

1 Kombinatorika

1. Osnovna načela kombinatorike

- **Trditev.** Načelo produkta.
- **Trditev.** Posplošeno načelo produkta.
- **Trditev.** Načelo vsote.
- **Trditev.** Posplošeno načelo vsote.
- **Trditev.** Načelo enakosti.
- **Primer.** Določi moč množice $\mathcal{P}(A)$, kjer $|A| = n$.
- **Trditev.** Načelo dvojnega preštevanja.
- **Primer.** Eulerjeva funkcija ϕ . Določi $\sum_{d|n} \phi(d)$.
- **Trditev.** Dirichletovo načelo.
- **Opomba.** Kombinatorična interpretacija Dirichletovega načela.
- **Primer.** Naj bo $X \subset [100]$, $|X| = 10$. Pokaži, da X vsebuje dve disjunktni podmnožici z isto vsoto.

Izpitna vprašanja:

- Katera so osnovna načela kombinatoričnega preštevanja? Kako Dirichletovo načelo izrazimo v jeziku funkcij? Kako z enim izmed osnovnih načel dokažemo formulo $\sum_{d|n} \phi(d) = n$?

2. Število preslikav

- **Definicija.** Množica vseh preslikav iz A v B .
- **Definicija.** Padajoča potenca. Naraščajoča potenca. n -fakulteta.
- **Trditev.** Koliko je preslikav iz n -množici v k -množico? Koliko je injektivnih? Koliko je bijektivnih?

3. Binomski koeficienti in binomski izrek

- **Definicija.** Binomski koeficienti.
- **Trditev.** Binomska števila.
- **Opomba.** Čemu je enako $\binom{0}{0}$ in $\binom{n}{k}$ za $0 \leq k \leq n$?
- **Definicija.** Množica vseh k -podmnožic množice N .
- **Trditev.** Moč $\binom{N}{k}$.
- **Trditev.** Rekurzivna formula za binomska števila.
- **Definicija.** Paskalov trikotnik.
- **Izrek.** Binomski izrek.
- **Opomba.** Kaj sta a in b v binomskem izreku?

Izpitna vprašanja:

- Koliko je vseh preslikav med končnima množicama, koliko je vseh injektivnih preslikav, bijektivnih preslikav in surjektivnih preslikav? Zapišite binomski izrek.

4. Izbori

Naj bo N n -množica. Opazujemo izbore k elementov.

- Koliko je urejenih izborov z ponavljanjem in brez?
- Koliko je neurejenih izborov brez ponavljanja?
- **Trditev.** Koliko je neurejenih izborov s ponavljanjem?

Izpitna vprašanja:

- Koliko je urejenih in neurejenih izborov z in brez ponavljanja? Utemeljite formulo za neurejene izbore s ponavljanjem.

5. Multimnožice

- **Definicija.** Permutacija množice A . Inverzija. Soda permutacija. Liha permutacija.
- **Trditev.** Določi $|S_n|$.
- **Definicija.** Multimnožica. Kratnost elementa. Moč multimnožice.
- **Opomba.** Kako formalno podamo multimnožico?
- **Opomba.** Kakšna zvezna med multimnožico in neurejenim izborom z ponavljanjem?
- **Definicija.** Permutacija multimnožice.
- **Trditev.** Število permutacij multimnožice.
- **Definicija.** Multinomski koeficient.
- **Trditev.** Multinomski izrek.

Izpitna vprašanja:

- Kaj je permutacija multimnožice? Definirajte multinomske koeficiente in zapišite multinomski izrek.

6. Kompozicije naravnega števila

- **Definicija.** Kompozicija naravnega števila. Dolžina kompozicije. Velikost kompozicije. Členi kompoziciji.
- **Trditev.** Število kompozicij števila $n \in \mathbb{N}$. Število kompozicij števila $n \in \mathbb{N}$ dolžine k .
- **Definicija.** Šibka kompozicija naravnega števila.
- **Trditev.** Število šibkih kompozicij števila $n \in \mathbb{N}$ dolžine k .

Izpitna vprašanja:

- Kaj je kompozicija naravnega števila? Koliko je vseh kompozicij števila n in koliko jih ima k členov? Kaj je šibka kompozicija naravnega števila in koliko je takih kompozicij števila n s k členi?

7. Razčlenitve naravnega števila

- **Definicija.** Razčlenitev naravnega števila. Dolžina razčlenitve. Velikost razčlenitve. Členi razčlenitve.
- **Definicija.** Ferrersov diagram razčlenitve. Konjugirana razčlenitev.
- **Trditev.** Število razčlenitev števila $n \in \mathbb{N}$ s k členi (dve zvezi). Število razčlenitev števila $n \in \mathbb{N}$ z največ k členi.

Izpitna vprašanja:

- Kaj je razčlenitev naravnega števila? Koliko je vseh razčlenitev števila n s k členi in koliko s kvečjemu k členi?

8. Stirlingova števila I. vrste

- **Definicija.** Stirlingovo število I. vrste. $C(n, 0)$, $n > 0$ in $C(0, 0)$
- **Primer.** Izračunaj $C(n, n)$, $C(n, 1)$ in $C(4, 2)$.
- **Trditev.** Osnovna rekurzivna zveza za Stirlingova števila I. vrste.
- Stirlingova matrika I. vrste.
- **Trditev.** Polinomska identiteta.
- **Primer.** Izračunaj x^4 .

Izpitna vprašanja:

- Kako so definirana Stirlingova števila prve vrste in kako jih izračunamo? Zapišite začetni del Stirlingove matrike prve vrste.

9. Stirlingova števila II. vrste in Bellova števila

- **Definicija.** Razdelitev množice.
- **Definicija.** Stirlingovo število II. vrste. $S(n, 0)$, $n > 0$ in $S(0, 0)$
- **Primer.** Izračunaj $S(n, n)$, $S(n, 1)$ in $S(n, 2)$.
- **Trditev.** Osnovna rekurzivna zveza za Stirlingova števila II. vrste.
- Stirlingova matrika II. vrste.
- **Trditev.** Polinomska identiteta.
- **Trditev.** Število surjekcij iz n -množice v k -množico.
- **Definicija.** Bellovo število.
- **Trditev.** Osnovna rekurzivna zveza za Bellova števila.

Izpitna vprašanja:

- Kako so definirana Stirlingova števila druge vrste in kako jih izračunamo? Zapišite začetni del Stirlingove matrike druge vrste. Kakšna je povezava med temi števili in ekvivalenčnimi relacijami?

10. Lahova števila

- **Definicija.** Lahovo število.
- **Trditev.** Osnovna rekurzivna zveza za Lahova števila.
- **Trditev.** Eksplicitna formula za Lahova števila.
- **Trditev.** Polinomska identiteta.

Izpitna vprašanja:

- Kako so definirana Lahova števila in kako jih izračunamo - kako rekurzivno in kako eksplicitno?

11. Dvajnastera pot

- **Izrek.** Dvajnastera pot.

Izpitna vprašanja:

- Kaj je dvajnastera pot? Zapišite in napolnite ustrezno tabelo.

12. Načelo vključitev in izključitev

- **Izrek.** Načelo vključitev in izključitev.
- **Primer.** Koliko so števil v $[30]$ ni tujih s 30? Koliko so tujih?
- **Primer.** Na koliko načinov lahko razporedimo n označenih predmetov v k označenih predalov, če je vsaj en predal prazen?
- **Posledica.** Naj bo X N -množica in so $A_1, \dots, A_n \subseteq X$. Koliko je elementov množice X , ki niso v nobeni izmed množic A_1, \dots, A_n ?
- **Definicija.** Premestitev množice.
- **Primer.** Izračunaj število premestitev množice $[n]$.
- **Izrek.** Naj bo $n = p_1^{e_1} \dots p_r^{e_r}$ razcep $n \in \mathbb{N}$ na prafaktorji. Čemu je enako $\phi(n)$?

Izpitna vprašanja:

- Formulirajte in dokažite načelo vključitev in izključitev.

13. Rekurzivne enačbe

- **Primer.** Na koliko načinov lahko prehodimo n stopnic, če vsakič prehodimo 1 ali 2?
- **Primer.** Koliko je dvojiških dreves s korenem z n vozlišč?
- **Izrek.** Splošna rešitev 2-člene rekurzije. Karakteristična enačba.
- **Definicija.** d -člena linearna rekurzija s konstantnimi koeficienti. Homogena rekurzija.
- **Izrek.** Splošna rešitev d -člene homogene linearne rekurzije s konstantnimi koeficienti.
- Kako rešimo nehomogeno rekurzijo?

Izpitna vprašanja:

- Pojasnite pojem linearne rekurzivne enačbe s konstantnimi koeficienti. Kako lahko zapišemo splošno rešitev dvočlene rekurzije? Kako formulo dokažemo?
- Kakšna je splošna rešitev d -člene linearne rekurzivne enačbe s konstantnimi koeficienti? Opišite korake dokaza te formule.

14. Formalne potenčne vrste (Rodovne funkcije)

- **Definicija.** Formalna potenčna vrsta zaporedja $(a_n)_n$.
- **Definicija.** Seštevanje potenčnih vrst, množenje potenčne vrste s skalarji, množenje potenčnih vrst.
- **Opomba.** Kakšno strukturo ima množica formalnih potenčnih vrst?
- **Definicija.** Obrnljiva formalna potenčna vrsta.
- **Trditev.** Karakterizacija obrnljivosti.
- **Definicija.** Rodovna funkcija.
- **Primer.** Določi rodovno funkcijo Fibonaccijeva zaporedja.
- **Definicija.** Odvod formalne potenčne vrste.
- **Trditev.** Odvod produkta.
- **Primer.** Naj bo $a_0 = 2, a_1 = 3, a_n = 2a_{n-1} - a_{n-2}, n \geq 2$. Določi splošno formulo za a_n .
- Koraki splošnega reševanja nekega kombinatoričnega problema.

Izpitna vprašanja:

- Kaj je formalna potenčna vrsta in kaj je rodovna funkcija? Katere formalne potenčne vrste so obrnljive? Kakšen je splošen recept za reševanje rekurzivnih enačb s pomočjo rodovnih funkcij?

15. Catalanova števila

- **Definicija.** Catalanova števila.
- **Trditev.** Rekurzivna zveza za Catalanova števila.
- **Trditev.** Eksplicitna formula za Catalanova števila.
- **Primer.** Kaj lahko preštejemo s Catalanovi števili?

Izpitna vprašanja:

- Kaj so Catalanova števila? Naštejte nekaj primerov kombinatoričnih objektov, ki jih preštejejo Catalanova števila.

2 Teorija grafov

1. Osnovni pojmi

- **Definicija.** Graf. Množica vozlišč, množica povezav.
- **Opomba.** Moč $V(G)$. Krajišči povezave. Sosedni vozlišči.
- **Definicija.** Soseščina vozlišča. Stopnja vozlišča. Minimalna in maksimalna stopnja v grafu.
- **Definicija.** Regularen graf. r -regularen graf.
- **Primer.** Petersonov graf. Ali je regularen?
- **Definicija.** Matrika sosednosti. Incidenčna matrika.

2. Lema o rokovanju

- **Lema.** Lema o rokovanju.
- **Posledica.** Koliko lahko ima graf vozlišč lihe stopnje?

Izpitna vprašanja:

- Kaj je stopnja vozlišča grafa in kaj pravi lema o rokovanju? Kako dokažemo to lemo?

3. Podgrafi

- **Definicija.** Podgraf. Vpet podgraf. Induciran podgraf.

4. Nekatere družine grafov

- Polni grafi. Koliko ima povezav?
- Poti.
- Cikli.
- Polni dvodelni grafi.
- Hiperkocke. Koliko ima vozlišč in koliko ima povezav?
- Posplošeni Petersenovi grafi.

5. Sprehodi, poti in cikli

- **Definicija.** Sprehod. Enostaven sprehod. Pot.
- **Definicija.** Sklenjen sprehod. Enostaven sklenjen sprehod. Cikel.
- **Lema.** Kaj če ima graf uv -sprehod?
- **Lema.** Kaj če ima graf dve različni uv -poti?
- **Lema.** Kaj če ima graf sklenjen sprehod lihe dolžine?

Izpitna vprašanja:

- Pojasnite sprehod, sklenjen sprehod, pot v grafu, cikel v grafu. Pokažite, da vsak graf, ki vsebuje sklenjen sprehod lihe dolžine, vsebuje tudi cikel lihe dolžine.

6. Povezane komponente, razdalja in premer

- **Definicija.** Povezan graf. Komponente grafa. Število komponent grafa.
- **Definicija.** Razdalja med vozliščima u in v .
- **Trditev.** Kakšno strukturo ima $(V(G), d_G)$, če je G povezan?
- **Definicija.** Ekscentričnost vozlišča. Premer grafa. Polmer grafa.
- **Primer.** Določi $\text{diam}(P_{5,2})$ in $\text{rad}(P_{5,2})$ ter $\text{diam}(P_n)$ in $\text{rad}(P_n)$.

7. Inačice koncepta „graf“

- Enostavni grafi. Vzporedne povezave in zanke.
- Utežni grafi, omrežje, utežno omrežje.
- Usmerjeni grafi.
- Hipergrafi.

8. Dvodelnost

- **Definicija.** Dvodelen graf.
- **Opomba.** Kako lahko raziščemo dvodelnost grafa?
- **Izrek.** Karakterizacija dvodelnosti.

Izpitna vprašanja:

- Kaj so dvodelni grafi? Kako jih karakteriziramo? Kako dokažemo to karakterizacijo?

9. Morfizmi grafov

- **Definicija.** Homomorfizem grafov. Vložitev.
- **Opomba.** Kaj če je G dvodelen?
- **Definicija.** Izometrična vložitev.
- **Definicija.** Izomorfizem grafov. Izomorfna grafa.
- **Opomba.** Ali je izomorfnost ekvivalenčna relacija?
- **Definicija.** Avtomorfizem grafa. Grupa avtomorfizmov grafa.

Izpitna vprašanja:

- Kaj je homomorfizem grafov, izomorfizem grafov in avtomorfizem grafa? Kaj je to $\text{Aut}(G)$? Kakšno algebrsko strukturo ima?

10. Operaciji z grafi

- **Definicija.** Komplement grafa.
- **Trditev.** Recimo, da G ni povezan. Kako lahko ocenimo $\text{diam}(\overline{G})$?
- **Posledica.** Kaj lahko povemo o povezanosti G in \overline{G} ?
- **Definicija.** Odstranjevanje vozlišč in povezav.
- **Opomba.** Kako dobimo podgraf grafa G ?
- **Definicija.** Skrčitev povezave. Minor.
- **Primer.** Ali je K_5 minor $P_{5,2}$?
- **Opomba.** Kako dobimo minor grafa G ?
- **Definicija.** Subdivizija povezave. Subdivizija. Glajenje vozlišča.
- **Definicija.** Homeomorfna grafa.
- **Definicija.** Kartezični produkt grafov.
- **Trditev.** Komutativnost, asociativnost kartezičnega produkta. Enota.
- **Opomba.** Kartezična potenca grafa.
- **Opomba.** Čemu je enak Q_n ?

Izpitna vprašanja:

- Kaj pomeni, da je graf H minor grafa G ? Kdaj sta dva grafa homeomorfna? Pojasnite operacijo kartezičnega produkta grafov.

11. Prerezna vozlišča in k -povezanost

- **Definicija.** Prerezno vozlišče. Most. Prerez. Povezavni prerez.
- **Definicija.** k -povezan graf. Povezanost grafa.
- **Primer.** Določi $K(K_n)$, $K(C_n)$, $K(Q_n)$.
- **Opomba.** Kako lahko ocenimo $K(G)$?
- **Definicija.** Notranji-disjunktni uv -poti.
- **Izrek.** Karakterizacija 2-povezanosti (Whitney).
- **Izrek.** Mengerjev izrek.

Izpitna vprašanja:

- Kaj so to prerezna vozlišča in prerezne povezave grafa? Kdaj je graf k -povezan in kaj je to povezanost grafa?
- Pojasnite Whitney-ev izrek, ki karakterizira 2-povezane grafe. Skicirajte dokaz tega izreka. Zapišite Mengerjev izrek.

12. Drevesa

- **Definicija.** Gozd. Drevo. List.
- **Lema.** Ali drevo vendo premore list?
- **Lema.** Število povezav v drevesu.
- **Lema.** Naj bo G povezan graf in $e \in E(G)$ leži na nekem ciklu. Kaj lahko povemo o $G - e$?
- **Lema.** Kako lahko ocenimo število povezav v povezanem grafu?
- **Opomba.** Kaj so drevesa z vidika števila povezav?
- **Izrek.** 3 karakterizaciji drevesa.

Izpitna vprašanja:

- Kaj je drevo in kaj je gozd? Katere karakterizacije dreves poznate?

13. Vpeta drevesa

- **Definicija.** Vpeto drevo. Število vpetih dreves grafa.
- **Primer.** Določi $\tau(C_n)$.
- **Trditev.** Karakterizacija povezanosti grafa.
- **Trditev.** Rekurzivna formula za število vpetih dreves.
- **Definicija.** Laplaceova matrika.
- **Izrek.** Kako izračunamo število vpetih dreves s pomočjo Laplaceove matrike?
- **Izrek.** Določi $\tau(K_n)$ (Cayley).

Izpitna vprašanja:

- Kaj je vpeto drevo grafa? Kateri grafi premorejo vpeta drevesa? Kako lahko rekurzivno določimo število vpetih dreves povezanega grafa?

14. Eulerjevi in Hamiltonovi grafi

- **Definicija.** Eulerjev sprehod. Eulerjev obhod. Eulerjev graf.
- **Izrek.** Karakterizacija Eulerjevih grafov.
- **Izrek.** Kadar povezan graf premore Eulerjev obhod?
- Fleuryjev algoritem za poisk Eulerjeva obhoda.
- **Definicija.** Hamiltonov cikel. Hamiltonov pot. Hamiltonov graf.
- **Izrek.** Potreben pogoj, da je graf Hamiltonov.
- **Primer.** Kadar je $K_{n,m}$ Hamiltonov?
- **Izrek.** Orejev izrek.
- **Izrek.** Diracov izrek.

Izpitna vprašanja:

- Kaj pomeni, da je graf eulerjev? Kako karakteriziramo eulerjeve grafe? Skicirajte dokaz slednjega rezultata.
- Kdaj je graf hamiltonov? Navedite in pojasnite potrebni pogoj z razpadom grafa za obstoj hamiltonovega cikla v grafu.
- Navedite Orejev zadostni pogoj za obstoj hamiltonovega cikla v grafu. Skicirajte dokaz tega izreka.

15. Ravninski grafi

- **Definicija.** Ravninski graf. Graf vložen v ravnino.
- **Primer.** Ali je $K_{2,3}$ ravninski? Kaj pa $K_{3,3}$?
- **Definicija.** Lica grafa. Množica vseh lic grafa.
- **Opomba.** Ali je isto vložiti graf v ravnino in v sfero? Kaj to pomeni za lica?
- **Definicija.** Rob lica. Dolžina roba.
- **Opomba.** Ali je vsaka povezava leži na rovu dveh lic? Kaj pa če na robu le enega?
- **Trditev.** Lema o rokovanju za ravninske grafe.
- **Definicija.** Ožina grafa.
- **Trditev.** Ocena navzdol števila povezav, za graf, ki ima vsaj en cikel in vložen v ravnino.
- **Izrek.** Eulerjeva formula.
- **Posledica.** Eulerjeva formula za povezane grafe.
- **Trditev.** Ocena navzgor števila povezav, za graf, ki ima vsaj en cikel in vložen v ravnino.
- **Posledica.** Ocena, če upoštevamo, da je $g(G) \geq 3$.
- **Posledica.** Ocena za graf, ki nima trikotnikov.
- **Primer.** Pokaži, da nista ravninska K_5 in $K_{3,3}$.
- **Izrek.** Izrek Kuratowskega.
- **Primer.** Ali sta ravninska: Petersenov graf, Q_4 .
- **Izrek.** Wagnerjev izrek.

Izpitna vprašanja:

- Kaj so ravninski grafi? Kaj so lica ravninske vložitve grafa in čemu je enaka vsota dolžin vseh lic ravninske vložitve grafa? Kako lahko omejimo število povezav ravninskega grafa s pomočjo njegove ožine?
- Kaj pravi Eulerjeva formula za ravninske grafe? Skicirajte njen dokaz. Katere posledice Eulerjeve formule poznate?