

# 1 Prostori in preslikave

## 1.1 Topološki prostori

### 1. Topološki prostori

- **Definicija.** Topologija. Odprte množice.
- **Definicija.** Topološki prostor.
- **Definicija.** Naj bo  $(X, \mathcal{T})$  prostor,  $A \subseteq X$ . **Okolica** točke  $x$ .  $x$  je **notranja** točka  $A$ .  $x$  je **mejna** točka  $A$ . Notranjost  $A$ . Meja  $A$ . Zaprtje  $A$ .  $A$  je **odprta**.  $A$  je **zaprta**.  $x$  je **stekališče**  $A$ .  $x = \lim_{x_n}$ .
- **Primer.** Naj bo  $(X, d)$  metrični prostor. **Porojena (inducirana)** topologija z metriko  $d$ . **Metrizabilen** prostor.
- **Primer.** Trivialna topologija. Diskretna topologija.
- **Primer.** Kaj velja za poljubno družino zaprtih množic? **Topologija končnih komplementov**.
- **Primer.** Kakšna zvezna med  $\overline{A \cup B}$  in  $\overline{A} \cup \overline{B}$  ter med  $\overline{A \cap B}$  in  $\overline{A} \cap \overline{B}$ ?

## 2 Topološke lastnosti

### 2.1 Ločljivost

Naj bo  $(X, \mathcal{T})$  topološki prostor.

#### 1. Hausdorffovi in Frechetovi prostori

- **Definicija.** Kadar pravimo, da  $\mathcal{T}$  loči  $A \subseteq X$  od  $B \subseteq X$ ?
- **Definicija.** Kadar pravimo, da  $\mathcal{T}$  ostro loči  $A \subseteq X$  od  $B \subseteq X$ ?
- **Primer.** Ali je trivialna topologija loči množice? Kaj pa diskretna?
- **Primer.** Kaj je zaprtje podmnožice  $A \subseteq X$  v jeziku ločljivosti?
- **Definicija.** Hausdorffov prostor.
- **Primer.** Ali so Hausdorffovi:
  - Metrični prostori.
  - $(X, \mathcal{T}_{kk})$ ,  $X$  je neskončna.
- **Trditev.** 3 ekvivalentne trditve o Hausdorffovih prostorih. **Diagonala v produktu.**
- **Izrek.** Lastnosti Hausdorffovih prostorov:
  - (a) Kaj lahko povemo o končnih množicah?
  - (b) Koliko limit lahko ima zaporedje v Hausdorffovem prostoru?
  - (c) Naj bosta  $f, g : X \rightarrow Y^{\text{Haus}}$  preslikavi. Kaj lahko povemo o množici  $\{x \in X \mid f(x) = g(x)\}$ ?
  - (d) Naj bosta  $f, g : X \rightarrow Y^{\text{Haus}}$  preslikavi. Kaj če se  $f, g$  ujemata na kakšne goste podmnožice  $A \subseteq X$ ?
  - (e) Kaj lahko povemo o grafu preslikave  $f : X \rightarrow Y^{\text{Haus}}$ ?
- **Definicija.** Frechetov prostor.
- **Primer.** Ali so Hausdorffovi prostori Frechetovi? Ali je trivialen prostor Frechetov?
- **Trditev.** Karakterizacija Frechetova prostora (enojčki).
- **Definicija.** Multiplikativna lastnost.
- **Trditev.** Ali sta Hausdorffova in Frechetova lastnosti dedni in multiplikativni?

#### 2. Regularnost in normalnost

- **Definicija.** Regularen prostor.
- **Definicija.** Normalen prostor.
- **Primer.** V kakšni povezavi so normalnost, regularnost, Hausdorff in Frechet?
- **Primer.** Naj bo  $(X, \mathcal{T})$  Hausdorffov in  $\mathcal{T} \subseteq \mathcal{T}'$ . Ali je  $(X, \mathcal{T}')$  Hausdorffov? Ali je Hausdorffova lastnost implicira regularnost?
- **Trditev.** Ali je vsak metričen prostor normalen?
- **Trditev.** Ali je regularnost dedna?
- **Trditev.** Naj bo  $X$  normalen. Kaj je zadostni pogoj, da bi bil  $A \subseteq X$  normalen?

#### 3. Aksiomi ločljivosti

- **Aksiom.** Aksiomi  $T_0 - T_4$ .
- **Opomba.** Kako s aksiomi se izraža regularnost in normalnost? Kaj je  $T_0, T_1, T_2$ ?
- **Primer.** Zapiši, kaj iz česa sledi.
- **Trditev.** Karakterizacija  $T_3$ .
- **Trditev.** Karakterizacija  $T_4$ .
- **Trditev.** Ali je  $T_3$  multiplikativna?
- **Posledica.** Ali je regularnost multiplikativna?
- **Izrek.** Izrek Tihonova. Zadostni pogoj za normalnost prostora.

### Rezultati z vaj

- Ali je  $T_4$  multiplikativna? Ali je normalnost multiplikativna?

## 2.2 Povezanost

Naj bo  $(X, \mathcal{T})$  topološki prostor.

### 1. Povezanost

- **Definicija.** Nepovezan prostor.
- **Definicija.** Povezan prostor.
- **Trditev.** 4 ekvivalentne trditve o nepovezanosti.
  - **Opomba.** Kaj pravi trditev o povezanosti?
- **Izrek.** Karakterizacija povezanosti v  $\mathbb{R}$ .
- **Izrek.** Ali je povezanost topološka lastnost?
- **Izrek.** Lastnosti povezanosti:
  - (a) Kaj lahko povemo o uniji družine povezanih podmnožic v  $X$ , ki imajo neprazen presek?
  - (b) Ali je povezanost multiplikativna?
  - (c) **Pot v X.** Zadostni pogoj za povezanost prostora.
  - (d) Recimo, da je  $A$  povezan. Kaj lahko povemo o vsaki množici  $B$ , za katero velja  $A \subseteq B \subseteq \bar{A}$ ?
- **Primer.** Ali so povezane:
  - Vsaka konveksna podmnožica v  $\mathbb{R}^n$ .
  - Komplement končne množice v  $\mathbb{R}^n$ ,  $n > 1$ .
  - Komplement števne množice v  $\mathbb{R}^n$ ,  $n > 1$ .
- **Primer.** Ali je  $\mathbb{R} \approx \mathbb{R}^n$ ,  $n > 1$ ?
- **Izrek.** Izrek o vmesni vrednosti.

### 2. Povezanost s potmi

- **Primer.** Kaj je varšavski lok (oz. lok Sierpinskega)?
- **Definicija.** Kadar rečemo, da je  $X$  povezan s potmi?
- **Trditev.** Zadostni pogoj za povezanost  $X$ .
  - **Opomba.** Ali velja implikacija v nasprotno smer?

### 3. Komponente