Diskretna matematika 1

21. februar 2025

1 Kombinatorika

1.1 Osnovna načela kombinatorike

Trditev (Načelo produkta)**.** Če sta A, B končni množici, potem je

$$|A \times B| = |A| \cdot |B|.$$

Trditev (Posplošeno načelo produkta)**.** Če so $A_1, \ldots, A_k$ končne, potem je

$$|\Pi_{i=1}^{k} A_i| = \Pi_{i=1}^{k} |A_i|.$$

Trditev (Načelo vsote)**.** Če sta A in B končni in disjunktni množici, potem je

$$|A \cup B| = |A| + |B|.$$

Trditev (Posplošeno načelo vsote)**.** Če so $A_1, \ldots, A_k$ končne, paroma disjunktne množice, potem je

$$\bigcup_{i=1}^{k} A_i = \sum_{i=1}^{k} |A_i|.$$

Trditev (Načelo enakosti)**.** Če obstaja bijekcija $A \to B$, potem je

$$|A| = |B|.$$

Označimo z $[k] = \{1, 2, \ldots, k\}$.

Primer. Naj bo A končna množica, $|A| = n$, $A = \{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$. Naj bo 2^A potenčna množica. Določi moč 2^A.

Trditev (Načelo dvojnega preštevanja)**.** Z njim pokažemo, da sta dva izraza/formuli enaka, če z obema na različna načina preštejemo elemente iste množice.

Primer (Eulorjeva funkcija ϕ). Za $n \in \mathbb{N}$ definiramo $\phi(n) =$ število števil iz $[n]$, ki so tuji z n. Določi $\sum_{d|n} \phi(d)$.

Trditev (Dirichletovo načelo)**.** Če sta $n, m \in \mathbb{N}$ in je $n > m$, potem ne obstaja injektivna preslikava $[n] \to [m]$.

Opomba (Kombinatorična interpretacija). Če n predmetov razporedimo v m predalov in je $n > m$, potem sta vsaj v enem predalu vsaj dva predmeta.

Primer. Naj bo $X \subset [100]$, $|X| = 10$. Pokaži, da X vsebuje dve disjunktni podmnožici z isto vsoto.

1.2 Število preslikav

Definicija. Množica $B^A = \{f : A \to B\}$ je **množica vseh preslikav iz A v B**.

Definicija. Definiramo:

- $n^{\underline{k}} = \underbrace{n(n-1)\ldots(n-(k-1))}_{k \text{ faktorjev}}$ je **padajoča potenca.**
- $n^{\overline{k}} = n(n+1)\ldots(n+(k-1))$ je **naraščajoča potenca.**
- $n! = n^{\underline{n}}$ je n **fakulteta.**
- Množica z n elementi se imenuje **n-množica.**

Trditev. Naj bosta N in K končni množici z $|N| = n$, $|K| = k$. Tedaj velja:

1. $|K^N| = k^n$.
2. Število injektivnih preslikav iz N v K je $k^{\underline{n}}$.
3. Število bijekcij iz N v K je $n!$, če $n = k$ in je 0 sicer.

Dokaz. Za 1. in 2. točko uporabimo načelo enakosti. V 3. točki upoštevamo, kadar je preslikava iz končne množice v končno množico z isto močjo bijektivna. □

1.3 Binomski koeficienti in binomski izrek

Definicija. Naj bo $x \in \mathbb{C}$. Naj bo $k \in \mathbb{N}_0 = \{1, 2, \dots\}$. Definiramo $\binom{x}{k} = \frac{x^{\underline{k}}}{k!} = \frac{x(x-1)\dots(x-(k-1))}{k!}$. Števila $\binom{x}{k}$ so **binomski koeficienti.** Če je $k \notin \mathbb{N}_0$ definiramo $\binom{x}{k} = 0$.

Trditev. Če je $n \in \mathbb{N}_0$ in $k \leq n,\ k \in \mathbb{N}_0$, potem je

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}.$$

Števila $\binom{n}{k}$ so **binomska števila.**

Dokaz. Definicija binomskega koeficienta. □

Opomba. Tudi $\binom{0}{0} = 1$. Razlaga: $0! = 1$ je število bijektivnih preslikav iz $\emptyset$ v $\emptyset$.

Opomba. Če je $0 \leq k \leq n$, potem $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$.

Definicija. Naj bo N množica. Definiramo $\binom{N}{k} = \{A \in P(N) \mid |A| = k\}$.

Trditev. Če je N n-množica in je $0 \leq k \leq n$, potem je

$$\left|\binom{N}{k}\right| = \binom{n}{k}.$$

Dokaz. Definiramo $X = \{(n_1, n_2, \dots, n_k);\ n_i \in \mathbb{N} \text{ paroma različni}\}$. Označimo $X_{n,k} = \left|\binom{N}{k}\right|$. Preštejemo elementi množici X na 2 načina. □

Trditev. Za $n \in \mathbb{N}$ in $1 \leq k \leq n$ velja:

$$\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k}.$$

Dokaz. Naj bo N n-množica. Naj bo $x \in N$ poljuben fiksen element.
Definiramo $\mathcal{A} = \left\{A \in \binom{N}{k};\ x \in A\right\}$ in $\mathcal{B} = \left\{B \in \binom{N}{k};\ x \notin B\right\}$. Potem $\binom{N}{k} = \mathcal{A} \cup \mathcal{B}$. Uporabimo prejšnjo trditev in načelo vsote. □

Definicija. Pascalov trikotnik je trikotnik oblike

$$\begin{array}{ccccccccccc}
 & & & & & 1 & & & & & \\
 & & & & 1 & & 1 & & & & \\
 & & & 1 & & 2 & & 1 & & & \\
 & & 1 & & 3 & & 3 & & 1 & & \\
 & 1 & & 4 & & 6 & & 4 & & 1 & \\
1 & & 5 & & 10 & & 10 & & 5 & & 1
\end{array}$$

Opomba. S pomočjo Paskalovega trikotnika se lahko spomnimo rekurzivno formulo za $\binom{n}{k}$ (n je številka vrstice, k je številka diagonale, ki jo gledamo z leve proti desni). Šteteti vrstice in diagonale začnemo z 0.

Izrek (Binomski izrek)**.** Za vsak $n \in \mathbb{N}_0$ velja:

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k}.$$

Dokaz. Izberimo k-krat a izmed n oklepajev. □

Opomba. V izreku sta a in b elementi poljubnega komutativnega kolobarja.

1.4 Izbori

Naj bo N n-mnižica. Opazujemo izbori k-elementov.

1. Izbor je urejen (važno v kakšnem vrstnem redu izberimo elementi):
   1.1 Elementi si lahko ponavljajo: n^k.
   1.2 Elementi se ne smejo ponavljati: $n^{\underline{k}}$.
2. Izbor je neurejen:
   2.1 Elementi si lahko ponavljajo [trditev]: $\binom{k+n-1}{n-1}$.
   2.2 Elementi se ne smejo ponavljati: $\binom{n}{k}$.

Trditev. Število neurejenih izborov s ponavljanjem dolžine k iz n-množice N je

$$\binom{k+n-1}{n-1}.$$

Dokaz. Naj bo $N = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$.
Neurejenemu izboru $\underbrace{x_1 \dots x_1}_{k_1}\underbrace{x_2 \dots x_2}_{k_2}\dots\underbrace{x_n \dots x_n}_{k_n}$ priredimo niz $\underbrace{1\dots 1}_{k_1}0\underbrace{1\dots 1}_{k_2}0\dots 0\underbrace{1\dots 1}_{k_n}$. □

1.5 Multimnožice

1.5.1 Permutacije

Definicija. Naj bo A n-množica. **Permutacija množice A** je bijektivna preslikava $\pi : A \to A$.
Množico vseh permutacij velikosti n (permutacij na $[n]$) označimo z S_n. Množico vseh permutacij množice A označimo z S_A.

Trditev. $|S_n| = n!$.

Dokaz. Z indukcijo pokažemo, da je $|S_n| = n|S_{n-1}|$ in $|S_1| = 1$. □

Trditev. Vsako permutacijo lahko zapišemo kot produkt disjunknih ciklov.

Definicija. Naj bo $\pi \in S_n$. Par je **inverzija**, če velja: $i < j$ in $\pi(i) > \pi(j)$.

Definicija. Permutacija $\pi \in S_n$ je **soda** (oz. **liha**), če ima sodo mnogo inverzij (oz. liho mnogo inverzij).

1.5.2 Multimnožice

Definicija. **Multimnožica** z elementi v množici S je preslikava $\mu : S \to \mathbb{N}_0$. Pri tem številu $\mu(a), a \in S$, rečemo **kratnost elementa** a v multimnožici μ, vsoti $\sum_{a\in S}\mu(a)$ pa **moč multimnožice μ**. Multimnožica je **končna**, če je njena moč končna.

Opomba. Multimnožico M formalno podamo z urejenim parom (S, μ). Namesto da elemente zapišemo večkrat, lahko kratnost označimo tudi s formalno potenco: $M = \{a, a, b, c, c, c\} = \{a^2, b, c^3\}$.
Multimnožica je isto kot neurejen izbor s ponavljanjem. Tojer obstaja $\binom{k+n-1}{n-1}$ k-elementnih multimnožic v množici z n elementi.

1.5.3 Permutacije multimnožic

Definicija. **Permutacija multimnožice** $M = (S, \mu)$ moči n je zaporedje $(x_1, \dots, x_n)$, kjer je $x_i \in S$ in se vsak $a \in S$ v zaporedju pojavi $\mu(a)$-krat.

Trditev. Število permutacij multimnožice $M = \{1^{\alpha_1}, 2^{\alpha_2}, \dots, k^{\alpha_k}\}$ moči $n = \alpha_1 + \dots + \alpha_k$ je

$$\frac{n!}{\alpha_1!\alpha_2!\dots\alpha_k!}.$$

Dokaz. Najprej izberimo položaje elementa 1, nato izberimo položaje elementa 2 itd. □

Definicija. Številu $\frac{n!}{\alpha_1!\alpha_2!\dots\alpha_k!}$ rečemo **multinomski koeficient** in ga označimo z $\binom{n}{\alpha_1,\alpha_2,\dots,\alpha_k}$.

Opomba. Multinomski koeficient je posplošitev binomskega koeficienta.

Trditev (Multinomski izrek)**.** Velja

$$(x_1 + \dots + x_k)^n = \sum \binom{n}{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_k} x_1^{\alpha_1} \dots x_k^{\alpha_k},$$

kjer vsota teče po vseh izbirah nenegativnih celih števil $\alpha_1, \dots, \alpha_k$, katerih vsota je n.

Dokaz. Število permutacij multimnožice moči n, kjer je S množica indeksov. □

1.6 Kompozicije naravnega števila

Definicija. **Kompožicija naravnega števila** n je zaporedje pozitivnih naravnih števil $\lambda = (\lambda_1, \ldots, \lambda_l)$, za katero velja $\lambda_1 + \ldots + \lambda_l = n$. **Dolžina** kompozicije λ, $l(\lambda)$ je število elementov zaporedja, številu n pa rečemo **velikost kompozicije**. Števila $\lambda_1, \ldots, \lambda_l$ imenujemo **členi kompozicije**.

Trditev. Naj bo $n \geq 1$.
1. Število kompožicij števila n je enako 2^{n-1}.
2. Število kompožicij dolžine k števila n je enako $\binom{n-1}{k-1}$.

Dokaz. Število n lahko si predstavljamo kot zaporedje n kgoglic, kompozicijo pa s pregradami med kroglicami: $\bullet \mid \bullet\,\bullet \mid \bullet$. □

Opomba. Lahko razumemo kompozicijo števila n s k členi kot rešitev enačbe $x_1 + \ldots + x_k = n$, kjer so $x_i \in \mathbb{N}$.

1.6.1 Šibke kompozicije

Definicija. **Šibka kompozicija števila** n ima isto definicijo kot kompozicija, le da dovolimo med členi tudi ničle.

Trditev. Število šibkih kompozicij števila n s k členi je $\binom{n+k-1}{k-1} = \binom{n+k-1}{n}$.

Dokaz. 1. način. Rešujemo enačbo $x_1 + \ldots + x_k = n$, kjer so $x_i \in \mathbb{N}_0$.
2. način. Kroglice in pregrade.
3. način. Neurejeni izbori s ponavljanjem. □

1.7 Razčlenitve naravnega števila

Definicija. **Razčlenitev** $n \in \mathbb{N}$ je zaporedje pozitivnih naravnih števil $\lambda = (\lambda_1, \ldots, \lambda_l)$, kjer je $\lambda_1 \geq \ldots \geq \lambda_l$ in $\lambda_1 + \ldots + \lambda_l = n$. **Dolžina** razčlenitve λ, $l(\lambda)$ je število elementov zaporedja, številu n pa rečemo **velikost razčlenitve**. Števila $\lambda_1, \ldots, \lambda_l$ imenujemo **členi razčlenitve**. Razčlenitvam rečemo tudi **particije**.

Definicija. Naj bo $\lambda = (\lambda_1, \ldots, \lambda_l)$ razčlenitev naravnega števila n. **Ferrersov diagram** λ je seznam vrstic oblike:

$$\begin{aligned}
&1.\ \text{vrsta:}\ \underbrace{\circ\ \circ\ \circ\ \ldots\ \circ}_{\lambda_1 \text{ krožcev}}\\
&2.\ \text{vrsta:}\ \underbrace{\circ\ \circ\ \ldots\ \circ}_{\lambda_2 \text{ krožcev}}\\
&\qquad\quad\vdots\\
&l.\ \text{vrsta:}\ \underbrace{\circ\ \ldots\ \circ}_{\lambda_l \text{ krožcev}}
\end{aligned}$$

Definicija. Naj bo $\lambda = (\lambda_1, \ldots, \lambda_l)$ razčlenitev naravnega števila n. **Konjugirana razčlenitev** $\overline{\lambda}$ je razčlenitev, ki ima transponiran Ferrersov diagram.

Uvedemo oznake:
- $p(n)$ je število razčlenitev števila n. Funkciji $p(n)$ rečemo tudi **razčlenitvena funkcija**.
- $p_k(n)$ je število razčlenitev števila n s k členi.
- $\overline{p}_k(n)$ je število razčlenitev števila n z največ k členi.

Trditev. Za naravni števili n in k velja:
1. $p_k(n) = p_{k-1}(n-1) + p_k(n-k)$.
2. $p_k(n) = \overline{p}_k(n-k)$.
3. $\overline{p}_k(n) = \overline{p}_{k-1}(n) + \overline{p}_k(n-k)$.

Dokaz. Pomagamo si z Ferrersovim diagramom.
1. Razbijemo razčlinitve na tiste, ki vsebujejo 1 in tiste, ki jo ne vsebujejo.
2. Odštejemo od prvega stolpca 1.
3. Razčlenitev n z največ k členi ima bodisi natanko k členov bodisi kvečjemi $k-1$ členov. □

1.8 Stirlingova števila I. vrste

Definicija. Naj bo $1 \leq k \leq n$. **Stirlingovo število I. vrste** $C(n,k)$ je število permutacij množice $[n]$, ki se zapišejo kot produkt k disjunktnih ciklov. Velja: $C(n,0) = 0,\ n > 0$ in $C(0,0) = 1$.

Primer. Izračunaj $C(n,n),\ C(n,1),\ C(4,2)$.

Trditev. Naj bo $1 \leq k \leq n$. Velja:

$$C(n,k) = C(n-1,k-1) + (n-1)C(n-1,k).$$

Dokaz. Permutacije $[n]$ s k cikli razdelimo takole:

1. tiste, kjer je n negibna točka in
2. ostale. □

Za izračun $C(n,k)$ lahko si pomagamo s Stirlingovo matriko I. vrste, ki jo dobimo s pomočjo rekurzivne zveze.

Trditev. $x^{\overline{n}} = \sum_{k=0}^{\infty} C(n,k)x^k$.

Dokaz. Indukcija po n. □

Primer. Izračunaj $x^{\overline{4}}$.

1.9 Stirlingova števila II. vrste in Bellova števila

Definicija. **Razdelitev množice** X je družina podmnožic $\{X_i\}_{i \in I}$ za katero velja:

1. $\bigcup_{i=I} X_i = X$,
2. $X_i \cap X_j = \emptyset$ za vsaka $i,j \in I,\ i \neq j$.

Definicija. Naj bo $1 \leq k \leq n$. **Stirlingovo število II. vrste** $S(n,k)$ je število razdelitev množice $[n]$ v k nepraznih razredov. Velja: $S(n,0) = 0,\ n > 0$ in $S(0,0) = 1$.

Primer. Izračunaj $S(n,n),\ S(n,1),\ S(n,2)$.

Trditev. Naj bo $1 \leq k \leq n$. Velja:

$$S(n,k) = S(n-1,k-1) + kS(n-1,k).$$

Dokaz. Vzemimo množico $[n]$. Razdelitve v k razredov razdelimo takole:

1. tiste, ki imajo $\{n\}$ kot samostojni del in
2. ostale. □

Za izračun $S(n,k)$ lahko si pomagamo s Stirlingovo matriko II. vrste, ki jo dobimo s pomočjo rekurzivne zveze.

Trditev. $x^n = \sum_{k=0}^{\infty} S(n,k)x^{\underline{k}}$.

Dokaz. Naj bo $x \in \mathbb{N}$. Opazujemo množico $X = \{(x_1,\ldots,x_n) \mid x_i \in [x]\}$. Preštejemo elementi te množice na 2 načina:

1. Naraven način.
2. Vektorji razdelimo glede na to, koliko različnih komponent ima. □

Opomba. Če dva polinoma stopnje n ujemata v $n+1$ točk, potem sta enaka.

Izrek. Število surjekcij iz n-množice v k-množico je enako

$$k!S(n,k).$$

Dokaz. Vsaka surjekcija določa razdelitev n-množice v k nepraznih razredov. □

Definicija. **Bellovo število** $B(n) = \sum_{k=0}^{\infty} S(n,k)$ je število vseh razdelitev n-množice v neprazne razrede.

Trditev. $B(n+1) = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{n}{k} B(k)$.

Dokaz. Opazujemo razdelitev množice $[n+1]$. Recimo, da v razredu z elementom $n+1$ natanko $k+1$ elementov. □

1.10 Lahova števila

Definicija. Naj bo $1 \leq k \leq n$. **Lahovo število** $L(n,k)$ je število razdelitev n-množice v k linearno urejenih kosov.

Trditev. Naj bo $1 \leq k \leq n-1$. Velja:

$$L(n,k) = L(n-1,k-1) + (n+k-1)L(n-1,k).$$

Dokaz. Vzemimo množico $[n]$. Razdelitve v k linearno urejenih blokov razdelimo takole:
1. tiste, ki imajo $\{n\}$ kot samostojni del in
2. ostale.

$\square$

Trditev. Velja: $L(n,k) = \frac{n!}{k!}\binom{n-1}{k-1}$.

Dokaz. Oglejmo si, koliko *urejenih* razdelitev $[n]$ na k linearno urejenih blokov. $\square$

Trditev. $x^{\overline{n}} = \sum_{k=0}^{\infty} L(n,k) x^{\underline{n}}$

Dokaz. Indukcija po n. $\square$

1.11 Dvajnastera pot

Naj bo N n-množica (predmetov) in K k-množica (predalov). Gledamo „funkcijo“ $f : N \to K$, ki predmeti razporedi po predalih.
Imamo 12 možnosti: predmeti in predali lahko bodisi ločimo med seboj bodisi ne ločimo med seboj, funkcija lahko poljubna, inkjektivna (vsak predal ima kvečjemu 1 predmet) ali surjektivna (noben predal ni prazen).

Izrek (Dvajnastera pot)**.** Velja:

ločimo predmeti/predali	poljubna	injektivna	surjektivna
DA/DA	k^n	$k^{\underline{n}}$	$k!S(n,k)$
DA/NE	$\sum_{i \leq k} S(n,i)$	$\begin{cases} 1; & n \leq k \\ 0; & \text{sicer} \end{cases}$	$S(n,k)$
NE/DA	$\binom{n+k-1}{k-1}$	$\begin{cases} \binom{k}{n}; & n \leq k \\ 0; & \text{sicer} \end{cases}$	$\binom{n-1}{k-1}$
NE/NE	$\overline{p}_k(n)$	$\begin{cases} 1; & n \leq k \\ 0; & \text{sicer} \end{cases}$	$p_k(n)$

Dokaz. Uporabimo že znane rezultate (kompozicije, razčlenitve) itd. $\square$

1.12 Načelo vključitev in izključitev

Recimo, da sta A, B poljubni množici, potem $|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|$.

Izrek (Načelo vključitev in izključitev)**.** Naj bo $A_1, \dots, A_n$ množice. Velja:

$$\left| \bigcup_{i=1}^{n} A_i \right| = \sum_{j=1}^{n} (-1)^{j+1} \sigma_j,$$

kjer je $\sigma_j = \sum_{I \in \binom{[n]}{j}} \left| \bigcap_{i \in I} A_i \right|$.

Dokaz. Pokažemo, da če $x \in \bigcup_{i=1}^{n} A_i$, potem prispeva natanko 1 k formuli. $\square$

Primer. Koliko so števil v $[30]$ ni tujih s 30? Koliko so tujih?

Primer. Na koliko načinov lahko razporedimo n označenih predmetov v k označenih predalov, če je vsaj en predal prazen?

Posledica. Če je X N-množica in so $A_1, \dots, A_n \subset X$, potem je število elementov množice X, ki niso v nobeni izmed množic $A_1, \dots, A_n$ enako

$$N + \sum_{j=1}^{n} (-1)^j \sigma_j.$$

Definicija. **Premestitev množice $[n]$** je permutacija $\pi \in S_n$ brez negibnih točk.

Primer. Izračunaj število premestitev množice $[n]$.

Izrek. Če je $n = p_1^{e_1} \dots p_r^{e_r}$ razcep $n \in \mathbb{N}$ na prafaktorji, potem je

$$\phi(n) = n(1 - \frac{1}{p_1}) \dots (1 - \frac{1}{p_r}) \text{ (Eulorjeva funkcija).}$$

Dokaz. Definiramo $A_i = \{x \in [n] \mid p_i \mid x\}$. □

1.13 Rekurzivne enačbe

Primer. Na koliko načinov lahko prehodimo n stopnic, če vsakič prehodimo 1 ali 2?

Primer. Koliko je dvojiških dreves s korenom z n vozlišč?

Izrek. Naj bo zaporedje $(a_n)_{n \geq 0}$ podano takole:

$$a_0 = b_0,\ a_1 = b_1,\ a_n = Aa_{n-1} + Ba_{n-2},\ n \geq 2,$$

kjer so b_0, b_1, A, B fiksna števila. Naj bosta α in β korena **karakteristične enačbe** $x^2 = Ax + B$. Tedaj velja:

1. Če je $\alpha \neq \beta$, potem obstajata konstanti K_1, K_2, tako da je
$$a_n = K_1\alpha^n + K_2\beta^n.$$
2. Če je $\alpha = \beta$, potem obstajata konstanti K_1, K_2, tako da je
$$a_n = (K_1 + K_2 n)\alpha^n.$$

Dokaz. Z indukcijo in uporabo linearne algebre. □

Splošen primer

Zaporedje $(a_n)_{n \geq 0}$ je podano takole:

1. $a_0 = b_0, a_1 = b_1, \dots, a_{d-1} = b_{d-1}$, kjer so $b_0, b_1, \dots, b_{d-1}$ fiksna števila.
2. $c_d a_{n+d} + c_{d-1}a_{n+d-1} + \dots + c_1 a_{n+1} + c_0 a_n = f(n)$ $(*)$, kjer so $c_d, \dots, c_0$ fiksna števila, $f(n) : \mathbb{N}_0 \to \mathbb{C}$.

Definicija. (*) je **d-člena linearna rekurzija s konstantnimi koeficienti**. Če je $f(n) \equiv 0$, potem rečemo, da je rekurzija (*) **homogena**.

Kako rešemo homogeno rekurzijo?

Zaporedja gledamo v prostoru $\mathbb{C}^{\mathbb{N}_0}$ vseh kompleksnih zaporedij. Naredimo vektorski prostor $(\mathbb{C}^{\mathbb{N}_0}, +, \cdot)$ na naraven način. Gledamo še prostor $\mathrm{End}(\mathbb{C}^{\mathbb{N}_0})$ in naredimo vektorski prostor $(\mathrm{End}(\mathbb{C}^{\mathbb{N}_0}), +, \circ)$.
Naj bo $E \in (\mathrm{End}(\mathbb{C}^{\mathbb{N}_0}))$, $E(a_0, a_1, a_2, \dots) = (a_1, a_2, \dots)$ (odrežemo prvi člen). BŠS: $c_d = 1$.

1. Priredimo polinom: $Q(x) = x^d + c_{d-1}x^{d-1} + \dots + c_1 x + c_0$.
2. **(!)** Poglejmo $\ker Q(E)$:
$$\begin{aligned}(a_n)_n \in \ker Q(E) \Leftrightarrow Q(E)((a_n)_n) = 0 \Leftrightarrow (E^d + c_{d-1}E^{d-1} + \dots + c_1 E + c_0 I)(a_n)_n = 0 \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow E^d(a_n)_n + c_{d-1}E^{d-1}(a_n)_n + \dots + c_1 E(a_n)_n + c_0 I(a_n)_n = 0 \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow (a_d, a_{d+1}, \dots) + c_{d-1}(a_{d-1}, a_d, \dots) + \dots + c_1(a_1, a_2, \dots) + c_0(a_0, a_1, \dots) = 0 \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow (a_d + c_{d-1}a_{d-1} + \dots + c_1 a_1 + c_0 a_0,\ a_{d+1} + c_{d-1}a_d + \dots + c_1 a_2 + c_0 a_1, \dots) = 0 \Leftrightarrow (a_n)_n \text{ reši } (*).\end{aligned}$$
Torej splošne rešitve homogene enačbe so natanko elementi iz $\ker(Q(E))$.
3. Polinom $Q(x)$ lahko zapišemo v obliki $Q(x) = (x - \lambda_1)^{s_1} \dots (x - \lambda_k)^{s_k}$, potem
$$\ker Q(E) = \ker((E - \lambda_1 I)^{s_1}) \oplus \dots \oplus \ker((E - \lambda_k I)^{s_k}).$$
Hočemo torej določiti $\ker((E - \lambda I)^s)$.
4. Vemo: $\dim(\ker((E - \lambda I)^s)) = s$. Baza prostora je $(\lambda^n)_{n \geq 0}, (n\lambda^n)_{n \geq 0}, \dots, (n^{s-1}\lambda^n)_{n \geq 0}$ (dokaz težek).

Izrek. $(a_n)_{n \geq 0} \in \ker((E - \lambda I)^s) \Leftrightarrow a_n$ je oblike $a_n = P(n)\lambda^n$, kjer je $P(n)$ polinom stopnje kvečjemu $s - 1$.

Izrek. Splošna rešitev enačbe

$$c_d a_{n+d} + c_{d-1}a_{n+d-1} + \dots + c_1 a_{n+1} + c_0 a_n = 0$$

je oblike

$$A_1(n)\lambda_1^n + \dots + A_k(n)\lambda_k^n,$$

kjer so λ_i ničla karakterističnega polinoma kratnosti s_i, in je $A_i(n)$ polinom stopnje k večjemu $s_i - 1$ za vse $i \in [k]$.

Kako rešemo nehomogeno rekurzijo?

Rešitev nehomogene enačbe

$$c_d a_{n+d} + c_{d-1} a_{n+d-1} + \ldots + c_1 a_{n+1} + c_0 a_n = f(n) \; (*)$$

je oblike

$$z_n + b_n,$$

kjer je z_n splošna rešitev ustrezne homogene enačbe in je b_n neka partikularna rešitev enačbe $(*)$.
Pri tem b_n praviloma iščemo z ustreznim nastavkom, pri čemer upoštevamo, da če je $f(n)$ aditivna, torej

$$f(n) \; = \; f_1(n) \; + \; \ldots \; + \; f_t(n),$$

potem b_n lahko dobimo kot vsoto partikularnih rešitev od

$$c_d a_{n+d} + c_{d-1} a_{n+d-1} + \ldots + c_1 a_{n+1} + c_0 a_n = f_i(n).$$

Primer. Pri začetnih pogojah $a_0 = 0,\ a_1 = 1$, reši enačbo $a_n = 4a_{n-1} - 4a_{n-2} - 2n + 5 \cdot 3^n$.

1.14 Formalne potenčne vrste (Rodovne funkcije)

Definicija. Naj bo $a : \mathbb{N}_0 \to \mathbb{C}$ zaporedje. Vrsta $\sum_{n\geq 0} a_n x^n$ je **formalna potenčna vrsta** zaporedja a_n.

Definicija. Naj bo $(a_n)_n,\ (b_n)_n \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}_0}$.
- $\sum_{n\geq 0} a_n x^n + \sum_{n\geq 0} b_n x^n = \sum_{n\geq 0}(a_n + b_n)x^n$.
- $\lambda \cdot \sum_{n\geq 0} a_n x^n = \sum_{n\geq 0}(\lambda a_n)x^n$.
- $(\sum_{n\geq 0} a_n x^n) \cdot (\sum_{n\geq 0} b_n x^n) = \sum_{n\geq 0} c_n x^n$, kjer $c_n = \sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k}$.

Opomba. Formalne potenčne vrste tvorijo algebro.

Definicija. F. p. v. $A(x)$ je **obrnljiva**, če obstaja f. p. v. $B(x)$, da velja $A(x) \cdot B(x) = (1, 0, 0, \ldots)$.

Trditev. Formalna potenčna vrsta $A(x)$ je obrnljiva natanko tedaj, ko $a_0 \neq 0$

Dokaz. $(\Rightarrow)$ Definicija množenja.
$(\Leftarrow)$ Induktivno konstruiramo členi f. p. v. $B(x)$. □

Definicija. Če je $(a_n)_n$ zaporedje, ki je rešitev nekega kombinatoričnega problema, potem $\sum_{n\geq 0} a_n x^n$ pravimo **rodovna funkcija**. Pišemo: $G(x) = \sum_{n\geq 0} a_n x^n$.

Primer. Določi rodovno funkcijio Fibonaccijeva zaporedja.

Definicija. Naj bo $A(x) = \sum_{n\geq 0} a_n x^n$ f. p. v. **Odvod** f. p. v. je $A'(x) = \sum_{n\geq 1} n a_n x^{n-1} = \sum_{n\geq 0}(n+1)a_{n+1}x^n$.

Trditev. $(A(x) \cdot B(x))' = A'(x)B(x) + A(x)B'(x)$.

Dokaz. Račun. □

Reševanje rekurzij z rodovnimi funkcijami

Primer. Naj bo $a_0 = 2, a_1 = 3, a_n = 2a_{n-1} - a_{n-2}, n \geq 2$. Določi splošno formulo za a_n.

Koraki splošnega reševanja nekega kombinatoričnega problema

1. Rešitev problema zapišemo z rekurzivno enačbo.
2. Zapišemo rodovno funkcijio zaporedja z pomočjo rekurzivne zveze.
3. Z algebro nad rodovnimi funkcijami, rodovno funkcijo razvijemo v vrsto.
4. Iz razvoja preberemo rešitev našega začetnega problema.

1.15 Catalanova števila

Imejmo produkt n števil $x_1 x_2 \ldots x_n$. Na koliko načinov lahko izračunamo ta produkt, če po vrsti zmnožimo dve zaporedni števili in jih nadomestimo s produktom?

Definicija. **Catalanovo število** C_n je število načinov, s katerimi lahko izračunamo produkt $x_1 x_2 \ldots x_n$.
Velja: $C_0 = C_1 = 1,\ C_2 = 2, C_3 = 5$.

Trditev. Velja rekurzivna zveza: $a_n = \sum_{k=0}^{n-1} a_k a_{n-k-1}$.

Trditev. $C_n = \frac{1}{n+1}\binom{2n}{n}$.

Dokaz. Rodovne funkcije. □

Primer. S Catalonovi števili lahko preštejemo: št. dvojiških dreves s korenom na n vozliščih, št. triangulacij n-kotnika.

2 Teorija grafov

2.1 Osnovni pojmi

Definicija. Graf G je urejen par $(V(G), E(G))$, kjer je $V(G)$ množica **vozlišč** grafa G in $E(G)$ množica **povezav** grafa G, kjer je $E(G) \subseteq \binom{V(G)}{2}$.

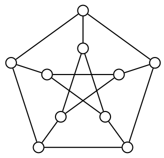
Opomba. Če ne povemo drugače, bo množica $V(G)$ končna.

Opomba. Naj bo $\{u, v\} \in E(G)$:
- Krajše pišemo uv.
- Pravimo, da sta u in v **krajišči** povezave e in, da sta u in v **sosedni** vozlišči. Pišemo: $u \sim v$ ali $u \sim_G v$.

Definicija. Naj bo G graf, $u \in V(G)$:
- $N_G(u) = \{v \in V(G) \mid uv \in E(G)\}$ je **soseščina** vozlišča u.
- $\deg_G(u) = |N_G(u)|$ je **stopnja** vozlišča u. Označimo z $\delta(G) = \min_{v \in V(G)} \deg_G(v)$.

Definicija. Graf G je **regularen**, če imajo vsa vozlišča isto stopnjo.

Opomba. Če je ta stopnja r, pravimo, da je G r-regularen graf.

Primer. Petersenov graf P je 3-regularen graf: 

Primer. Grafe lahko predstavimo tudi z matrikami. Možnosti:
1. **Matrika sosednosti.** Za graf G z vozlišči $v_1, \ldots, v_n$ je matrika sosednosti matrika $A(G) \in \mathbb{R}^{n \times n}$, definirana z
$$a_{ij} = \begin{cases} 1, & v_i \sim v_j, \\ 0, & v_i \nsim v_j. \end{cases}.$$
2. **Incidenčna matrika**. Če ima graf G vozlišča $v_1, \ldots, v_n$ in povezave $e_1, \ldots, e_m$, je to matrika $B(G) \in \mathbb{R}^{n \times m}$, podana s predpisom
$$b_{ij} = \begin{cases} 1, & v_i \in e_j, \\ 0, & v_i \notin e_j. \end{cases}.$$

2.2 Lema o rokovanju

Lema (o rokovanju)**.** Naj bo G graf. Velja:
$$\sum_{u \in V(G)} \deg_G(u) = 2 \cdot |E(G)|.$$

Dokaz. Incidenčna matrika in načelo dvojnega preštevanja. □

Posledica. Število vozlišč lihe stopnje danega grafa je sodo.

Dokaz. Razbijemo vsoto na vozlišče sode in lihe stopnje. □

2.3 Podgrafi

Definicija. Naj bosta G in H grafa. Če velja $V(H) \subseteq V(G)$ in $E(H) \subseteq E(G)$, tedaj rečemo, da je H **podgraf** grafa G, in pišemo $H \leq G$. Pri tem:
- Podgraf H je **vpet** podgraf, če je $V(H) = V(G)$ (odstranimo nekaj povezav).
- Podgraf H je **porojen** (oz. **induciran**), če velja: $\forall u, v \in V(H) \,.\, u \sim_G v \Rightarrow u \sim_H v$ (odstranimo nekaj vozlišč).

2.4 Nekatere družine grafov

Polni grafi. Naj bo V poljubna neprazna množica. Tedaj grafu z množico vozlišč V in množico povezav $\binom{V}{2}$ vseh neurejenih parov elementov iz V rečemo **polni graf** z množico vozlišč V. Oznaka: K_V ali K_n, če $V = [n]$.

Poti. Grafu z množico vozlišč $\mathbb{Z}_n$ in množico povezav $E(P_n) = \{i(i+1) \mid i \in \{0, 1, \ldots, n-2\}\}$ rečemo **pot dolžine** n. Oznaka: P_n.

Cikli. Za $n \in \mathbb{N}, n \geq 3$, s C_n označimo graf z množico vozlišč $\mathbb{Z}_n$ in množico povezav $E(C_n) = \{i(i+1) \mid i \in \mathbb{Z}_n\}$. Grafu C_n rečemo **cikel dolžine** n.

Polni dvodelni grafi. Naj bosta A in B poljubni disjunktni neprazni množici. Grafu $K_{A,B}$ z množico vozlišč $A \cup B$ in množico povezav $E(K_{A,B}) = \{uv \mid u \in A, v \in B\}$ rečemo **polni dvodelni graf** na paru množic A, B. Oznaka: $K_{A,B}$ ali $K_{m,n}$, če $A = [m],\ B = [n]$.

Hiperkocke. Za $d \in \mathbb{N}$ naj $\mathbb{Z}_2^d$ predstavlja množico vseh urejenih d-teric ničel in enic. Na $\mathbb{Z}_2^d$ lahko gledamo kot na Abelovo grupo. Za $i \in 1, 2, \ldots, d$ naj bo e_i tisti element množice $\mathbb{Z}_2^d$, ki ima na i-tem mestu enico, povsod drugod pa ničlo. Pišimo $S = \{e_1, e_2, \ldots, e_d\}$. **Hiperkocka razsežnosti** d je graf z množico vozlišč $\mathbb{Z}_2^d$ in z dvema vozliščema $u, v \in \mathbb{Z}_2^d$ sosednjima, če in samo če je $u + v \in S$, tj. u in v razlikujeta v natanko eni komponenti. Oznaka: Q_n. Velja:
- $|V(Q_n)| = 2^d$.
- $|E(Q_n)| = d \cdot 2^{d-1}$.

Posplošeni Petersenovi grafi. Naj bosta $n, k \in \mathbb{N},\ n \geq 3,\ 2k < n$. Naj bosta $U = \{u_0, u_1, \ldots, u_{n-1}\}$ in $V = \{v_0, v_1, \ldots, v_{n-1}\}$ dve disjunktni n-elementni množici. **Posplošeni Petersonov graf** $P_{n,k}$ je graf z množico vozlišč $V(P_{n,k}) = U \cup V$ in množico povezav enako $E(P_{n,k}) = E_1 \cup E_2 \cup E_3$, kjer je

$$E_1 = \{u_i u_{i+1} \mid i \in \mathbb{Z}_n\}, \quad E_2 = \{v_i v_{i+k} \mid i \in Z_n\}, \quad E_3 = \{u_i v_i \mid i \in \mathbb{Z}_n\}.$$

2.5 Sprehodi, poti in cikli

Definicija. **Sprehod** v grafu G je zaporedje vozlišč grafa G: $v_0 v_1 \ldots v_k$, tako da je $v_i v_{i+1} \in E(G)$ za $i \in [k-1]$. Rečemo, da je to $v_0 v_k$-sprehod. Sprehod je **enostaven**, če so vse njegove povezave paroma različne.

Definicija. **Pot** v grafu G je sprehod s samimi različnimi vozlišči.

Definicija. Če ima sprehod v grafu G isti začetek in konec pravimo, da je sprehod **sklenjen**. **Enostaven sklenjen sprehod** je sklenjen sprehod, ki je enostaven. **Cikel** v grafu G je sklenjen sprehod z samimi različnimi vozlišči.

Lema. Če v grafu G obstaja uv-sprehod, obstaja tudi uv-pot.

Dokaz. Cilj: paroma različna vozlišča. □

Lema. Če v grafu G obstajata dve različi uv-poti, potem ima G vsaj en cikel.

Dokaz. Skupna vozlišča. □

Lema. Če v grafu G obstaja sklenjen sprehod lihe dolžine, obstaja v G tudi cikel lihe dolžine.

Dokaz. Indukcija na dolžino sprehoda. □

2.6 Povezane komponente, razdalja in premer

Definicija. Graf G je **povezan**, če za vsak par vozlišč $u, v \in V(G)$ obstaja uv-sprehod (ekvivalentno: uv-pot).

Definicija. Maksimalni podgrafi grafa, ki so povezani, so **komponente** grafa.

Označimo z $\Omega(G)$ število komponent grafa G.

Definicija. Naj bo G povezan graf, $u, v \in V(G)$. **Razdalja** $d_G(u, v)$ med u in v je število povezav na najkrajši uv-poti.

Opomba. Naj bo G povezan graf. Velja:
- $d_G(u, v) = 0 \Leftrightarrow u = v$.
- $d_G(u, v) = 1 \Leftrightarrow uv \in E(G)$.

Trditev. Naj bo G povezan graf. Potem $(V(G), d_G)$ je metrični prostor.

Dokaz. Preverimo lastnosti. □

Definicija. Naj bo G povezan graf. **Ekscentričnost** $\mathrm{ecc}_G(u)$ vozlišča u je $\max_{v \in V(G)} d_g(u, v)$.

Definicija. Naj bo G povezan graf. **Premer** $\mathrm{diam}\, G$ grafa G je $\max_{u \in V(G)} \mathrm{ecc}_G(u) = \max_{u,v \in V(G)} d_G(u, v)$.

Definicija. Naj bo G povezan graf. **Polmer** $\mathrm{rad}(G)$ grafa G je $\min_{u \in V(G)} \mathrm{ecc}_G(u)$

Primer. Velja:
- $\mathrm{diam}(P_{5,2}) = \mathrm{rad}(P_{5,2}) = 2$.
- $\mathrm{diam}(P_n) = n - 1,\ \mathrm{rad}(P_n) = \lfloor \frac{n}{2} \rfloor$.

2.7 Inačice koncepta „graf“

Enostavni grafi. Lahko dopuščamo **vzporedne povezave**, tj. množica povezav lahko multimnožica, in **zanke**, tj. povezave iz vozlišča vase.

Definicija. Graf je **enostaven**, če nima vzporednih povezav in zank.

Uteženi grafi, omrežja. Lahko definiramo:
- $G = (V(G), E(G), w)$, kjer je $w : V(G) \to \mathbb{R}$ je **uteženi** graf.
- $G = (V(G), E(G), l)$, kjer je $l : E(G) \to \mathbb{R}$ je **omrežje**.
- $G = (V(G), E(G), w, l)$, je **uteženo omrežje**.

Usmerjeni grafi. Množica povezav $E(G)$ grafa G lahko podmnožica $V(G) \times V(G)$, tj. povezave so urejeni pari.

Hipergrafi. Elementi $E(G)$ so lahko množice poljubne kardinalnosti.

2.8 Dvodelnost

Definicija. Graf G je **dvodelen**, če obstaja razdelitev $V(G) = V_1 \cup V_2$, tako da velja:

$$uv \in E(G) \Rightarrow u \in V_1 \wedge v \in V_2.$$

Opomba. Dvodelnost grafa lahko raziščemo z barvanjo vozlišč z dvema barvama.

Izrek. Graf G je dvodelen natanko tedaj, ko ne vsebuje lihih ciklov.

Dokaz. ($\Rightarrow$) Imamo težavo z barvanjo cikla.
($\Leftarrow$) Izberimo $x \in V(G)$ in razdelimo $V(G)$ na vozlišča, ki so na sode razdalje od x in, ki so na lihe razdalje od x. Pokažemo, da znotraj posameznih množic ni povezav. $\square$

2.9 Morfizmi grafov

Homomorfizmi grafov

Definicija. Naj bosta G, H grafa. Preslikava $f : V(G) \to V(H)$ je **homomorfizem**, če velja:

$$uv \in E(G) \Rightarrow f(u)f(v) \in E(H).$$

Injektivni homomorfizem je **vložitev** grafa G v graf H.

Opomba. Če je G dvodelen, potem obstaja homomorfizem $f : G \to K_2$.

Definicija. Vložitev $f : V(G) \to V(H)$ grafa G v graf H je **izometrična**, če velja:

$$\forall u, v \in V(G) \,.\, d_G(u, v) = d_H(f(u), f(v)).$$

Primer. Preslikava $\varphi : V(C_4) \to V(Q_3)$ definarana s

x	0	1	2	3
$\varphi(x)$	000	100	110	010

je homomorfizem.

Izomorfizmi grafov

Definicija. Naj bosta G, H grafa. Preslikava $f : V(G) \to V(H)$ je **izomorfizem**, če
1. f je bijekcija;
2. f je homomorfizem;
3. f^{-1} je homomorfizem.

Opomba. Pogoj 2. pravi, da f slika povezave v povezave. Pogoj 3. pravi, da f slika nepovezave v nepovezave.

Definicija. Grafa G in H sta **izomorfna**, če obstaja izomorfizem med njima. Oznaka: $G \cong H$.

Opomba. Izomorfnost je ekvivalenčna relacija.

Primer. Dokaži, da $Q_3 \cong K_{4,4}$

Opomba. Izomorfnost je algoritmično zahtevna naloga. Če za dva grafa domnevamo, da sta izomorfna, potem to dokažemo tako, da med njima poiščemo izomorfizem. Če za dva grafa domnevamo, da nista izomorfna, tedaj to najlažje dokažemo tako, da poiščemo neko številsko karakteristiko grafov, v kateri se razlikujeta, pri izomorfizmu pa se ohranja: število vozlišč, število povezav, ožina, število podgrafov izbrane vrste (trikotniki, cikli dolžine 4), urejeno zaporedje snopenj vozlišč. Lahko si pomagamo z lastnosti grafov: povezanost, dvodelnost.

Grupa avtomorfizmov grafa

Definicija. **Avtomorfizem** grafa G je izomorfizem $f : G \to G$.

Definiramo $\mathrm{Aut}(G) = \{\varphi \mid \varphi \text{ je avtomorfizem grafa } G\}$. Dodamo še komponiranje in dobimo **grupo avtomorfizmov grafa G**.

Opomba. Velja:
- Vsaka končna grupa je grupa avtomorfizmov nekega grafa.
- $\mathrm{Aut}(K_n) \cong S_n$, $\mathrm{Aut}(P_n) \cong \mathbb{Z}_2$, $\mathrm{Aut}(C_n) \cong D_{2n}$.
- Skoraj vsi grafi imajo trivialno grupo $\mathrm{Aut}(G)$.

2.10 Operacije z grafi

Komplementarni graf

Definicija. **Komplement $\overline{G}$** grafa G je graf z isto množico vozlišč kot G in z dvema vozliščema sosednjima v $\overline{G}$, če in samo če nista sosednji v grafu G.

Trditev. Če graf G ni povezan, potem je $\mathrm{diam}(\overline{G}) \leq 2$.

Dokaz. Enostavno. □

Posledica. Za poljuben graf G je vsaj eden od grafov G in $\overline{G}$ povezan.

Odstranevanje vozlišč in povezav

Naj bo G graf.
- Naj bo $v \in V(G)$. $G - v$ je graf brez vozlišča v in povezav z v.
- Naj bo $e \in E(G)$. $G - e$ graf brez povezave e.
- Naj bo $X \subseteq V(G)$. $G - X$ je graf brez vseh vozlišč iz X.
- Naj bo $F \subseteq E(G)$. $G - F$ je graf brez vseh povezav iz F.

Opomba. Vsak podgraf grafa G je enak grafu $(G - X) - F$, kjer je X neka množica vozlišč in F neka množica povezav grafa G.

Skrčitev povezav in minorji

Naj bo $e \in E(G)$. Z G/e označimo graf, ki ga dobimo iz grafa G tako, da identificiramo krajišči povezave e in odstranimo zanko ter morebitne vzporedne povezave. Pri tem rečemo, da smo G/e dobili s **skrčitvijo** povezave e.

Definicija. Graf H je **minor** grafa G, če ga lahko dobimo iz nekega podgrafa grafa G s skrčitvijo nekaj povezav.

Primer. K_5 je minor Petersenovega grafa.

Opomba. Graf H je minor grafa G natanko tedaj, ko H lahko dobimo z zaporedjem operacij: odstranevanje vozlišča, odstranevanje povezave, skčitev povezave v poljubnem vrstem redu.

Subdivizije povezav in glajenje vozlišč

Definicija. **Subdivizija** povezave $e \in E(G)$ je zamenjava povezave s potjo dolžine 2. Oznaka: $G^+(e)$.

Definicija. Graf H je **subdivizija** grafa G, če H lahko dobimo iz G z zaporedjem subdivizij povezav.

Opomba. Graf H je subdivizija grafa G, če vsako povezavo v G nadomestimo z neko potjo in vse te poti so paroma disjunktne po povezavih.

Definicija. Grafa G in H sta **homeomorfna**, če obstaja graf X, tako da G in H subdiviziji grafa X.

Definicija. Obratna operacija od subdivizije povezave, je **glajenje** vozlišča $w \in V(G)$ stopnje 2. Oznaka: $G^-(w)$.

Opomba. Grafa sta homeomorfna, če z glajenjem pridemo do istega grafa.

Kartezični produkt

Definicija. **Kartezični produkt** grafov $G_1 = (V_1, E_1)$ in $G_2 = (V_2, E_2)$ je graf $G = G_1 \square G_2$ z množico vozlišč $V(G) = V_1 \times V_2$ in relacijo sosednosti $\sim$, določeno s predpisom

$$(u_1, v_1) \sim_G (u_2, v_2) \Leftrightarrow (u_1 \sim_{G_1} u_2 \wedge v_1 = v_2) \vee (u_1 = u_2 \wedge v_1 \sim_{G_2} v_2).$$

Trditev. Naj bo G_1, G_2 in G_3 poljubni grafi in naj bo K_1 polni graf z enim vozliščem. Tedaj velja naslednje:
- $G_1 \square G_2 \cong G_2 \square G_1$.
- $(G_1 \square G_2) \square G_3 \cong G_1 (\square G_2 \square G_3)$.
- $G_1 \square K_1 \cong G_1$.

Dokaz. Poiščemo ustrezni izomorfizmi. $\square$

Lastnost asociativnosti nam omogoča, da definiramo pojem **kartezične potence grafa**. Za graf G in $n \in \mathbb{N}$ naj bo

$$G^{\square n} = \underbrace{G \square G \square \ldots \square G}_{n \text{ kopij}}.$$

Primer. $K_2^{\square n} = Q_n$.

2.11 Prerezna vozlišča in k-povezanost

Definicija. Naj bo G graf.
- Vozlišče $u \in V(G)$ je **prerezno**, če $\Omega(G - u) > \Omega(G)$.
- Povezava $f \in E(G)$ je **prerezna** ali **most**, če $\Omega(G - f) > \Omega(G)$.
- Množica vozlišč $S \subseteq V(G)$ je **prerez**, če $\Omega(G - S) > \Omega(G)$.
- Množica povezav $F \subseteq E(G)$, če **povezavni prerez**, če $\Omega(G - F) > \Omega(G)$.

Definicija. Graf G je **k-povezan**, če ima vsaj $k+1$ vozlišč in nima prerezov moči strogo manj kot k. **Povezanost** grafa G je največji k, za katerega je G k-povezan. Oznaka: $K(G)$.

Primer. Povezanost nekaterih grafov:
- $K(K_n) = n - 1$.
- $K(C_n) = 2,\ n \geq 3$.
- $K(Q_n) = n$.

Opomba. Naj bo G graf, potem $K(G) \leq \delta(G)$.

Definicija. Naj bo G graf, $u, v \in V(G)$. uv-poti P in Q sta **notranji-disjunktni**, če je $V(P) \cap V(Q) = \{u, v\}$.

Izrek (Whitney)**.** Graf G z vsaj 3 vozlišči je 2-povezan natanko tedaj, ko za vsak par vozlišč $u, v \in V(G),\ u \neq v$ obstajata dve notranji-disjunktni uv-poti.

Dokaz. ($\Leftarrow$) Pokažemo, da G nima prereza moči 1.
($\Rightarrow$) Naj bo $u, v \in V(G)$. Obstoj dokažimo z indukcijo po $d_G(u, v)$. $\square$

Izrek (Menger)**.** Naj bosta u in v dve nesosednji vozlišči povezanega grafa G. Tedaj je največje število notranje-disjunktnih poti med u in v v grafu G enako moči najmanjšega prereza S, za kateraga sta vozlišči u in v v različnih komponentah grafa $G - S$.

Posledica. Graf G z vsaj $k+1$ vozlišči je k-povezan natanko tedaj, ko za vsak par vozlišč $u, v \in V(G),\ u \neq v$ obstajata vsak k notranje-disjunktnih uv-poti.

2.12 Drevesa

Definicija. **Gozd** je graf brez ciklov. **Drevo** je povezan gozd. **List** je vozlišče stopnje 1.

Lema. Naj bo T drevo, $|V(T)| > 2$. Potem T premore list.

Dokaz. Če vozlišče ni list, potem ima vsaj enga novega soseda. □

Lema. Naj bo T drevo, potem $|E(T)| = |V(T)| - 1$.

Dokaz. Indukcija po $|V(T)|$. □

Lema. Naj bo G povezan graf in $e \in E(G)$ leži na nekem ciklu, potem je $G - e$ povezan graf.

Dokaz. Definicija povezanosti. □

Lema. Naj bo G povezan graf, potem je $|E(G)| \geq |V(G)| - 1$.

Dokaz. Lema 2 + Lema 3. □

Opomba. Drevesa so povezani grafi z najmanjšim številom povezav.

Izrek. Za graf G so ekvivalentne trditve:

1. G je drevo.
2. Za vsak par vozlišč v G obstaja enoličen pot med njima.
3. G je povezan in vsaka povezava je most.
4. G je povezan in $|E(G)| = |V(G)| - 1$.

Dokaz. (1. $\Rightarrow$ 2.) Kontropozicija.
(2. $\Rightarrow$ 3.) Kontropozicija.
(3. $\Rightarrow$ 4.) Indukcija na $|V(G)|$.
(4. $\Rightarrow$ 1.) Lema 4 in Lema 3. □

2.13 Vpeta drevesa

Definicija. **Vpeto drevo** grafa je vpet podgraf, ki je drevo.

Trditev. Graf je povezan natanko tedaj, ko vsebuje vpeto drevo.

Dokaz. ($\Leftarrow$) Enostavno.
($\Rightarrow$) Karakterizacija drevesa. □

Označimo z $\tau(G)$ število vpetih dreves grafa G.

Primer. $\tau(C_n) = n$.

Opomba. Sedaj obravnamo skrčitev povezave G/e tako, da vzporednih povezav ne odstranimo.

Trditev. Naj bo $e \in E(G)$, potem

$$\tau(G) = \tau(G - e) + \tau(G/e).$$

Dokaz. Naj bo T vpeto drevo v G. Imamo 2 možnosti: $e \notin T$ in $e \in T$. □

Definicija. Naj bo G graf. **Laplaceova matrika** $L(G)$ grafa G z množico vozlišč $V(G) = \{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ je $n \times n$ matrika, za katero velja:

$$L(G)_{ij} = \begin{cases} \deg(v_i); & i = j \\ -\text{število povezav med } v_i \text{ in } v_j; & i \neq j \end{cases}.$$

Izrek. Število vpetih dreves grafa G je enako determinante matrike, ki jo dobimo iz $L(G)$ tako, da izbrišemo vrstico in stolpec nekega vozlišča.

Izrek (Cayley)**.** $\tau(K_n) = n^{n-2}$

Dokaz. Determinanta. □

2.14 Eulerjevi in Hamiltonovi grafi

2.14.1 Eulerjevi grafi

Definicija. Sprehod v grafu je **Eulerjev**, če je enostaven in prehodi vse povezave. Sklenjen Eulerjev sprehod je **Eulerjev obhod**. Graf je **Eulerjev**, če premore Eulerjev obhod.

Izrek. Graf je Eulerjev natanko tedaj, ko je povezan in so vsa njegova vozlišča sode stopnje.

Dokaz. ($\Rightarrow$) Opazujemo poljuben Eulerjev obhod.
($\Leftarrow$) Indukcija po $|E(G)|$. Baza: Cikli. □

Izrek. Povezan graf premore Eulerjev sprehod natanko tedaj, ko ima kvečjemu dve vozlišči lihe stopnje.

Dokaz. Podobno kot prej. □

Fleuryjev algoritem Kako poiščemo Eulerjev obhod v poljubnem Eulerjevem grafu?

1. Začnemo v poljubnem vozlišču.
2. Za seboj brišemo povezave, ki smo jih prehodili.
3. Na vsakem koraku izberimo poljubno povezavo, pri tem pa pazimo le na to, da na most gremo le v premeru, če ni druge možnosti.

2.14.2 Hamiltonovi grafi

Definicija. **Hamiltonov cikel** grafa je cikel, ki vsebuje vsa vozlišča grafa. **Hamiltonov pot** je pot v grafu, ki vsebuje vsa vozlišča. Graf je **Hamiltonov**, če premore Hamiltonov cikel.

Izrek. Naj bo G Hamiltonov graf in $X \subseteq V(G)$. Tedaj je

$$\Omega(G - X) \leq |X|.$$

Dokaz. Narišemo Hamiltonov cikel. □

Primer. $K_{n,m}$ je Hamiltonov natanko tedaj, ko $n = m$.

Izrek (Ore)**.** Če je G povezan graf in za vsak par nesosednjih vozlišč $u, v \in V(G)$ velja

$$\deg(u) + \deg(v) \geq |V(G)|,$$

potem je G Hamiltonov.

Dokaz. Metoda najmanjšega proti primera: med vsemi protiprimeri izberimo takega, ki ima najmanj vozlišč, med vsemi taki, pa izberimo protiprimer, ki ima največ povezav. Poiščemo v tem grafu Hamiltonov cikel. □

Izrek (Dirac)**.** Naj bo G graf. Če $|V(G)| \geq 3$ in $\delta(G) \geq \frac{|V(G)|}{2}$, potem je graf G Hamiltonov.

2.15 Ravninski grafi

Definicija. Graf G je **ravninski**, če ga lahko narišemo v ravnini tako, da se povezave ne križajo. Ravninski graf skupaj z ustrezni risbi v ravnini, je graf **vložen v ravnino**.

Primer. $K_{2,3}$ je ravninski, $K_{3,3}$ pa ni ravninski.

Definicija. Naj bo G graf vložen v ravnino. Med seboj ločeni povezani območji imenujemo **lica**. Označimo z $F(G)$ množico vseh lic grafa.

Opomba. Graf lahko vložimo v ravnino natanko tedaj, ko ga lahko vložimo v sfero (obratno implikacijo naredimo z stereografsko projekcijo). Torej imamo še **zunanje lice**, ki je neomejeno v ravnini in omejeno na sfere.

Definicija. Vsako lice $f \in F(G)$ je omejeno s sklenjenim sprehodom v grafu G, ki mu rečemo **rob** lica f. Rob lica f označimo z ∂f, njegovo dolžino (tj. število povezav na robu lica) pa z $l(f)$.

Opomba. Vsaka povezava grafa G tipično leži na robu dveh lic, enega, ki leži na enem bregu povezave, in drugega, ki leži na drugem bregu. Izjemoma pa se lahko primeri, da ti dve lici sovpadata. V tem primeru pri računanju $l(f)$ take povezave štejemo dvakrat.

Trditev (Lema o rokovanju za ravninske grafe)**.** Če je G graf vložen v ravnino, potem je

$$2 \cdot |E(G)| = \sum_{f \in F(G)} l(f).$$

Definicija. Naj bo G graf, ki premore cikle. Potem je njegova **ožina** $g(G)$ je dolžina najkrajšega cikla v G.

Trditev. Če je G graf vložen v ravnino in ima vsaj en cikel, potem

$$|E(G)| \geq \frac{g(G)}{2}|F(G)|$$

Dokaz. Ožina grafa G je omejena z dolžino vsakega lica. □

Izrek (Eulerjeva formula)**.** Če je G vložen v ravnino, potem

$$|V(G)| - |E(G)| + |F(G)| = 1 + \Omega(G).$$

Dokaz. Naj bo $\Omega(G) = 1$. Dokazujemo za dani $|V(G)|$ z indukcijo po $|E(G)|$.
Če je $\Omega(G) > 1$ uporabimo formulo na vsake komponente posebej. □

Posledica. Naj bo G povezan graf vložen v ravnino. Potem

$$|V(G)| - |E(G)| + |F(G)| = 2.$$

Trditev. Naj bo G povezan graf vložen v ravnino. Potem

$$|E(G)| \leq \frac{g(G)}{g(G)-2}(|V(G)| - 2)$$

Dokaz. Uporabimo Eulerjevo formulo in oceno za $|E(G)|$. □

Opomba. Velja: $g(G) \geq 3$

Posledica. Naj bo G povezan graf vložen v ravnino. Potem

$$|E(G)| \leq 3|V(G)| - 6.$$

Posledica. Naj bo G povezan graf vložen v ravnino, ki nima trikotnikov. Potem

$$|E(G)| \leq 2|V(G)| - 4.$$

Primer. Ni ravninski grafi:
- K_5 ni ravninski (ima preveč povezav po 1. posledici).
- $K_{3,3}$ ni ravninski (ima preveč povezav po 2. posledici).

Izrek (Kuratowski)**.** Graf G je ravninski natanko tedaj, kadar ne vsebuje podgrafa, ki je subdivizija K_5 ali subdivizija $K_{3,3}$.

Dokaz. ($\Rightarrow$) Graf je ravninski natanko tedaj, ko je vsaka njegova subdivizija je ravninska. □

Primer. Ni ravninski grafi:
- Petersenov graf (ima subdivizijo $K_{3,3}$).
- $Q_4 = (K_2 \square K_2) \square (K_2 \square K_2)$ niso ravninski.

Izrek (Wagner)**.** Graf G je ravninski natanko tedaj, ki niti K_5 niti $K_{3,3}$ nista njegova minorja.

Primer. Tudi z Wagnerjevem izrekom lahko dokažemo, da Petersonov graf ni ravninski (K_5 je minor).