Algebra 2

20. oktober 2024

1 Uvod v teorijo grup

1.1 Uvod v teorijo grup

Definicija 1.1. Naj bo S neprazna množica. *Operacija na množice* S je preslikava $*: S \times S \to S,\ (a,b) \mapsto a * b$.
Operacija $*$ je *asociativna*, če $\forall a, b, c \in S \,.\, (a * b) * c = a * (b * c)$.
Operacija $*$ je *komutativna*, če $\forall a, b \in S \,.\, a * b = b * a$.

Definicija 1.2. Neprazna množica S skupaj z operacijo $*$ je *polgrupa*, če je operacija $*$ asociativna.

Definicija 1.3. Naj bo S množica z operacijo $*$. Pravimo, da je $e \in S$ *enota (oz. nevtralni element) za operacijo* $*$, če $\forall x \in S \,.\, e * x = x * e = x$.

Trditev 1.1. *Če v množici S obstaja enota za operacijo $*$, potem je ena sama.*

Definicija 1.4. Polgrupa z enoto je *monoid*.

Definicija 1.5. Naj bo S množica z operacijo $*$ in $e \in S$ enota. Naj bo $x \in S$.
- Element $y \in S$ je *levi inverz* elementa x, če $y * x = e$.
- Element $y \in S$ je *desni inverz* elementa x, če $x * y = e$.
- Element $y \in S$ je *inverz* elementa x, če $x * y = y * x = e$.

Trditev 1.2. *Če je S monoid, $x \in S$, l levi inverz x ter d desni inverz x, potem $l = d$.*

Definicija 1.6. Pravimo, da je element $x \in S$ *obrnljiv*, če obstaja inverz od x.

Definicija 1.7. Naj bo S z operacijo $*$ monoid. Pravimo, da je S *grupa*, če je vsak element iz S obrnljiv.
Če je operacija $*$ komutativna, pravimo, da je S *Abelova grupa*.

Zgled. Nekaj primerov grup.
1. $(\mathbb{Z}, +),\ (\mathbb{Q}, +),\ (\mathbb{R}, +),\ (\mathbb{C}, +), (\mathbb{Q} \setminus \{0\}, \cdot)$ so Abelove grupe.
2. Naj bo X neprazna množica. Definiramo $\mathrm{Sim}(X) = \{\text{vse bijektivne preslikave } f : X \to X\}$. $(\mathrm{Sim}(X), \circ)$ je grupa, imenujemo jo *simetrična grupa* množice X.
   V posebnem primeru, ko je X končna dobimo $\mathrm{Sim}(\{1, 2, \ldots, n\}) = S_n$. S_n je *simetrična grupa reda n*.

1.2 Ponovitev o permutacijah

Izrek 1.3. *Vsaka permutacija je produkt disjunktnih ciklov.*

Definicija 1.8. Cikli dolžine 2 so *transpozicije*.

Trditev 1.4. *Vsaka permutacija $\pi \in S_n$ je produkt transpozicij. Teh transpozicij je vedno sodo mnogo ali vedno liho mnogo.*

Definicija 1.9. Permutacija je *soda (oz. liha)*, če je produkt sodo (oz. liho) mnogo transpozicij.

Definicija 1.10. Znak permutacije je $\mathrm{sgn}(\pi) = \begin{cases} 1; & \pi \text{ je soda} \\ -1; & \pi \text{ je liha} \end{cases}$.

Trditev 1.5. $\mathrm{sgn}(\pi\rho) = \mathrm{sgn}(\pi) \cdot \mathrm{sgn}(\rho)$.

1.3 Primeri grup

Zgled (Simetrije kvadrata). Simetrije kvadrata K so izometrije $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, da je $f(K) = K$.
Primeri simetrij: r - rotacija za 90° okoli središča kvadrata, z - zrcaljenje čez fiksno os simetrije ter kompozicije r in z.
Iz geometrije lahko vidimo, da je $zr = r^3z$. To pomeni, da je vsak kompozitum r in z oblike r^kz.
Kvadrat ima kvečjemu 8 simetrij, ker je vsaka simetrija določena s sliko oglišča 1 in informacijo, ali smo naredili zrcaljenje ali ne. Dobimo množico simetrij $D_{2\cdot 4} = \{\mathrm{id}, r, r^2, r^3, z, rz, r^2z, r^3z\}$. $D_{2\cdot 4}$ je *diedrska grupa moči* 8.

Zgled (Diedrska grupa moči $2n$). Imamo naslednje simetrije pravilnega n-kotnika:

- r - rotacija za $\frac{2\pi}{n}$ okoli središča.
- z - zrcaljenje čes neko fiksno os simetrije.

Velja: $zr = r^{n-1}z$.
Množica vseh simetrij je $D_{2n} = \{1, r, r^2, \ldots, r^{n-1}, z, rz, r^2zn, \ldots, r^{n-1}z\}$. D_{2n} je *diedrska grupa moči* $2n$.

Zgled (Monoid -> Grupa). Naj bo $(S, *)$ monoid. Definiramo $S^* = \{\text{obrnljive elementi iz } S\}$, potem S^* je grupa za $*$.

Primer. Naj bo $S = (\mathbb{R}^{n\times n}, \cdot)$, $S^* = \{A \in \mathbb{R}^{n\times n};\ \det A \neq 0\} = \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$. $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ je *splošna linearna grupa $n \times n$ matrik.*

Zgled (Direktni produkt grup). Naj bodo $G_1, G_2, \ldots, G_n$ grupe z operacijami $*_1, *_2, \ldots, *_n$. Na množice $G_1 \times G_2 \times \ldots \times G_n$ vpeljamo operacijo $(g_1, g_2, \ldots, g_n) * (h_1, h_2, \ldots, h_n) = (g_1 *_1 h_1, g_2 *_2 h_2, \ldots, g_n *_n h_n)$. Potem $(G_1 \times G_2 \times \ldots \times G_n, *)$ je grupa.

V grupah ponavadi uporabljamo *miltiplikativni zapis*: operacija: $\cdot$, enota: 1, inverz od x: x^{-1}, potenca: x^n.
V Abelovih grupah uporabljamo *aditivni zapis*: operacija: $+$, enota: 0, inverz od x: $-x$, potenca: nx.

Lastnosti računanja v grupah

1. G ima natanko eno enoto.
2. Vsak element iz G ima natanko en inverz.
3. $(x^{-1})^{-1} = x$.
4. $(xy)^{-1} = y^{-1}x^{-1}$.
5. $x^{m+n} = x^mx^n$.
6. $(x^m)^n = x^{mn}$.
7. $xy = xz \Rightarrow y = z$.
8. $yx = zx \Rightarrow y = z$.
9. $xy = 1 \Rightarrow yx = 1$.

Trditvi 7. in 8. imenujemo *pravili krajšanja* v grupi.