1 Hilbertovi prostori

1. Vektorski prostor s skalarnim produktom
   Naj bo X vektorski prostor nad $\mathbb{R}$ (ali nad $\mathbb{C}$).
   - **Definicija.** Skalarni produkt.
   - **Trditev.** Cauchy-Schwartzova neenakost.
   - **Definicija.** Norma na vektorskem prostoru X.
   - **Trditev.** Norma, ki je dobljena iz skalarnega produkta.
   - **Trditev.** Metrični prostor, porojeni z normo.
2. Hilbertovi prostori
   - **Definicija.** Hilbertov prostor. Banachov prostor.
   - **Zgled.** Standardni skalarni produkti na $\mathbb{R}^n$ in $\mathbb{C}^n$. Norme, ki ne pridejo iz skalarnega produkta.
3. Prostor $L^2([a,b])$
   - **Trditev.** Standardni skalarni produkt na prostoru $C([a,b])$.
   - **Trditev.** Ali je prostor $C([a,b])$ s standardnim skalarnim produktom Hilbertov?
   - **Zgled.** Kako lahko napolnimo prostor $((0,1),d_2)$?
   - **Definicija.** Kadar pravimo, da lahko napolnimo metrični prostor (M,d)? Napolnitev prostora.
   - **Opomba.** Kaj je ponavadi prostor $\overline{M}$?
   - **Opomba.** Prostor $L^1(A)$.
   - **Definicija.** Prostor $L^2([a,b])$.
   - **Opomba.** Ali je produkt dveh $L^2([a,b])$ funkcij $L^1([a,b])$ funkcija? Skalarni produkt na $L^2([a,b])$
   - **Trditev.** Ali je $L^2([a,b])$ vektorski prostor nad $\mathbb{R}$?
   - **Opomba.** Ali je $C([a,b]) \subseteq L^2([a,b])$? Ali je $C([a,b])$ gost v $L^2([a,b])$? Kaj pomeni, da zaporedje $(f_n)_n \in L^2([a,b])$ konvergira k $f \in L^2([a,b])$?
   - **Izrek.** Ali je $L^2([a,b])$ Hilbertov prostor? Kako sta povezana prostora $L^2([a,b])$ in $C([a,b])$? [brez dokaza]
   - **Opomba.** Kako zgleda skalarni produkt nad $\mathbb{C}$?
   - **Zgled.** Navedi primer funkcije ko limita po točkah ni enaka limite v L^2 smislu. Navedi primer funkcije za katero ne obstaja limita po točkah, limita v L^2 smislu pa obstaja.
4. Ortogonalnost
   Naj bo X vektorski prostor s skalarnim produktom, $A \subseteq X$, $A \neq \emptyset$.
   - **Definicija.** Kadar sta dva vektorja pravokotna? Ortogonalni komplement množice A.
   - **Trditev.** Ali je $A^\perp$ vektorski podprostor v X?
   - **Opomba.** V kakšni relaciji sta A in $(A^\perp)^\perp$?
   - **Trditev.** Naj bo $v \in X$. Ali je $f : X \to \mathbb{R},\ f(x) = \langle x,\, v\rangle$ zvezna?
   - **Posledica.** Ali je $A^\perp$ zaprt podprostor v X?
   - **Opomba.** Ali je $C([a,b])$ zaprt podprostor v $L^2([a,b])$?
   - **Opomba.** V kakšni relaciji sta A in $(A^\perp)^\perp$, če je X Hilbertov in A zaprt podprostor?
   - **Trditev.** Pitagorjev izrek.

Naj bo X vektorski prostor s skalarnim produktom, $Y \leq X$ podprostor v X.

- **Definicija.** Pravokotna projekcija vektorja $x \in X$ na podprostor Y.
- **Trditev.** Kaj lahko povemo o pravokotne projekcije vektorja $x \in X$ na Y, če obstaja? TODO: *
- **Zgled.** Ali imajo funkcije iz $L^2([a, b]) \setminus C([a, b])$ najboljšo aproksimacijo z zveznimi funkciji?
- **Opomba.** Lastnosti P_Y:
  - Ali je P_Y idempotent?
  - Kakšna zveza med $||x||$ in $||P_Y(x)||$?
  - Ali je $P_Y : X \to Y$ linearna in zvezna?
  - Ali je Y zaprt podprostor, če je P_Y definirana na X?
  - Recimo, da $P_Y(x)$ obstaja. Ali obstaja tudi $P_{Y^\perp}(x)$?
- **Trditev.** Razvoj $P_Y(x)$ po ONB.

5. Ortogonalni sistem

   Naj bo X vektorski prostor s skalarnim produktom.

   - **Definicija.** Ortogonalni sistem (OS). Ortonormiran sistem (ONS).
   - **Trditev.** Besselova neenakost. TODO: *
   - **Posledica.** Čemu je enaka limita $\lim_{j\to\infty} \langle x, e_j \rangle$?
   - **Opomba.** Zakaj potrebujemo absolutno vrednost? Kaj so $(\langle x, e_j \rangle)_{j=1}^{\infty}$?
   - **Trditev.** Naj bo $(e_j)_{j=1}^{\infty}$ ONS, $(c_j)_j$ tako zaporedje števil, da $\sum_{j=1}^{\infty} |c_j|^2 < \infty$. Kaj potem?
   - **Definicija.** Kompleten ortonormiran sistem (KONS).
   - **Trditev.** 6 ekvivalentnih trditev o KONS. TODO: *