

1 Funckcije več spremenljivk

1.1 Prostor \mathbb{R}^n

1. Prostor \mathbb{R}^n

- **Definicija.** Prostor \mathbb{R}^n . Seštevanje in množenje s skalarjem na \mathbb{R}^n . Ali je \mathbb{R}^n vektorski prostor?
- **Definicija.** Skalarni produkt na \mathbb{R}^n . Norma vektorja na \mathbb{R}^n . Metrika na \mathbb{R}^n .
- **Definicija.** Zaprt kvader. Odprt kvader.
- **Opomba.** Ali imata prostori (\mathbb{R}^n, d_2) in (\mathbb{R}^n, d_∞) isto topologijo?
- **Izrek.** Karakterizacija kompaktnosti množic v \mathbb{R}^n . **TODO: ***

2. Zaporedja v \mathbb{R}^n

- **Definicija.** Zaporedje v \mathbb{R}^n .
- **Opomba.** Koliko realnih zaporedij porodi zaporedje v \mathbb{R}^n ?
- **Trditev.** Karakterizacija konvergence zaporedij v \mathbb{R}^n (porojene podzaporedja).

1.2 Zveznost preslikav iz \mathbb{R}^n v \mathbb{R}^m

1. Zveznost preslikav

Naj bo $D \subseteq \mathbb{R}^n$, $f : D \rightarrow \mathbb{R}^m$ preslikava.

- **Definicija.** Kadar je f zvezna v točki $a \in D$? Kadar je f zvezna na D ?
- **Trditev.** Karakterizacija zveznosti f v točki $a \in D$ z zaporedji.
- **Definicija.** Kadar je f enakomerno zvezna na D ?
- **Trditev.** Kaj lahko povemo o zvezni preslikavi na kompaktu? **TODO: ***
- **Trditev.** Kaj lahko povemo o sliki zvezne preslikave na kompaktu?
- **Definicija.** Kadar je f C -Lipschitzova?
- **Trditev.** V kakšni zvezi so C -Lipschitzovost, enakomerna zveznost in zveznost?
- **Trditev.** Kaj lahko povemo o vsote, razlike, produktu in kvocientu zveznih v točki $a \in D$ funkcij?
- **Trditev.** Kaj lahko povemo o kompozitume zveznih preslikav?
- **Zgled.** Ali je projekcija zvezna na \mathbb{R}^n ? Kaj pa polinomi in racionalne funkcije?
- **Definicija.** Funkcija n -spremenljivk.
- **Opomba.** Ali je vsaka zožitev zvezne funkcije zvezna funkcija?
- **Trditev.** Ali je zvezna v točki $a \in D$ funkcija zvezna v točki $a \in D$ kot funkcija posameznih spremenljivk?
- **Zgled.** Navedi primer funkcije, ki je zvezna kot funkcija posameznih spremenljivk, vendar ni zvezna.
- **Zgled.** Navedi primer funkcije, ki ima zvezne zožitve na premice, vendar ni zvezna.

2. Zveznost preslikav iz \mathbb{R}^n v \mathbb{R}^m

Naj bo $D \subseteq \mathbb{R}^n$ in $F : D \rightarrow \mathbb{R}^m$ preslikava. Naj bo $x \in D$, potem $F(x) = (y_1, \dots, y_m) \in \mathbb{R}^m$.

Lahko pišemo $F(x) = (f_1(x), \dots, f_m(x))$. Torej F določa m funkcij n -spremenljivk.

- **Trditev.** Karakterizacija zveznosti F v točki $a \in D$ z koordinatnimi funkciji.
- **Zgled.** Kaj pomeni, da so linearne preslikave omejene? **TODO: ***
- **Trditev.** Čemu je ekvivalentna omejenost linearnih preslikav?
- **Trditev.** Ali so linearne preslikave zvezne? Matrična norma.
- **Definicija.** Afina preslikava.

1.3 Parcialni odvodi in diferenciacijabilnost

1. Parcialni odvodi

Naj bo $D \subseteq \mathbb{R}^n$, $a \in D$ notranja, $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ funkcija.

- **Definicija.** Kadar je f parcialno odvedljiva po spremenljivke x_j v točki $a \in D$? Kaj je parcialni odvod?
- **Opomba.** Kaj lahko povemo o parcialne odvedljivosti elementarnih funkcij?

2. Diferenciacijabilnost

Naj bo $D \subseteq \mathbb{R}^n$, $a \in D$ notranja, $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ funkcija.

- **Definicija.** Kadar je f diferenciacijabilna v točki $a \in D$? Diferencial f v točki $a \in D$.
- **Opomba.** Ali je diferencial, če obstaja, enolično določen?
- **Opomba.** Kaj je diferencial v smislu aproksimacije funkcije? Zapis diferenciala v matrične oblike.
- **Trditev.** (Potrebni pogoji za diferenciacijabilnost). Zveza med diferencialom, parcialnimi odvodi in zveznostjo.
- **Opomba.** Kako lahko izrazimo diferencial z parcialnimi odvodi? Gradient funkcije. Operator nabla.
- **Zgled.** Ali je $f(x, y) = \begin{cases} \frac{2xy}{x^2+y^2}; & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0; & (x, y) = (0, 0) \end{cases}$ diferenciacijabilna?
- **Zgled.** Ali je $f(x, y) = \begin{cases} \frac{2x^2y}{x^2+y^2}; & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0; & (x, y) = (0, 0) \end{cases}$ zvezna, parcialno odvedljiva, diferenciacijabilna?
- **Izrek.** Zadosten pogoj za diferenciacijabilnost f v točki $a \in D$. **TODO: ***

3. Višji parcialni odvodi

Naj bo $f : D^{\text{odp}} \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ funkcija. Denimo, da je f parcialno odvedljiva po vseh spremenljivkah na D . Parcialni odvodi so tudi funkcije n -spremenljivk in morda so tudi te parcialno odvedljive po vseh oz. nekaterih spremenljivkah.

- **Trditev.** Zadostni pogoj za enakost mešanih odvodov. **TODO: ***
- **Definicija.** Kadar je f razreda C^k na D ?
- **Definicija.** Množica k -krat zvezno odvedljivih funkcij. Množica gladkih funkcij. Množica zveznih funkcij.
- **Opomba.** Kakšno strukturo ima množica $C^k(D)$ z operacijama $+$, \circ in množenja s skalarji?

4. Diferenciacijabilnost preslikav

Naj bo $D \subseteq \mathbb{R}^n$, $a \in D$ notranja, $F : D \rightarrow \mathbb{R}^m$ preslikava.

- **Definicija.** Kadar je F diferenciacijabilna v točki $a \in D$? Diferencial F v točki $a \in D$.
- **Opomba.** Ali je diferencial, če obstaja, enolično določen?
- **Zgled.** Ali sta diferenciacijabilni $\mathcal{A} : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ linearna, $F(x) = \mathcal{A}x$ in $F : \mathbb{R}^{n \times n} \rightarrow \mathbb{R}^{n \times n}$, $F(X) = X^2$?
- **Izrek.** Karakterizacija diferenciacijabilnosti F v točki $a \in D$ s koordinatnimi funkciji.
- **Opomba.** Kako se izraža diferencial F v točki $a \in D$ z koordinatnimi funkciji? Jacobijeva matrika.
- **Posledica.** Zadosten pogoj za diferenciacijabilnost F v točki a .
- **Definicija.** Kadar je F razreda C^k na D ?
- **Izrek.** Verižno pravilo. **TODO: ***
- **Opomba.** Kako se izraža diferencial kompozituma funkcij z Jacobijevimi matriki?
- **Posledica.** Verižno pravilo za funkcijo n -spremenljivk. Odvod funkcije po i -te spremenljivke.

1.4 Izrek o implicitni funkciji

1. Izrek o inverzni preslikavi

Naj bo $D, \Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ odprti, $\Phi : D \rightarrow \Omega$ preslikava razreda $C^1(D)$. Kakšne so zadostni pogoji za (lokalno) obrnljivost preslikave Φ ?

- **Definicija.** Kadar rečemo, da je Φ C^k -difeomorfizem?
- **Zgled.** Ali je $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x^3$ difeomorfizem?
- **Trditev.** Potreben pogoj, da je Φ difeomorfizem.
- **Posledica.** Kako izračunamo diferencial inverzne preslikave?
- **Zgled.** Ali velja obrat? $\Phi : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$, $\Phi(x, y) = (e^x \cos y, e^x \sin y)$.
- **Lema.** 3 lemi + pomožna trditev TODO
- **Izrek.** Izrek o inverzni preslikavi.
- **Posledica.** Kaj če je Φ razreda $C^k(D)$?
- **Definicija.** Kadar rečemo, da je Φ lokalni C^k -difeomorfizem?
- **Opomba.** Kaj pravi izrek, če je $n = 1$?
- **Zgled.** Naj bo $F : \mathbb{R}^{n \times n} \rightarrow \mathbb{R}^{n \times n}$, $F(X) = X^2$. Ali je F v okolici točke $I \in \mathbb{R}^{n \times n}$ lokalni difeomorfizem? Kaj to pomeni?

2. Osnovna verzija izreka o implicitni preslikavi

Naj bo $D \subseteq \mathbb{R}^2$ odprta, $(a, b) \in D$, $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ funkcija razreda $C^1(D)$.

- **Izrek.** Osnovna verzija izreka o implicitni funkciji.
- **Posledica.** Kaj če je f razreda $C^k(D)$?
- **Zgled.** Kaj če pogoji niso izpolnjeni:
 - (a) $f(x, y) = (x - y)^2$, $f(x, y) = 0$ v okolici točke $(0, 0)$.
 - (b) $f(x, y) = y^3 - x$, $f(x, y) = 0$ v okolici točke $(0, 0)$.
 - (c) $f(x, y) = y^2 - x^2 - x^4$, $f(x, y) = 0$ v okolici točke $(0, 0)$.
 - (d) $f(x, y) = y^2 + x^2 + x^4$, $f(x, y) = 0$ v okolici točke $(0, 0)$.

3. Izrek o implicitni funkciji

Imamo $n + m$ spremenljivk (x, y) , kjer $x = (x_1, \dots, x_n)$, $y = (y_1, \dots, y_m)$ in m enačb. Pričakujemo, da bomo lahko m spremenljivk izrazili kot funkcijo n ostalih, tj. najdemo preslikavo $\Phi : D \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$, da velja $y = \Phi(x)$.

Naj bo $D \subseteq \mathbb{R}_x^n \times \mathbb{R}_y^m$ odprta, $F = (f_1, \dots, f_m) : D \rightarrow \mathbb{R}^m$ preslikava razreda $C^1(D)$.

- **Definicija.** Parcialni diferencial na prvo spremenljivko. Parcialni diferencial na drugo spremenljivko.
- **Opomba.** Kako se izraža parcialna diferenciala z matriko? Kako se izraža diferencial F z parcialnima diferencialama?
- **Opomba.** Kako ta diferencial deluje na vektorju $\begin{bmatrix} h \\ k \end{bmatrix}$, $h \in \mathbb{R}^n$, $k \in \mathbb{R}^m$?
- **Izrek.** Izrek o implicitni funkciji.
- **Posledica.** Kaj če je F razreda $C^k(D)$?
- **Zgled.** Naj bo $F(x, y) = x^2 + y^2 - 1$ in naj rešujemo enačbo $F(x, y) = 0$ v okolici točke $(0, 1)$. S pomočjo dokaza izreka o implicitni preslikavi določi $y = \varphi(x)$.
- **Zgled.** Naj bosta $f(x, y, z) = y + xy + xz^2$ in $g(x, y, z) = z + zy + x^2$. Dokaži, da sistem enačb $f(x, y, z) = 0$ in $g(x, y, z) = 0$ v okolici točke $(0, 0, 0)$ enolično določa C^∞ funkciji $y = y(x)$ in $z = z(x)$ in razvij jih v Taylorjevo vrsto do členov reda 2.

4. Rang preslikave

Naj bo $D \subseteq \mathbb{R}^n$ odprta, $a \in D$ in $F : D \rightarrow \mathbb{R}^m$ preslikava razreda C^1 .

- **Zgled.** Naj bo $F : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ funkcija. Recimo, da rešujemo enačbo $F(x, y, z) = 0$ in vemo, da $F(a, b, c) = 0$. Kakšen je zadosten pogoj za to, da bi lahko vsaj eno spremenljivko izrazili kot funkcijo ostalih?
- **Zgled.** Naj bosta $F : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ in $G : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ funkciji. Recimo, da rešujemo sistem enačb $F(x, y, z) = 0$ in $G(x, y, z) = 0$ in vemo, da $F(a, b, c) = 0$ in $G(a, b, c) = 0$. Kakšen je zadosten pogoj za to, da bi lahko vsaj dve spremenljivke izrazili kot funkcijo tretje?
- **Definicija.** Rang F v točki $a \in D$. Rang F . Kadar rečemo, da je F v točki $a \in D$ maksimalnega ranga?
- **Opomba.** Ali je maksimalnost ranga lokalno stabilna?
- **Primer.** Obrnljiva matrika in permutacija koordinat. **TODO**
- **Posledica IIF.** Čemu je ekvivalentna enačba $F(x) = 0$, če je $m < n$?
- **Primer.** Naj bo $\mathcal{A} : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ linearna, $m \leq n$, $\text{rang } \mathcal{A} = m$. Kakšno dimenzijo ima prostor rešitev enačbe $\mathcal{A}x = b$?
- **Posledica.** Kaj lahko povemo o F v točki $a \in D$, če je $\text{rang}_a F = m$, če $m \leq n$?

1.5 Podmnogoterosti v \mathbb{R}^n

Podmnogoterosti je posplošitev pojmov „krivulja“ in „ploskev“.

1. Podmnogoterosti

- **Definicija.** Gladka podmnogoterost. Lokalne definicijske funkcije.
- **Opomba.** Kaj je podmnogoterost, če je njena kodimenzija enaka 0?
- **Zgled.** Gledamo v \mathbb{R}^3 . Naj bo $\mathcal{F}_1, \mathcal{F}_2, \mathcal{F}_3 : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ linearni. Kaj dobimo, če vzamemo za definicijske funkcije eno, dve ali tri funkcije izmed $\mathcal{F}_1, \mathcal{F}_2, \mathcal{F}_3$? Kadar govorimo o krivuljah in kadar o ploskvah?
- **Zgled.** Ugotovi, ali je podmnogoterost:
 - $M = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 + z^2 = 1\}$.
 - $M = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 + z^2 = 1, x + y + z = 0\}$.
 - $M = (\{0\} \times \mathbb{R}) \cup (\mathbb{R} \times \{0\})$.
- **Opomba.** Ali je rob kvadrata z stranico 2 in središčem v $(0, 0)$ gladka podmnogoterost v \mathbb{R}^2 ?
- **Zgled.** Ugotovi, ali je podmnogoterost:
 - $\text{GL}_n(\mathbb{R}) = \{A \in \mathbb{R}^{n \times n} \mid \det A \neq 0\}$.
 - $\text{SL}_n(\mathbb{R}) = \{A \in \mathbb{R}^{n \times n} \mid \det A = 1\}$.
- **Opomba.** Kadar rečemo, da je podmnogoterost podana implicitno?
- **Trditev.** Karakterizacija podmnogoterosti (ali je lokalno graf?)
- **Opomba.** Kadar rečemo, da je podmnogoterost podana eksplicitno?
- **Zgled.** Ali je $M = \{(x, x^2) \mid x \in \mathbb{R}\}$ podmnogoterost?

2. Parametrično padajanje mnogoterosti

- **Zgled.** Ali je parametrizacija $\varphi \mapsto (a \cos \varphi, a \sin \varphi)$, $a > 0$, $\varphi \in [0, 2\pi)$ določa podmnogoterost?
- **Trditev.**

1.6 Ekstremi funkcij več spremenljivk

1. Ekstremi funkcij več spremenljivk

Naj bo $D \subseteq \mathbb{R}^n$, $a \in D$, $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ funkcija.

- **Definicija.** Lokalni maksimum/minimum. Strogi lokalni maksimum/minimum. Maksimum/minimum (globalni). Lokalni ekstrem. Globalni ekstrem.
- **Opomba.** Kaj ima zvezna funkcija na kompaktu?
- **Definicija.** Stacionarna (oz. kritična) točka $a \in D^{\text{odp}}$ diferenciable funkcije f .
- **Trditev.** Kaj če ima diferenciable funkcija f v točki $a \in D^{\text{odp}}$ lokalni ekstrem?
- **Zgled.** Poišči minimum in maksimum $f(x, y) = x^2 - xy + y^2 - 3x + 4$ na $K = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 \leq 3\}$.

2. Potrebni in zadostni pogoji na 2. odvodu, da je kritična točka lokalni ekstrem

Naj bo $D \subseteq \mathbb{R}^n$ odprta, $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ razreda C^2 na D .

- **Definicija.** Hessejeva matrika Hf 2. odvodov. Hessejeva forma.
- **Opomba.** Kaj lahko povemo o Hessejevi matriki?
- **Definicija.** Pozitivno (semi)definitna Hf . Negativno (semi)definitna Hf .
- **Opomba.** Karakterizacija pozitivne/negativne (semi)definitnosti s lastnimi vrednostmi Hf .
- **Trditev.** (Potrebni pogoji). Kaj velja, če ima f v točki $a \in D$ lokalni maksimum/minimum?
- **Trditev.** (Zadostni pogoji.) Kadar je stacionarna točka $a \in D$ funkcije f lokalni minimum/maksimum? Kadar nič od tega?
- **Zgled.** Določi $(Hf_i)(0, 0)$ za $f_1(x, y) = \frac{1}{2}(x^2 + y^2)$, $f_2(x, y) = \frac{1}{2}(-x^2 - y^2)$, $f_3(x, y) = \frac{1}{2}(x^2 - y^2)$.
- **Posledica.** Kako zgledajo zadostni pogoji za primer $n = 2$?
- **Zgled.** Naj bo $f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 + 2xyz$. Klasificiraj vse stacionarne točke funkcije f .

3. Vezani ekstremi

- **Izrek.** Obstoj Lagrangeevih multiplikatorjev.
- **Opomba.** Lagrangeeva metoda za iskanje vezanih ekstremov.
- **Zgled.** Določi stacionarne točke $f(x, y, z) = z$ na $M = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 + z^2 = 1; x + y + z = 0\}$.
- **Zgled.** Določi stacionarne točke $f(x, y, z) = x^2 - xy + y^2 - 3x + 4$ na robu $x^2 + y^2 = 9$.

2 Integral s parametri

Naj bo $f : [a, b]_x \times [c, d]_y \rightarrow \mathbb{R}$ funkcija. Gledamo funkcijo $F(y) = \int_a^b f(x, y) dx$, kjer $y \in [c, d]$ je *parameter*. Zanima nas v kakšni so povezavi lastnosti funkcije f in funkcije F .

1. Integral s parametri

- **Definicija.** Lokalno kompaktna podmnožica.
- **Trditev.** Zadostni pogoj za zveznost funkcije $F(u, v, y) = \int_u^v f(x, y) dx$.
- **Posledica.** Zadostni pogoj za zveznost funkcije $F(y) = \int_a^b f(x, y) dx$.

2. Odvajanje integrala s parametri

- **Trditev.** Zadostni pogoj, da smemo zamenjati vrstni red odvajanja in integriranja v $\frac{d}{dy} \int_a^b f(x, y) dx$.
Kaj lahko povemo o funkciji $F(y) = \int_a^b f(x, y) dx$?
- **Posledica.** Čemu je enako $\frac{d}{dy} \int_{\alpha(y)}^{\beta(y)} f(x, y) dx$? Pri kakšnih zadostnih pogojih?
- **Posledica.** Naj bo $y \in D^{\text{odp}} \subseteq \mathbb{R}^n$. Zadostni pogoj, da smemo zamenjati vrstni red odvajanja in integriranja v $\frac{\partial}{\partial y_j} \int_a^b f(x, y) dx$ za vse $j \in \{1, \dots, n\}$. Kaj lahko povemo o funkciji $F(y) = \int_a^b f(x, y) dx$?

3. Integral integrala s parametri

- **Trditev.** Zadostni pogoji, da smemo zamenjati vrstni red integriranja v $\int_c^d \left(\int_a^b f(x, y) dx \right) dy$.

4. Posplošeni integral s parametri

Naj bo Y neka množica, $a \in \mathbb{R}$, $f : [a, \infty)_x \times Y_y \rightarrow \mathbb{R}$ funkcija. Standardni predpostavki:

Funkcija f za vsak $y \in Y$ zvezna, tj. $x \mapsto f(x, y)$ zvezna na $[a, \infty)$ za vsak $y \in Y$.

Za vsak $y \in Y$ obstaja integral $F(y) = \int_a^\infty f(x, y) dx$

- **Definicija.** Kadar $F(y) = \int_a^\infty f(x, y) dx$ konvergira enakomerno na Y ?
- **Trditev.** Zadostni pogoji za zveznost funkcije $F(y) = \int_a^\infty f(x, y) dx$.
- **Definicija.** Kadar $F(y) = \int_a^\infty f(x, y) dx$ konvergira lokalno enakomerno na Y ?
- **Trditev.** Test enakomerne konvergence.
- **Trditev.** Zadostni pogoji, da smemo zamenjati vrstni red integriranja v $\int_a^\infty \left(\int_c^d f(x, y) dy \right) dx$.
- **Trditev.** Zadostni pogoji, da smemo zamenjati vrstni red integriranja v $\int_a^\infty \left(\int_c^\infty f(x, y) dy \right) dx$, če je f nenegativna.
- **Trditev.** Zadostni pogoji, da smemo zamenjati vrstni red integriranja v $\int_a^\infty \left(\int_c^\infty |f(x, y)| dy \right) dx$.
- **Trditev.** Zadostni pogoji, da smemo zamenjati vrstni red odvajanja in integriranja v $\frac{d}{dy} \int_a^\infty f(x, y) dx$.
Kaj lahko povemo o funkciji $F(y) = \int_a^\infty f(x, y) dx$?
- **Posledica.** Naj bo $y \in D^{\text{odp}} \subseteq \mathbb{R}^n$. Zadostni pogoj, da smemo zamenjati vrstni red odvajanja in integriranja v $\frac{\partial}{\partial y_j} \int_a^\infty f(x, y) dx$ za vse $j \in \{1, \dots, n\}$. Kaj lahko povemo o funkciji $F(y) = \int_a^\infty f(x, y) dx$?

5. Eulerjeva funkcija gama

- **Definicija.** Eulerjeva funkcija gama.
- **Trditev.** Lastnosti Eulerjeve funkcije gama.
- **Izrek.** S čim je enolično določena Eulerjeva funkcija gama?
- **Izrek.** Stirlingova formula.
- **Posledica.** Čemu je enako $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n!}{n^n e^{-n} \sqrt{2\pi n}}$? Kaj to pomeni?

6. Eulerjeva funkcija beta

- **Definicija.** Eulerjeva funkcija beta.
- **Trditev.** Lastnosti Eulerjeve funkcije beta.
- **Trditev.** Kaj če v $B(p, q)$ vpeljamo $x = \sin^2 t$?
- **Trditev.** Kaj če v $B(p, q)$ vpeljamo $t = \frac{t}{1+t}$?
- **Posledica.** Čemu je enako $B(p, 1-p)$?
- **Posledica.** Čemu je enako $B(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$?
- **Izrek.** Osnovna povezava med B in Γ .
- **Posledica.** Čemu je enako $\Gamma(\frac{1}{2})$?