

# 1 Prostori in preslikave

## 1.1 Topološki prostori

### 1. Topološki prostori

- **Definicija.** Topologija. Odprte množice.
- **Opomba.** Kako običajno preverimo aksiom T2?
- **Definicija.** Topološki prostor.
- **Definicija.** Finejša topologija. Grobejša topologija.
- **Primer.** Naj bo  $(M, d)$  metrični prostor. **Porojena (inducirana)** topologija z metriko  $d$ . Evklidska topologija.
- **Definicija.** Metrizabilen prostor.
- **Primer.** Trivialna topologija. Diskretna topologija. Ali sta metrizabilna?
- **Definicija.** Notranjost množice  $A$ .
- **Trditev.** Čemu je enaka  $\text{Int } A$  (unija množic)?
- **Trditev.** Čemu je enaka  $\text{Int } A$  (točke)?
- **Definicija.** Zaprta množica.
- **Opomba.** Kako vpeljemo topologijo z pomočjo zaprtih množic?
- **Primer.** Topologija končnih komplementov. Ali so vse točke zaprte? Ali je metrizabilna?
- **Definicija.** Zaprtje množice  $A$ .
- **Trditev.** Čemu je enako  $\text{Cl } A$  (preseki množic)?
- **Trditev.** Čemu je enako  $\text{Cl } A$  (točke)?
- **Primer.** Kakšna zvezna med  $\overline{A \cup B}$  in  $\overline{A} \cup \overline{B}$  ter med  $\overline{A \cap B}$  in  $\overline{A} \cap \overline{B}$ ?
- **Definicija.** Mejna točka.
- **Definicija.** Meja množice.
- **Trditev.** Čemu je enaka  $\text{Fr } A$  (formula)?
- **Opomba.** Ali je  $\text{Fr } A$  vedno zaprta množica?

### Rezultati z vaj

- **Topologija vsebovane točke.** [2.3. naloga]
- Ali je presek poljubne družine topologij spet topologija? [2.5. naloga]

## 1.2 Zvezne preslikave

### 1. Slike in praslike

- **Definicija.** Praslika. Slika.
- **Trditev.** Monotonost slike in praslike.
- **Trditev.** Praslika unije in preseka. Slika unije in preseka.
- **Opomba.** Kadar slika ohranja preseke?
- **Trditev.** Praslika komplementa.
- **Trditev.** Praslika slike. Slika praslike.

### 2. Zvezne preslikave

- **Definicija.** Zvezna preslikava.
- **Primer.** Ali so zvezne:
  - Vse zvezne funkcije v smislu metričnih prostorov.
  - Funkcije v prostor s trivialno topologijo.

- Funkcije iz prostora z diskretno topologijo.
- **Primer.** Ugotovi:
  - Kadar je  $\text{id} : (X, \mathcal{T}) \rightarrow (X, \mathcal{T}')$  zvezna?
  - Katere funkcije  $f : (\mathbb{R}, \mathcal{T}_{kk}) \rightarrow (\mathbb{R}, \mathcal{T}_{evkl})$  so zvezne?
  - Naj bosta  $X, Y$  neskončni,  $d$  metrika na  $Y$ . Katere funkcije  $f : (X, \mathcal{T}_{kk}) \rightarrow (Y, \mathcal{T}_d)$  so zvezne?
- **Trditev.** Kaj lahko povemo o kompozitumu zveznih preslikav?
- **Trditev.** 2 karakterizaciji zveznosti preslikave  $f : X \rightarrow Y$ .

### 1.3 Homeomorfizmi

#### 1. Homeomorfizmi

- **Definicija.** Homeomorfizem.
- **Definicija.** Homeomorfna prostora.
- **Opomba.** Ali je homeomorfizem ekvivalenčna relacija? Kako nam to pomaga?
- **Definicija.** Odrpna preslikava. Zaprta preslikava.
- **Trditev.** 3 karakterizaciji homeomorfizma.
- **Primer.** Ali sta prostora  $[0, 1) \cup \{2\}$  in  $[0, 1]$  homeomorfna? Ali inverz zvezne bijekcije vedno zvezen?
- **Primer.** Pokaži, da vsak interval (končen ali neskončen) homeomorfen enemu izmed  $[0, 1]$ ,  $[0, 1)$ ,  $(0, 1)$ .
- **Primer.** Pokaži, da intervali  $[0, 1]$ ,  $[0, 1)$ ,  $(0, 1)$  niso paroma homeomorfni.
- Kaj je najboljša izbira za homeomorfizem  $(-1, 1) \approx \mathbb{R}$ ?
- **Definicija.** Enotska  $n$ -krogla. Odrpna enotska  $n$ -krogla. Enotska  $(n-1)$ -sfera.
- **Primer.** Kako lahko  $(0, 1) \approx \mathbb{R}$  posplošimo do homeomorfizma med odrpno kroglo  $\mathring{B}^n$  in  $\mathbb{R}^n$ ?
- **Primer.** Zakaj sfera  $S^{n-1}$  v  $\mathbb{R}^n$  topološko bolj podobna  $\mathbb{R}^{n-1}$  kot  $\mathbb{R}^n$ ? **Stereografska projekcija.**
- **Definicija.** Mnogoterosti.
- **Primer.** Ali je  $f : [0, 2\pi] \rightarrow S^1$ ,  $f(t) = e^{it}$  zvezna in bijektivna? Ali je zaprta? Kaj to pove o  $f^{-1}$ ?
- **Primer.** Ali je projekcija  $\text{pr} : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $\text{pr}(x, y) = x$  zaprta?
- **Definicija.** Topološka lastnost.
- **Primer.** Ali je omejenost in polnost topološka lastnost?
- **Primer.** Ali je možno, da  $\mathbb{R} \approx \mathbb{R}^2$ ? Ali enak sklep deluje za  $\mathbb{R}^3$  in  $\mathbb{R}^2$ ?

### 1.4 Baze in predbaze

#### 1. Baza

Naj bo  $(X, \mathcal{T})$  topološki prostor.

- (\*) **Definicija.** Lokalna baza okolic.
- **Zgled.** Lokalna baza  $x \in X$  v metričnem prostoru  $(X, d)$ .
- (\*) **Definicija.** Baza topologije  $\mathcal{T}$ .
- **Zgled.**
  - Kaj je baza metričnega prostora?
  - Kaj je baza diskretnega prostora?

- **Trditev.** Kako iz baze pridemo do lokalne baze okolic za neko točko  $x \in X$ ? Kako pa obrat?
- **Trditev.** Kaj lahko preverimo na bazi?
- **Zgled.** Ali je  $f : S^1 \rightarrow S^1 \subseteq \mathbb{C}$  (enotska kompleksna števila),  $f(z) = z^2$  odprta?
- (\*) **Trditev.** Topologija, generirana z bazo.
- (\*) **Definicija.** Produktna topologija.
- **Opomba.** Ali družina produktov baznih množic tudi generira produktno topologijo?
- **Trditev.** O projekcijah na produktne topologije.
- **Zgled.** Ali je projekcija zaprta?

## 2. Predbaza

Naj bo  $\mathcal{P} \subseteq \mathcal{P}(X)$ .

- (\*) **Trditev.** Predbaza.
- **Zgled.** Predbaza produktne topologije.
- **Trditev.** Kaj lahko testiramo na predbazi?
- **Trditev.** Kdaj je  $f : X \rightarrow X_1 \times \dots \times X_n$  zvezna?
- **Definicija.** Kdaj je prostor 1-števen?
- **Zgled.** Ali so metrični prostori 1-števni?
- **Definicija.** Kdaj je prostor 2-števen?
- **Zgled.** Ali je  $\mathbb{R}^n$  2-števen?
- **Opomba.** Ali je vsak 2-števen prostor tudi 1-števen? Ali je vsak 1-števen prostor tudi 2-števen?
- (\*) **Definicija.** Povsod gosta podmnožica. Separabilni prostor.
- (\*) **Trditev.** Ali 2-števnost implicira separabilnost?
- (\*) **Izrek.** Kdaj je metrični prostor 2-števen?

## 1.5 Podprostori

## 1. Podprostori

- **Definicija.** Inducirana topologija. Podprostor.
- **Zgled.** Kakšno topologijo podeduje  $\mathbb{N} \subseteq \mathbb{R}$ ? Ali je topologija na  $\mathbb{Q} \subseteq \mathbb{R}$  diskretna? Kaj so podprostori prostorov z diskretno in s trivialno topologijo?
- **Trditev.**
  - (a) Kako dobimo bazo/predbazo podprostora?
  - (b) Kaj so zaprti množici v podprostoru?
- **Trditev.** Kdaj je odprta/zaprta množica v podprostoru odprta tudi v celotnem prostoru?
- **Definicija.** Dedna lastnost.
- **Zgled.** Ali je metrizabilnost dedna? Ali je separabilnost dedna?

## 2. Preslikavi na pokritjih

Naj bo  $\{X_\lambda\}$  pokritje  $X$ .

- **Definicija.** Usklajena družina preslikav  $(f_\lambda : X_\lambda \rightarrow Y)_\lambda$ .
- (\*) **Lema.** Recimo, da je  $\{X_\lambda\}$  odprto pokritje. Kdaj je  $A \subseteq X$  odprta?
- **Definicija.** Lokalno končno pokritje.
- (\*) **Lema.** Recimo, da je  $\{X_\lambda\}$  zaprto pokritje. Kdaj je  $A \subseteq X$  zaprto?
- (\*) **Izrek.** Kako dobimo zvezno preslikavo iz družine preslikav na nekem po-

kritju?

- (\*) **Posledica.** Kako lahko preverimo zveznost  $f : X \rightarrow Y$  z pokritji?

3. Vložitve

- **Zgled.** Ali imata  $\mathbb{N}$  in  $f_*(\mathbb{N}) \subseteq \mathbb{R}$  isto topologijo, če
  - $f(n) = n$ ;
  - $f(0) = 0$ ,  $f(n) = \frac{1}{n}$ .
- **Definicija.** Vložitev.
- (\*) **Trditev.** Naj bo  $f : X \rightarrow Y$  injektivna. Kdaj je  $f$  vložitev?

**Rezultati z vaj**

- Ali so vse vektorski operaciji v evklidske topologiji zvezne? [3.2. naloga]
- Kako lahko gledamo na ravnino  $\mathbb{R}^2$ ? [3.2. naloga]
- Ali so vse  $p$ -norme ekvivalentne med sabo? Kaj to pomeni o topologii oz. o konvergenca zaporedij? [3.3. naloga]
- (?) Kam zvezna preslikava preslika konvergentna zaporedja? [3.4. naloga]
- Kaj lahko povemo o preslikavi  $\mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ , ki ima lokalni ekstrem? [3.5. naloga]

## 2 Topološke lastnosti

### 2.1 Ločljivost

Naj bo  $(X, \mathcal{T})$  topološki prostor.

#### 1. Hausdorffovi in Frechetovi prostori

- **Definicija.** Kadar pravimo, da  $\mathcal{T}$  loči  $A \subseteq X$  od  $B \subseteq X$ ?
- **Definicija.** Kadar pravimo, da  $\mathcal{T}$  ostro loči  $A \subseteq X$  od  $B \subseteq X$ ?
- **Zgled.** Ali je trivialna topologija loči množice? Kaj pa diskretna?
- **Zgled.** Kaj je zaprtje podmnožice  $A \subseteq X$  v jeziku ločljivosti?
- (\*) **Definicija.** Hausdorffov prostor.
- **Zgled.** Ali so Hausdorffovi:
  - Metrični prostori.
  - $(X, \mathcal{T}_{kk})$ ,  $X$  je neskončna.
- (\*) **Trditev.** 2 karakterizaciji Hausdorffovih prostorov.
- (\*) **Izrek.** Lastnosti Hausdorffovih prostorov:
  - (a) Kaj lahko povemo o končnih množicah?
  - (b) Koliko limit lahko ima zaporedje v Hausdorffovem prostoru?
  - (c) (\*) Naj bosta  $f, g : X \rightarrow Y^{\text{Haus}}$  preslikavi. Kaj lahko povemo o množici  $\{x \in X \mid f(x) = g(x)\}$ ?
  - (d) (\*) Naj bosta  $f, g : X \rightarrow Y^{\text{Haus}}$  preslikavi. Kaj če se  $f, g$  ujemata na kakšne goste podmnožice  $A \subseteq X$ ?
  - (e) (\*) Kaj lahko povemo o grafu preslikave  $f : X \rightarrow Y^{\text{Haus}}$ ?
- (\*) **Definicija.** Frechetov prostor.
- **Zgled.** Ali so Hausdorffovi prostori Frechetovi? Ali je trivialen prostor Frechetov?
- (\*) **Trditev.** Karakterizacija Frechetova prostora (enojčki).
- **Definicija.** Multiplikativna lastnost.
- **Trditev.** Ali sta Hausdorffova in Frechetova lastnosti dedni in multiplikativni?

#### 2. Regularnost in normalnost

- (\*) **Definicija.** Normalen prostor.
- **Zgled.** V kakšni povezavi so normalnost, regularnost, Hausdorff in Frechet?
- **Zgled.** Naj bo  $(X, \mathcal{T})$  Hausdorffov in  $\mathcal{T} \subseteq \mathcal{T}'$ . Ali je  $(X, \mathcal{T}')$  Hausdorffov? Ali je Hausdorffova lastnost implicira regularnost?
- (\*) **Trditev.** Ali je vsak metričen prostor normalen?
- (\*) **Trditev.** Ali je normalnost dedna?
- (\*) **Definicija.** Regularen prostor.
- **Opomba.** Ali je normalnost implicira regularnost?
- **Trditev.** Ali je regularnost dedna?

#### 3. Aksiomi ločljivosti

- (\*) **Definicija.** Aksiomi  $T_0 - T_4$ .
- (\*) **Trditev.** Karakterizacija  $T_3$ .
- (\*) **Trditev.** Karakterizacija  $T_4$ .
- (\*) **Trditev.** Ali je  $T_3$  multiplikativna?
- **Posledica.** Ali je regularnost multiplikativna?
- (\*) **Izrek.** Izrek Tihonova.

### Rezultati z vaj

- Ali je  $T_4$  multiplikativna? Ali je normalnost multiplikativna?

## 2.2 Povezanost

Naj bo  $(X, \mathcal{T})$  topološki prostor.

### 1. Povezanost

- (\*) **Definicija.** Nepovezan prostor.
- (\*) **Definicija.** Povezan prostor.
- (\*) **Trditev.** 3 karakterizacije nepovezanosti.
- (\*) **Izrek.** Karakterizacija povezanosti v  $\mathbb{R}$ .
- (\*) **Izrek.** Ali je povezanost topološka lastnost?
- (\*) **Izrek.** Lastnosti povezanosti:
  - (a) Kaj lahko povemo o uniji družine povezanih podmnožic v  $X$ , ki imajo neprazen presek?
  - (b) Ali je povezanost multiplikativna?
  - (c) **Pot v  $X$ .** Zadostni pogoj za povezanost prostora.
  - (d) Recimo, da je  $A$  povezan. Kaj lahko povemo o vsake množice  $B$ , za katero velja  $A \subseteq B \subseteq \overline{A}$ ?
- **Zgled.** Ali so povezane:
  - Vsaka konveksna podmnožica v  $\mathbb{R}^n$ .
  - Komplement končne množice v  $\mathbb{R}^n$ ,  $n > 1$ .
  - Komplement števne množice v  $\mathbb{R}^n$ ,  $n > 1$ .
- **Zgled.** Ali je  $\mathbb{R} \approx \mathbb{R}^n$ ,  $n > 1$ ?
- (\*) **Izrek.** Izrek o vmesni vrednosti.

### 2. Povezanost s potmi

- **Zgled.** Kaj je varšavski lok (oz. lok Sierpinskega)?
- **Definicija.** Kadar rečemo, da je  $X$  povezan s potmi?
- (\*) **Trditev.** Zadostni pogoj za povezanost  $X$ .

### 3. Komponente

- (\*) **Definicija.** Komponenta točke  $x \in X$ .
- (\*) **Izrek.** Ali so komponente povezane? Ali so zaprte? Ali so maksimalne? Ali tvorijo particijo?
- **Definicija.** Popolnoma nepovezan prostor.
- **Zgled.** Ali je  $\mathbb{Q}$  popolnoma nepovezan?
- **Opomba.** Kdaj so komponente odprte?

### 4. Lokalna povezanost

- (\*) **Definicija.** Lokalno povezan prostor.
- **Zgled.** Ali je  $\mathbb{R}^n$  lokalno povezan? Ali so diskretni prostori lokalno povezani? Ali je varšavski lok lokalno povezan?
- (\*) **Trditev.** Kdaj je prostor lokalno povezan? Kaj lahko povemo o komponentah lokalno povezanega prostora?

### 5. Povezanost in povezanost s potmi

- (\*) **Definicija.** Komponente za povezanost s potmi. Lokalno s potmi povezan prostor.
- **Opomba.** Ali so komponente za povezanost s potmi zaprte?

- (\*) **Izrek.** Kdaj so komponente za povezanost sovpadajo s komponenti za povezanost s potmi?
- (\*) **Posledica.** Kdaj so odprte podmnožice v  $\mathbb{R}^n$  povezane?

## 2.3 Kompaktnost

### 1. Kompaktnost

- (\*) **Definicija.** Kompakten prostor.
- **Trditev.** Ali lahko testiramo kompaktnost na baze? Kako dokažemo kompaktnost podprostora?
- **Zgled.** Ali je vsak končen prostor kompakten? Kompakten podprostor iz konvergentnega zaporedja. Ali so lahko neomejeni metrični prostori kompaktni?
- (\*) **Izrek.** Ali je zaprti intervali  $[a, b] \subseteq \mathbb{R}$  kompaktni?
- (\*) **Izrek.** Kaj lahko povemo o vsake neskončne podmnožice kompaktne prostora?
- (\*) **Izrek.** Ali je kompaktnost multiplikativna?
- (\*) **Izrek.** Bolzano-Weierstrassov izrek.
- (\*) **Trditev.** Kaj lahko povemo o vsaki kompaktni podmnožici metričnega prostora?
- (\*) **Izrek.**
  - (a) Ali je kompaktnost dedna?
  - (b) Kaj lahko povemo o Hausdorffovih prostorih (ločljivost)?
  - (c) Kaj lahko povemo o kompaktni podmnožici Hausdorffovega prostora?
- (\*) **Posledica.** Kaj lahko povemo o kompaktnih Hausdorffovih prostorih?
- (\*) **Izrek.** Kdaj so podmnožice  $\mathbb{R}^n$  kompaktne?
- (\*) **Zgled.** Ali je množica unitarnih matrik kompakten podprostor  $R^{n^2}$ ?
- (\*) **Trditev.** Opis kompaktnosti z zaprtimi množicami.
- (\*) **Posledica.** Cantorjev izrek.
- (\*) **Izrek.** Kaj lahko povemo o zvezni sliki kompakta?
- (\*) **Posledica.** Kaj lahko povemo o preslikavah iz kompakta v  $\mathbb{R}$ ?
- (\*) **Lema.** Lebesgueva lema.
- (\*) **Posledica.** Naj bosta  $X, Y$  metrična prostora. Kaj lahko povemo o preslikavi  $f : X \rightarrow Y$ , če je  $X$  kompakt?
- (\*) **Izrek.** Kaj lahko povemo o preslikavah iz kompakta v  $T_2$  prostor?

### 2. Lokalna kompaktnost

- (\*) **Definicija.** Relativno kompaktna množica.
- (\*) **Definicija.** Lokalno kompakten prostor.
- (\*) **Izrek.** Opis lokalne kompaktnosti v  $T_2$  prostorih. Ali je vsak kompakten Hausdorffov prostor lokalno kompakten?
- **Zgled.** Ali so metrični prostori lokalno kompaktni? Kaj lahko povemo o odprtih prostorih lokalno kompaktnih prostorov?
- (\*) **Izrek.** Kaj lahko povemo o lokalno kompaktnih Hausdorffovih prostorih?
- (\*) **Izrek.** Bairov izrek za lokalno kompaktne podmnožice.

### 3 Prostor preslikav

#### 1. Topologije na prostorih preslikav

Naj bosta  $X, Y$  topološka prostora

- Množica vseh preslikav iz  $A \subseteq X$  v  $U \subseteq Y$ .
- (\*) **Definicija.** Topologija konvergence po točkah.
- (\*) **Trditev.** O topologiji konvergence po točkah.
- (\*) **Definicija.** Kompaktno-odprta topologija. Prostor zveznih funkcij, opremljen z kompaktno-odprto topologijo.
- (\*) **Trditev.** Baza  $\widehat{C}(X, Y)$ , če je  $Y$  metričen prostor. Topologija enakomerne konvergence na kompaktih.
- (\*) **Trditev.** Kakšna poveza med  $Y$  in  $\widehat{C}(X, Y)$ .
- (\*) **Trditev.** Povezava ločljivostih lastnosti  $Y$  in  $\widehat{C}(X, Y)$ .
- Kaj če je domena  $X$  diskreten prostor?

#### 2. Preslikave na normalnih prostorih

- Kaj so zvezne preslikave iz neskončne množice  $X$  z topologijo končnih komplementov v  $\mathbb{R}$ ?
- (\*) **Izrek.** Urisonova lema.
- (\*) **Izrek.** Urisonov metrizacijski izrek.
- (\*) **Posledica.** Čemu je ekvivalentna metrizabilnost v 2-števnih prostorih?
- (\*) **Izrek.** Tietzejev razširitveni izrek.

#### 3. Stone-Weierstrassov izrek

- (\*) **Izrek.** Weierstrassov izrek.
- (\*) **Izrek.** Stone-Weierstrassov izrek.