Splošno

- Lahko izračunamo spremembo posamezne energije v odvisnosti od časa:
  - $W_\mathrm{k}(t) = \frac{1}{2}mv^2(t)$ in $W_\mathrm{p}(t) = mgh(t)$.
- **II. Newtonov zakon za vrtenje:** $\sum \vec{M} = J\vec{\alpha}$
- **Steinerjev izrek:** Vztrajnostni moment J_ξ okrog osi ξ je enak $J_\xi = J_T + mx^2$, kjer je J_T vztrajnostni moment okoli vzporedne osi skozi težišče, x pa razdalja med osema.

1 Mehansko nihanje in valovanje

1.1 Nihanje brez dušenja

Nihalo na vijačni vzmet

- Enačba gibanja:
  - Zapišimo vse sile, ki delujejo na telo, ko je ono odmaknjeno za y od ravnovesne lege
  - Zapišemo II. Newtonov zakon. Dobimo enačbo $\ddot{y} + \omega_0^2 y = 0$
    * Splošna rešitev (vsota dveh posameznih rešitev): $y(t) = A\cos(\omega_0 t) + B\sin(\omega_0 t)$
    * Lahko jo zapišemo v obliki $y(t) = C\sin(\omega_0 t + \delta)$, $C > 0$, kjer $C = \sqrt{A^2 + B^2}$ in $\delta = \arctan\frac{B}{A}$.
  - Konstante določimo iz začetnih pogojev (položaj in hitrost pri $t = 0$).
    * Začetni trenutek (ki ustreza času $t = 0$) lahko izberimo poljubno
- Energija nihanja ($W = W_\mathrm{k} + W_\mathrm{p} + W_\mathrm{pr} - \frac{1}{2}ky_r^2 = \mathrm{const}$):
  - $W_\mathrm{k} = \frac{1}{2}m\dot{y}^2,\ W_\mathrm{p} = -mgy,\ W_\mathrm{pr} = \frac{1}{2}k(y + y_r)^2$
- Osnovne količine:
  - $\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$, ω_0 je **lastna frekvenca**
  - $t_0 = \frac{2\pi}{\omega_0} = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}},\ \nu = \frac{1}{t_0},\ \omega_0 = 2\pi\nu$, t_0 je **nihajni čas**

Matematično nihalo

- Enačba gibanja:
  - Zapišemo navor na točkasto telo: $\vec{M} = \vec{r} \times (\sum \vec{F})$
  - Zapišemo II. Newtonov zakon za vrtenje. Dobimo enačbo $\ddot{\phi} + \omega_0^2\phi = 0$
- Energija nihanja ($W = W_k + W_p = \mathrm{const}$):
  - $W_\mathrm{k} = \frac{1}{2}m(l\dot{\phi})^2,\ W_\mathrm{p} = -mgl\cos\phi \approx -mgl(1 - \frac{\phi^2}{2})$
- Osnovne količine:
  - $\omega_0 = \sqrt{\frac{g}{l}}$
  - $t_0 = \frac{2\pi}{\omega_0} = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}},\ \nu = \frac{1}{t_0},\ \omega_0 = 2\pi\nu$
    * Če kroglica pri nihanju zadeva v horizontalni drog: $\tilde{t_0} = \frac{t_0}{2} + \frac{t_0'}{2}$, kjer je t_0' nihajni čas okrog droga.
  - $v_\mathrm{max} = l\dot{\phi}_\mathrm{max}$ (ali preko energije)

Fizično nihalo

- Enačba gibanja:
  - Zapišemo navor na togo telo: $\vec{M} = \vec{M}_T + \vec{M}_* = \vec{r}_T \times (\sum_j \vec{F}_j) + \sum_j(\vec{r}_j \times (\sum' \vec{F}_j))$
  - Zapišemo II. Newtonov zakon za vrtenje. Dobimo enačbo $\ddot{\phi} + \omega_0^2\phi = 0$
    * J_z izračunamo z uporabo Steinerjevega izreka
- Osnovne količine:
  - $\omega_0 = \sqrt{\frac{mgl^*}{J_z}}$
  - $t_0 = \frac{2\pi}{\omega_0} = 2\pi\sqrt{\frac{J_z}{mgl^*}},\ \nu = \frac{1}{t_0},\ \omega_0 = 2\pi\nu$

Torzijska vzmet (okrožna)

- $F = kx \rightsquigarrow \vec{M} = D\vec{\phi}$, $\vec{M}$ poskuša zavrteti vzmet nazaj, tj. ponavadi kaže v nasprotno smer od $\vec{\phi}$
- $\sum\vec{F} = m\vec{a} \rightsquigarrow \sum\vec{M} = J\vec{\alpha}$

Splošni nasveti

- Lahko obravnavamo gibanje v neinercialnem sistemu z upoštevanjem sistemskih sil.

1.2 Dušeno nihanje

- Enačba gibanja:
  - Zapišimo vse sile, ki delujejo na telo, ko je ono odmaknjeno za y od ravnovesne lege
    - Arhimedova sila normalizira silo teže in v končne faze ni pomembna.
  - Zapišemo II. Newtonov zakon. Dobimo enačbo $\ddot{y} + 2\beta y + \omega_0^2 y = 0$
    - Rešujemo z nastavkom $x(t) = Ae^{\lambda t}$
    - Splošna rešitev: $y(t) = A\exp((-\beta + i\omega)t) + B\exp((-\beta - i\omega)t)$, kjer $\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \beta^2}$
    - Lahko jo zapišemo v obliki $y(t) = C\exp(-\beta t)\sin(\omega t + \delta),\ C > 0$, kjer $C = \sqrt{A^2 + B^2}$ in $\delta = \arctan \frac{B}{A}$
- Zakoni upora:
  - Linearni zakon: $\vec{F} = C\vec{v}$. Ponavadi označimo $\beta = \frac{C}{m}$ ali $2\beta = \frac{C}{m}$ in β imenujemo **koeficient dušenja**

1.3 Vsiljeno nihanje

- Enačba gibanja:
  - Zapišimo vse sile, ki delujejo na telo, ko je ono odmaknjeno za y od ravnovesne lege
  - Zapišemo II. Newtonov zakon. Dobimo enačbo $\ddot{y} + 2\beta\dot{y} + \omega_0^2 y = \frac{F_0}{m}\sin(\omega_v t)$
  - Splošna rešitev je oblike $y = y_h + y_p$
    - Nastavek: $y(t) = y_0\exp(-\beta t)\sin(\omega t + \delta) + B_p\sin(\omega_v t - \delta_p)$, kjer $\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \beta^2}$
    - y_h se zaduši za dovolj velike čase
- Vrednosti B_p in δ_p:
  - Izračunamo jih tako, da vstavimo nastavek v enačbo in izberimo $t_1 = 0$ in $t_2 = \dfrac{\pi}{2\omega_v}$
  - V primeru harmoničnega vsiljevanja: $\tan\delta_p = \dfrac{2\beta\omega_v}{\omega_0^2 - \omega_v^2},\ \delta_p \in [0, \pi]$ in $B_p = \dfrac{F_0}{m}\dfrac{1}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega_v^2)^2 + (2\beta\omega_v)^2}}$, kjer je F_0 amplituda sile vzbujanja
  - Pogoj za maksimalni odmik, hitrost, pospešek: odvajamo partikularni del
- Moč pri vsiljenem nihanju:
  - Povprečna moč: $\overline{P} = \beta m B_p^2 \omega_v^2$
  - Pogoj za največjo moč: $\nu_v = \nu_0$

1.4 Sestavljeno nihanje

- Enačba gibanja (nihalo na vijačni vzmet):
  - Zapišemo vse sile, ki delujejo na nihali
  - Zapišemo II. Newtonov zakon za vsako nihalo posebej. Dobimo enačbi:
    - $\ddot{x}_1 + \omega_1^2 x_1 + \omega_2^2(x_1 - x_2) = 0$
    - $\ddot{x}_2 + \omega_1^2 x_2 - \omega_2^2(x_1 - x_2) = 0$
  - Definiramo težiščni odmik: $\phi^* = \phi_1 + \phi_2$ in relativni odmik $x_r = x_2 - x_1$. Seštejemo in odštejemo enačbi, dobimo dve enačbi za vsako funkcijo posebej, ki imata rešitvi:
    - $x_1 = B_1\sin(\omega_a t + \delta_a) + B_2\sin(\omega_b t + \delta_b)$
    - $x_2 = B_1\sin(\omega_a t + \delta_a) - B_2\sin(\omega_b t + \delta_b)$
  - Zveze med prvotnimi enačbi in rezultatom:
    - $\omega_a = \omega_1$ in $\omega_b = \sqrt{\omega_1^2 + 2\omega_2^2}$
    - $x_1 = \dfrac{x^* - x_r}{2}$ in $x_2 = \dfrac{x^* + x_r}{2}$

1.5 Opis nihanja z Greenovimi funkcijami

Naj bo enačba gibanja

$$m\ddot{x} = F(t) - kx \iff m\ddot{x} + kx = F(t),$$

kjer je kx sila vzmeti in $F(t) = \Delta G \cdot \delta(t)$ enkraten sunek sile. Funkcija $\delta(t)$ je Diracova delta, za katero velja:

- $\delta(t) = \begin{cases} 0; & x \neq 0 \\ \infty^*; & x = 0 \end{cases}$
- $\int \delta(t) dt = 1$

Rešitev tej enačbe je:

$$x(t) = \frac{v_0}{\omega_0} \sin(\omega_0(t - t_i)) \implies x(t) = \frac{mv_0}{m\omega_0} \sin(\omega_0(t - t_i)) = \frac{\Delta G_i}{m\omega_0} \sin(\omega_0(t - t_i))$$

Zdaj seštejemo po vseh enkratnih sunkih:

$$x(t) = \sum_i \frac{mv_0}{m\omega_0} \sin(\omega_0(t - t_i)) = \sum_i \frac{F_i \Delta t}{m\omega_0} \sin(\omega_0(t - t_i))$$

Za zvezen potek časa dobimo:

$$x(t) = \frac{1}{m\omega_0} \int_{-\infty}^{t} F(t') \sin(\omega_0(t - t_i))\, dt',$$

kjer je $F(t')$ **časovni potek motnje** in $\sin(\omega_0(t - t_i))$ **Greenova funkcija nedušenega nihala**.

Postopek reševanja nalog:

- Določimo lastno frekvenco
- Izračunamo integral

1.6 Valovanje

Valovanje po vijačni vzmeti

Newtonov zakon za i-ti utež je

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{kl^2}{m} \cdot \frac{u(x+h,t) - 2u(x,t) + u(x-h,t)}{h^2}$$

Valovna enačba:

$$\boxed{\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2} = C^2 \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2}}$$

kjer $C^2 = \frac{kl^2}{m}$ **hitrost valovanja**.

Valovanje v tekočini, zaprti v tanki togi cevi

$$C^2 = \frac{1}{\chi\rho}$$

Valovanje po elastični palici

$$C^2 = \frac{E}{\rho}$$

Valovanje pu strune

$$C^2 = \frac{F}{\rho S}$$

Valovanje v plinu

$$C^2 = \frac{\kappa RT}{M}$$