# Analiza 2a

Ruslan Urazbakhtin

5. avgust 2025

# Kazalo

# 1 Hilbertovi prostori

## 1.1 Vektorski prostori s skalarnim produktom

Naj bo $X$ vektorski prostor nad $\mathbb{R}$ (ali nad $\mathbb{C}$).

**Definicija 1.1.** **Skalarni produkt** je preslikava $\langle\ ,\ \rangle : X \times X \to \mathbb{R}$ (oz. $\mathbb{C}$) za katero velja:

1. $\forall x \in X \,.\, \langle x,\, x\rangle \geq 0$;
2. $\forall x \in X \,.\, \langle x,\, x\rangle = 0 \iff x = 0$;
3. $\forall x, y \in X \,.\, \langle x,\, y\rangle = \overline{\langle y,\, x\rangle}$;
4. $\forall x, y, z \in X \,.\, \forall \lambda, \mu \in \mathbb{R}$ (oz. $\mathbb{C}$) $.\, \langle \lambda x + \mu y,\, z\rangle = \lambda\langle x,\, z\rangle + \mu\langle y,\, z\rangle$.

**Opomba 1.2.** 1. - 2. je **pozitivna definitnost** skalarnega produkta, 3. je **poševna simetričnost** (**simetričnost** nad $\mathbb{R}$), 4. je linearnost v prvem faktorju.

**Trditev 1.3** (Cauchy-Schwartzova neenakost)**.** *Naj bo $\langle\ ,\ \rangle$ skalarni produkt na $X$. Velja:*

$$\forall x, y \in X \,.\, |\langle x,\, y\rangle| \leq \sqrt{\langle x,\, x\rangle} \cdot \sqrt{\langle y,\, y\rangle} = ||x|| \cdot ||y||.$$

*Dokaz.* Nad $\mathbb{R}$: Definiramo $t \to \langle x + ty,\, x + ty\rangle = f(t) \geq 0$.
Nad $\mathbb{C}$: Naj bo $x, y \in X$. Obstaja $\alpha \in \mathbb{C},\ |\alpha| = 1$, da $\langle x,\, y\rangle = \alpha \cdot |\langle x,\, y\rangle|$. □

**Definicija 1.4.** **Norma** na vektorskem prostoru $X$ je preslikava $||\ || : X \to \mathbb{R}$ za katero velja:

1. $\forall x \in X \,.\, ||x|| \geq 0$;
2. $\forall x \in X \,.\, ||x|| = 0 \iff x = 0$;
3. $\forall \lambda \in \mathbb{R}$ (oz. $\mathbb{C}$) $.\, ||\lambda x|| = |\lambda| \cdot ||x||$;
4. Trikotniška neenakost: $\forall x, y \in X \,.\, ||x + y|| \leq ||x|| + ||y||$.

**Trditev 1.5.** *Naj bo $(X, \langle\ ,\ \rangle)$ vektorski prostor s skalarnim produktom. Potem je $(X, ||\ ||)$, kjer je $\forall x \in X \,.\, ||x|| = \sqrt{\langle x,\, x\rangle}$, vektorski prostor z normo.*

*Dokaz.* Preverimo lastnosti. Za trikotniško neenakost uporabimo CS neenakost. □

**Trditev 1.6.** *Naj bo $(X, ||\ ||)$ vektorski prostor s normo. Potem je $(X, d)$, kjer je metrika definirana s predpisom $\forall x, y \in X \,.\, d(x, y) = ||x - y||$, metrični prostor.*

*Dokaz.* Preverimo lastnosti. □

## 1.2 Hilbertovi prostori

**Definicija 1.7.** **Hilbertov prostor** je vektorski prostor $X$ s skalarnim produktom $\langle\ ,\ \rangle$, ki je v metriki, porojeni iz skalarnega produkta, poln metrični prostor.

**Opomba 1.8.** $(X, \langle\ ,\ \rangle) \rightsquigarrow (X, ||\ ||) \rightsquigarrow (X, d)$, kjer je $\forall x, y \in X \,.\, d(x, y) = ||x - y||$.

**Opomba 1.9.** **Banachov prostor** je vektorski prostor $X$ z normo $||\ ||$, ki je v metriki, porojeni iz norme, poln metrični prostor.

**Zgled 1.10.**
1. Naj bo $X = \mathbb{R}^n$. Definiramo skalarni produkt. Naj bo $x, y \in \mathbb{R}^n$, $x = (x_1 \ldots, x_n)$ in $y = (y_1, \ldots, y_n)$. **Standardni skalarni produkt** je
$$x \cdot y = \sum_{k=1}^{n} x_k y_k.$$
Ta skalarni produkt nam da normo
$$||x|| = \sqrt{\sum_{k=1}^{n} x_k^2},$$
ki porodi metriko
$$d_2(x,y) = \sqrt{\sum_{k=1}^{n} (x_k - y_k)^2}.$$
Vemo, da je $(\mathbb{R}^n, d_2)$ poln metrični prostor. Torej $(\mathbb{R}^n, \cdot)$ Hilbertov prostor.
2. Na $\mathbb{R}^n$ lahko definiramo tudi druge norme, npr.
   - $||x||_\infty = \max\{|x_1|, \ldots, |x_n|\}$;
   - $||x||_1 = |x_1| + \ldots + |x_n|$.

   Te dve normi ne prideta iz skalarnega produkta, ker za njih ne velja paralelogramsko pravilo. $(\mathbb{R}^n, ||x||_\infty)$ in $(\mathbb{R}^n, ||x||_1)$ sta Banachova prostora.
3. Naj bo $X = \mathbb{C}^n$. Definiramo skalarni produkt. Naj bo $z, w \in \mathbb{C}^n$, $z = (z_1 \ldots, z_n)$ in $w = (w_1, \ldots, w_n)$. **Standardni skalarni produkt** je
$$z \cdot w = \sum_{k=1}^{n} z_k \overline{w_k}.$$
Ta skalarni produkt nam da normo
$$||z|| = \sqrt{\sum_{k=1}^{n} |z_k|^2},$$
ki porodi metriko
$$d_2(z,w) = \sqrt{\sum_{k=1}^{n} |z_k - w_k|^2}.$$
Vemo, da je $(\mathbb{C}^n, d_2)$ poln metrični prostor. Torej $(\mathbb{C}^n, \cdot)$ Hilbertov prostor.

## 1.3 Prostor $L^2([a,b])$

**Opomba 1.11.** Števili $a, b$ sta lahko končni ali $\pm\infty$.

**Trditev 1.12.** *Naj bo $C([a,b])$ vektorski prostor nad $\mathbb{R}$. Potem je s predpisom*
$$\forall f, g \in C([a,b])\,.\,\langle f,\, g\rangle = \int_a^b f(x)g(x)\,dx$$
*definiran skalarni produkt na $C([a,b])$.*

*Dokaz.* Preverimo lastnosti. □

**Trditev 1.13.** $(C([a,b]), \langle\ ,\ \rangle)$ *ni Hilbertov prostor.*

*Dokaz.* Definiramo $f_n(x) = \begin{cases} 1; & \frac{1}{n} \leq x \leq 1 \\ nx; & -\frac{1}{n} < x < \frac{1}{n} \\ -1; & -1 \leq x \leq -\frac{1}{n} \end{cases}$. Pokažemo, da je $(f_n)_n$ Cauchyjevo zaporedje v $C([a,b])$, ki nima limite. □

**Zgled 1.14.** Vzemimo prostor $((0,1), d_2)$. Z dodajanjem limitnih točk $\{-1,1\}$ ta prostor postane poln.

**Definicija 1.15.** Naj bo $(M,d)$ metrični prostor. Pravimo, da lahko **napolnimo** prostor $M$, če obstaja prostor $(\overline{M}, \overline{d})$, za kateri velja:
1. $(\overline{M}, \overline{d})$ je poln metrični prostor;
2. $M \subseteq \overline{M}$;
3. $\overline{d}|_{M\times M} = d$;
4. $M$ je gost v $\overline{M}$, tj. $\operatorname{Cl} M = \overline{M}$.

Prostoru $\overline{M}$ rečemo **napolnitev** prostora $M$.

**Opomba 1.16.** Ideja: $\overline{M}$ je prostor vseh limit Cauchyjevih zaporedij v $M$ (+ kvocient).

**Opomba 1.17.** Označili smo z $L^1(A) = \{f : A \to \mathbb{R} \mid \int_A |f|\,dx \text{ obstaja, } f \text{ zvezna s.p.}\}/_\sim$ prostor vseh absolutno integrabilnih funkcij, kjer je $\forall f, g \in L^1 \,.\, f \sim g \iff f = g$ s.p.

Vpeljemo zdaj s kvadratom integrabilne funkcije:

**Definicija 1.18.** Prostor $L^2([a,b])$ je

$$L^2([a,b]) = \{f : [a,b] \to \mathbb{R} \mid \int_a^b f^2(x)\,dx \text{ obstaja, } f \text{ zvezna s.p.}\}/_\sim,$$

kjer je $\forall f, g \in L^2 \,.\, f \sim g \iff f = g$ s.p.

V tem prostoru gotovo so
- Zvezne funkcije: $C([a,b]) \subseteq L^2([a,b])$;
- Odsekoma zvezni funkciji;
- $f(x) = \frac{1}{\sqrt[4]{x-a}}$ itd.

**Cilj** Želimo posplošiti prostor $(\mathbb{R}, \cdot)$.
Naj bo $f, g \in L^2$, potem $|f \cdot g| \leq \frac{|f|^2+|g|^2}{2} \implies f \cdot g \in L^1([a,b])$. Torej lahko definiramo

$$\langle f,\, g\rangle = \int_a^b f(x)g(x)\,dx.$$

**Trditev 1.19.** $L^2([a,b])$ *je vektorski prostor nad* $\mathbb{R}$.

*Dokaz.* Preverimo lastnosti. □

Torej $L^2([a,b])$ je vektorski prostor nad $\mathbb{R}$ s skalarnim produktom

$$\langle f,\, g\rangle = \int_a^b f(x)g(x)\,dx.$$

Očitno, da je $C([a,b]) \subseteq L^2([a,b])$.

**Izrek 1.20.** *$L^2([a,b])$ je Hilbertov in $L^2([a,b])$ je napolnitev $C([a,b])$.*

**Opomba 1.21.** Prostor $C([a,b])$ je gost v prostoru $L^2([a,b])$, tj.

$$\forall f \in L^2([a,b])\,.\,\exists f_n \in C([a,b])\,.\,\lim_{n\to\infty} f_n = f,$$

kjer

$$\lim_{n\to\infty} f_n = f \iff \lim_{n\to\infty} ||f_n - f|| = 0 \iff \lim_{n\to\infty} \sqrt{\int_a^b (f_n(x) - f(x))^2\,dx} = 0.$$

**Opomba 1.22.** Nad $\mathbb{C}$: $f = u + iv,\ u, v : [a,b] \to \mathbb{R}$. Potem

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^b u(x)\,dx + i\int_a^b v(x)\,dx$$

in

$$\langle f,\, g\rangle = \int_a^b f(x)\overline{g(x)}\,dx.$$

**Zgled 1.23.** Vzemimo $[0,1]$. Definiramo $f_n(x) = \begin{cases} \sqrt{n}; & 0 < x \le \frac{1}{n} \\ 0; & \text{sicer} \end{cases}$.

Čemu je enaka $\lim_{n\to\infty} f_n(x)$ za vse $x \in [0,1]$ (po točkah)? Ali je $\lim_{n\to\infty} f_n(x) = 0$ v $L^2([0,1])$?

**Zgled 1.24.** Definiramo zaporedje $f_n : [0,1] \to \mathbb{R}$ po pravilu: začnemo z $f_1 \equiv 1$. Nato nadaljujemo

$$f_2 = \begin{cases} 1; & x \in [0, \frac{1}{2}] \\ 0, & \text{sicer} \end{cases},\ f_3 = \begin{cases} 1; & x \in [\frac{1}{2}, 1] \\ 0, & \text{sicer} \end{cases},\ f_4 = \begin{cases} 1; & x \in [0, \frac{1}{3}] \\ 0, & \text{sicer} \end{cases},\ f_5 = \begin{cases} 1; & x \in [\frac{1}{3}, \frac{2}{3}] \\ 0, & \text{sicer} \end{cases}$$

in tako naprej. Ali obstaja limita po točkah? Ali obstaja limita v $L^2$ smislu?

## 1.4 Ortogonalnost

**Definicija 1.25.** Naj bo $(X, \langle\ ,\ \rangle)$ vektorski prostor s skalarnim produktom, $A \subseteq X$, $A \neq \emptyset$. Naj bosta $x, y \in X$.

- $x$ je **pravokoten** na $y$, če $\langle x,\, y\rangle = 0$, tj. $x \perp y \iff \langle x,\, y\rangle = 0$.
- **Ortogonalni komplement** množice $A$ je $A^\perp = \{x \in X \mid \forall a \in A\,.\,x \perp a\}$.

**Trditev 1.26.** *$A^\perp$ je vektorski podprostor v $X$.*

*Dokaz.* Preverimo homogenost in linearnost. □

**Opomba 1.27.** $A \subseteq (A^\perp)^\perp$.

**Trditev 1.28.** *Naj bo $(X, \langle\ ,\ \rangle)$ vektorski prostor s skalarnim produktom, $v \in X$. Definiramo $f : X \to \mathbb{R}$, $f(x) = \langle x, v\rangle$. Potem $f$ je zvezna na $X$.*

*Dokaz.* Pokažemo, da je $f$ Lipshitzeva. □

**Posledica 1.29.** *$A^\perp$ je zaprt vektorski podprostor.*

*Dokaz.* Pokažemo, da je limita vsakega zaporedja v $A^\perp$ tudi leži v $A^\perp$. □

**Opomba 1.30.** $C([a, b]) \subseteq L^2([a, b])$ ni zaprt podprostor.

**Opomba 1.31.** Če je $(X, \langle\ ,\ \rangle)$ Hilbertov in $A \subseteq X$ zaprt podprostor, potem

$$(A^\perp)^\perp = A.$$

**Trditev 1.32** (Pitagorjev izrek)**.** *Naj bo $(X, \langle\ ,\ \rangle)$ vektorski prostor s skalarnim produktom. Naj bodo $x_1, \ldots, x_n \in X$ taki, da $\forall i, j \in [n] \,.\, i \neq j \implies x_j \perp x_j$. Tedaj*

$$||x_1 + \ldots + x_n||^2 = ||x_1||^2 + \ldots + ||x_n||^2.$$

*Dokaz.* Izračunamo normo po definiciji. □

**Definicija 1.33.** Naj bo $(X, \langle\ ,\ \rangle)$ vektorski prostor s skalarnim produktom in $Y \leq X$ podprostor X. Naj bo $x \in X$. **Pravokotna projekcija** vektorja $x$ na podprostor $Y$ (če obstaja) je tak vektor $P_Y(x) \in Y$, da je

$$x - P_Y(x) \in Y^\perp.$$

**Trditev 1.34.** *Če je pravokotna projekcija $x$ na $Y$ obstaja, je enolično določena. Če obstaja, je to najboljša aproksimacija vektorja $x$ z vektorji iz $Y$, tj.*

$$||x - P_y(x)|| = \min_{w \in Y} ||x - w||.$$

*Dokaz.* Enoličnost: Običajen način.
Aproksimacija: Definicija minimuma in Pitagorjev izrek 1.32. □

**Zgled 1.35.** Naj bosta $Y = C([a, b])$ in $X = L^2([a, b])$. Če si izberimo $f \in X \setminus Y$, potem $f$ nima najboljše aproksimacije z zveznimi funkcijami, saj, ker je $\mathrm{Cl}(C([a, b])) = L^2([a, b])$, bi veljalo $||f - P_{C([a,b])}(f)|| = 0$ in posledično $f \in C([a, b])$.

**Opomba 1.36.**

1. $P_Y^2 = P_Y$.
2. $||x|| \geq ||P_Y(x)||$, saj $x = \underbrace{x - P_Y(x)}_{Y^\perp} + \underbrace{P_Y(x)}_{Y}$.
3. Če je $P_Y$ definiran na $X$, potem je linearen in zvezen.

   *Dokaz.* Definicija in enoličnost projekcije. □

4. Če je $P_Y$ definiran na $X$, je $Y$ zaprt podprostor.

   *Dokaz.* Vzamemo konvergentno zaporedje v $Y$ in upoštevamo zveznost $P_Y$. □

5. Če ima $x$ pravokotno projekcijo na $Y$, ima tudi pravokotno projekcijo na $Y^{\perp}$.

   *Dokaz.* Vzamemo $x - P_Y(x)$. □

**Trditev 1.37.** *Naj bo $Y \leq X$ končno dimenzionalen podprostor z ON bazo $\{e_1, \dots, e_n\}$, tj. $\langle e_i, e_j \rangle = \delta_{ij}$. Naj bo $x \in X$. Tedaj je*

$$P_Y(x) = \sum_{j=1}^{n} \langle x, e_j \rangle e_j.$$

*Dokaz.* Definicija projekcije. □

**Opomba 1.38.** Vsak končno dimenzionalni podprostor ima pravokotno projekcijo definirano na $X$ in tudi vsi tisti podprostori končne kodimenzije.

## 1.5 Ortogonalni sistem

**Definicija 1.39.** Naj bo $(X, \langle\ ,\ \rangle)$ vektorski prostor s skalarnim produktom.

- Sistem vektorjev $(e_j)_{j=1}^{\infty}$ je **ortogonalen sistem (OS)**, če

$$\forall i, j \in \mathbb{N} \,.\, i \neq j \implies \langle e_i, e_j \rangle = 0.$$

- Tak sistem je **ortonormiran (ONS)**, če

$$\forall i, j \in \mathbb{N} \,.\, \langle e_i, e_j \rangle = \delta_{ij}.$$

**Trditev 1.40** (Besselova neenakost)**.** *Naj bo*

- *$X$ vektorski prostor s skalarnim produktom, $x \in X$;*
- *$(e_j)_{j=1}^{\infty}$ ONS.*

*Tedaj*

$$\sum_{j=1}^{\infty} |\langle x, e_j \rangle|^2 \leq ||x||^2.$$

*Dokaz.* Definiramo $Y_n = \mathrm{Lin}(\{e_1, \dots, e_n\})$. Uporabimo formulo za pravokotno projekcijo na končnorazsežen prostor 1.37 ter Pitagorjev izrek 1.32. □

**Posledica 1.41.** $\lim_{j\to\infty} \langle x, e_j \rangle = 0$.

**Opomba 1.42.**

- Absolutno vrednost potrebujemo, če gledamo prostor nad $\mathbb{C}$.
- $(\langle x, e_j \rangle)_{j=1}^{\infty}$ so **Fourierjevi koeficienti** $x$ po ONS $(e_j)_{j=1}^{\infty}$.

**Trditev 1.43.** *Naj bo*

- *$X$ vektorski prostor s skalarnim produktom;*
- *$(e_j)_{j=1}^{\infty}$ ONS.*
- *$(c_j)_{j=1}^{\infty}$ zaporedje števil (bodisi $\mathbb{R}$ bodisi $\mathbb{C}$);*
- *$\sum_{j=1}^{\infty} |c_j|^2 < \infty$;*

*Tedaj obstaja $x \in X$, za katerega velja*

$$\forall j \in \mathbb{N} \,.\, c_j = \langle x, e_j \rangle.$$

*Velja tudi:*

$$x = \sum_{j=1}^{\infty} c_j e_j = \lim_{N\to\infty} \sum_{j=1}^{N} c_j e_j.$$

*Dokaz.* Trdimo, da je $\left(\sum_{j=1}^N c_j e_j\right)_N$ Cauchyjevo zaporedje. □

**Opomba 1.44.** Naj bo $X$ Hilbertov prostor ter $(e_j)_{j=1}^\infty$ ONS. Vzemimo $x \in X$. Iz Besselovi neenakosti 1.40 sledi, da za zaporedje $c_j = \langle x,\, e_j\rangle$ velja, da

$$\sum_{j=1}^\infty |c_j|^2 < \infty.$$

Torej po trditvi 1.43 sledi, da obstaja $\widetilde{x}$, za kateri velja

$$\widetilde{x} = \sum_{j=1}^\infty \langle x,\, e_j\rangle e_j.$$

Ali je $\widetilde{x} = x$?

**Definicija 1.45.** Naj bo $X$ Hilbertov prostor. ONS $(e_j)_{j=1}^\infty$ je **kompleten** (KONS) ali **poln**, če

$$\forall x \in X \,.\, x = \sum_{j=1}^\infty \langle x,\, e_j\rangle e_j.$$

**Izrek 1.46.** *Naj bo*
- *$X$ Hilbertov prostor;*
- *$(e_j)_{j=1}^\infty$ ONS.*

*NTSE*
1. *$(e_j)_{j=1}^\infty$ je KONS;*
2. *$\forall x, y \in X \,.\, \langle x,\, y\rangle = \sum_{j=1}^\infty \langle x,\, e_j\rangle\langle e_j,\, y\rangle$;*
3. *Parsevalova enakost: $\forall x \in X \,.\, ||x||^2 = \sum_{j=1}^\infty |\langle x,\, e_j\rangle|^2$;*
4. *ONS $(e_j)_{j=1}^\infty$ ni vsebovan v nobenem strogo večjem ONS;*
5. *Edini vektor, ki je pravokoten na vse vektorji $e_j$, je vektor $0$;*
6. *Končne linearne kombinacije vektorjev $e_j$ so goste v $X$.*

*Dokaz.* Dokažemo (1) $\implies$ (2) $\implies$ (3) $\implies$ (4) $\implies$ (5) in (1) $\implies$ (6) $\implies$ (5).
(5) $\implies$ (1): Uporabimo trditev 1.43 ter oglejmo razliko $x - \widetilde{x}$. □

**Zgled 1.47** (Modelni Hilbertov prostor)**.** Definiramo

$$l^2 = \{(a_j)_j \mid a_j \in \mathbb{R}, \sum_{j=1}^\infty |a_j|^2 < \infty\}.$$

Vpeljemo skalarni produkt s predpisom

$$\langle (a_j)_j,\, (b_j)_j\rangle = \sum_{j=1}^\infty a_j b_j \quad (\text{oz. } \sum_{j=1}^\infty a_j \overline{b_j} \text{ nad } \mathbb{C}).$$

Tedaj velja

$$||(a_i)_i||_2^2 = \sum_{j=1}^\infty |a_j|^2.$$

Naj bo zdaj $X$ Hilbertov prostor, $x \in X$ ter $(e_j)_{j=1}^\infty$ KONS. Tedaj

$$(\langle x,\, e_j\rangle)_j \in l^2.$$

## 1.6 Prostor $L^2([-\pi,\pi])$

Na prostoru $L^2(-\pi,\pi)$ definiramo sistem

$$\{\frac{1}{\sqrt{2\pi}}, \frac{1}{\sqrt{\pi}}\cos x, \frac{1}{\sqrt{\pi}}\sin x, \frac{1}{\sqrt{\pi}}\cos 2x, \frac{1}{\sqrt{\pi}}\sin 2x, \ldots, \frac{1}{\sqrt{\pi}}\cos nx, \frac{1}{\sqrt{\pi}}\sin nx, \ldots\}.$$

Če delamo nad $\mathbb{C}$, dobimo:

$$\{\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{inx} \mid n \in \mathbb{N}\}.$$

Trdimo, da je to ONS. Kasneje bomo tudi dokazali, da je to KONS.

**Opomba 1.48.** V tem kontekstu vsako funkcijo $f : [-\pi,\pi] \to \mathbb{R}$ vidimo kot zožitev periodične funkcije s periodo $2\pi$ na interval $[\pi,\pi]$. Vsako tako periodično funkcijo želimo zapisati kot „vsoto osnovnih nihanj“.

Vpeljemo klasične Fourierjevi koeficienti

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos(nx)\,dx,\ \ n = 1,2,\ldots \\ b_n &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin(nx)\,dx,\ \ n = 1,2,\ldots \end{aligned}$$

Pripadajoča klasična Fourierjeva vrsta je

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n\cos(nx) + b_n\sin(nx).$$

Torej za $n = 1,2,\ldots$ velja

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos(nx)\,dx = \frac{1}{\sqrt{\pi}}\langle f, \frac{1}{\sqrt{\pi}}\cos(nx)\rangle \\ b_n &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin(nx)\,dx = \frac{1}{\sqrt{\pi}}\langle f, \frac{1}{\sqrt{\pi}}\sin(nx)\rangle \end{aligned}$$

ter

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,dx = \frac{\sqrt{2}}{\pi}\langle f, \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\rangle.$$

Iz Besselove neenakosti 1.40 sledi

**Trditev 1.49** (Riemann-Lebesgueva lema)**.** *Naj bo $f \in L^2(-\pi,\pi)$. Tedaj*

$$\lim_{n\to\infty} a_n = 0 \quad \textit{ter} \quad \lim_{n\to\infty} b_n = 0.$$

Če pa vemo, da imamo KONS, dobimo Parsevalovo enakost 1.46

**Trditev 1.50** (Parsevalova enakost)**.** *Naj bo $f \in L^2(-\pi,\pi)$. Tedaj*

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} |f(x)|^2\,dx = \frac{|a_0|^2}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(|a_n|^2 + |b_n|^2).$$

**Zgled 1.51.** Definiramo funkcijo $f : [-\pi, \pi] \to \mathbb{R}$ s predpisom

$$f(x) = \begin{cases} 1; & 0 \leq x \leq \pi \\ 0; & -\pi < x < 0. \end{cases}$$

Razvij funkcijo $f$ v Fourierjevo vrsto ter s pomočjo Parsevalove enakosti določi vsoto

$$S = 1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \dots$$

**Lema 1.52.** *Naj bo $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ odsekoma zvezna periodična funkcija s periodo $2\pi$. Tedaj je*

$$\forall a \in \mathbb{R} \,.\, \int_a^{a+p} f(x)\, dx = \int_0^p f(x)\, dx.$$

*Dokaz.* $\int_a^{a+p} f(x)\, dx = \int_a^p f(x)\, dx + \int_p^{a+p} f(x)\, dx$ □

**Lema 1.53** (Dirichletovo jedro)**.**

$$\frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \cos(kx) = \frac{1}{2} \frac{\sin((n + 1/2)x)}{\sin(x/2)} =: D_n(x).$$

*Dokaz.* Kompleksna eksponenta. □

**Lema 1.54.** *Za Dirichletovo jedro velja*

1. $\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} D_n(x)\, dx = \pi$.
2. $D_n(x)$ *je gladka soda funkcija s periodo* $2\pi$.
3. $D_n(x) = \frac{1}{2}\left(\sin(nx)\frac{\cos(x/2)}{\sin(x/2)} + \cos(nx)\right)$.

*Dokaz.* Račun. □

**Opomba 1.55.** Sode/lihe funkcije. TODO: .

**Izrek 1.56** (Fourierjeva vrsta)**.** *Naj bo*

- *funkcija $f$ odsekoma zvezna in odsekoma odvedljiva periodična funkcijo s periodo $2\pi$;*
- *funkcija $f$ na vsakem intervalu dolžine $2\pi$ ima največ končno mnogo točk nezveznosti in v vsaki točki obstaja leva in desna limita;*
- *funkcija $f$ ima v vsaki točki levi in desni odvod.*

*Tedaj za vsak $x \in \mathbb{R}$ velja*

$$\frac{f(x+) + f(x-)}{2} = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx).$$

*Dokaz.* TODO: □

**Zgled 1.57.** Vzemimo funkcijo iz zgleda 1.51. Kaj velja v točki $x = 0$ ter v točki $x = \frac{\pi}{2}$? Izračunaj

$$\sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{1}{2k+1}.$$

**Zgled 1.58.** Naj bo $f(x) = x$ na $[-\pi, \pi]$ periodična funkcija s periodo $2\pi$. Kaj velja v točkah $0, \pi$ in $\frac{\pi}{2}$? Kaj pravi Parsevalova enakost?