

1 Kombinatorika

1.1 Formalne potenčne vrste (Rodovne funkcije)

Definicija. Naj bo $a : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{C}$ zaporedje. Vrsta $\sum_{n \geq 0} a_n x^n$ je **formalna potenčna vrsta** zaporedja a_n .

Definicija. Naj bo $(a_n)_n, (b_n)_n \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}_0}$.

- $\sum_{n \geq 0} a_n x^n + \sum_{n \geq 0} b_n x^n = \sum_{n \geq 0} (a_n + b_n) x^n$.
- $\lambda \cdot \sum_{n \geq 0} a_n x^n = \sum_{n \geq 0} (\lambda a_n) x^n$.
- $(\sum_{n \geq 0} a_n x^n) \cdot (\sum_{n \geq 0} b_n x^n) = \sum_{n \geq 0} c_n x^n$, kjer $c_n = \sum_{k=0}^n a_k b_{n-k}$.

Definicija. F. p. v. $A(x)$ je **obrnljiva**, če obstaja f. p. v. $B(x)$, da velja $A(x) \cdot B(x) = (1, 0, 0, \dots)$.

Trditev. Formalna potenčna vrsta $A(x)$ je obrnljiva natanko tedaj, ko $a_0 \neq 0$

Definicija. Če je $(a_n)_n$ zaporedje, ki je rešitev nekega kombinatoričnega problema, potem $\sum_{n \geq 0} a_n x^n$ pravimo **rodovna funkcija**. Pišemo: $G(x) = \sum_{n \geq 0} a_n x^n$.

Definicija. Naj bo $A(x) = \sum_{n \geq 0} a_n x^n$ f. p. v. **Odvod** f. p. v. je $A'(x) = \sum_{n \geq 1} n a_n x^{n-1} = \sum_{n \geq 0} (n+1) a_n x^n$.

Trditev. $(A(x) \cdot B(x))' = A'(x)B(x) + A(x)B'(x)$.

Reševanje rekurzij z rodovnimi funkcijami

Koraki splošnega reševanja nekega kombinatoričnega problema

1. Rešitev problema zapišemo z rekurzivno enačbo.
2. Zapišemo rodovno funkcijo zaporedja z pomočjo rekurzivne zveze.
3. Z algebro nad rodovnimi funkcijami, rodovno funkcijo razvijemo v vrsto.
4. Iz razvoja preberemo rešitev našega začetnega problema.

1.2 Catalanova števila

Imejmo produkt n števil $x_1 x_2 \dots x_n$. Na koliko načinov lahko izračunamo ta produkt, če po vrsti zmnožimo dve zaporedni števili in jih nadomestimo s produktom?

Definicija. **Catalanovo število** C_n je število načinov, s katerimi lahko izračunamo produkt $x_1 x_2 \dots x_n$.

Opomba. Velja rekurzivna zveza: $a_n = \sum_{k=0}^{n-1} a_k a_{n-k-1}$.

Trditev. $C_n = \frac{1}{n+1} \binom{2n}{n}$.

Dokaz. $G(x) = \frac{1-\sqrt{1-4x}}{2}$, ker $G(0) = 0$. □

2 Teorija grafov

2.1 Osnovni pojmi

Definicija. **Graf** G je urejen par $(V(G), E(G))$, kjer je $V(G)$ množica **vozlišč** grafa G in $E(G)$ množica **povezav** grafa G , kjer je $E(G) \subseteq \binom{V(G)}{2}$.

Definicija. Naj bo G graf, $u \in V(G)$:

- $N_G(u) = \{v \in V(G) \mid uv \in E(G)\}$ je **soseščina** vozlišča u .
- $\deg_G(u) = |N_G(u)|$ je **stopnja** vozlišča u . Označimo z $\delta(G) = \min_{v \in V(G)} \deg_G(v)$.

Definicija. Graf G je **regularen**, če imajo vsa vozlišča isto stopnjo.

Primer. Grafe lahko predstavimo tudi z matrikami. Možnosti:

1. **Matrika sosednosti.** Za graf G z vozlišči v_1, \dots, v_n je matrika sosednosti matrika $A(G) \in \mathbb{R}^{n \times n}$, definirana z

$$a_{ij} = \begin{cases} 1, & v_i \sim v_j, \\ 0, & v_i \not\sim v_j. \end{cases}$$

2. **Incidenčna matrika.** Če ima graf G vozlišča v_1, \dots, v_n in povezave e_1, \dots, e_m , je to matrika $B(G) \in \mathbb{R}^{n \times m}$, podana s predpisom

$$b_{ij} = \begin{cases} 1, & v_i \in e_j, \\ 0, & v_i \notin e_j. \end{cases}$$

2.2 Lema o rokovanju

Lema (Lema o rokovanju). Naj bo G graf. Velja:

$$\sum_{u \in V(G)} \deg_G(u) = 2 \cdot |E(G)|.$$

Dokaz. Incidenčna matrika in načelo dvojnega preštevanja. □

Posledica. Število vozlišč lihe stopnje danega grafa je sodo.

2.3 Podgrafi

Definicija. Naj bosta G in H grafa. Če velja $V(H) \subseteq V(G)$ in $E(H) \subseteq E(G)$, tedaj rečemo, da je H **podgraf** grafa G , in pišemo $H \leq G$. Pri tem:

- Pogrf H je **vpjet** podgraf, če je $V(H) = V(G)$ (odstranimo nekaj povezav).
- Podgraf H je **porojen** (oz. **induciran**), če velja: $\forall u, v \in V(H) . u \sim_G v \Rightarrow u \sim_H v$ (odstranimo nekaj vozlišč).

2.4 Nekatere družine grafov

Poti. Grafu z množico vozlišč \mathbb{Z}_n in množico povezav $E(P_n) = \{i(i+1) \mid i \in \{0, 1, \dots, n-2\}\}$ rečemo **pot dolžine n** . Oznaka: P_n .

Cikli. Za $n \in \mathbb{N}, n \geq 3$, s C_n označimo graf z množico vozlišč \mathbb{Z}_n in množico povezav $E(C_n) = \{i(i+1) \mid i \in \mathbb{Z}_n\}$. Grafu C_n rečemo **cikel dolžine n** .

Polni dvodelni grafi. Naj bosta A in B poljubni disjunktni neprazni množici. Grafu $K_{A,B}$ z množico vozlišč $A \cup B$ in množico povezav $E(K_{A,B}) = \{uv \mid u \in A, v \in B\}$ rečemo **polni dvodelni graf** na paru množic A, B . Oznaka: $K_{A,B}$ ali $K_{m,n}$, če $A = [m]$, $B = [n]$.

Hiperkocke. Za $d \in \mathbb{N}$ naj \mathbb{Z}_2^d predstavlja množico vseh urejenih d -teric ničel in enic. Na \mathbb{Z}_2^d lahko gledamo kot na Abelovo grupo. Za $i \in 1, 2, \dots, d$ naj bo e_i tisti element množice \mathbb{Z}_2^d , ki ima na i -tem mesu enico, povsod drugod pa ničlo. Pišimo $S = \{e_1, e_2, \dots, e_d\}$. **Hiperkocka razsežnosti d** je graf z množico vozlišč \mathbb{Z}_2^d in z dvema vozliščema $u, v \in \mathbb{Z}_2^d$ sosednjima, če in samo če je $u+v \in S$, tj. u in v razlikujeta v natanko eni komponenti. Oznaka: Q_n . Velja:

- $|V(Q_n)| = 2^d$.
- $|E(Q_n)| = d \cdot 2^{d-1}$.

Posplošeni Petersenovi grafi. Naj bosta $n, k \in \mathbb{N}$, $n \geq 3$, $2k < n$. Naj bosta $U = \{u_0, u_1, \dots, u_{n-1}\}$ in $V = \{v_0, v_1, \dots, v_{n-1}\}$ dve disjunktni n -elementni množici. **Posplošeni Petersonov graf $P_{n,k}$** je graf z množico vozlišč $V(P_{n,k}) = U \cup V$ in množico povezav enako $E(P_{n,k}) = E_1 \cup E_2 \cup E_3$, kjer je

$$E_1 = \{u_i u_{i+1} \mid i \in \mathbb{Z}_n\}, \quad E_2 = \{v_i v_{i+k} \mid i \in \mathbb{Z}_n\}, \quad E_3 = \{u_i v_i \mid i \in \mathbb{Z}_n\}.$$

2.5 Sprehodi, poti in cikli

Definicija. Sprehod v grafu G je zaporedje vozlišč grafa G : $v_0 v_1 \dots v_k$, tako da je $v_i v_{i+1} \in E(G)$ za $i \in [k-1]$. Rečemo, da je to $v_0 v_k$ -sprehod. Sprehod je **enostaven**, če so vse njegove povezave paroma različne.

Definicija. Pot v grafu G je sprehod s samimi različnimi vozlišči.

Definicija. Če ima sprehod v grafu G isti začetek in konec pravimo, da je sprehod **sklenjen**. **Enostaven sklenjen sprehod** je sklenjen sprehod, ki je enostaven. **Cikel** v grafu G je sklenjen sprehod z samimi različnimi vozlišči.

Lema. Če v grafu G obstaja uv -sprehod, obstaja tudi uv -pot.

Dokaz. Cilj: paroma različna vozlišča. □

Lema. Če v grafu G obstajata dve različni uv -poti, potem ima G vsaj en cikel.

Dokaz. Skupna vozlišča. □

Lema. Če v grafu G obstaja sklenjen sprehod lihe dolžine, obstaja v G tudi cikel lihe dolžine.

Dokaz. Indukcija na dolžino sprehoda. □

2.6 Povezane komponente, razdalja in premer

Definicija. Graf G je **povezan**, če za vsak par vozlišč $u, v \in V(G)$ obstaja uv -sprehod (ekvivalentno: uv -pot).

Definicija. Maksimalni podgrafi grafa, ki so povezani, so **komponente** grafa.

Označimo z $\Omega(G)$ število komponent grafa G .

Definicija. Naj bo G povezan graf, $u, v \in V(G)$. **Razdalja** $d_G(u, v)$ med u in v je število povezav na najkrajši uv -poti.

Opomba. Naj bo G povezan graf. Velja:

- $d_G(u, v) = 0 \Leftrightarrow u = v$.
- $d_G(u, v) = 1 \Leftrightarrow uv \in E(G)$.

Trditev. Naj bo G povezan graf. Potem $(V(G), d_G)$ je metrični prostor.

Definicija. Naj bo G povezan graf. **Ekscentričnost** $\text{ecc}_G(u)$ vozlišča u je $\max_{v \in V(G)} d_G(u, v)$.

Definicija. Naj bo G povezan graf. **Premier** $\text{diam } G$ grafa G je $\max_{u \in V(G)} \text{ecc}_G(u) = \max_{u, v \in V(G)} d_G(u, v)$.

Definicija. Naj bo G povezan graf. **Polmer** $\text{rad}(G)$ grafa G je $\min_{u \in V(G)} \text{ecc}_G(u)$

Primer. Velja:

- $\text{diam}(P_{5,2}) = \text{rad}(P_{5,2}) = 2$.
- $\text{diam}(P_n) = n - 1, \text{ rad}(P_n) = \lfloor \frac{n}{2} \rfloor$.

2.7 Dvodelnost

Definicija. Graf G je **dvodelen**, če obstaja razdelitev $V(G) = V_1 \cup V_2$, tako da velja:

$$uv \in E(G) \Rightarrow u \in V_1 \wedge v \in V_2.$$

Primer. Dvodelnost grafa lahko raziščemo z barvanje vozlišč z dvema barvama.

Izrek. Graf G je dvodelen natanko tedaj, ko ne vsebuje lihih ciklov.

Dokaz. (\Rightarrow) Imamo težavo z barvanje cikla.

(\Leftarrow) Izberimo $x \in V(G)$ in razdelimo $V(G)$ na vozlišča, ki so na sode razdalje od x in, ki so na lihe razdalje od x . Pokažemo, da znotraj posameznih množic ni povezav. \square

2.8 Morfizmi grafov

Homomorfizmi grafov

Definicija. Naj bosta G, H grafa. Preslikava $f : V(G) \rightarrow V(H)$ je **homomorfizem**, če velja:

$$uv \in E(G) \Rightarrow f(u)f(v) \in E(H).$$

Injektivni homomorfizem je **vložitev** grafa G v graf H .

Opomba. Če je G dvodelen, potem obstaja homomorfizem $f : G \rightarrow K_2$.

Definicija. Vložitev $f : V(G) \rightarrow V(H)$ grafa G v graf H je **izometrična**, če velja:

$$\forall u, v \in V(G) . d_G(u, v) = d_H(f(u), f(v)).$$

Primer. Preslikava $\varphi : V(C_4) \rightarrow V(Q_3)$ definirana s

x	0	1	2	3
$\varphi(x)$	000	100	110	010

je homomorfizem.

Izomorfizmi grafov

Definicija. Naj bosta G, H grafa. Preslikava $f : V(G) \rightarrow V(H)$ je **izomorfizem**, če

1. f je bijekcija;
2. f je homomorfizem;
3. f^{-1} je homomorfizem.

Opomba. Pogoji 2. pravi, da f slika povezave v povezave. Pogoji 3. pravi, da f slika nepovezave v nepovezave.

Definicija. Grafa G in H sta **izomorfna**, če obstaja izomorfizem med njima. Oznaka: $G \cong H$.

Opomba. Izomorfnost je algoritmično zahtevna naloga. Če za dva grafa domnevamo, da sta izomorfna, potem to dokažemo tako, da med njima poiščemo izomorfizem. Če za dva grafa domnevamo, da nista izomorfna, tedaj to najlažje dokažemo tako, da poiščemo neko številsko karakteristiko grafov, v kateri se razlikujeta, pri izomorfizmu pa se ohranja: število vozlišč, število povezav, ožina, število podgrafov izbrane vrste (trikotniki, cikli dolžine 4), urejeno zaporedje snopenj vozlišč. Lahko si pomagamo z lastnosti grafov: povezanost, dvodelnost.

Grupa avtomorfizmov grafa

Definicija. **Avtomorfizem** grafa G je izomorfizem $f : G \rightarrow G$.

Definiramo $\text{Aut}(G) = \{\varphi \mid \varphi \text{ je avtomorfizem grafa } G\}$. Dodamo še komponiranje in dobimo **grupo avtomorfizmov grafa** G .

Opomba. Velja:

- Vsaka končna grupa je grupa avtomorfizmov nekega grafa.
- $\text{Aut}(K_n) \cong S_n$, $\text{Aut}(P_n) \cong \mathbb{Z}_2$, $\text{Aut}(C_n) \cong D_{2n}$.
- Skoraj vsi grafi imajo trivialno grupo $\text{Aut}(G)$.

2.9 Operacije z grafi

Komplementarni graf

Definicija. **Komplement** \overline{G} grafa G je graf z isto množico vozlišč kot G in z dvema vozliščema sosednjima v \overline{G} , če in samo če nista sosednja v grafu G .

Trditev. Če graf G ni povezan, potem je $\text{diam}(\overline{G}) \leq 2$.

Posledica. Za poljuben graf G je vsaj eden od grafov G in \overline{G} povezan.

Odstranjevanje vozlišč in povezav

Naj bo G graf.

- Naj bo $v \in V(G)$. $G - v$ je graf brez vozlišča v in povezav z v .
- Naj bo $e \in E(G)$. $G - e$ je graf brez povezave e .
- Naj bo $X \subseteq V(G)$. $G - X$ je graf brez vseh vozlišč iz X .
- Naj bo $F \subseteq E(G)$. $G - F$ je graf brez vseh povezav iz F .

Opomba. Vsak podgraf grafa G je enak grafu $(G - X) - F$, kjer je X neka množica vozlišč in F neka množica povezav grafa G .

Skrčitev povezav in minorji

Naj bo $e \in E(G)$. Z G/e označimo graf, ki ga dobimo iz grafa G tako, da identificiramo krajišči povezave e in odstranimo zanko ter morebitne vzporedne povezave. Pri tem rečemo, da smo G/e dobili s **skrčitvijo** povezave e .

Definicija. Graf H je **minor** grafa G , če ga lahko dobimo iz nekega podgraфа grafa G s skrčitvijo nekaj povezav.

Primer. K_5 je minor Petersenovega grafa.

Opomba. Graf H je minor grafa G natanko tedaj, ko H lahko dobimo z zaporedjem operacij: odstranjevanje vozlišča, odstranjevanje povezave, skčitev povezave v poljubnem vrstem redu.

Subdivizije povezav in glajenje vozlišč

Definicija. **Subdivizija** povezave $e \in E(G)$ je zamenjava povezave s potjo dolžine 2. Oznaka: $G^+(e)$.

Definicija. Graf H je **subdivizija** grafa G , če H lahko dobimo iz G z zaporedjem subdivizij povezav.

Opomba. Graf H je subdivizija grafa G , če vsako povezavo v G nadomestimo z neko potjo in vse te poti so paroma disjunktne po povezavih.

Definicija. Grafa G in H sta **homeomorfna**, če obstaja graf X , tako da G in H subdiviziji grafa X .

Definicija. Obratna operacija od subdivizije povezave, je **glajenje** vozlišča $w \in V(G)$ stopnje 2. Oznaka: $G^-(w)$.

Opomba. Grafa sta homeomorfna, če z glajenjem pridemo do istega grafa.

Kartezični produkt

Definicija. **Kartezični produkt** grafov $G_1 = (V_1, E_1)$ in $G_2 = (V_2, E_2)$ je graf $G = G_1 \square G_2$ z množico vozlišč $V(G) = V_1 \times V_2$ in relacijo sosednosti \sim , določeno s predpisom

$$(u_1, v_1) \sim_G (u_2, v_2) \Leftrightarrow (u_1 \sim_{G_1} u_2 \wedge v_1 = v_2) \vee (u_1 = u_2 \wedge v_1 \sim_{G_2} v_2).$$

Trditev. Naj bo G_1, G_2 in G_3 poljubni grafi in naj bo K_1 polni graf z enim vozliščem. Tedaj velja naslednje:

- $G_1 \square G_2 \cong G_2 \square G_1$.
- $(G_1 \square G_2) \square G_3 \cong G_1 (\square G_2 \square G_3)$.
- $G_1 \square K_1 \cong G_1$.

Lastnost asociativnosti nam omogoča, da definiramo pojem **kartezične potence grafa**. Za graf G in $n \in \mathbb{N}$ naj bo

$$G^{\square n} = \underbrace{G \square G \square \dots \square G}_{n \text{ kopij}}.$$

Primer. $K_2^{\square n} = Q_n$.

2.10 Prerezna vozlišča in k -povezanost

Definicija. Naj bo G graf.

- Vozlišče $u \in V(G)$ je **prerezno**, če $\Omega(G - u) > \Omega(G)$.
- Povezava $f \in E(G)$ je **prerezna** ali **most**, če $\Omega(G - f) > \Omega(G)$.
- Množica vozlišč $S \subseteq V(G)$ je **prerez**, če $\Omega(G - S) > \Omega(G)$.
- Množica povezav $F \subseteq E(G)$, če **povezavni prerez**, če $\Omega(G - F) > \Omega(G)$.

Definicija. Graf G je **k -povezan**, če ima vsaj $k + 1$ vozlišč in nima prereza moči strogo manj kot k . **Povezanost** grafa G je največji k , za katerega je G k -povezan. Oznaka: $K(G)$.

Primer. Povezanost nekaterih grafov:

- $K(K_n) = n - 1$.
- $K(C_n) = 2, n \geq 3$.
- $K(Q_n) = n$.

Opomba. Naj bo G graf, potem $K(G) \leq \delta(G)$.

Definicija. Naj bo G graf, $u, v \in V(G)$. uv -poti P in Q sta **notranji-disjunktne**, če je $V(P) \cap V(Q) = \{u, v\}$.

Izrek (Whitney). Graf G je 2-povezan natanko tedaj, ko za vsak par vozlišč $u, v \in V(G)$, $u \neq v$ obstajata dve notranji-disjunktne uv -poti.

Dokaz. (\Leftarrow) Pokažemo, da G nima prereza moči 1.

(\Rightarrow) Naj bo $u, v \in V(G)$. Obstoj dokažimo z indukcijo po $d_G(u, v)$. □

2.11 Drevesa

Definicija. **Gozd** je graf brez ciklov. **Drevo** je povezan gozd. **List** je vozlišče stopnje 1.

Lema. Naj bo T drevo, $|V(T)| > 2$. Potem T premore list.

Dokaz. Če vozlišče ni list, potem ima vsaj ena novega soseda. □

Lema. Naj bo T drevo, potem $|E(T)| = |V(T)| - 1$.

Dokaz. Indukcija po $|V(T)|$. □

Lema. Naj bo G povezan graf in $e \in E(G)$ leži na nekem ciklu, potem je $G - e$ povezan graf.

Dokaz. Definicija povezanosti. □

Lema. Naj bo G povezan graf, potem je $|E(G)| \geq |V(G)| - 1$.

Opomba. Drevesa so povezani grafi z najmanjšim številom povezav.

Izrek. Za graf G so ekvivalentne trditve:

1. G je drevo.
2. Za vsak par vozlišč v G obstaja enoličen pot med njima.
3. G je povezan in vsaka povezava je most.
4. G je povezan in $|E(G)| = |V(G)| - 1$.

2.12 Vpeta drevesa

Definicija. **Vpeto drevo** grafa je vpet podgraf, ki je drevo.

Trditev. Graf je povezan natanko tedaj, ko vsebuje vpeto drevo.

Označimo z $\tau(G)$ število vpetih dreves grafa G .

Primer. $\tau(C_n) = n$.

Opomba. Sedaj obravnamo skrajšitev povezave G/e tako, da vzporednih povezav ne odstranimo.

Trditev. Naj bo $e \in E(G)$, potem

$$\tau(G) = \tau(G - e) + \tau(G/e).$$

Dokaz. Naj bo T vpeto drevo v G . Imamo 2 možnosti: $e \notin T$ in $e \in T$. □

Definicija. Naj bo G graf. **Laplaceova matrika** $L(G)$ grafa G z množico vozlišč $V(G) = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ je $n \times n$ matrika, za katero velja:

$$L(G)_{ij} = \begin{cases} \deg(v_i); & i = j \\ -\text{število povezav med } v_i \text{ in } v_j; & i \neq j \end{cases}.$$

Izrek. Število vpetih dreves grafa G je enako determinante matrike, ki jo dobimo iz $L(G)$ tako, da izbrišemo vrstico in stolpec nekega vozlišča.

Izrek (Cayley). $\tau(K_n) = n^{n-2}$

2.13 Eulerjevi grafi

Definicija. Sprehod v grafu je **Eulerjev**, če je enostaven in prehodi vse povezave. Sklenjen Eulerjev sprehod je **Eulerjev obhod**. Graf je **Eulerjev**, če premore Eulerjev obhod.

Izrek. Graf je Eulerjev natanko tedaj, ko je povezan in so vsa njegova vozlišča sode stopnje.

Dokaz. (\Rightarrow) Opazujemo poljuben Eulerjev obhod.

(\Leftarrow) Indukcija po $|E(G)|$. Baza: Cikli. □

Izrek. Povezan graf premore Eulerjev sprehod natanko tedaj, ko ima kvečjemu dve vozlišči lihe stopnje.

Fleuryjev algoritem Kako poiščemo Eulerjev obhod v poljubnem Eulerjevem grafu?

1. Začnemo v poljubnem vozlišču.
2. Za seboj brišemo povezave, ki smo jih prehodili.
3. Na vsakem koraku izberimo poljubno povezavo, pri tem pa pazimo le na to, da na most gremo le v premeru, če ni druge možnosti.

2.14 Hamiltonovi grafi

Definicija. **Hamiltonov cikel** grafa je cikel, ki vsebuje vsa vozlišča grafa. **Hamiltonov pot** je pot d grafa, ki vsebuje vsa vozlišča. Graf je **Hamiltonov**, če premore Hamiltonov cikel.

Izrek. Naj bo G Hamiltonov graf in $X \subseteq V(G)$. Tedaj je

$$\Omega(G - X) \leq |X|.$$

Dokaz. Narišemo Hamiltonov cikel. □

Primer. $K_{n,n}$ je Hamiltonov natanko tedaj, ko $n = m$.

Izrek (Ore). Če je G povezan graf in za vsak par nesosednih vozlišč $u, v \in V(G)$ velja

$$\deg(u) + \deg(v) \geq |V(G)|,$$

potem je G Hamiltonov.

Dokaz. Metoda najmanjšega proti primera: med vsemi protiprimeri izberimo takega, ki ima najmanj vozlišč, med vsemi taki, pa izberimo protiprimer, ki ima največ povezav. Poiščemo v tem grafu Hamiltonov cikel. □

Izrek (Dirac). Naj bo G graf. Če $|V(G)| \geq 3$ in $\delta(G) \geq \frac{|V(G)|}{2}$, potem je graf G Hamiltonov.

2.15 Ravninski grafi

Definicija. Graf G je **ravninski**, če ga lahko narišemo v ravnini tako, da se povezave ne križajo. Ravninski graf skupaj z ustrezni rusbi v ravnini, je graf **vložen v ravnino**.

Primer. $K_{2,3}$ je ravninski, $K_{3,3}$ pa ni ravninski.

Definicija. Naj bo G graf vložen v ravnino. Med seboj ločeni povezani območji imenujemo **lica**. Označimo z $F(G)$ množico vseh lic grafa.

Opomba. Graf lahko vložimo v ravnino natanko tedaj, ko ga lahko vložimo v sfero (obratno implikacijo naredimo z stereografsko projekcijo). Torej imamo še **zunanje lice**, ki je neomejeno v ravnini in omejeno na sfere.

Definicija. Vsako lice $f \in F(G)$ je omejeno s sklenjenim sprehodom v grafu G , ki mu rečemo **rob** lica f . Rob lica f označimo z ∂f , njegovo dolžino (tj. število povezav na robu lica) pa z $l(f)$.

Opomba. Vsaka povezava grafa G tipično leži na robu dveh lic, enega, ki leži na enem bregu povezave, in drugega, ki leži na drugem bregu. Izjemoma pa se lahko primeri, da ti dve lici sovpadata. V tem primeru pri računanju $l(f)$ take povezave štejemo dvakrat.

Trditev (Lema o rokovanju za ravninske grafe). Če je G graf vložen v ravnino, potem je

$$2 \cdot |E(G)| = \sum_{f \in F(G)} l(f).$$

Definicija. Naj bo G graf, ki premore cikle. Potem je njegova **ožina** $g(G)$ je dolžina najkrajšega cikla v G .

Trditev. Če je G graf vložen v ravnino in ima vsaj en cikel, potem

$$|E(G)| \geq \frac{g(G)}{2} |F(G)|$$

Dokaz. Ožina grafa G je omejena z dolžino vsakega lica. □

Izrek (Eulerjeva formula). Če je G vložen v ravnino, potem

$$|V(G)| - |E(G)| + |F(G)| = 1 + \Omega(G).$$

Dokaz. Naj bo $\Omega(G) = 1$. Dokazujemo za dani $|V(G)|$ z indukcijo po $|E(G)|$. Če je $\Omega(G) > 1$ uporabimo formulo na vsake komponente posebej. □

Posledica. Naj bo G povezan graf vložen v ravnino. Potem

$$|V(G)| - |E(G)| + |F(G)| = 2.$$

Trditev. Naj bo G povezan graf vložen v ravnino in ima vsaj en cikel. Potem

$$|E(G)| \leq \frac{g(G)}{g(G) - 2}(|V(G)| - 2)$$

Dokaz. Uporabimo Eulerjevo formulo in oceno za $|E(G)|$. □

Opomba. Velja: $g(G) \geq 3$

Posledica. Naj bo G povezan graf vložen v ravnino in ima vsaj en cikel. Potem

$$|E(G)| \leq 3|V(G)| - 6.$$

Posledica. Naj bo G povezan graf vložen v ravnino, ki nima trikotnikov in ima vsaj en cikel. Potem

$$|E(G)| \leq 2|V(G)| - 4.$$

Opomba. 1. in 2. posledica veljata tudi za drevesi z vsaj 3 vozlišči.

Primer. Ni ravninski grafi:

- K_5 ni ravninski (ima preveč povezav po 1. posledici).
- $K_{3,3}$ ni ravninski (ima preveč povezav po 2. posledici).

Izrek (Kuratowski). Graf G je ravninski natanko tedaj, kadar ne vsebuje podgrafa, ki je subdivizija K_5 ali subdivizija $K_{3,3}$.

Dokaz. (\Rightarrow) Graf je ravninski natanko tedaj, ko je vsaka njegova subdivizija je ravninska. □

Primer. Ni ravninski grafi:

- Petersenov graf (ima subdivizijo $K_{3,3}$).
- $Q_4 = (K_2 \square K_2) \square (K_2 \square K_2)$ niso ravninski.

Izrek (Wagner). Graf G je ravninski natanko tedaj, ki niti K_5 niti $K_{3,3}$ nista njegova minorja.

Primer. Tudi z Wagnerjevim izrekom lahko dokažemo, da Petersonov graf ni ravninski (K_5 je minor).