1 Kinematika

Enakomerno pospešeno gibanje $\left(a := \frac{dv}{dt} = \text{const}\right)$.

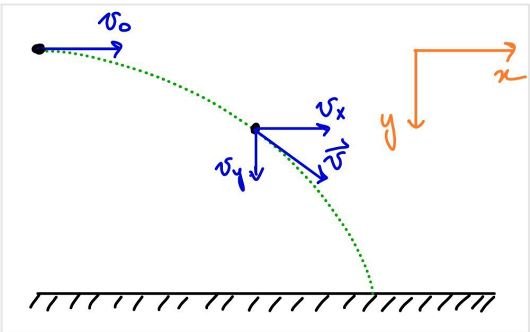
- $dv = a\,dt \implies \int_{v_0}^{v} dv = a \int_0^t dt \implies v - v_0 = at \implies \boxed{v = v_0 + at}$
- $v := \frac{ds}{dt} \implies ds = (v_0 + at)\,dt \implies \int_0^s ds = \int_0^t (v_0 + at)\,dt \implies \boxed{s = v_0 t + \frac{1}{2}at^2}$
- $v = \frac{ds}{dt},\ a = \frac{dv}{dt} \implies v\,dt = ds,\ a\,dt = dv \implies \frac{v}{a} = \frac{ds}{dv} \implies v\,dv = a\,ds \implies \int_{v_0}^{v} v\,dv = \int_0^s a\,ds$
  $\implies \frac{v^2}{2} - \frac{v_0^2}{2} = as \implies \boxed{v^2 - v_0^2 = 2as}$ (če imamo delo z pojemkom, spremenimo predznak)
- **Enakomerno gibanje:** Vzemimo $a = 0$

Prosti pad $(v_0 = 0,\ g = 9.8\ \text{m/s}^2)$.

- $\boxed{v = gt,\ t = \sqrt{\frac{2h}{g}},\ h = \frac{1}{2}gt^2}$

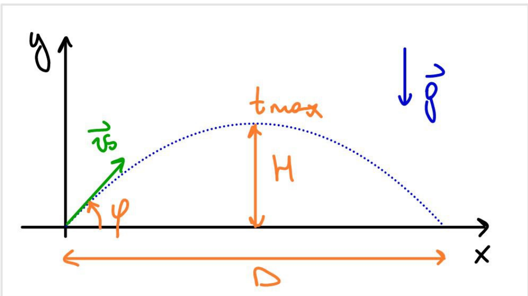
Relativna hitrost: $\vec{v}_r = \vec{v}_1 - \vec{v}_2,\ v_r = |\vec{v}_1 - \vec{v}_2|$

Vodoravni met



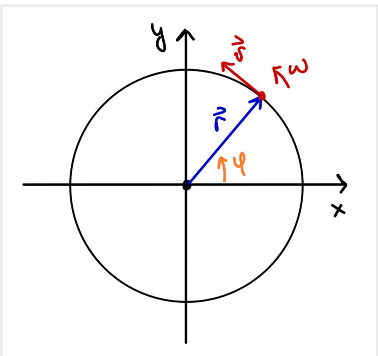
- $x(t) = v_0 t,\ y(t) = \frac{1}{2}gt^2$
- $v_x = v_0 = \text{const},\ v_y(t) = gt$

Poševni met



- $x(t) = v_0 t \cos\phi,\ y(t) = v_0 t \sin\phi - \frac{1}{2}gt^2$
- $v_x = v_0 \cos\phi,\ v_y(t) = v_0 \sin\phi - gt$
- $\boxed{t_{\max} = \frac{v_0 \sin\phi}{g},\ D = \frac{v_0^2 \sin 2\phi}{g},\ H = \frac{v_0^2 \sin^2\phi}{2g}}$
- Gibanje lahko razdelimo na dva dela: do $H_{\max}$ (poševni met) in po $H_{\max}$ (vodoravni met)
- Vodoravni met je posebni primer poševnega meta pri $\phi = 0$

Kroženje



- $\vec{r}(t) = r(\cos\phi, \sin\phi),\ \vec{v}(t) = r\omega(-\sin\phi, \cos\phi)$, kjer $\omega = \dot{\phi}$ **kotna hitrost**
  - $s = r\phi$, če merimo ϕ v radianih
- $a(t) = r\alpha(-\sin\phi, \cos\phi) + r\omega^2(-\cos\phi, -\sin\phi)$, kjer $\alpha = \ddot{\phi}$ **kotni pospešek**
  - $\vec{a}_t = r\alpha(-\sin\phi, \cos\phi)$ je tangentni pospešek (spreminjanje velikosti $\vec{v}$)
  - $\vec{a}_r = r\omega^2(-\cos\phi, -\sin\phi)$ je radialni pospešek (spreminjanje smeri $\vec{v}$)
- $\boxed{v = r\omega,\ a_t = r\alpha,\ a_r = r\omega^2 = \frac{v^2}{r},\ a = \sqrt{a_r^2 + a_t^2}}$
- $\omega = 2\pi\nu,\ \nu = \frac{1}{t_0}$, kjer t_0 je čas enega obrata, ν je **frekvenca**
- Enakomerno pospešeno kroženje ima iste enačbe kot enakomerno pospešeno gibanje

Vektorski opis kroženja

- Definiramo $\vec{\phi} = (0, 0, \phi)$ (smer $\vec{\phi}$ lahko dobimo po pravilu desnega vijaka), potem
  - $\vec{v} = \vec{\omega} \times \vec{r}$
  - $\vec{a} = \vec{\alpha} \times \vec{r} + \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r})$

Splošno gibanje

- $R = \dfrac{v^2}{a_r}$, $\omega = \dfrac{a_r}{v}$, $\alpha = \dfrac{a_t a_r}{v^2}$ (vsako gibanje je trenutno kroženje), a_t, a_r sta komponenti g

Splošni nasveti

- Lahko obrnemo čas (začetek = konec)!

2 Dinamika

2.1 Sile

Newtonovi zakoni

1. $\sum \vec{F} = 0 \implies \vec{v} = \text{const}$
2. $\sum \vec{F} = m\vec{a}$
3. $\vec{F}_{12} = -\vec{F}_{21}$

Sila trenja

- $F_{\text{tr}} \leq k_{\text{tr}} \cdot F_N$, kjer je F_N normalna sila

Sila vzmeti

- $F_{\text{vz}} = kx$, kjer je k koeficient vzmeti in je x raztezek

Težišče

- **Težišče** je $\vec{r}_T = \frac{1}{M} \sum m_j \vec{r}_j$, kjer je $M = \sum m_j$ **skupna masa**
- **II. Newtonov zakon za težišče:** $\sum \vec{F}_{\text{zun}} = M\vec{a}_T$

Splošni nasveti

- Zapišemo vse sile, ki delujejo v našem sistemu. Sistem lahko izberimo poljubno
- Ponavadi $\vec{F}_g$ razbijemo na statično in dinamično komponento
- Sile vrvi na škripec delujejo vzdolž vrvi:

Neinercialni sistemi

Naj bo K_1 ne pospešen (inercialni) sistem. Zapišemo II. Newtonov zakon v različnih neinercialnih (pospešenih) sistemih.

- **Linearno pospešen sistem K_2 z pospeškom $\vec{a}_0$**
  - **II. Newtonov zakon:** $\boxed{\vec{F}_1 + \vec{F}_{\text{sist}} = m\vec{a}_2}$, kjer $\vec{F}_{\text{sist}} = -m\vec{a}_0$
    - $\vec{F}_1$ je rezultanta vseh sil na telo v sistemu K_1
    - $\vec{a}_2 = \vec{a}_1 - \vec{a}_0$ je pospešek telesa v sistemu K_2
- **Sistem K_2 se vrsti okoli fiksne osi s kotno hitrostjo $\omega = \omega(t)$**
  - **II. Newtonov zakon:** $\boxed{\vec{F}_1 - m\vec{\alpha} \times \vec{r} - 2m\vec{\omega} \times \vec{v}_2 - m\vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}) = m\vec{a}_2}$
    - $-m\vec{\alpha} \times \vec{r}$ je **tangentna sila** (pospešuje vrtenje)
    - $-2m\vec{\omega} \times \vec{v}_2$ je **Coriolisova sila**
    - $-m\vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r})$ je **centrifugalna sila** (lahko jo ne upoštevamo pri delu z gravitacijo)
    - $\vec{v}_2$ je hitrost telesa v sistemu K_2, $\vec{a}_2$ je pospešek telesa v sistemu K_2

2.2 Energija

Ko čas gre iz igre (nas ne zanima kdaj se nekaj zgodilo) se lahko ukvarjamo z energijo.

Konetična energija točkastega delca

$$\vec{F} = m\vec{a} = m\frac{d\vec{v}}{dt} \ / \cdot d\vec{s} \implies \int_1^2 \vec{F} \cdot d\vec{s} = \Delta(W_\mathrm{k}), \ (*)$$

kjer $W_\mathrm{k} = \frac{mv^2}{2}$ **kinetična energija** točkastega delca, $[W_\mathrm{k}] = \mathrm{J} = \mathrm{Nm}$.

- $\int_1^2 \vec{F} \cdot d\vec{s} = A$ je **delo** sile $\vec{F}$, kjer $d\vec{s}$ je premik **prijemališča** sile
- $(*)$ je izrek o mehanske (kinetične energije)

Sistem točkastih teles: $\int_1^2 \vec{F}_\mathrm{zun} \cdot d\vec{s}_T = \Delta(W_{\mathrm{k,\ T}})$, kjer $W_{\mathrm{k,\ T}} = \frac{1}{2}mv_T^2$ **kinetična energija težišča**

- $\widetilde{A}_\mathrm{zun} = \int_1^2 \vec{F}_\mathrm{zun} \cdot d\vec{s}_T$ je **psevdodelo** rezultante zunanjih sil

Potencialna in prožnostna energija
Eksplicitno izračunamo delo silo teže in delo sile vzmeti, dobimo:

$$A_{\mathrm{F}_g} = -mgh \quad \text{in} \quad A_\mathrm{vz} = \frac{1}{2}ks^2$$

Potem lahko zapišemo **izrek o mehanske energije** v oblike

$$\boxed{\widetilde{A}_\mathrm{zun} = \Delta(W) = W_\mathrm{konec} - W_\mathrm{začetek}, \ W = W_\mathrm{k} + W_\mathrm{p} + W_\mathrm{pr}}$$

kjer je $W_\mathrm{p} = mgh$ **potencialna energija** in $W_\mathrm{pr} = \frac{1}{2}ks^2$ **prožnostna energija** ter $\widetilde{A}_\mathrm{zun}$ psevdodelo vseh zunanjih sil razen sile teže in sil vzmeti. V posebnem primeru, ko ni zunanjih sil: $\widetilde{A}_\mathrm{zun} = 0$, tj. energija se ohranja.

Moč
Včasih je pomembno, kako hitro opravimo neko delo.

- **Moč** P je $P = \frac{dA}{dt}$, $[P] = \frac{\mathrm{J}}{\mathrm{s}} = \mathrm{Watt}$

2.3 Gibalna količina

Točkasto telo

$$\vec{F} = m\vec{a} = m\frac{d\vec{v}}{dt} \ / \cdot d\vec{t} \implies \int \vec{F} \cdot d\vec{t} = m(v_\mathrm{konec} - v_\mathrm{začetek}) \implies \int_1^2 \vec{F}dt = \Delta\vec{G}, \ (*)$$

- $(*)$ je **izrek o gibalne količine**
- $\vec{G} = m\vec{v}$ je **gibalna količina** za točkasto telo
- $\int_1^2 \vec{F}dt$ je **sunek sile**

Sistem točkastih teles: $\int_1^2 \vec{F}_\mathrm{z}dt = \Delta\vec{G}_T$

- Če $\int_1^2 \vec{F}dt = 0$ ali $\int_1^2 \vec{F}_\mathrm{z}dt = 0$, potem gibalna količina se ohranja

Trki

1. **Neelastični (neprožni) trk:** telesa se zlepijo in po trku gibljejo skupaj
   - Gibalna količina se ohranja
   - W_k se NE ohranja $\rightsquigarrow$ stvari se segrejejo
2. **Elastični trk:** telesa se odbijejo
   - Gibalna količina se ohranja
   - W_k se ohranja
   - $\boxed{v_1 = -\frac{1-\mu}{1+\mu}v, \ v_2 = \frac{2\mu}{1+\mu}v}$, kjer $\mu = \frac{m}{M}$

Sila curka

- $\vec{F}_c = \phi_m \Delta v$, kjer je $\phi_m = \frac{\Delta m}{\Delta t}$ **masni tok**
  - $\phi_m = \frac{dm}{dt} = \phi_V \rho$, kjer je $\phi_V = \frac{dV}{dt} = \frac{Svdt}{dt} = Sv$ **prostorninski tok**
  - Zapišemo izrek o gibalne količine (sunek sile je enak spremembe gibalne količine)

Raketa

- Za sistem si izberimo raketo + majhni drobec goriva. Gibalna količina se ohranja. Dobimo enačbo:
  - $u dm_g = m dv$, kjer u hitrost izpušnih plinov glede na raketo in m trenutna masa rakete in goriva
    * Definiramo: $dm = m - (m + dm_g) \implies dm = -dm_g$, dobimo: $dm = -dm_g$

Splošni nasveti

- Izberimo si sistem, za kateri znamo zapisati želene količine
- Poglejmo tik do in po trku
- Lahko zapišemo gibalno količino za celoten sistem ali za vsako telo posebej

2.4 Statika

- Uporaba III. Newtonovega zakona
- **Navor** je $\vec{M} = \vec{r} \times \vec{F}$, kjer je $\vec{r}$ vektor od osi vrtenja do telesa.

2.5 Vztrajnostni moment

- **Vztrajnostni moment** okoli fiksne osi je $J = \int_{\text{po telesu}} r^2\, dm$ (oz. diskretna vsota)
- **Newtonov zakon za vrtenje okoli fiksne osi**:

$$F = ma \implies F \cdot r = ma \cdot r \implies M = m\alpha r \cdot r \implies M = mR^2\alpha \implies M = J\alpha$$

- **Šteinerjev izrek:** Vztrajnostni moment telesa pri vrtenju okoli fiksne osi ξ je

$$J_\xi = J_T + ma^2,$$

  kjer je J_T vztrajnostni moment telesa pri vrtenju okoli težišča in a pravokotna razdalja do osi vrtenja.

Osnovne vztrajnostni momenti

Telo	Vztrajnostni moment J
Točkasta masa m	$J = mr^2$
Obroč s polmerom r	$J = mr^2$
Palica dolžine l okrog težišča	$J = \frac{1}{12}ml^2$
Palica dolžine l okrog krajišča	$J = \frac{1}{3}ml^2$
Okrogla plošča s polmerom r	$J = \frac{1}{2}mr^2$
Valj s polmerom r	$J = \frac{1}{2}mr^2$
Stožec z višino h in polmerom r	$J = \frac{3}{10}mr^2$
Stožec z višino h in polmerom r	$J = \frac{3}{10}mr^2$
Krogla s polmerom r okrog simetrijske osi	$J = \frac{2}{5}mr^2$

Drsenje/Kotaljenje

- Pogoj, da ni drsanja: $v_t = \omega r$, tj. spodnja točka miruje.
  - Če telo drsi: $F_{\text{tr}} = k_{\text{tr}} N$ in $a \neq \alpha r$
  - Če telo kotali: $F_{\text{tr}} < k_{\text{tr}} N$ in $a = \alpha r$

Splošni nasveti

- Lahko prištejemo in odštejemo isto silo, in pogledamo kaj vpliva na težišče in kaj vpliva na vrtenje.

2.6 Kinetična energija vrtenja

- Kinetična energija vrtenja:

$$W_\mathrm{k} = \int \frac{v^2 dm}{2} = \int \frac{r^2\omega^2 dm}{2} = \frac{\omega^2}{2}\int r^2 dm = \frac{1}{2}J\omega^2$$

- Kinetična energija kotaljenja: $W_\mathrm{k} = \frac{1}{2}mv_T^2 + \frac{1}{2}J_T\omega^2$

2.7 Vrtilna količina

- **Izrek o vrtilni količine** (pri vrtenju okoli fiksne osi):

$$\int M\,dt = \Delta\Gamma = Jw_\mathrm{k} - Jw_\mathrm{z}$$

Splošni nasveti
- Izrek velja za vrtenje okoli fiksne osi, če jih imamo več, zapišemo izrek za vsako telo posebej.

2.8 Gravitacija

Par točkastih teles

$$F_g = G\frac{m_1 m_2}{r^2},$$

kjer $G = 6,67 \cdot 10^{-11}\,\frac{\mathrm{Nm}^2}{\mathrm{kg}^2}$
- Gravitacijski pospešek na Zemlje: $g(h) = G\frac{M}{(R+h)^2}$

Potencialna energija Par točkastih mas:

$$A = \int_r^\infty F_g\,dr = \int_r^\infty G\frac{m_1 m_2}{r^2}\,dr = G\frac{m_1 m_2}{r} = W_p(\infty) - W_p(r).$$

Definiramo $W_p(\infty) = 0$ sledi, da $W_p(r) = -G\frac{m_1 m_2}{r}$

Sateliti
- Pogoj, da satelit ne pade na Zemlju: $F_g = F_\mathrm{cf}$
- Ubežna hitrost:
  - Začetek: Kinetična energija + Gravitacijska potencialna energija
  - Konec (smo v ∞): $W_p(\infty) = 0$, $W_k(\infty) = 0$

Približevanje
- Energija je konstantna.
- Vrtilna količina v najbližjih točkah je enaka.

Splošno

- **Kosinusni izrek.** $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\alpha$, kjer je α kot med stranicama a in b
- **Vektorski produkt.** $\begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_2b_3 - a_3b_2 \\ a_3b_1 - a_1b_3 \\ a_1b_2 - a_2b_1 \end{bmatrix}$, $|\vec{a} \times \vec{b}| = ab\sin\alpha$, $\vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c}) = (\vec{a} \cdot \vec{c})\vec{b} - (\vec{a} \cdot \vec{b})\vec{c}$
- **Radiani - Stopinji.** $1 \text{ rd} = 1 \text{ deg} \cdot \frac{\pi}{180°}$

Osnovne konstante

Velikost	**Oznaka**	**Vrednost**
Hitrost svetlobe v vakuumu	c	3×10^8 m/s
Hitrost zvoka v zraku (pri 20°C)	v_{zvok}	343 m/s
Gostota vode (pri 4°C)	ρ_{voda}	1000 kg/m^3
Gostota zraka (pri 20°C in 1 atm)	ρ_{zrak}	1,204 kg/m^3
Gravitacijski pospešek	g	9,81 m/s^2
Gravitacijska konstanta	G	$6{,}67 \cdot 10^{-11}$ Nm^2/kg^2
Radij Zemlje	R	6400 km
Masa Zemlje	M	$6 \cdot 10^{24}$ kg
Planckova konstanta	h	$6{,}626 \times 10^{-34}$ J $\cdot$ s
Masa elektrona	m_e	$9{,}109 \times 10^{-31}$ kg
Masa protona	m_p	$1{,}673 \times 10^{-27}$ kg
Elementarni naboj	e	$1{,}602 \times 10^{-19}$ C = As
Boltzmannova konstanta	k_B	$1{,}381 \times 10^{-23}$ J/K

Tabela 1: Osnovne fizikalne konstante v mehaniki in sorodnih področjih

Splošni nasveti

- Če se da, izognemo se kvadratnih enačb