

1 Fourierjeva analiza

Naj bo funkcija $f : [-\pi, \pi]$ nezvezna v končno mnogo točkah, kjer obstajata levi in desni odvod, vmes pa je med tema točkama odvedljiva. Tedaj

$$\text{FV}(f)(x) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx)),$$

kjer $a_0 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) dx$ ter $a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos(nx) dx$ in $b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin(nx) dx$.

Za vsak $x \in [-\pi, \pi]$ Fourierjeva vrsta funkcije f konvergira proti

- $f(x)$, če je f zvezna v x in
- $\frac{f(x-) + f(x+)}{2}$, če f ni zvezna v x .

Naj bo $f : [0, \pi] \rightarrow \mathbb{R}$ funkcija. Funkcijo f s predpisom $f(x) = f(-x), x < 0$ lahko razširimo do sode funkcije ter s predpisom $f(x) = -f(-x)$ do lihe. Tedaj

$$\text{FV}_{\cos}(f)(x) = \text{FV}(f_{\text{soda}}(x)) \quad \text{ter} \quad \text{FV}_{\sin}(f)(x) = \text{FV}(f_{\text{liha}}(x))$$

Parsevalova enakost:

$$\int_{-\pi}^{\pi} f^2(x) dx = 2\pi a_0^2 + \pi \sum_{n=1}^{\infty} (a_n^2 + b_n^2).$$

1.1 Nasveti

- Za izračun integralov z sin in cos lahko uporabljamo enakost

$$\cos(nx) + \sin(nx) = e^{inx}.$$

- Če je funkcija soda, potem $\forall n > 1. b_n = 0$; če je funkcija liha, potem $\forall n > 0. a_n = 0$.
- Če želimo sešteti številsko vrsto, najprej razvijemo funkcijo v vrsto, potem vzamemo vrednost v pravi točki.
- Vsak polinom v sin in cos ima končno Fourierjevo vrsto. Dobimo jo s pomočjo trigonometrije.

2 Vektorska analiza

2.1 Gradient, divergenca in rotor. Potencial.

- $\text{rot grad } u = 0$ in $\text{div rot } \vec{f} = 0$.
- Vektorsko polje \vec{f} na zvezdastem območju je potencialno natanko tedaj, ko $\text{rot } \vec{f} = 0$.
- Naj bo $f(\vec{r}) = \frac{1}{|\vec{r} - \vec{a}|}$ skalarno polje. Velja:

$$\text{grad } f = -\frac{\vec{r} - \vec{a}}{|\vec{r} - \vec{a}|^3} \quad \text{ter} \quad \text{div}(\text{grad } f) = 0.$$

Torej je grad f **solenoidalno** polje, tj. $\text{div } \vec{f} = 0$.

- $\text{rot}(\vec{r} \times \vec{a}) = -2\vec{a}$; $\text{rot}(\vec{a} \times \vec{r}) = 2\vec{a}$.
- Vektorsko polje \vec{f} je **potencialno**, če obstaja skalarno polje u , da $\vec{f} = \text{grad } u$. Potencial polja dobimo z unijo členov po integraciji parcialnih odvodov.
- Laplaceov operator: $\Delta u = \text{div grad } u$.

2.2 Krivuljni integral skalarne polja

Naj bo K krivulja z regularno parametrizacijo $\vec{r}: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^3$, $\vec{r} = (x, y, z)$. Tedaj

$$ds = |\dot{\vec{r}}(t)| dt = \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2}.$$

Naj bo $u: D \subseteq \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ skalarne polje. Definiramo

$$\int_K u ds = \int_a^b u(\vec{r}(t)) |\dot{\vec{r}}(t)| dt.$$

2.3 Ploskovni integral skalarne polja

Naj bo S ploskev z regularno paramaterizacijo $\vec{r}: \Delta \subseteq \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$. Tedaj

$$dS = \|\vec{r}_u \times \vec{r}_v\| du dv = \sqrt{\|\vec{r}_u\|^2 \cdot \|\vec{r}_v\|^2 - \langle \vec{r}_u, \vec{r}_v \rangle^2} du dv = \sqrt{EG - F^2} du dv.$$

Naj bo $\mu: D \subseteq \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ skalarne polje. Definiramo

$$\int_S \mu dS = \int_{\Delta} \mu(\vec{r}(u, v)) \|\vec{r}_u \times \vec{r}_v\| du dv.$$

- Če je $S \subseteq \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \{a\}$, potem

$$\int_S \mu dS = \int_{\Delta} \mu(x, y, a) dx dy,$$

kjer je Δ projekcija v xy -ravnino. Podobno za poljubno permutacijo koordinat.

2.4 Krivuljni integral vektorskega polja

Naj bo K krivulja z regularno parametrizacijo $\vec{r}: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^3$, $\vec{r} = (x, y, z)$.

Naj bo $\vec{f}: D \subseteq \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ vektorsko polje. Definiramo

$$\int_K \vec{f} \cdot d\vec{r} = \int_a^b (\vec{f}(\vec{r}(t)) \cdot \dot{\vec{r}}(t)) dt.$$

- Parametrizacija krivulje določa tudi njeno orientacijo.
- **Cirkulacija** je integral vektorskega polja vzdolž sklenjene krivulje.
- Integral potencialnega polja je enak vrednosti potenciala v končni točki minus vrednosti potenciala v začetni točki.

2.5 Ploskovni integral vektorskega polja

Naj bo S ploskev z regularno paramaterizacijo $\vec{r}: \Delta \subseteq \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$.

Naj bo $\vec{f}: D \subseteq \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ vektorsko polje. Definiramo

$$\int_S \vec{f} \cdot d\vec{S} = \int_S (\vec{f} \cdot \vec{n}) dS,$$

kjer je \vec{n} enotska normala. Orientacija ploskve je potem določna z smerjo normale. Za izračun uporabljamo formulo

$$\int_S \vec{f} \cdot d\vec{S} = \int_{\Delta} \vec{f}(\vec{r}(u, v)) \cdot (\vec{r}_u \times \vec{r}_v) du dv,$$

pri čemer smer $\vec{r}_u \times \vec{r}_v$ se mora ujemati s predpisano orientacijo.

- To je tudi **pretok** polja \vec{f} skozi ploskev S .
- Ravno ploskev lahko parametriziramo v obliki $\vec{n} \cdot dS$.

2.6 Integralski izreki

Naj bo $\vec{f} : D \subseteq \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ vektorsko polje.

Izrek 2.1 (Gaussov izrek). *Naj bo $\Omega^{\text{odp}} \subseteq D$ omejena množica, katere rob $\partial\Omega$ je sestavljen iz končnega števila gladkih ploskev. Rob $\partial\Omega$ orientiramo tako, da izberimo zunanjo normalo. Tedaj*

$$\iint_{\partial\Omega} \vec{f} \cdot d\vec{S} = \iiint_{\Omega} \operatorname{div} \vec{f} dV.$$

Izrek 2.2 (Stokesov izrek). *Naj bo $\Sigma \subseteq D$ odsekoma gladka orientirana omejena ploskev, katere rob $\partial\Sigma$ je sestavljen iz končnega števila gladkih krivulj. Rob $\partial\Sigma$ orientiramo skladno s Σ : Če hodimo po $\partial\Sigma$ v smeri predpisane orientacije in je S na naši levi strani, glava določa normalo \vec{n} . Tedaj*

$$\int_{\partial\Sigma} \vec{f} \cdot d\vec{r} = \iint_{\Sigma} \operatorname{rot} \vec{f} \cdot d\vec{S}.$$

Izrek 2.3 (Greenova formula). *Naj bo $D^{\text{odp}} \subseteq \mathbb{R}^2$ omejena množica, katere rob ∂D je sestavljen iz končnega števila gladkih krivulj. Rob ∂D orientiramo skladno s D .*

Naj bosta $X, Y : D \rightarrow \mathbb{R}$ gladki funkciji. Tedaj

$$\int_{\partial D} X dx + Y dy = \iint_D (Y_x - X_y) dx dy.$$

2.7 Splošno

- Pri izračunu gradienta, divergence, rotorja itn. vektorji zapišemo v kartezičnih koordinatih.
- Pri parametrizaciji lahko si pomagamo s sferični, cilindrični itn. koordinati.
- Problematične točke lahko izoliramo s krogli.

3 Kompleksna analiza

3.1 Holomorfne funkcije

Naj bo $f : D \subseteq \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$, $f(z) = f(x + iy) = u(x, y) + iv(x, y)$ funkcija.

- CR sistem: $u_x = v_y, u_y = -v_x$. f je holomorfna natanko tedaj, ko velja CR sistem.
- Naj bo $D^{\text{odp}} \subseteq \mathbb{C}$ povezana, $f, g \in O(D)$. Če obstaja $A \subseteq D, A \neq \emptyset$ s stekališčem v D in $f|_A = g|_A$, tedaj $f = g$.
- f je holomorfna natanko tedaj, ko sta u in v harmonični.
- Če poznamo realni del, zožitev funkcije na $(a, b) \subseteq \mathbb{R}$ dobimo tako:

$$f(x) = u(x, 0) + iv(x, 0), \quad v(x, 0) = \int -u_y(x, 0) dx.$$

- $\ln_{\mathbb{C}}(z) = \ln_{\mathbb{R}} |z| + i \arg(z)$.

3.2 Potenčne vrste

- Konvergenčni polmer vrste $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (z - a)^n$:
 - $1/R = \limsup_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|c_n|}$.
 - $1/R = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|c_n|}$.
 - $1/R = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|c_{n+1}|}{|c_n|}$.

4 Splošno

4.1 Linearna algebra

- $\vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c}) = (\vec{c} \cdot \vec{a})\vec{b} - (\vec{b} \cdot \vec{a})\vec{c}$.
- Ploščina trikotnika: $S = \frac{1}{2} \|(\vec{r}_A - \vec{r}_B) \times (\vec{r}_A - \vec{r}_C)\|$. Težišče: $\vec{r}_T = \frac{1}{3}(\vec{r}_A + \vec{r}_B + \vec{r}_C)$.
- Enačba ravnine: $\vec{a} \cdot \vec{n} = d$, kjer je \vec{n} normala.

4.2 Geometrija

TODO: enačbe v kartezičnih koordinatah

- Tetraedr: $V = \frac{1}{3} S_{\text{osn}} h$.
- Stožec: $V = \frac{1}{3} S_{\text{osn}} h$, $S = \pi r^2 + \pi r \sqrt{r^2 + h^2}$.
- Valj: $V = \pi r^2 h$, $S = 2\pi r h + 2\pi r^2$.
- Sfera: $V = \frac{4}{3} \pi r^3$, $S = 4\pi r^2$; Elipsoid: $V = \frac{4}{3} \pi abc$.
- Torus: $V = 2\pi^2 a^2 b$.

4.3 Račun integralov

4.3.1 Parametrizacije

Astroida $x^{2/3} + y^{2/3} = a^{2/3}$:

$$\vec{r}(t) = (a \cos^3 t, a \sin^3 t), \quad t \in [0, 2\pi].$$

Sfera $x^2 + y^2 + z^2 = r^2$:

$$\vec{r}(\psi, \varphi) = (r \cos \psi \cos \varphi, r \cos \psi \sin \varphi, r \sin \psi), \quad \varphi \in [0, 2\pi], \quad \psi \in [-\pi/2, \pi/2]$$

ter

$$\vec{r}_\psi \times \vec{r}_\varphi = -\vec{r}(\psi, \varphi) \cos \psi.$$

4.4 Površine

Površina grafa $f : D \subseteq \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$:

$$S = \iint_D \sqrt{1 + f_x^2 + f_y^2} \, dxdy \quad \text{ter} \quad dS = \sqrt{1 + f_x^2 + f_y^2} \, dxdy$$

TODO:

- Ploščine n -kotnikov ter 2D likov. Volumne ter ploščine 3D figur. Formula ploščine s vektorskim produktom.
- Integrali, vpeljava novih spremenljivk. Sferične koordinate za elipsoid. Premiki.
- Normala na graf funkcije.
- Orientacija usklajena s paramterizacijo.
- Običajni vrstni red integraciji.
- Funkciji Gamma in Beta.
- Zamena spremenljivke pri odvodu.