

Spolšna topologija

18. oktober 2024

Metrični prostori

0.1 Metrični prostori

Definicija 0.1. *Metrični prostor* je množica X skupaj z preslikavo $d : X \times X \rightarrow \mathbb{R}$, za katero velja:

- $d(x, x') = 0 \Leftrightarrow x = x'$,
- $d(x, x') = d(x', x)$,
- $d(x, x'') \leq d(x, x') + d(x', x'')$.

Definicija 0.2. Naj bo (X, d) metrični prostor.

- *Odprta krogl* s središčem a in polmerom r je množica $K(a, r) = \{x \in X; d(a, x) < r\}$.
- *Zaprta krogl* s središčem a in polmerom r je množica $K(a, r) = \{x \in X; d(a, x) \leq r\}$.
- *Okolica točke* a je vsaka taka množica, ki vsebuje odprto krogl $K(a, r)$ za nek $r > 0$.

Definicija 0.3. Naj bo (X, d) metrični prostor in $A \subset X$.

- Točka $x \in X$ je *notranja točka množice* A , če obstaja $r > 0$, da $K(a, r) \subset A$.
- Točka $a \in X$ je *zunanja točka množice* A , če obstaja $r > 0$, da $K(a, r) \cap A = \emptyset$.
- Točka $a \in X$ je *robna točka množice* A , če vsaka njena okolica seka A in A^c .

Množico $\text{Int } A$ vseh notranjih točk množice A imenujemo *notranjost od* A .

Množico $\text{Cl } A$ vseh točk, za katere obstaja nek $r > 0$, da $K(a, r)$ seka kot A , tako in A^c , imenujemo *zaprtje množice* A .

Množico ∂A vseh robnih točk množice A imenujemo *meja množice* A .

Trditev 0.1. *Naj bo (X, d) metrični prostor in $A \subset X$. Velja:*

- $\partial A = \text{Cl } A \setminus \text{Int } A$.
- $\text{Cl } A = \text{Int } A \cup \partial A$.
- $\text{Int } A = \text{Cl } A \setminus \partial A$.

Definicija 0.4. Naj bo (X, d) metrični prostor in $A \subset X$.

- Množica A je *odprta* v metričnem prostoru X , če je vsaka njena točka notranja.
- Množica A je *zaprta* v metričnem prostoru X , če vsebuje vse svoje robne točke.

Trditev 0.2. *Naj bo (X, d) metrični prostor in $A \subset X$, potem*

$$A \text{ je odprta} \Leftrightarrow A^c \text{ je zaprt.}$$

Izrek 0.3. *Naj bo O družina vseh odprtih množic metričnega prostora (X, d) . Potem*

- $X \in O, \emptyset \in O$.
- Če je $A_\lambda \in O$ za vsak $\lambda \in \Lambda$, potem $\bigcup_{\lambda \in \Lambda} A_\lambda \in O$.
- Če je $n \in \mathbb{N}$ in $A_j \in O$ za vsak $j = 1, 2, \dots, n$, potem $\bigcap_{j=1}^n A_j \in O$.

Trditev 0.4. *Vsaka odprta krogl je odprta množica in vsaka zaprta krogl je zaprta množica.*

Trditev 0.5. *Naj bo (X, d) metrični prostor in $A \subset X$, potem*

$$A \text{ je odprta} \Leftrightarrow A \text{ lahko predstavimo kot unijo odprtih krogel.}$$

Definicija 0.5. Naj bo (X, d) metrični prostor in $A \subset X$. Točka $a \in X$ je *stekališče množice* A , če vsaka okolica točke a vsebuje neskončno mnogo točk iz množice A .

Trditev 0.6. *Naj bo (X, d) metrični prostor in $A \subset X$. Potem*

$$A \text{ je zaprta} \Leftrightarrow A \text{ vsebuje vsa svoja stekališča.}$$

0.2 Zaporedja v metričnih prostorih

Definicija 0.6. Naj bo (X, d) metrični prostor. *Zaporedje v metričnem prostoru X je preslikava $\mathbb{N} \rightarrow X$.*

Definicija 0.7. Naj bo (X, d) metrični prostor. Pravimo, da zaporedje $(a_n)_n$ v X *konvergira proti $a \in X$, če*

$$\forall \epsilon > 0. \exists n_0 \in \mathbb{N}. \forall n \in \mathbb{N}. n \geq n_0 \Rightarrow d(a_n, a) < \epsilon.$$

V tem primeru a imenujemo *limita zaporedja*.

Definicija 0.8. Naj bo (X, d) metrični prostor. Pravimo, da zaporedje $(a_n)_n$ v X *izpolnjuje Cauchyjev pogoj, če*

$$\forall \epsilon > 0. \exists n_0 \in \mathbb{N}. \forall n, m \in \mathbb{N}. n, m \geq n_0 \Rightarrow d(a_n, a_m) < \epsilon.$$

Izrek 0.7. *Vsako konvergentno zaporedje v metričnem prostoru (X, d) izpolnjuje Cauchyjev pogoj.*

Definicija 0.9. Pravimo, da je metrični prostor (X, d) *poln*, če je vsako Cauchyjevo zaporedje iz X tudi konvergentno v X .

Izrek 0.8. *Naj bo $C[a, b]$ z običajno (supremum) metriko. Tedaj*

$$(f_n)_n \text{ v } C[a, b] \text{ konvergira proti } f \in C[a, b] \Leftrightarrow (f_n)_n \text{ enakomerno konvergira proti } f \text{ na } [a, b].$$

Izrek 0.9. *Metrični prostor $(C[a, b], d_\infty)$ je poln metrični prostor.*

0.3 Preslikave med metričnimi prostori

Naj bosta (X, d) in (X', d') metrična prostora. Naj bo $D \subset X$, $D \neq \emptyset$. Obravnamo preslikave $f : D \rightarrow X'$.

Definicija 0.10. Preslikava $f : D \rightarrow X'$ je *zvezna v točki $a \in X$, če*

$$\forall \epsilon > 0. \exists \delta > 0. \forall x \in D. d(x, a) < \delta \Rightarrow d'(f(x), f(a)) < \epsilon.$$

Izrek 0.10. *Preslikava $f : D \rightarrow X'$ je zvezna v točki $a \in D$ natanko tedaj, ko za vsako zaporedje $(x_n)_n$ v D , ki konvergira proti $a \in D$, zaporedje $(f(x_n))_n$ v X' konvergira proti $f(a) \in X'$.*

Definicija 0.11. Pravimo, da je preslikava $f : D \rightarrow X'$ *zvezna*, če je zvezna v vsaki točki iz D .

Izrek 0.11. *Dana je preslikava $f : D \rightarrow X'$. Preslikava f je zvezna natanko tedaj, ko prasluka vsake odprte množice v X' je odprta v D .*

Definicija 0.12. Preslikava $f : D \rightarrow X'$ je *enakomerno zvezna*, če

$$\forall \epsilon > 0. \exists \delta > 0. \forall x, x' \in D. d(x, x') < \delta \Rightarrow d'(f(x), f(x')) < \epsilon.$$

Definicija 0.13. Preslikava $f : D \rightarrow X'$ je *C-lipschitzova*, če

$$\forall x, x' \in D. d'(f(x), f(x')) \leq C d(x, x').$$

Trditev 0.12. *Za preslikavo $f : D \rightarrow X'$ velja:*

$$f \text{ je } C\text{-lipschitzova} \Rightarrow f \text{ je enakomerno zvezna} \Rightarrow f \text{ je zvezna}.$$

1 Prostori in preslikave

1.1 Topološki prostori

Definicija 1.1. Naj bo X množica. *Topologija* na množici X je družina $\mathcal{T} \subseteq P(X)$, ki zadošča naslednjim pogojem:

(T0) $\emptyset \in \mathcal{T}$, $X \in \mathcal{T}$.

(T1) Poljubna unija elementov \mathcal{T} je element \mathcal{T} .

(T2) Poljuben končen presek elementov \mathcal{T} je element \mathcal{T} .

Elemente \mathcal{T} razglasimo za *odprte množice* v X .

Opomba. Aksiom (T2) zadošča preveriti za poljubne dve množici in uporabiti indukcijo.

Definicija 1.2. *Topološki prostor* je množica X z neko topologijo \mathcal{T} . Pišemo: (X, \mathcal{T}) .

Primer (Topologija iz metrike). Naj bo (X, d) metrični prostor. Definiramo $\mathcal{T}_d = \{\text{vse možne unije odprtih krogel}\}$. \mathcal{T}_d je topologija, ki je *porojena* (*inducirana*) z metriko d .

Definicija 1.3. Topološki prostor je *metrizabilen*, če je porojen z neko metriko.

Primer (Trivialna topologija). Naj bo X poljubna množica. Definiramo $\mathcal{T} = \{\emptyset, X\}$. \mathcal{T} je topologija, rečemo ji *trivialna topologija*.

Trivialna topologija ni metrizabilna, če ima X vsaj 2 elementa, ker v metričnem prostoru z množico z vsaj 2 elementoma vedno lahko najdemo disjunktne odprte krogle.

Primer (Diskretna topologija). Definiramo $\mathcal{T} = P(X)$. \mathcal{T} je topologija, rečemo ji *diskretna topologija*.

Je metrizabilna, ker inducirana z metriko $d(x, x') = \begin{cases} 0, & x = x' \\ 1, & x \neq x' \end{cases}$. Ker krogle s polmerom manj kot 1 vsebujejo le središče, sklepamo, da so vse enoelementne množice odprte. Potem so pa vse podmnožice X odprte, saj jih lahko predstavimo kot unije enoelementnih.

Opomba. Topologija poda pojem *bližine* na implicitni način z pomočjo okolice.

Definicija 1.4. Naj bo (X, \mathcal{T}) topološki prostor in $A \subseteq X$. *Notranjost množice* A je največji element topologije \mathcal{T} , ki je vsebovan v A . Oznaka: $\text{Int } A$.

Opomba. Zakaj je definicija smiselna?

- Pogoj za notranjo točko: $x \in U \subseteq A$, kjer $U \in \mathcal{T}$.
- $\text{Int } A$ je unija vseh odprtih množic, ki so vsebovane v A , torej $\text{Int } A = \bigcup \{U \in \mathcal{T}; U \subseteq A\}$. Sledi, da je $\text{Int } A$ največja odprta podmnožica A .

Definicija 1.5. Naj bo (X, \mathcal{T}) topološki prostor in $A \subseteq X$. Množica A je *zaprtá*, če je $A^c = X - A \in \mathcal{T}$.

Opomba. Lahko topologijo vpeljemo tudi tako, da predpišemo, katere množice so zaprte.

Denimo, da je dana družina Z podmnožic X , za katero velja:

(T0) $\emptyset \in Z$, $X \in Z$.

(T1) Poljuben presek elementov Z je element Z .

(T2) Poljubna končna unija elementov Z je element Z .

Potem komplementi množic iz Z tvorijo topologijo na X in Z je ravno družina zaprtih množic v tej topologiji.

Primer. Če zahtevamo, da so točke X zaprte množice, potem so tudi končne podmnožice X so zaprte. Torej družina

$$\{\text{končne podmnožice } X\} \cup \{X\}$$

zadošča zahtevam (T1) in (T2). Torej komplementi

$$\mathcal{T} = \{U \subset X; X - U \text{ končna}\} \cup \{\emptyset\}$$

so topologija na X . Tej topologiji rečemo *topologija končnih komplementov* \mathcal{T}_{kk} .

Topologija končnih komplementov je najmanjša topologija v kateri vse točke zaprte.

Če je X končna, potem $\mathcal{T}_{kk} = \mathcal{T}_{\text{disk}}$ na X .

Definicija 1.6. Naj bo (X, \mathcal{T}) topološki prostor in $A \subseteq X$. *Zaprtje množice* A je presek vseh zaprtih množic, ki vsebujejo A . Torej zaprtje množice A je najmanjša zaprta množica v X , ki vsebuje A . Oznaka: $\text{Cl } A = \overline{A}$.

Primer. Velja:

- $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cup \overline{B}$. *Dokaz.* Definicija zaprtja.
- $\overline{A \cap B} \subseteq \overline{A} \cap \overline{B}$. *Dokaz.* Definicija zaprtja in $(\mathbb{N}, \mathcal{T}_{kk})$.

Definicija 1.7. Naj bo (X, \mathcal{T}) topološki prostor in $A \subseteq X$. *Meja množice* A je $\text{Fr } A = \text{Cl } A - \text{Int } A$.

Opomba. Meja A je vedno zaprta množica, saj $\text{Fr } A = \text{Cl } A - \text{Int } A = \text{Cl } A \cap (\text{Int } A)^c$.

1.2 Zvezne preslikave

Definicija 1.8. Naj bosta (X, \mathcal{T}_X) in (Y, \mathcal{T}_Y) topološka prostora. Preslikava $f : (X, \mathcal{T}_X) \rightarrow (Y, \mathcal{T}_Y)$ je *zvezna*, če je prasluka vsake odprte množice odprta, tj. če iz $V \in \mathcal{T}_Y$ sledi $f^*(V) \in \mathcal{T}_X$.

Primer. Primeri zveznih preslikav.

1. Vse zvezne funkcije v smislu metričnih prostorov so zvezne kot funkcije med porojenimi topologijami.
2. Naj bo $f : (X, \mathcal{T}_X) \rightarrow (Y, \mathcal{T}_Y)$.
 - 2.1 Naj bo \mathcal{T}_Y trivijalna topologija, potem f je vedno zvezna.
 - 2.2 Naj bo \mathcal{T}_X diskretna topologija, potem f je vedno zvezna.
3. Naj bosta (X, \mathcal{T}) in (X, \mathcal{T}') topološka prostora. Funkcija $\text{id} : X \rightarrow X'$ je zvezna natanko tedaj, ko $\mathcal{T}' \subseteq \mathcal{T}$.
4. Če je $f : (X, \mathcal{T}_X) \rightarrow (Y, \mathcal{T}_Y)$ konstanta, tj. $\exists y_0 \in Y . \forall x \in X . f(x) = y_0$, potem je f zvezna.
5. Naj bo $f : (\mathbb{R}, \mathcal{T}_{\text{kk}}) \rightarrow (\mathbb{R}, \mathcal{T}_{\text{evkl}})$. Potem konstante so edine zvezne funkcije.

Dokaz. V $(X, \mathcal{T}_{\text{kk}})$ ni disjunktnih nepraznih odprtih množic, če je X neskončna.

Splošneje. Naj bosta X, Y neskončni množici, d metrika na Y . Naj bo $f : (X, \mathcal{T}_{\text{kk}}) \rightarrow (Y, \mathcal{T}_d)$. Potem

$$f \text{ je zvezna} \Leftrightarrow f \text{ je konstanta.}$$

Uvedemo neke oznake in okrajšave:

- Naj bosta $(X, \mathcal{T}_X), (Y, \mathcal{T}_Y)$ topološka prostota. Označimo z $C((X, \mathcal{T}_X), (Y, \mathcal{T}_Y))$ množico vseh zveznih preslikav $C(X, Y)$. Tudi $C(X) = C(X, \mathbb{R})$.
- *Prostor* X je množica z neko topologijo.
- *Preslikava* je zvezna funkcija.

Trditev 1.1. Kompozitun preslikav je preslikava.

Dokaz. Definicija zveznosti. □

Trditev 1.2. Naj bosta X, Y prostora. Ekvivalentne so izjave za $f : X \rightarrow Y$:

1. f je zvezna.
2. Prasluka z f vsake zaprte množice je zaprta.
3. $f(\overline{A}) \subseteq \overline{f(A)}$.

Dokaz. (1) \Leftrightarrow (2). $f^*(A^c) = (f^*(A))^c$.

(2) \Leftrightarrow (3). LMN: $A \subseteq f^*(f(A))$, $f(f^*(B)) \subseteq B$. Monotonost f_*, f^* . STOP: $f^*(B)$ je zaprta $\Leftrightarrow f^*(B) = \overline{f^*(B)}$. □

1.3 Homeomorfizmi

Definicija 1.9. Naj bo $f : (X, \mathcal{T}_X) \rightarrow (Y, \mathcal{T}_Y)$ funkcija. Funkcija f je *homeomorfizem*, če:

- f je bijekcija.
- f_* je bijekcija med \mathcal{T}_X in \mathcal{T}_Y , tj. $\forall U \in \mathcal{T}_X . f_*(U) \in \mathcal{T}_Y \wedge \forall V \in \mathcal{T}_Y . f^*(V) \in \mathcal{T}_X$.

Opomba. Pogoji $\forall V \in \mathcal{T}_Y . f^*(V) \in \mathcal{T}_X$ je ravno zveznost funkcije f .

Definicija 1.10. Če obstaja homeomorfizem $f : (X, \mathcal{T}_X) \rightarrow (Y, \mathcal{T}_Y)$, potem rečemo, da sta prostora X in Y *homeomorfna*. Oznaka: $X \approx Y$.

Opomba. Homeomorfizem je ekvivalenčna relacija. To pomeni, da lahko dokažemo, da sta dva prostora homeomorfna, če pokažemo, da sta vsak od njih homeomorfen nekemu drugemu.

Definicija 1.11. Funkcija $f : (X, \mathcal{T}_X) \rightarrow (Y, \mathcal{T}_Y)$ je *odprta*, če je slika vsake odprte množice odprta. Funkcija f je *zaprta*, če je slika vsake zaprte množice zaprta.

Trditev 1.3. Naslednje izjave o funkciji $f : X \rightarrow Y$ so ekvivalentne:

1. $f : X \rightarrow Y$ je homeomorfizem.
2. f je bijektivna, f in f^{-1} sta zvezni.
3. f je bijektivna, zvezna in odprta.
4. f je bijektivna, zvezna in zaprta.

Dokaz. Očitne implikacije. □

Primer. Ali sta prostora $[0, 1) \cup \{2\}$ in $[0, 1]$ homeomorfna? Ali inverz zvezne bijekcije vedno zvezen?

Trditev 1.4. Nekatere zvezne funkcije so avtomatično zaprte (oz. odprte):

- $f^{zv} : X^{komp} \rightarrow Y^{metr}$ je vedno zaprta.
- Projekcija $X \times Y \rightarrow X$ je vedno odprta.
- Preslikave $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$, ki so gladke in imajo neničelni odvod, so vedno odprte.

Primer. Pokaži, da vsak interval (končen ali neskončen) homeomorfen enemu izmed $[0, 1]$, $[0, 1)$, $(0, 1)$. Pokaži, da intervali $[0, 1]$, $[0, 1)$, $(0, 1)$ niso paroma homeomorfni.

Definicija 1.12. Topološka lastnost je katerakoli lastnost prostora, ki se ohranja pri homeomorfizmih.

Primer. Ali je kompaktnost/omejenost/polnost topološka lastnost?

Upeljamo oznake:

- $B^n := \{\vec{x} \in \mathbb{R}^n; \|\vec{x}\| \leq 1\}$ je enotska n -krogla.
- $\mathring{B}^n := \{\vec{x} \in \mathbb{R}^n; \|\vec{x}\| < 1\}$ je odprta enotska n -krogla.
- $S^{n-1} := \{\vec{x} \in \mathbb{R}^n; \|\vec{x}\| = 1\}$ je enotska $(n-1)$ -sfera.

Homeomorfizem med $(0, 1)$ in \mathbb{R} lahko posplošimo do homeomorfizma med odprto kroglo \mathring{B}^n in \mathbb{R}^n . Navaden homeomorfizem je

$$f : \mathring{B}^n \rightarrow \mathbb{R}^n, \quad f(\vec{x}) := \frac{\vec{x}}{1 - \|\vec{x}\|}, \quad f^{-1}(\vec{x}) := \frac{\vec{x}}{1 + \|\vec{x}\|},$$

tj, raztegnimo vsak poltrak od 0 do ∞ .

Sfera v \mathbb{R}^n topološko bolj podobna \mathbb{R}^{n-1} kot \mathbb{R}^n .

Naj bo $N = (0, \dots, 0, 1) \in \mathbb{R}^n$ severni tečaj sfere. Navaden homeomorfizem med $S^{n-1} - \{N\}$ in \mathbb{R}^{n-1} je

$$f : S^{n-1} - \{N\} \rightarrow \mathbb{R}^{n-1}, \quad f(x_1, \dots, x_n) = \frac{1}{1 - x_n}(x_1, \dots, x_{n-1}),$$

tj. gledamo presek premic skozi točki N in $T \in S^{n-1}$ z ravnino \mathbb{R}^{n-1} .

Njen inverz je dan z

$$\mathbb{R}^{n-1} \rightarrow S^{n-1} - \{N\}, \quad g(\vec{x}) = \left(\frac{2\vec{x}}{\|\vec{x}\|^2 + 1}, \frac{\|\vec{x}\|^2 - 1}{\|\vec{x}\|^2 + 1} \right).$$

Bijekcijo f imenujemo *stereografska projekcija*.

Sledi, da $S^{n-1} - \{N\} \approx \mathbb{R}^{n-1}$. Jasno je, da bi enak rezultat dobili, če bi iz sfere izrezali katerokoli točko. Sklepamo, da ime vsaka točka S^{n-1} okolico, ki je homeomorfna \mathbb{R}^{n-1} . Pravimo, da je S^{n-1} *lokalno homeomorfna* prostoru \mathbb{R}^{n-1} .

Definicija 1.13. Prostore, ki so lokalno homeomorfne kakemu evklidskemu prostoru, imenujemo *mnogoterosti*.

2 Dodatek

TODO. Lastnosti uniji in preseka.

TODO. Lastnosti slike in praslike.

TODO. Lastnosti metričnih prostorov (kompaktnost, polnost). Kaj ohranjajo zvezne funkcije med m. prostoroma? (kompaktnost).