

Analiza 2a

21. oktober 2024

1 Funkcije več spremenljivk

1.1 Prostor \mathbb{R}^n

1.1.1 Uvodni pojmi

\mathbb{R}^n je vektorski prostor nad \mathbb{R} . Če je $x, y \in \mathbb{R}^n$, potem $x = (x_1, \dots, x_n)$, $y = (y_1, \dots, y_n)$. Naj bo $\alpha \in \mathbb{R}$. Operaciji $x + y$ in αx sta definirani po komponentah.

Definicija 1.1. Standardna baza prostora \mathbb{R}^n je množica $\{e_j; j = 1, \dots, n\}$, kjer $e_j = (0, \dots, 0, 1_j, 0, \dots, 0)$.

Opomba. V prostorih \mathbb{R} , \mathbb{R}^2 , \mathbb{R}^3 ponavadi koordinate točk označimo z x, y, z .

Definicija 1.2. Standardna baza prostora \mathbb{R}^3 je množica $\{\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\}$.

Definicija 1.3. Standardni skalarni produkt vektorjev $x, y \in \mathbb{R}^n$ je $x \cdot y = \sum_{j=1}^n x_j y_j$.

Norma vektorja $x \in \mathbb{R}^n$ je $\|x\|_2 = \sqrt{x \cdot x} = \sqrt{x_1^2 + \dots + x_n^2}$.

Razdalja med vektorjama $x, y \in \mathbb{R}^n$ je $d_2(x, y) = \|x - y\|_2 = \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + \dots + (x_n - y_n)^2}$.

Opomba. Standardno normo $\|\cdot\|$ bomo pisali kot $|\cdot|$.

Definicija 1.4. Odprta krogla s središčem v $a \in \mathbb{R}^n$ in polmerom $r > 0$ je množica $K(a, r) = \{x \in \mathbb{R}^n; \|x - a\| < r\}$. Zaprta krogla s središčem v $a \in \mathbb{R}^n$ in polmerom $r > 0$ je množica $K(a, r) = \{x \in \mathbb{R}^n; \|x - a\| \leq r\}$.

Sfera je množica $S(a, r) = \{x \in \mathbb{R}^n; \|x - a\| = r\}$

Metrični prostor (\mathbb{R}^n, d_2) porodi topologijo na \mathbb{R}^n . Oznaki: D^{odp} je odprta množica, Z je zaprta množica.

Opomba. Metrična prostora (\mathbb{R}^n, d_2) in (\mathbb{R}^n, d_∞) imata isto topologijo.

Izrek 1.1. Naj bo $K \subset \mathbb{R}^n$, potem

$$K \text{ je kompaktna} \Leftrightarrow K \text{ je zaprta in omejena.}$$

Definicija 1.5. Naj bo $a, b \in \mathbb{R}^n$, $a = (a_1, \dots, a_n)$, $b = (b_1, \dots, b_n)$. Definiramo:

$$a \leq b \Leftrightarrow \forall j = 1, \dots, n. a_j \leq b_j.$$

$$a < b \Leftrightarrow \forall j = 1, \dots, n. a_j < b_j.$$

Definicija 1.6. Naj bo $a, b \in \mathbb{R}^n$, $a < b$. Odprti kvader (a, b) je množica $(a, b) = \{x \in \mathbb{R}^n; a < x < b\}$.

Naj bo $a, b \in \mathbb{R}^n$, $a \leq b$. Zaprta kvader $[a, b]$ je množica $[a, b] = \{x \in \mathbb{R}^n; a \leq x \leq b\}$.

Opomba. Dolžine stranic kvadra $[a, b]$ je $b_j - a_j$. Volumen kvadra $[a, b]$ je $\prod_{j=1}^n (b_j - a_j)$.

Če so vse strani kvadra enaki, potem kvader je *kocka*.

1.1.2 Zaporedja v \mathbb{R}^n

Definicija 1.7. Zaporedje v \mathbb{R}^n je preslikava $a : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}^n$. Namesto $a(m)$ pišimo a_m , $a_m = (a_1^m, \dots, a_n^m)$.

Opomba. Zaporedje v \mathbb{R}^n porodi n zaporedij v \mathbb{R} .

Trditev 1.2. Naj bo $(a_m)_m$ zaporedje v \mathbb{R}^n , $a_m = (a_1^m, \dots, a_n^m)$. Velja:

$$\text{Zaporedje } (a_m)_m \text{ konvergira} \Leftrightarrow \text{konvergira zaporedja } (a_1^m)_m, \dots, (a_n^m)_m.$$

V primeru konvergence velja:

$$\lim_{m \rightarrow \infty} a_m = (\lim_{m \rightarrow \infty} a_1^m, \dots, \lim_{m \rightarrow \infty} a_n^m).$$

Dokaz. Definicija limite.

□

1.2 Zveznost preslikav iz \mathbb{R}^n v \mathbb{R}^m

1.2.1 Zveznost preslikav iz \mathbb{R}^n v \mathbb{R}

Opomba. Če je $m = 1$, potem preslikave rečemo *funkcija*.

Definicija 1.8. Naj bo $f : D \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ preslikava. Naj bo $a \in D$. Preslikava f je *zvezna v a* , če

$$\forall \epsilon > 0. \exists \delta > 0. \forall x \in D. d(x, a) < \delta \Rightarrow d(f(x), f(a)) < \epsilon.$$

Definicija 1.9. Naj bo $f : D \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ preslikava. Preslikava f je *zvezna na D* , če je zvezna v vsaki točki $a \in D$.

Definicija 1.10. Naj bo $f : D \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ preslikava. Preslikava f je *enakomerno zvezna na D* , če

$$\forall \epsilon > 0. \exists \delta > 0. \forall x, x' \in D. d(x, x') < \delta \Rightarrow d(f(x), f(x')) < \epsilon.$$

Opomba. Velja karakterizacija zveznosti v točki z zaporedji.

Opomba. Zvezna preslikava na kompaktno množico je enakomerno zvezna.

Definicija 1.11. Preslikava $f : D \rightarrow X'$ je *C-lipschitzova*, če

$$\forall x, x' \in D. d'(f(x), f(x')) \leq C d(x, x').$$

Trditev 1.3. Za preslikavo $f : D \rightarrow X'$ velja:

$$f \text{ je } C\text{-lipschitzova} \Rightarrow f \text{ je enakomerno zvezna} \Rightarrow f \text{ je zvezna}.$$

Trditev 1.4. Naj bosta $f, g : D \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ zvezni funkciji v $a \in D$. Naj bo $\lambda \in \mathbb{R}$. Tedaj so v a zvezni tudi funkcije:

$$f + g, f - g, \lambda f, fg.$$

Dokaz. Z zaporedji kot pri analizi 1. □

Zgled. Nekaj primerov zveznih preslikav.

- Preslikava $\Pi_j(x_1, \dots, x_n) = x_j$ je zvezna na \mathbb{R}^n za vsak $j = 1, \dots, n$.
- Vsi polinomi v n -spremenljivkah so zvezne funkcije na \mathbb{R}^n .
- Vse racionalne funkcije so zvezne povsod, razen tam, kjer je imenovalac enak 0.

Definicija 1.12. Preslikava $f : D \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ je *funkcija n -spremenljivk*.

Opomba. Naj bo (M, d) metrični prostor in $N \subset M$. Naj bo $f : M \rightarrow \mathbb{R}$ zvezna funkcija na M . Potem $f|_N$ je tudi zvezna funkcija na N .

Trditev 1.5. Naj bosta $D \subseteq \mathbb{R}^n$ in $D_j = \Pi_j(D)$. Naj bo $a \in D$, $a = (a_1, \dots, a_n)$ in $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ zvezna v a . Tedaj za vsak $j = 1, \dots, n$ funkcija $\varphi_j : D_j \rightarrow \mathbb{R}$, $\varphi_j(t) = f(a_1, \dots, a_{j-1}, t, a_{j+1}, \dots, a_n)$ zvezna v a_j .

Dokaz. Definicija zveznosti v točki. □

Opomba. Če je funkcija več spremenljivk zvezna v neki točki $a \in \mathbb{R}^n$, je zvezna tudi kot funkcija posameznih spremenljivk.

Zgled. Naj bo $f(x, y) = \begin{cases} \frac{2xy}{x^2+y^2}; & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0; & (x, y) = (0, 0) \end{cases}$. Ali je f zvezna kot funkcija vsake spremenljivke posebej? Ali je f zvezna na \mathbb{R}^2 ?

Zgled. Naj bo $f(x, y) = \begin{cases} \frac{2x^2y}{x^4+y^2}; & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0; & (x, y) = (0, 0) \end{cases}$. Ali je f zvezna kot funkcija vsake spremenljivke posebej? Ali je zvezna na vsaki premici? Ali je f zvezna na \mathbb{R}^2 ?

Opomba. Zgleda pokažeta, da obrat v prejšnji trditvi ne velja.

1.2.2 Zveznost preslikav iz \mathbb{R}^n v \mathbb{R}^m

Naj bo $D \subseteq \mathbb{R}^n$ in $F : D \rightarrow \mathbb{R}^m$ preslikava. Naj bo $x \in D$, potem $F(x) \in \mathbb{R}^m$, $F(x) = y = (y_1, \dots, y_m)$. Lahko pišemo $F(x) = (f_1(x), \dots, f_m(x))$. Torej F določa m funkcij n -spremenljivk.

Trditev 1.6. Naj bo $a \in D \subseteq \mathbb{R}^n$. Naj bo $F = (f_1, \dots, f_m) : D \rightarrow \mathbb{R}^m$ preslikava. Velja:

$$\text{Preslikava } F \text{ je zvezna v } a \Leftrightarrow f_1, \dots, f_m \text{ so zvezne v } a.$$

Dokaz. Definicija zveznosti v točki. □

Opomba. Linearne preslikave so zvezne, saj so vse koordinatne funkcije linearne (polinomi 1. stopnje).

Zgled (Omejenost linearnih preslikav). Naj bo $\mathcal{A} : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ linearna preslikava, potem

$$\exists M \in \mathbb{R}. M \geq 0. \forall x \in \mathbb{R}^n. x \neq 0. \frac{|\mathcal{A}x|}{|x|} \leq M.$$

Lahko zapišemo $\sup \frac{|\mathcal{A}x|}{|x|} = \sup_{|x|=1} |\mathcal{A}x| = \|\mathcal{A}\|$. Dobimo normo na matrikah.

Trdimo: Naj bo $\mathcal{A} : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ linearna preslikava. Tedaj je \mathcal{A} zvezna na \mathbb{R}^n . Zveznost linearnih preslikav je ekvivalentna zveznosti v točki 0. Vse skupaj je ekvivalentno omejenosti linearnih preslikav.

Dokaz. Definicija zveznosti in omejenosti. □

Definicija 1.13. Naj bo $\mathcal{A} : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ linearna preslikava. Preslikavo $\mathcal{A} : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$, $x \mapsto \mathcal{A}x + b$, $b \in \mathbb{R}^m$ imenujemo *afina preslikava*.

1.3 Parcialni odvodi in diferenciability

1.3.1 Parcialni odvod

Definicija 1.14. Naj bo $f : D \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ funkcija. Naj bo $a = (a_1, \dots, a_n) \in D$ notranja točka. Funkcija f je *parcialno odvedljiva* po spremenljivki x_j v točki a , če obstaja limita

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a_1, \dots, a_{j-1}, a_j + h, a_{j+1}, \dots, a_n) - f(a_1, \dots, a_n)}{h},$$

oz. če je funkcija

$$x_j \mapsto f(a_1, \dots, a_{j-1}, x_j, a_{j+1}, \dots, a_n)$$

odvedljiva v točki a_j .

Če je ta limita obstaja, je to *parcialni odvod* funkcije f po spremenljivki x_j v točki a . Oznaki: $\frac{\partial f}{\partial x_j}(a)$, $f_{x_j}(a)$, $(D_j f)(a)$.

Opomba. Vse elementarne funkcije so parcialno odvedljive po vseh spremenljivkah tam, kjer so definirane.

Zgled. Naj bo $f(x, y, z) = e^{x+2y} + \cos(xz^2)$. Potem $f_x(x, y, z) = \frac{\partial f}{\partial x}(x, y, z) = e^{x+2y} - z^2 \sin(xz^2)$.

1.3.2 Diferenciability

Definicija 1.15. Naj bo $f : D \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ funkcija. Naj bo $a = (a_1, \dots, a_n) \in D$ notranja točka. Funkcija f je *diferenciable* v točki a , če obstaja tak linearen funkcional $\mathcal{L} : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, da velja:

$$f(a + h) = f(a) + \mathcal{L}(h) + o(h),$$

kjer $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{o(h)}{|h|} = 0$.

Opomba. Če je tak \mathcal{L} obstaja, je enolično določen.

Dokaz. Pokažemo, da iz $\mathcal{L}(h) = (\mathcal{L}_1 - \mathcal{L}_2)(h) = (o_2 - o_1)(h) = o(h)$ sledi, da je $L = 0$. Zato uporabimo vektor $v = tv_0$, kjer $|v_0| = 1$, $|v| = t$ na linearnem funkcionalu \mathcal{L} . □

Definicija 1.16. Če je f diferenciable v a je \mathcal{L} natanko določen in ga imenujemo *diferencial* funkcije f v točki a . Oznaka: $\mathcal{L} = df_a$. Linearen funkcional \mathcal{L} imenujemo tudi *odvod* funkcije f v točki a . Oznaka: $(Df)(a)$.

Opomba. Recimo, da je funkcija f diferenciable v točki a . Preslikava $h \mapsto f(a) + (df_a)(h)$ je najboljša afina aproksimacija funkcije $h \rightarrow f(a + h)$.

Trditev 1.7. Naj bo $f : D \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ diferenciable v notranji točki $a \in D$. Tedaj je f v a parcialno odvedljiva po vseh spremenljivkah. Poleg tega je zvezna v a . Pri tem za $h = (h_1, \dots, h_n)$ velja:

$$(df_a)(h) = \frac{\partial f}{\partial x_1}(a) \cdot h_1 + \dots + \frac{\partial f}{\partial x_n}(a) \cdot h_n = f_{x_1}(a) \cdot h_1 + \dots + f_{x_n}(a) \cdot h_n$$

Opomba. Naj bo $\mathcal{L} : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ linearen funkcional, $x \in \mathbb{R}^n$, potem $\mathcal{L}(x) = l_1x_1 + \dots + l_nx_n = \begin{bmatrix} l_1 & \dots & l_n \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$,

kjer $\begin{bmatrix} l_1 & \dots & l_n \end{bmatrix}$ matrika linearnega funkcionala glede na standardne baze.

Dokaz. Zveznost pokažemo z limito. Za parcialno odvedljivost pogledimo kaj se dogaja za $h = (h_1, 0, \dots, 0)$. □

Opomba. Trditev pove, da je $(df_a)(h) = \begin{bmatrix} \frac{\partial f}{\partial x_1}(a) & \dots & \frac{\partial f}{\partial x_n}(a) \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} h_1 \\ \vdots \\ h_n \end{bmatrix} = (\frac{\partial f}{\partial x_1}(a), \dots, \frac{\partial f}{\partial x_n}(a)) \cdot (h_1, \dots, h_n)$.

Zapis: $(\vec{\nabla} f)(a) = (\text{grad } f)(a) = (\frac{\partial f}{\partial x_1}(a), \dots, \frac{\partial f}{\partial x_n}(a))$.

Vektor $(\text{grad } f)(a)$ imenujemo *gradient funkcije* f v točki a . Operator $\vec{\nabla} = (\frac{\partial}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial}{\partial x_n})$ je *operator Nabla*.

Zgled. Naj bo $f(x, y) = \begin{cases} \frac{2xy}{x^2+y^2}; & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0; & (x, y) = (0, 0) \end{cases}$. Ali je f diferenciable?

Zgled. Naj bo $f(x, y) = \begin{cases} \frac{2x^2y}{x^2+y^2}; & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0; & (x, y) = (0, 0) \end{cases}$. Ali je f zvezna? Ali je f parcialno odvedljiva? Ali je f diferenciable?

Opomba. Zgleda pokazeta, da obrat v prejšnji trditvi ne velja

Izrek 1.8. Naj bo $f : D \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ funkcija in naj bo $a \in D$ notranja točka. Denimo, da je f parcialno odvedljiva po vseh spremenljivkah v okolici točke a in so parcialni odvodi zvezni v a . Tedaj je f diferenciable v a .