Analiza 2a

2. december 2024

Kazalo

1 Funkcije več spremenljivk

1.1 Prostor $\mathbb{R}^n$

1.1.1 Prostor $\mathbb{R}^n$

Definicija 1.1.1. **Prostor** $\mathbb{R}^n$ je kartezični produkt $\underbrace{\mathbb{R} \times \cdots \times \mathbb{R}}_{n}$. Na njem definiramo seštevanje in množenje s skalarjem po komponentah. S tema operacijama je $(\mathbb{R}, +, \cdot)$ vektorski prostor nad $\mathbb{R}$. Posebej definiramo še skalarni produkt

$$x \cdot y = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i,$$

ki nam da normo $||x|| = \sqrt{x \cdot x}$ in metriko $d(x, y) = ||x - y||$. $(\mathbb{R}^n, d)$ je tako metrični prostor.

Definicija 1.1.2. Naj bosta $a, b \in \mathbb{R}^n$ vektorja, za katera je $a_i \leq b_i$ za vse $i \in \{1, \ldots, n\}$. **Zaprt kvader**, ki ga določata a in b, je množica

$$[a, b] = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \forall i \in \{1, \ldots, n\} : a_i \leq x_i \leq b_i\}.$$

Podobno definiramo **odprt kvader** kot

$$(a, b) = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \forall i \in \{1, \ldots, n\} : a_i < x_i < b_i\}.$$

Opomba. Odprte množice v normah $||x||_\infty$ in $||x||_2$ so iste.

Izrek 1.1.3. Množica $K \subseteq \mathbb{R}^n$ je kompaktna natanko tedaj, ko je zaprta in omejena.

1.1.2 Zaporedja v $\mathbb{R}^n$

Definicija 1.1.4. **Zaporedje v** $\mathbb{R}^n$ je preslikava $a : \mathbb{N} \to \mathbb{R}^n$. Namesto $a(m)$ pišemo a_m, kjer $a_m = (a_1^m, \ldots, a_n^m)$.

Opomba. Zaporedje v $\mathbb{R}^n$ porodi n zaporedij v $\mathbb{R}$.

Trditev 1.1.5. Naj bo $(a_m)_m$ zaporedje v $\mathbb{R}^n$, $a_m = (a_1^m, \ldots, a_n^m)$. Velja:

$$\text{Zaporedje } (a_m)_m \text{ konvergia } \Leftrightarrow \text{ konvergira zaporedja } (a_1^m)_m, \ldots, (a_n^m)_m.$$

V primeru konvergence velja:

$$\lim_{m\to\infty} a_m = (\lim_{m\to\infty} a_1^m, \ldots, \lim_{m\to\infty} a_n^m).$$

Dokaz. Definicija limite. $\square$

1.2 Zveznost preslikav iz $\mathbb{R}^n$ v $\mathbb{R}^m$

1.2.1 Zveznost preslikav iz $\mathbb{R}^n$ v $\mathbb{R}$

Opomba. Če je $m = 1$, potem preslikave rečemo **funkcija**.

Definicija 1.2.1. Naj bo $f : D \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ preslikava. Naj bo $a \in D$. **Preslikava f je zvezna v točki** a, če

$$\forall \epsilon > 0 \,.\, \exists \delta > 0 \,.\, \forall x \in D \,.\, ||x - a|| \Rightarrow ||f(x) - f(a)||.$$

Preslikava f je **zvezna na** D, če je zvezna v vsaki točki $a \in D$.

Trditev 1.2.2. Naj bo $f : D \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ preslikava. Naj bo $a \in D$. Preslikava f je zvezna v točki a natanko tedaj, ko za vsako zaporedje $(x_n)_n,\ x_n \in D$, ki konvergira proti a, zaporedje $(f(x_n))_n,\ f(x_n) \in \mathbb{R}^m$ konvergira proti $f(a)$.

Definicija 1.2.3. Naj bo $f : D \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ preslikava. Preslikava f je **enakomerno zvezna na** D, če

$$\forall \epsilon > 0 \,.\, \exists \delta > 0 \,.\, \forall x, x' \in D \,.\, ||x - x'|| < \delta \Rightarrow ||f(x) - f(x')|| < \epsilon.$$

Trditev 1.2.4. Zvezna preslikava na kompaktne množice je enakomerno zvezna.

Trditev 1.2.5. Naj bo $f : K^{\text{komp}} \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ zvezna preslikava. Potem je $f_*(K)$ kompaktna.

Definicija 1.2.6. Preslikava $f : D \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ je **C-lipschitzova**, če

$$\exists C \in \mathbb{R} \,.\, \forall x, x' \in D \,.\, ||f(x) - f(x')|| \leq C||x - x'||.$$

Trditev 1.2.7. Za preslikavo $f : D \to X'$ velja:

$$f \text{ je } C\text{-lipschitzova } \Rightarrow f \text{ je enakomerno zvezna } \Rightarrow f \text{ je zvezna.}$$

Trditev 1.2.8. Naj bosta $f, g : D \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ zvezni funkciji v $a \in D$. Naj bo $\lambda \in \mathbb{R}$. Tedaj so v a zvezni tudi funkcije:

$$f + g,\ f - g,\ \lambda f,\ fg.$$

Če za vsak $x \in D,\ g(x) \neq 0$, tedaj so v a zvezna tudi funkcija:

$$\frac{f}{g}.$$

Trditev 1.2.9. Kompozitum zveznih preslikav je zvezna preslikava.

Dokaz. Z zaporedji kot pri analizi 1. ☐

Zgled. Nekaj primerov zveznih preslikav.
- Preslikava $\Pi_j(x_1, \ldots, x_n) = x_j$ je zvezna na $\mathbb{R}^n$ za vsak $j = 1, \ldots, n$.
- Vse polinomi v n-spremenljivkah so zvezne funkcije na $\mathbb{R}^n$.
- Vse racionalne funkcije so zvezne povsod, razen tam, kjer je imenovalec enak 0.

Definicija 1.2.10. Preslikava $f : D \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ je **funkcija n-spremenljivk.**

Opomba. Naj bo (M, d) metrični prostor in $N \subset M$. Naj bo $f : M \to \mathbb{R}$ zvezna funkcija na M. Potem $f|_N$ je tudi zvezna funkcija na N.

Trditev 1.2.11. Naj bosta $D \subseteq \mathbb{R}^n$ in $D_j = \Pi_j(D)$. Naj bo $a \in D,\ a = (a_1, \ldots, a_n)$ in $f : D \to \mathbb{R}$ zvezna v a. Tedaj za vsak $j = 1, \ldots, n$ funkcija $\varphi_j : D_j \to \mathbb{R},\ \varphi_j(t) = f(a_1, \ldots, a_{j-1}, t, a_{j+1}, \ldots, a_n)$ zvezna v a_j.

Dokaz. Definicija zveznosti v točki. ☐

Opomba. Če je funkcija več spremenljivk zvezna v neki točki $a \in \mathbb{R}^n$, je zvezna tudi kot funkcija posameznih spremenljivk.

Zgled. Naj bo $f(x, y) = \begin{cases} \frac{2xy}{x^2+y^2}; & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0; & (x, y) = (0, 0) \end{cases}$. Ali je f zvezna kot funkcija vsake spremenljivke posebej? Ali je f zvezna na $\mathbb{R}^2$?

Zgled. Naj bo $f(x, y) = \begin{cases} \frac{2x^2y}{x^4+y^2}; & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0; & (x, y) = (0, 0) \end{cases}$. Ali je f zvezna kot funkcija vsake spremenljivke posebej? Ali je zvezna na vsaki premici? Ali je f zvezna na $\mathbb{R}^2$?

Opomba. Zgleda pokažeta, da obrat v prejšnji trditvi ne velja.

1.2.2 Zveznost preslikav iz $\mathbb{R}^n$ v $\mathbb{R}^m$

Naj bo $D \subseteq \mathbb{R}^n$ in $F : D \to \mathbb{R}^m$ preslikava. Naj bo $x \in D$, potem $F(x) \in \mathbb{R}^m,\ F(x) = y = (y_1, \ldots, y_m)$. Lahko pišemo $F(x) = (f_1(x), \ldots, f_m(x))$. Torej F določa m funkcij n-spremenljivk.

Trditev 1.2.12. Naj bo $a \in D \subseteq \mathbb{R}^n$. Naj bo $F = (f_1, \ldots, f_m) : D \to \mathbb{R}^m$ preslikava. Velja:

$$\text{Preslikava } F \text{ je zvezna v } a \Leftrightarrow f_1, \ldots, f_m \text{ so zvezne v } a.$$

Dokaz. Definicija zveznosti v točki. □

Zgled (Omejenost linearnih preslikav)**.** Naj bo $\mathcal{A} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ linearna preslikava, potem

$$\exists M \in \mathbb{R} \,.\, M \geq 0 \,.\, \forall x \in \mathbb{R}^n \,.\, x \neq 0 \,.\, \frac{||\mathcal{A}x||}{||x||} \leq M \ (\text{oz. } ||\mathcal{A}x|| \leq M||x||).$$

Trditev 1.2.13. Linearne preslikave so zvezne

Dokaz. Vse koordinatne funkcije linearne (polinomi 1. stopnje). □

Trditev 1.2.14. Naj bo $\mathcal{A} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ linearna preslikava. Velja:

$$\text{Preslikava } \mathcal{A} \text{ je zvezna} \Leftrightarrow \text{Preslikava } \mathcal{A} \text{ je zvezna v točki } 0 \Leftrightarrow \text{Preslikava } \mathcal{A} \text{ je omejena.}$$

Dokaz. Definicija zveznosti in omejenosti. □

Definicija 1.2.15. Naj bo $\mathcal{A} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ linearna preslikava. Preslikavo $\mathcal{A} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m,\ x \mapsto \mathcal{A}x + b,\ b \in \mathbb{R}^m$ imenujemo **afina preslikava**.

1.3 Parcialni odvodi in diferenciabilnost

1.3.1 Parcialni odvod

Definicija 1.3.1. Naj bo $f : D \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ funkcija. Naj bo $a = (a_1, \ldots, a_n) \in D$ notranja točka. Funkcija f je **parcialno odvedljiva po spremenljivki x_j v točki** a, če obstaja limita

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(a_1, \ldots, a_{j-1}, a_j + h, a_{j+1}, \ldots, a_n) - f(a_1, \ldots, a_n)}{h},$$

oz. če je funkcija

$$x_j \mapsto f(a_1, \ldots, a_{j-1}, x_j, a_{j+1}, \ldots, a_n)$$

odvedliva v točki a_j.
Če je ta limita obstaja, je to **parcialni odvod** funkcije f po spremenljivki x_j v točki a. Oznaki: $\frac{\partial f}{\partial x_j}(a)$, $f_{x_j}(a)$, $(D_j f)(a)$.

Opomba. Vse elementarne funkcije so parcialno odvedljive po vseh spremenljivkah tam, kjer so definirane.

Zgled. Naj bo $f(x, y, z) = e^{x+2y} + \cos(xz^2)$. Izračunaj $f_x(x, y, z)$, $f_y(x, y, z)$, $f_z(x, y, z)$.

1.3.2 Diferenciabilnost

Definicija 1.3.2. Naj bo $f : D \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ funkcija. Naj bo $a = (a_1, \ldots, a_n) \in D$ notranja točka. Funkcija f je **diferenciabilna v točki** a, če obstaja tak linearen funkcional $\mathcal{L} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, da velja:

$$f(a + h) = f(a) + \mathcal{L}(h) + o(h),$$

kjer $\lim_{h\to 0} \frac{||o(h)||}{||h||} = 0$.

Opomba. Če je tak $\mathcal{L}$ obstaja, je enolično določen.

Dokaz. Pokažemo, da iz $\mathcal{L}(h) = (\mathcal{L}_1 - \mathcal{L}_2)(h) = (o_2 - o_1)(h) = o(h)$ sledi, da je $L = 0$. □

Definicija 1.3.3. Če je f diferenciabilna v a je $\mathcal{L}$ natanko določen in ga imenujemo **diferencial** funkcije f v točki a. Oznaka: $\mathcal{L} = df_a$. Linearen funkcional $\mathcal{L}$ imenujemo tudi **odvod** funkcije f v točki a. Oznaka: $(Df)(a)$.

Opomba. Recimo, da je funkcija f diferenciabilna v točki a. Preslikava $h \mapsto f(a) + (df_a)(h)$ je najboljša afina aproksimacija funkcije $h \to f(a + h)$.

Trditev 1.3.4. Naj bo $f : D \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ diferenciabilna v notranji točki $a \in D$. Tedaj je f v točki a parcialno odvedljiva po vseh spremenljivkah. Poleg tega je zvezna v točki a. Pri tem za $h = (h_1, \ldots, h_n)$ velja:

$$(df_a)(h) = \frac{\partial f}{\partial x_1}(a) \cdot h_1 + \ldots + \frac{\partial f}{\partial x_n}(a) \cdot h_n = f_{x_1}(a) \cdot h_1 + \ldots + f_{x_n}(a) \cdot h_n$$

Opomba. Naj bo $\mathcal{L} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ linearen funkcional, $x \in \mathbb{R}^n$, potem $\mathcal{L}(x) = l_1x_1 + \ldots + l_nx_n = \begin{bmatrix} l_1 & \ldots & l_n \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$, kjer $\begin{bmatrix} l_1 & \ldots & l_n \end{bmatrix}$ matrika linearnega funkcionala glede na standardne baze.

Dokaz. Zveznost pokažemo z limito. Za parcialno odvedljivost poglejmo kaj se dogaja za $h = (h_1, 0, \ldots, 0)$. □

Opomba. Trditev pove, da je $df_a = \begin{bmatrix} \frac{\partial f}{\partial x_1}(a) & \ldots & \frac{\partial f}{\partial x_n}(a) \end{bmatrix} = (\frac{\partial f}{\partial x_1}(a), \ldots, \frac{\partial f}{\partial x_n}(a))$.
Zapis: $(\vec{\nabla} f)(a) = (\operatorname{grad} f)(a) = (\frac{\partial f}{\partial x_1}(a), \ldots, \frac{\partial f}{\partial x_n}(a))$.
Vektor $(\operatorname{grad} f)(a)$ imenujemo **gradient funkcije** f v točki a. Operator $\vec{\nabla} = (\frac{\partial}{\partial x_1}, \ldots, \frac{\partial}{\partial x_n})$ je **operator nabla**.

Zgled. Naj bo $f(x, y) = \begin{cases} \frac{2xy}{x^2+y^2}; & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0; & (x, y) = (0, 0) \end{cases}$. Ali je f diferenciabilna?

Zgled. Naj bo $f(x, y) = \begin{cases} \frac{2x^2y}{x^2+y^2}; & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0; & (x, y) = (0, 0) \end{cases}$. Ali je f zvezna? Ali je f parcialno odvedljiva? Ali je f diferenciabilna?

Opomba. Zgleda pokažeta, da obrat v prejšnji trditvi ne velja

Izrek 1.3.5. Naj bo $f : D \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ funkcija in naj bo $a \in D$ notranja točka. Denimo, da je f parcialno odvedljiva po vseh spremenljivkah v točki a in so parcialni odvodi zvezni v točki a. Tedaj je f diferenciabilna v točki a.

Dokaz. Za $n = 2$. Definicija diferenciabilnosti + 2-krat Lagrangeev izrek. □

1.3.3 Višji parcialni odvodi

Naj bo $f : D^{\text{odp}} \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ funkcija. Denimo, da je f parcialno odvedljiva po vseh spremenljivkah na D: $f_{x_1}, \ldots, f_{x_n}$. To so tudi funkcije n-spremenljivk in morda so tudi te parcialno odvedljive po vseh oz. nekatarih spremenljivkah.

Trditev 1.3.6. Naj bo funkcija f definirana v okolici $a \in \mathbb{R}^n$. Naj bosta $i, j \in \{1, 2, \ldots, n\}$. Denimo, da na tej okolici obstajata $\frac{\partial f}{\partial x_i}$, $\frac{\partial f}{\partial x_j}$ in tudi druga odvoda $\frac{\partial}{\partial x_j}(\frac{\partial f}{\partial x_i})$, $\frac{\partial}{\partial x_i}(\frac{\partial f}{\partial x_j})$. Če sta $\frac{\partial}{\partial x_j}(\frac{\partial f}{\partial x_i})$, $\frac{\partial}{\partial x_i}(\frac{\partial f}{\partial x_j})$ zvezna v a, potem sta enaka v točki a:

$$\frac{\partial}{\partial x_j}\left(\frac{\partial f}{\partial x_i}\right)(a) = \frac{\partial}{\partial x_i}\left(\frac{\partial f}{\partial x_j}\right)(a).$$

Dokaz. Dovolj za $n = 2$.
Definiramo $J = f(a+h, b+k) - f(a+h, b) - f(a, b+k) + f(a, b)$ in $\varphi(x) = f(x, b+k) - f(x, b)$, $\psi(y) = f(a+h, y) - f(a, y)$. Zapišemo J s pomočjo funkcij φ, ψ ter uporabimo 2-krat Lagrangeev izrek in upoštevamo zveznost. □

Opomba. Pravimo, da parcialni odvodi komutirajo in pišemo $\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}$.

Definicija 1.3.7. Naj bo $D^{\text{odp}} \subseteq \mathbb{R}^n$. Pravimo, da je funkcija $f : D \to \mathbb{R}$ **razreda C^k na** D, če obstajajo vse parcialne odvodi funkcije f do reda k in so vse ti parcialni odvodi zvezni na D.

Definicija 1.3.8. Naj bo $D^{\text{odp}} \subseteq \mathbb{R}^n$. **Množico vseh k-krat zvezno parcialno odvedljivih funkcij** označimo z $C^k(D)$. **Množica gladkih funkcij** je $C^\infty(D) = \bigcap_{k=1}^{\infty} C^k(D)$. **Množica zveznih funkcij na** D je $C(D)$.

Opomba. Množica $C^k(D)$ z operacijama seštevanja, množenja s skalarji in komponiranja preslikav je algebra nad $\mathbb{R}$.

1.3.4 Diferenciabilnost preslikav

Definicija 1.3.9. Naj bo $F : D \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ preslikava, $a \in D$ notranja točka. Preslikava F je **diferenciabilna** v točki a, če obstaja taka linearna preslikava $\mathcal{L} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$, da velja:

$$F(a + h) = F(a) + \mathcal{L}(h) + o(h),$$

kjer je $\lim_{h \to 0} \frac{|o(h)|_m}{|h|_n}$.
Preslikavo $\mathcal{L}$ imenujemo **diferencial** F v točki a. Oznaka: dF_a. Imenujemo ga tudi **odvod** F v točki a. Oznaka: $(DF)(a)$.

Opomba. Kot pri funkcijah, če je tak $\mathcal{L}$ obstaja, je enolično določen.

Zgled. Obravnavaj diferenciabilnost preslikav:
- $\mathcal{A} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ linearna, $F(x) = \mathcal{A}x$.
- $F : \mathbb{R}^{n \times n} \to \mathbb{R}^{n \times n}$, $F(X) = X^2$. Namig: S pomočjo neenakosti CSB pokažimo, da $|H^2| \leq |H|^2$.

Izrek 1.3.10. Naj bo $a \in D$ notranja točka. Naj bo $F = (f_1, \ldots, f_m) : D \to \mathbb{R}^m$ preslikava. Velja:

$$\text{Preslikava } F \text{ je diferenciabilna v } a \in D \Leftrightarrow \text{so } f_1, \ldots, f_m \text{ diferenciabilne v } a.$$

Tedaj

$$(DF)(a) = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(a) & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n}(a) \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial f_m}{\partial x_1}(a) & \cdots & \frac{\partial f_m}{\partial x_n}(a) \end{bmatrix}$$

Matrika linearne preslikave $(DF)(a)$, ki je zapisana v standardnih bazah, se imenuje **Jacobijeva matrika**.

Dokaz. ($\Rightarrow$) Zapišemo enakost $F(a + h) = F(a) + dF_a(h) + o(h)$ po komponentah.
($\Leftarrow$) Definicija diferenciabilnosti. □

Posledica 1.3.10.1. Naj bo $a \in D$ notranja točka. Naj bo $F = (f_1, \ldots, f_m) : D \to \mathbb{R}^m$ preslikava. Velja:
Če so vse funkcije $f_1, \ldots, f_m$ v točki a parcialno odvedlivi po vseh spremenljivkah in so ti vse odvodi zvezni v točki a, potem je F diferenciabilna v točki a.

Zgled. Naj bo $F(x, y, z) = (x^2 + 2y + e^z, xy + z^2)$, $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$. Določi $(DF)(1, 0, 1)$.

Definicija 1.3.11. Preslikava $F : D^{\text{odp}} \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ je razreda $C^k(D)$, če so $f_1, \ldots, f_m \in C^k(D)$.

Izrek 1.3.12 (Verižno pravilo)**.** Naj bo $a \in D \subseteq \mathbb{R}^n$ notranja točka. Naj bo $b \in \Omega \subseteq \mathbb{R}^m$ notranja točka. Naj bo $F : D \to \Omega$ diferenciabilna v točki a in velja $F(a) = b$. Naj bo $G : \Omega \to \mathbb{R}^k$ diferenciabilna v točki b. Tedaj $G \circ F$ diferenciabilna v točki a in velja:

$$D(G \circ F)(a) = (DG)(b) \cdot (DF)(a) = (DG)(F(a)) \cdot (DF)(a).$$

Označimo $F(x_1, \ldots, x_n) = (f_1(x_1, \ldots, x_n), \ldots, f_m(x_1, \ldots, x_n))$ in $G(y_1, \ldots, y_m) = (g_1(y_1, \ldots, y_m), \ldots, g_k(y_1, \ldots, y_m))$. Potem

$$D(G \circ F)(a) = \begin{bmatrix} \frac{\partial g_1}{\partial y_1} & \cdots & \frac{\partial g_1}{\partial y_m} \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial g_k}{\partial y_1} & \cdots & \frac{\partial g_k}{\partial y_m} \end{bmatrix} (b) \cdot \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial f_m}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial f_m}{\partial x_n} \end{bmatrix} (a)$$

Dokaz. Definicija diferenciabilnosti. □

Posledica 1.3.12.1 ($k = 1$, $G = g$ funkcija)**.** Naj bo $\Phi(x_1, \ldots, x_n) = g(f_1(x_1, \ldots, x_n), \ldots, f_m(x_1, \ldots, x_n))$. Potem

$$\frac{\partial \Phi}{\partial x_j}(a) = \frac{\partial g}{\partial y_1}(b) \cdot \frac{\partial f_1}{\partial x_j}(a) + \frac{\partial g}{\partial y_2}(b) \cdot \frac{\partial f_2}{\partial x_j}(a) + \ldots + \frac{\partial g}{\partial y_m}(b) \cdot \frac{\partial f_m}{\partial x_j}(a)$$

Zgled. Naj bo $F(x, y) = (x^2 + y, xy)$, $g(u, v) = uv + v^2$. Naj bo $\Phi = g \circ F$. Izračunaj $(D\Phi)(x, y)$ na dva načina.

1.4 Izrek o implicitni funkciji

1.4.1 Osnovna verzija izreka o implicitni funkciji

Radi bi poiskali zadostni pogoji na funkcijo $f(x, y)$, da bi enačba $f(x, y) = 0$ lokalno v okolici točki (a, b), za katero velja $f(a, b) = 0$, predstavljala graf funkcije $y = \varphi(x)$.

Izrek 1.4.1 (Osnovna verzija izreka o implicitni funkciji)**.** Naj bo $D \subseteq \mathbb{R}^2$ odprta, $(a, b) \in D$, $f : D^{\text{odp}} \to \mathbb{R}$ funkcija razreda $C^1(D)$ in naj velja:
1. $f(a, b) = 0$.
2. $f_y(a, b) \neq 0$.

Potem obstajata $\delta > 0$ in $\epsilon > 0$, da velja: $I \times J \subseteq D$, kjer je $I = (a - \delta, a + \delta),\ J = (b - \epsilon, b + \epsilon)$ in enolično določena funkcija $\varphi : I \to J$ razreda C^1, za katero velja:
1. $\varphi(a) = b$.
2. $\forall (x, y) \in I \times J \,.\, f(x, y) = 0 \Leftrightarrow y = \varphi(x)$ (rešitve enačbe $f(x, y) = 0$ so natanko graf funkcije φ).
3. $\varphi'(x) = -\frac{f_x(x,\varphi(x))}{f_y(x,\varphi(x))}$ za vsak $x \in I$.

Dokaz. Funkcijo φ konstruiramo s pomočjo izreka o bisekciji z upoštevanjem stroge monotonosti funkciji $y \mapsto f(x, y)$. Zveznost ($\overline{I} \times \overline{J}$ je kompaktna), odvedljivost in zveznost odvoda pokažemo z pomočjo izraza $f(x + \Delta x, y + \Delta y) - f(x, y) = 0$ in Lagrangeeva izreka, kjer $x + \Delta x \in (a - \delta, a + \delta),\ y = \varphi(x),\ y + \Delta y = \varphi(x + \Delta x)$. $\square$

Posledica 1.4.1.1. Če je funkcija f razreda C^k, potem je tudi funkcija φ razreda C^k.

Zgled. Kaj če pogoji niso izpolnjeni?
1. $f(x, y) = (x - y)^2,\ f(x, y) = 0$ v okolici točke $(0, 0)$ (pogoji ni potrebni).
2. $f(x, y) = y^3 - x,\ f(x, y) = 0$ v okolici točke $(0, 0)$ (odvedljivost φ).
3. $f(x, y) = y^2 - x^2 - x^4,\ f(x, y) = 0$ v okolici točke $(0, 0)$ (enoličnost φ).
4. $f(x, y) = y^2 + x^2 + x^4,\ f(x, y) = 0$ v okolici točke $(0, 0)$ (množica rešitev).

1.4.2 Izrek o inverzni preslikavi

Naj bo $\Phi : D^{\text{odp}} \subseteq \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^m$ preslikava, $\Phi \in C^1(D)$. Kakšne so zadostni pogoji za (lokalno) obrnljivost preslikave Φ?

Definicija 1.4.2. Naj bosta $D, \Omega \subseteq \mathbb{R}^m$ odprti. Preslikava $\Phi : D \to \Omega$ je C^1**-difeomorfizem**, če
1. Φ je bijekcija,
2. $\Phi \in C^1(D)$,
3. $\Phi^{-1} \in C^1(\Omega)$.

Podobno definiramo C^k**-difeomorfizem** za $k \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$.

Zgled. Ali je $f(x) = x^3,\ f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ difeomorfizem?

Trditev 1.4.3. Naj bosta $D, \Omega \subseteq \mathbb{R}^m$ odprti. Naj bo $\Phi : D \to \Omega$ C^1-difeomorfizem. Tedaj je $\det(D\Phi) \neq 0$ na D.

Dokaz. Pogledamo $\Phi^{-1} \circ \Phi = \mathrm{id}_D$ (verižno pravilo). $\square$

Posledica 1.4.3.1. $(D\Phi^{-1})(y) = (D\Phi)^{-1}(x)$, kjer $y = \Phi(x)$.

Zgled. Ali velja obrat trditve? Naj bo $\Phi(x, y) = (e^x \cos y, e^x \sin y),\ \Phi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$. Ali je Φ difeomorfizem?

Lema 1.4.4 (Lagrangeev izrek za funkcijo več spremenljivk)**.** Naj bo $D \subseteq \mathbb{R}^n$ odprta množica, točki $a, b \in D$ taki, da za vsak $t \in [0, 1]$ daljica $(1 - t)a + tb \in D$, $f : D \to \mathbb{R}$ funkcija razreda C^1. Tedaj obstaja taka točka ξ iz daljice med a in b, da je $f(b) - f(a) = (Df)(\xi)(b - a)$.

Dokaz. Lagrangeev izrek za funkcijo $\varphi(t) = f((1 - t)a + tb)$. $\square$

Lema 1.4.5. Predpostavki kot prej. Naj obstaja tak $M \in \mathbb{R}$, da za vsak $j = 1, \ldots, n$ in vsak $x \in D$ velja: $\left|\frac{\partial f}{\partial x_j}(x)\right| \leq M$. Tedaj $|f(b) - f(a)| \leq M\sqrt{n}|b - a|$.

Dokaz. Uporabimo prejšnjo trditev. $\square$

Lema 1.4.6. Naj bo $D \subseteq \mathbb{R}^n,\ a, b \in D$ kot prej. Naj bo $F : D \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m,\ F = (f_1, \ldots, f_m)$ preslikava razreda C^1. Naj obstaja tak $M \in \mathbb{R}$, da za vsak $j = 1, \ldots, n$, vsak $i = 1, \ldots, m$ in vsak $x \in D$ velja: $\left|\frac{\partial f_i}{\partial x_j}(x)\right| \leq M$.
Tedaj $||F(b) - F(a)|| \ \leq\ M\ \sqrt{mn}\ ||b - a||$.

Izrek 1.4.7 (Izrek o inverzni preslikavi)**.** Naj bo $D \subseteq \mathbb{R}^m$ odprta, $F : D \to \mathbb{R}^m$ preslikava razreda C^1, $a \in D$ in $b = F(a)$. Če je $\det(DF)(a) \neq 0$, potem obstajata okolici $a \in U \subseteq \mathbb{R}^m$ in $b \in V \subseteq \mathbb{R}^m$, da je $F : U \to V$ C^1-difeomorfizem.

Definicija 1.4.8. Če je $F : D \to \Omega$ preslikava med odprtimi množicami v $\mathbb{R}^m$ in je $\det(DF)(x) \neq 0$ za vse $x \in D$, pravimo, da je F **lokalni difeomorfizem**.

Dokaz. Dovolj, da izrek dokažemo za primer, ko $a = b = 0,\ (DF)(0) = I$.
TODO □

Posledica 1.4.8.1. Če je Φ razreda C^k za $k \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$, je Φ lokalni C^k difeomorfizem.

Opomba. Če je $m = 1$, potem $f : I \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Naj bo $a \in I,\ f \in C^1(I),\ f'(a) \neq 0$. Potem $f'(x) \neq 0$ v okolici a, torej f ima lokalni C^1 inverz.

Zgled. Naj bo $F : \mathbb{R}^{n\times n} \to \mathbb{R}^{n\times n},\ F(X) = X^2$. Ali je F v okolici točke $I \in \mathbb{R}^{n\times n}$ lokalni difeomorfizem? Kaj to pomeni?

1.4.3 Izrek o implicitni preslikavi

Imamo $n+m$ spremenljivk: (x,y), kjer $x=(x_1,\dots,x_n),\ y=(y_1,\dots,y_m)$ in m enačb. Pričakujemo, da bomo lahko m spremenljivk izrazili kot funkcijo ostalih, tj. najdemo preslikavo $\Phi : D \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$, da velja $y=\Phi(x)$.

Primer (Linearen primer)**.** Naj bosta $\mathcal{A} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m,\ \mathcal{B} : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^m$ linearni, $b \in \mathbb{R}^m$. Naj rešujemo enačbo $Ax+By=b$. Kdaj lahko za vsak $b \in \mathbb{R}^m$ iz te enačbe y razrišemo kot funkcijo x?
Če je $n=0$, potem rešujemo enačbo $By=b$. Kdaj lahko to enačbo enolično rešimo za vsak $b\in\mathbb{R}^m$?

Naj bo $F : D^{\text{odp}} \subseteq \mathbb{R}^n_x \times \mathbb{R}^m_y \to \mathbb{R}^m,\ F=(f_1,\dots,f_m)$ preslikava razreda C^1.
Za vsak $y\in\mathbb{R}^m$ naj bo $\frac{\partial F}{\partial x}$ diferencial preslikave $x \mapsto F(x,y)$. Imenujemo ga **parcialni diferenical na prvo spremenljivko**.
Za vsak $x\in\mathbb{R}^n$ naj bo $\frac{\partial F}{\partial y}$ diferencial preslikave $y \mapsto F(x,y)$. Imenujemo ga **parcialni diferenical na drugo spremenljivko**.

Velja: $\frac{\partial F}{\partial x}(x,y) = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(x,y) & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n}(x,y) \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial f_m}{\partial x_1}(x,y) & \dots & \frac{\partial f_m}{\partial x_n}(x,y) \end{bmatrix}$ in $\frac{\partial F}{\partial y}(x,y) = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial y_1}(x,y) & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial y_m}(x,y) \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial f_m}{\partial x_1}(x,y) & \dots & \frac{\partial f_m}{\partial y_m}(x,y) \end{bmatrix}$.

Diferencial preslikave F je potem enak $(DF)(x,y) = \begin{bmatrix} \frac{\partial F}{\partial x}(x,y) & \frac{\partial F}{\partial y}(x,y) \end{bmatrix}$ (bločni zapis).

Opomba. Za vektor $\begin{bmatrix} h \\ k \end{bmatrix}$, kjer je $h\in\mathbb{R}^n,\ k\in\mathbb{R}^m$ velja: $(DF)(x,y)\begin{bmatrix} h \\ k \end{bmatrix} = \frac{\partial F}{\partial x}(x,y)h + \frac{\partial F}{\partial y}(x,y)k \in \mathbb{R}^m$.

Izrek 1.4.9 (Izrek o implicitni preslikavi)**.** Naj bo $D \subseteq \mathbb{R}^n_x \times \mathbb{R}^m_y$ odprta množica, $(a,b)\in D$, $F : D \to \mathbb{R}^m$ preslikava razreda C^1. Naj velja:

1. $F(a,b)=0$,
2. $\det(\frac{\partial F}{\partial y}(a,b)) \neq 0$.

Tedaj obstaja okolica $U \subseteq \mathbb{R}^n$ točke a in okolica $V \subseteq \mathbb{R}^m$ točke b in taka enolično določena preslikava $\varphi : U \to V$ razreda C^1, da velja:

1. $\phi(a)=b$.
2. $\forall (x,y)\in U\times V\,.\, F(x,y)=0 \Leftrightarrow y=\varphi(x)$ (rešitve te enačbe je isto kot graf φ znotraj $U\times V$).
3. $(D\varphi)(x) = -\left(\frac{\partial F}{\partial y}(x,y)\right)^{-1} \frac{\partial F}{\partial x}(x,y),\ y=\varphi(x)$ za vsak $x\in U$.

Dokaz. Uporabimo izrek o inverzni preslikavi.
Definiramo preslikavo $\Phi : D \subseteq \mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^m,\ \Phi(x,y)=(x,F(x,y))$. Kandidata za preslikavo φ najdemo v oblike inverza Φ^{-1}, nato enostavno preverimo lastnosti. □

Posledica 1.4.9.1. Če je preslikava F razreda C^k, je tudi preslikava φ razreda C^k.

Zgled. Naj bo $x,y\in\mathbb{R},\ F(x,y)=x^2+y^2-1$. S pomočjo izreka o implicitni preslikavi pokaži, da v okolici točke $(0,1)$ rešitve enačbe $F(x,y)=0$ graf neke preslikave φ. Določi tudi preslikavo φ.

Zgled. Naj bo $F(x,y,z)=(y+xy+xz^2, z+zy+x^2),\ F=(f,g)$ in naj rešujemo enačbo $F(x,y,z)=0$. Preveri zahteve izreka v okolici točke $(0,0,0)$ in zapiši spremenljivki y in z kot funkciji spremenljivke x. Določi tudi prvi in drugi odvod funkcij f in g po spremenljivke x. Kaj je rezultat?

Zgled. Naj bo $F:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}$ in naj rešuejmo enačbo $F(x,y,z)=0$. Recimo, da $F(a,b,c)=0$. Kakšna povezava med zadostnimi pogajami in rangom $(DF)(a,b,c)$? Kaj če gledamo preslikavo $F:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^2$?

Definicija 1.4.10. Naj bo $D^{\text{odp}} \in \mathbb{R}^n$ in $F : D \to \mathbb{R}^m$ preslikava razreda C^1, $a\in D$.

1. **Rang preslikave F v točki** a je $\operatorname{rang}_a F := \operatorname{rang}(DF)(a)$.
2. Če je $\operatorname{rang}_a F$ konstanten na D, je F tega ranga na D, tj. $\operatorname{rang} F = \operatorname{rang}_a F$.
3. Preslikava F je **maksimalnega ranga v točki** a, če je $\operatorname{rang}_a F = \min\{m,n\}$.

Opomba. Ta pogoj je lokalno stabilen, tj. če je $\operatorname{rang}_a F = \min\{n,m\}$, potem obstaja okolica od a, kjer rang F maksimalen.

Posledica 1.4.10.1. Naj bo $F : D^{\text{odp}} \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ preslikava razreda C^k, $k \in \mathbb{N}$ in naj velja $m < n$. Naj bo $a \in D$, $F(a) = 0$ in F maksimalnega ranga v točki a. Tedaj obstajajo indeksi $i_1 < i_2 < \ldots < i_{n-m}$, $j_1 < j_2 < \ldots < j_m$, $i_k \neq j_l$ za vse k in l in take funkcije $\varphi_1, \ldots, \varphi_m$ razreda C^k definirane v okolici točke $(a_{i_1}, \ldots, a_{i_{n-m}})$, da je v neki okolici U točke a enačba $F(x) = 0$ ekvivalentna sistemu enačb:

$$\begin{aligned} x_{j_1} &= \varphi_1(x_{i_1}, \ldots, x_{i_{n-m}}) \\ &\vdots \\ x_{j_m} &= \varphi_m(x_{i_1}, \ldots, x_{i_{n-m}}) \end{aligned}$$

Ekvivalentno: Obstaja permutacija $\sigma \in S_n$, da v okolici točke a velja:

$$F(x) = 0 \Leftrightarrow (x_{\sigma(1)}, \ldots, x_{\sigma(n)}) = (x_{\sigma(1)}, \ldots, x_{\sigma(n-m)}, \varphi(x'_\sigma)), \text{ kjer } \varphi = (\varphi_1, \ldots, \varphi_m).$$

Dokaz. TODO □

Primer. Naj bo $\mathcal{A} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ linearna, $m \leq n$, $\operatorname{rang} \mathcal{A} = m$ ($\mathcal{A}$ je surjektivna). Rešujemo enačno $\mathcal{A}x = b$. Prostor rešitev je $n - m$ dimenzialen.

Posledica 1.4.10.2. Naj bo $F : D^{\text{odp}} \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ preslikava razreda C^1, $m \leq n$, $a \in D$ in naj velja $\operatorname{rang}_a F = m$. Tedaj obstaja okolica V točke $F(a) = b$ in okolica U točke a, da je $F : U \to V$ surjektivna.

Dokaz. TODO □

1.5 Podmnogoterosti v $\mathbb{R}^n$

Podmnogoterost je posplošitev pojmov „krivulja“ in „ploskev“.

Definicija 1.5.1. Naj bo $M \subseteq \mathbb{R}^{n+m}$, $M \neq \emptyset$. Množica M je **gladka (vsaj razreda C^1) podmnogoterost dimenzije n in kodimenzije m prostora** $\mathbb{R}^{n+m}$, če za vsako točko $a \in M$ obstaja okolica U v $\mathbb{R}^{n+m}$ in take C^1 funkcije $F_1, \ldots, F_m : U \to \mathbb{R}$, da velja:

1. $M \cap U = \{x \in U \mid F_1(x) = \ldots = F_m(x) = 0\} = F^*(\{0\})$.
2. $\operatorname{rang}(F_1, \ldots, F_m) = m$ na U.

Opomba. Funkcije $F_1, \ldots, F_m$ se imenujejo **lokalne definicijske funkcije za** $M \cap U$.

TODO

1.6 Taylorjeva formula

Naj bo $f : D^{\text{odp}} \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ funkcija, $a \in D$. Funkcijo f bi radi v okolici točke a aproksimirali s polinomi.

Izrek 1.6.1. Recimo, da velja
1. Množica $D \subseteq \mathbb{R}^n$ odprta, $a \in D$.
2. $f : D^{\text{odp}} \to \mathbb{R}$ funkcija razreda $C^{k+1}(D)$.
3. Vektor $h \in \mathbb{R}^n$ tak, da daljica med a in $a + h$ leži v D.

Tedaj obstaja tak $\theta \in (0, 1)$, da je

$$f(a + h) = f(a) + (D_h f)(a) + \frac{1}{2!}(D_h^2 f)(a) + \ldots + \frac{1}{k!}(D_h^k f)(a) + R_k \ (*),$$

kjer je $D_h = h_1 D_1 + h_2 D_2 + \ldots + h_n D_n$ **odvod v smeri** h in $R_k = \frac{1}{(k+1)!}(D_h^{k+1} f)(a + \theta h)$ **ostanek**.
Izraz (*) je **Taylorjeva formula** za funkcijo več spremenljivk.

Dokaz. TODO □

Opomba. Pokaži, da velja
1. $(D_h f)(a) = \sum_{j=1}^n h_j \frac{\partial f}{\partial x_j}(a)$.
2. $(D_h^2 f)(a) = \sum_{k=1}^n \sum_{j=1}^n h_k h_j \frac{\partial^2 f}{\partial x_k \partial x_j}(a)$.

Primer. Pokaži, da za $n = 2$ velja $D_{(h,k)}^m = \sum_{j=0}^m \binom{m}{j} h^j k^{m-j} \frac{\partial^m}{\partial x^j \partial y^{m-j}}$.

Opomba. $h \mapsto f(a) + (D_h f)(a) + \frac{1}{2!}(D_h^2 f)(a) + \ldots + \frac{1}{k!}(D_h^k f)(a)$ je polinom stopnje največ k v spremenljivkah $h_1, h_2, \ldots, h_n$.

Opomba. Če je funkcija f razreda $C^\infty(D)$ lahko tvorimo **Taylorjevo vrsto**:

$$\sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{j!}(D_h^j f)(a).$$

- Vrsta sigurno konvergira za $h = 0$.
- Tudi, če vrsta konvergira za nek $h \neq 0$, ne konvergira nujno k $f(a + h)$.

Definicija 1.6.2. Če Taylorjeva vrsta konvergira k $f(a + h)$ za vse vse $||h|| \leq \delta$ za nek $\delta > 0$, tj.

$$f(a + h) = \sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{j!}(D_h^j f)(a),$$

potem rečemo, da je **funkcija f v okolici točke a (realno) analitična**.

Zgled. Razvij funkcijo $f(x, y) = e^{xy}$ v Taylorjevo vrsto v okolici točke $(0, 0)$.

Posledica 1.6.2.1. Recimo, da velja
1. Podmnožica $D \subseteq \mathbb{R}^n$ odprta, $a \in D$.
2. $f : D^{\text{odp}} \to \mathbb{R}$ funkcija razreda $C^{k+1}(D)$.
3. Vektor $h \in \mathbb{R}^n$ tak, da daljica med a in $a + h$ leži v D.

Potem je
1. $R_k = o(||h||^k)$ za $h \to 0$.
2. $R_k = O(||h||^{k+1})$ za $h \to 0$.

Opomba. Velja:
1. $R_k = o(||h||^k) \Leftrightarrow \lim_{h \to 0} \frac{|R_k|}{||h||^k} = 0$ (izraz je majhen).
2. $R_k = O(||h||^{k+1}) \Leftrightarrow \exists M \in \mathbb{R} \,.\, \frac{|R_k|}{||h||^{k+1}} \leq M,$ ko gre h proti 0 (velikostni red).

Dokaz. TODO □

Opomba. Naj bo $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ funkcija razreda C^∞ v okolici točke $(0, 0)$, $h = (x, y)$.
Pokaži, da za koeficient a_{nm} pred $x^n y^m$ velja: $(\frac{\partial^{n+m}}{\partial x^n \partial y^m} f)(0, 0) = a_{nm} n! m!$.

1.7 Ekstremi funkcij več spremenljivk

Definicija 1.7.1. Naj bo $f : D \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ funkcija, $a \in D$.

1. Funkcija f ima v točki a **lokalni maksimum**, če

$$\exists r > 0 \,.\, \forall x \in D \cap K(a, r) \,.\, f(a) \geq f(x).$$

   Funkcija f ima v točki a **strogi lokalni maksimum**, če

$$\exists r > 0 \,.\, \forall x \in D \cap K(a, r) \,.\, f(a) > f(x).$$

2. Funkcija f ima v točki a **(globalni) maksimum na** D, če

$$\forall x \in D \,.\, f(a) \geq f(x).$$

3. Podobno definiramo: **lokalni minimum**, **(globalni) minimum**.
4. **Lokalni ekstrem** (oz. **globalni ekstrem**) je skupno ime za lokalni (oz. globalni) minumum in maksimum.

Opomba. Če je $K^{\text{komp}} \subseteq \mathbb{R}^n$ in $f : K \to \mathbb{R}$ zvezna funkcija, potem ima f na K maksimum in minimum.

Definicija 1.7.2. Naj bo $D^{\text{odp}} \subseteq \mathbb{R}^n$ in $f : D \to \mathbb{R}$ funkcija razreda C^1 (dovolj, da diferenciabilna). Rečemo, da je točka $a \in D$ **stacionarna (oz. kritična) točka funkcije** f, če

$$(Df)(a) = 0, \text{ tj. } \frac{\partial f}{\partial x_1}(a) = \frac{\partial f}{\partial x_2}(a) = \ldots = \frac{\partial f}{\partial x_n}(a) = 0.$$

Trditev 1.7.3. Recimo, da velja

1. Podmnožica $D \subseteq \mathbb{R}^n$ odprta, $a \in D$.
2. $f : D \to \mathbb{R}$ funkcija razreda C^1.

Tedaj, če ima funkcija f v točki a lokalni ekstrem, je a kritična točka za f.

Dokaz. TODO □

Zgled. Naj bo $K = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 \leq 3\}$, $f(x, y) = x^2 - xy + y^2 - 3x + 4$. Poišči minimum in maksimum funkcije f.

1.7.1 Potrebni in zadostni pogoji na 2. odvodi, da je kritična točka lokalni ekstrem

Naj bo $D \subseteq \mathbb{R}^n$ odprta, $f : D \to R$ funkcija razreda C^2. Definiramo **Hessejevo matriko** 2. odvodov:

$$(Hf)(x) = \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2} & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_n} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_1} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2} & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_n} \\ \vdots & & & \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_n \partial x_1} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_n \partial x_2} & \vdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_n^2} \end{bmatrix}.$$

Opomba. Če je $f \in C^2(D)$, potem mešani odvodi so enaki, tj. $(Hf)^T = Hf$. Torej Hessejeva matrika je simetrična, torej ima v vsaki točki realne lastne vrednosti.

$\langle (Hf)h, h \rangle$ je **Hessejeva forma** (kvadratna forma, ki pripada matrike $(Hf)(a)$).

Definicija 1.7.4. Hessejeva matrika Hf je

- **pozitivno semidefinitna** (pišemo $Hf \geq 0$), če $\forall v \in D \,.\, \langle (Hf)v, v \rangle \geq 0 \Leftrightarrow$ vse lastne vrednosti so nenagitvne;
- **pozitivno definitna** (pišemo $Hf > 0$), če $\forall v \in D \,.\, v \neq 0 \Rightarrow \langle (Hf)v, v \rangle > 0 \Leftrightarrow$ vse lastne vrednosti so pozitivne;
- **negativno semidefinitna** (pišemo $Hf \leq 0$), če $\forall v \in D \,.\, \langle (Hf)v, v \rangle \leq 0 \Leftrightarrow$ vse lastne vrednosti so nepozitivne;
- **negativno definitna** (pišemo $Hf < 0$), če $\forall v \in D \,.\, v \neq 0 \Rightarrow \langle (Hf)v, v \rangle < 0 \Leftrightarrow$ vse lastne vrednosti so negativne.

Trditev 1.7.5 (Potrebni pogoji)**.** Recimo, da velja

1. Podmnožica $D \subseteq \mathbb{R}^n$ odprta, $a \in D$.
2. Funkcija $f : D \to \mathbb{R}$ razreda C^2.

Tedaj

- Če ima f v točki a lokalni maksimum, potem
  1. $(Df)(a) = 0$,
  2. $Hf(a) \leq 0$.
- Če ima f v točki a lokalni minimum, potem
  1. $(Df)(a) = 0$,
  2. $(Hf)(a) \geq 0$.

Dokaz. TODO □

Izrek 1.7.6 (Zadostni pogoji)**.** Recimo, da velja
1. Podmnožica $D \subseteq \mathbb{R}^n$ odprta, $a \in D$.
2. Funkcija $f : D \to \mathbb{R}$ razreda C^2.
3. $a \in D$ stacionarna točka funkcije f.

Tedaj
- Če je $(Hf)(a) > 0$, potem ima funkcija f v točki a (strogi) lokalni minimum.
- Če je $(Hf)(a) < 0$, potem ima funkcija f v točki a (strogi) lokalni maksimum.
- Če ima $(Hf)(a)$ tako pozitivne, kot negativne lastne vrednosti, potem funkcija f v točki a nima lokalnega ekstrema.

Zgled. Določi $(Hf_i)(0,0)$ za $f_1(x,y) = \frac{1}{2}(x^2+y^2)$, $f_2(x,y) = \frac{1}{2}(-x^2-y^2)$, $f_3(x,y) = \frac{1}{2}(x^2-y^2)$.

Posledica 1.7.6.1 (Zadostni pogoji, $n = 2$)**.** Recimo, da velja
1. Podmnožica $D \subseteq \mathbb{R}^2$ odprta, $(a,b) \in D$.
2. Funkcija $f : D \to \mathbb{R}$ razreda C^2.
3. $(a,b) \in D$ stacionarna točka funkcije f.

Tedaj
- Če je $f_{xx}f_{yy} - f_{xy}^2(a,b) > 0$, potem ima funkcija f v točki (a,b).
  - Če je $f_{xx}(a,b) > 0$, potem ima funkcija f v točki (a,b) lokalni minimum.
  - Če je $f_{xx}(a,b) < 0$, potem ima funkcija f v točki (a,b) lokalni maksimum.
- Če je $f_{xx}f_{yy} - f_{xy}^2(a,b) < 0$, potem funkcija f v točki (a,b) nima lokalnega ekstrema.

Dokaz. TODO □

Zgled. Naj bo $f(x,y,z) = x^2+y^2+z^2+2xyz$. Klasificiraj vse stacionarne točke funkcije f.

1.7.2 Vezani ekstremi

Izrek 1.7.7. Recimo, da velja
1. Podmnožica $D \subseteq \mathbb{R}^n$ odprta.
2. Funkciji $f, g_1, \ldots, g_m$ razreda $C^1(D)$, $m < n$.
3. Preslikava $G = (g_1, \ldots, g_m) : D \to \mathbb{R}^m$ maksimalnega ranga.
4. $M = G^{-1}(\{0\}) \neq \emptyset$, tj. $M = \{x \in D \mid g_1(x) = 0, \ldots, g_m(x) = 0\}$ podmnogoterost v D.
5. Funkcija $f : M \to \mathbb{R}$ ima v točki $a \in M$ lokalni ekstrem (kot funkcija iz M v $\mathbb{R}$).

Tedaj obstajajo take realne konstante $\lambda_1, \ldots, \lambda_m$, da je

$$(Df)(a) = \lambda_1(Dg_1)(a) + \ldots + \lambda_m(Dg_m)(a) = \sum_{j=1}^{m} \lambda_j (Dg_j)(a).$$

Dokaz. TODO □

Opomba. Lagrangeeva metoda za iskanja vezanih ekstremov
1. Tvorimo funkcijo $F(\underbrace{x_1, \ldots, x_n}_{x}, \lambda_1, \ldots, \lambda_m) = f(x) - \sum_{j=1}^m \lambda_j g_j(x)$.
2. Iščemo stacionarne točke F:
   - $D_x F = (Df)(x) - \sum_{j=1}^m \lambda_j (Dg_j)(x) = 0$ (n enačb).
   - $D_{\lambda_j} F = -g_j(x) = 0$ za $j = 1, \ldots, m$ (m enačb).

   Konstante $\lambda_1, \ldots, \lambda_m$ so **Lagrangeevi multiplikatorji**.

Zgled. Določi stacionarne točke funkcije $f(x,y,z) = z$ na $M = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2+y^2+z^2 = 1;\ x+y+z = 0\}$.

Zgled. Določi stacionarne točke funkcije $f(x,y,z) = x^2 - xy + y^2 - 3x + 4$ na robu $x^2+y^2 = 9$.

2 Integrali s parametri

Naj bo $f : [a, b]_x \times [c, d]_y \to \mathbb{R}$ funkcija. Gledamo funkcijo $F(y) = \int_a^b f(x, y)\, dx$, kjer $y \in [c, d]$ je **parameter**. Zanima nas v kakšni so povezavi lastnosti funkcije f in funkcije F.

Zgled. Izračunaj $F(y) = \int_0^\pi \sin(xy)\, dx$. Ali je $F(y)$ zvezna? Kaj je D_F?

Zgled. Eulerjeva funkcija gama je $\Gamma(s) = \int_0^\infty x^{s-1} e^{-x}\, dx$.

- Določi D_Γ.
- Kakšen predznak ima Γ na D_Γ?
- Določi osnovno rekurzivno relacijo za Γ.
- Kakšna povezava med fakulteto in Γ?
- Kako bi lahko definirali Γ za negativne vrednosti? Za katere lahko?

Definicija 2.0.1. Podmnožica $D \subseteq \mathbb{R}^n$ je **lokalno kompaktna**, če

$$\forall a \in D \,.\, \exists r \in \mathbb{R} \,.\, r > 0 \,.\, D \cap \overline{K(a, r)} \text{ kompaktna množica.}$$

Zgled. Primeri lokalno kompaktnih množic.

- Vsaka zaprta in vsaka odprta množica v $\mathbb{R}^n$ je lokalno kompaktna.
- $D \subseteq \mathbb{R}^2$, $D = K(0, 1) \cup \{(1, 0)\}$ ni lokalno kompaktna.

Trditev 2.0.2. Recimo, da velja

1. $D \subseteq \mathbb{R}^n$ lokalno kompaktna podmnožica;
2. I zaprt interval na $\mathbb{R}$;
3. funkcija $f : I_x \times D_y$ zvezna.

Tedaj je funkcija $F(u, v, y) = \int_u^v f(x, y)\, dx$, kjer so $(u, v, y) \in I \times I \times D$, zvezna na $I \times I \times D$.

Dokaz. TODO □

Posledica 2.0.2.1. Recimo, da velja

1. $D \subseteq \mathbb{R}^n$ lokalno kompaktna podmnožica.
2. $I = [a, b]$.
3. Funkcija $f : I_x \times D_y$ zvezna.

Tedaj je funkcija $F(y) = \int_a^b f(x, y)\, dx$, zvezna na D.

2.1 Odvajanje integralov s parametri

Trditev 2.1.1. Recimo, da velja

1. Funkcija $f : [a, b]_x \times (c, d)_y \to \mathbb{R}$ zvezna.
2. $\forall (x, y) \in [a, b] \times (c, d) \,.\, f$ parcialno odvedljiva po y.
3. Funkcija $\frac{\partial f}{\partial y}(x, y)$ zvezna na $[a, b] \times (c, d)$.

Tedaj je

1. $F(y) = \int_a^b f(x, y)\, dx$ odvedljiva funkcija na (c, d).
2. $F'(y) = \dfrac{dF}{dy}(y) = \dfrac{d}{dy} \int_a^b f(x, y)\, dx = \int_a^b \dfrac{\partial f}{\partial y}(x, y)\, dx$, tj. lahko zamenjamo vrstni red odvajanja.

Dokaz. TODO □

Posledica 2.1.1.1. Recimo, da velja

1. Funkcija $f : [a, b]_x \times (c, d)_y \to \mathbb{R}$ zvezna.
2. Funkciji $\alpha, \beta : (c, d) \to [a, b]$ zvezno odvedljivi.

Tedaj $F'(y) = \dfrac{d}{dy} \int_{\alpha(y)}^{\beta(y)} f(x, y)\, dx = \int_{\alpha(y)}^{\beta(y)} \dfrac{\partial f}{\partial y}(x, y)\, dx + \beta'(y) f(\beta(y), y) - \alpha'(y) f(\alpha(y), y)$.

Dokaz. TODO □

Posledica 2.1.1.2. Recimo, da velja

1. $D^{\text{odp}} \subseteq \mathbb{R}^n$.
2. Funkcija $f : [a, b]_x \times D_y \to \mathbb{R}$ zvezna.
3. $\forall (x, y) \in [a, b] \times D \,.\, \forall j \in [n] \,.\, f$ parcialno odvedljiva po y_j.
4. $\forall j \in [n] \,.\, \frac{\partial f}{\partial y_j}(x, y)$ so zvezne funkcije na $[a, b] \times D$.

Tedaj je

1. $F(y) = \displaystyle\int_a^b f(x, y)\, dx$ funkcija razreda C^1 na D.
2. $\displaystyle\frac{\partial F}{\partial y_j}(y) = \int_a^b \frac{\partial f}{\partial y_j}(x, y)\, dx.!$