Izračun skupnih negibnih točk odsekoma linearnih funkcij

Ruslan Urazbakhtin

24. november 2025

Odsekoma linearne funkcije

Odsekoma linearne funkcije

Definicija

Linearni izraz v spremenljivkah $x_1, x_2, \ldots, x_n$ je izraz

$$q_0 + q_1 x_1 + q_2 x_2 + \ldots + q_n x_n,$$

kjer so $q_0, \ldots, q_n \in \mathbb{R}$.

Definicija

Pogojni linearni izraz je par $C \vdash e$, kjer je e linearni izraz in C končna množica neenačb med linearni izrazi, torej vsak element množice C je ene izmed oblik

$$e_1 \leq e_2, \quad e_1 < e_2.$$

Za vsak $\vec{r} \in \mathbb{R}^n$ z $C(\vec{r})$ označimo konjunkcijo neenačb, kjer nadomestimo spremenljivke v C z števili $r_1, \ldots, r_n$.

Odsekoma linearne funkcije

Definicija

Pravimo, da je funkcija $f : [0,1]^n \to [0,1]$ *odsekoma linearna*, če obstaja končna množica $\mathcal{F}$ pogojnih linearnih izrazov v spremenljivkah $x_1, \ldots, x_n$, da velja:

1. $\forall \vec{r} \in [0,1]^n \,.\, \exists (C \vdash e) \in \mathcal{F} \,.\, C(\vec{r}) = \top$ in
2. $\forall \vec{r} \in [0,1]^n \,.\, \forall (C \vdash e) \in \mathcal{F} \,.\, C(\vec{r}) = \top \implies f(\vec{r}) = e(\vec{r})$.

Pravimo, da množica $\mathcal{F}$ *predstavlja* funkcijo f.

Izrek Knaster-Tarskega

Izrek Knaster-Tarskega

Definicija

Naj bo S poljubna množica in $f : S \to S$ preslikava. *Negibna točka* preslikave f je element $x \in S$, da velja $f(x) = x$. Množico vseh negibnih točk preslikave f označimo z $\mathrm{Fix}(f)$.

Izrek (Knaster-Tarski)

Naj bo $(S, \leq)$ *polna mreža in* $f : S \to S$ *monotona preslikava. Tedaj sta* $\inf(\mathrm{Fix}(f))$ *in* $\sup(\mathrm{Fix}(f))$ *elementi* $\mathrm{Fix}(f)$.