

# 1 Funckcije več spremenljivk

## 1.1 Prostor $\mathbb{R}^n$

### 1. Prostor $\mathbb{R}^n$

- **Definicija.** Prostor  $\mathbb{R}^n$ . Seštevanje in množenje s skalarjem na  $\mathbb{R}^n$ . Ali je  $\mathbb{R}^n$  vektorski prostor?
- **Definicija.** Skalarni produkt na  $\mathbb{R}^n$ . Norma vektorja na  $\mathbb{R}^n$ . Metrika na  $\mathbb{R}^n$ .
- **Definicija.** Zaprt kvader. Odprt kvader.
- **Opomba.** Ali imata prostori  $(\mathbb{R}^n, \|\cdot\|_2)$  in  $(\mathbb{R}^n, \|\cdot\|_\infty)$  isto topologijo?
- **Izrek.** Karakterizacija kompaktnosti množic v  $\mathbb{R}^n$ .

### 2. Zaporedja v $\mathbb{R}^n$

- **Definicija.** Zaporedje v  $\mathbb{R}^n$ .
- **Opomba.** Koliko realnih zaporedij porodi zaporedje v  $\mathbb{R}^n$ ?
- **Trditev.** Karakterizacija konvergence zaporedij v  $\mathbb{R}^n$  (porojene podzaporedja).

## 1.2 Zveznost preslikav iz $\mathbb{R}^n$ v $\mathbb{R}^m$

### 1. Zveznost preslikav iz $\mathbb{R}^n$ v $\mathbb{R}$

Naj bo  $D \subseteq \mathbb{R}^n$ ,  $f : D \rightarrow \mathbb{R}^m$  preslikava.

- **Opomba.** Kako rečemo preslikave iz  $\mathbb{R}^n$  v  $\mathbb{R}$ ?
- **Definicija.** Kadar je  $f$  zvezna v točki  $a \in D$ ? Kadar je  $f$  zvezna na  $D$ ?
- **Trditev.** Karakterizacija zveznosti  $f$  v točki  $a \in D$  z zaporedji.
- **Definicija.** Kadar je  $f$  enakomerno zvezna na  $D$ ?
- **Trditev.** Kaj lahko povemo o zvezni preslikavi na kompaktu?
- **Trditev.** Kaj lahko povemo o slike zvezne preslikave na kompaktu?
- **Definicija.** Kadar je  $f$   $C$ -lipshitzova?
- **Trditev.** V kakšni zvezi so  $C$ -lipshitzovost, enakomerna zveznost in zveznost?
- **Trditev.** Kaj lahko povemo o vsote, razlike, produktu in kvocientu zveznih v točki  $a \in D$  funkcij?
- **Trditev.** Kaj lahko povemo o kompozitume zveznih preslikav?
- **Zgled.** Ali je projekcija zvezna na  $\mathbb{R}^n$ ? Kaj pa polinomi in racionalne funkcije?
- **Definicija.** Funkcija  $n$ -spremenljivk.
- **Opomba.** Ali je vsaka zožitev zvezne funkcije zvezna funkcija?
- **Trditev.** Ali je zvezna v točki  $a \in D$  funkcija zvezna v točki  $a \in D$  kot funkcija posameznih spremenljivk?
- **Zgled.** Ali je  $f(x, y) = \begin{cases} \frac{2xy}{x^2+y^2}; & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0; & (x, y) = (0, 0) \end{cases}$  zvezna kot funkcija posameznih spremenljivk? Ali je  $f$  zvezna?
- **Zgled.** Ali je  $f(x, y) = \begin{cases} \frac{2x^2y}{x^4+y^2}; & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0; & (x, y) = (0, 0) \end{cases}$  zvezna na vsake premice? Ali je  $f$  zvezna?

### 2. Zveznost preslikav iz $\mathbb{R}^n$ v $\mathbb{R}^m$

Naj bo  $D \subseteq \mathbb{R}^n$  in  $F : D \rightarrow \mathbb{R}^m$  preslikava. Naj bo  $x \in D$ , potem  $F(x) = (y_1, \dots, y_m) \in \mathbb{R}^m$ .

Lahko pišemo  $F(x) = (f_1(x), \dots, f_m(x))$ . Torej  $F$  določa  $m$  funkcij  $n$ -spremenljivk.

- **Trditev.** Karakterizacija zveznosti  $F$  v točki  $a \in D$  z koordinatnimi funkciji.
- **Zgled.** Pokaži, da so linearne preslikave omejene:  $\|\mathcal{A}x\| \leq M\|x\|$ .
- **Trditev.** Ali so linearne preslikave zvezne?
- **Trditev.** Čemu je ekvivalentna zveznost linearne preslikave?
- **Definicija.** Afina preslikava.

### 1.3 Parcialni odvodi in diferenciacijabilnost

#### 1. Parcialni odvodi

Naj bo  $D \subseteq \mathbb{R}^n$ ,  $a \in D$  notranja,  $f : D \rightarrow \mathbb{R}$  funkcija.

- **Definicija.** Kadar je  $f$  parcialno odvedljiva po spremenljivke  $x_j$  v točki  $a \in D$ ? Kaj je parcialni odvod?
- **Opomba.** Kaj lahko povemo o parcialne odvedljivosti elementarnih funkcij?

#### 2. Diferenciacijabilnost

Naj bo  $D \subseteq \mathbb{R}^n$ ,  $a \in D$  notranja,  $f : D \rightarrow \mathbb{R}$  funkcija.

- **Definicija.** Kadar je  $f$  diferenciacijabilna v točki  $a \in D$ ? Diferencial  $f$  v točki  $a \in D$ .
- **Opomba.** Ali je diferencial, če obstaja, enolično določen?
- **Opomba.** Kaj je diferencial v smislu aproksimacije funkcije?
- **Trditev.** (Potrebni pogoji za diferenciacijabilnost). Zveza med diferencialom, parcialnimi odvodi in zveznostjo.
- **Opomba.** Kako lahko izrazimo diferencial z parcialnimi odvodi? Gradient funkcije. Operator nabla.
- **Zgled.** Ali je  $f(x, y) = \begin{cases} \frac{2xy}{x^2+y^2}; & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0; & (x, y) = (0, 0) \end{cases}$  diferenciacijabilna?
- Ali je  $f(x, y) = \begin{cases} \frac{2x^2y}{x^2+y^2}; & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0; & (x, y) = (0, 0) \end{cases}$  zvezna, parcialno odvedljiva, diferenciacijabilna?
- **Izrek.** Zadosten pogoj za diferenciacijabilnost  $f$  v točki  $a \in D$ .

#### 3. Višji parcialni odvodi

Naj bo  $f : D^{\text{odp}} \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  funkcija. Denimo, da je  $f$  parcialno odvedljiva po vseh spremenljivkah na  $D$ . Parcialni odvodi so tudi funkcije  $n$ -spremenljivk in morda so tudi te parcialno odvedljive po vseh oz. nekaterih spremenljivkah.

- **Trditev.** Zadostni pogoj za enakost mešanih odvodov.
- **Definicija.** Kadar je  $f$  razreda  $C^k$  na  $D$ ?
- **Definicija.** Množica  $k$ -krat zvezno odvedljivih funkcij. Množica gladkih funkcij. Množica zveznih funkcij.
- **Opomba.** Kakšno strukturo ima množica  $C^k(D)$  z operacijama  $+$ ,  $\circ$  in množenja s skalarji?

#### 4. Diferenciacijabilnost preslikav

Naj bo  $D \subseteq \mathbb{R}^n$ ,  $a \in D$  notranja,  $F : D \rightarrow \mathbb{R}^m$  preslikava.

- **Definicija.** Kadar je  $F$  diferenciacijabilna v točki  $a \in D$ ? Diferencial  $F$  v točki  $a \in D$ .
- **Opomba.** Ali je diferencial, če obstaja, enolično določen?
- **Zgled.** Ali sta diferenciacijabilni  $\mathcal{A} : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$  linearna,  $F(x) = \mathcal{A}x$  in  $F : \mathbb{R}^{n \times n} \rightarrow \mathbb{R}^{n \times n}$ ,  $F(X) = X^2$ ?
- **Izrek.** Karakterizacija diferenciacijabilnosti  $F$  v točki  $a \in D$  s koordinatnimi funkciji.
- **Opomba.** Kako se izraža diferencial  $F$  v točki  $a \in D$  z koordinatnimi funkciji? Jacobijeva matrika.
- **Posledica.** Zadosten pogoj za diferenciacijabilnost  $F$  v točki  $a$ .
- **Definicija.** Kadar je  $F$  razreda  $C^k$  na  $D$ ?
- **Izrek.** Verižno pravilo.
- **Opomba.** Kako se izraža diferencial kompozituma funkcij z Jacobijevimi matriki?
- **Posledica.** Verižno pravilo za funkcijo  $n$ -spremenljivk.

## 1.4 Izrek o implicitni funkciji

### 1. Izrek o inverzni preslikavi

Naj bo  $D, \Omega \subseteq \mathbb{R}^n$  odprti,  $\Phi : D \rightarrow \Omega$  preslikava razreda  $C^1(D)$ . Kakšne so zadostni pogoji za (lokalno) obrnljivost preslikave  $\Phi$ ?

- **Definicija.** Kadar rečemo, da je  $\Phi$   $C^k$ -difeomorfizem?
- **Zgled.** Ali je  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = x^3$  difeomorfizem?
- **Lema.** Kako izračunamo diferencial inverzne preslikave?
- **Trditev.** Potreben pogoj, da je  $\Phi$  difeomorfizem.
- **Zgled.** Ali velja obrat?  $\Phi : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ ,  $\Phi(x, y) = (e^x \cos y, e^x \sin y)$ .
- **Lema.** 3 lemi + pomožna trditev TODO
- **Izrek.** Izrek o inverzni preslikavi.
- **Posledica.** Kaj če je  $\Phi$  razreda  $C^k(D)$ ?
- **Definicija.** Kadar rečemo, da je  $\Phi$  lokalni  $C^k$ -difeomorfizem?
- **Opomba.** Kaj pravi izrek, če je  $n = 1$ ?
- **Zgled.** Naj bo  $F : \mathbb{R}^{n \times n} \rightarrow \mathbb{R}^{n \times n}$ ,  $F(X) = X^2$ . Ali je  $F$  v okolici točke  $I \in \mathbb{R}^{n \times n}$  lokalni difeomorfizem? Kaj to pomeni?

### 2. Osnovna verzija izreka o implicitni preslikavi

Naj bo  $D \subseteq \mathbb{R}^2$  odprta,  $(a, b) \in D$ ,  $f : D \rightarrow \mathbb{R}$  funkcija razreda  $C^1(D)$ .

- **Izrek.** Osnovna verzija izreka o implicitni funkciji.
- **Posledica.** Kaj če je  $f$  razreda  $C^k(D)$ ?
- **Zgled.** Kaj če pogoji niso izpolnjeni:
  - (a)  $f(x, y) = (x - y)^2$ ,  $f(x, y) = 0$  v okolici točke  $(0, 0)$ .
  - (b)  $f(x, y) = y^3 - x$ ,  $f(x, y) = 0$  v okolici točke  $(0, 0)$ .
  - (c)  $f(x, y) = y^2 - x^2 - x^4$ ,  $f(x, y) = 0$  v okolici točke  $(0, 0)$ .
  - (d)  $f(x, y) = y^2 + x^2 + x^4$ ,  $f(x, y) = 0$  v okolici točke  $(0, 0)$ .

### 3. Izrek o implicitni funkciji

Imamo  $n + m$  spremenljivk  $(x, y)$ , kjer  $x = (x_1, \dots, x_n)$ ,  $y = (y_1, \dots, y_m)$  in  $m$  enačb. Pričakujemo, da bomo lahko  $m$  spremenljivk izrazili kot funkcijo  $n$  ostalih, tj. najdemo presliavo  $\Phi : D \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ , da velja  $y = \Phi(x)$ .

Naj bo  $D \subseteq \mathbb{R}_x^n \times \mathbb{R}_y^m$  odprta,  $F = (f_1, \dots, f_m) : D \rightarrow \mathbb{R}^m$  preslikava razreda  $C^1(D)$ .

- **Definicija.** Parcialni diferencial na prvo spremenljivko. Parcialni diferencial na drugo spremenljivko.
- **Opomba.** Kako se izraža parcialna diferenciala z matriko? Kako se izraža diferencial  $F$  z parcialnima diferencialama?
- **Opomba.** Kako ta diferencial deluje na vektorju  $\begin{bmatrix} h \\ k \end{bmatrix}$ ,  $h \in \mathbb{R}^n$ ,  $k \in \mathbb{R}^m$ ?
- **Izrek.** Izrek o implicitni funkciji.
- **Posledica.** Kaj če je  $F$  razreda  $C^k(D)$ ?
- **Zgled.** Naj bo  $F(x, y) = x^2 + y^2 - 1$  in naj rešujemo enačbo  $F(x, y) = 0$  v okolici točke  $(0, 1)$ . S pomočjo dokaza izreka o implicitni preslikavi določi  $y = \varphi(x)$ .
- **Zgled.** Naj bosta  $f(x, y, z) = y + xy + xz^2$  in  $g(x, y, z) = z + zy + x^2$ . Dokaži, da sistem enačb  $f(x, y, z) = 0$  in  $g(x, y, z) = 0$  v okolici točke  $(0, 0, 0)$  enolično določa  $C^\infty$  funkciji  $y = y(x)$  in  $z = z(x)$  in razvij jih v Taylorjevo vrsto do členov reda 2.

#### 4. Rang preslikave

Naj bo  $D \subseteq \mathbb{R}^n$  odprta,  $a \in D$  in  $F : D \rightarrow \mathbb{R}^m$  preslikava razreda  $C^1$ .

- **Zgled.** Naj bo  $F : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$  funkcija. Recimo, da rešujemo enačbo  $F(x, y, z) = 0$  in vemo, da  $F(a, b, c) = 0$ . Kakšen je zadosten pogoj za to, da bi lahko vsaj eno spremenljivko izrazili kot funkcijo ostalih?
- **Zgled.** Naj bosta  $F : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$  in  $G : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$  funkciji. Recimo, da rešujemo sistem enačb  $F(x, y, z) = 0$  in  $G(x, y, z) = 0$  in vemo, da  $F(a, b, c) = 0$  in  $G(a, b, c) = 0$ . Kakšen je zadosten pogoj za to, da bi lahko vsaj dve spremenljivke izrazili kot funkcijo tretje?
- **Definicija.** Rang  $F$  v točki  $a \in D$ . Rang  $F$ . Kadar rečemo, da je  $F$  v točki  $a \in D$  maksimalnega ranga?
- **Opomba.** Ali je maksimalnost ranga lokalno stabilna?
- **Primer.** Obrnljiva matrika in permutacija koordinat. **TODO**
- **Posledica IIF.** Čemu je ekvivalentna enačba  $F(x) = 0$ , če je  $m < n$ ?
- **Primer.** Naj bo  $\mathcal{A} : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$  linearna,  $m \leq n$ ,  $\text{rang } \mathcal{A} = m$ . Kakšno dimenzijo ima prostor rešitev enačbe  $\mathcal{A}x = b$ ?
- **Posledica.** Kaj lahko povemo o  $F$  v točki  $a \in D$ , če je  $\text{rang}_a F = m$ , če  $m \leq n$ ?

## 1.5 Podmnogoterosti v $\mathbb{R}^n$

Podmnogoterosti je posplošitev pojmov „krivulja“ in „ploskev“.

### 1. Podmnogoterosti

- **Definicija.** Gladka podmnogoterost. Lokalne definicijske funkcije.
- **Opomba.** Kaj je podmnogoterost, če je njena kodimenzija enaka 0?
- **Zgled.** Gledamo v  $\mathbb{R}^3$ . Naj bo  $\mathcal{F}_1, \mathcal{F}_2, \mathcal{F}_3 : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$  linearni. Kaj dobimo, če vzamemo za definicijske funkcije eno, dve ali tri funkcije izmed  $\mathcal{F}_1, \mathcal{F}_2, \mathcal{F}_3$ ? Kadar govorimo o krivuljah in kadar o ploskvah?
- **Zgled.** Ugotovi, ali je podmnogoterost:
  - $M = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 + z^2 = 1\}$ .
  - $M = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 + z^2 = 1, x + y + z = 0\}$ .
  - $M = (\{0\} \times \mathbb{R}) \cup (\mathbb{R} \times \{0\})$ .
- **Opomba.** Ali je rob kvadrata z stranico 2 in središčem v  $(0, 0)$  gladka podmnogoterost v  $\mathbb{R}^2$ ?
- **Zgled.** Ugotovi, ali je podmnogoterost:
  - $\text{GL}_n(\mathbb{R}) = \{A \in \mathbb{R}^{n \times n} \mid \det A \neq 0\}$ .
  - $\text{SL}_n(\mathbb{R}) = \{A \in \mathbb{R}^{n \times n} \mid \det A = 1\}$ .
- **Opomba.** Kadar rečemo, da je podmnogoterost podana implicitno?
- **Trditev.** Karakterizacija podmnogoterosti (ali je lokalno graf?)
- **Opomba.** Kadar rečemo, da je podmnogoterost podana eksplicitno?
- **Zgled.** Ali je  $M = \{(x, x^2) \mid x \in \mathbb{R}\}$  podmnogoterost?

### 2. Parametrično padajanje mnogoterosti

- **Zgled.** Ali je parametrizacija  $\varphi \mapsto (a \cos \varphi, a \sin \varphi)$ ,  $a > 0$ ,  $\varphi \in [0, 2\pi)$  določa podmnogoterost?
- **Trditev.**

## 1.6 Ekstremi funkcij več spremenljivk

### 1. Ekstremi funkcij več spremenljivk

Naj bo  $D \subseteq \mathbb{R}^n$ ,  $a \in D$ ,  $f : D \rightarrow \mathbb{R}$  funkcija.

- **Definicija.** Lokalni maksimum/minimum. Strogi lokalni maksimum/minimum. Maksimum/minimum (globalni). Lokalni ekstrem. Globalni ekstrem.
- **Opomba.** Kaj ima zvezna funkcija na kompaktu?
- **Definicija.** Stacionarna (oz. kritična) točka  $a \in D^{\text{odp}}$  diferenciable funkcije  $f$ .
- **Trditev.** Kaj če ima diferenciable funkcija  $f$  v točki  $a \in D^{\text{odp}}$  lokalni ekstrem?
- **Zgled.** Poišči minimum in maksimum  $f(x, y) = x^2 - xy + y^2 - 3x + 4$  na  $K = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 \leq 3\}$ .

### 2. Potrebni in zadostni pogoji na 2. odvodu, da je kritična točka lokalni ekstrem

Naj bo  $D \subseteq \mathbb{R}^n$  odprta,  $f : D \rightarrow \mathbb{R}$  razreda  $C^2$  na  $D$ .

- **Definicija.** Hessejeva matrika  $Hf$  2. odvodov. Hessejeva forma.
- **Opomba.** Kaj lahko povemo o Hessejevi matriki?
- **Definicija.** Pozitivno (semi)definitna  $Hf$ . Negativno (semi)definitna  $Hf$ .
- **Opomba.** Karakterizacija pozitivne/negativne (semi)definitnosti s lastnimi vrednostmi  $Hf$ .
- **Trditev.** (Potrebni pogoji). Kaj velja, če ima  $f$  v točki  $a \in D$  lokalni maksimum/minimum?
- **Trditev.** (Zadostni pogoji.) Kadar je stacionarna točka  $a \in D$  funkcije  $f$  lokalni minimum/maksimum? Kadar nič od tega?
- **Zgled.** Določi  $(Hf_i)(0, 0)$  za  $f_1(x, y) = \frac{1}{2}(x^2 + y^2)$ ,  $f_2(x, y) = \frac{1}{2}(-x^2 - y^2)$ ,  $f_3(x, y) = \frac{1}{2}(x^2 - y^2)$ .
- **Posledica.** Kako zgledajo zadostni pogoji za primer  $n = 2$ ?
- **Zgled.** Naj bo  $f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 + 2xyz$ . Klasificiraj vse stacionarne točke funkcije  $f$ .

### 3. Vezani ekstremi

- **Izrek.** Obstoj Lagrangeevih multiplikatorjev.
- **Opomba.** Lagrangeeva metoda za iskanje vezanih ekstremov.
- **Zgled.** Določi stacionarne točke  $f(x, y, z) = z$  na  $M = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 + z^2 = 1; x + y + z = 0\}$ .
- **Zgled.** Določi stacionarne točke  $f(x, y, z) = x^2 - xy + y^2 - 3x + 4$  na robu  $x^2 + y^2 = 9$ .

## 2 Integral s parametri

Naj bo  $f : [a, b]_x \times [c, d]_y \rightarrow \mathbb{R}$  funkcija. Gledamo funkcijo  $F(y) = \int_a^b f(x, y) dx$ , kjer  $y \in [c, d]$  je **parameter**. Zanima nas v kakšni so povezavi lastnosti funkcije  $f$  in funkcije  $F$ .

### 1. Integral s parametri

- **Definicija.** Lokalno kompaktna podmnožica.
- **Trditev.** Zadostni pogoj za zveznost funkcije  $F(u, v, y) = \int_u^v f(x, y) dx$ .
- **Posledica.** Zadostni pogoj za zveznost funkcije  $F(y) = \int_a^b f(x, y) dx$ .

### 2. Odvajanje integrala s parametri

- **Trditev.** Zadostni pogoj, da smemo zamenjati vrstni red odvajanja in integriranja v  $\frac{d}{dy} \int_a^b f(x, y) dx$ . Kaj lahko povemo o funkciji  $F(y) = \int_a^b f(x, y) dx$ ?
- **Posledica.** Čemu je enako  $\frac{d}{dy} \int_{\alpha(y)}^{\beta(y)} f(x, y) dx$ ? Pri kakšnih zadostnih pogojih?
- **Posledica.** Naj bo  $y \in D^{\text{odp}} \subseteq \mathbb{R}^n$ . Zadostni pogoj, da smemo zamenjati vrstni red odvajanja in integriranja v  $\frac{\partial}{\partial y_j} \int_a^b f(x, y) dx$  za vse  $j \in \{1, \dots, n\}$ . Kaj lahko povemo o funkciji  $F(y) = \int_a^b f(x, y) dx$ ?

### 3. Integral integrala s parametri

- **Trditev.** Zadostni pogoji, da smemo zamenjati vrstni red integriranja v  $\int_c^d \left( \int_a^b f(x, y) dx \right) dy$ .

### 4. Posplošeni integral s parametri

Naj bo  $Y$  neka množica,  $a \in \mathbb{R}$ ,  $f : [a, \infty)_x \times Y_y \rightarrow \mathbb{R}$  funkcija. Standardni predpostavki:

Funkcija  $f$  za vsak  $y \in Y$  zvezna, tj.  $x \mapsto f(x, y)$  zvezna na  $[a, \infty)$  za vsak  $y \in Y$ .

Za vsak  $y \in Y$  obstaja integral  $F(y) = \int_a^\infty f(x, y) dx$

- **Definicija.** Kadar  $F(y) = \int_a^\infty f(x, y) dx$  konvergira enakomerno na  $Y$ ?
- **Trditev.** Zadostni pogoji za zveznost funkcije  $F(y) = \int_a^\infty f(x, y) dx$ .
- **Definicija.** Kadar  $F(y) = \int_a^\infty f(x, y) dx$  konvergira lokalno enakomerno na  $Y$ ?
- **Trditev.** Test enakomerne konvergence.
- **Trditev.** Zadostni pogoji, da smemo zamenjati vrstni red integriranja v  $\int_a^\infty \left( \int_c^d f(x, y) dy \right) dx$ .
- **Trditev.** Zadostni pogoji, da smemo zamenjati vrstni red integriranja v  $\int_a^\infty \left( \int_c^\infty f(x, y) dy \right) dx$ , če je  $f$  nenegativna.
- **Trditev.** Zadostni pogoji, da smemo zamenjati vrstni red integriranja v  $\int_a^\infty \left( \int_c^\infty |f(x, y)| dy \right) dx$ .
- **Trditev.** Zadostni pogoji, da smemo zamenjati vrstni red odvajanja in integriranja v  $\frac{d}{dy} \int_a^\infty f(x, y) dx$ . Kaj lahko povemo o funkciji  $F(y) = \int_a^\infty f(x, y) dx$ ?
- **Posledica.** Naj bo  $y \in D^{\text{odp}} \subseteq \mathbb{R}^n$ . Zadostni pogoj, da smemo zamenjati vrstni red odvajanja in integriranja v  $\frac{\partial}{\partial y_j} \int_a^\infty f(x, y) dx$  za vse  $j \in \{1, \dots, n\}$ . Kaj lahko povemo o funkciji  $F(y) = \int_a^\infty f(x, y) dx$ ?

### 5. Eulerjeva funkcija gama

- **Definicija.** Eulerjeva funkcija gama.
- **Trditev.** Lastnosti Eulerjeve funkcije gama.
- **Izrek.** S čim je enolično določena Eulerjeva funkcija gama?
- **Izrek.** Stirlingova formula.
- **Posledica.** Čemu je enako  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n!}{n^n e^{-n} \sqrt{2\pi n}}$ ? Kaj to pomeni?

### 6. Eulerjeva funkcija beta

- **Definicija.** Eulerjeva funkcija beta.
- **Trditev.** Lastnosti Eulerjeve funkcije beta.
- **Trditev.** Kaj če v  $B(p, q)$  vpeljamo  $x = \sin^2 t$ ?
- **Trditev.** Kaj če v  $B(p, q)$  vpeljamo  $t = \frac{t}{1+t}$ ?
- **Posledica.** Čemu je enako  $B(p, 1-p)$ ?
- **Posledica.** Čemu je enako  $B(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ ?
- **Izrek.** Osnovna povezava med  $B$  in  $\Gamma$ .
- **Posledica.** Čemu je enako  $\Gamma(\frac{1}{2})$ ?

### 3 Riemannov integral

#### 1. Darbouxev integral

- **Definicija.** Kvader. Delitev kvadra.
- **Definicija.** Finejša delitev.
- **Definicija.** Spodnja in zgornja Darbouxoevi vsoti.
- **Lema.** Kako so povezane  $s(D)$ ,  $s(D')$ ,  $S(D)$ ,  $S(D')$ , kjer je  $D \leq D'$ ?
- **Posledica.** Kakšna je povezava med  $s(D)$  in  $S(D)$ ?
- **Definicija.** Kadar rečemo, da je funkcija  $f$  integrabilna po Darbouxju na kvadru?
- Dvojno in trojni integral.

#### 2. Riemannov integral

- **Definicija.** Riemannova vsota.
- **Definicija.** Kadar rečemo, da je funkcija  $f$  integrabilna po Riemannu na kvadru?
- **Opomba.** Ali je Riemannovo integrabilna funkcija omejena?
- **Izrek.** Povezava med  $I_D$  in  $I_R$ .
- **Trditev.** Kaj lahko povemo o zvezni funkciji na kvadru  $K$ ?
- **Lema.** Dovolj majhne delitve. **TODO**

#### 3. Osnovne lastnosti Riemannovega integrala

- **Trditev.** Struktura množice integrabilnih funkcij na kvadru  $K$ .
- **Trditev.** Monotonost integrala.
- **Trditev.** Trikotniška neenakost.

#### 4. Fubinijev izrek

- **Izrek.** Fubinijev izrek.
- **Posledica.** Kako računamo  $n$ -terni integral zvezne funkcije?
- **Posledica.** Kako računamo dvojni integral zvezne funkcije?
- **Posledica.** Kako računamo trojni integral zvezne funkcije?

#### 5. Riemannov integral na omejenih množicah

- **Definicija.** Kadar pravimo, da je omejena funkcija integrabilna na omejeni množici  $A$ ?
- **Trditev.** Struktura množice integrabilnih funkcij na omejeni množici  $A$ .
- **Definicija.** Karakteristična funkcija množice  $A$ .
- **Definicija.** Kadar pravimo, da ima omejena množica  $A$  prostornino?
- **Opomba.** Kaj lahko povemo o integrabilnosti konstantnih funkcij na množici  $c$  prostornino?
- **Trditev.** Zadostni in potrebni pogoj, da ima omejena množica  $A$  prostornino.

#### 6. Lastnosti omejenih množic s prostornino 0

- **Trditev.** Zadostni in potrebni pogoj, da ima omejena množica  $A$  prostornino 0.
- **Trditev.** Čemu je enaka prostornina končne unije množic s prostornino 0?
- **Trditev.** Čemu je enaka prostornina grafa integrabilne na kvadru  $K$  funkciji?
- **Trditev.** Recimo, da  $A \subseteq \mathbb{R}^n$  ima prostornino,  $A \subseteq K$ , kjer je  $K$  kvader. Kaj lahko povemo o prostornini množice  $K \setminus A$ ?
- **Trditev.** Čemu je enak integral po množici s prostornino 0?
- **Posledica.** Kaj lahko povemo o integralih funkcij, ki se razlikujeta na množici s prostornino 0?
- **Definicija.** Kadar pravimo, da ima množica  $A$  mero 0?
- **Posledica.** Čemu je enaka mera množice s prostornino 0?
- **Trditev.** Čemu je enaka mera števne unije množic s mero 0?
- **Posledica.** Čemu je enaka mera vsake števne množice v  $\mathbb{R}^n$ ?
- **Trditev.** Čemu je enaka mera grafa zvezne funkcije?
- **Trditev.** Kaj lahko povemo o prostornini in mere kompaktne množice?
- **Definicija.** Kadar pravimo, da je neka lastnost velja skoraj povsod?
- **Trditev.** Kaj lahko povemo o funkciji  $f$  na kvadru  $K$ , če  $\int_K f(x) dx = 0$ ?
- **Posledica.** Recimo, da  $\forall x \in K. f(x) \leq g(x)$  in  $\int_K f(x) dx = \int_K g(x) dx$ . Kaj lahko povemo o funkcijah  $f$  in  $g$ ?
- **Lema.** **TODO**
- **Trditev.** Kaj lahko povemo o integralu integrabilne funkcije  $f$  na omejeni množici  $A$  z mero 0?



7. Lebesguev izrek
- **Izrek.** Lebesguev izrek.
  - **Posledica.** **TODO**
  - **Posledica.** Kadar je funkcija  $f$  integrabilna na omejeni množici  $A$  s prostornino?
8. Osnovni lastnosti integrala po omejenih množicah.
- **Trditev.** Struktura množice integrabilnih funkcij na omejeni množici  $A$ .
  - **Trditev.** Monotonost integrala.
  - **Trditev.** Trikotniška neenakost.
  - **Trditev.** Kaj če  $\forall x \in A. m \leq f(x) \leq M$  in  $A$  ima prostornino?
  - **Trditev.** Kaj če je  $A$  kompaktna povezana množica s prostornino in  $f$  zvezna?
  - **Trditev.** Integral na uniji množic.
  - **Izrek.** Fubinijev izrek.
  - **Trditev.** Recimo, da ima  $A \subseteq \mathbb{R}^n$  prostornino. Kaj lahko povemo o prostornine  $\text{Int } A$  in  $\text{Cl } A$ ?
  - **Trditev.** Recimo, da ima  $A \subseteq \mathbb{R}^n$  prostornino in  $f : \text{Cl } A \rightarrow \mathbb{R}$  omejena in integrabilna na  $A$ . Kaj lahko povemo o integralu na  $\text{Int } A$  in  $\text{Cl } A$ ?