1 ODVOD

Iskanje globalnih ekstremov (nalogi 3 – 7)

Vsaka zvezna funkcija f na omejenem zaprtem intervalu $[a, b]$ doseže svojo minimalno in maksimalno vrednost. Če je funkcija f še razmeroma gladka, lahko ti dve vrednosti poiščemo s pomočjo odvoda. Pri iskanju ekstremnih vrednosti najprej zožimo nabor morebitnih kandidatov na naslednje tipe točk z intervala $[a, b]$:

- stacionarne točke funkcije f v (a, b) ($x \in (a, b)$, $f'(x) = 0$).
- robni točki intervala $[a, b]$.
- točke na intervalu (a, b), v katerih funkcija f ni odvedljiva.

Nato pa izračunamo vrednosti f v kandidatih in izberimo min/maks vrednost.
Ko optimiziramo kakšne geometrijske/fizikalne probleme:

- Formuliramo funkcijo, ki je odvisna samo od enega parametra in modelira naš problem.
- Poiščemo ekstreme te funkcije.

Ko iščemo ekstreme funkcij, ki so definirane z evklidsko razdaljo, je ponavadi lažje obravnavati funkcijo $f = d^2$.

Geometrijski pomen odvoda. Tangente. Kot med funkcijama (nalogi 8 – 12)

Enačba tangente na graf funkcije f v točki $(a, f(a))$: $y = f'(a)(x - a) + f(a)$.
Enačba normale na graf funkcije f v točki $(a, f(a))$: naklon: $k_t \cdot k_n = -1$; enačbo dobimo iz zveze $f(a) = k_n a + b$.
Kot med krivuljama je kot med tangentoma v presičišču: $\tan \varphi = \dfrac{k_2 - k_1}{1 + k_1 k_2}$
Enačbo krivulje lahko implicitno odvajamo:

- x-e odvajamo kot običajno.
- y-e odvajamo kot ponovadi + dodamo faktor y'.

Nato pa izrazimo y'. Koeficient k bo odvisen od x in y.

Zveznost. Odvedljivost. Zvezna odvedljivost (nalogi 16 – 18)

Funkcija f je zvezna v točki $a \Leftrightarrow f(a) = \lim_{x \to a} f(x)$. Zlepek funkcij f_1 in f_2 bo zvezen v točki $a \Leftrightarrow f_1(a) = f_2(a)$. Zlepek funkcij f_1 in f_2 bo odvedlkiv v točki $a \Leftrightarrow f_1'(a) = f_2'(a)$.
Funkcija f je odvedljiva v točki a, ko obstaja limita $f'(a) = \lim_{h \to 0} \dfrac{f(a + h) - f(a)}{h}$.

Rollov in Lagrangeev izrek (nalogi 19 – 23)

Rollov izrek. Naj bo funkcija $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ zvezna na $[a, b]$ in odvedljiva na (a, b). Če je $f(a) = f(b)$, potem obstaja $c \in (a, b)$, za katero velja $f'(c) = 0$.
Lagrangeev izrek. Naj bo funkcija $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ zvezna na $[a, b]$ in odvedljiva na (a, b). Potem obstaja $c \in (a, b)$, za katero velja

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a} \quad \text{ali} \quad f(b) - f(a) = f'(c)(b - a).$$

Funkcija je Lipschitzeva, če obstaja konstanta C, da za vsaka $x, y \in \mathbb{R}$ velja $|f(x) - f(y)| \leq C|x - y|$. Vsaka Lipschitzeva funkcija na $\mathbb{R}$ je enakomerno zvezna na $\mathbb{R}$.
Če funkcija f ima omejen odvod na I, potem je funkcija f enakomerno zvezna na I.

L'Hospitalovo pravilo (nalogi 24 – 25)

TODO

Risanje grafov podanih eksplicitno (nalogi 26 – 27)

1. D_f, ničle, poli, lin. asimtote ($k = \lim_{x \to \infty} \frac{f(x)}{x}$, $b = \lim_{x \to \infty} (f(x) - kx)$), limite na robu D_f.
2. 1. odvod: stacionarne točke ($f'(x) = 0$, $f'(x)$ ni definirana), lokalni ekstremi, intervali naraščanja/padanja, tangente na robu D_f.
3. 2. odvod: prevoji in intervali konveksnosti (вогнутости)/konkavnosti (выпуклости).

Risanje parametrično podanih krivulj (naloge 28 – 32)

1. Skiciramo grafa obeh komponent.
2. Tabeliramo položaje, ki ustrezajo stacionarnim točkam obeh komponent in po potrebi dodamo še kakšno točko.
3. Z upoštevanjem grafov komponent skiciramo krivuljo (se splača pogledati intervali med stacionarnimi točkami + v neskončnosti).

- Krivulje, ki so podane parametrično, lahko tudi puskusimo zapisati eksplicitno/implicitno, da ugotovimo, po kateri trajektoriji se giblje točka ali kar koli drugega, kar je potrebno.
- Če je neka komponenta gre proti neskončno se splača pogledati, ali ima krivulja kakšne asimptote tako, da pogledamo limite obeh komponent v „zanimivih“ točkah.
- Poševno asimtoto dobimo tako, da izračunamo limite: $k(t) = \lim_{t \to a} \dfrac{\dot{y}(t)}{\dot{x}(t)}$ in $b = \lim_{t \to a} (y(t) - k(t)x(t))$, kjer je a točka, v kateri komponenti gresta v neskončnost.

Računanje tangent v parametrični obliki. Vektor $\vec{r}\,'(a)$ je *smerni vektor* tangente na krivuljo v položaju $\vec{r}(t)$ (v primeru, ko je $\vec{r}\,'(a) \neq 0$). Če pišemo $\vec{r}\,'(a) = (\dot{x}, \dot{y})$, potem: (1) če je $\dot{x} = 0$, potem tangenta navpična; (2) če je $\dot{x} \neq 0$, potem $k = \dfrac{\dot{y}}{\dot{x}}$.

Risanje krivulj podanih v polarne oblike (naloge $33-35$)

Funkcija $r = r(\varphi)$ nam pove, kako daleč od $(0,0)$ je točka na krivulji, ki leži v smeri φ.

1. Skiciramo graf $r = r(\varphi)$.
2. S pomočjo grafa analiziramo gibanje točke, ki kroži okoli izhodišča in mu približuje ali oddaljuje.

- Če je $r(\varphi) < 0$, v tej smeri ne narišemo krivulje.
- Asimptote dobimo tako, da zapišemo krivuljo v parametrični obliki s parametrom φ in poglejmo, kaj se dogaja z $x(\varphi),\ y(\varphi)$.
- Polarna oblika je poseben primer parametrične oblike, kjer za parameter vzamemo polarni kot φ:
  $x(\varphi) = r(\varphi)\cos(\varphi),\ y(\varphi) = r(\varphi)\sin(\varphi)$.
- Implicitno krivuljo lahko zapišemo v polarni obliki tako, da napišemo $x = r\cos\varphi,\ y = r\sin\varphi$ in poskusimo izraziti r s φ.

Računanje tangent v polarni obliki. 1. Krivuljo parametiziramo. 2. Računamo tangento krivulje v parametrične oblike.

2 NEDOLOČENI INTEGRAL

Splošni metodi za integracijo (naloge $1-5,\ 13-14$)

- Tabela. Явное уравнение с интегралом.
- Z uvedbo primerne nove spremenljivke poskušamo integral prevesti na takšnega, ki ga znamo izračunati: (1) Uvedemo novo spremenljivko t; (2) Izračunamo dt; (3) Na koncu vstavimo začetno vrednost nove spremenljivke t.
  - В подынтегральном выражении должна находиться некоторая функция $f(x)$ и ее производная $f'(x)$.
  - Можно заменить переменную x на тригонометрическую или гиперболическую функцию.
- Pri integraciji po delih uporabljamo formulo $\int u\,dv = uv - \int v\,du$:
  (1) Za dv izberimo nekaj, kar že znamo integrirati; (2) Za u izberimo nekaj, kar se morda pri odvajanju poenostaviti. Обычно это произведение функций, например:
  - Логарифм, умноженный на многочлен (за u обозначим логарифм).
  - Экспонента (показательная функция), умноженная на многочлен (за u обозначим многочлен).
  - Тригонометрическая функции, умноженные на многочлен (за u обозначим многочлен).
  - Обратные тригонометрические функции, умноженные на многочлен (за u обозначим обратную триг. функцию).

Integracija racionalnih funkcij (naloge $6-7$)

1. Razcep na parcialne ulomke

1. Z deljenjem zapišemo $R(x) = p(x) + \dfrac{r(x)}{q(x)}$, kjer je st$r <$ st$q$.
2. Faktoriziramo q na produkt linearnih in nerazcepnih kvadratnih faktorjev.
3. Funkcijo $\frac{r(x)}{q(x)}$ zapišemo kot vsoto parcialnih ulomkov s pomočjo nastavkov:

$$\bullet\ \frac{1}{(x-a)^k} \rightsquigarrow \frac{A_1}{x-a} + \frac{A_2}{(x-a)^2} + \ldots + \frac{A_k}{(x-a)^k} \qquad \bullet\ \frac{1}{(x^2+bx+c)^l} \rightsquigarrow \frac{B_1 + C_1 x}{x^2+bx+c} + \ldots + \frac{B_l + C_l x}{(x^2+bx+c)^l}$$

   Število neznak je enako stopnje polinoma q!
4. Integriramo vsak parcialni ulomek posebej. Vemo: $\displaystyle\int \frac{dx}{a^2+b^2x^2} = \frac{1}{ab}\arctan\left(\frac{bx}{a}\right) + C$. Težko integrirati člen $\dfrac{1}{(x^2+bx+c)^k}$!

2. Metoda nastavka

1. Koraka 1-2 sta enaka kot prej.
2. Uporabimo nastavek:

$$\bullet\ \frac{1}{(x-a)^k} \rightsquigarrow A\ln|x-a| \qquad \bullet\ \frac{1}{(x^2+bx+c)^l} \rightsquigarrow B\ln|x^2+bx+c| + C\arctan\frac{2x+b}{\sqrt{4c-b^2}} \qquad \bullet\ \frac{\widetilde{r}(x)}{\widetilde{q}(x)},$$

   kjer polinom $\widetilde{q}$ dobimo iz polinoma q z znižanjem potence vsakega faktorja za ena, polinom $\widetilde{r}$ pa ima stopnji za eno nižjo kot $\widetilde{q}$. Število neznak je enako stopnje polinoma q!
3. Odvajamo obe strani in izračunamo koeficiente.

Integracija korenckih funkcij (naloge $8-10$)

- Integrale oblike $\displaystyle\int R\Big(x, \sqrt[n]{\frac{ax+b}{cx+d}}\Big)\,dx$ integriramo z uvedbo nove spremenljivke $t = \sqrt[n]{\frac{ax+b}{cx+d}}$. Tako dobimo integral racionalne funkcije v spremenljivke t. Tu R je racionalna funkcija dveh spremenljivk. To pomeni, da imamo izraze, ki jih dobimo iz x, $\sqrt[n]{\frac{ax+b}{cx+d}}$, const, $+, -, \cdot, :$.
- Pri uvedbe nove spremenljivke za izračun dx se splača eksplicitno izraziti x kot funkcijo t.
- Integrale oblike $\displaystyle\int \frac{p(x)}{\sqrt{ax^2+bx+c}}\,dx$ računamo z postopkom:
  1. Če je p konstanta, z zapisom v temenski obliki integral prevedemo:

$$\bullet\ \int \frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}} = \arcsin\left(\frac{x}{a}\right) + C \qquad \bullet\ \int \frac{dx}{\sqrt{x^2-a^2}} = \ln|x + \sqrt{x^2-a^2}| + C \qquad \bullet\ \int \frac{dx}{\sqrt{x^2+a^2}} = \ln|x + \sqrt{x^2+a^2}| + C$$

  2. Če je p poljuben, pa uporabimo nastavek:

$$\int \frac{p(x)}{\sqrt{ax^2+bx+c}}\,dx = \widetilde{p}(x)\sqrt{ax^2+bx+c} + \int \frac{K\,dx}{\sqrt{ax^2+bx+c}},$$

     kjer $\widetilde{p}$ ima stopnjo 1 manj kot p in je K konstanta.
- Integrale oblike $\displaystyle\int R\left(x, \sqrt{ax^2+bx+c}\right)dx$ vedno lahko z univerzalno substitucijo prevedemo na integral racionalne funkcije:

$$\bullet\ a > 0:\ \sqrt{ax^2+bx+c} = \sqrt{a}(u-x) \qquad \bullet\ a < 0:\ \sqrt{ax^2+bx+c} = \sqrt{-a}(x-x_1)u,$$

  kjer je x_1 ničla kvadratne funkcije. Ta metoda v principu vedno deluje, ni pa nujno najbolj optimalna.
- Pri integralih oblike $\displaystyle\int \frac{dx}{(x+\alpha)^k\sqrt{ax^2+bx+c}}$ se splača uvesti novo spremenljivko $t = \frac{1}{x+\alpha}$.

Integracija trigonometričnih funkcij (naloge $11-12$)

- Integrale oblike $\int \sin^p x \cos^q x \, dx$, kjer sta $p, q \in \mathbb{Z}$, računamo s substitucijo:
  - Če je p lih, vzamemo novo spremenljivko $t = \cos x$.
  - Če je q lih, vzamemo novo spremenljivko $t = \sin x$.
  - Če sta p in q oba soda, z uporabo formul za dvojne kote znižamo red potenc, dokler ne pridemo do lihih potenc.
- Integrale oblike $\int R(\sin x, \cos x)\, dx$ lahko z univerzalno trigonometrično substitucijo $t = \tan\left(\frac{x}{2}\right)$ prevedemo na integral racionalne funkcije spremenljivke t. Pri tem:

  - $dx = \dfrac{2dt}{1+t^2}$
  - $\cos x = \dfrac{1-t^2}{1+t^2}$
  - $\sin x = \dfrac{2t}{1+t^2}$

  Pri uporabe metode, če se da, poskusimo na začetku z uporabo adicijskih izrekov potence čim bolj znižati, da dobimo bolj enostavno racionalno funkcijo.

Dodatek

- $\displaystyle\int \frac{dx}{x^2-a^2} = \frac{1}{2a}\ln\left|\frac{x-a}{x+a}\right|$
- $\displaystyle\int e^{ax}\sin(bx)\, dx = \frac{e^{ax}}{a^2+b^2}(a\sin(bx) - b\cos(bx))$
- $\displaystyle\int e^{ax}\cos(bx)\, dx = \frac{e^{ax}}{a^2+b^2}(a\cos(bx) + b\sin(bx))$

$$\sin\alpha + \sin\beta = 2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}$$
$$\cos\alpha + \cos\beta = 2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}$$
$$\cos\alpha - \cos\beta = -2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\frac{\alpha-\beta}{2}$$

$$\sin\alpha\cos\beta = \frac{1}{2}(\sin(\alpha+\beta) + \sin(\alpha-\beta))$$
$$\cos\alpha\cos\beta = \frac{1}{2}(\cos(\alpha+\beta) + \cos(\alpha-\beta))$$
$$\sin\alpha\sin\beta = \frac{1}{2}(\cos(\alpha-\beta) - \cos(\alpha+\beta))$$

- $\sinh = \frac{1}{2}(e^x - e^{-x})$
- $\cosh = \frac{1}{2}(e^x + e^{-x})$
- $\cosh^2 x - \sinh^2 x = 1$

3 DOLOČENI INTEGRAL

Riemannova vsota (naloge 15 – 18)

Definicija. *Riemannova vsota* funkcije $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ pridružena delitvi D in usklajeni izbiri testnih točk T_D je:

$$R(f,D,T_D)=\sum_{i=1}^{n} f(t_i)\underbrace{(x_i-x_{i-1})}_{\delta_i}=\sum_{i=1}^{n} f(t_i)\delta_i.$$

Definicija. Naj bo $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ funkcija. Število $I\in\mathbb{R}$ je *Riemannov integral funkcije f na $[a,b]$* če za vsak $\varepsilon>0$ obstaja $\delta>0$ z naslednjo lastnostjo: za vsako delitev D, da $\delta(D)<\delta$, in za vsako usklajeno izbiro testnih točk T_D velja:

$$|R(f,D,T_D)-I|<\varepsilon.$$

• Naj bo $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ zvezna, pozitivna funkcija. Določeni intagral $\int_a^b f(x)\,dx$ določa ploščino med x-osjo in grafom f na $[a,b]$. Izračunamo ga lahko z uporabo Riemannovih vsot:

1. Interval $[a,b]$ razdelimo na n enakih delov s točkami $x_i=a+\frac{b-a}{n}\cdot i,\ i=0,1,\ldots,n$.
2. Naš lik aproksimiramo z unijo n pravokotnikov: $S_n=\frac{b-a}{n}\cdot(f(x_1)+f(x_2)+\ldots+f(x_n))$.
3. $\int_a^b f(x)\,dx=\lim_{n\to\infty} S_n$.

• Nekatere limite lahko izračanumo tako, da prevedemo Riemannovo vsoto (če jo prepoznamo) na določeni integral. To so običajno vsote deljene z n ali n-ti koreni od produktov, ki imajo z večanjem n več členov. **Trik.** S logaritmom naredimo iz produkta vsoto!

• **Kriteriji integrabilnosti:**

1. Naj bosta f in g integrabilni funkciji, potem $f\pm g,\ f\cdot g$ so integrabilni.
2. Kompozicija integrabilnih funkcij $g\circ f$ ni nujno integrabilna!
3. Če je g zvezna in f integrabilna, potem $g\circ f$ integrabilna.

Lebesgueev izrek. Naj bo $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ omejena. Potem je integrabilna natanko takrat, ko množica nezveznosti f ima mero 0 (to so vse končne in števne množice, in pa tudi neke neštevne množice).

Izračun določenih integralov. Newton-Leibnizeva formula (nalogi 19 – 20)

Newton-Leibnizeva formula: $\int_a^b f(x)\,dx=F(b)-F(a)$, kjer je F primitivna funkcija od f.

Geometrijska opazka. Recimo, da imamo nek interval, na katerem imata $\sin^2 x$ in $\cos^2 x$ pridružena lika z enakima ploščinama (taki intervali so npr. večkratnike periode). Potem $\int_a^b \sin^2 x\,dx=\int_a^b \cos^2 x\,dx=\frac{b-a}{2}$.

Integracija po delih v nedoločenem integralu: $\int_a^b u\,dv=uv\big|_a^b-\int_a^b v\,du$.

Uvedba nove spremenljivke v določeni integral. Pri uvedbe nove spremenljivke v določeni integral treba še spremeniti meji!

Trik. Včasih določeni integral lahko izračunamo brez izračuna nedoločenega integrala funkciji, ki jo integriramo (npr. z izpeljavo rekurzivne zveze ali s kakšnim drugim trikom).

Izpeljali smo formulo: $\int_0^{\pi} xf(\sin x)\,dx=\frac{\pi}{2}\int_0^{\pi} f(\sin x)\,dx$.

Osnovni izrek analize. Integral kot funkcija zgornje meje (naloga 21)

Osnovni izrek analize. Naj bo f integrabilna funkcija na $[a,b]$ in $F:[a,b]\to\mathbb{R}$ integral kot funkcija zgornje meje.

1. Tedaj je funkcija $F(x):\int_a^x f(t)\,dt$ zvezna na $[a,b]$.
2. Če je f v točki x zvezna, potem je F v točki x odvedljiva in velja: $F'(x)=f(x)$.

Nauk izreka. Vsaka zvezna funkcija ima primitivno funkcijo.

4 POSPLOŠENI INTEGRAL

Definicija posplošenega integrala (nalogi $22-23$)

Definicija. Naj bo $f:[a,b)\to\mathbb{R}$ funkcija, ki je integrabilna na vsakem intervalu $[a,t]$, kjer je $t\in[a,b)$. Potem je *posplošeni integral* funkcije f na intervalu $[a,b]$: $\int_a^b f(x)\,dx=\lim_{t\nearrow b}\int_a^t f(x)\,dx$, če ta limita obstaja. Podobno v neskončnosti.
Torej z posplošenim integralom lahko računamo ploščine neomejenih likov:

1. Lik razdelimo na več delov, tako da ima vsak del samo en neomejen kos.
2. Vsak neomejen kos aproksimiramo z omejenimi in pogledamo ali obstajajo limite ploščin omejenih aproksimacij.

Kriterija za konvergenco (nalogi $24-25$)

Če je funkcija f absolutno posplošeno integrabilna, potem je posplošeno integrabilna.
Za testiranje konvergence imamo 2 kriterja:

1. **Konvergrenca v polu.** Naj bo $g:(a,b)\to\mathbb{R}$ zvezna funkcija, ki ima limito $L=\lim_{x\searrow a}g(x)$. Potem integral $\int_a^b\frac{g(x)}{(x-a)^s}\,dx$:
   - konvergira, če je $s<1$;
   - divergira, če je $s\geq 1$ in $L\neq 0$.
2. **Konvergenca v neskončnosti.** Naj bo $g:[a,\infty)\to\mathbb{R}$ zvezna funkcija, ki ima limito $L=\lim_{x\to\infty}g(x)$. Potem integral $\int_a^\infty\frac{g(x)}{x^s}\,dx$:
   - konvergira, če je $s>1$;
   - divergira, če je $s\leq 1$ in $L\neq 0$.

Nasvet. Da ugotovimo, kakšne stopnje pol ima funkcija, vse, kar ne prispeva k polu izrazimo s funkcijo g.

5 UPORABA INTEGRALA V GEOMETRIJI

Ploščine likov (naloga 26)

Ploščina lika, ki ga omejuje krivulja v polarni obliki: $S=\frac{1}{2}\int_\alpha^\beta (r(\phi))^2\,d\phi$.
Ideja: Lik aproksimiramo z unijo trikotnikov, ki imajo vrh v izhodišču in seštejemo jih ploščine $dS=\frac{1}{2}r(\phi)^2 sin(d\phi)$.
Ploščina lika, ki ga omejuje krivulja v parametrični obliki: $S=\frac{1}{2}\int_a^b(x\dot{y}-\dot{x}y)\,dt$.
Ideja: Lik aproksimiramo z unijo trikotnikov, ki imajo vrh v izhodišču in seštejemo jih ploščine $dS=\frac{1}{2}|\vec{r}(t)\times\vec{r}\,'dt|$.

Dolžine krivulj (naloga 27)

Dolžina krivulje, podane v parametrični obliki: $l=\int_a^b\sqrt{\dot{x}^2+\dot{y}^2}\,dt$. V formuli je $\sqrt{\dot{x}^2+\dot{y}^2}$ hitrost, dt pa čas ($ds=vdt$).
Dolžina krivulje, podane v polarni obliki: $l=\int_\alpha^\beta\sqrt{r^2+(r')^2}\,d\phi$.
Ideja: V začetni formuli vzamemo za parameter $t=\phi:\;x(\phi)=r(\phi)\cos\phi,\;y(\phi)=r(\phi)\sin\phi$.
Dolžina krivulje, podane v kartezični obliki (krivulja je graf): $l=\int_a^b\sqrt{1+f'(x)^2}\,dx$.
Ideja: V začetni formuli vzamemo za parameter $t=x:\;x(x)=x,\;y(x)=f(x)$.

Površina in prostornina vrtenine (naloge $28-30$)

Opazka. Najprej ugotovimo, ali integral sploh obstaja.
Formula za volumen vrtenine v kartezični obliki: $V=\pi\int_a^b f(x)^2\,dx$.
Ideja: Vrtenino aproksimiramo z unijo valjev. En tak majhen valj ima višino dx in polmer osnovne ploskve $R=f(x)$.
Potem $dV=\pi R^2h=\pi f(x)^2dx$.
Formula za površino vrtenine v kartezični obliki: $P=2\pi\int_a^b f(x)\sqrt{1+f'(x)^2}\,dx$.
Ideja: Plašč vrtenine aproksimiramo z unijo plaščev prisekanih stožcev.
Potem $dP=\text{osnovnica}\cdot\text{širina}=2\pi R\,ds=2\pi f(x)\sqrt{1+f'(x)^2}\,dx$
Formula za površino vrtenine v polarni obliki: $P=2\pi\int_\alpha^\beta r(\phi)\sin\phi\sqrt{r^2+(r')^2}\,d\phi$
Formula za površino vrtenine v parametrični obliki: $P=2\pi\int_{t_1}^{t_2}y(t)\sqrt{\dot{x}^2+\dot{y}^2}\,dt$
Ideja: Vzamemo formulo v kartezični obliki in iz njo izpeljamo nove.
Vrtenje okoli poljubne osi:

1. Parametiziramo točke na osi vrtenja
2. Pogledamo kako daleč pravokotno na našo is točka na krivulje
3. Uporabimo znano formula za volumen v kartezični verziji

Guldinova formula: $V=2\pi dS$, kjer je S ploščina lika, d pa razdalja središča lika od osi vrtenja (za preproste like).

6 FUNKCIJSKA ZAPOREDJA IN VRSTE

Funkcijska zaporedja (naloge $1-4$)

Definicija. Naj bo $f_n : I \to \mathbb{R}$ zaporedje funkcij.

1. *Zaporedje* f_n *konvergira po točkah na* I k limitni funkciji $f : I \to \mathbb{R}$, če za vsak $x \in I$ velja:
$$f(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x)$$
.
2. *Zaporedje* f_n *enakomerno konvergira k funkcije* f *na* I, če za vsak $\varepsilon > 0$, obstaja $N \in \mathbb{N}$, da velja:
$$|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon \text{ za vsak } x \in I \text{ in vsak } n \geq \mathbb{N}.$$
Ekvivalentno: $\lim_{n\to\infty} c_n = 0,\ c_n := d_\infty(f_n, f) = \sup_{x\in I} |f_n(x) - f(x)|$. Supremum lahko izračunamo z uporabo odvoda.

Lastnosti enakomerne konvergence. Naj bodo $f_n : [a, b] \to \mathbb{R}$ zvezne in naj enakomerno na konvergirajo k funkciji f na $[a, b]$. Potem velja:

- f je zvezna.
- $\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{n\to\infty} \int_a^b f_n(x)\,dx.$

Če tudi f_n' enakomerno konvergirajo proti neke funkcije g na $[a, b]$. Potem velja:

- f je odvedljiva.
- $f'(x) = \lim_{n\to\infty} f_n'(x) = g(x)$.

Funkcijske vrste (naloge $5-7$)

Integralski kriterij. Naj bo $f : [1, \infty) \to \mathbb{R}$ zvezna, padajoča, pozitivna funkcija. Potem velja:
$$\sum_{n=1}^{\infty} f(n) < \infty \Leftrightarrow \int_1^\infty f(t)\,dt < \infty.$$

Definicija. *Vrsta* $\sum_{n=1}^\infty f_n$ *konvergira enakomerno na* I *k funkciji* f, če enakomerno konvergira zaporedje njenih delnih vsot.
Pomembno! Če so f_n zvezne na I in je konvergenca enakomerna, je f zvezna na I.
Weierstrassov kriterij. Če obstaja zaporedje števil $c_n \geq 0$, da velja:

- $|f_n(x)| \leq c_n$ za vsak $x \in I$. Ponavadi vzamemo $c_n = \sup_{x\in I} |f_n(x)|$;
- $\sum_{n=1}^\infty c_n < \infty$.

Potem vrsta $\sum_{n=1}^\infty f_n$ konvergira enakomerno na I.

Potenčne vrste (naloge $8-10$)

Definicija. *Potenčna vrsta* je vrsta oblike
$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-a)^n = a_0 + a_1(x-a) + a_2(x-a)^2 + \ldots + a_n(x-a)^n + \ldots$$
a_0, a_1, a_2 so koeficienti potenčne vrste, a je središče potenčne vrste.
Definicija. Za vsako potenčno vrsto obstaja *konvergenčni polmer* $R \in [0, \infty)$, da velja:

- vrsta konvergira za $x \in (a-R, a+R)$,
- vrsta divergira za $|x-a| > R$,
- v robnih točkah $a-R$ in $a+R$ vrsta lahko ali konvergira ali divergira.

Za izračun konvergenčnega polmera R lahko uporabimo:

- $R = \lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right|$;
- $\frac{1}{R} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|}$;
- $\frac{1}{R} = \limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|}$;
- Kakšen kriterij za številske vrste.

Nasvet. Kako lahko dobimo vsoto funkcijske vrste? Dano vrsto poskusimo z odvajanjem/integriranjem prevesti na neko vrsto, ki jo znamo sešteti (znane vrste, geometrijska vrsta).
Izrek o členskem odvajanju in integraciji potenčnih vrst. Naj bo $f : (a-R, a+R) \to \mathbb{R}$ analitična funkcija s predpisom $f(x) = \sum_{n=0}^\infty a_n(x-a)^n$. Potem velja:

- $\displaystyle f'(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n n(x-a)^{n-1}$ (odvajamo vsak člen posebej in seštejemo).
- $\displaystyle\int f(x)\,dx = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n+1}(x-a)^{n+1} + C$ (integriramo vsak člen posebej in seštejemo).

Trik. Kako lahko dobimo vsoto številske vrste?

1. Številsko vrsto razširimo do potenčne vrste.
2. Izračunamo vsoto potenčne vrste.
3. Izračunamo vsoto številske vrste.

Abelov izrek. Če vrsta konvergira v krajišču intervala, je vsota vrste enaka limiti f v krajišču (zveznost vsote).

Taylorjeva formula in Taylorjeva vrsta (naloge 11−)

Definicija. Naj bo f funkcija, ki je n-krat odvedljiva v točki a. *Taylorjev polinom reda n funkcije f glede na točko a* je polinom

$$T_n(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{f''(a)(x-a)^2}{2!} + \ldots + \frac{f^{(n)}(a)(x-a)^n}{n!}.$$

Imamo enakost: $f(x) = T_n(x) + R_n(x)$. Ostanek lahko ocenimo z:

Taylorjev izrek. $R_n(x) = \frac{1}{(n+1)!} f^{(n+1)}(t)(x-a)^{n+1}$, kjer je t neka točka med x in a. Ocena: $|R_n(x)| \leq \max_{t\in(a-\delta,a+\delta)} |f^{(n+1)}(t)| \frac{\delta^{n+1}}{(n+1)!}$.

Definicija. Naj bo f funkcija, ki ima vse odvodi v točki a. *Taylorjeva vrsta* funkcije f glede na a je potenčna vrsta:

$$T(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \ldots + \frac{f^{(n)}}{n!}(x-a)^n + \ldots.$$

Lahko se zgodi naslednje:

1. Taylorjeva vrsta konvergira k f na neki okolici $(a-R, a+R)$ točke a.
    - Rečemo, da je f *analitična* na okolici a.
    - f je *cela funkcija*, če je enaka svoji Taylorjevi vrsti na celem $\mathbb{R}$.
2. Taylorjeva vrsta konvergira samo v točki a.
3. Taylorjeva vrsta konvergira na neki okolici a, pa ne k funkciji f.

Taylorjeve vrste lahko računamo na 2 načina:

1. Izračunamo vse odvode in uporabimo formulo.
    - **Opazka.** Treba podati predpis za a_n.
2. Uporabimo znane Taylorjeve vrste.

Opazka. Potenčni vrsti lahko množimo kot polinome!