# Analiza 2b

18. marec 2025

# Kazalo

# 1 Hilbertovi prostori

## 1.1 Vektorski prostori s skalarnim produktom

Naj bo $X$ vektorski prostor nad $\mathbb{R}$ (ali nad $\mathbb{C}$).

**Definicija.** **Skalarni produkt** $\langle\ ,\ \rangle$ je preslikava $\langle\ ,\ \rangle : X \times X \to \mathbb{R}$ (oz. $\mathbb{C}$) za katero velja:

1. $\forall x \in X\,.\ \langle x,\, x\rangle \geq 0$;
2. $\forall x \in X\,.\ \langle x,\, x\rangle = 0 \Leftrightarrow x = 0$;
3. $\forall x, y \in X\,.\ \langle x,\, y\rangle = \overline{\langle y,\, x\rangle}$;
4. $\forall x, y, z \in X\,.\,\forall \lambda, \mu \in \mathbb{R}$ (oz. $\mathbb{C}$) $.\ \langle \lambda x + \mu y,\, z\rangle = \lambda\,\langle x,\, z\rangle + \mu\,\langle y,\, z\rangle$.

*Opomba.* 1. – 2. je **pozitivna definitnost** skalarnega produkta, 3. je **poševna simetričnost** (**simetričnost** nad $\mathbb{R}$), 4. je linearnost v prvem faktorju.

**Trditev** (Cauchy-Schwartzova neenakost)**.** Naj bo $\langle\ ,\ \rangle$ skalarni produkt na $X$. Velja:

$$\forall x, y \in X\,.\,|\,\langle x,\, y\rangle\,| \leq \sqrt{\langle x,\, x\rangle} \cdot \sqrt{\langle y,\, y\rangle} = ||x|| \cdot ||y||.$$

*Dokaz.* Nad $\mathbb{R}$: Definiramo $t \to \langle x + ty,\, x + ty\rangle = f(t) \geq 0$.
Nad $\mathbb{C}$: Naj bo $x, y \in X$. Obstaja $\alpha \in \mathbb{C}$, $|\alpha| = 1$, da $\langle x,\, y\rangle = \alpha \cdot |\,\langle x,\, y\rangle\,|$. □

**Definicija.** Norma na vektorskem prostoru $X$ je preslikava $||\ || : X \to \mathbb{R}$ za katero velja:

1. $\forall x \in X\,.\,||x|| \geq 0$;
2. $\forall x \in X\,.\,||x|| = 0 \Leftrightarrow x = 0$;
3. $\forall \lambda \in \mathbb{R}$ (oz. $\mathbb{C}$) $.\,||\lambda x|| = |\lambda| \cdot ||x||$;
4. Trikotniška neenakost: $\forall x, y \in X\,.\,||x + y|| \leq ||x|| + ||y||$.

**Trditev.** Naj bo $(X, \langle\ ,\ \rangle)$ vektorski prostor s skalarnim produktom. Potem je $(X, ||\ ||)$, kjer je $\forall x \in X\,.\,||x|| = \sqrt{\langle x,\, x\rangle}$, vektorski prostor z normo.

*Dokaz.* Preverimo lastnosti. Za trikotniško neenakost uporabimo CS neenakost. □

**Trditev.** Naj bo $(X, ||\ ||)$ vektorski prostor s normo. Potem je $(X, d)$, kjer je $\forall x, y \in X\,.\,d(x, y) = ||x - y||$, metrični prostor.

*Dokaz.* Preverimo lastnosti. □

## 1.2 Hilbertovi prostori

**Definicija.** **Hilbertov prostor** je vektorski prostor $X$ s skalarnim produktom $\langle\ ,\ \rangle$, ki je v metriki, porojeni iz skalarnega produkta, poln metrični prostor.

*Opomba.* $(X, \langle\ ,\ \rangle) \rightsquigarrow (X, ||\ ||) \rightsquigarrow (X, d)$, kjer je $\forall x, y \in X\,.\,d(x, y) = ||x - y||$.

*Opomba.* **Banachov prostor** je vektorski prostor $X$ z normo $||\ ||$, ki je v metriki, porojeni iz norme, poln metrični prostor.

*Zgled.*

1. Naj bo $X = \mathbb{R}^n$. Definiramo skalarni produkt. Naj bo $x, y \in \mathbb{R}^n$, $x = (x_1 \ldots, x_n)$, $y = (y_1, \ldots, y_n)$. **Standardni skalarni produkt** je

$$x \cdot y = \sum_{k=1}^{n} x_k y_k.$$

Ta skalarni produkt nam da normo

$$||x|| = \sqrt{\sum_{k=1}^{n} x_k^2},$$

ki porodi metriko

$$d_2(x, y) = \sqrt{\sum_{k=1}^{n} (x_k - y_k)^2}.$$

Vemo, da je $(\mathbb{R}^n, d_2)$ poln metrični prostor. Torej $(\mathbb{R}^n, \cdot)$ Hilbertov prostor.

2. Na $\mathbb{R}^n$ lahko definiramo tudi druge norme, npr.
   - $||x||_\infty = \max\{|x_1|, \ldots, |x_n|\}$;
   - $||x||_1 = |x_1| + \ldots + |x_n|$.

   Te dve normi ne prideta iz skalarnega produkta, ker za njih ne velja paralelogramsko pravilo. $(\mathbb{R}^n, ||x||_\infty)$ in $(\mathbb{R}^n, ||x||_1)$ sta Banachova prostora.
3. Naj bo $X = \mathbb{C}^n$. Definiramo skalarni produkt. Naj bo $z, w \in \mathbb{C}^n,\ z = (z_1 \ldots, z_n),\ w = (w_1, \ldots, w_n)$. **Standardni skalarni produkt** je

$$z \cdot w = \sum_{k=1}^{n} z_k \overline{w_k}.$$

   Ta skalarni produkt nam da normo

$$||z|| = \sqrt{\sum_{k=1}^{n} |z_k|^2},$$

   ki porodi metriko

$$d_2(z, w) = \sqrt{\sum_{k=1}^{n} |z_k - w_k|^2}.$$

   Vemo, da je $(\mathbb{C}^n, d_2)$ poln metrični prostor. Torej $(\mathbb{C}^n, \cdot)$ Hilbertov prostor.

### 1.3 Prostor $L^2([a, b])$

**Trditev.** Naj bo $C([a, b])$ vektorski prostor nad $\mathbb{R}$. Potem je s predpisom

$$\forall f, g \in C([a, b])\,.\ \langle f,\, g\rangle = \int_a^b f(x)g(x)\,dx$$

definiran skalarni produkt na $C([a, b])$.

*Dokaz.* Preverimo lastnosti. □

**Trditev.** $(C([a, b]), \langle\ ,\ \rangle)$ ni Hilbertov prostor.

*Dokaz.* Definiramo $f_n(x) = \begin{cases} 1; & \frac{1}{n} \leq x \leq 1 \\ nx; & -\frac{1}{n} < x < \frac{1}{n} \\ -1; & -1 \leq x \leq -\frac{1}{n} \end{cases}$. Pokažemo, da je $(f_n)_n$ Cauchyjevo zaporedje v $C([a, b])$, ki nima limite. □

**Definicija.** Naj bo $(M, d)$ metrični prostor. Pravimo, da lahko **napolnimo** prostor $M$, če obstaja prostor $(\overline{M}, \overline{d})$, za kateri velja:
1. $(\overline{M}, \overline{d})$ je poln metrični prostor;
2. $M \subseteq \overline{M}$;
3. $\overline{d}|_{M\times M} = d$;
4. $M$ je gost v $\overline{M}$, tj. $\mathrm{Cl}\, M = \overline{M}$.

Prostoru $\overline{M}$ rečemo **napolnitev** prostora $M$.

*Opomba.* Ideja: $\overline{M}$ je prostor vseh limit Cauchyjevih zaporedij v $M$ (+ kvocient).

*Primer.* Naj bo $M = (0, 1),\ d_2(x, y) = |x - y|$. Potem napolnitev $\overline{M}$ prostora $M$ je $\overline{M} = [0, 1]$.

*Opomba.* Označili smo z $L^1(A) = \{f : A \to \mathbb{R} \mid \int_A |f|\,dx \text{ obstaja}\}/_\sim$ prostor vseh absolutno integrabilnih funkcij, kjer je $\forall f, g \in L^1\,.\ f \sim g \Leftrightarrow f = g$ s.p.

Vpeljemo zdaj s kvadratom integrabilne funkcije:

$$L^2([a, b]) = \left\{f : [a, b] \to \mathbb{R} \mid \int_a^b f^2(x)\,dx \text{ obstaja}\right\}/_\sim,$$

kjer je $\forall f, g \in L^2\,.\ f \sim g \Leftrightarrow f = g$ s.p.
V tem prostoru gotovo so
- Zvezne funkcije: $C([a, b]) \subseteq L^2([a, b])$;
- Odsekoma zvezni funkciji;
- $f(x) = \frac{1}{\sqrt[4]{x - a}}$ itd.

**Cilj** Želimo posplošiti prostor $(\mathbb{R}, \cdot)$.
Naj bo $f, g \in L^2$, potem $|f \cdot g| \leq \frac{|f|^2+|g|^2}{2} \Rightarrow f \cdot g \in L^1([a,b])$. Torej lahko definiramo

$$\langle f,\, g\rangle = \int_a^b f(x)g(x)\,dx.$$

**Trditev.** $L^2([a,b])$ je vektorski prostor.

*Dokaz.* Preverimo lastnosti. □

Torej $L^2([a,b])$ je vektorski prostor nad $\mathbb{R}$ s skalarnim produktom

$$\langle f,\, g\rangle = \int_a^b f(x)g(x)\,dx.$$

Očitno, da je $C([a,b]) \leq L^2([a,b])$.

**Izrek.** $L^2([a,b])$ je Hilbertov in $L^2([a,b])$ je napolnitev $C([a,b])$.

*Opomba.*

$$\forall f \in L^2([a,b])\,.\,\exists f_n \in C([a,b])\,.\,\lim_{n\to\infty} f_n = f \;\Leftrightarrow \lim_{n\to\infty} ||f_n - f|| = 0 \Leftrightarrow \lim_{n\to\infty} \sqrt{\int_a^b (f_n(x) - f(x))^2\,dx} = 0$$

*Opomba.* Nad $\mathbb{C}$: $f = u + iv,\ u, v : [a,b] \to \mathbb{R}$. Potem

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^b u(x)\,dx + i\int_a^b v(x)\,dx$$

in

$$\langle f,\, g\rangle = \int_a^b f(x)\overline{g(x)}\,dx.$$

*Zgled.* Vzemimo $[0,1]$. Definiramo $f_n(x) = \begin{cases} \sqrt{n}; & 0 < x \leq \frac{1}{n} \\ 0; & \text{sicer} \end{cases}$.
Velja: $\lim_{n\to\infty} f_n(x) = 0$ za $x \in [0,1]$. Ali je $\lim_{n\to\infty} f_n(x) = 0$ v $L^2([0,1])$?
*Zgled.* TODO

## 1.4 Ortogonalnost

**Definicija.** Naj bo $(X, \langle\ ,\ \rangle)$ vektorski prostor s skalarnim produktom, $A \subseteq X,\ A \neq \emptyset$. Naj bosta $x, y \in X$.
- $x$ je **pravokoten** na $y$, če $\langle x,\, y\rangle = 0$, tj. $x \perp y \Leftrightarrow \langle x,\, y\rangle = 0$.
- **Ortogonalni komplement** množice $A$ je $A^\perp = \{x \in X \mid \forall a \in A\,.\,x \perp a\}$.

**Trditev.** $A^\perp$ je vektorski podprostor v $X$.

*Dokaz.* Preverimo homogenost in linearnost. □

*Opomba.* $A \subseteq (A^\perp)^\perp$.

**Trditev.** Naj bo $(X, \langle\ ,\ \rangle)$ vektorski prostor s skalarnim produktom, $v \in X$. Definiramo $f : X \to \mathbb{R},\ f(x) = \langle x,\, v\rangle$. Potem $f$ je zvezna na $X$.

*Dokaz.* Pokažemo, da je $f$ Lipshitzeva. □

**Posledica.** $A^\perp$ je zaprt vektorski podprostor.

*Dokaz.* Pokažemo, da je limita vsakega zaporedja v $A^\perp$ tudi leži v $A^\perp$. □

*Opomba.* $C([a,b]) \subseteq L^2([a,b])$ ni zaprt podprostor.
*Opomba.* Če je $(X, \langle\ ,\ \rangle)$ Hilbertov in $A \subseteq X$ zaprt podprostor, potem

$$(A^\perp)^\perp = A.$$

**Trditev** (Pitagorjev izrek)**.** Naj bo $(X, \langle\ ,\ \rangle)$ vektorski prostor s skalarnim produktom. Naj bodo $x_1, \ldots, x_n \in X$ taki, da $\forall i, j \in [n]\,.\,i \neq j \Rightarrow x_j \perp x_j$. Tedaj

$$||x_1 + \ldots + x_n||^2 = ||x_1||^2 + \ldots + ||x_n||^2.$$

*Dokaz.* Izračunamo normo po definiciji. □

**Definicija.** Naj bo $(X, \langle\ ,\ \rangle)$ vektorski prostor s skalarnim produktom in $Y \leq X$ podprostor X. Naj bo $x \in X$. **Pravokotna projekcija** vektorja $x$ na podprostor $Y$ (če obstaja) je tak vektor $P_Y(x) \in Y$, da je

$$x - P_Y(x) \in Y^\perp.$$

**Trditev.** Če je pravokotna projekcija $x$ na $Y$ obstaja, je enolično določena. Če obstaja, je to najboljša aproksimacija vektorja $x$ z vektorji iz $Y$, tj.

$$||x - P_y(x)|| = \min_{w \in Y} ||x - w||.$$

*Dokaz.* Enoličnost: Običajen način.
Aproksimacija: Pitagorjev izrek. □

*Zgled.* Naj bosta $Y = C([a,b])$ in $X = L^2([a,b])$. Če si izberimo $f \in X \setminus Y$, potem $f$ nima najboljše aproksimacije z zveznimi funkcijami.

*Opomba.*

1. $P_Y^2 = P_Y$.
2. $x = \underbrace{x - P_Y(x)}_{Y^\perp} + \underbrace{P_Y(x)}_{Y} \Rightarrow ||x||^2 = ||x - P_Y(x)||^2 + ||P_Y(x)||^2 \Rightarrow ||x|| \geq ||P_Y(x)||$.
3. Če je $P_Y$ definiran na $X$, potem je linearen in zvezen.

   *Dokaz.* TODO □

4. Če je $P_Y$ definiran na $X$, je $Y$ zaprt podprostor.

   *Dokaz.* TODO □

5. Če ima $x$ pravokotno projekcijo na $Y$, ima tudi pravokotno projekcijo na $Y^\perp$.

   *Dokaz.* TODO □

**Trditev.** Naj bo $Y \leq X$ končno dimenzionalen podprostor z ON bazo $\{e_1, \ldots, e_n\}$, tj. $\langle e_i, e_j \rangle = \delta_{ij}$. Naj bo $x \in X$. Tedaj je

$$P_Y(x) = \sum_{j=1}^{n} \langle x, e_j \rangle e_j.$$

*Dokaz.* Definicija. □

*Opomba.* Vsak končno dimenzionalni podprostor ima pravokotno projekcijo definirano na $X$ in tudi vsi tisti podprostori končne kodimenzije.

### 1.5 Ortogonalni sistem

**Definicija.** Naj bo $(X, \langle\ ,\ \rangle)$ vektorski prostor s skalarnim produktom.

- Sistem vektorjev $(e_j)_{j=1}^\infty$ je **ortogonalen sistem (ON)**, če

$$\forall i, j \in \mathbb{N} \,.\, i \neq j \Rightarrow \langle e_i, e_j \rangle = 0.$$

- Tak sistem je **ortonormiran (ONS)**, če

$$\forall i, j \in \mathbb{N} \,.\, \langle e_i, e_j \rangle = \delta_{ij}.$$

**Trditev** (Besselova neenakost)**.** Naj bo $(X, \langle\ ,\ \rangle)$ vektorski prostor s skalarnim produktom. Naj bo $(e_j)_{j=1}^\infty$ ONS. Naj bo $x \in X$. Tedaj

$$\sum_{j=1}^{\infty} |\langle x, e_j \rangle|^2 \leq ||x||^2.$$

*Dokaz.* Definiramo $Y_n = L(\{e_1, \ldots, e_n\})$. Uporabimo formulo za pravokotno projekcijo na končnorazsežen prostor. □

**Posledica.** $\lim_{j \to \infty} \langle x, e_j \rangle = 0$.

*Opomba.*

- Absolutno vrednost potrebujemo, če gledamo prostor nad $\mathbb{C}$.
- $(\langle x, e_j \rangle)_{j=1}^\infty$ so **Fourierjevi koeficienti** $x$ po ONS $(e_j)_{j=1}^\infty$.

**Trditev.** Naj bo $(c_j)_{j=1}^{\infty}$ zaporedje števil (ali $\mathbb{R}$, ali $\mathbb{C}$) za katero velja $\sum_{j=1}^{\infty} |c_j|^2 < \infty$. Naj bo $(X, \langle\ ,\ \rangle)$ Hilbertov prostor in $(e_j)_{j=1}^{\infty}$ ONS. Tedaj obstaja $x \in X$, za katerega velja

$$\forall j \in \mathbb{N} \,.\, c_j = \langle x,\, e_j \rangle \,.$$

Velja tudi:

$$x = \sum_{j=1}^{\infty} c_j e_j = \lim_{N \to \infty} \sum_{j=1}^{N} c_j e_j .$$

# 2 Vektorska analiza

TODO

## 2.1 Integralski izreki

**Motivacija** TODO (zvezek)

**Izrek** (Gauss-Ostrogradsky)**.** Recimo, da

- $\Omega \subseteq \mathbb{R}^3$ omejena odprta množica z robom, sestavljenum iz končnega števila odsekoma gladkih sklenjenih ploskev, orijentiranih z zunanjo normalo glede na $\Omega$,
- $\vec{R} : \overline{\Omega} \to \mathbb{R}^3$ vektorsko polje, $\vec{R} \in C^1(\overline{\Omega})$.

Tedaj

$$\iint_{\partial\Omega} \vec{R}\, d\vec{S} = \iiint_{\Omega} \operatorname{div} \vec{R}\, dV.$$

*Opomba.* $\displaystyle\iint_{\partial\Omega} \vec{R}\, d\vec{S} = \iint_{\partial D} \vec{R} \cdot \vec{N} dS$, kjer je $\vec{N}$ zunanja enotska normala.

*Opomba* $(n = 2)$. Naj bo $D \subseteq \mathbb{R}^2$ omejena odprta množica z robom, sestavljenum iz končnega števila odsekoma gladkih sklenjenih krivulj, orijentiranih pozitivno glede na $D$. Naj bo $\vec{R} : \overline{D} \to \mathbb{R}^2$ vektorsko polje, $\vec{R} \in C^1(\overline{D})$. Tedaj je

$$\iint_{D} \operatorname{div} \vec{R}\, d\vec{S} = \int_{\partial D} \vec{R} \cdot \vec{n}\, dS,$$

kjer je $\vec{n}$ zunanja enotska normala.

**Izrek** (Green, Greenova formula)**.** Recimo, da

- $D \subseteq \mathbb{R}^2$ omejena odprta množica z odsekoma gladkim robom, sestavljenim iz končnega števila odsekoma gladkih sklenjenih krivulj, orientiranih pozitivno glede na $D$,
- $X, Y \in C^1(\overline{D})$, kjer $\vec{R} = (X, Y)$ vektorsko polje.

Tedaj

$$\int_{\partial D} X\, dx + Y\, dy = \iint_{D} (Y_x - X_y)\, dxdy = \int_{\partial D} \vec{R}\, d\vec{r}$$

**Izrek** (Stokes)**.** Recimo, da

- $\Sigma \subseteq \mathbb{R}^3$ omejena, orientirana, odsekoma gladka ploskev z odsekoma gladkim robom, sestavljenim iz končnega števila odsekoma gladkih sklenjenih krivulj, orientiranih skaldno z orientacijo $\Sigma$,
- $\vec{R} : \overline{\Sigma} \to \mathbb{R}^3$ vektorsko polje, $\vec{R} \in C^1(\overline{\Sigma})$.

Tedaj

$$\int_{\partial\Sigma} \vec{R}\, d\vec{r} = \iint_{\Sigma} \operatorname{rot} \vec{R}\, d\vec{S}.$$

*Zgled.* TODO (album 03.17.25)