Analiza 2a

21. oktober 2024

1 Funkcije več spremenljivk

1.1 Prostor $\mathbb{R}^n$

1.1.1 Uvodni pojmi

$\mathbb{R}^n$ je vektorski prostor nad $\mathbb{R}$. Če je $x, y \in \mathbb{R}^n$, potem $x = (x_1, \dots, x_n)$, $y = (y_1, \dots, y_n)$.
Naj bo $\alpha \in \mathbb{R}$. Operaciji $x + y$ in αx sta definirani po komponentah.

Definicija 1.1. *Standardna baza* prostora $\mathbb{R}^n$ je množica $\{e_j;\ j = 1, \dots, n\}$, kjer $e_j = (0, \dots, 0, 1_j, 0, \dots, 0)$.

Opomba. V prostorah $\mathbb{R},\ \mathbb{R}^2,\ \mathbb{R}^3$ ponavadi koordinate točk označimo z x, y, z.

Definicija 1.2. Standardna baza prostora $\mathbb{R}^3$ je množica $\left\{\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\right\}$.

Definicija 1.3. *Standardni skalarni produkt vektrojev $x, y \in \mathbb{R}^n$* je $x \cdot y = \sum_{j=1}^n x_j y_j$.
Norma vektorja $x \in \mathbb{R}^n$ je $||x||_2 = \sqrt{x \cdot x} = \sqrt{x_1^2 + \ldots + x_n^2}$.
Razdalja med vektorjama $x, y \in \mathbb{R}^n$ je $d_2(x, y) = ||x - y||_2 = \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + \ldots + (x_n - y_n)^2}$.

Opomba. Standardno normo $||\cdot||$ bomo pisali kot $|\cdot|$.

Definicija 1.4. *Odprta krogla s središčem v $a \in \mathbb{R}^n$ in polmerom $r > 0$* je množica $K(a, r) = \{x \in \mathbb{R}^n;\ ||x - a|| < r\}$.
Zaprta krogla s središčem v $a \in \mathbb{R}^n$ in polmerom $r > 0$ je množica $K(a, r) = \{x \in \mathbb{R}^n;\ ||x - a|| \leq r\}$.
Sfera je množica $S(a, r) = \{x \in \mathbb{R}^n;\ ||x - a|| = r\}$

Metrični prostor $(\mathbb{R}^n, d_2)$ porodi topologijo na $\mathbb{R}^n$. Oznaki: D^{odp} je odprta množica, Z je zaprta množica.
Opomba. Metrična prostora $(\mathbb{R}^n, d_2)$ in $(\mathbb{R}^n, d_\infty)$ imata isto topologijo.

Izrek 1.1. *Naj bo $K \subset \mathbb{R}^n$, potem*

$$K \text{ je kompaktna} \Leftrightarrow K \text{ je zaprta in omejena.}$$

Definicija 1.5. Naj bo $a, b \in \mathbb{R}^n,\ a = (a_1, \dots, a_n),\ b = (b_1, \dots, b_n)$. Definiramo:

$$a \leq b \Leftrightarrow \forall j = 1, \dots, n\,.\, a_j \leq b_j.$$
$$a < b \Leftrightarrow \forall j = 1, \dots, n\,.\, a_j < b_j.$$

Definicija 1.6. Naj bo $a, b \in \mathbb{R}^n,\ a < b$. *Odprti kvader* (a, b) je množica $(a, b) = \{x \in \mathbb{R}^n;\ a < x < b\}$.
Naj bo $a, b \in \mathbb{R}^n,\ a \leq b$. *Zaprti kvader* $[a, b]$ je množica $[a, b] = \{x \in \mathbb{R}^n;\ a \leq x \leq b\}$.

Opomba. Dolžine stranic kvadra $[a, b]$ je $b_j - a_j$. Volumen kvadra $[a, b]$ je $\Pi_{j=1}^n (b_j - a_j)$.
Če so vse strani kvadra enaki, potem kvader je *kocka*.

1.1.2 Zaporedja v $\mathbb{R}^n$

Definicija 1.7. *Zaporedje v $\mathbb{R}^n$* je preslikava $a : \mathbb{N} \to \mathbb{R}^n$. Namesto $a(m)$ pišimo a_m, $a_m = (a_1^m, \dots, a_n^m)$.

Opomba. Zaporedje v $\mathbb{R}^n$ porodi n zaporedij v $\mathbb{R}$.

Trditev 1.2. *Naj bo $(a_m)_m$ zaporedje v $\mathbb{R}^n$, $a_m = (a_1^m, \dots, a_n^m)$. Velja:*

$$\text{Zaporedje } (a_m)_m \text{ konvergia } \Leftrightarrow \text{ konvergira zaporedja } (a_1^m)_m, \dots, (a_n^m)_m.$$

V primeru konvergence velja:

$$\lim_{m \to \infty} a_m = (\lim_{m \to \infty} a_1^m, \dots, \lim_{m \to \infty} a_n^m).$$

Dokaz. Definicija limite. □

1.2 Zveznost preslikav iz $\mathbb{R}^n$ v $\mathbb{R}^m$

1.2.1 Zveznost preslikav iz $\mathbb{R}^n$ v $\mathbb{R}$

Opomba. Če je $m = 1$, potem preslikave rečemo *funkcija.*

Definicija 1.8. Naj bo $f : D \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ preslikava. Naj bo $a \in D$. *Preslikava f je zvezna v a*, če

$$\forall \epsilon > 0 \,.\, \exists \delta > 0 \,.\, \forall x \in D \,.\, d(x, a) \Rightarrow d(f(x), f(a)).$$

Definicija 1.9. Naj bo $f : D \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ preslikava. Preslikava f je *zvezna na D*, če je zvezna v vsaki točki $a \in D$.

Definicija 1.10. Naj bo $f : D \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ preslikava. Preslikava f je *enakomerno zvezna na D*, če

$$\forall \epsilon > 0 \,.\, \exists \delta > 0 \,.\, \forall x, x' \in D \,.\, d(x, x') < \delta \Rightarrow d(f(x), f(x')) < \epsilon.$$

Opomba. Velja karakterizacija zveznosti v točki z zaporedji.

Opomba. Zvezna preslikava na kompaktne množice je enakomerno zvezna.

Definicija 1.11. Preslikava $f : D \to X'$ je *C-lipschitzova*, če

$$\forall x, x' \in D \,.\, d'(f(x), f(x')) \leq C d(x, x').$$

Trditev 1.3. *Za preslikavo $f : D \to X'$ velja:*

$$f \text{ je } C\text{-lipschitzova } \Rightarrow f \text{ je enakomerno zvezna } \Rightarrow f \text{ je zvezna.}$$

Trditev 1.4. *Naj bosta $f, g : D \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ zvezni funkciji v $a \in D$. Naj bo $\lambda \in \mathbb{R}$. Tedaj so v a zvezni tudi funkcije:*

$$f + g, \;\; f - g, \;\; \lambda f, \;\; fg.$$

Dokaz. Z zaporedji kot pri analizi 1. □

Zgled. Nekaj primerov zveznih preslikav.
- Preslikava $\Pi_j(x_1, \dots, x_n) = x_j$ je zvezna na $\mathbb{R}^n$ za vsak $j = 1, \dots, n$.
- Vsi polinomi v n-spremenljivkah so zvezne funkcije na $\mathbb{R}^n$.
- Vse racionalne funkcije so zvezne povsod, razen tam, kjer je imenovalec enak 0.

Definicija 1.12. Preslikava $f : D \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ je *funkcija n-spremenljivk.*

Opomba. Naj bo (M, d) metrični prostor in $N \subset M$. Naj bo $f : M \to \mathbb{R}$ zvezna funkcija na M. Potem $f|_N$ je tudi zvezna funkcija na N.

Trditev 1.5. *Naj bosta $D \subseteq \mathbb{R}^n$ in $D_j = \Pi_j(D)$. Naj bo $a \in D$, $a = (a_1, \dots, a_n)$ in $f : D \to \mathbb{R}$ zvezna v a. Tedaj za vsak $j = 1, \dots, n$ funkcija $\varphi_j : D_j \to \mathbb{R}$, $\varphi_j(t) = f(a_1, \dots, a_{j-1}, t, a_{j+1}, \dots, a_n)$ zvezna v a_j.*

Dokaz. Definicija zveznosti v točki. □

Opomba. Če je funkcija več spremenljivk zvezna v neki točki $a \in \mathbb{R}^n$, je zvezna tudi kot funkcija posameznih spremenljivk.

Zgled. Naj bo $f(x, y) = \begin{cases} \frac{2xy}{x^2+y^2}; & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0; & (x, y) = (0, 0) \end{cases}$. Ali je f zvezna kot funkcija vsake spremenljivke posebej? Ali je f zvezna na $\mathbb{R}^2$?

Zgled. Naj bo $f(x, y) = \begin{cases} \frac{2x^2y}{x^4+y^2}; & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0; & (x, y) = (0, 0) \end{cases}$. Ali je f zvezna kot funkcija vsake spremenljivke posebej? Ali je zvezna na vsaki premici? Ali je f zvezna na $\mathbb{R}^2$?

Opomba. Zgleda pokažeta, da obrat v prejšnji trditvi ne velja.

1.2.2 Zveznost preslikav iz $\mathbb{R}^n$ v $\mathbb{R}^m$

Naj bo $D \subseteq \mathbb{R}^n$ in $F : D \to \mathbb{R}^m$ preslikava. Naj bo $x \in D$, potem $F(x) \in \mathbb{R}^m,\ F(x) = y = (y_1, \ldots, y_m)$.
Lahko pišemo $F(x) = (f_1(x), \ldots, f_m(x))$. Torej F določa m funkcij n-spremenljivk.

Trditev 1.6. *Naj bo $a \in D \subseteq \mathbb{R}^n$. Naj bo $F = (f_1, \ldots, f_m) : D \to \mathbb{R}^m$ preslikava. Velja:*

$$\textit{Preslikava } F \textit{ je zvezna v } a \Leftrightarrow f_1, \ldots, f_m \textit{ so zvezne v } a.$$

Dokaz. Definicija zveznosti v točki. □

Opomba. Linearne preslikave so zvezne, saj so vse koordinatne funkcije linearne (polinomi 1. stopnje).

Zgled (Omejenost linearnih preslikav). Naj bo $\mathcal{A} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ linearna preslikava, potem

$$\exists M \in \mathbb{R} \,.\, M \geq 0 \,.\, \forall x \in \mathbb{R}^n \,.\, x \neq 0 \,.\, \frac{|\mathcal{A}x|}{|x|} \leq M.$$

Lahko zapišemo $\sup \frac{|\mathcal{A}x|}{|x|} = \sup_{|x|=1} |\mathcal{A}x| = ||A||$. Dobimo normo na matrikah.
Trdimo: Naj bo $\mathcal{A} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ linearna preslikava. Tedaj je $\mathcal{A}$ zvezna na $\mathbb{R}^n$. Zveznost linearnih preslikav je ekvivalentna zveznosti v točki 0. Vse skupaj je ekvivalentno omejenosti linearnih preslikav.

Dokaz. Definicija zveznosti in omejenosti. □

Definicija 1.13. Naj bo $\mathcal{A} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ linearna preslikava. Preslikavo $\mathcal{A} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m,\ x \mapsto \mathcal{A}x + b,\ b \in \mathbb{R}^m$ imenujemo *afina preslikava.*

1.3 Parcialni odvodi in diferenciabilnost

1.3.1 Parcialni odvod

Definicija 1.14. Naj bo $f : D \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ funkcija. Naj bo $a = (a_1, \ldots, a_n) \in D$ notranja točka. Funkcija f je *parcialno odvedljiva* po spremenljivki x_j v točki a, če obstaja limita

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(a_1, \ldots, a_{j-1}, a_j + h, a_{j+1}, \ldots, a_n) - f(a_1, \ldots, a_n)}{h},$$

oz. če je funkcija

$$x_j \mapsto f(a_1, \ldots, a_{j-1}, x_j, a_{j+1}, \ldots, a_n)$$

odvedliva v točki a_j.
Če je ta limita obstaja, je to *parcialni odvod* funkcije f po spremenljivki x_j v točki a. Oznaki: $\frac{\partial f}{\partial x_j}(a),\ f_{x_j}(a),\ (D_j f)(a)$.

Opomba. Vse elementarne funkcije so parcialno odvedljive po vseh spremenljivkah tam, kjer so definirane.

Zgled. Naj bo $f(x, y, z) = e^{x+2y} + \cos(xz^2)$. Potem $f_x(x, y, z) = \frac{\partial f}{\partial x}(x, y, z) = e^{x+2y} - z^2 \sin(xz^2)$.

1.3.2 Diferenciabilnost

Definicija 1.15. Naj bo $f : D \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ funkcija. Naj bo $a = (a_1, \ldots, a_n) \in D$ notranja točka. Funkcija f je *diferenciabilna* v točki a, če obstaja tak linearen funkcional $\mathcal{L} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, da velja:

$$f(a + h) = f(a) + \mathcal{L}(h) + o(h),$$

kjer $\lim_{h \to 0} \frac{|o(h)|}{|h|} = 0$.

Opomba. Če je tak $\mathcal{L}$ obstaja, je enolično določen.

Dokaz. Pokažemo, da iz $\mathcal{L}(h) = (\mathcal{L}_1 - \mathcal{L}_2)(h) = (o_2 - o_1)(h) = o(h)$ sledi, da je $L = 0$. Zato uporabimo vektor $v = tv_0$, kjer $|v_0| = 1,\ |v| = t$ na linearnem funkcionalu $\mathcal{L}$. □

Definicija 1.16. Če je f diferenciabilna v a je $\mathcal{L}$ natanko določen in ga imenujemo *diferencial* funkcije f v točki a. Oznaka: $\mathcal{L} = df_a$. Linearen funkcional $\mathcal{L}$ imenujemo tudi *odvod* funkcije f v točki a. Oznaka: $(Df)(a)$.

Opomba. Recimo, da je funkcija f diferenciabilna v točki a. Preslikava $h \mapsto f(a) + (df_a)(h)$ je najboljša afina aproksimacija funkcije $h \to f(a + h)$.

Trditev 1.7. *Naj bo $f : D \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ diferenciabilna v notranji točki $a \in D$. Tedaj je f v a parcialno odvedljiva po vseh spremenljivkah. Poleg tega je zvezna v a. Pri tem za $h = (h_1, \ldots, h_n)$ velja:*

$$(df_a)(h) = \frac{\partial f}{\partial x_1}(a) \cdot h_1 + \ldots + \frac{\partial f}{\partial x_n}(a) \cdot h_n = f_{x_1}(a) \cdot h_1 + \ldots + f_{x_n}(a) \cdot h_n$$

Opomba. Naj bo $\mathcal{L} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ linearen funkcional, $x \in \mathbb{R}^n$, potem $\mathcal{L}(x) = l_1 x_1 + \ldots + l_n x_n = \begin{bmatrix} l_1 & \ldots & l_n \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$, kjer $\begin{bmatrix} l_1 & \ldots & l_n \end{bmatrix}$ matrika linearnega funkcionala glede na standardne baze.

Dokaz. Zveznost pokažemo z limito. Za parcialno odvedljivost poglejmo kaj se dogaja za $h = (h_1, 0, \ldots, 0)$. □

Opomba. Trditev pove, da je $(df_a)(h) = \begin{bmatrix} \frac{\partial f}{\partial x_1}(a) & \ldots & \frac{\partial f}{\partial x_n}(a) \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} h_1 \\ \vdots \\ h_n \end{bmatrix} = (\frac{\partial f}{\partial x_1}(a), \ldots, \frac{\partial f}{\partial x_n}(a)) \cdot (h_1, \ldots, h_n)$.

Zapis: $(\vec{\nabla} f)(a) = (\operatorname{grad} f)(a) = (\frac{\partial f}{\partial x_1}(a), \ldots, \frac{\partial f}{\partial x_n}(a))$.
Vektor $(\operatorname{grad} f)(a)$ imenujemo *gradient funkcije* f v točki a. Operator $\vec{\nabla} = (\frac{\partial}{\partial x_1}, \ldots, \frac{\partial}{\partial x_n})$ je *operator Nabla.*

Zgled. Naj bo $f(x,y) = \begin{cases} \frac{2xy}{x^2+y^2}; & (x,y) \neq (0,0) \\ 0; & (x,y) = (0,0) \end{cases}$. Ali je f diferenciabilna?

Zgled. Naj bo $f(x,y) = \begin{cases} \frac{2x^2y}{x^2+y^2}; & (x,y) \neq (0,0) \\ 0; & (x,y) = (0,0) \end{cases}$. Ali je f zvezna? Ali je f parcialno odvedljiva? Ali je f diferenciabilna?

Opomba. Zgleda pokažeta, da obrat v prejšnji trditvi ne velja

Izrek 1.8. *Naj bo $f : D \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ funkcija in naj bo $a \in D$ notranja točka. Denimo, da je f parcialno odvedljiva po vseh spremenljivkah v okolici točke a in so parcialni odvodi zvezni v a. Tedaj je f diferenciabilna v a.*

Dokaz. Za $n = 2$. Definicija diferenciabilnosti + 2-krat Lagrangeev izrek. □

1.3.3 Višji parcialni odvodi

Naj bo $f : D^{\text{odp}} \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ funkcija. Denimo, da je f parcialno odvedljiva po vseh spremenljivkah na D: $f_{x_1}, \ldots, f_{x_n}$. To so tudi funkcije n-spremenljivk in morda so tudi te parcialno odvedljive po vseh oz. nekatareih spremenljivkah.

Trditev 1.9. *Naj bo funkcija f definirana v okolici $a \in \mathbb{R}^n$. Naj bosta $i, j \in \{1, 2, \ldots, n\}$. Denimo, da na tej okolici obstajata $\frac{\partial f}{\partial x_i}$, $\frac{\partial f}{\partial x_j}$ in tudi druga odvoda $\frac{\partial}{\partial x_j}(\frac{\partial f}{\partial x_i})$, $\frac{\partial}{\partial x_i}(\frac{\partial f}{\partial x_j})$. Če sta $\frac{\partial}{\partial x_j}(\frac{\partial f}{\partial x_i})$, $\frac{\partial}{\partial x_i}(\frac{\partial f}{\partial x_j})$ zvezna v a, potem sta enaka v točki a:*

$$\frac{\partial}{\partial x_j}\left(\frac{\partial f}{\partial x_i}\right)(a) = \frac{\partial}{\partial x_i}\left(\frac{\partial f}{\partial x_j}\right)(a).$$

Dokaz. Dovolj za $n = 2$.
Definiramo $J = f(a+h, b+k) - f(a+h, b) - f(a, b+k) + f(a, b)$ in $\varphi(x) = f(x, b+k) - f(x, b)$, $\psi(y) = f(a+h, y) - f(a, y)$.
Zapištemo J s pomočjo funkcij φ, ψ ter porabimo 2-krat Lagrangeev izrek in upoštevamo zveznost. □