdorffova mera

Hausdorffova
dimenzija

Trditev

Naj bo $F \subseteq \mathbb{R}^n$ in $f : F \rightarrow \mathbb{R}^n$ Höldorjeva preslikava stopnje $\alpha > 0$.
Potem za vsak $s \geq 0$ velja:

$$\mathcal{H}^{s/\alpha}(f_*(F)) \leq c^{s/\alpha} \mathcal{H}^s(F)$$

Posledica

Če je $f : F \rightarrow \mathbb{R}^n$ Lipschitzova, tj.

$$\exists c > 0. \forall x, y \in X. |f(x) - f(y)| \leq c|x - y|,$$

potem

$$\mathcal{H}^s(f_*(F)) \leq c^s \mathcal{H}^s(F)$$

Hausdorffova dimenzija

Fraktalne
dimenzije

Ruslan
Urazbakhtin

Uvod

Kaj so fraktali?

Opomba o teorije
mere

Podobnostna
dimenzija

Hausdorffova
dimenzija

Hausdorffova mera

Hausdorffova
dimenzija

Fraktalne
dimenzije

Ruslan
Urazbakhtin

Uvod

Kaj so fraktali?

Opomba o teorije
mere

Podobnostna
dimenzija

Hausdorffova
dimenzija

Hausdorffova mera

Hausdorffova
dimenzija

Hvala za pozornost!