1 Ekstremi

Kako poiščemo ekstreme funkcije f na množici K?

1. Kandidati v $\operatorname{Int} K$ so stacionarne točke.
2. Ekstremi na robu ∂K:
   (a) Parametriziramo rob.
   (b) Tvorimo Lagrangeevo funkcijo $L = f(x) - \sum_{i=1}^{n} \lambda_i g_i$, kjer g_i so pogoji, in iščemo njene stac. točke.

2 Integrali s parametri

Običajen integral s parametri. Naj bo $F(y) = \int_u^v f(x,y)\,dx,\ u,v \in I,\ y \in D$.

	Zveznost	Odvod	Vrstni red integriranja
Zveznost $f(x,y)$ na $I \times I \times D$	+	+	+
Zveznost $\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)$ na $I \times I \times D$		+	

Velja: $F'(y) = \int_{\alpha(y)}^{\beta(y)} \frac{\partial f}{\partial y}(x,y)\,dx + \beta'(y) f(\beta(y),y) - \alpha'(y) f(\alpha(y),y)$

Posplošeni integral s parametri. Naj bo $F(y) = \int_a^\infty f(x,y)\,dx,\ a \in \mathbb{R},\ y \in D$.

	Zveznost	Odvod	Vrstni red integriranja
Zveznost $f(x,y)$ na $[a,\infty] \times D$	+	+	+
L.E.K. $y \mapsto \int_a^\infty f(x,y)$ na D	+		+
Zveznost $\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)$ na $[a,\infty] \times D$		+	
L.E.K. $y \mapsto \int_a^\infty \frac{\partial f}{\partial y}(x,y)$ na D		+	
Obstoj $y \mapsto \int_a^\infty f(x,y)$ v $y_0 \in D$		+	

Definicija. Integral $F(y) = \int_a^\infty f(x,y)\,dx$ **konvergira enakomerno** na D, če

$$\forall \epsilon > 0 \,.\, \exists b_0 \geq a \,.\, \forall b \geq b_0 \,.\, \forall y \in D \,.\, \left| \int_b^\infty f(x,y)\,dx \right| < \epsilon.$$

2.1 Funkciji gama in beta

Definicija. $\Gamma(s) = \int_0^\infty x^{s-1} e^{-x}\,dx$ je **Eulerjeva funkcija gama**. Velja: $D_\Gamma = (0,\infty)$.

Trditev. Lastnosti Eulerjeve funkcije gama:

- $\Gamma(s+1) = s\Gamma(s)$. Če je $n \in \mathbb{N}$, potem $\Gamma(n) = (n-1)!$.
- $\Gamma^{(k)} = \Gamma(s) = \int_0^\infty x^{s-1} \ln^k x\, e^{-x}\,dx$, $\Gamma \in C^\infty((0,\infty))$.

Definicija. $B(p,q) = \int_0^1 x^{p-1}(1-x)^{q-1}\,dx$ je **Eulerjeva funkcija beta**. Velja: $D_B = (0,\infty) \times (0,\infty)$.

Trditev. $\frac{1}{2} B(\frac{\alpha+1}{2}, \frac{\beta+1}{2}) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^\alpha t \cos^\beta t\,dt$ za $\alpha, \beta > -1$.

Trditev. $B(p,q) = \int_0^\infty \frac{t^{p-1}}{(1+t)^{p+q}}\,dt$.

Posledica. $B(p,1-p) = \int_0^\infty \frac{t^{p-1}}{1+t}\,dt$ za $0 < p < 1$.

Opomba. Za $p \in (0,1)$ velja:

$$B(p,1-p) = \frac{\pi}{\sin(p\pi)}.$$

Izrek (Stirlingova formula)**.**

$$\lim_{s\to\infty} \frac{\Gamma(s+1)}{s^s\, e^{-s} \sqrt{2\pi s}} = 1.$$

3 Riemannov integral

Izrek (Uvedba novih spremenljivk)**.** Naj bo $D \subseteq \mathbb{R}^n$. Našo spremenljivko $x = (x_1,\dots,x_n) \in D$ podamo kot funkcijo novih, tj. $(x_1,\dots,x_n) = F(u_1,\dots,u_n)$, kjer $F : \Delta \to D$ difeomorfizem. Potem

$$\int_D f(x_1,\dots,x_n)\,dx_1 \dots dx_n = \int_\Delta f(F(u_1,\dots,u_n)) |\det JF(u_1,\dots,u_n)|\,du_1,\dots,du_n.$$

Vpeljava novih spremenljivk

	Polarne	Valjne	Sferične	Torusne ($0 < a < R$)
x	$r\cos\phi$	$r\cos\phi$	$r\cos\phi\cos\psi$	$(R + r\cos\psi)\cos\phi$
y	$r\sin\phi$	$r\sin\phi$	$r\sin\phi\cos\psi$	$(R + r\cos\psi)\sin\phi$
z		z	$r\sin\psi$	$r\sin\psi$
$\det JF$	r	r	$r^2\cos\psi$	$r(R + r\cos\psi)$
Omejitve	$\phi \in [0,2\pi]$	$\phi \in [0,2\pi]$	$\phi \in [0,2\pi]$ in $\psi \in [-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}]$	$\phi,\psi \in [0,2\pi]$ in $r \in [0,a]$

Fizikalne količine

1. Vztrajnostni moment okoli z-osi:
   - Nehomogeno telo: $J_z = \int_D (x^2+y^2)\rho(x,y,z)\,dV$.
   - Homogeno telo: $J_z = \frac{m(D)}{V(D)} \int_D (x^2+y^2)\,dV$, ker $\rho_0 = \frac{m(D)}{V(D)}$.
2. Težišče (x-koordinata):
   - Nehomogeno telo: $x_T(D) = \frac{1}{m(D)} \int_D x\,\rho(x,y,z)\,dV$, kjer $m(D) = \int_D \rho(x,y,z)dV$.
   - Homogeno telo: $x_T(D) = \frac{1}{V(D)} \int_D x\,dV$

4 Splošno

4.1 Ideji in nasveti

- Odvod lihe funkcije je soda funkcija. Odvod sode funkcije je liha funkcija.
- $\int_0^{2\pi} \cos^{2k+1}\psi\,d\psi = 0$ za $k = 0,1,\dots$
- Za izračun gravitacijske sile sprojecirajmo vse sile na os rezultante.
- 3D sliko lahko si predstavljamo s pomočjo nivojnic.
- Opazimo simetrije, npr. rotacijsko: $f(z, x^2+y^2)$ itd.

4.2 Prostornine

- Tetraedr: $V = \frac{1}{3} S_o h$.
- Valj: $V = \pi r^2 h,\ S = 2\pi r h + 2\pi r^2$.
- Sfera: $V = \frac{4}{3}\pi r^3,\ S = 4\pi r^2$.

4.3 Teylor

Taylorjeva formula: $f(a+h) = f(a) + (D_h f)(a) + \frac{1}{2!}(D_h^2 f)(a) + \dots + \frac{1}{k!}(D_h^k f)(a) + R_k$, kjer je $D_h = h_1 D_1 + h_2 D_2 + \dots + h_n D_n$ **odvod v smeri** h in $R_k = \frac{1}{(k+1)!}(D_h^{k+1} f)(a + \theta h)$ **ostanek**.

$$e^x = \sum_{n=0}^\infty \frac{x^n}{n!}\ (R=\infty) \qquad \sin x = \sum_{n=0}^\infty (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}\ (R=\infty)$$

$$\cos x = \sum_{n=0}^\infty (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!}\ (R=\infty) \qquad \ln(1+x) = \sum_{n=1}^\infty (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n}\ (R=1)$$

$$(1+x)^\alpha = \sum_{n=0}^\infty \binom{\alpha}{n} x^n\ (R=1)$$

4.4 Hiperbolične funkcije

$$\sinh x = \frac{e^x - e^{-x}}{2},\ \cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2},\ \tanh x = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}},\ \cosh^2 x - \sinh^2 x = 1.$$

4.5 Trigonometrija

$$\sin x+\sin y=2\sin\tfrac{x+y}{2}\cos\tfrac{x-y}{2} \qquad \sin x\cos y=\tfrac{1}{2}\left(\sin(x+y)+\sin(x-y)\right)$$
$$\cos x+\cos y=2\cos\tfrac{x+y}{2}\cos\tfrac{x-y}{2} \qquad \cos x\cos y=\tfrac{1}{2}\left(\cos(x+y)+\cos(x-y)\right)$$
$$\cos x-\cos y=-2\sin\tfrac{x+y}{2}\sin\tfrac{x-y}{2} \qquad \sin x\sin y=\tfrac{1}{2}\left(\cos(x-y)-\cos(x+y)\right)$$

4.6 Nedoločeni integral

4.6.1 Integracija racionalnih funkcij

Metoda nastavka. Integriramo $R(x)=p(x)+\frac{r(x)}{q(x)}$.

$$\frac{1}{(x-a)^k}\rightsquigarrow A\ln|x-a|, \qquad \frac{1}{(x^2+bx+c)^l}\rightsquigarrow B\ln|x^2+bx+c|+C\arctan\frac{2x+b}{\sqrt{4c-b^2}}, \qquad \frac{\widetilde{r}(x)}{\widetilde{q}(x)},$$

kjer polinom $\widetilde{q}$ dobimo iz polinoma q z znižanjem potence vsakega faktorja za ena, polinom $\widetilde{r}$ pa ima stopnji za eno nižjo kot $\widetilde{q}$. Število neznak je enako stopnje polinoma q.

4.6.2 Integracija korenckih funkcij

- Integrale oblike $\int R(x,\sqrt[n]{\frac{ax+b}{cx+d}})\,dx$ integriramo z uvedbo nove spremenljivke $t=\sqrt[n]{\frac{ax+b}{cx+d}}$. Tako dobimo integral racionalne funkcije v spremenljivke t.
- Integrale oblike $\int\frac{p(x)}{\sqrt{ax^2+bx+c}}\,dx$ računamo z postopkom:
  1. Če je p konstanta, z zapisom v temenski obliki integral prevedemo:
  $$\int\frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}}=\arcsin\left(\frac{x}{a}\right)+C \qquad \int\frac{dx}{\sqrt{x^2-a^2}}=\ln|x+\sqrt{x^2-a^2}|+C$$
  $$\int\frac{dx}{\sqrt{x^2+a^2}}=\ln|x+\sqrt{x^2+a^2}|+C$$
  2. Če je p poljuben, pa uporabimo nastavek:
  $$\int\frac{p(x)}{\sqrt{ax^2+bx+c}}\,dx=\widetilde{p}(x)\sqrt{ax^2+bx+c}+\int\frac{A\,dx}{\sqrt{ax^2+bx+c}},$$
  kjer $\widetilde{p}$ ima stopnjo 1 manj kot p in je A konstanta.
- Integrale oblike $\int R\left(x,\sqrt{ax^2+bx+c}\right)dx$ vedno lahko z univerzalno substitucijo prevedemo na integral racionalne funkcije:
  $$a>0:\ \sqrt{ax^2+bx+c}=\sqrt{a}(u-x) \qquad a<0:\ \sqrt{ax^2+bx+c}=\sqrt{-a}(x-x_1)u,$$
  kjer je x_1 ničla kvadratne funkcije. Ta metoda v principu vedno deluje, ni pa nujno najbolj optimalna.
- Pri integralih oblike $\int\frac{dx}{(x+\alpha)^k\sqrt{ax^2+bx+c}}$ se splača uvesti novo spremenljivko $t=\frac{1}{x+\alpha}$.

4.6.3 Integracija trigonometričnih funkcij

- Integrale oblike $\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^p x\cos^q x\,dx$, kjer sta $p,q>-1$, računamo s beto funkcijo.
- Integrale oblike $\int R\left(\sin x,\cos x\right)dx$ lahko z univerzalno trigonometrično substitucijo $t=\tan\left(\frac{x}{2}\right)$ prevedemo na integral racionalne funkcije spremenljivke t. Pri tem:
  - $dx=\frac{2dt}{1+t^2}$
  - $\cos x=\frac{1-t^2}{1+t^2}$
  - $\sin x=\frac{2t}{1+t^2}$

  Pri uporabe metode, če se da, poskusimo na začetku z uporabo adicijskih izrekov potence čim bolj znižati, da dobimo bolj enostavno racionalno funkcijo.

Dodatek

$$e^{ax}\sin(bx)\,dx=\frac{e^{ax}}{a^2+b^2}(a\sin(bx)-b\cos(bx)) \qquad e^{ax}\cos(bx)\,dx=\frac{e^{ax}}{a^2+b^2}(a\cos(bx)+b\sin(bx))$$
$$\frac{dx}{x^2-a^2}=\frac{1}{2a}\ln\left|\frac{x-a}{x+a}\right| \qquad \int\frac{dx}{a^2+b^2x^2}=\frac{1}{ab}\arctan\left(\frac{bx}{a}\right)+C$$