1 Fourierjeva analiza

Naj bo funkcija $f : [-\pi, \pi]$ nezvezna v končno mnogo točkah, kjer obstajata levi in desni odvod, vmes pa je med tema točkama odvedljiva. Tedaj

$$\mathrm{FV}(f)(x) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx)),$$

kjer $a_0 = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,dx$ ter $a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos(nx)\,dx$ in $b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin(nx)\,dx$.
Za vsak $x \in [-\pi, \pi]$ Fourierjeva vrsta funkcije f konvergira proti

- $f(x)$, če je f zvezna v x in
- $\frac{f(x-)+f(x+)}{2}$, če f ni zvezna v x.

Naj bo $f : [0, \pi] \to \mathbb{R}$ funkcija. Funkcijo f s predpisom $f(x) = f(-x), x < 0$ lahko razširimo do sode funkcije ter s predpisom $f(x) = -f(-x)$ do lihe. Tedaj

$$\mathrm{FV}_{\cos}(f)(x) = \mathrm{FV}(f_{\text{soda}}(x)) \quad \text{ter} \quad \mathrm{FV}_{\sin}(f)(x) = \mathrm{FV}(f_{\text{liha}}(x))$$

Parsevalova enakost:

$$\int_{-\pi}^{\pi} f^2(x)\,dx = 2\pi a_0^2 + \pi\sum_{n=1}^{\infty}(a_n^2 + b_n^2).$$

1.1 Nasveti

- Za izračun integralov z sin in cos lahko uporabljamo enakost
$$\cos(nx) + \sin(nx) = e^{inx}.$$
- Če je funkcija soda, potem $\forall n > 1 \,.\, b_n = 0$; če je funkcija liha, potem $\forall n > 0 \,.\, a_n = 0$.
- Če želimo sešteti številsko vrsto, najprej razvijemo funkcijo v vrsto, potem vzamemo vrednost v pravi točki.
- Vsak polinom v sin in cos ima končno Fourierjevo vrsto. Dobimo jo s pomočjo trigonometrije.

2 Vektorska analiza

2.1 Gradient, divergenca in rotor. Potencial.

- $\operatorname{rot}\operatorname{grad} u = 0$ in $\operatorname{div}\operatorname{rot}\vec{f} = 0$.
- Vektorsko polje $\vec{f}$ na zvezdastem območju je potencialno natanko tedaj, ko $\operatorname{rot}\vec{f} = 0$.
- Naj bo $f(\vec{r}) = \frac{1}{|\vec{r}-\vec{a}|}$ skalarno polje. Velja:
$$\operatorname{grad} f = -\frac{\vec{r}-\vec{a}}{|\vec{r}-\vec{a}|^3} \quad \text{ter} \quad \operatorname{div}(\operatorname{grad} f) = 0.$$
Torej je $\operatorname{grad} f$ **solenoidalno** polje, tj. $\operatorname{div}\vec{f} = 0$.
- $\operatorname{rot}(\vec{r} \times \vec{a}) = -2\vec{a}$; $\operatorname{rot}(\vec{a} \times \vec{r}) = 2\vec{a}$.
- Vektorsko polje $\vec{f}$ je **potencialno**, če obstaja skalarno polje u, da $\vec{f} = \operatorname{grad} u$. Potencial polja dobimo z unijo členov po integraciji parcialnih odvodov.
- Laplaceov operator: $\triangle u = \operatorname{div}\operatorname{grad} u$.

2.2 Krivuljni integral skalarnega polja

Naj bo K krivulja z regularno parametrizacijo $\vec{r} : [a, b] \to \mathbb{R}^3$, $\vec{r} = (x, y, z)$. Tedaj

$$ds = |\dot{\vec{r}}(t)|dt = \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2}.$$

Naj bo $u : D \subseteq \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ skalarno polje. Definiramo

$$\int_K u\, ds = \int_a^b u(\vec{r}(t))|\dot{\vec{r}}(t)|dt.$$

2.3 Ploskovni integral skalarnega polja

Naj bo S ploskev z regularno paramaterizacijo $\vec{r} : \triangle \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$. Tedaj

$$dS = ||\vec{r}_u \times \vec{r}_v||dudv = \sqrt{||\vec{r}_u||^2 \cdot ||\vec{r}_v||^2 - \langle r_u, r_v\rangle^2}\, dudv = \sqrt{EG - F^2}\, dudv.$$

Naj bo $\mu : D \subseteq \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ skalarno polje. Definiramo

$$\int_S \mu\, dS = \int_\triangle \mu(\vec{r}(u, v))|\vec{r}_u \times \vec{r}_v|\, dudv.$$

- Če je $S \subseteq \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \{a\}$, potem
$$\int_S \mu\, dS = \int_\triangle \mu(x, y, a)\, dxdy,$$
kjer je $\triangle$ projekcija v xy-ravnino. Podobno za poljubno permutacijo koordinat.

2.4 Krivuljni integral vektorskega polja

Naj bo K krivulja z regularno parametrizacijo $\vec{r} : [a, b] \to \mathbb{R}^3$, $\vec{r} = (x, y, z)$.
Naj bo $\vec{f} : D \subseteq \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ vektorsko polje. Definiramo

$$\int_K \vec{f} \cdot d\vec{r} = \int_a^b (\vec{f}(\vec{r}(t)) \cdot \dot{\vec{r}}(t))\, dt.$$

- Parametrizacija krivulje določa tudi njeno orientacijo.
- **Cirkulacija** je integral vektorskega polja vzdolž sklenjene krivulje.
- Integral potencialnega polja je enak vrednosti potenciala v končni točki minus vrednosti potenciala v začetni točki.

2.5 Ploskovni integral vektorskega polja

Naj bo S ploskev z regularno paramaterizacijo $\vec{r} : \triangle \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$.
Naj bo $\vec{f} : D \subseteq \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ vektorsko polje. Definiramo

$$\int_S \vec{f} \cdot d\vec{S} = \int_S (\vec{f} \cdot \vec{n})\, dS,$$

kjer je $\vec{n}$ enotska normala. Orientacija ploskve je potem določna z smerjo normale. Za izračun uporabljamo formulo

$$\int_S \vec{f} \cdot d\vec{S} = \int_\triangle \vec{f}(\vec{r}(u, v)) \cdot (\vec{r}_u \times \vec{r}_v)\, dudv,$$

pri čemer smer $\vec{r}_u \times \vec{r}_v$ se mora ujemati s predpisano orientacijo.

- To je tudi **pretok** polja $\vec{f}$ skozi ploskev S.
- Ravno ploskev lahko parametriziramo v obliki $\vec{n} \cdot dS$.

2.6 Integralski izreki

Naj bo $\vec{f} : D \subseteq \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ vektorsko polje.

Izrek 2.1 (Gaussov izrek)**.** *Naj bo $\Omega^{odp} \subseteq D$ omejena množica, katere rob $\partial\Omega$ je sestavljen iz končnega števila gladkih ploskev. Rob $\partial\Omega$ orientiramo tako, da izberimo zunanjo normalo. Tedaj*

$$\iint_{\partial\Omega} \vec{f} \cdot d\vec{S} = \iiint_{\Omega} \operatorname{div} \vec{f} \, dV.$$

Izrek 2.2 (Stokesov izrek)**.** *Naj bo $\Sigma \subseteq D$ odsekoma gladka orientirana omejena ploskev, katere rob $\partial\Sigma$ je sestavljen iz končnega števila gladkih krivulj. Rob $\partial\Sigma$ orientiramo skladno s Σ: Če hodimo po ∂S v smeri predpisane orientacije in je S na naši levi strani, glava določa normalo $\vec{n}$. Tedaj*

$$\int_{\partial\Sigma} \vec{f} \cdot d\vec{r} = \iint_{S} \operatorname{rot} \vec{f} \cdot d\vec{S}.$$

Izrek 2.3 (Greenova formula)**.** *Naj bo $D^{odp} \subseteq \mathbb{R}^2$ omejena množica, katere rob ∂D je sestavljen iz končnega števila gladkih krivulj. Rob ∂D orientiramo skladno s D.*
Naj bosta $X, Y : D \to \mathbb{R}$ gladki funkciji. Tedaj

$$\int_{\partial D} X \, dx + Y \, dy = \iint_{D} (Y_x - X_y) \, dxdy.$$

2.7 Splošno

- Pri izračunu gradienta, divergence, rotorja itn. vektorji zapišemo v kartezičnih koordinatih.
- Pri parametrizaciji lahko si pomagamo s sferični, cilindrični itn. koordinati.
- Problematične točke lahko izoliramo s krogli.

3 Splošno

3.1 Linearna algebra

- $\vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c}) = (\vec{c} \cdot \vec{a})\vec{b} - (\vec{b} \cdot \vec{a})\vec{c}$.
- Ploščina trikotnika: $S = \frac{1}{2}||(\vec{r}_A - \vec{r}_B) \times (\vec{r}_A - \vec{r}_C)||$. Težišče: $\vec{r}_T = \frac{1}{3}(\vec{r}_A = \vec{r}_B + \vec{r}_C)$.
- Enačba ravnine: $\vec{a} \cdot \vec{n} = d$, kjer je $\vec{n}$ normala.

3.2 Geometrija

TODO: enačbe v kartezičnih koordinatih

- Tetraedr: $V = \frac{1}{3}S_{\text{osn}}h$.
- Stožec: $V = \frac{1}{3}S_{\text{osn}}h, \ S = \pi r^2 + \pi r\sqrt{r^2 + h^2}$.
- Valj: $V = \pi r^2 h, \ S = 2\pi r h + 2\pi r^2$.
- Sfera: $V = \frac{4}{3}\pi r^3, \ S = 4\pi r^2$; Elipsoid: $V = \frac{4}{3}\pi abc$.
- Torus: $V = 2\pi^2 a^2 b$.

3.3 Račun integralov

3.3.1 Parametrizacije

Astroida $x^{2/3} + y^{2/3} = a^{2/3}$:

$$\vec{r}(t) = (a\cos^3 t,\ a\sin^3 t),\ \ t \in [0, 2\pi].$$

Sfera $x^2 + y^2 + z^2 = r^2$:

$$\vec{r}(\psi, \varphi) = (r\cos\psi\cos\varphi,\ r\cos\psi\sin\varphi,\ r\sin\psi),\ \ \varphi \in [0, 2\pi],\ \ \psi \in [-\pi/2, \pi/2]$$

ter

$$\vec{r}_\psi \times \vec{r}_\varphi = -\vec{r}(\psi, \varphi)\cos\psi.$$

3.4 Površine

Površina grafa $f : D \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$:

$$S = \iint_D \sqrt{1 + f_x^2 + f_y^2}\, dxdy \quad \text{ter} \quad dS = \sqrt{1 + f_x^2 + f_y^2}\, dxdy$$

TODO:

- Ploščine n-kotnikov ter 2D likov. Volumne ter ploščine 3D figur. Formula ploščine s vektorskim produktom.
- Integrali, vpeljava novih spremenljivk. Sferične koordinate za elipsoid. Premiki.
- Normala na graf funkcije.
- Orientacija usklajena s paramterizacijo.
- Običajni vrstni red integraciji.
- Funkciji Gamma in Beta.
- Zamena spremenljivke pri odvodu.