Splošna topologija

Ruslan Urazbakhtin

13. avgust 2025

Kazalo

Metrični prostori

TODO: move to: dodatek

Definicija 0.1. **Metrični prostor** je množica X skupaj z preslikavo $d : X \times X \to \mathbb{R}$, za katero velja:

1. $\forall x, y \in X \,.\, d(x, y) \geq 0 \wedge d(x, y) = 0 \iff x = y$,
2. $\forall x, y \in X \,.\, d(x, y) = d(y, x)$,
3. $\forall x, y, z \in X \,.\, d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$.

Definicija 0.2. Naj bo (X, d) metrični prostor.

- **Odprta krogla** s središčem v a in polmerom r je množica

$$K(a, r) = \{x \in X \mid d(a, x) < r\}.$$

- **Zaprta krogla** s središčem v a in polmerom r je množica

$$K(a, r) = \{x \in X \mid d(a, x) \leq r\}.$$

- **Okolica** točke a je vsaka taka množica, ki vsebuje neko odprto kroglo $K(a, r)$ za nek $r > 0$.

Definicija 0.3. Naj bo (X, d) metrični prostor in $A \subset X$.

- Točka $a \in X$ je **notranja** točka množice A, če obstaja $r > 0$, da $K(a, r) \subset A$.
- Točka $a \in X$ je **zunanja** točka množice A, če obstaja $r > 0$, da $K(a, r) \cap A = \emptyset$.
- Točka $a \in X$ je **robna** točka množice A, če vsaka njena okolica seka A in A^c.

Definicija 0.4. Naj bo (X, d) metrični prostor in $A \subset X$.

- Množico $\operatorname{Int} A$ vseh notranjih točk množice A imenujemo **notranjost** od A.
- Množico $\operatorname{Cl} A$ vseh točk, za katere za vsak $r > 0$, krogla $K(a, r)$ seka A, imenujemo **zaprtje** množice A.
- Množico ∂A vseh robnih točk množice A imenujemo **meja** množice A.

Trditev 0.5. *Naj bo (X, d) metrični prostor in $A \subset X$. Velja:*

- $\partial A = \operatorname{Cl} A \setminus \operatorname{Int} A$.
- $\operatorname{Cl} A = \operatorname{Int} A \cup \partial A$.
- $\operatorname{Int} A = \operatorname{Cl} A \setminus \partial A$.

Definicija 0.6. Naj bo (X, d) metrični prostor in $A \subset X$.

- Množica A je **odprta** v metričnem prostoru X, če je vsaka njena točka notranja.
- Množica A je **zaprta** v metričnem prostoru X, če vsebuje vse svoje robne točke.

Trditev 0.7. *Naj bo (X, d) metrični prostor in $A \subset X$. Tedaj*

$$A \text{ je zaprta} \iff A^c \text{ je odprta}.$$

Izrek 0.8. *Naj bo U družina vseh odprtih množic metričnega prostora (X, d). Tedaj*

- $X \in U$, $\emptyset \in U$.
- *Če je $A_\lambda \in U$ za vsak $\lambda \in \Lambda$, potem $\bigcup_{\lambda \in \Lambda} A_\lambda \in U$.*
- *Če je $n \in \mathbb{N}$ in $A_j \in U$ za vsak $j = 1, 2, \ldots, n$, potem $\bigcap_{j=1}^{n} A_j \in U$.*

Trditev 0.9. *Vsaka odprta krogla je odprta množica in vsaka zaprta krogla je zaprta množica.*

Trditev 0.10. *Naj bo (X, d) metrični prostor in $A \subset X$. Tedaj*

$$A \text{ je odprta} \iff A \text{ lahko predstavimo kot unijo odprtih krogel.}$$

Definicija 0.11. Naj bo (X, d) metrični prostor in $A \subset X$. Točka $a \in X$ je **stekališče množice** A, če vsaka okolica točke a vsebuje neskončno mnogo točk iz množice A.

Trditev 0.12. *Naj bo (X, d) metrični prostor in $A \subset X$. Tedaj*

$$A \text{ je zaprta} \iff A \text{ vsebuje vsa svoja stekališča.}$$

Zaporedja v metričnih prostorih

Definicija 0.13. Naj bo (X, d) metrični prostor. **Zaporedje** v metričnem prostoru X je preslikava $\mathbb{N} \to X$.

Definicija 0.14. Naj bo (X, d) metrični prostor. Pravimo, da zaporedje $(a_n)_n$ v X **konvergira proti** $a \in X$, če

$$\forall \epsilon > 0 \,.\, \exists n_0 \in \mathbb{N} \,.\, \forall n \in \mathbb{N} \,.\, n \geq n_0 \implies d(a_n, a) < \epsilon.$$

V tem primeru a imenujemo **limita** zaporedja.

Definicija 0.15. Naj bo (X, d) metrični prostor. Pravimo, da zaporedje $(a_n)_n$ v X **izpolnjuje Cauchyjev pogoj**, če

$$\forall \epsilon > 0 \,.\, \exists n_0 \in \mathbb{N} \,.\, \forall n, m \in \mathbb{N} \,.\, n, m \geq n_0 \implies d(a_n, a_m) < \epsilon.$$

Izrek 0.16. *Vsako konvergentno zaporedje v metričnem prostoru (X, d) izpolnjuje Cauchyjev pogoj.*

Definicija 0.17. Pravimo, da je metrični prostor (X, d) **poln**, ce je vsako Cauchyjevo zaporedje iz X tudi konvergentno v X.

Izrek 0.18. *Naj bo $C[a, b]$ z običajno (supremum) metriko. Tedaj*

$$(f_n)_n \text{ v } C[a, b] \text{ konvergira k } f \in C[a, b] \iff (f_n)_n \text{ enakomerno konvergira k } f \text{ na } [a, b].$$

Izrek 0.19. *Metrični prostor $(C[a, b], d_\infty)$ je poln metrični prostor.*

Preslikave med metričnimi prostori

Naj bosta (X, d) in (X', d') metrična prostora. Naj bo $D \subset X$, $D \neq \emptyset$. Obravnamo preslikave $f : D \to X'$.

Definicija 0.20. Preslikava $f : D \to X'$ je **zvezna v točki** $a \in X$, če

$$\forall \epsilon > 0 \,.\, \exists \delta > 0 \,.\, \forall x \in D \,.\, d(x, a) < \delta \implies d'(f(x), f(a)) < \epsilon.$$

Izrek 0.21. *Preslikava $f : D \to X'$ je zvezna v točki $a \in D$ natanko tedaj, ko za vsako zaporedje $(x_n)_n$ v D, ki konvergira proti $a \in D$, zaporedje $(f(x_n))_n$ v X' konvergira proti $f(a) \in X'$.*

Definicija 0.22. Pravimo, da je preslikava $f : D \to X'$ je **zvezna**, če je zvezna v vsaki točki iz D.

Definicija 0.23. Preslikava $f : D \to X'$ je **enakomerno zvezna**, če

$$\forall \epsilon > 0 \,.\, \exists \delta > 0 \,.\, \forall x, x' \in D \,.\, d(x, x') < \delta \implies d'(f(x), f(x')) < \epsilon.$$

Definicija 0.24. Preslikava $f : D \to X'$ je C**-lipschitzova**, če

$$\forall x, x' \in D \,.\, d'(f(x), f(x')) \leq C d(x, x').$$

Trditev 0.25. *Za preslikavo $f : D \to X'$ velja:*

$$f \text{ je } C\text{-lipschitzova} \implies f \text{ je enakomerno zvezna} \implies f \text{ je zvezna.}$$

Izrek 0.26. *Dana je preslikava $f : D \to X'$. Preslikava f je zvezna natanko tedaj, ko praslika vsake odprte množice v X' je odprta v D.*

Izskaže se da konvergenco in zveznost (ključna pojma analize) lahko opredelimo, kakor hitro vemo, katere množice so odprte.

1 Prostori in preslikave

1.1 Topološki prostori

Topologija poda pojem *bližine* brez sklicevanja na implicitno funkcjio razdalja.

Definicija 1.1. Naj bo X množica. **Topologija** na množici X je družina $\mathcal{T} \subseteq P(X)$, ki zadošča naslednjim pogojem:
(T0) $\emptyset \in \mathcal{T}$, $X \in \mathcal{T}$.
(T1) Poljubna unija elementov $\mathcal{T}$ je element $\mathcal{T}$.
(T2) Poljuben končen presek elementov $\mathcal{T}$ je element $\mathcal{T}$.
Elemente $\mathcal{T}$ razglasimo za **odprte množice** v X.

Opomba 1.2. Aksiom (T2) zadošča preveriti za poljubne dve množice in uporabiti indukcijo.

Definicija 1.3. **Topološki prostor** je množica X z neko topologijo $\mathcal{T}$. Pišemo: $(X, \mathcal{T})$.

Definicija 1.4. Če za topologiji $\mathcal{T}$ in $\mathcal{T}'$ na X velja $\mathcal{T} \subseteq \mathcal{T}'$, pravimo, da je $\mathcal{T}'$ **finejša** od $\mathcal{T}$ in da je $\mathcal{T}$ **grobejša** od $\mathcal{T}'$.

Primer 1.5 (Topologija iz metrike)**.** Naj bo (X, d) metrični prostor. Definiramo

$$\mathcal{T}_d = \{\text{vse možne unije odprtih krogel}\}.$$

$\mathcal{T}_d$ je topologija, ki je **porojena (inducirana)** z metriko d.

Primer 1.6. V $\mathbb{R}^n$ lahko podamo evklidsko metriko. Pripadajočemu topološkemu prostoru pravimo **n-razsežni evklidski prostor**.

Definicija 1.7. Topološki prostor je **metrizabilen**, če je porojen z neko metriko.

Primer 1.8 (Trivialna topologija)**.** Naj bo X poljubna množica. Definiramo

$$\mathcal{T} = \{\emptyset, X\}.$$

Tedaj $\mathcal{T}$ je topologija, rečemo ji **trivialna topologija**. Trivialna topologija ni metrizabilna, če ima X vsaj 2 elementa, ker v metričnem prostoru z množico z vsaj 2 elementoma vedno lahko najdemo disjunktne odprte krogle.

Primer 1.9 (Diskretna topologija)**.** Naj bo X poljubna množica. Definiramo

$$\mathcal{T} = P(X).$$

Tedaj $\mathcal{T}$ je topologija, rečemo ji **diskretna topologija**. Je metrizabilna, ker inducirana z diskretno metriko.

Definicija 1.10. Naj bo $(X, \mathcal{T})$ topološki prostor in $A \subseteq X$. **Notranjost** množice A je največji element topolgije $\mathcal{T}$, ki je vsebovan v A. Oznaka: $\operatorname{Int} A$.

Trditev 1.11. $\operatorname{Int} A$ *je unija vseh odprtih množic, ki so vsebovane v A.*

Trditev 1.12. $\operatorname{Int} A$ *je množica vseh **notranjih točk** množice A, tj.*

$$\{x \in A \mid \exists U \in T \,.\, x \in U \subseteq A\}.$$

Definicija 1.13. Naj bo $(X, \mathcal{T})$ topološki prostor in $A \subseteq X$. Množica A je **zaprta**, če je $A^c = X - A \in \mathcal{T}$.

Opomba 1.14. Lahko topologijo vpeljemo tudi tako, da predpišemo, katere množice so zaprte. Denimo, da je dana družina Z podmnožic X, za katero velja:
(T0) $\emptyset \in Z$, $X \in Z$.
(T1) Poljuben presek elementov Z je element Z.
(T2) Poljubna končna unija elementov Z je element Z.
Potem komplementi množic iz Z tvorijo topologijo na X in Z je ravno družina zaprtih množic v tej topologiji.

Primer 1.15. Naj bo X poljubna množica. Družina

$$\mathcal{T} = \{U \subseteq X \mid X - U \text{ je končna}\} \cup \{\emptyset\}$$

je topologija na X. Tej topologiji rečemo **topologija končnih komplementov** $\mathcal{T}_{kk}$. Velja:

- Topologija končnih komplementov je najmanjša topologja v kateri vse točke zaprte.
- Če je X končna, potem $\mathcal{T}_{\text{kk}} = \mathcal{T}_{\text{disk}}$ na X.
- Če je X neskončna, potem $\mathcal{T}_{\text{kk}}$ ni metrizabilna, saj poljubni dve neprazni odprti množici imajo neprazen presek.

Definicija 1.16. Naj bo $(X, \mathcal{T})$ topološki prostor in $A \subseteq X$. **Zaprtje** množice A je najmanjša zaprta množica v X, ki vsebuje A. Oznaka: $\operatorname{Cl} A = \overline{A}$.

Trditev 1.17. $\operatorname{Cl} A$ *je presek vseh zaprtih množic, ki vsebujejo A, torej*

$$\operatorname{Cl} A = \bigcap\{F \in \mathcal{T} \mid A \subseteq F\}.$$

Trditev 1.18. $\operatorname{Cl} A$ *je množica vseh točk, vsaka okolica katerih seka A, tj.*

$$\operatorname{Cl} A = \{x \in X \mid \forall U \in \mathcal{T} \,.\, x \in U \implies U \cap A \neq \emptyset\}.$$

Primer 1.19. Velja:

- $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cup \overline{B}$. **Dokaz.** Definicija zaprtja.
- $\overline{A \cap B} \subseteq \overline{A} \cap \overline{B}$. **Dokaz.** Definicija zaprtja in $(\mathbb{N}, \mathcal{T}_{kk})$.

Definicija 1.20. Naj bo $(X, \mathcal{T})$ prostor in $A \subseteq X$. Točka $x \in X$ je **mejna** točka A, če vsaka okolica x seka A in A^c.

Definicija 1.21. Naj bo $(X, \mathcal{T})$ prostor in $A \subseteq X$. **Meja** množice A je množica vseh mejnih točk A.

Trditev 1.22. *Naj bo $(X, \mathcal{T})$ topološki prostor in $A \subseteq X$. Meja množice A je*

$$\operatorname{Fr} A = \operatorname{Cl} A - \operatorname{Int} A.$$

Opomba 1.23. Meja A je vedno zaprta množica, saj $\operatorname{Fr} A = \operatorname{Cl} A - \operatorname{Int} A = \operatorname{Cl} A \cap (\operatorname{Int} A)^c$.

1.2 Zvezne preslikave

1.2.1 Slike in praslike

Definicija 1.24. Naj bo $f : A \to B$ preslikava.
- **Praslika** podmnožice $S \in B$ je $f^*(S) := \{x \in A \mid f(x) \in S\}$.
- **Slika** podmnožice $T \in A$ je $f_*(T) := \{y \in B \mid \exists x \in T \,.\, f(x) = y\}$.

Trditev 1.25. *Naj bo $f : A \to B$ preslikava.*
- *Praslike so monotone: $S \subseteq T \subseteq B \implies f^*(S) \subseteq f^*(T)$.*
- *Slike so monotone: $X \subseteq Y \subseteq A \implies f_*(X) \subseteq f_*(Y)$.*

Trditev 1.26. *Praslike ohranjajo preseke in unije.*

Trditev 1.27. *Naj bo $f : A \to B$ in $T : I \to P(A)$. Tedaj je*

$$f_*(\bigcup_{i\in I} T_i) = \bigcup_{i\in I} f_*(T_i) \quad \textit{in} \quad f_*(\bigcap_{i\in I} T_i) \subseteq \bigcap_{i\in I} f_*(T_i).$$

Enakost velja, če je f injektivna.

Trditev 1.28. *Naj bo $f : A \to B$ preslikava. Za $S \subseteq B$ velja $f^*(S^c) = (f^*(S))^c$.*

Trditev 1.29. *Naj bo $f : A \to B$ preslikava, $S \subseteq A$, $T \subseteq B$. Velja:*
- $S \subseteq f^*(f_*(S))$.
- $f_*(f^*(T)) \subseteq T$.

1.2.2 Zvezne preslikave

Definicija 1.30. Naj bosta $(X, \mathcal{T}_X)$ in $(Y, \mathcal{T}_Y)$ topološka prostora. Preslikava $f : (X, \mathcal{T}_X) \to (Y, \mathcal{T}_Y)$ je **zvezna**, če je praslika vsake odprte množice odprta, tj. $\forall V \in \mathcal{T}_Y \,.\, f^*(V) \in \mathcal{T}_X$.

Primer 1.31. Primeri zveznih preslikav.
- Vse zvezne funkcije v smislu metričnih prostorov so zvezne kot funkcije med porojenimi topologijami.
- Naj bo $f : (X, \mathcal{T}_X) \to (Y, \mathcal{T}_Y)$.
  - Naj bo $\mathcal{T}_Y$ trivilna topologija, potem f je vedno zvezna.
  - Naj bo $\mathcal{T}_X$ diskretna topologija, potem f je vedno zvezna.
- Naj bosta $(X, \mathcal{T})$ in $(X, \mathcal{T}')$ topološka prostora. Funkcija $\mathrm{id} : X \to X'$ je zvezna natanko tedaj, ko $\mathcal{T}' \subseteq \mathcal{T}$.
- Če je $f : (X, \mathcal{T}_X) \to (Y, \mathcal{T}_Y)$ konstanta, tj. $\exists y_0 \in Y \,.\, \forall x \in X \,.\, f(x) = y_0$, potem je f zvezna.
- Naj bo $f : (\mathbb{R}, \mathcal{T}_{\mathrm{kk}}) \to (\mathbb{R}, \mathcal{T}_{\mathrm{evkl}})$. Potem konstante so edine zvezne funkcije.
- Naj bosta X, Y neskončni množici, d metrika na Y. Naj bo $f : (X, \mathcal{T}_{\mathrm{kk}}) \to (Y, \mathcal{T}_d)$. Potem
$$f \text{ je zvezna} \iff f \text{ je konstanta.}$$

Trditev 1.32. *Kompozitum preslikav je preslikava.*

Dokaz. Definicija zveznosti. □

Trditev 1.33. *Naj bosta X, Y prostora. Ekvivalentne so izjave za $f : X \to Y$:*
1. *f je zvezna.*
2. *Praslika z f vsake zaprte množice je zaprta.*
3. *$\forall A \subseteq X \,.\, f_*(\overline{A}) \subseteq \overline{f_*(A)}$.*

Dokaz. (1) $\iff$ (2). $f^*(A^c) = (f^*(A))^c$.
(2) $\iff$ (3). LMN: $A \subseteq \overline{f^*(f(A))}$, $f(f^*(B)) \subseteq B$. Monotonost f_*, f^*. STOP: $f^*(B)$ je zaprta $\iff$ $f^*(B) = \overline{f^*(B)}$. □

1.3 Homeomorfizmi

Definicija 1.34. Naj bo $f : (X, \mathcal{T}_X) \to (Y, \mathcal{T}_Y)$ funkcija. Funkcija f je **homeomorfizem**, če:
- f je bijekcija.
- f_* je bijekcija med $\mathcal{T}_X$ in $\mathcal{T}_Y$.

Definicija 1.35. Če obstaja homeomorfizem $f : (X, \mathcal{T}_X) \to (Y, \mathcal{T}_Y)$, potem rečemo, da sta prostora X in Y **homeomorfna**. Oznaka: $X \approx Y$.

Opomba 1.36. Homeomorfizem je ekvivalenčna relacija. To pomeni, da lahko dokažemo, da sta dva prostora homeomorfna, če pokažemo, da sta vsak od njih homeomorfen nekemu drugemu.

Definicija 1.37. Naj bosta $(X, \mathcal{T}_X)$ in $(Y, \mathcal{T}_Y)$ topološka prostora.
- Funkcija $f : (X, \mathcal{T}_X) \to (Y, \mathcal{T}_Y)$ je **odprta**, če je slika vsake odprte množice odprta.
- Funkcija f je **zaprta**, če je slika vsake zaprte množice zaprta.

Trditev 1.38. *Naslednje izjave o funkciji $f : X \to Y$ so ekvivalentne:*
1. *$f : X \to Y$ je homeomorfizem.*
2. *f je bijektivna, f in f^{-1} sta zvezni.*
3. *f je bijektivna, zvezna in odprta.*
4. *f je bijektivna, zvezna in zaprta.*

Dokaz. Očitne implikacije. □

Primer 1.39. Ali sta prostora $[0, 1) \cup \{2\}$ in $[0, 1]$ homeomorfna? Ali inverz zvezne bijekcije vedno zvezen?

Primer 1.40. Pokaži, da vsak interval (končen ali neskončen) homeomorfen enemu izmed $[0, 1]$, $[0, 1)$, $(0, 1)$.
Pokaži, da intervali $[0, 1]$, $[0, 1)$, $(0, 1)$ niso paroma homeomorfni (kompaktnost, povezanost).

Primer 1.41. Najboljša izbira za homeomorfizem $(-1, 1) \approx \mathbb{R}$ je $f : (-1, 1) \to \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{x}{1-|x|}$ in $g : \mathbb{R} \to (-1, 1)$, $g(x) = \frac{x}{1+|x|}$.

Definicija 1.42. Definiramo:
- $B^n := \{(x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n \mid ||\vec{x}|| \leq 1\}$ je **enotska n-krogla**.
- $\mathring{B}^n := \{(x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n \mid ||\vec{x}|| < 1\}$ je **odprta enotska n-krogla**.
- $S^{n-1} := \{(x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n \mid ||\vec{x}|| = 1\}$ je **enotska $(n-1)$-sfera**.

Primer 1.43. Kako lahko homeomorfizem med $(0,1)$ in $\mathbb{R}$ posplošimo do homeomorfizma med odprto kroglo $\mathring{B}^n$ in $\mathbb{R}^n$?

Primer 1.44. Zakaj sfera S^{n-1} v $\mathbb{R}^n$ topološko bolj podobna $\mathbb{R}^{n-1}$ kot $\mathbb{R}^n$? **Stereografska projekcija**.
Ali je S^{n-1} **lokalno homeomorfna** prostoru $\mathbb{R}^{n-1}$?

Definicija 1.45. Prostore, ki so lokalno homeomorfne kakemu evklidskemu prostoru, imenujemo **mnogoterosti**.

Oglejmo nekaj preslikav, ki jim v določenem smislu malo manjka do homeomorfizma.

Primer 1.46. Ali je $f : [0, 2\pi] \to S^1,\ f(t) = e^{it}$ zvezna in bijektivna? Ali je zaprta? Kaj to pove o f^{-1}?

Primer 1.47. Ali je projekcija $\mathrm{pr} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R},\ \mathrm{pr}(x, y) = x$ zaprta?

Pri dokazovanju, da dva prostora nista homeomorfna, igrajo kljucno vlogo topološke lastnosti.

Definicija 1.48. Topološka lastnost je katerakoli lastnost prostora, ki se ohranja pri homeomorfizmih.

Primer 1.49. Ali je omejenost in polnost topološki lastnosti?

Primer 1.50. Ali je možno, da $\mathbb{R} \approx \mathbb{R}^2$ (povezanost)? Ali enak sklep deluje za $\mathbb{R}^3$ in $\mathbb{R}^2$?

1.4 Baze in predbaze

1.4.1 Baza in lokalna baza

Lažje bi shajali, če bi zadoščalo preveriti zveznost ali odprtost preslikave na neki manjši in bolj obvladljivi družini podmnožic.

Definicija 1.51. Naj bo $(X, \mathcal{T})$ prostor, $x \in X$. Družina $\mathcal{B}_x \subseteq \mathcal{T}$, $\forall B \in \mathcal{B}_x \,.\, x \in B$ je **lokalna baza okolic** točke x, če za vsako odprto okolico $U \in \mathcal{T}$ točke x, obstaja $B \in \mathcal{B}_x$, da $x \in B \subseteq U$.

Opomba 1.52. Običajno prevzamemo, da so množice iz $\mathcal{B}_x$ okolice točke x. S tem lahko poskusimo si predstaviti, kako zgleda prostor okoli vsake točke.

Primer 1.53. V metričnem prostoru (X, d) je $\{K(x, r);\ r \in \mathbb{Q}\}$ lokalna baza pri x.

Definicija 1.54. Naj bo $(X, \mathcal{T})$ prostor. Družina $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{T}$ je **baza** topologije $\mathcal{T}$, če lahko vse elemente $\mathcal{T}$ zapišemo kot unije elementov $\mathcal{B}$.

Primer 1.55. Primeri baz. Ali so lahko baze majhne?
- Naj bo (X, d) metrični prostor. Krogle so baza metrične topologije $\mathcal{T}_d$. Tudi dovolj je, če vzamemo samo majhne krogle, npr. z radijem $\frac{1}{n}$.
- Če vzemimo $(X, \mathcal{T}_{\text{disk}})$, potem vsaka baza vsebuje vse enojčke.

Trditev 1.56. *Naj bo $(X, \mathcal{T})$ topološki prostor. Velja:*
- *Če je $\mathcal{B}$ baza topologije $\mathcal{T}$, potem je $B_x = \{B \in \mathcal{B} \mid x \in B\}$ je lokalna baza okolic x.*

- *Obratno:* $\mathcal{B} := \bigcup_{x \in X} \mathcal{B}_x$ *je baza topologije* X*.*

Dokaz. Definicija baze in lokalne baze okolic. □

Pri računanju je ključno, da za bazo izberimo dovolj majhne in obvladljive okolice ter da potem na bazi preskusimo, ali veljajo določene lastnosti.

Trditev 1.57. *Naj bo* $\mathcal{B}$ *baza prostora* $(X, \mathcal{T})$*,* $\mathcal{B}'$ *baza prostora* $(X', \mathcal{T}')$ *in* $f : X \to X'$ *poljubna funkcija. Velja:*

1. $U \subseteq X$ *je odprta* $\iff \forall x \in U \,.\, \exists B \in \mathcal{B} \,.\, x \in B \subseteq U$*.*
2. f *je zvezna* $\iff \forall B' \in \mathcal{B}' \,.\, f^*(B') \in \mathcal{T}$*.*
3. f *je odprta* $\iff \forall B \in \mathcal{B} \,.\, f_*(B) \in \mathcal{T}'$*.*

Dokaz. Slike in praslike ohranjajo unije. □

Primer 1.58. Ali je $f : S^1 \to S^1 \subseteq \mathbb{C}$ (enotska kompleksna števila), $f(z) = z^2$ odprta?

1.4.2 Topologija generirana z bazo

Pojem baze nam ponuja alternativno pot za vpeljavo topologije na neki množici: izberemo družino podmnožic $\mathcal{B}$ v X in za odprte razglasimo vse podmnožice X, ki so unije elementov B. Vprašanje je, ali tako definirane odprte množice zadoščajo pogojem za topologijo? Izskaže se, da družine $\mathcal{B}$ ne smemo izbrati povsem poljubno.

Trditev 1.59. *Naj bo* $\mathcal{B}$ *družina podmnožic* X*, ki ustreza pogojema*

1. *Unija elementov* $\mathcal{B}$ *je cel* X *(pravimo, da je* $\mathcal{B}$ ***pokritje*** *za* X*).*
2. *Za vse* $B_1, B_2 \in \mathcal{B}$*, za vse* $x \in B_1 \cap B_2$*, obstaja tak* $B_x \in \mathcal{B}$*, da* $x \in B_x \subseteq B_1 \cap B_2$*.*

Tedaj je družina vseh možnih unij elementov iz $\mathcal{B}$ *topologija na* X*. Rečemo, da je* ***topologija*** $\mathcal{T}$ ***generirana z bazo*** $\mathcal{B}$*.*

Dokaz. Enostavno preverimo lastnosti. □

Primer 1.60. Naj bosta $(X, \mathcal{T}), (X', \mathcal{T}')$ topologiji. Ali obstaja kak naraven način za vpeljavo topologije na $X \times X'$?

Definicija 1.61. Produktna topologija $\mathcal{T}_{X \times X'}$ je topologija, ki jo kot baza generirana družina $\{U \times U' \,|\, U \in \mathcal{T}, U' \in \mathcal{T}'\}$.

Opomba 1.62. Če sta $\mathcal{B}$ in $\mathcal{B}'$ bazi topologij $\mathcal{T}$ in $\mathcal{T}'$, potem se hitro prepričamo, da tudi družina $\{U \times U' \,|\, U \in \mathcal{B}, U' \in \mathcal{B}'\}$ generira produtno topologijo.

Primer 1.63. Kaj generira produktno topologijo na $\mathbb{R}^2 = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$? Ali je dobljena topologija ekvivalentna evklidske?

Trditev 1.64. *Naj bo* $(X \times Y, \mathcal{T}_{X \times Y})$ *produktna topologija. Projekciji* $\mathrm{pr}_x : X \times Y \to X$*,* $\mathrm{pr}_y : X \times Y \to Y$ *sta zvezni in odprti.*

Primer 1.65. Naj bo $\mathrm{pr}_1 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$. Ali je pr_1 zaprta (graf funkcije $f(x) = \frac{1}{x}$)?

1.4.3 Predbaza

Včasih imamo neko družino podmnožic X, recimo $\mathcal{P}$, ki jih želimo razglasiti za odprte. Kaj je najmanjša topologija $\mathcal{T}$ na X, ki vsebuje $\mathcal{P}$?

Trditev 1.66. *Naj bo $\mathcal{P}$ poljubna družina podmnožic X. Če je $\mathcal{P}$ pokritje X, potem je $\mathcal{T}$ topologija, ki jo kot baza generirajo končni preseki elementov $\mathcal{P}$. Pravimo, da je $\mathcal{P}$* ***predbaza topologije*** *$\mathcal{T}$.*

Dokaz. Družina vseh končnih presekov elementov $\mathcal{P}$ ustreza pogoju (2) za bazo. □

Opomba 1.67. Družina $\mathcal{T}$ vseh množic, ki jih lahko zapišemo kot unije končnih presekov množic iz $\mathcal{P}$ je najmanjša topologija na X, ki vsebuje vse množice iz $\mathcal{P}$.

Pojem predbaze nam ponuja zelo učinkovit način za definicijo topologije, ki ustreza nekemu pogoju. Poleg tega lahko na predbazi testiramo tudi zveznost preslikave.

Trditev 1.68. *Naj bosta $(X, \mathcal{T}_X), (Y, \mathcal{T}_Y)$ prostora. Naj bo $\mathcal{P}$ predbaza $\mathcal{T}_Y$. Velja:*

$$\text{Funkcija } f : X \to Y \text{ je zvezna} \iff \forall B \in \mathcal{P} \,.\, f^*(B) \in \mathcal{T}_X.$$

Dokaz. Enostavno. □

Pozor! Odprtost funkcije f v splošnem ne moremo testirati na predbaze. Saj slike ne ohranjajo preseke.

Primer 1.69. Kako lahko na produktu prostorov $X \times Y$ definiramo najmanjšo topologijo, ki ustreza pogoju, da sta projekciji $\mathrm{pr}_x : X \times Y \to X$, $\mathrm{pr}_y : X \times Y \to Y$ zvezni? Čemu je enaka ta topologija?

Primer 1.70. Kako lahko definiramo topologijo za poljubne produkte (poljubno mnogo faktorjev)?

Trditev 1.71. *Naj bodo X, Y, Z prostori. Velja:*

$$\text{Funkcija } f : X \to Y \times Z,\ f = (f_Y, f_Z) \text{ je zvezna} \iff f_Y, f_Z \text{ sta zvezni.}$$

Dokaz. ($\implies$) Komponenti sta kompozitum zveznih funkcij.
($\Leftarrow$) Poglejmo prasliko predbaznih množic. □

1.4.4 Aksiomi števnosti

Baze lahko uporabimo za neko grobo oceno velikosti topološkega prostora in bogatstva njegove topologie.

Definicija 1.72 (1. aksiom števnosti)**.** Naj bo $(X, \mathcal{T})$ prostor. Vsaka točka $x \in X$ ima števno bazo okolic.
Rečemo, da je prostor $(X, \mathcal{T})$ **1-števen**.

Primer 1.73. Metrični prostori so 1-števni.

Definicija 1.74 (2. aksiom števnosti)**.** Naj bo $(X, \mathcal{T})$ prostor. Obstaja kaka števna baza za topologijo $\mathcal{T}$.
Rečemo, da je prostor $(X, \mathcal{T})$ **2-števen**.

Primer 1.75. $\mathbb{R}$ je 2-števen, ker za bazo lahko vzamemo družino vseh intervalov z racionalnimi krajšči.
Podobno je tudi $\mathbb{R}^n$ 2-števen.

Opomba 1.76. Očitno, da 2-števnost implicira 1-števnost.

Primer 1.77. Neštevna množica z diskretno topologijo je 1-števna (metrizabilna), ni pa 2-števna, ker vsaka baza mora vsebovati vsi enojci.

Trditev 1.78. *Naj bo prostor $(X, \mathcal{T})$ 1-števen. Velja:*
1. *Za vsako množico $A \subseteq X$ je $\overline{A} = L(A) = \{x \mid x \text{ je limita zaporedja v } A\}$.*
2. *Funkcija $f : (X, \mathcal{T}_X) \to (Y, \mathcal{T}_Y)$ je zvezna $\iff f(L(A)) \subseteq L(f(A))$.*

Dokaz. (1) Konstruiramo zaporedje s pomočjo števne baze okolic.
(2) TODO. □

1.4.5 Separabilnost

Definicija 1.79. Podmnožica A je **povsod gosta** v X, če seka vsako odprto množico X, ali ekvivalentno, če je $\overline{A} = X$.

Definicija 1.80. Prostor $(X, \mathcal{T})$ je **separabilen**, če v X obstaja števna gosta podmnožica.

Primer 1.81. $\mathbb{Q}$ v $\mathbb{R}$ ali $\mathbb{Q}^n$ v $\mathbb{R}^n$.

Trditev 1.82. *2-števnost implicira separabilnost.*

Dokaz. Iz vsake bazične okolice izberimo po eni točki □

Opomba 1.83. Ali separabilnost in 1-števnost implicira 2-števnost? Ne. (?)

Izrek 1.84. *Metrični prostor (X, d) je 2-števen natanko takrat, ko v njem obstaja števna povsod gosta podmnožica.*

Dokaz. TODO □

Opomba 1.85. V metričnih prostorih je 2-števnost ekvivalentna separabilnosti, slednjo pa je pogosto lažje dokazati (ali ovreči).

1.5 Podprostori

1.5.1 Podprostori

Poljubno podmnožico metričnega prostora lahko opremimo z metriko tako, da funkcijo razdalje preprosto zožimo na točke podmnožice. Tako dobimo metrični podprostor. Podobno ravnamo pri topoloških prostorih in vzamemo zožitve odprtih množic na dano podmnožico.

Naj bo $(X, \mathcal{T})$ prostor, $A \subseteq X$. Definiramo $\mathcal{T}_A := \{A \cap U \mid U \in T\}$.

Trditev 1.86. *$\mathcal{T}_A$ topologija na A.*

Definicija 1.87. Topologiji $\mathcal{T}_A$ pravimo **inducirana** (oz. **podedovana**) topologija na A. Prostor $(A, \mathcal{T}_A)$ je **podprostor** prostora $(X, \mathcal{T})$.

Primer 1.88. Podprostori.

- Evklidska topologija na $\mathbb{R}$ je inducirana z evklidsko topologijo na $\mathbb{R}^2$.
- Vzemimo $\mathbb{N} \subseteq (\mathbb{R}, \mathcal{T}_{\text{evkl}})$. Kakšna je inducirana topologija?
- Naj bo d metrika na X. Pokaži, da $(\mathcal{T}_d)_A = \mathcal{T}_{(d|_A)}$.
- Naj bo $B \subseteq A \subseteq (X, \mathcal{T})$. Pokaži, da $\mathcal{T}_B = (\mathcal{T}_A)_B$, tj. podprostor podprostora spet podprostor.

Opomba 1.89. Pri delu s podprostori moramo upoštevati, da so topološki pojmi praviloma odvisni od tega, v katerem prostoru jih gledamo.

Trditev 1.90. *Naj bo $(X, \mathcal{T})$ prostor in $(A, \mathcal{T}_A)$ njegov podprostor.*

1. *Če je $\mathcal{B}$ neka baza topologije $\mathcal{T}$, potem je $\mathcal{B}_A := \{A \cap B \mid B \in \mathcal{B}\}$ baza topologije $\mathcal{T}_A$. Analogna trditev velja za predbaze.*
2. *Množica $B \subseteq A$ je zaprta v topologiji $\mathcal{T}_A$, če in samo če je $F = A \cap F$ za neko množico F, ke je zaprta v topologiji $\mathcal{T}$.*
3. *Veljajo formule:*
   - $\operatorname{Cl}_A B = A \cap \operatorname{Cl}_X B$.
   - $\operatorname{Int}_A B \supseteq A \cap \operatorname{Int}_X B$.
   - $\operatorname{Fr}_A B \subseteq A \cap \operatorname{Fr}_X B$.

Dokaz. TODO □

Primer 1.91. Naj bo $X = \mathbb{R}$ in $A = [0, 1)$. Izračunaj notranjost, zaprtje in mejo A v $\mathbb{R}$ in v $[0, 1)$.

Množica, ki je odprta v podprostoru, ni nujno odprta v celem prostoru: na primer množica A, ki ni odprta v X, je vendarle odprta v sami sebi. Te teževa izognemo, če je A odprta v X. Torej

Trditev 1.92. *Naj bo $(X, \mathcal{T})$ prostor in $(A, \mathcal{T}_A)$ njegov podprostor.*

1. *Podmnožica odprtega podprostora odprta natanko tedaj, ko je odprta v celem prostoru.*
2. *Podmnožica zaprtega podprostora zaprta natanko tedaj, ko je zaprta v celem prostoru.*

Primer 1.93. Naj bo $(X, \mathcal{T})$ prostor, $A \subseteq X$, $i : (A, \mathcal{T}_A) \hookrightarrow (X, \mathcal{T})$ inkluzija.

- Ali je i zvezna?
- Kaj lahko povemo o topologiji $\mathcal{T}_A$?
- Ali je zožitev zvezne funkcije $f : X \to (Y, \mathcal{T}')$ zvezna? Kaj velja za razširitev?

1.5.2 Dednost

Definicija 1.94. Topološka lastnost je **dedna**, če iz prevzetka, da $(X, \mathcal{T})$ ima to lastnost sledi, da jo imajo tudi vsi podprostori.

Primer 1.95. Pokaži, da

- Diskretnost in trivialnost topologije sta dedni.
- 1-števnost in 2-števnost sta dedni.
- Metrizabilnost je dedna.
- Separabilnost ni dedna.

Opomba 1.96. Odprt podprostor separabilnega podprostora je separabilen.

1.5.3 Odsekoma definirane funkcije

Funkcije pogosto definiramo odsekoma, na primer: funkcijo na $\mathbb{R}$ lahko podamo z različno formulo na intervalih $[n, n+1]$ za $n \in \mathbb{Z}$. Tako podana funkcija je zvezna, če je zvezna na vsakem intervalu posebej in če se sosednji definiciji ujemata v skupnem krajišču. Pri splošnih topoloških prostorih lahko podamo zvezne predpise na vseh množicah nekega pokritja in poskrbimo, da se definicije na presekih ujemajo.

Definicija 1.97. Naj bo $\{X_\lambda\}$ pokritje X. Za družino $f_\lambda : X_\lambda \to Y$ rečemo, da je **usklajena**, če je $f_{\lambda|X_\lambda \cap X_\mu} = f_{\mu|X_\lambda \cap X_\mu}$ za poljubna indeksa λ, μ.

Trditev 1.98. *Vsaka usklajena družina določa funkcijo $f : X \to Y$, za katero je $f_{|X_\lambda} = f_\lambda$.*

Lema 1.99. *Naj bo $\{X_\lambda\}$ odprto pokritje X. Tedaj je $A \subseteq X$ odprta natanko tedaj, ko je $X_\lambda \cap A$ odprta v X_λ za vse λ.*

Dokaz. TODO □

Definicija 1.100. Pokritje $\{X_\lambda\}$ za X je **lokalno končno**, če za vsako točko $x \in X$ obstaja okolica, ki seka le končno mnogo različnih X_λ.

Primer 1.101. Ugotovi, ali je pokritje lokalno končno:
- Končna pokritja.
- $X = \mathbb{R}$, pokritje z $\{[n, n+1] \mid n \in \mathbb{Z}\}$.
- $X = \mathbb{R}$, pokritje z $\{[n, \infty) \mid n \in \mathbb{Z}\}$.
- $X = \mathbb{R}$, pokritje z enojčki.

Lema 1.102. *Naj bo $\{X_\lambda\}$ zaprto pokritje X, ki je lokalno končno. Tedaj je $A \subseteq X$ zaprta natanko tedaj, ko je $X_\lambda \cap A$ zaprta v X_λ za vse λ.*

Formuliramo osnovni izrek o odsekoma definiranih preslikavih.

Izrek 1.103. *Naj bo $\{X_\lambda\}$ pokritje za X, ki je bodisi odprto bodisi lokalno končno in zaprto. Tedaj vsaka usklajena družina preslikav $f_\lambda : X_\lambda \to Y$ enolično določa preslikavo $f : X \to Y$, za katero je $f_{|X_\lambda} = f_\lambda$.*

Dokaz. Dovolj, da preverimo zveznost. □

Posledica 1.104. *Naj bo $\{X_\lambda\}$ pokritje za X, ki je bodisi odprto bodisi lokalno končno in zaprto. Tedaj je funkcija $f : X \to Y$ zvezna natanko tedaj, ko so zvezne vse zožitve $f_{|X_\lambda}$.*

1.5.4 Vložitve

Podprostori znanih prostorov so naravni vir mnogih zanimivih topoloških prostorov. Pogosto pa si želimo tudi kak abstrakto ustvarjen prostor obravnavati kot podprorostor nekega znanega prostora in v ta namen moramo preveriti, ali se abstraktno definirana topologja ujema s podedavano topologijo.

Primer 1.105. Naj bo $X = \{x_0, x_1, x_2, \ldots\}$ števna množica, opremljena z diskretno topologijo. Naj bo $f : \mathbb{N}_0 \to \mathbb{R}$ preslikava. Ali je topologija na X ujema z topologijo, ki jo slika f podeduje od $\mathbb{R}$, če
- $f(x_k) = k$.

- $g(x_k) = \begin{cases} 0; & k = 0 \\ \frac{1}{k}; & k \neq 0 \end{cases}.$

Opomba 1.106. Primer pokaže, da če nek prostor lahko enačimo s podmnožico nekega drugega prostora, to še ne pomeni, da ga lahko gledamo kot podprostor.

Definicija 1.107. Preslikava $f : X \to Y$ je **vložitev**, če je f homeomorfizem med X in $f_*(X)$ (glede na od Y podedovano topologijo).

Opomba 1.108. Potreben primer za homeomorfizem je injektivnost preslikave f.

Preslikava $f : X \to f_*(X)$ mora biti odprta (in zaprta) preslikava glede na podedovano topologijo na $f_*(X)$, kar pa v splošnem ni v zvezi z odprtostjo (ali zaprtostjo) preslikave $f : X \to Y$. Pomembna izjema so primeri, ko je $f_*(X)$ odprt ali zaprt v Y.

Trditev 1.109. *Naj bo $f : X \to Y$ injektivna preslikava.*
- *Če je $f(X)$ odprt v Y, potem je f vložitev natanko tedaj, ko je preslikava $f : X \to Y$ odprta.*
- *Če je $f(X)$ zaprt v Y, potem je f vložitev natanko tedaj, ko je preslikava $f : X \to Y$ zaprta.*

Primer 1.110. Ugotovi, ali je vložitev:
- Preslikava, ki odprti interval navije na „osmico'"(zaprtost).
- Preslikava $g : (-\pi, \pi) \to \mathbb{C}$, $g(x) = e^{ix}$ (odprtost).
- Naj bo A zaprta in imejena podmnožica v $\mathbb{R}^n$. Kmalu bomo pokazali, da je vsaka preslikava $f : A \to \mathbb{R}^m$ zaprta, torej je vsaka injektivna preslikava iz A v $\mathbb{R}^m$ vložitev.

2 Topološki lastnosti

Topološki prostori predstavljajo zelo splošen okvir, v katerega lahko umestimo velik del matematike, v katerem nastopa neko abstraktno pojmovanje bližine ali sorodnosti. Prav zaradi te širine v splošnih topoloških prostorih ne velja praktično nobeden od izrekov, ki smo jih vajeni iz evklidskih ali metričnih prostorov. Zato je pomembno ugotoviti, ali katere dovolj preprostre lastnosti zagotavljajo bolj normalno obnašanje, tako, ki bi omogočalo smiselno posplošitev rezultatov, ki jih poznamo iz metričnih prostorov.

Druga pomembna uporaba topoloških lastnosti je pri razločevanju prostorov. Za dokaz, da sta dva prostora homeomorfna, zadošča poiskati homeomorfizem med njima. Kako pa naj preskusimo vse možne preslikave med dvema prostoroma, za katera se nam zdi, da nista homeomorfna?

2.1 Ločljivost

2.1.1 Ločljivost

Definicija 2.1. Za topologjo $\mathcal{T}$ na množici X pravimo, da *loči* podmnožico $A \subseteq X$ od pomnožice $B \subseteq X$, če obstaja $U \in \mathcal{T}$, za katero je $A \subseteq U$ in $B \cap U = \emptyset$.

Definicija 2.2. Za topologjo $\mathcal{T}$ na množici X pravimo, da *ostro loči* podmnožici $A \subseteq X$ in $B \subseteq X$, če obstajata $U, V \in \mathcal{T}$, za kateri je $A \subseteq U,\ B \subseteq V$ in $U \cap V = \emptyset$.

Primer 2.3. Ugotovi kako trivialna in diskretna topologija ločita podmnožici.

Primer 2.4. Ali obstaja topologija, ki loči množico A od točke, ki je v zaprtju A? Med kakšnimi podmnožicami je smiselno opazovati ločljivost?

Primer 2.5. Ali lahko podmnožici v prostoru ločeni, ne da bi bili ostro ločeni (topologija končnih komlementov)?

2.1.2 Hausdorffova in Frechetova lastnosti

Definicija 2.6. Za prostor $(X, \mathcal{T})$ pravimo, da je *Hausdorffov*, če $\mathcal{T}$ ostro loči vsaki dve različni točki X.

Primer 2.7. Ugotovi, ali so Hausdorffovi
- Metrični prostori.
- Prostori opremljeni s trivialno topologjo, in neskončni prostori, opremljeni s topologijo končnih komplementov.

Trditev 2.8. *Ekvivalentne so naslednje izjave:*
1. *X je Hausdorffov.*
2. *$\forall x \in X \,.\, \bigcap_{U \in \mathcal{U}} \overline{U} = \{x\}$, kjer je $\mathcal{U}$ družina vseh okolic x (ekvivalentno $x \neq y \implies \exists U \in \mathcal{T} \,.\, x \in U \wedge y \notin \overline{U}$).*
3. Diagonala $\Delta = \{(x, x) \in X \times X \mid x \in X\}$ *je zaprt podprostor produkta $X \times X$.*

Dokaz. Pokažemo, da (1) $\iff$ (2) in (1) $\iff$ (3). $\square$

Izrek 2.9. *Naj bo prostor Y Hausdorffov. Velja:*

1. *Vsaka končna podmnožica Y je zaprta. Posebej, točke so zaprte.*
2. *Točka y je stekališče množice $A \subseteq Y$ natanko tedaj, ko vsaka okolica Y vsebuje neskončno točk iz A.*
3. *Zaporedje v Y ima največ eno limito.*
4. *Množica točk ujemanja $\{x \in X \mid f(x) = g(x)\}$ je zaprta v X za poljubni preslikavi $f, g : X \to Y$.*
5. *Če se preslikavi $f, g : X \to Y$ ujemata na neki gosti podmnožici X, potem je $f = g$.*
6. *Graf preslikave $f : X \to Y$ je zaprt podprostor produkta $X \times Y$.*

Dokaz. TODO □

Izrek 2.10. *Naj bo prostor X 1-števen, prostor Y pa Hausdorffov. Potem je funkcija $f : X \to Y$ zvezna natanko takrat, ko za vsako konvergentno zaporedje (x_n) v X velja* $\lim f(x_n) = f(\lim x_n)$.

Definicija 2.11. Prostor $(X, \mathcal{T})$ je *Frechetov*, če $\mathcal{T}$ vsako točko X loči od vsake druge točke X.

Opomba 2.12. V Frechetovem prostoru lahko za vsak par različnih točk najdemo okolico ene, ki ne vsebuje druge. V Hausdorffovem prostoru pa lahko okolici izberemo tako, da sta disjunktni.

Primer 2.13. Ugotovi, ali je Frechetov

- Vsak Hausdorffov prostor.
- Prostor z trivialno topologjo.
- Neskončen prostor s topologijo končnih komplementov.

Trditev 2.14. *Prostor X je Frechetov natanko tedaj, ko so vse enojčki zaprte.*

Dokaz. TODO □

Opomba 2.15. Topologija je Frechetova natanko tedaj, ko vsebuje topologijo končnih komplementov.

Trditev 2.16. *Velja:*

1. *Hausdorffova in Frechetova lastnost sta dedni.*
2. *Hausdorffova in Frechetova lastnost sta* multiplikativni *(če X, Y imata lastnost, potem jo ima tudi $X \times Y$).*

Dokaz. TODO □

2.1.3 Regularnost in normalnost

Ostrejše zahteve za ločljivost dobimo, če točke nadomestimo z zaprtimi množicami.

Definicija 2.17. Prostor $(X, \mathcal{T})$ je *regularen* če je Frechetov in če $\mathcal{T}$ ostro loči točke od zaprtih množic.

Definicija 2.18. Prostor $(X, \mathcal{T})$ je *normalen*, če je Frechetov in če $\mathcal{T}$ ostro loči disjunktne zaprte množice.

Opomba 2.19. Ker so v Frechetovem prostoru točke zaprte velja: Noramalnost $\implies$ Regularnost $\implies$ Hausdorff.

Primer 2.20. Naj bo $\mathcal{T} \subseteq \mathcal{T}'$, $\mathcal{T}$ normalna. Kaj lahko povemo o $\mathcal{T}'$? Pokaži, da Hausdorff $\not\Rightarrow$ Regularnost.

Trditev 2.21. *Vsak metričen prostor je normalen.*

Dokaz. TODO $\square$

Trditev 2.22. *Velja:*

1. *Regularnost je dedna.*
2. *Zaprt podprostor normalnega prostora je normalen.*

Dokaz. TODO $\square$

Izrek 2.23 (Izrek Tihonova)**.** *Prostor, ki je regularen in 2-števen je normalen.*

Dokaz. TODO $\square$

Opomba 2.24. Iz izreka sledi, da je poljuben podprostor normalnega 2-števnega prostora normalen. Podobno je tudi produkt 2-števnih normalnih prostorov normalen.

Opomba 2.25. Normalnost v splošnem ni dedna in ni multiplikativna.

2.1.4 Aksiomi ločljivosti

Različne stopnje ločljivosti je mogoče sistematično predstaviti kot zaporedje vedno ostrejših zahtev.

Definicija 2.26. *Aksiomi ločljivosti* je ime za zaporedje T_0, T_1, T_2, T_3, T_4 pogojev za ločljivost topologije, ki naj jim zadošča nek prostor. Če prostor $(X, \mathcal{T})$ zadošča pogoju T_i, pravimo, da je X T_i-prostor, in pišemo $X \in \mathcal{T}_i$.

X je T_0: Za različni točki $x, x' \in X$ obstaja okolica ene izmed točk x, x', ki jo loči od druge točke.

X je T_1: Za različni točki $x, x' \in X$ obstaja okolica x, ki jo loči od x' in obenem obstaja okolica točke x', ki jo loči od x.

X je T_2: Za različni točki $x, x' \in X$ obstajata okolici, ki ostro ločita x in x'.

X je T_3: Za točko $x \in X$ in zaprto množico $A \subseteq X$, ki ne vsebuje x, obstajata okolici, ki ostro ločita x in A.

X je T_4: Za disjunktni zaprti množici $A, B \subseteq X$ obstajata okolici, ki ostro ločita A in B.

Opomba 2.27. T_1 je Frechetova lastnost, T_2 je Hausdorffova lastnost. Regularnost je $T_1 + T_3$, normalnost je $T_1 + T_4$.

Trditev 2.28. *Prostor X ima lastnost T_3 natanko tedaj, ko za vsak $x \in X$ in vsako odprto okolico U za x obstaja taka odprta množica V, da velja $x \in V \subseteq \overline{V} \subseteq U$.*

Opomba 2.29. Ker v alternativni formulaciji govorimo le o okolicah točke x, pravimo, da smo podali lokalni opis lastnosti T_3 (in s tem tudi loklani opis regularnosti).

Dokaz. TODO $\square$

Trditev 2.30. *Lastnost T_3 je multiplikativna.*

Dokaz. TODO $\square$

Posledica 2.31. *Produkt regularnih prostorov je regularen.*

Trditev 2.32. *Prostor X ima lastnost T_4 natanko tedaj, ko za vsako zaprto podmnožico $A \subseteq X$ in vsako odprto okolico U za A obstaja taka odprta množica V, da velja $A \subseteq V \subseteq \overline{V} \subseteq U$.*

Dokaz. TODO □

2.2 Povezanost

Število ločenih kosov je ena najnazornejših lastnosti geometričnega objekta.

Primer 2.33.

- Graf funkcije $f(x) = \frac{1}{x}$ ima dva dela. Komplement tega grafa v $\mathbb{R}^2$ pa razpade na tri dele.
- Če je K enostavno sklenjena krivulja v ravnini, potem Jordanov izrek pravi, da razpade $\mathbb{R}^2 - K$ na dva dela. Če je pa K enostavna, nesklenjena krivulja, potem ima $\mathbb{R}^2 - K$ le en del.
- Lakes of Wada (TODO)

Definicija 2.34. *Razcep* prostora X je zapis X kot disjunktne unije dveh nepraznih odprtih množic. Če prostor dopušča kakšen razcep, pravimo, da je *nepovezan*, v nasprotnem primeru pa pravimo, da je *povezan*.

Trditev 2.35. *Naslednje trditve so ekvivalentne:*

1. *Prostor X je nepovezan.*
2. *Prostor X je disjunktna unija dveh nepraznih zaprtih podmnožic.*
3. *Obstaja prava, neprazna, odprto-zaprta podmnožica $A \subseteq X$.*
4. *Obstaja surjektivna preslikava $f : X \to \{0,1\}^{disk}$.*

Dokaz. Definicija nepovezanosti. Odprto pokritje. □

Izrek 2.36. *Naj bo $X \subseteq \mathbb{R}$. Velja:*

$$X \text{ je povezan} \iff X \text{ je interval.}$$

Dokaz. Naj bo $I \subseteq \mathbb{R}$. I je interval natanko takrat, ko $\forall x, y \in I \,.\, \forall z \in \mathbb{R} \,.\, x \leq z \leq y \implies z \in I$. □

Izrek 2.37. *Zvezna slika povezanega prostora je povezan prostor.*

Dokaz. S protislovjem. □

Opomba 2.38. Povezanost je topološka lastnost.

Izrek 2.39 (Izrek o vmesni vrednosti)**.** *Naj bo X povezan prostor. Če je funkcija $X \to \mathbb{R}$ zvezna, potem $f_*(X)$ je interval.*

Posledica 2.40. *Naj bo X povezan prostor. Če je funkcija $X \to \mathbb{R}$ zvezna in zaloga vrednosti f vsebuje pozitivne in negativne vrednosti, potem f ima ničlo.*

Izrek 2.41. *Naj bo X prostor. Zadostni pogoji za povezanost:*

- *Naj bo $\{A_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$ družina povezanih podmnožic X in $\bigcap A_\lambda \neq \emptyset$. Potem $\bigcup A_\lambda$ je povezan.*

- *Topološki produkt povezanih prostorov je povezan.*
- *Če za poljubna $a, b \in X$ obstaja pot od a do b, kjer* pot v X *je preslikava $\gamma : [0,1] \to X, \gamma(0) = a, \gamma(1) = b$, potem X je povezan.*
- *Naj bo $A \subseteq X$ povezan. Če za $B \subseteq X$ velja, da $A \subseteq B \subseteq \overline{A}$, potem B je povezan.*

Dokaz. Definicija in karakterizacija nepovezanosti. □

Primer 2.42.
- Vsaka konveksna podmnožica v $\mathbb{R}^n$ je povezana. Tudi vsaka zvezdasta podmožica v $\mathbb{R}^n$ je povezana.
- Komplement končne množice v $\mathbb{R}^n$, $n \geq 2$ je povezan.

  Posledica 2.43. *Premica $\mathbb{R}$ ni homeomorfna prostoru $\mathbb{R}^n$ za $n \geq 2$.*

- Komplement števne množice v $\mathbb{R}^n$, $n \geq 2$ je povezan.

Primer 2.44 (Varšavski lok)**.** Naj bo $L \subseteq \mathbb{R}^2$ graf funkcije $f(x) = \sin \frac{\pi}{x}$ za $x \in [-1, 0)$. Prostor L je povezan, saj je homeomorfen intervalu $[-1, 0)$. Njegovo zaprtje v ravnini je $\overline{L} = L \cup (\{0\} \times [-1, 1])$. Po izreku je prostor $\overline{L}$ povezan, vendar iz točke $(-1, 0)$ ne moremo zvezno priti do točke $(0, 0)$. Prostor $\overline{L}$ imenujemo *varšavski lok.*

Definicija 2.45. Prostor X je *povezan s potmi*, če med poljubnima $a, b \in X$ obstaja pot v X od a do b.

Lastnosti povezanosti s potmi so podobne lastnostim povezanosti:
- Povezanost s potmi je topološka lastnost.
- Zvezna slika povezanega s potmi prostora je povezana s potmi.
- Prostor, ki je povezan s potmi, je povezan.
- Če je $\{A_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$ družina povezanih s potmi podmnožic X in $\bigcap A_\lambda \neq \emptyset$. Potem $\bigcup A_\lambda$ je povezan s potmi.
- Zaprtje s potmi povezanega prostora v splošnem **ni** povezano s potmi.

2.2.1 Komponente

Zdaj, ko smo razčistili, kateri prostori so povezani, se lotimo vprašanja, kaj so „kosi“, na katere razpade nepovezan prostor.

Definicija 2.46. *Komponenta $C(x)$* točke $x \in X$ je unija vseh povezanih podmnožic X, ki vsebujejo x.

Opomba 2.47.
- $x \in C(x)$.
- $C(x)$ je povezana.
- $C(x)$ je maksimalna povezana podmnožica v X izmed vseh povezanih podmnožic X, ki vsebujejo x.
- $C(x)$ je zaprta v X (zaprtje je povezano).
- $\forall x, y \in X \,.\, C(x) \cap C(y) = \emptyset \vee C(x) = C(y)$.

Izrek 2.48. *Komponente prostora X so maksimalne povezane podmnožice v X in določajo particijo X na disjunktne zaprte podmnožice. Za poljubno preslikava $f : X \to Y$ leži slika vsake komponente X v celoti v neki komponenti Y.*

Dokaz. Definicija komponente. □

Primer 2.49.
- Povezan prostor ima eno samo komponento.
- V diskretnem prostoru so komponente točke. Če so vse komponente nekega prostora točke, pravimo, da je prostor *popolnoma nepovezan*.
- Komponente $\mathbb{Q}$ so točke, ker so edine povezane podmnožice v $\mathbb{R}$ intervali. To je primer prostora, katerega komponente so zaprte, niso pa odprte.

Opomba 2.50. Lahko definiramo ekvivalenčno relacijo na množici X:

$$x \sim x' \iff \exists A^{\mathrm{pov}} \subseteq X \,.\, x, x' \in A.$$

Potem komponente so ekvivalenčne razredi za to relacijo.

Videli smo, da so komponente prostora zaprte, niso pa vedno odprte podmnožice. Vsaka komponenta je komplement unije vseh ostalih komponent. Če ima prostor le končno mnogo komponent, je vsaka komponenta komplement končne unije zaprtih množic, torej je odprta. Če ima neka točka kako povezano okolico, potem je gotovo notranja točka svoje komponente. Torej, če ima vsaka točka X kako povezano okolico, potem so vse komponente X odprte. Velja tudi obratno, če so komponente odprte, potem ima vsaka točka vsaj eno povezano okolico, namreč komponento X, v kateri je vsebovana. Obravnavanje povezanih okolic nas pripelje do lokalne verzije povezanosti.

Definicija 2.51. Prostor X je *lokalno povezan*, če ima bazo iz povezanih množic.

Primer 2.52.
- Prostor $\mathbb{R}^n$ je lokalno povezan, saj ima bazo iz krogel, ki so povezane. Še več, vsaka odprta podmnožica v $\mathbb{R}^n$ je lokalno povezana.
- Vsak diskretni prostor je lokalno povezan, čeprav ni povezan.
- Varšavski lok je povezan prostor, ki ni lokalno povezan, ker majhne okolice točke $(0, 0)$ niso povezane.

Trditev 2.53. *Prostor X je lokalno povezan natanko takrat, ko so komponente vsake odprt podmnožice X odprte. Posebej so komponente vsakega lokalno povezanega prostora odprte.*

Dokaz. Definicija baze in komponent. □

Pri katerih pogojih se povezanost s potmi ujema s povezanostjo? Izkaže se, da moramo primerjati komponente za povezanost s komponentami za povezanost s potmi. *Komponento za povezanosts potmi* točke $x \in X$ označimo z $\widetilde{C}(x)$ in definiramo kot unijo vseh povezanih s potmi podmnožic X, ki vsebujejo x.

Opomba 2.54.
- Potni komponente ravno maksimalne s potmi povezane podmnožice X.
- Potni komponente razdelijo X na disjunktne podmnožice.

V splošnem potni komponente niso zaprte: varšavski lok ima dve komponenti za povezanost s potmi od katerih je le ena zaprta. Za X pravimo, da je *lokalno povezan s potmi*, če ima bazo iz s potmi povezanih množic.

Izrek 2.55. *Če je prostor X lokalno povezan s potmi, potem njegove komponente za povezanost sovpadajo s komponentami za povezanost s potmi.*

Dokaz. Za poljuben $x \in X$ je komponenta za povezanost $\widetilde{C}(x)$ vsebovana v komponenti za povezanost $C(x)$, zato je dovolj, če dokaemo nasprotno vsebovanje. $\square$

Posledica 2.56. *Če je X lokalno povezan s potmi, potem*

$$X \text{ je povezan} \iff X \text{ je povezan s potmi.}$$

Posledica 2.57. *Odprte podmnožice v $\mathbb{R}^n$ so povezane natanko tadaj, ko so povezane s potmi.*

Opomba 2.58.
- Povezanost ni dedna.
- Lokalna povezanost se deduje na odprte podprostore.

2.3 Kompaktnost

Kompaktnost je v mnogih ozirih osrednja topološka lastnost. Posledica kompaktnosti so, na primer:
- **Bolzano-Weierstrassov izrek**: Vsako omejeno zaporedje v $\mathbb{R}^n$ ima vsaj eno stekališče.
- **Cantorjev izrek**: Presek padajočega zaporedja zaprtih intervalov $[a_1, b_1] \supseteq [a_2, b_2] \supseteq [a_3, b_3] \supseteq \ldots$ je neprazen. Če je še $\lim(b_i - a_i) = 0$, je v preseku natanko ena točka.
- Zvezna funkcija iz zpartega intervala $[a, b]$ v $\mathbb{R}$ je
  1. omejena,
  2. zavzame minimum in maksimum,
  3. je enakomerno zvezna.
- Vsaka injektivna preslikava $f : [a, b] \to \mathbb{R}^n$ je vložitev.

Pokazali bomo, da vse te izreke lahko razširimo na kompaktne prostore.

Definicija 2.59. Prostor X je *kompakten*, če ima vsako odprto pokritje X končno podpokritje.

Opomba 2.60. Bistveno za kompaktnost je, da iz še tako drobnega, neskončnega pokritja lahko izluščimo končno poddružino, ki je pokritje.

Trditev 2.61. *Prostor X je kompakten, če za vsako pokritje z množicami iz neke baze topologije obstaja končno podpokritje.*

Dokaz. Definicija baze in kompaktnosti. $\square$

Opomba 2.62. Naj bo X prostor, $A \subseteq X$. Za dokaz kompaktnosti A moramo (po definiciji) začeti z odprtim pokritjem A, npr. $\{U_\lambda \cap A \,|\, U_\lambda^{\text{odp}} \subseteq X\}$. Dovolj je dokazati, da za vsako pokritje A z množicami, ki so odprte v X, obstaja končno podpokritje.

Primer 2.63.
- Vsak končnen prostor je kompakten.
- Naj bo (x_n) konvergentno zaporedje v prostoru X z limito $x = \lim x_n$. Tedaj je $A = \{x_n \,|\, n \in \mathbb{N}\} \cup \{x\}$ kompakten podprostor prostora X.
- $\mathbb{R}$ ni kompakten prostor, saj je pokritje $\{(-n, n) \,|\, n \in \mathbb{N}\}$ nima končnega podpokritja.
- Kompaktnost je topološka lastnost, zato odprti interval ni kompakten, saj je homeomorfen $\mathbb{R}$. Tudi interval $[a, b)$ ni kompakten, saj je homeomorfen $[0, \infty)$.

- Diskreten prostor je kompakten natanko tedaj, ko je končen.

Trditev 2.64. *Zaprti interval $[a, b]$ je kompakten podprostor $\mathbb{R}$.*

Dokaz. Naj bo $\{U_\lambda\}$ odprto pokritje $[a, b]$ z intervali. Definiramo

$$c := \sup\{x \in [a, b] \mid [a, x] \text{lahko pokritjemo s končno mnogo } \{U_\lambda\}\}.$$

□

Opomba 2.65. Kompaktnost ni dedna, saj $[0, 1]$ kompakten, vendar $[0, 1)$ ni, obenem pa opazimo, da včasih dobimo kompakten prostor tako, da nekompaktnemu dodamo kakšno točko.

Izrek 2.66. *V kompaktnem prostoru ima vsaka neskončna množica stekališče.*

Dokaz. S protislovjem. □

Posebej, vsaka omejena neskončna podmnožica $A \subseteq \mathbb{R}$ leži na nekem zaprtem intervalu. Ker je le-ta kompakten, ima A stekališče. Kaj pa lahko povemo o omejenih množicah neskončnih množicah v $\mathbb{R}^n$

Izrek 2.67 (Multiplikativnost kompaktnosti)**.** *Če sta X, Y kompaktna prostora, potem $X \times Y$ kompakten*

Dokaz. TODO □

Izrek z indukcijo razširimo na končne produkte.

Posledica 2.68. *Če so $X_1, \ldots, X_n$ kompaktni, potem $X_1 \times \ldots \times X_n$ kompakten.*

Opomba 2.69. Posebej je poljuben produkt intervalov $[a_1, b_1] \times \ldots \times [a_n, b_n]$ kompakten prostor $\mathbb{R}^n$. Ker vsaka omejena podmnožica $\mathbb{R}^n$ leži v nekem produktu intervalov, dobimo kot posledico Bolzano-Weierstrassov izrek: vsaka neskončna omejena podmnožica v $\mathbb{R}^n$ ina stekališče.

Izrek 2.70 (Bolzano-Weierstrass)**.** *Vsako omejeno zaporedje v $\mathbb{R}^n$ ima konvergentno podzaporedje.*

Dokaz. TODO □

Opomba 2.71. V metričnih prostorih obstoj stekališč v resnici karakterizira kompaktnost. Velja namreč, da je metrični prostor X kompakten natanko tedaj, ko ima vsako zaporedje v X vsaj eno stekališče.

Trditev 2.72. *Kompaktna podmnožica metričnega prostora je omejena.*

Dokaz. Pokritje s kroglami $K(x_0, n)$, $n \in \mathbb{N}$. □

Trditev 2.73. *Zaprt podprostor kompaktnega prostora je kompakten.*

Dokaz. $\{U_\lambda\} \cup \{A^c\}$ je odprto pokritje X. □

Trditev 2.74. *V Hausdorffovem prostoru topologija ostro loči kompakte od točk.*

Dokaz. TODO ☐

Trditev 2.75. *Če je X Hausdorffov in $K \subseteq X$ kompakten, potem je K zaprt v X.*

Dokaz. Hausdorffova topologija ostro loči kompakte od točk. ☐

Kompaktnost in Hausdorffova lastnost sta v zanimivem ravnovesju. Če je X kompakten glede na topologijo $\mathcal{T}$, potem je kompakten tudi glede na katerokoli topologijo, ki je šibkejša od $\mathcal{T}$, saj je v taki manj odprtih pokritij, ki morajo imeti končna podpokritja. Obratno, če je neka topologija $\mathcal{T}$ na X Hausdorffova, potem vsaka topologija, ki je od $\mathcal{T}$ močnejša, kvečjemu bolje loči točke, torej je prav tako Hausdorffova. Kaj pa, če je X glede na topologijo $\mathcal{T}$ hkrati kompakten in Hausdorffov? Topologija, ki je strogo šibkejša od $\mathcal{T}$, bi morala imeti več kompaktov in obenem manj kompaktov, saj manj odprtih množic pomeni tudi manj zaprtih množic. Ker je to nemogoče, sklepamo, da v od $\mathcal{T}$ šibkejši topologiji X ni Hausdorffov, in simetrično, v od $\mathcal{T}$ močnejši topologiji X ni kompakten.

Posledica 2.76. *Vsak kompakten Hausdorffov prostor je normalen.*

Dokaz. Dovolj če pokažemo, da topologija ostro loči kompakte. ☐

Vrnimo se k našemu cilju, karakterizaciji kompaktnih podmnožic evklidskega prostora.

Izrek 2.77 (Heine-Borel-Lebesgue)**.** *Podprostor v $\mathbb{R}^n$ je kompakten natanko tedaj, ko je zaprt in omejen.*

Dokaz. ($\Longrightarrow$) Omejenost kompakta + Hausdorff.
($\Leftarrow$) Omejena podmnožica vsebovana v produktu zaprtih intervalov + zaprtost. ☐

Opomba 2.78. Če je M metrični prostor, potem so zaprte krogle kompaktne natanko tedaj, ko velja Heine-Borelov izrek za ta prostor.

Primer 2.79.

- Krogle B^n in sfere S^n so kompaktne.
- Moebiusov trak, torus in večkratni torus so kompaktni podprostori $\mathbb{R}^3$.
- Množica rešitev enačb in množica ortogonalnih matrik. TODO

Kompaktnost prostora smo doslej izražali z odprtimi množicami in pokritji, a jih tako kot vse topološke pojme lahko opišemo tudi z zaprtimi množicami.

Trditev 2.80 (Reformulacija definiciji kompaktnosti na zaprte množice)**.** *Prostor X je kompakten natanko tedaj, ko v vsaki družini zaprtih podmnožic s praznim presekom obstaja končna podmnožica, katere presek je prazen.*

Dokaz. Prehod na komplemente. ☐

Izrek 2.81 (Cantorjev izrek)**.** *Naj bo X kompakten in $F_1 \supseteq F_2 \supseteq \dots$ padajoče zaporedje zaprtih nepraznih podmnožic. Potem je $\bigcap F_\lambda \neq \emptyset$.*

Dokaz. Reformulacija definiciji kompaktnosti na zaprte množice. ☐

Podobno kot pri povezanosti je ena najpomemnejših lastnosti kompaktnosti ta, da se ohranja pri preslikavah.

Izrek 2.82. *Zvezna slika kompakta je kompakt.*

Dokaz. Praslika odprtega pokritja. □

Če upoštevamo, da je podmnožica $\mathbb{R}$ je kompaktna natanko takrat, ko je zaprta in omejena, dobimo naslednjo posledico:

Posledica 2.83. *Če je $X \subseteq \mathbb{R}^n$ kompakt, potem je vsaka preslikava $f : X \to \mathbb{R}$ omejena in zavzame minimum in maksimum.*

V uvodu smo še povedali, da je vsaka zvezna funkcija iz $[a, b]$ v $\mathbb{R}$ tudi enakomerno zvezna. Pokazali bomo, da je tudi to dejstvo posledica kompaktnosti.

Izrek 2.84 (Lebesgueova lema)**.** *Za vsako odprto pokritje $\mathcal{U}$ metričnega kompakta X obstaja tako imenovano* Lebesgueovo število $\lambda = \lambda(\mathcal{U})$ *z lastnostjo, da vsaka krogla s polmerom manjšim od λ leži v celoti v nekem elementu $\mathcal{U}$.*

Iz Lebesgueove leme sledi znani in pogosto uporabljani izrek matematične analize:

Izrek 2.85. *Naj bosta X in Y metrična prostora. Če je X kompakten, potem je vsaka preslikava $f : X \to Y$ enakomerno zvezna.*

Dokaz. TODO □

Naslednji rezultat podaja najpomembnejši sklop pogojev, ki zagotavljajo, da je neka preslikava zaprta (in posledično vložitev ali celo homeomorfizem).

Izrek 2.86. *Naj bo X kompakten, Y pa Hausdorffov prostor.*

- *Vsaka preslikava $f : X \to Y$ je zaprta.*
- *Vsaka injektivna preslikava $f : X \to Y$ je vložitev.*
- *Vsaka bijektivna preslikava $f : X \to Y$ je homeomorfizem.*

Dokaz. Dovolj je dokazati prvo točko. □

Preostanek razdelka bomo posvetili loklani obliki pojma kompaktnosti. Definiramo jo podobno kot lokalno povezanost, ker pa kompaktne množice običajno niso odprte, vpeljamo pomožni pojem:

Definicija 2.87. Odprta podmnožica $U \subseteq X$ je *relativno kompaktna*, če je njeno zaprtje $\overline{U}$ kompaktno.

Definicija 2.88. Prostor X je *lokalno kompakten*, če ima bazo iz relativno kompaktnih množic.

Izrek 2.89. *Hausdorffov prostor X, v katerem ima vsaka točka kakšno kompaktno okolico, je lokalno kompakten. Posebej, vsak kompakten prostor je lokalno kompakten.*

Krogle v evklidskih prostorih so relativno kompaktne, zato so evklidski prostori tipični primeri nekompaktnih, a lokalno kompaktnih prostorov. Prav tako je jasno, da je vsak odprt podprostor lokalno kompaktnega prostora tudi lokalno kompakten.

Primer 2.90. $\mathbb{Q}$ ni lokalno kompakten.

Izrek 2.91. *Vsak lokalno kompaktni Hausdorffov prostor je regularen.*

Dokaz. TODO □

Najbolj daljnosežna lastnost lokalno kompaktnih prostorov je, da so „debeli“, v smislu, da jih ni mogoče pokriti s števno mnogo podmnožic s prazno notranjostjo. Značilen primer takih podmnožic so enostavne krivulje v ravnini, tj. slike injektivnie preslikave iz intervala $[0,1]$ v $\mathbb{R}^2$. Po izreku je enostavna krivulja homeomorfna intervalu, zato ima v $\mathbb{R}^2$ prazno notranjost. Naš cilj je dokazati sicer nazorno dejstvo, da nobena števna družina enostavnih krivulj ne pokrije cele ravnine.

Izrek 2.92 (Bairov izrek za lokalno kompaktne prostore)**.** *Naj bo $F_1, F_2, F_3, \ldots$ števna družina zaprtih podmnožic s prazno notranjostjo v lokalno kompaktnem Hausdorffovem prostoru X. Potem ima $\bigcup_{i=1}^{\infty} F_i$ prazno notranjost v X.*

Dokaz. TODO □

Definicija 2.93. Prostorom s to lastnostjo pravimo *Bairovi prostori.*

Primer 2.94.

- Če je X lokalno kompakten Hausdorffov prostor brez izoliranih točk, potem so vse točke X zaprte podmnožice s prazno notranjostjo. Po Bairovem izreku ima vsaka števna podmnožica X prazno notranjost. Opazimo, da je $\mathrm{Int}_X(A) = \emptyset$ natanko takrat, ko je $X - A$ povsod gost v X, zato lahko rečemo tudi, da je v lokalno kompaktnem Hausdorffovem prostoru brez izoliranih točk komplement vsake števne množice povsod gost.
- Enostavna krivulje v $\mathbb{R}^n$. TODO

V analizi večkrat potrebujemo varianto Bairovega izreka, ki velja v polnih metričnih prostorih.

Izrek 2.95 (Bairov izrek za polne metrične prostore)**.** *Naj bo $F_1, F_2, F_3, \ldots$ števna družina zaprtih podmnožic s prazno notranjostjo v polnem metričnem prostoru X. Potem ima $\bigcup_{i=1}^{\infty} F_i$ prazno notranjost v X.*

Dokaz. TODO □

Bairov izrek največkrat uporabimo pri dokazu obstaja točke ali preslikave, ki ima določene lastnosti. Ti dokazi so včasih videti prav nenavidni, ker obstoj vsaj enega objekta z dano lastnostjo ne dokažemo s konstrukcijo, temveč tako, da pokažemo, da imajo skoraj vsi opazovani objekti to lastnost.

Primer 2.96. Odvedljivost zvezne funkcije. TODO

Zaradi lepih lastnosti kompaktnih prostorov je pogosto ugodno, če prostor, ki ni kompakten, lahko obravnavamo kot podprostor nekega kompakta.

Definicija 2.97. *Kompaktifikacija* prostora X je gosta vložitev $h : X \to \widehat{X}$, kjer $\widehat{X}$ kompakten Hausdorffov prostor.

Kompaktifikacija Aleksandrova. TODO

Izrek 2.98. *$(X^+, \mathcal{T})$ je kompakten prostor. Če X ni kompakten, je inkluzija $i : X \hookrightarrow X^+$ kompaktifikacija, ki ji pravimo* kompaktifikacija z eno točko *ali* Kompaktifikacija Aleksandrova.

Dokaz. TODO □

Trditev 2.99. *Prostor X je lokalno kompakten in Hausdorffov natanko tedaj, ko X^+ je kompakten in Hausdorffov.*

Dokaz. TODO □

Opomba 2.100. Lokalno kompaktni Hausdorffovi prostori so Bairovi prostori.

Dokaz. TODO □

3 Prostori preslikav

Velik del matematične analize se ukvarja s funkcijskimi zaporedji in vrstami. Pri tem je vedno eno izmen ključnih vprašanj, kdaj in kje dano zaporedje ali vrsta konvergira. Kadar se ukvarjamo z zveznimi funkcijami, nas večinoma zanimata dva tipa konvergence: konvergenca po točkah in enakomerna konvergenca.

Primer 3.1. Razvoj logaritemske funkcije. TODO
Smiselno se je omejeti na zaprt interval in se vprašati, katere funkcije dobimo kot enakomerne limite polinomov.

3.1 Topologije na prostorih preslikav

Če želimo govoriti o konvergenci zaporedij preslikav med prostoroma X in Y, moramo najprej množico vseh preslikav $C(X, Y)$ opremiti s primerno topologijo. Opisali bomo konstrukcijo, ki na enovit način posploši oba najpomembnejša primera, točkasto in enakomerno konvergenco. Za $A \subseteq X$ in $U \subseteq Y$ označimo z $\langle A, U\rangle$ množico vseh preslikav, ki slikajo A v U, tj.

$$\langle A, U\rangle = \{f \in C(X, Y) \mid f_*(A) \subseteq U\}.$$

Naj bo $\mathcal{T}$ topologija na $C(X, Y)$, ki jo kot predbaza generira družina $\mathcal{P} = \{\langle\{x\}, U\rangle \mid x \in X,\, U \text{ odprta v } Y\}$. Tipična bazična okolica v tej topologiji je presel $\langle x_1, U_1\rangle \cap \ldots \cap \langle x_n, U_n\rangle$, ki si ga lahko predstavljamo kot družino vseh funkcij, ki gredo po točkah $x_1, \ldots, x_n$ skozi predpisane prehode $U_1, \ldots, U_n$.

Trditev 3.2. *Naj bo (f_n) zaporedje preslikav v $C(X, Y)$. Funkcije f_n konvergirajo po točkah proti neki funkciji f natanko takrat, ko zaporedje (f_n) konvergira proti f v topologiji $\mathcal{T}$. Zaradi tega $\mathcal{T}$ imenujemo* topologija konvergnce po točkah.

Dokaz. TODO □

Opazimo, da pri definiciji topologije $\mathcal{T}$ nismo uporabili topologije prostora X, zato ne preseneča, da je ta topologija precej pomankljiva, ko prostor X ni diskreten. Tako na primer vemo, da funkcija, ki je limita po točkah zaporedje zveznih funkcij, v splošnem ni zvezna. Te pomankljivosti odpravimo s predbazo, ki upošteva tudi topologijo X in je naravna posplošitev enakomerne konvergence.

Definicija 3.3. *Kompaktno-odprta topologija* na $C(X, Y)$ je topologija, ki jo generira predbaza

$$\mathcal{P}' = \{\langle K, U\rangle \mid K \text{ kompakten v } X,\, U \text{ odprta v } Y\}.$$

Prostor zveznih funkcij, opremljen s to topologijo, označimo $\widehat{C}(X, Y)$.

Bazo kompaktno-odprte topologije tvorijo preseki predbazičnih množic. Delo s temi preseli je včasih precej nepregledno, zato pri preslikavah v metrični prostor Y raje kompaktno-odprto topologijo podamo z bazo, ki je posplošitev baze iz krogel v metričnih prostorih. Denimo torej, da je (Y, d) metrični prostor, ter za izbrano preslikavo $f : X \to Y$, kompakt $K \subseteq X$ in $\epsilon > 0$ vpeljimo

$$\langle f, K, \epsilon\rangle = \{g \in C(X, Y) \mid d(f(x), g(x)) < \epsilon \text{ za vse } x \in K\}.$$

Trditev 3.4. *Naj bo Y metrični prostor. Družina $\mathcal{B} = \{\langle f, K, \epsilon\rangle \mid f \in C(X,Y), K$ kompakt v $X, \epsilon > 0\}$ je baza kompaktno-odprte topologije na $C(X,Y)$.*

Dokaz. TODO □

Opomba 3.5. $\mathcal{B}$ generira kompaktno-odprto topologijo. TODO

Če je $K \subseteq K'$ ali $\epsilon > \epsilon'$, je $\langle f, K', \epsilon'\rangle \subseteq \langle f, K, \epsilon\rangle$, zato po potrebi lahko za bazo kompaktno-odprte topologije vzamemo le množice $\langle f, K, \epsilon\rangle$ za velike kompakte K ali majhne ϵ. Posebej če je X kompakten, se lahko omejimo na množice $\langle f, X, \epsilon\rangle$, kar so ravno ϵ krogle v supremum metriki. Vidimo torej, da se za kompakten X in metričen Y kompaktno-odprta topologija ujema s topologijo enakomerne konvergence. Če pa X ni kompakten, je glede na to topologijo konvergenca enakomerna le, kadar se omejimo na kompaktne podmnožice (tako kot pri Taylorjevih vrstah), zato ji pravimo tudi *topologija enakomerne konvergence na kompaktih.*
Kodomeno Y vedno lahko gledamo kot podprostor v $\widehat{C}(X,Y)$.

Trditev 3.6. *Preslikava $c : Y \to \widehat{C}(X,Y)$, ki vsakemu $y \in Y$ priredi konstantno preslikavo c_y, ki vse točke X preslika v y, je vložitev. Če je prostor Y Hausdorffov, je vložitev zaprta.*

Dokaz. TODO □

Trditev 3.7. *Prostor $\widehat{C}(X,Y)$ je Hausdorffov natanko tedaj, ko je Y Hausdorffov, in regularen natanko tedaj, ko je Y regularen.*

Dokaz. TODO □

Primer 3.8. X je diskreten. TODO

3.2 Preslikave na normalnih prostorih

Matematična analiza sloni na pojmu zvezne realne funkcije, ki je običajno definirana na kaki podmnožici evklidskega prostora. Kakor hitro pa obravnavamo splošnejše domene, se zastavi vprašanje, ali sploh obstajajo kakšne zvezne realne funkcije (razen konstantnih).

Primer 3.9. Naj bo X neskončna množica, opremljena s topologijo končnih komplementov. Potem poljubna preslikava $f : X \to \mathbb{R}$ konstanta.

Obstajajo primeri Hausdorffovih in celo regularnih prostorov, na katerih so edine realne preslikave konstante. Zakaj potem na evklidskih prostorih obstaja tako veliko zveznih preslikav? Morda je to metrika: v metričnem prostoru (X,d) je za poljuben $x \in X$ funkcija $d(x, -) : X \to \mathbb{R}$, $x' \mapsto d(x,x')$ zvezna in nekonstantna. Še več, vrednosti funkcije lahko delno definiramo vnaprej: za poljubna $A, B \subseteq X$ postavimo $f(x) := \frac{d(x,A)}{d(x,A)+d(x,B)}$. Funkcija f je definirana in zvezna, če je le imenovalec neničeln, to je takrat, ko x ni hkrati v zaprtju A in v zaprtju B. Če je $\overline{A} \cap \overline{B} = \emptyset$, potem zgornja formula definira preslikavo $f : X \to [0,1]$, ki ima vrednost 0 na množici A in vrednost 1 na množici B. Lahko rečemo, da smo s preslikavo f ločili A in B.

Izrek 3.10 (Urisonova lema)**.** *Hausdorffov prostor X je normalen natanko takrat, ko za poljubni disjunktni neprazni zaprti podmnožici $A, B \subseteq X$ obstaja preslikava $f : (X,A,B) \to ([0,1],0,1)$.*

Dokaz. TODO □

Ko smo obravnavakki različne stopnje ločljivosti topologije, smo jih vseskozi imeli za približke ločljivosti metričnih prostorov, zata se je naravno vprašati, koliko topologiji normalnega prostora manjka do tega, da je v resnici porojena z neko metriko. Videli bomo, da mora biti normalen prostor, ki ni metrizabilen, v določenem smislu zelo velik.

Izrek 3.11 (Urisonov metrizacijski izrek)**.** *Vsak normalen, 2-števen prostor je metrizabilen.*

Dokaz. TODO □

Posledica 3.12. *V* 2*-števnih prostorih je metrizabilnost ekvivalentna regularnosti.*

Izrek 3.13 (Tietzejev razširitveni izrek)**.** *najbo A zaprt podprostor normalnega prostora X in $J \subseteq \mathbb{R}$ poljuben interval. Tedaj vsako preslikavo $f : A \to J$ lahko razširimo do preslikave $F : X \to J$.*