

1 Numerično računanje

Predstavljiva števila

- $x \in P(b, t, L, U) \Rightarrow x = \pm b \cdot b^e$, kjer je $b \in \mathbb{N}$ baza, $e \in \mathbb{Z}$, $L \leq e \leq U$ eksponent za $L, U \in \mathbb{Z}$ in $m = 0.c_1c_2\dots c_t$, $0 \leq c_i \leq b - 1$ mantisa dolžine t . Zahtevamo, da $c_1 = 0 \Rightarrow e = L$ (denormalizirano število).
- Enojna natančnost: $P(2, 24, -125, 128)$, $u \approx 6 \cdot 10^{-8}$.
- Dvojna natančnost: $P(2, 53, -1021, 1023)$, $u \approx 1 \cdot 10^{-16}$.

Zaporedna števila

Naj bosta $x, y \in P(b, t, L, U)$ zaporedni pozitivni normalizirani števili. Zapišemo x v obliku $x = 0.c_1\dots c_t \cdot b^e$. Tedaj

- $y > x \Rightarrow y = x + b^{e-t}$ (z polno mantiso dobimo nov eksponent)
- $y < x \wedge x = 0.1\dots 0 \cdot b^e \Rightarrow y = x - b^{e-t-1}$ (mantisa je na začetku)
- $y < x \Rightarrow y = x - b^{e-t}$ (mantisa ni na začetku)

Prevod v dvojiški sistem števila $n_0.n_1\dots(10) = c_k\dots c_0.d_1\dots(2)$

Celi del: $n_0 = n_1 \cdot 2 + c_0$, $n_1 = n_2 \cdot 2 + c_1, \dots$, $n_k = 0 \cdot 2 + c_k$

Drobni del: $0.n_1\dots 2 = 0.n'_1 \dots + d_1$, $0.n'_1 \dots 2 = 0.n''_1 + d_2, \dots$

Napake pri računanju

Def. Absolutna nap. je $d_a = \hat{x} - x$. Relativna nap. je $d_r = (\hat{x} - x)/x$.

Def. Osnovna zaokrožitvena napaka je $u = \frac{1}{2}b^{1-t}$.

- Pri zaokroževanju vzamemo najbližje predstavljivo število ali število s sodo zadnjo števkjo, če je kandidatov več.
- Napako primerjamo z osnovno.

Nasveti

- Zapišemo $x \in \mathbb{R}$ v obliku $x = (0.c_1\dots c_t + 0.0\dots 0c_{t+1}\dots) \cdot b^e$. K končnemu delu lahko preštejemo b^{-t} , če smo zaokrožili x navzgor v $P(b, t, L, U)$.
- Včasih je treba sešteti geometrijsko vrsto (tudi končno).
- Število $x \in P(b, t, L, U)$ vidimo kot $x = (c_1b^{-1} + \dots + c_tb^{-t})b^e$.
- Koeficienti c_i v bazi b lahko vidimo v bazi b' .

2 Nelinearne enačbe

Bisekcija

Izr. $\forall f \in C([a, b]) \wedge f(a) \cdot f(b) < 0 \Rightarrow \exists c \in (a, b) . f(c) = 0$.

```
s ← b - a
while |s| > ε do
    s ← s/2
    c ← a + s
    if sgn(f(a)) = sgn(f(c)) then
        a ← c
    else
        b ← c
```

- Ne računa ničel sode stopnje ali kompleksne ničle.
- Lahko izračuna lihi pol. Da se izognemo težavam s poli, lahko definiramo novo funkcijo, ki ima enake ničle, vendar nima polov.

Navadna iteracija

Enačbo $f(x) = 0$ prepišemo v ekvivalentno obliko $g(x) = x$. Funkcijo g imenujemo *iteracijska* funkcija, saj rešitev iščemo z iteracijo

$$x_{r+1} = g(x_r), r = 0, 1, \dots$$

Če je g na določenem intervalu, ki vsebuje x_0 skrčitev, zaporedje $(x_r)_r$ konvergira k negibni točki g , ki ustreza ničli funkcije f .

- Konvergenco preverjamo z odvodom: $(x_r)_r \rightarrow \alpha \Leftrightarrow |g'(\alpha)| < 1$.
- Zaporedje $(x_r)_r \rightarrow \alpha$ z redom p , če $g^{(p)}(\alpha) \neq 0$, $g^{(i)}(\alpha) = 0$, $i < p$. V primeru $p = 1$ mora veljati še $|g'(\alpha)| < 1$.

Ocenja konvergencijo: $|x_{r+1} - \alpha| \leq \frac{q}{1-q}|x_{r+1} - x_r|$

Tangentna metoda

Je poseben primer navadne iteracije: $g(x) = x - \frac{f(x)}{f'(x)}$.

- Naj bo $f \in C^2$. Tedaj vse enostavne ničle so privlačne.
- $\forall f \in C^2([a, \infty)) \wedge f' > 0 \wedge f'' > 0 \Rightarrow \forall x_0 \in [a, \infty) . x_r \rightarrow \alpha$.
- $\forall f \in C^2([a, \infty)) \wedge f' < 0 \wedge f'' < 0 \Rightarrow \forall x_0 \in [a, \infty) . x_r \rightarrow \alpha$.

Red konvergenca ugotovimo z odvodom. Prvi je $g'(x) = \frac{f(x)f''(x)}{f'^2(x)}$.

- Če je $f'(\alpha) \neq 0$, konvergenca vsaj kvadratična in $g''(\alpha) = \frac{f''(\alpha)}{f'^2(\alpha)}$.
- Če je $f'(\alpha) = 0$, konvergenca linearna.

Sekantna metoda

Približki računamo z rekurzivno formulo: $x_{r+1} = x_r - \frac{f(x_r)(x_r - x_{r-1})}{f(x_r) - f(x_{r-1})}$.

Nasveti

- Pri računanju koeficientov treba paziti, da je α res negibna točka.
- Poglejmo, če po k korakih pridemo v območje konvergence.

3 Sistemi linearnih enačb

Vektorske in matrične norme

Def. Vektorska norma je preslikava, za katero velja pozitivnost, homogenost in trikotniška neenakost.

Osnovne norme: $\|x\|_p := \sqrt[p]{\sum_{i=1}^n |x_i|^p}$, $\|x\|_\infty := \max_{i \in [n]} |x_i|$.

Def. Matrična norma je preslikava, za katero velja isto kot za vektorsko normo in submultiplikativnost, tj. $\|AB\| \leq \|A\| \cdot \|B\|$.

Def. Operatorska norma: $\|A\| := \max_{x \neq 0} \frac{\|Ax\|}{\|x\|} = \max_{\|x\|=1} \|Ax\|$.

Osnovne matrične norme:

- Frobenius: $\|A\|_F := \sqrt{\sum_{i,j=1}^n |a_{ij}|^2}$;
- $\|A\|_1 = \max_{j \in [n]} \left(\sum_{i=1}^n |a_{ij}| \right)$ (največja abs. vsota v stolpcu);
- $\|A\|_2 = \sigma_1(A) = \max_{i \in [n]} \sqrt{\lambda_i(A^H A)}$ (koren največje lastne vr.);
- $\|A\|_\infty = \max_{i \in [n]} \left(\sum_{j=1}^n |a_{ij}| \right)$ (največja abs. vsota v vrstici).

Trd. Če je $A^H = A$, potem $\|A\|_2 = \rho(A)$.

Izr. Za vse matrične norme: $\forall \lambda \in \lambda(A) . |\lambda| \leq \|A\|$.

Izr. Množenje z unitarno matriko ohranja $\|\cdot\|_F$ in $\|\cdot\|_2$.

Občutljivost sistemov linearnih enačb

Število $\kappa(A) := \|A^{-1}\| \cdot \|A\|$ imenujemo *občutljivost* matrike A . Če je matrika A nesingularna, je $\|A^{-1}\|_2 = \frac{1}{\sigma_n(A)}$. Število $\kappa_2(A) := \frac{\sigma_1(A)}{\sigma_n(A)}$ imenujemo *spektralna občutljivost* matrike A .

Nasveti

- Poračunamo normo po definiciji (vzamemo enotski vektor).

LU razcep

Denimo, da imamo vektor $x \in \mathbb{R}^n$, kjer je $x_k \neq 0$. Želimo z nesingularno matriko L_k uničiti elementi x_{k+1}, \dots, x_n . Ustrezena matrika je $L_k = I - l_k e_k^T$, kjer je $l_k = [0 \ \dots \ 0 \ l_{k+1,k} \ \dots \ l_{nk}]^T$ in $l_{jk} = \frac{x_j}{x_k}$. Velja: $L_k^{-1} = I + l_k e_k^T$ ter $L_k^{-1} \dots L_{n-1}^{-1} = I + \sum_{i=1}^{n-1} l_i e_i^T$.

Izr. Obstaja enoličen razcep $A = LU$ (L sp. tr. z 1 na diag., U zg. tr. $\det U \neq 0 \Leftrightarrow$ Vse vodilne podmatrike $A(1:k, 1:k)$ so nesingularne.

```
for j = 1, ..., n - 1 do
    for i = j + 1, ..., n do
        l_ij ← a_ij / a_jj /* Shranimo v sp. tr. matrike A */
        for k = j + 1, ..., n do
            a_ik ← a_ik - l_ij a_jk
```

Reševanje: 1. $A = LU$, 2. $Ly = b$, 3. $Ux = y$.

Delno pivotiranje

Pred eliminacijo v j -tem stolcu primerjamo po velikosti elemente a_{jj}, \dots, a_{nj} in nato zamenjamo j -to vrstico s tisto, ki vsebuje element z največjo absolutno vrednostjo. Dobimo $PA = LU$.

Izr. Če det $A \neq 0$, potem $\exists P . PA = LU$.

Izračun: $P = I$. Vsakič, ko zamenjamo vrstic in stolcev. Dobimo $PAQ = LU$.

Reševanje: 1. $PA = LU$, 2. $Ly = Pb$, 3. $Ux = y$.

Kompletno pivotiranje

V j -tem stolcu pivotni element izbiramo iz podmatrike $A(j : n, j : n)$ in nato izvedemo zamenjamo vrstic in stolcev. Dobimo $PAQ = LU$.

Izračun: $P = Q = I$. Vsakič zamenjamo vrstice/stolci tudi v P/Q .

Reševanje: 1. $PAQ = LU$, 2. $Ly = Pb$, 3. $Ux' = y$, 4. $x = Qx'$.

Simetrične matrike. Razcep Choleskega

Izr. Vodilne podmatrike s.p.d. matrike so s.p.d.

Izr. Če je $A^T = A$ in $A > 0$, potem $\exists A = LU$ brez pivotiranja in diagonalni elementi U so strogo pozitivni.

Izr. $A^T = A$ in $A > 0 \Leftrightarrow \exists V$ sp. tr. s poz. el. na diag. da je $A = VV^T$.

for $k = 1, \dots, n$ do

$$v_{kk} \leftarrow \sqrt{a_{kk} - \sum_{i=1}^{k-1} v_{ki}^2}$$

for $j = k + 1, \dots, n$ do

$$v_{jk} = (a_{jk} - \sum_{i=1}^{k-1} v_{ji} v_{ki}) / v_{kk}$$

• To je najcenejši test za ugotavljanje pozitivne definitnosti.

Reševanje: 1. $A = VV^T$, 2. $Vy = b$, 3. $V^T x = y$.

4 Sistemi nelinearnih enačb

Rešujemo sistem enačb $F(x) = 0$, kjer je $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$.

Jacobijeva iteracija

Sistem $F(x) = 0$ zapišemo v obliku $x = G(x)$, izberimo $x^{(0)}$ in tvorimo zaporedje $x^{(r+1)} = G(x^{(r)})$ (posplošitev navadne iteracije).

Izr. $\|J_G(\alpha)\| < 1 \Rightarrow (x_r)_r \rightarrow \alpha$.

Izr. α je privlačna $\Leftrightarrow \rho(J_G(\alpha)) < 1$.

Seidel: Zamenjamo v $x_1^{(r)}, \dots, x_{i-1}^{(r)}$ z $x_1^{(r+1)}, \dots, x_{i-1}^{(r+1)}$.

Newtonova metoda

Zaporedje: $x^{(r+1)} = x^{(r)} - J_F(x^{(r)})^{-1} F(x^{(r)})$

Namesto inverza rešimo sistem: $J_F(x^{(r)}) \Delta x^{(r)} = -F(x^{(r)})$.

Broydenova metoda

Naj bo $B_r \approx J_F(x^{(r)})$ približek za Jacobijeve matriko.

Reševanje: 1. $B_r \Delta x^{(r)} = -F(x^{(r)})$, 2. $x^{(r+1)} = x^{(r)} + \Delta x^{(r)}$,

$$3. B_{r+1} = B_r + \frac{F(x^{(r+1)}) - F(x^{(r)}) - B_r \Delta x^{(r)}}{\|\Delta x^{(r)}\|_2^2}.$$

5 Linearni problemi najmanjših kvadratov

Problem je podan z matriko $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$, $m \geq n$, $\text{rang } A = n$ in vektorjem $b \in \mathbb{R}^m$. Iščemo $x \in \mathbb{R}^n$, ki minimizira $\|Ax - b\|_2$.

Normalni sistem

Iščemo najboljšo aproksimacijo $y = Ax \in \text{im } A \subseteq \mathbb{R}^m$ vektorja $b \in \mathbb{R}^m$. To je ravno pravokotna projekcija: $y = P_{\text{im } A}(b) \Leftrightarrow b - Ax \in \text{im } A^\perp$. Ker stolci A tvorijo bazo prostora $\text{im } A$, mora veljati $A^T(b - Ax) = 0$. Dobili smo *normalni sistem*: $A^T Ax = A^T b$.

Izr. Rešitev normalnega sistema $A^T Ax = A^T b$ je rešitev predoločenega sistema $Ax = b$ po metodi najmanjših kvadratov.

Rešitev: 1. $B = A^T A$, $c = A^T b$, 2. $B = VV^T$, 3. $Vy = c$, 4. $V^T x = y$.

- Ni najbolj stabilen.

QR razcep

Denimo, da poznamo razcep $A = QR$, kjer je $Q \in \mathbb{R}^{m \times n}$ z ON stolpcji in $R \in \mathbb{R}^{n \times n}$ zg. tr. Iz normalnega sistema, rešitev po metodi najmanjših kvadratov dobimo, če rešimo sistem $Rx = Q^T b$.

Izr. Za matriko A obstaja enoličen QR razcep.

```

for  $k = 1, \dots, n$  do
     $q_k \leftarrow a_k$                                 /*  $k$ -ti stolpci */
    for  $i = 1, \dots, k - 1$  do
         $r_{ik} \leftarrow q_i^T a_k$                   /* CGS, MGS:  $r_{ik} = q_i^T q_k$  */
         $q_k \leftarrow q_k - r_{ik} q_i$ 
         $r_{kk} \leftarrow \|q_k\|_2$ 
         $q_k \leftarrow q_k / r_{kk}$ 

```

Namesto QR razcep za A izračunamo QR razcep za razširjeno matriko $\begin{bmatrix} A & b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Q & q_{n+1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} R & z \\ 0 & \rho \end{bmatrix}$.

Rešitev: Rešimo $Rx = z$. Minimum $\min \|Ax - b\|_2 = \|\rho q_{n+1}\|_2$

Razširjeni QR razcep: $A = \tilde{Q} \tilde{R}$, kjer je $\tilde{Q} = [Q \ Q_1]$, $\tilde{R} = \begin{bmatrix} R \\ 0 \end{bmatrix}$

in $A = QR$, kjer je $Q \in \mathbb{R}^{m \times m}$ ortogonalna in $R \in \mathbb{R}^{m \times n}$ zg. trap.

Rešitev: Rešimo $Rx = Q^T b$. Minimum $\min \|Ax - b\|_2 = \|Q_1^T b\|_2$

Givensonovi rotacije

Givensonova rotacija je ortogonalna matrika R_{ik}^T , ki je enaka identiteti povsod razen $R_{ik}^T([i, k], [i, k]) = \begin{bmatrix} c & s \\ -s & c \end{bmatrix}$, kjer je $r = \sqrt{x_i^2 + x_k^2}$, $c = x_i/r$, $s = x_k/r$ (če želimo $x_k = 0$).

- Z rotacijami R_{ik}^T uničimo vse elemente pod diagonalo $\rightarrow \tilde{R}$;
- $\tilde{Q} := R_{12}R_{13} \cdots R_{m-1,m}$

Za rešitev sistema na vsakem koraku množimo b z R_{jk}^T .

Householderjeva zrcaljenja

Naj bo $w \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$. Definiramo $P = I - \frac{2}{w^T w} ww^T$: $P = P^T, P^2 = I$. P je zrcaljenje preko hiperravnine, ki je pravokotna na vektor w .

Velja: $Px = x - \frac{1}{\mu}(w^T x)w$, kjer je $\mu = \frac{1}{2}\|w\|_2^2$. Želimo uničiti x_2, \dots, x_n .

Izberimo $w = (x_1 + \text{sgn}(x_1)\|x\|_2, x_2, \dots, x_n)$. Definiramo $\tilde{P}_1 = P$ in

$$\tilde{P}_{i+1} = \begin{bmatrix} I_i & 0 \\ 0 & P_{i+1} \end{bmatrix}.$$

Na koncu iz $\tilde{Q}^T = \tilde{P}_{\min(n, m-1)} \cdots \tilde{P}_1$ dobimo $\tilde{Q} = \tilde{P}_1 \cdots \tilde{P}_{\min(n, m-1)}$.

Za rešitev sistema na vsakem koraku množimo b z \tilde{P}_i .

Lastne vrednosti

Schurova forma

Schur. Za vsako matriko $A \in \mathbb{F}^{n \times n}$ obstajata unitarna matrika U in zg. tr. matrika T , da je $U^H AU = T$. T je Schurova forma.

Potenčna metoda

Naj bo $z_0 \in \mathbb{C}^n$, $\|z_0\| = 1$. Tvorimo $z_{k+1} = Az_k = A^{k+1}z_0$. Dober zaustavitevni kriterij je $\|Az_k - \rho_k z_k\|_2 < \epsilon$, kjer je $\rho_k := \frac{z_k^H Az_k}{z_k^H z_k}$.

Izr. $(z_k)_k \rightarrow \lambda_1$, $|\lambda_1| > |\lambda_2| \geq |\lambda_3| \geq \dots \geq |\lambda_n|$ (dominantna l. vr.)

Redukcija. Vzemimo H. zrcaljenje za $w = \vec{e}_1 - \vec{x}_1$, kjer je x_1 normiran lastni vektor (želimo $x_1 = Ue_1$). Definiramo $B = U^H AU$. Matrika $C = B(2 : n, 2 : n)$ vsebuje ostale lastne vrednosti.

QR iteracija

```

 $A_0 \leftarrow A$ 
for  $k = 0, 1, \dots$  do
     $A_k \leftarrow Q_k R_k$                                 /* Izračunaj QR razcep */
     $A_{k+1} \leftarrow R_k Q_k$ 

```

Zaporedje matrik A_k konvergira proti Schurovi formi.

Def. Matrika A je zgornja Hessenbergova, če je $a_{ij} = 0$ za $i > j + 1$. Najprej poiščemo Householderjevo zrcaljenje, ki uniči elementi pod poddiagonalo. Za x vzamemo vektor pod diagonalo. Nato definiramo $A' = PAP^T$. Če ima Hessenbergova matrika ničlo na poddiagonali, porblem se razpade na dva.

Interpolacija

Dane vrednosti funkcije f v $n + 1$ paroma različnih točkah x_0, \dots, x_n in iščemo interpolacijsko funkcijo g , da $g(x_i) = f(x_i)$ za $i = 0, \dots, n$.

Interpolacijski polinom

Iščemo polinom p_n , $\deg p_n \leq n$, da $p_n(x_i) = y_i$ za $i = 0, \dots, n$.

- V st. bazi dobimo sistem z Vandermondovo matriko (zelo občutljiv).

Izr. Polinom p_n obstaja in enoličen.

Ocena na $[a, b]$: $\forall x \in [a, b]. \exists \xi \in (a, b). f(x) - p_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} \omega(x)$, kjer $\omega(x) := (x - x_0) \cdots (x - x_n)$.

Lagrangeevi bazni polinomi

Za $i \in [n]$ def. $l_{n,i}(x) := \prod_{k=0, k \neq i}^n \frac{x - x_k}{x_i - x_k}$. Velja: $l_{n,i}(x_j) = \delta_{ij}$.

Polinom: $p_n(x) := \sum_{k=0}^n y_k l_{n,k}(x)$.

- Moramo že na začetku določiti stopnjo.

Deljene difference

Def. Naj bojo x_0, \dots, x_k paroma različni. Deljena differenca $[x_0, \dots, x_k]f$ je vodilni koeficient interpolacijskega polinoma za f .

Newtonova oblika. $p_n(x) = [x_0]f + (x - x_0)[x_0, x_1]f + \dots + (x - x_0) \cdots (x - x_{n-1})[x_0, x_1, \dots, x_n]f$.

Izr. Deljena differenca je simetrična funkcija svojih argumentov.

Če dopuščamo ponavljanje točk (ujemanje v odvodih), velja zvezna:

$$[x_0, x_1, \dots, x_k]f = \begin{cases} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}, & x_0 = x_1 = \dots = x_k \\ \frac{[x_1, \dots, x_k]f - [x_0, \dots, x_{k-1}]f}{x_k - x_0}, & \text{sicer.} \end{cases}$$

Deljene difference računamo v trikotni shemi. Koeficienti preberemo iz zgornje diagonale.

Integriranje

Kvadraturne forme

Kvadraturna formula: $\int_a^b f(x) dx = \sum_{i=0}^n w_i f(x_i) + R(f)$, kjer paroma različni točki x_0, \dots, x_n so vozli, $w_i = \int_a^b l_{n,i}(x) dx$ so uteži, $R(f) = \int_a^b \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} \omega(x) dx$ je napaka metode.

Newton-Cotesove formule. Vozle (n) izberimo ekvidistantno (h).

- Zaprti tip: upoštevamo krajišča integracije;

$$- n = 1 : \int_{x_0}^{x_1} f(x) dx = \frac{h}{2}(f_0 + f_1) - \frac{h^3}{12} f''(\xi)$$

$$- n = 2 : \int_{x_0}^{x_2} f(x) dx = \frac{h}{3}(f_0 + 4f_1 + f_2) - \frac{h^5}{90} f^{(4)}(\xi)$$

$$- n = 3 : \int_{x_0}^{x_3} f(x) dx = \frac{3h}{8}(f_0 + 3f_1 + 3f_2 + f_3) - \frac{3h^5}{80} f^{(4)}(\xi)$$

- Odpri tip: ni krajišč.

$$- n = 2 : \int_{x_0}^{x_2} f(x) dx = 2hf_1 + \frac{h^3}{3} f''(\xi)$$

$$- n = 4 : \int_{x_0}^{x_4} f(x) dx = \frac{4h}{3}(2f_1 - f_2 + 2f_3) + \frac{28h^5}{90} f^{(4)}(\xi)$$

Sestavljeni pravila. Interval razdelimo na podintervale. Na vsakem podintervalu uporabimo kvadraturno formulo nizke stopnje.

Linearna algebra

Število potrebnih operacij

- $a, b \in \mathbb{R}^n$, $c = a \cdot b$. Zahtevnost: $2n$ operacij.
- $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $b \in \mathbb{R}^n$, $c = Ab$. Zahtevnost: $2n^2$ operacij.
- $A, B \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $C = AB$. Zahtevnost: $2n^3$ operacij.

Matrike posebne oblike

Def. Matrika $A \in \mathbb{F}^{n \times n}$ je normalna, če $AA^H = A^H A$.

- Če je $\mathbb{F} = \mathbb{C}$ lahko A diagonaliziramo v ONB.

Def. Realna matrika A je simetrična, če $A = A^T$. Kompleksna matrika A je hermitska, če $A = A^H$.

- Vse lastne vrednosti so realne.

Def. Matrika A je pozitivno definitna, če $\forall x \neq 0. x^H Ax > 0$.

Ekv.: vse lastne vrednosti so pozitivne. Podobno def. semidefinitnost.

- Za vsa $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$ je $B = A^H A$ hermitska in pozitivno semidefinitna. Kvadratne korene $\sigma_1 \geq \dots \geq \sigma_n \geq 0$ lastnih vrednosti matrike $A^H A$ imenujemo singularne vrednosti matrike A .

Def. Realna matrika Q je ortogonalna, če je $Q^{-1} = Q^T$. Kompleksna matrika U je unitarna, če je $U^{-1} = U^H$.

- Ortogonalne/unitarne matrike so izometrije, tj. $\|Ux\| = \|x\|$.
- $A \in \mathbb{F}^{n \times n}$ je ortogonalna/unitarna \Leftrightarrow stolci A tvorijo ONB za \mathbb{F}^n .
- Lastne vrednosti imajo absolutno vrednost 1.

Def. Spektralni radij $A \in \mathbb{F}^{n \times n}$ je $\rho(A) := \max_{i \in [n]} \{|\lambda_i(A)|\}$.

Invarianti

- $\text{tr}(AB) = \text{tr}(BA)$.
- Če je A podobna B , tedaj $\text{tr } A = \text{tr } B$.

Uporabno

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}^{-1} = \frac{1}{ad - bc} \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$$

Splošno

Vrstne

$$\sum_{i=1}^{\infty} q^i = \frac{q_1}{1-q} \text{ za } |q| < 1, \sum_{i=1}^n q^i = \frac{q_1(1-q^n)}{1-q}$$

Število računskej operacij

Vse zanke v alg. zamenjamo z vsotami in seštejemo # osnovnih op.

$$\sum_{i=1}^n i = \frac{n(n+1)}{2}, \quad \sum_{i=1}^n i^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}, \quad \sum_{i=1}^n i^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}$$

Ocene za norme

$$\bullet \|x\|_2 \leq \|x\|_1 \leq \sqrt{n} \|x\|_2, \|x\|_\infty \leq \|x\|_2 \leq \sqrt{n} \|x\|_\infty$$

$$\bullet \frac{1}{\sqrt{n}} \|A\|_F \leq \|A\|_2 \leq \|A\|_F, \frac{1}{\sqrt{n}} \|A\|_1 \leq \|A\|_2 \leq \sqrt{n} \|A\|_1$$

$$\bullet \frac{1}{\sqrt{n}} \|A\|_\infty \leq \|A\|_2 \leq \sqrt{n} \|A\|_\infty, \|A\|_2 \leq \sqrt{\|A\|_1 \|A\|_\infty}$$