Fraktalne dimenzije
Seminar

Ruslan Urazbakhtin
Fakulteta za matematiko in fiziko
Oddelek za matematiko

1. julij 2025

1 Uvod

Pojem dimenzije igra osrednjo vlogo v fraktalni geometriji. Intuitivno nam dimenzija množice pove, koliko prostora ta zavzema znotraj ambientnega prostora. Za običajne geometrijske objekte, kot so točke, daljice ali ploskve, se ta predstava sklada z našo intuicijo: točka ima dimenzijo 0, daljica 1, kvadrat 2 in kocka 3.

Fraktali pa pogosto kljubujejo tej klasični predstavi. Cantorjeva množica na primer nima dolžine, površine ali prostornine, pa vendar vsebuje neštevno mnogo točk in ima kompleksno strukturo. Zdi se, da »zavzema več kot nič, a manj kot eno dimenzijo«. Da bi takšne množice natančno opisali, potrebujemo bolj prefinjen pojem dimenzije.

Naravno se pojavi vprašanje, kaj je dobra definicija dimenzije? Kenneth Falconer v knjigi [1] navede naslednje lastnosti:

- **Dimenzija gladkih podmnogoterosti.** Če je $M \subseteq \mathbb{R}^n$ gladka podmnogoterost dimenzije $m \in \mathbb{N}$, potem velja $\dim M = m$. To lastnost želimo, saj dimenzija mora biti skladna z intuicijo in klasičnimi primeri, kjer so dimenzije dobro poznane in enostavne za izračun.
- **Dimenzija odprtih množic.** Za vsako odprto množico $A \subseteq \mathbb{R}^n$ velja $\dim A = n$.
- **Dimenzija števnih množic.** Če je $A \subseteq \mathbb{R}^n$ števna ali končna, potem velja $\dim A = 0$.

- **Monotonost.** Če je $A \subseteq B$, potem velja $\dim A \leq \dim B$. Monotonost zagotavlja naravno vedenje dimenzije glede na inkluzijo – večja množica ne more imeti manjše dimenzije od podmnožice.

- **Števna stabilnost.** Velja

$$\dim \left(\bigcup_{i \in \mathbb{N}} A_i \right) = \sup_{i \in \mathbb{N}} \dim A_i.$$

  Ta lastnost omogoča, da dimenzijo množice, sestavljene iz števno mnogo delov, razumemo preko dimenzij posameznih delov, kar je pomembno za analizo kompleksnih struktur.

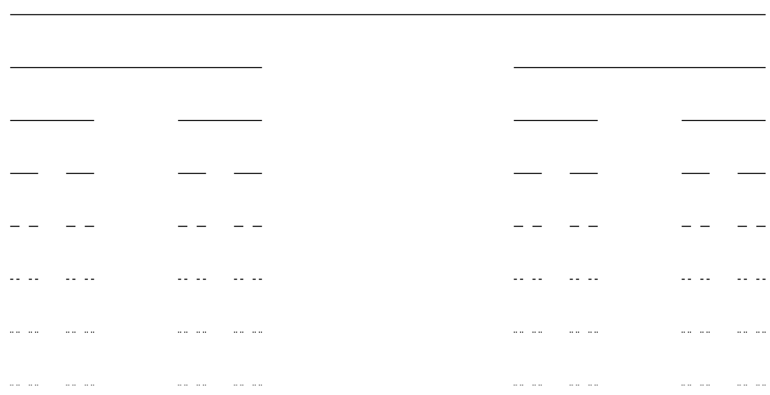
- **Geometrične invariance.** Za geometrijsko enake preslikave, kot so rotacije, translacije, zrcaljenja, velja

$$\dim f(A) = \dim A.$$

  Ta lastnost zahteva, da dimenzija ostane nespremenjena pod običajnimi premiki in vrtenjem prostora, kar je ključno za geometrijsko smiselnost dimenzije.

V tem članku se bomo pogosto ukvarjali s Cantorjevo množico, ki je klasičen in hkrati izjemno pomemben primer množice s fraktalno strukturo. Zaradi svoje nenavadne geometrije in lastnosti dimenzij nam Cantorjeva množica omogoča podrobno preučevanje različnih pojmov dimenzij in mer v matematični analizi in teoriji fraktalov.

Za nadaljevanje najprej definiramo Cantorjevo množico, saj bo služila kot osnovni primer skozi celotno delo.



Slika 1: Cantorjeva množica.

Izgradimo Cantorjevo množico (slika 1) na intervalu $[0, 1]$ po naslednjem postopku:

1. Naj bo $C_0 = [0, 1]$.

2. Množico C_0 razdelimo na tri enake dele in odstranimo odprti srednji interval $(1/3, 2/3)$. Tako dobimo množico $C_1 = [0, 1/3] \cup [2/3, 1]$.

3. Recimo, da imamo množico C_n, ki je unija 2^n zaprtih intervalov dolžine 3^{-n}. Vsak izmed teh intervalov razdelimo na tri enake dele in odstranimo odprti srednji del. Tako dobimo množico C_{n+1}, ki je unija 2^{n+1} zaprtih intervalov dolžine $3^{-(n+1)}$.

4. Postopek nadaljujemo induktivno.

Definicija 1.1. Cantorjeva množica *je množica*

$$C = \bigcap_{n \in \mathbb{N}_0} C_n.$$

2 Teorija mere

Če želimo govoriti o fraktalni dimenziji, moramo najprej razumeti pojem mere. Za naš namen pa bo dovolj, da se seznanimo le z osnovnimi idejami tega področja. V nadaljevanju bomo obravnavali le mere na prostoru $\mathbb{R}^n$, saj nas zanima vedenje množic v evklidskem prostoru. Mera je v tem kontekstu način, kako opišemo »velikost« množice – ne nujno v klasičnem smislu dolžine, ploščine ali prostornine, temveč tudi za bolj zapletene in nepravilne množice, kot so fraktali.

2.1 σ-algebra

Da bi lahko govorili o meri, potrebujemo nekaj osnovnih pojmov. Eden izmed njih je σ-algebra.

Definicija 2.1. *Naj bo X množica. Družino podmnožic $\mathcal{A}$ množice X imenujemo* σ-algebra *na X, če ima naslednje tri lastnosti:*

1. *$X \in \mathcal{A}$;*

2. *za vsako podmnožico $S \in \mathcal{A}$ je tudi $S^c \in \mathcal{A}$;*

3. *za vsako števno družino $(A_i)_{i \in \mathbb{N}}$ elementov iz $\mathcal{A}$ velja, da je tudi unija $\bigcup_{i \in \mathbb{N}} A_i$ v $\mathcal{A}$.*

Elemente družine $\mathcal{A}$ imenujemo merljive množice*. Množico X, opremljeno z družino $\mathcal{A}$, pa imenujemo* merljiv prostor*.*

Opomba 2.1. *Enostavno je videti, da za vsako σ-algebro $\mathcal{A}$ na X velja $\emptyset \in \mathcal{A}$ ter da je zaprta tudi za števne preseke.*

Zgled 2.1. *Naj bo X poljubna množica.*

1. *Družina z dvema elementoma $\{\emptyset, X\}$ je σ-algebra, vsebovana v vsaki σ-algebri na X.*

2. *Potenčna množica $\mathcal{P}(X)$ je σ-algebra, ki vsebuje vsako σ-algebro na X.*

Zgled 2.2. *Družina $\mathcal{A} = \{\emptyset, \{1, 3, 5\}, \{2, 4, 6\}, \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}\}$ je σ-algebra na $X = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$.*

Trditev 2.1. *Naj bo $\mathcal{A}$ σ-algebra na množici X. Naj bosta $A, B \in \mathcal{A}$. Potem $B \setminus A \in \mathcal{A}$.*

Dokaz. $B \setminus A = B \cap A^{\mathrm{c}}$. □

2.2 Borelove množice

Kasneje bomo videli, da sta zunanja Hausdorffova mera in zunanja Lebesgueova mera, ki bosta za nas pomembni, sprva definirani na vseh podmnožicah prostora, vendar postaneta pravi meri šele, ko ju omejimo na Borelove množice. Vse množice, ki jih bomo obravnavali, bodo Borelove.

Definicija 2.2. *Naj bo $\mathcal{B}$ poljubna družina podmnožic dane množice X. Presek vseh tistih σ-algeber na X, ki vsebujejo družino $\mathcal{B}$ imenujemo,* σ-algebra, generirana z $\mathcal{B}$.

Preden nadaljujemo, se vprašajmo: zakaj je presek družine σ-algeber na X spet σ-algebra na X? Odgovor na to vprašanje nam da naslednja trditev.

Trditev 2.2. *Naj bo $(\mathcal{A}_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$ neprazna družina σ-algeber na množice X, potem je tudi presek $\mathcal{A} := \bigcap_{\lambda \in \Lambda} \mathcal{A}_\lambda$ σ-algebra na X.*

Dokaz. Naj bo X poljubna množica ter $(\mathcal{A}_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$ poljubna neprazna družina σ-algeber na X. Preveriti moramo tri aksiome.

1. Ker za vsak $\lambda \in \Lambda$ velja $X \in \mathcal{A}_\lambda$, sledi tudi $X \in \mathcal{A}$.

2. Če je $A \in \mathcal{A}$ potem $A \in \mathcal{A}_\lambda$ za vsak $\lambda \in \Lambda$. Ker so $\mathcal{A}_\lambda$ σ-algebre, sledi $A^{\mathrm{c}} \in \mathcal{A}_\lambda$ za vsak $\lambda \in \Lambda$, torej $A^{\mathrm{c}} \in \mathcal{A}$.

3. Naj bo $(A_i)_{i \in \mathbb{N}}$ števna družina elementov iz $\mathcal{A}$. Potem za vsak $i \in \mathbb{N}$ in vsak $\lambda \in \Lambda$ velja $A_i \in \mathcal{A}_\lambda$. Ker so $\mathcal{A}_\lambda$ σ-algebre, velja tudi $\bigcup_{i \in \mathbb{N}} A_i \in \mathcal{A}_\lambda$ za vsak $\lambda \in \Lambda$, torej $\bigcup_{i \in \mathbb{N}} A_i \in \mathcal{A}$. □

Posledica 2.1. *Naj bo $\mathcal{B}$ družina podmnožic dane množice X. σ-algebra, generirana z $\mathcal{B}$ je najmanjša σ-algebra na X, ki vsebuje $\mathcal{B}$.*

Zdaj lahko definiramo množice, ki jih imenujemo Borelovi.

Definicija 2.3. *Naj bo X topološki prostor in $\mathcal{O}$ družina vseh odprtih podmnožic v X. σ-algebro, generirano z $\mathcal{O}$, imenujemo* Borelova σ-algebra, *njene elemente pa* Borelove množice. *Označili jo bomo z $\mathcal{B}(X)$.*

Opomba 2.2. *Iz posledice 2.1 sledi, da je $\mathcal{B}(X)$ najmanjša σ-algebra, ki vsebuje vse odprte in vse zaprte podmnožice X.*

2.3 Mera

Zgled za mero je dolžina podmnožic v $\mathbb{R}$, ploščina ravninskih likov in prostornina teles v prostoru. Ta pojem želimo posplošiti na poljubne merljive prostore.

Definicija 2.4. Mera *na merljivem prostoru $(X, \mathcal{A})$ je funkcija*

$$\mu : \mathcal{A} \to [0, \infty],$$

ki zadošča naslednjima pogojema

1. $\mu(\emptyset) = 0$ *in*
2. $\mu\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n)$ *za vsako števno družino disjunktnih množic $A_n \in \mathcal{A}$.*

Drugemu pogoju pravimo števna aditivnost.

Dokažimo nekaj preprostih lastnosti mere, ki jih bomo potrebovali v nadaljevanju.

Trditev 2.3 (Monotonost mere)**.** *Vsaka mera μ na merljivem prostoru $(X, \mathcal{A})$ je monotona, tj.*

$$\forall A, B \in \mathcal{A} \,.\, A \subseteq B \implies \mu(A) \leq \mu(B).$$

Dokaz. Po trditvi 2.1 je množica $B \setminus A$ merljiva. Ker sta množici A in $B \setminus A$ disjunktni in merljivi ter $B = A \cup (B \setminus A)$, je

$$\mu(B) = \mu(A \cup (B \setminus A)) = \mu(A) + \mu(B \setminus A) \geq \mu(A).$$

$\square$

Trditev 2.4 (Števna subaditivnost mere)**.** *Za vsako mero μ na merljivem prostoru $(X, \mathcal{A})$ in poljubno števno družino $(A_i)_{i\in\mathbb{N}}$ elementov iz $\mathcal{A}$ je*

$$\mu\left(\bigcup_{i\in\mathbb{N}} A_i\right) \leq \sum_{i=1}^{\infty} \mu(A_i).$$

Dokaz. Opazimo, da je $A := \bigcup_{i\in\mathbb{N}} A_i$ unija zaporedja disjunktnih množic

$$A_1,\ A_2 \setminus A_1,\ A_3 \setminus (A_1 \cup A_2), \ldots,$$

ki so vse v $\mathcal{A}$. Po števni aditivnosti in monotonosti sledi od tod

$$\mu(A) = \mu(A_1) + \mu(A_2 \setminus A_1) + \mu(A_3 \setminus (A_1 \cup A_2)) + \cdots \leq \sum_{i=1}^{\infty} \mu(A_i).$$

□

Trditev 2.5. *Naj bo μ mera na prostoru $(X, \mathcal{A})$. Naj bosta $A, B \in \mathcal{A},\ A \subseteq B$ in $\mu(A) < \infty$, potem $\mu(B \setminus A) = \mu(B) - \mu(A)$.*

Dokaz. Množica B je disjunktna unija množic A in $B \setminus A$, trditev sledi. □

2.4 Zunanja mera

Pojem zunanje mere je izredno pomembno orodje za konstruiranje mer na splošnih množicah. V nadaljevanju bomo Lebesgueovo in Hausdorffovo mero definirali prek njunih zunanjih mer.

Definicija 2.5. Zunanja mera *na množici X je preslikava*

$$\mu^* : \mathcal{P}(X) \to [0, \infty],$$

ki zadošča naslednjim trem pogojem:

1. $\mu^*(\emptyset) = 0$;
2. $\mu^*(A) \leq \mu^*(B)$, *če je* $A \subseteq B$;
3. $\mu^*(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \mu^*(A_n)$ *za vsako števno družino množic* $A_n \subseteq X$.

Navedemo trditev, ki nam bo koristila pri konstrukciji Hausdorffove mere. Dokaz trditve je mogoče najti v [3, stran 20].

Trditev 2.6. *Naj bo $\mathcal{S}$ družina podmnožic množice X, ki vsebuje $\emptyset$ in X. Naj bo $\mu : \mathcal{S} \to [0, \infty]$ preslikava, za katero velja $\mu(\emptyset) = 0$. Za vsako podmnožico $A \subseteq X$ definiramo*

$$\mu^*(A) = \inf\left\{\sum_{i=1}^{\infty} \mu(A_i) \mid A_i \in \mathcal{S} \wedge A \subseteq \bigcup_{i\in\mathbb{N}} A_i\right\}.$$

Potem μ^* je zunanja mera na X.

2.5 Lebesgueova mera

Lebesgueova mera je posplošitev klasičnih pojmov, kot so dolžina, ploščina in prostornina, na mnogo širši razred množic. Ključna prednost Lebesgueove mere je, da omogoča merjenje zelo nepravilnih množic, ki jih ni mogoče zadovoljivo obravnavati z geometrijskimi metodami. V nadaljevanju bomo videli, da je tesno povezana s Hausdorffovo mero, ki jo bomo podrobneje obravnavali kasneje.

Natančna konstrukcija Lebesgueove mere presega okvir tega besedila in jo lahko najdemo v [3, poglavje 1]. Tukaj pa bomo predstavili osnovno idejo in rezultat, ki ga bomo uporabljali v nadaljevanju.

Definicija 2.6. *Za vsak interval $I = (a, b) \subseteq \mathbb{R}$ definiramo $l(I) := b - a$.* Lebesgueova zunanja mera *je preslikava $\mathcal{L}_* : \mathcal{P}(\mathbb{R}) \to [0, \infty]$ s predpisom*

$$\mathcal{L}_*(A) = \inf \left\{ \sum_{i=1}^{\infty} l(I_i) \mid A \subseteq \bigcup_{i \in \mathbb{N}} I_i \right\},$$

kjer je $(I_i)_{i \in \mathbb{N}}$ števna družina odprtih intervalov v $\mathbb{R}$.

To definicijo lahko naravno posplošimo tudi na višji dimenziji. Za vsak kvader $K = I_1 \times \cdots \times I_n \subseteq \mathbb{R}^n$ z $\mathrm{vol}(K) = l(I_1) \cdot \cdots \cdot l(I_n)$ definiramo njegovo prostornino.

Definicija 2.7. *Naj bo $n \in \mathbb{N}$.* Lebesgueova zunanja n-dimenzionalna mera *je preslikava $\mathcal{L}^n_* : \mathcal{P}(\mathbb{R}^n) \to [0, \infty]$ s predpisom*

$$\mathcal{L}^n_*(A) = \inf \left\{ \sum_{i=1}^{\infty} \mathrm{vol}(K_i) \mid A \subseteq \bigcup_{i \in \mathbb{N}} K_i \right\},$$

kjer je $(K_i)_{i \in \mathbb{N}}$ števna družina odprtih kvadrov v $\mathbb{R}^n$.

Trditev 2.7. *Zožitev Lebesgueve zunanje n-dimenzionalne mere na Borelovo σ-algebro*

$$\mathcal{L}^n := \mathcal{L}^n_*|_{\mathcal{B}(\mathbb{R}^n)}$$

je mera na merljivem prostoru $(\mathbb{R}^n, \mathcal{B}(\mathbb{R}^n))$.

Zgled 2.3. *Izračunajmo dolžino Cantorjeve množice C.*

Najprej opazimo, da je Cantorjeva množica zaprta, ker je števen presek zaprtih množic. Torej je Borelova in s tem merljiva.

Oglejmo si $\mathcal{L}^1([0,1] \setminus C)$. Po eni strani $([0,1] \setminus C) \subseteq [0,1]$, zato po monotonosti mere (glej trditev 2.3) sledi:

$$\mathcal{L}^1([0,1] \setminus C) \leq \mathcal{L}^1[0,1] = 1.$$

Po drugi strani pa množica izrezanih odprtih intervalov (označimo jo z Z) je vsebovana v $[0,1]\setminus C$. Da pokrijemo množico Z, moramo pokriti vse izrezane intervale, katerih dolžina je

$$\frac{1}{3} + 2\cdot\frac{2}{9} + 4\cdot\frac{1}{81} + \cdots = \frac{1}{3}\left(1 + \frac{2}{3} + \left(\frac{2}{3}\right)^2 + \cdots\right) = 1.$$

Ker je po definiciji inf *največja spodnja meja množice sledi, da $\mathcal{L}^1(Z) \geq 1$. Ker je $Z \subseteq ([0,1]\setminus C)$, po monotonosti sledi:*

$$1 \leq \mathcal{L}^1(Z) \leq \mathcal{L}^1([0,1]\setminus C).$$

Torej je $\mathcal{L}^1([0,1]\setminus C) = 1$.

Po trditvi 2.5 sledi:

$$\mathcal{L}^1(C) = \mathcal{L}^1[0,1] - \mathcal{L}^1([0,1]\setminus C) = 0.$$

Ugotovili smo, da Cantorjeva množica nima dolžine, torej ni 1-dimenzionalna, vendar pa vsebuje neštevno mnogo točk, zato tudi ni 0-dimenzionalna. Lahko se vprašamo: ali ji lahko pripišemo takšno smiselno dimenzijo, v kateri bo njena »velikost« končno, pozitivno število? In kaj nam ta dimenzija sploh pove o naravi Cantorjeve množice?

3 Hausdorffova dimenzija

Hausdorffova dimenzija je najstarejši in matematično najosnovnejši poskus formalizacije dimenzije, ki velja tudi za fraktalne množice. Njena moč izhaja iz dejstva, da temelji na zunanji meri, kar omogoča natančno in splošno definicijo, ki velja za katerokoli podmnožico evklidskega prostora.

Čeprav je Hausdorffova dimenzija pogosto težko izračunljiva ali celo numerično nedostopna, ostaja ključno orodje pri razumevanju in klasifikaciji fraktalnih struktur. V nadaljevanju bomo spoznali njen formalni zapis ter nekaj osnovnih primerov in geometričnih lastnosti. Pokazali bomo tudi, da Hausdorffova dimenzija ustreza našemu intuitivnemu pojmu »dobre« dimenzije, ki smo jo iskali na začetku.

3.1 Konstrukcija Hausdorffove mere

Začnemo z konstrukcijo Hausdorffove mere, ki nam bo omogočila natančno definicijo Hausdorffove dimenzije in pripomogla k boljšemu razumevanju geometrije takšnih množic.

Najprej definiramo osnovna pojma.

Definicija 3.1. *Naj bo (X,d) metrični prostor. Zunanja mera μ^* na X je* metrična zunanja mera*, če*

$$\mu^*(A \cup B) = \mu^*(A) + \mu^*(B),$$

za vsaki množici $A, B \subseteq X$, za kateri velja $d(A,B) > 0$.

Dokaz naslednje trditve lahko najdemo v [2, stran 349].

Trditev 3.1. *Naj bo (X,d) metrični prostor. Če je μ^* metrična zunanja mera na X, potem je njena zožitev na Borelovo σ-algebro $\mu = \mu^*|_{\mathcal{B}(\mathcal{X})}$ mera na merljivem prostoru $(X, \mathcal{B}(X))$.*

Opomba 3.1. $d(A,B) := \inf\{d(a,b) \mid a \in A,\ b \in B\}$.

Zdaj lahko definiramo Hausdorffovo zunanjo mero.

Definicija 3.2. *Naj bo (X,d) metrični prostor, $p \geq 0$ in $\delta > 0$. Za vsako podmnožico $A \subseteq X$ definiramo*

$$H_\delta^p(A) = \inf\left\{\sum_{i=1}^{\infty} (\operatorname{diam} A_i)^p \mid A_i \subseteq X \wedge A \subseteq \bigcup_{i\in\mathbb{N}} A_i \wedge \operatorname{diam} A_i \leq \delta\right\}.$$

Ker se množica možnih pokritij množice A z zmanjševanjem δ zmanjšuje, je funkcija $H_\delta^p(A)$ naraščajoča glede na δ. Zato obstaja limita

$$\mathcal{H}^p = \lim_{\delta\to 0} H_\delta^p(A)$$

*(končna ali neskončna), ki ji pravimo p-*dimenzionalna Hausdorffova zunanja mera množice *A.*

*Pokritje množice A z množicami premera največ δ imenujemo δ-*pokritje množice *A.*

Opomba 3.2.

- $\operatorname{diam} A = \sup\{d(x,y) \mid x, y \in A\}$
- $\inf \emptyset = \infty$

Opomba 3.3. *V definiciji so $A_i \subseteq X$ poljubne. Enak rezultat lahko dobimo, če se omejimo le na zaprte podmnožice, saj velja $\operatorname{diam} A_i = \operatorname{diam} \overline{A_i}$, ali pa le na odprte podmnožice, saj lahko vsako množico A_i nadomestimo z množico $U_i = \left\{x \in X \mid d(x, A_i) < \frac{\varepsilon}{2^{i+1}}\right\}$, ki ima premer kvečjemu $(\operatorname{diam} A_i) + \frac{\varepsilon}{2^i}$.*

Tukaj je $d(x, A_i) = \inf\{d(x,a) \mid a \in A_i\}$.

Dokažemo osnovno lastnost $\mathcal{H}_p$.

Trditev 3.2. *Naj bo (X, d) metrični prostor. $\mathcal{H}_p$ je metrična zunanja mera.*

Dokaz. Po trditvi 2.6 sledi, da je H_δ^p zunanja mera na X. Ker je limita monotona, sledi tudi, da je $\mathcal{H}^p$ zunanja mera na X.

Naj bo $A, B \subseteq X$ množici, za kateri velja $d(A, B) > 0$. Izberimo tak $\delta > 0$, da velja $\delta < d(A, B)$. Naj bo $(C_i)_{i\in\mathbb{N}}$ družina podmnožic X, ki je δ-pokritje množice $A \cup B$. Ker je $\operatorname{diam} C_i < d(A, B)$ za vsak $i \in \mathbb{N}$, nobena množica C_i ne seka hkrati množice A in množice B. Razdelimo vsoto $\sum_{i=1}^{\infty}(\operatorname{diam} C_i)^p$ na dva dela:

- $\displaystyle\sum_{C_i\cap B=\emptyset}(\operatorname{diam} C_i)^p$ in
- $\displaystyle\sum_{C_i\cap A=\emptyset}(\operatorname{diam} C_i)^p$.

Po definiciji infimuma velja

$$\sum_{i=1}^{\infty}(\operatorname{diam} C_i)^p \geq H_\delta^p(A) + H_\delta^p(B).$$

Ker je bilo pokritje $(C_i)_{i\in\mathbb{N}}$ poljubno, sledi, da $H_\delta^p(A) + H_\delta^p(B)$ spodnja meja za množico dolžin vseh δ-pokritij množice $A \cup B$. Zato po definiciji infimuma velja, da

$$H_\delta^p(A \cup B) \geq H_\delta^p(A) + H_\delta^p(B).$$

V limiti $\delta \to 0$ dobimo:

$$\mathcal{H}^p(A \cup B) \geq \mathcal{H}^p(A) + \mathcal{H}^p(B).$$

Po definiciji zunanje mere, ki je subaditivna, pa velja tudi:

$$H^p(A \cup B) \leq H^p(A) + H^p(B).$$

Iz obeh neenakosti sledi enakost, torej $\mathcal{H}^p$ zadošča pogoju metrike. □

Direktna posledica trditev 3.1 in 3.2 je

Posledica 3.1. *Naj bo (X, d) metrični prostor. Zožitev Hausdorffove zunanje p-dimenzionalne mere na Borelovo σ-algebro*

$$\mathcal{H}^p := \mathcal{H}^p|_{\mathcal{B}(X)}$$

je mera na merljivem prostoru $(X, \mathcal{B}(X))$.

Brez dokaza navedemo še trditev, ki povezuje $\mathcal{L}^n$ in $\mathcal{H}^p$. Dokaz lahko najdemo v [2, stran 351].

Trditev 3.3. *Naj bo $n \in \mathbb{N}$. Obstaja konstanta $c_n > 0$, da je $c_n\mathcal{H}^n$ Lebesgueova mera na merljivem prostoru $(\mathbb{R}^n, \mathcal{B}(\mathbb{R}^n))$.*

Opomba 3.4. *Konstanta c_n je volumen n-dimenzionalne krogle, tj.*

$$c_n = \frac{\pi^{n/2}}{2^n\Gamma(\frac{n}{2}+1)}.$$

V nadaljevanju bomo za metrični prostor (X, d) privzeli navaden evklidski prostor $(\mathbb{R}^n, d_2)$.

3.2 Lastnosti Hausdorffove mere

V tem razdelku bomo našteli in dokazali nekatere geometrijske lastnosti Hausdorffove mere, ki jih lahko prenesemo tudi na Hausdorffovo dimenzijo.

3.2.1 Lastnosti skaliranja

Lastnosti skaliranja so temeljne za razumevanje fraktalnih struktur, saj fraktali po svoji naravi izkazujejo samopodobnost.

Naj bo $P : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ *podobnostna preslikava* s podobnostnim koeficientom $\lambda > 0$, tj. preslikava, za katero velja

$$\forall x, y \in \mathbb{R}^n \,.\, |P(x) - P(y)| = c|x - y|.$$

Opomba 3.5. *Opazimo, da je vsaka podobnostna preslikava injektivna.*

Intuitivno je jasno, da če raztegnemo daljico λ-krat, se njena dolžina poveča λ-krat, torej

$$\mathcal{L}^1(P(A)) = \lambda\mathcal{L}^1(A),$$

če povečamo stranico kvadrata za faktor λ, se njegova ploščina poveča za faktor λ^2, torej

$$\mathcal{L}^2(P(A)) = \lambda^2\mathcal{L}^2(A)$$

in tako naprej za višje dimenzije.

Naravno se pojavi vprašanje: ali podobna lastnost velja tudi za Hausdorffovo mero? Odgovor nam da naslednja trditev.

Trditev 3.4. *Naj bo $P : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ podobnostna preslikava s podobnostnim koeficientom $\lambda > 0$ in $A \subseteq \mathbb{R}^n$, $p \geq 0$. Tedaj velja:*

$$\mathcal{H}^p(P(A)) = \lambda^p\mathcal{H}^p(A).$$

Dokaz. Naj bo $(A_i)_{i\in\mathbb{N}}$ δ-pokritje množice A. Tedaj je $(P(A_i))_{i\in\mathbb{N}}$ $\lambda\delta$-pokritje množice $P(A)$, saj velja $\operatorname{diam}(P(A_i)) = \lambda \operatorname{diam}(A_i)$. Torej:

$$\sum_{i=1}^{\infty}(\operatorname{diam} P(A_i))^p = \sum_{i=1}^{\infty}(\lambda \operatorname{diam} A_i)^p = \lambda^p \sum_{i=1}^{\infty}(\operatorname{diam} A_i)^p.$$

Po definiciji infimuma velja

$$H^p_{\lambda\delta}(P(A)) \leq \lambda^p \sum_{i=1}^{\infty}(\operatorname{diam} A_i)^p.$$

Ker je $(A_i)_{i\in\mathbb{N}}$ bilo poljubno δ-pokritje množice A, dobimo:

$$H^p_{\lambda\delta}(P(A)) \leq \lambda^p H^p_\delta(A).$$

V limiti $\delta \to 0$ dobimo:

$$\mathcal{H}^p(P(A)) \leq \lambda^p \mathcal{H}^p(A).$$

Za obratno neenakost uporabimo enak argument na preslikavi P^{-1}, ki je tudi podobnostna preslikava s koeficientom $1/\lambda$, in na množici $P(A)$. Dobimo:

$$\mathcal{H}^p(A) \leq (1/\lambda)^p \mathcal{H}^p(P(A)) \implies \mathcal{H}^p(P(A)) \geq \lambda^p \mathcal{H}^p(A).$$

Skupaj s prvo neenakostjo sledi enakost. $\square$

Navedemo eno pomembno posledico

Posledica 3.2. *Naj bo $P : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ izometrija, tj. preslikava, za katero velja*

$$\forall x, y \in \mathbb{R}^n \,.\, |P(x) - P(y)| = |x - y|$$

in $A \subseteq \mathbb{R}^n$, $p \geq 0$. Tedaj velja:

$$\mathcal{H}^p(P(A)) = \mathcal{H}^p(A).$$

Primeri izometrij so rotacije, translacije, zrcaljenja ipd. Posledica pove, da je $\mathcal{H}^p$ invariantna glede na rotacije, translacije in zrcaljenja, kar je pričakovano.

3.2.2 Transformacijske lastnosti

Še en zanimiv razred preslikav so *Höldorjeve preslikave* stopnje $\alpha > 0$, t.j. preslikave $f : X \subseteq \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$, za katere velja

$$\exists c > 0 \,.\, \forall x, y \in X \,.\, |f(x) - f(y)| \leq c|x - y|^\alpha.$$

V posebnem primeru, ko je $\alpha = 1$, pravimo, da je preslikava f *Lipschitzeva.*

Z istim argumentom kot prej lahko dokažemo naslednjo trditev

Trditev 3.5. *Naj bo $X \subseteq \mathbb{R}^m$, $A \subseteq X$ in $f : X \to \mathbb{R}^n$ Höldorjeva preslikava stopnje $\alpha > 0$ s konstanto $c > 0$. Potem za vsak $p \geq 0$ velja:*

$$\mathcal{H}^{p/\alpha}(f(A)) \leq c^{p/\alpha}\mathcal{H}^p(F).$$

Direktna posledica te trditve je

Posledica 3.3. *Naj bo $X \subseteq \mathbb{R}^m$, $A \subseteq X$ in $f : X \to \mathbb{R}^n$ Lipschitzeva preslikava s konstanto $c > 0$. Potem za vsak $p \geq 0$ velja:*

$$\mathcal{H}^p(f(A)) \leq c^p\mathcal{H}^p(A).$$

Zdaj smo pripravili vsa potrebna orodja za definicijo Hausdorffove dimenzije in za preučevanje njenih lastnosti.

3.3 Hausdorffova dimenzija

V tem razdelku bomo definirali Hausdorffovo dimenzijo množice.

Naj bo $A \subseteq \mathbb{R}^n$. Definiramo funkcijo $\mathcal{H}_A : [0, \infty) \to [0, \infty]$ s predpisom

$$\mathcal{H}_A(p) = \mathcal{H}^p(A).$$

Lema 3.1. *Naj bo $A \subseteq \mathbb{R}^n$. Če je $\mathcal{H}^p(A) < \infty$, potem je $\mathcal{H}^t(A) = 0$ za vse $t > p$.*

Dokaz. Naj bo $\varepsilon > 0$. Naj bo $\delta > 0$ in $(A_i)_{i\in\mathbb{N}}$ δ-pokritje množice A. Tedaj po definiciji infimuma velja

$$H^{p+\varepsilon}_\delta(A) \leq \sum_{i=1}^{\infty}(\operatorname{diam} A_i)^{p+\varepsilon} = \sum_{i=1}^{\infty}(\operatorname{diam} A_i)^p(\operatorname{diam} A_i)^\varepsilon \leq \delta^\varepsilon \sum_{i=1}^{\infty}(\operatorname{diam} A_i)^p,$$

torej

$$H^{p+\varepsilon}_\delta(A) \leq \delta^\varepsilon \sum_{i=1}^{\infty}(\operatorname{diam} A_i)^p.$$

Ker je $(A_i)_{i\in\mathbb{N}}$ bilo poljubno δ-pokritje množice A, dobimo:

$$H_\delta^{p+\varepsilon}(A) \leq \delta^\varepsilon H_\delta^p(A).$$

Ker je $\mathcal{H}^p(A) < \infty$, v limiti $\delta \to 0$ dobimo:

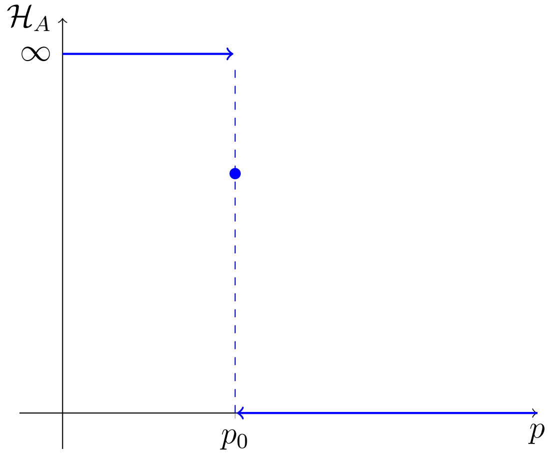
$$\mathcal{H}^{p+\varepsilon}(A) \leq 0.$$

Ker je $\mathcal{H}_A$ nenegativna funkcija, sledi

$$\mathcal{H}^{p+\varepsilon}(A) = 0$$

za vsak $\varepsilon > 0$. □

Sedaj si lahko ogledamo graf funkcije $\mathcal{H}_A$



Vidimo, da obstaja kritična točka $p_0 \in [0, \infty)$, pri kateri vrednost funkcije $\mathcal{H}^p$ »skoči« z ∞ na 0. Zato definiramo

Definicija 3.3. Hausdorffova dimenzija množice $A \subseteq \mathbb{R}^n$ *je*

$$\dim_H A = \inf\{p \geq 0 \mid \mathcal{H}^p(A) = 0\} = \sup\{p \geq 0 \mid \mathcal{H}^p(A) = \infty\}.$$

Opomba 3.6.

- *Po dogovoru je* $\sup \emptyset = 0$.
- *Hausdorffova dimenzija je definirana za poljubno množico* $A \subseteq \mathbb{R}^n$, *saj je opredeljena s pomočjo Hausdorffove zunanje mere.*

Opomba 3.7. *Naj bo $A \subseteq \mathbb{R}^n$. Potem velja:*

$$\mathcal{H}^p(A) = \begin{cases} \infty; & 0 \leq p < \dim_H A \\ 0; & p > \dim_H A, \end{cases}$$

pri $p = \dim_H A$ pa je $\mathcal{H}^p(A)$ lahko katerakoli vrednost iz intervala $[0, \infty]$.

Zgled 3.1. *Naj bo $B^n = B(x, r) = \{y \in \mathbb{R}^n \mid d(x, y) < r\}$ odprta n-dim krogla s središčem v $x \in \mathbb{R}^n$ in polmerom $r > 0$. Po trditvi 3.3 sledi, da velja*

$$\mathcal{H}^n(B^n) = \frac{1}{c_n}\mathcal{L}^n(B^n) = \frac{1}{c_n}\operatorname{vol}(B^n).$$

Torej je

$$0 < \mathcal{H}^n(B^n) < \infty$$

in

$$\dim_H B^n = n.$$

Isti sklep velja tudi za zaprto kroglo $\overline{B}^n \subseteq \mathbb{R}^n$, tj.

$$\dim_H \overline{B}^n = n.$$

Opomba 3.8. *Obstajajo tudi druge ekvivalentne definicije Hausdorffove dimenzije, ki jih lahko najdemo v [1].*

3.4 Lastnosti Hausdorffove dimenzije

Sedaj, ko smo definirali Hausdorffovo dimenzijo, lahko nadaljujemo z obravnavo njenih pomembnih geometričnih in topoloških lastnosti ter vpliva na strukturo množic.

3.4.1 Splošne lastnosti

Naslednja trditev je direktna posledica monotonosti Hausdorffove zunanje mere

Trditev 3.6 (Monotonost)**.** *Hausdorffova dimenzija je monotona, tj.*

$$\forall A, B \subseteq \mathbb{R}^n \,.\, A \subseteq B \implies \dim_H A \leq \dim_H B$$

Trditev 3.7 (Števna stabilnost)**.** *Naj bo $(A_i)_{i \in \mathbb{N}}$ družina podmnožic $\mathbb{R}^n$. Tedaj velja*

$$\dim_H \bigcup_{i \in \mathbb{N}} A_i = \sup\{\dim_H A_i \mid i \in \mathbb{N}\}.$$

Dokaz. Označimo z $s = \sup\{\dim_H A_i \mid i \in \mathbb{N}\}$.

Ker je $A_i \subseteq \bigcup_{i\in\mathbb{N}} A_i$ za vsak $i \in \mathbb{N}$ in je po trditvi 3.6 Hausdorffova dimenzija monotona, sledi, da

$$\dim_H F_i \leq \dim_H \bigcup_{i\in\mathbb{N}} A_i$$

za vsak $i \in \mathbb{N}$. Po definiciji supremuma velja:

$$s \leq \dim_H \bigcup_{i\in\mathbb{N}} A_i.$$

Naj bo $\varepsilon > 0$. Po definiciji supremuma velja, da $\dim_H A_i < s + \epsilon$ za vsak $i \in \mathbb{N}$. Torej

$$\mathcal{H}^{s+\varepsilon}(A_i) = 0$$

za vsak $i \in \mathbb{N}$. Ker je Hausdorffova zunanja mera subaditivna, sledi, da

$$\mathcal{H}^{s+\varepsilon}\left(\bigcup_{i\in\mathbb{N}} A_i\right) \leq \sum_{i=1}^{\infty} \mathcal{H}^{s+\varepsilon}(A_i) = 0.$$

V limiti $\varepsilon \to 0$ dobimo:

$$\mathcal{H}^{s}\left(\bigcup_{i\in\mathbb{N}} A_i\right) \leq 0.$$

Torej

$$\dim_H \bigcup_{i\in\mathbb{N}} A_i \leq s.$$

Skupaj s prvo neenakostjo sledi enakost. $\square$

Posledica 3.4. *Hausdorffova dimenzija* $\mathbb{R}^n$ *je*

$$\dim_H \mathbb{R}^n = n.$$

Dokaz. Ker je prostor $\mathbb{R}^n$ 2-števen, obstaja števno pokritje $(B_i^n)_{i\in\mathbb{N}}$ množice $\mathbb{R}^n$ z odprtimi krogli. Po trditvi 3.7 in zgledu 3.1 sledi, da

$$\dim_H \mathbb{R}^n \leq n.$$

Ker pa velja $B^n(0,1) \subseteq \mathbb{R}^n$ in je po trditvi 3.6 Hausdorffova dimenzija monotona, sledi tudi obratna neenakost:

$$\dim_H \mathbb{R}^n \geq \dim_H B^n(0,1) = n.$$

Torej je $\dim_H \mathbb{R}^n = n$. $\square$

Trditev 3.8 (Dimenzija števnih množic)**.** *Naj bo $A \subseteq \mathbb{R}^n$. Če je A števna, potem*

$$\dim_H A = 0.$$

Dokaz. Ker je A števna množica, lahko jo zapišemo v obliki

$$A = \{a_1, a_2, a_3, \ldots\}.$$

Definiramo $A_i = \{a_i\}$ za vsak $i \in \mathbb{N}$. Tedaj velja

$$A = \bigcup_{i \in \mathbb{N}} A_i.$$

Ker je $0 < \mathcal{H}^0(A_i) = 1 < \infty$ sledi, da

$$\dim_H A_i = 0$$

za vsak $i \in \mathbb{N}$. Po trditvi 3.7 velja

$$\dim_H A = \dim_H \bigcup_{i \in \mathbb{N}} A_i = \sup \{\dim_H A_i \mid i \in \mathbb{N}\} = 0.$$

□

Zgled 3.2. *Hausdorffova dimenzija $\mathbb{Q} \subseteq \mathbb{R}$ je 0, saj je $\mathbb{Q}$ števna množica.*

Trditev 3.9 (Dimenzija odprtih množic)**.** *Naj bo $U \subseteq \mathbb{R}^n$. Če je U odprta in neprazna, potem*

$$\dim_H U = n.$$

Dokaz. Ker je U odprta in neprazna, vsebuje neko odprto n-dimenzionalno kroglo, po drugi strani pa je vsebovana v $\mathbb{R}^n$. Trditev sledi. □

Ideje dokaza naslednje trditve lahko najdemo v [1, stran 32] in [2, stran 351].

Trditev 3.10 (Dimenzija gladkih množic)**.** *Naj bo $M \subseteq \mathbb{R}^n$. Če je M gladka (tj. C^∞) podmnogoterost dimenzije m, potem*

$$\dim_H M = m.$$

Posebej

- *Če je M gladka krivulja, potem* $\dim_H M = 1$.
- *Če je M gladka ploskev, potem* $\dim_H M = 2$.

3.4.2 Transformacijske lastnosti

Pri proučevanju Hausdorffove dimenzije se naravno zastavi vprašanje, kako se ta obnaša pri različnih transformacijah. Na primer: ali se dimenzija ohranja pri Lipschitzevih ali gladkih preslikavah? Takšna vprašanja so pomembna, saj nam transformacijske lastnosti pogosto omogočajo, da iz znane dimenzije neke množice sklepamo o dimenziji njene slike.

Trditev 3.11. *Naj bo $X \subseteq \mathbb{R}^m$, $A \subseteq X$ in $f : X \to \mathbb{R}^n$ Höldorjeva preslikava stopnje $\alpha > 0$ s konstanto $c > 0$. Tedaj velja*

$$\dim_H f(A) \leq \frac{1}{\alpha} \dim_H A.$$

Dokaz. Označimo z $s := \dim_H A$. Naj bo $\varepsilon > 0$. Po trditvi 3.5 velja

$$\mathcal{H}^{(s+\varepsilon)/\alpha}(f(A)) \leq c^{(s+\varepsilon)/\alpha} \mathcal{H}^{s+\varepsilon}(A) = 0.$$

V limiti $\varepsilon \to 0$ dobimo

$$\mathcal{H}^{s/\alpha}(f(A)) \leq 0,$$

torej

$$\dim_H f(A) \leq \frac{1}{\alpha} \dim_H A.$$

□

V primeru Lipschitzevih preslikav (kjer je $\alpha = 1$) dobimo naslednjo pomembno posledico.

Posledica 3.5. *Naj bo $X \subseteq \mathbb{R}^m$, $A \subseteq X$ in $f : X \to \mathbb{R}^n$ Lipschitzeva preslikava s konstanto $c > 0$. Tedaj velja*

$$\dim_H f(A) \leq \dim_H A.$$

Poseben primer Lipschitzevih preslikav so bi-Lipschitzeve preslikave. V tem primeru se Hausdorffova dimenzija ne spremeni – to je povsem pričakovano, saj bi-Lipschitzeva preslikava »niti ne sesuje« niti »neskončno ne raztegne« razdalj: ohrani geometrijske razdalje »v razumnem obsegu«.

Izrek 3.1. *Naj bo $X \subseteq \mathbb{R}^m$, $A \subseteq X$ in $f : X \to \mathbb{R}^n$ bi-Lipschitzeva preslikava, tj. preslikava $f : X \to \mathbb{R}^n$, za katero velja:*

$$\exists c_1, c_2 > 0 \,.\, \forall x, y \in X \,.\, c_1|x - y| \leq |f(x) - f(y)| \leq c_2|x - y|.$$

Tedaj velja

$$\dim_H f(A) = \dim_H A.$$

Dokaz. Ker je f injektivna, je njena zožitev $f : X \to f(X)$ bijektivna z Lipschitzevim inverzom $f^{-1} : f(X) \to X$ s konstanto $1/c_1$. Po posledici 3.5 imamo

$$\dim_H f(A) \leq \dim_H A$$

in

$$\dim_H A = \dim_H f^{-1} f(A) \leq \dim_H f(A).$$

Skupaj s prvo neenakostjo sledi enakost. $\square$

Izrek pove, da je Hausdorffova dimenzija invariantna glede na bi-Lipschitzeve preslikave. To pomeni, da so bi-Lipschitzeve transformacije »dimenzijsko ohranjajoče«. Če imata dve množici različno Hausdorffovo dimenzijo, potem med njima ne more obstajati bi-Lipschitzeva preslikava.

Opomba 3.9. *Podoben princip poznamo tudi iz topologije: če imata prostora različni topološki invarianti (npr. različno število luknj), potem med njima ne more obstajati homeomorfizem. Hausdorffova dimenzija je torej v tem smislu geometrična in varna pred »zmerno deformacijo«.*

3.4.3 Topološke lastnosti

Hausdorffova dimenzija ima tudi zanimivo povezavo s topologijo. Naslednji rezultat kaže, da dovolj »majhne« množice (v smislu dimenzije) ne morejo biti povezane.

Trditev 3.12. *Naj bo $A \subseteq \mathbb{R}^n$. Če je $\dim_H A < 1$, potem je A popolnoma nepovezana, torej so njene komponente za povezanost enojci.*

Dokaz. Naj bosta $x, y \in A,\ x \neq y$. Definiramo preslikavo $f : A \to [0, \infty)$ s predpisom

$$f(z) = |z - x|.$$

Preslikava f je Lipschitzeva, saj za vse $z, w \in A$ velja:

$$|f(z) - f(w)| = ||z - x| - |w - x|| \leq |z - w|.$$

Po posledici 3.5 sledi:

$$\dim_H f(A) \leq \dim_H A < 1.$$

Znano pa je (trditev 3.9), da vsaka neprazna odprta množica v $\mathbb{R}$ ima Hausdorffovo dimenzijo 1, zato $f(A)$ ne vsebuje nobene neprazne odprte podmnožice, saj je $\dim_H$ monotona. Torej je $f(A)^c$ gosta v $\mathbb{R}$.

Ker je $0 < f(y)$, obstaja $r \in (0, f(y))$, da $r \notin f(A)$. Definiramo množici:

$$U := \{z \in A \mid f(z) < r\}, \quad V := \{z \in A \mid f(z) > r\}.$$

Množici U in V sta odprti v podprostoru A (kot prasliki odprtih množic v $[0, \infty)$), disjunktni in pokrivata cel A, saj $r \notin f(A)$. Poleg tega velja $x \in U$ (ker je $f(x) = 0 < r$) in $y \in V$ (ker je $f(y) > r$). Torej x in y ležita v različnih komponentah za povezanost množice A.

Ker sta bili x in y poljubno izbrani različni točki, sledi, da je vsaka komponenta množice A enojec. □

Ta rezultat pokaže, kako lahko Hausdorffova dimenzija vpliva na topološke lastnosti množic. Če je dimenzija strogo manjša od 1, je množica tako »tanka«, da je ni mogoče povezati niti z najkrajšo zvezno potjo.

3.5 Primeri računanja Hausdorffove dimenzije

V tem razdelku bomo obravnavali primere izračuna Hausdorffove dimenzije za bolj zapletene množice. Običajno postopamo tako, da z geometrijskim premislekom podamo spodnjo in zgornjo oceno za dimenzijo ter upamo, da se ti meji ujemata. V tem primeru lahko sklepamo, da smo našli točno dimenzijo.

3.5.1 Cantorjeva množica

Izračunamo dimenzijo Cantorjeve množice (slika 1).

Trditev 3.13. *Hausdorffova dimenzija Cantorjeve množice je*

$$\dim_H C = \log_3 2.$$

Dokaz. Naj bo C_k k-ta generacija konstrukcije. Tedaj C_k vsebuje 2^k intervalov dolžine 3^{-k}. Označimo $s = \log_3 2$.

Naj bo $\delta > 0$. Potem obstaja $k \in \mathbb{N}$, da velja $3^{-k} \leq \delta$. Intervali iz C_k tvorijo δ-pokritje množice C, zato dobimo oceno

$$H^s_\delta(C) \leq 2^k \cdot 3^{-ks} = 1.$$

V limiti $\delta \to 0$ sledi

$$\mathcal{H}^s(C) \leq 1,$$

torej

$$\dim_H C \leq s.$$

Naj bo $\delta > 0$. Naj bo $(U_i)_{i\in\mathbb{N}}$ poljubno δ-pokritje množice C. Po opombi 3.3 lahko brez škode za splošnost predpostavimo, da so U_i odprte množice. Ker je C kompaktna (tj. omejena in zaprta), obstaja končno podpokritje

$$U_1, U_2, \ldots, U_N.$$

Za vsak $i \in \{1, 2, \ldots, N\}$ izberimo $k \in \mathbb{N}$, da velja

$$3^{-(k+1)} \leq \operatorname{diam} U_i < 3^{-k}. \tag{1}$$

Tedaj U_i seka kvečjemu en interval v generaciji C_k, saj je razdalja med dvema sosednjima intervaloma v tej generaciji vsaj 3^{-k}.

Če je $j \geq k$, potem po konstrukciji Cantorjeve množice U_i lahko seka kvečjemu 2^{j-k} intervalov generacije C_j, saj se pri vsakem koraku $C_n \to C_{n+1}$ vsak interval razdeli na dva.

Iz (1) sledi

$$2^{j-k} = 2^k \cdot 3^{-sk} = 2^j \cdot 3^s \cdot (3^{-(k+1)})^s \leq 2^j \cdot 3^s \cdot (\operatorname{diam} U_i)^s. \tag{2}$$

Torej vsak U_i seka kvečjemu $2^j \cdot 3^s \cdot (\operatorname{diam} U_i)^s$ intervalov generacije C_j.

Če izberemo dovolj velik $j \in \mathbb{N}$, da za vsak $i \in \{1, 2, \ldots, N\}$ velja

$$3^{-(j+1)} \leq \operatorname{diam} U_i,$$

potem pokritje $(U_i)_{i\in\mathbb{N}}$ seka vsak izmed 2^j intervalov v generaciji C_j. S preštevanjem teh intervalov in uporabo (2) dobimo oceno

$$2^j \leq \sum_{i=1}^{N} 2^j \cdot 3^s \cdot (\operatorname{diam} U_i)^s,$$

od koder sledi

$$\frac{1}{3^s} \leq \sum_{i=1}^{N} (\operatorname{diam} U_i)^s \leq \sum_{i=1}^{\infty} (\operatorname{diam} U_i)^s.$$

Ker je bilo pokritje $(U_i)_{i\in\mathbb{N}}$ poljubno, po definiciji infimuma sledi, da

$$\frac{1}{3^s} \leq H^s_\delta(C).$$

V limiti $\delta \to 0$ dobimo

$$\mathcal{H}^s(C) \geq \frac{1}{3^s} = \frac{1}{2},$$

torej

$$\dim_H C \geq s.$$

Skupaj s prvo neenakostjo sledi enakost. $\square$

Iz zgornjega računa in topoloških lastnosti Hausdorffove dimenzije sledi naslednje:

Posledica 3.6. *Cantorjeva množica C je popolnoma nepovezana.*

Opomba 3.10. *Iz zgornjega računa vidimo, da ima Cantorjeva množica res neničelno* $\log_3 2$*-dimenzionalno mero (oz. velikost). Z natančnejšo spodnjo oceno se lahko pokaže, da velja*

$$\mathcal{H}^s(C) = 1.$$

Tak natančen izračun najdemo v [4].

Če si predstavljamo, da ima Cantorjeva množica maso 1 kg, potem zaradi lastnosti skaliranja Hausdorffove mere (trditev 3.4), če bi množico raztegnili dvakrat – torej začeli z intervalom $[0, 2]$ *namesto* $[0, 1]$ *— bi se njena masa povečala za faktor* $2^{\log_3 2}$ *in bi bila približno enaka* $1,59$ *kg.*

Vidimo, da je izračun Hausdorffove dimenzije pogosto izredno zahteven, celo za preproste množice. Najprej je treba s pomočjo geometrijskih opažanj, simetrije ali samopodobnosti uganiti pravo vrednost dimenzije, nato pa to vrednost še dokazati. Ta postopek zahteva natančno analizo in pogosto precej tehničnega znanja.

Zato se naravno pojavi vprašanje: katere alternativne definicije dimenzije so nam na voljo?

Angleško-slovenski slovar strokovnih izrazov

countable stability števna stabilnost

dimension dimenzija

Hausdorff dimension Hausdorffova dimenzija

fractal fraktal

manifold mnogoterost

measure mera

metric space metrični prostor

motion translacija

outer measure zunanja mera

rotation rotacija

similarity podobnost

totally disconnected set popolnoma nepovezana množica

Literatura

[1] Kenneth Falconer. *Fractal geometry. Mathematical foundations and applications*. English. 2nd ed. Chichester: Wiley, 2003. ISBN: 0-470-84861-8; 0-470-84862-6.

[2] Gerald B. Folland. *Real analysis. Modern techniques and their applications.* English. 2nd ed. Pure Appl. Math., Wiley-Intersci. Ser. Texts Monogr. Tracts. New York, NY: Wiley, 1999. ISBN: 0-471-31716-0.

[3] Bojan Magajna. *Osnove teorije mere*. Slovenian. Zv. 27. Podiplomski Semin. Mat. Ljubljana: Drustvo Matematikov, Fizikov in Astronomov Slovenije (DMFA), 2011. ISBN: 978-961-212-241-6.

[4] Erin Pearse. *An Introduction to Dimension Theory and Fractal Geometry: Fractal Dimensions and Measures*. Ogled: 01. 07. 2025. 2014. URL: `https://pi.math.cornell.edu/~erin/docs/dimension.pdf`.