Spolšna topologija

30. november 2024

Metrični prostori

0.1 Metrični prostori

Definicija 0.1. *Metrični prostor* je množica X skupaj z preslikavo $d : X \times X \to \mathbb{R}$, za katero velja:
- $d(x, x') = 0 \Leftrightarrow x = x'$,
- $d(x, x') = d(x', x)$,
- $d(x, x'') \leq d(x, x') + d(x', x'')$.

Definicija 0.2. Naj bo (X, d) metrični prostor.
- *Odprta krogla s središčem v a in polmerom r* je množica $K(a, r) = \{x \in X;\ d(a, x) < r\}$.
- *Zaprta krogla s središčem v a in polmerom r* je množica $K(a, r) = \{x \in X;\ d(a, x) \leq r\}$.
- *Okolica točke a* je vsaka taka množica, ki vsebuje odprto kroglo $K(a, r)$ za nek $r > 0$.

Definicija 0.3. Naj bo (X, d) metrični prostor in $A \subset X$.
- Točka $x \in X$ je *notranja točka množice A*, če obstaja $r > 0$, da $K(a, r) \subset A$.
- Točka $a \in X$ je *zunanja točka množice A*, če obstaja $r > 0$, da $K(a, r) \cap A = \emptyset$.
- Točka $a \in X$ je *robna točka množice A*, če vsaka njena okolica seka A in A^c.

Množico $\operatorname{Int} A$ vseh notranjih točk množice A imenujemo *notranjost od A*.
Množico $\operatorname{Cl} A$ vseh točk, za katere za vsak $r > 0$, krogla $K(a, r)$ seka A, imenujemo *zaprtje množice A*.
Množico ∂A vseh robnih točk množice A imenujemo *meja množice A*.

Trditev 0.1. Naj bo (X, d) metrični prostor in $A \subset X$. Velja:
- $\partial A = \operatorname{Cl} A \setminus \operatorname{Int} A$.
- $\operatorname{Cl} A = \operatorname{Int} A \cup \partial A$.
- $\operatorname{Int} A = \operatorname{Cl} A \setminus \partial A$.

Definicija 0.4. Naj bo (X, d) metrični prostor in $A \subset X$.
- Množica A je *odprta* v metričnem prostoru X, če je vsaka njena točka notranja.
- Množica A je *zaprta* v metričnem prostoru X, če vsebuje vse svoje robne točke.

Trditev 0.2. Naj bo (X, d) metrični prostor in $A \subset X$, potem

$$A \text{ je odprta } \Leftrightarrow A^c \text{ je zaprt.}$$

Izrek 0.3. Naj bo O družina vseh odprtih množic metričnega prostora (X, d). Potem
- $X \in O$, $\emptyset \in O$.
- Če je $A_\lambda \in O$ za vsak $\lambda \in \Lambda$, potem $\bigcup_{\lambda \in \Lambda} A_\lambda \in O$.
- Če je $n \in \mathbb{N}$ in $A_j \in O$ za vsak $j = 1, 2, \ldots, n$, potem $\bigcap_{j=1}^{n} A_j \in O$.

Trditev 0.4. Vsaka odprta krogla je odprta množica in vsaka zaprta krogla je zaprta množica.

Trditev 0.5. Naj bo (X, d) metrični prostor in $A \subset X$, potem

$$A \text{ je odprta } \Leftrightarrow A \text{ lahko predstavimo kot unijo odprtih krogel.}$$

Definicija 0.5. Naj bo (X, d) metrični prostor in $A \subset X$. Točka $a \in X$ je *stekališče množice A*, če vsaka okolica točke a vsebuje neskončno mnogo točk iz množice A.

Trditev 0.6. Naj bo (X, d) metrični prostor in $A \subset X$. Potem

$$A \text{ je zaprta } \Leftrightarrow A \text{ vsebuje vsa svoja stekališča.}$$

0.2 Zaporedja v metričnih prostorih

Definicija 0.6. Naj bo (X, d) metrični prostor. *Zaporedje v metričnem prostoru* X je preslikava $\mathbb{N} \to X$.

Definicija 0.7. Naj bo (X, d) metrični prostor. Pravimo, da zaporedje $(a_n)_n$ v X *konvergira proti* $a \in X$, če

$$\forall \epsilon > 0 \,.\, \exists n_0 \in \mathbb{N} \,.\, \forall n \in \mathbb{N} \,.\, n \geq n_0 \Rightarrow d(a_n, a) < \epsilon.$$

V tem primeru a imenujemo *limita zaporedja.*

Definicija 0.8. Naj bo (X, d) metrični prostor. Pravimo, da zaporedje $(a_n)_n$ v X *izpolnjuje Cauchyjev pogoj*, če

$$\forall \epsilon > 0 \,.\, \exists n_0 \in \mathbb{N} \,.\, \forall n, m \in \mathbb{N} \,.\, n, m \geq n_0 \Rightarrow d(a_n, a_m) < \epsilon.$$

Izrek 0.7. Vsako konvergentno zaporedje v metričnem prostoru (X, d) izpolnjuje Cauchyjev pogoj.

Definicija 0.9. Pravimo, da je metrični prostor (X, d) *poln*, ce je vsako Cauchyjevo zaporedje iz X tudi konvergentno v X.

Izrek 0.8. Naj bo $C[a, b]$ z običajno (supremum) metriko. Tedaj

$$(f_n)_n \text{ v } C[a, b] \text{ konvergira proti } f \in C[a, b] \Leftrightarrow (f_n)_n \text{ enakomerno konvergira proti } f \text{ na } [a, b].$$

Izrek 0.9. Metrični prostor $(C[a, b], d_\infty)$ je poln metrični prostor.

0.3 Preslikave med metričnimi prostori

Naj bosta (X, d) in (X', d') metrična prostora. Naj bo $D \subset X$, $D \neq \emptyset$. Obravnamo preslikave $f : D \to X'$.

Definicija 0.10. Preslikava $f : D \to X'$ je *zvezna v točki* $a \in X$, če

$$\forall \epsilon > 0 \,.\, \exists \delta > 0 \,.\, \forall x \in D \,.\, d(x, a) < \delta \Rightarrow d'(f(x), f(a)) < \epsilon.$$

Izrek 0.10. Preslikava $f : D \to X'$ je zvezna v točki $a \in D$ natanko tedaj, ko za vsako zaporedje $(x_n)_n$ v D, ki konvergira proti $a \in D$, zaporedje $(f(x_n))_n$ v X' konvergira proti $f(a) \in X'$.

Definicija 0.11. Pravimo, da je preslikava $f : D \to X'$ je *zvezna*, če je zvezna v vsaki točki iz D.

Izrek 0.11. Dana je preslikava $f : D \to X'$. Preslikava f je zvezna natanko tedaj, ko praslika vsake odprte množice v X' je odprta v D.

Definicija 0.12. Preslikava $f : D \to X'$ je *enakomerno zvezna*, če

$$\forall \epsilon > 0 \,.\, \exists \delta > 0 \,.\, \forall x, x' \in D \,.\, d(x, x') < \delta \Rightarrow d'(f(x), f(x')) < \epsilon.$$

Definicija 0.13. Preslikava $f : D \to X'$ je *C-lipschitzova*, če

$$\forall x, x' \in D \,.\, d'(f(x), f(x')) \leq C d(x, x').$$

Trditev 0.12. Za preslikavo $f : D \to X'$ velja:

$$f \text{ je } C\text{-lipschitzova } \Rightarrow f \text{ je enakomerno zvezna } \Rightarrow f \text{ je zvezna.}$$

1 Prostori in preslikave

1.1 Topološki prostori

Definicija 1.1. Naj bo X množica. **Topologija** na množici X je družina $\mathcal{T} \subseteq P(X)$, ki zadošča naslednjim pogojem:
(T0) $\emptyset \in \mathcal{T}$, $X \in \mathcal{T}$.
(T1) Poljubna unija elementov $\mathcal{T}$ je element $\mathcal{T}$.
(T2) Poljuben končen presek elementov $\mathcal{T}$ je element $\mathcal{T}$.
Elemente $\mathcal{T}$ razglasimo za **odprte množice** v X.

Opomba. Aksiom (T2) zadošča preveriti za poljubne dve množice in uporabit indukcijo.

Definicija 1.2. **Topološki prostor** je množica X z neko topologijo $\mathcal{T}$. Pišemo: $(X, \mathcal{T})$.

Primer (Topologija iz metrike)**.** Naj bo (X, d) metrični prostor. Definiramo $\mathcal{T}_d = \{\text{vse možne unije odprtih krogel}\}$. $\mathcal{T}_d$ je topologija, ki je **porojena (inducirana)** z metriko d.

Definicija 1.3. Topološki prostor je **metrizabilen**, če je porojen z neko metriko.

Primer (Trivialna topologija)**.** Naj bo X poljubna množica. Definiramo $\mathcal{T} = \{\emptyset, X\}$. $\mathcal{T}$ je topologija, rečemo ji **trivialna topologija**.
Trivialna topologija ni metrizabilna, če ima X vsaj 2 elementa, ker v metričnem prostoru z množico z vsaj 2 elementoma vedno lahko najdemo disjunktne odprte krogle.

Primer (Diskretna topologija)**.** Definiramo $\mathcal{T} = P(x)$. $\mathcal{T}$ je topologija, rečemo ji **diskretna topologija**.
Je metrizabilna, ker inducirana z metriko $d(x, x') = \begin{cases} 0, & x = x' \\ 1, & x \neq x' \end{cases}$. Ker krogle s polmerom manj kot 1 vsebujejo le središče, sklepamo, da so vse enoelementne množice odprte. Potem so pa vse podmnožice X odprte, saj jih lahko predstavimo kot unije enoelementnih.

Opomba. Topologija poda pojem **bližine** na implicitni način z pomočjo okolic.

Definicija 1.4. Naj bo $(X, \mathcal{T})$ topološki prostor in $A \subseteq X$. **Notranjost množice** A je največji element topolgije $\mathcal{T}$, ki je vsebovan v A. Oznaka: $\operatorname{Int} A$.

Opomba. Zakaj je definicija smiselna?
- Pogoj za notranjo točko: $x \in U \subseteq A$, kjer $U \in \mathcal{T}$.
- $\operatorname{Int} A$ je unija vseh odprtih množic, ki so vsebovane v A, torej $\operatorname{Int} A = \bigcup\{U \in \mathcal{T};\ U \subseteq A\}$. Sledi, da je $\operatorname{Int} A$ največja odprta podmnožica A.

Definicija 1.5. Naj bo $(X, \mathcal{T})$ topološki prostor in $A \subseteq X$. Množica A je **zaprta**, če je $A^c = X - A \in \mathcal{T}$.

Opomba. Lahko topologijo vpeljemo tudi tako, da predpišemo, katere množice so zaprte.
Denimo, da je dana družina Z podmnožic X, za katero velja:
(T0) $\emptyset \in Z$, $X \in Z$.
(T1) Poljuben presek elementov Z je element Z.
(T2) Poljubena končna unija elementov Z je element Z.
Potem komplementi množic iz Z tvorijo topologijo na X in Z je ravno družina zaprtih množic v tej topologiji.

Primer. Če zahtevamo, da so točke X zaprte množice, potem so tudi končne podmnožice X so zaprte. Torej družina

$$\{\text{končme podmnožice X}\} \cup \{X\}$$

zadošča zahtevam (T1) in (T2). Torej komplementi

$$\mathcal{T} = \{U \subset X; X - U \text{ končna}\} \cup \{\emptyset\}$$

so topologija na X. Tej topologiji rečemo **topologija končnih komplementov** $\mathcal{T}_{kk}$.
Topologija končnih komplementov je najmanjša topologja v kateri vse točke zaprte.
Če je X končna, potem $\mathcal{T}_{\text{kk}} = \mathcal{T}_{\text{disk}}$ na X.

Definicija 1.6. Naj bo $(X, \mathcal{T})$ topološki prostor in $A \subseteq X$. **Zaprtje množice** A je presek vseh zaprtih množic, ki vsebujejo A. Torej zaprtje množice A je najmanjša zaprta množica v X, ki vsebuje A. Oznaka: $\operatorname{Cl} A = \overline{A}$.

Primer. Velja:
- $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cup \overline{B}$. **Dokaz.** Definicija zaprtja.
- $\overline{A \cap B} \subseteq \overline{A} \cap \overline{B}$. **Dokaz.** Definicija zaprtja in $(\mathbb{N}, \mathcal{T}_{kk})$.

Definicija 1.7. Naj bo $(X, \mathcal{T})$ topološki prostor in $A \subseteq X$. **Meja množice** A je $\operatorname{Fr} A = \operatorname{Cl} A - \operatorname{Int} A$.

Opomba. Meja A je vedno zaprta množica, saj $\operatorname{Fr} A = \operatorname{Cl} A - \operatorname{Int} A = \operatorname{Cl} A \cap (\operatorname{Int} A)^c$.

1.2 Zvezne preslikave

Definicija 1.8. Naj bosta $(X, \mathcal{T}_X)$ in $(Y, \mathcal{T}_Y)$ topološka prostora. Preslikava $f : (X, \mathcal{T}_X) \to (Y, \mathcal{T}_Y)$ je **zvezna**, če je praslika vsake odprte množice odprta, tj. če iz $V \in \mathcal{T}_Y$ sledi $f^*(V) \in \mathcal{T}_X$.

Primer. Primeri zveznih preslikav.

1. Vse zvezne funkcije v smislu metričnih prostorov so zvezne kot funkcije med porojenimi topologijami.
2. Naj bo $f : (X, \mathcal{T}_X) \to (Y, \mathcal{T}_Y)$.
   2.1 Naj bo $\mathcal{T}_Y$ trivilna topologija, potem f je vedno zvezna.
   2.2 Naj bo $\mathcal{T}_X$ diskretna topologija, potem f je vedno zvezna.
3. Naj bosta $(X, \mathcal{T})$ in $(X, \mathcal{T}')$ topološka prostora. Funkcija $\mathrm{id} : X \to X'$ je zvezna natanko tedaj, ko $\mathcal{T}' \subseteq \mathcal{T}$.
4. Če je $f : (X, \mathcal{T}_X) \to (Y, \mathcal{T}_Y)$ konstanta, tj. $\exists y_0 \in Y \,.\, \forall x \in X \,.\, f(x) = y_0$, potem je f zvezna.
5. Naj bo $f : (\mathbb{R}, \mathcal{T}_{\mathrm{kk}}) \to (\mathbb{R}, \mathcal{T}_{\mathrm{evkl}})$. Potem konstante so edine zvezne funkcije.
   Dokaz. V $(X, \mathcal{T}_{\mathrm{kk}})$ ni disjunktnih nepraznih odprtih množic, če je X neskončna.
   Splošneje. Naj bosta X, Y neskončni množici, d metrika na Y. Naj bo $f : (X, \mathcal{T}_{\mathrm{kk}}) \to (Y, \mathcal{T}_d)$. Potem

$$f \text{ je zvezna} \Leftrightarrow f \text{ je konstanta.}$$

Uvedemo neke oznake in okrajšave:

- Naj bosta $(X, \mathcal{T}_X), (Y, \mathcal{T}_Y)$ topološka prostota. Označimo z $C((X, \mathcal{T}_X), (Y, \mathcal{T}_Y))$ množico vseh zveznih preslikav $C(X, Y)$. Tudi $C(X) = C(X, \mathbb{R})$.
- **Prostor** X je množica z neko topologijo.
- **Preslikava** je zvezna funkcija.

Trditev 1.1. Kompozitun preslikav je preslikava.

Dokaz. Definicija zveznosti. □

Trditev 1.2. Naj bosta X, Y prostora. Ekvivalentne so izjave za $f : X \to Y$:

1. f je zvezna.
2. Praslika z f vsake zaprte množice je zaprta.
3. $f(\overline{A}) \subseteq \overline{f(A)}$.

Dokaz. (1) $\Leftrightarrow$ (2). $f^*(A^c) = (f^*(A))^c$.
(2) $\Leftrightarrow$ (3). LMN: $A \subseteq f^*(f(A))$, $f(f^*(B)) \subseteq B$. Monotonost f_*, f^*. STOP: $f^*(B)$ je zaprta $\Leftrightarrow f^*(B) = \overline{f^*(B)}$. □

1.3 Homeomorfizmi

Definicija 1.9. Naj bo $f : (X, \mathcal{T}_X) \to (Y, \mathcal{T}_Y)$ funkcija. Funkcija f je **homeomorfizem**, če:

- f je bijekcija.
- f_* je bijekcija med $\mathcal{T}_X$ in $\mathcal{T}_Y$, tj. $\forall U \in \mathcal{T}_X \,.\, f_*(U) \in \mathcal{T}_Y \wedge \forall V \in \mathcal{T}_Y \,.\, f^*(V) \in \mathcal{T}_X$.

Opomba. Pogoj $\forall V \in \mathcal{T}_Y \,.\, f^*(V) \in \mathcal{T}_X$ je ravno zveznost funkcije f.

Definicija 1.10. Če obstaja homeomorfizem $f : (X, \mathcal{T}_X) \to (Y, \mathcal{T}_Y)$, potem rečemo, da sta prostora X in Y **homeomorfna**. Oznaka: $X \approx Y$.

Opomba. Homeomorfizem je ekvivalenčna relacija. To pomeni, da lahko dokažemo, da sta dva prostora homeomorfna, če pokažemo, da sta vsak od njih homeomorfen nekemu drugemu.

Definicija 1.11. Funkcija $f : (X, \mathcal{T}_X) \to (Y, \mathcal{T}_Y)$ je **odprta**, če je slika vsake odprte množice odprta. Funkcija f je **zaprta**, če je slika vsake zaprte množice zaprta.

Trditev 1.3. Naslednje izjave o funkciji $f : X \to Y$ so ekvivalentne:

1. $f : X \to Y$ je homeomorfizem.
2. f je bijektivna, f in f^{-1} sta zvezni.
3. f je bijektivna, zvezna in odprta.
4. f je bijektivna, zvezna in zaprta.

Dokaz. Očitne implikacije. □

Primer. Ali sta prostora $[0, 1) \cup \{2\}$ in $[0, 1]$ homeomorfna? Ali inverz zvezne bijekcije vedno zvezen?

Trditev 1.4. Nekatere zvezne funkcije so avtomatično zaprte (oz. odprte):
- $f^{\text{zv}} : X^{\text{komp}} \to Y^{\text{metr}}$ je vedno zaprta.
- Projekcija $X \times Y \to X$ je vedno odprta.
- Preslikave $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, ki so gladke in imajo neničelni odvod, so vedno odprte.

Primer. Pokaži, da vsak interval (končen ali neskončen) homeomorfen enemu izmed $[0,1],\ [0,1),\ (0,1)$.
Pokaži, da intervali $[0,1],\ [0,1),\ (0,1)$ niso paroma homeomorfni.

Definicija 1.12. **Topološka lastnost** je katerakoli lastnost prostora, ki se ohranja pri homeomorfizmih.

Primer. Ali je kompaktnost/omejenost/polnost topološka lastnost?

Upeljamo oznake:
- $B^n := \{\vec{x} \in \mathbb{R}^n;\ ||\vec{x}|| \leq 1\}$ je **enotska n-krogla**.
- $\mathring{B}^n := \{\vec{x} \in \mathbb{R}^n;\ ||\vec{x}|| < 1\}$ je **odprta enotska n-krogla**.
- $S^{n-1} := \{\vec{x} \in \mathbb{R}^n;\ ||\vec{x}|| = 1\}$ je **enotska $(n-1)$-sfera**.

Homeomorfizem med $(0,1)$ in $\mathbb{R}$ lahko posplošimo do homeomorfizma med odprto kroglo $\mathring{B}^n$ in $\mathbb{R}^n$. Navaden homeomorfizem je

$$f : \mathring{B}^n \to \mathbb{R}^n,\ f(\vec{x}) := \frac{\vec{x}}{1 - ||\vec{x}||},\ f^{-1}(\vec{x}) := \frac{\vec{x}}{1 + ||\vec{x}||},$$

tj, raztegnimo vsak poltrak od 0 do ∞.
Sfera v $\mathbb{R}^n$ topološko bolj podobna $\mathbb{R}^{n-1}$ kot $\mathbb{R}^n$.
Naj bo $N = (0, \ldots, 0, 1) \in \mathbb{R}^n$ severni tečaj sfere. Navaden homeomorfizem med $S^{n-1} - \{N\}$ in $\mathbb{R}^{n-1}$ je

$$f : S^{n-1} - \{N\} \to \mathbb{R}^{n-1},\ f(x_1, \ldots, x_n) = \frac{1}{1 - x_n}(x_1, \ldots, x_{n-1}),$$

tj. gledamo presek premic skozi točki N in $T \in S^{n-1}$ z ravnino $\mathbb{R}^{n-1}$.
Njen inverz je dan z

$$\mathbb{R}^{n-1} \to S^{n-1} - \{N\},\ g(\vec{x}) = \left(\frac{2\vec{x}}{||\vec{x}||^2 + 1}, \frac{||\vec{x}||^2 - 1}{||\vec{x}||^2 + 1} \right).$$

Bijekcijo f imenujemo **stereografska projekcija**.
Sledi, da $S^{n-1} - \{N\} \approx \mathbb{R}^{n-1}$. Jasno je, da bi enak rezultat dobili, če bi iz sfere izrezali katerokoli točko. Sklepamo, da ima vsaka točka S^{n-1} okolico, ki je homeomorfna $\mathbb{R}^{n-1}$. Pravimo, da je S^{n-1} **lokalno homeomorfna** prostoru $\mathbb{R}^{n-1}$.

Definicija 1.13. Prostore, ki so lokalno homeomorfne kakemu evklidskemu prostoru, imenujemo **mnogoterosti**.

1.4 Baze in predbaze

Definicija 1.14. Naj bo $(X, \mathcal{T})$ prostor. Družina $B \subseteq \mathcal{T}$ je **baza topologije** $\mathcal{T}$, če lahko vse elemente $\mathcal{T}$ zapišemo kot unije elementov B.

Primer. Primeri baz. Ali so lahko baze majhne?
- Naj bo (X, d) metrični prostor. Krogle so baza metrične topologije $\mathcal{T}_d$. Še več: Dovolj je, če vzamemo samo majhne krogle, npr. z radijem $\frac{1}{n}$.
- Če vzemimo $(X, \mathcal{T}_{\text{disk}})$, potem vsaka baza vsebuje vse enojčke.
- Ali bi v $(\mathbb{R}^n, \mathcal{T}_{\text{evkl}})$ lahko za bazo vzeli le krogle s središči v $\mathbb{Q}^n$?

Trditev 1.5. Naj bo $(X, \mathcal{T}_X)$ prostor, B_x baza $\mathcal{T}_X$. Naj bo $(Y, \mathcal{T}_Y)$ prostor, B_Y baza $\mathcal{T}_Y$. Velja:
1. $A \subseteq X$ je odprta $\Leftrightarrow \forall a \in A \,.\, \exists B \in B_x \,.\, a \in B \subseteq A$.
2. Naj bo $f : X \to Y$ funkcija. Potem
   - f je zvezna $\Leftrightarrow \forall B \in B_Y \,.\, f^*(B) \in \mathcal{T}_X$.
   - f je odprta $\Leftrightarrow \forall B \in B_X \,.\, f_*(B) \in \mathcal{T}_Y$.

Dokaz. Slike in praslike ohranjajo unije. □

Primer. Ali je $f : S^1 \to S^1 \subseteq \mathbb{C}$ (enotska kompleksna števila), $f(z) = z^2$ odprta?

Definicija 1.15. Naj bo X prostor, $x \in X$. Družina $B_X \subseteq \mathcal{T}$ je **lokalna baza okolic** X, če za vsako odprto okolico U, ki vsebuje x, obstaja $B \in B_X$, da $x \in B \subseteq U$.

Opomba. Običajno prevzamemo, da so B_X okolice x.

Trditev 1.6. Če je $\mathcal{B}$ baza topologije $\mathcal{T}$, potem je $B_x = \{B \in \mathcal{B};\ x \in B\}$ je lokalna baza okolic x.
Obratno: $\mathcal{B} := \bigcup_{x \in X} B_x$ je baza topologije X.

Primer. V metričnem prostoru (X, d) je $\{K(x, r);\ r \in \mathbb{Q}\}$ lokalna baza pri x.

Vzemimo neko družino B. Definiramo $\mathcal{T} = \{\text{unije elementov } B\}$. Ali je $\mathcal{T}$ topologija?

Trditev 1.7. Naj bo $\mathcal{B}$ družina podmnožic X. Definiramo $\mathcal{T} = \{\text{unije elementov } \mathcal{B}\}$. Potem $\mathcal{T}$ je topologija na X natanko tedaj, ko

1. $\mathcal{B}$ je pokritje X,
2. za vse $B, B' \in \mathcal{B}$, za vse $x \in B \cap B'$, obstaja $B'' \in \mathcal{B}$, da $x \in B'' \subseteq B \cap B'$.

Rečemo, da je **topologija $\mathcal{T}$ generirana z bazo $\mathcal{B}$.**

Dokaz. Enostavno preverimo lastnosti. □

Naj bosta $(X, \mathcal{T}_X), (Y, \mathcal{T}_Y)$ topologiji. Radi bi definirali topologijo na množici $X \times Y$.

Definicija 1.16. Produktna topologija $\mathcal{T}_{X\times Y}$ je topologija, ki je generirana z bazo $\{U \times V;\ U \in \mathcal{T}_X, V \in \mathcal{T}_Y\}$.

Zgled. Projekciji.

- Naj bo $(X \times Y, \mathcal{T}_{X\times Y})$ produktna topologija. Projekciji $\mathrm{pr}_x : X \times Y \to X,\ \mathrm{pr}_y$ sta zvezni in odprti.
- Naj bo $\mathrm{pr}_1 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$. Ali je pr_1 zaprta?

Naj bo $\mathcal{P}$ poljubna družina podmnožic X. Kaj je najmanjša topologija $\mathcal{T}$ na X, ki vsebuje $\mathcal{P}$?

Trditev 1.8. Naj bo $\mathcal{P}$ poljubna družina podmnožic X. Če je $\mathcal{P}$ pokritje X, potem je $\mathcal{T}$ topologija, ki jo kot baza generirajo končni preseki elementov $\mathcal{P}$. Pravimo, da je $\mathcal{P}$ **predbaza topologije** $\mathcal{T}$.

Dokaz. Družina vseh končnih presekov elementov $\mathcal{P}$ ustreza pogoju (2) iz trditve 1.7 □

Primer. Produktna topologia na $X \times Y$ je najmanjša topologija za katero sta projekciji pr_X in pr_Y zvezni.
Množica $\mathcal{P} = \{\mathrm{pr}_X^*(U),\ U \in \mathcal{T}_X\} \cup \{\mathrm{pr}_Y^*(V),\ V \in \mathcal{T}_Y\}$ je predbaza.
S pomočjo predbaze $\mathcal{P}$ lahko definiramo produktno topologijo za poljubno mnogo faktorjev.

Trditev 1.9. Naj bosta $(X, \mathcal{T}_X), (Y, \mathcal{T}_Y)$ prostora. Naj bo $\mathcal{P}$ predbaza $\mathcal{T}_Y$. Velja:

$$\text{Funkcija } f : X \to Y \text{ je zvezna} \Leftrightarrow \forall B \in \mathcal{P} \,.\, f^*(B) \in \mathcal{T}_X.$$

Dokaz. Enostavno. □

Pozor! Odprtost funkcije f v splošnem ne moremo testirati na predbaze.

Trditev 1.10. Naj bodo X, Y, Z prostori. Velja:

$$\text{Funkcija } f : X \to Y \times Z,\ f = (f_Y, f_Z) \text{ je zvezna} \Leftrightarrow f_Y, f_Z \text{ sta zvezni.}$$

Dokaz. ($\Rightarrow$) Komponenti sta kompozitum zveznih funkcij.
($\Leftarrow$) Poglejmo prasliko predbaznih množic. □

Baze lahko uporabimo za neko grobo oceno velikosti topološkega prostora in bogatstva njegove topologije.

Aksiom 1.11 (1. aksiom števnosti)**.** Naj bo $(X, \mathcal{T})$ prostor. Vsaka točka $x \in X$ ima števno bazo okolic.
Rečemo, da je prostor $(X, \mathcal{T})$ **1-števen**.

Aksiom 1.12 (2. aksiom števnosti)**.** Naj bo $(X, \mathcal{T})$ prostor. Obstaja kaka števna baza za topologijo $\mathcal{T}$.
Rečemo, da je prostor $(X, \mathcal{T})$ **2-števen**.

Primer. 1-števni in 2-števni prostori.

- Metrični prostori so 1-števni.
- Neštevna množica z diskretno topologijo je 1-števna (metrizabilna), ni pa 2-števna, ker vsaka baza mora vsebovati vsi enojci.

Trditev 1.13. Očitno velja: 2-števnost $\Rightarrow$ 1-števnost. Obrat ne velja.

Trditev 1.14. Naj bo prostor $(X, \mathcal{T})$ 1-števen. Velja:

1. Za vsako množico $A \subseteq X$ je $\mathrm{Cl}\, A = L(A) = \{x;\ x \text{ je limita zaporedja v } A\}$.
2. Funkcija $f : (X, \mathcal{T}_X) \to (Y, \mathcal{T}_Y)$ je zvezna $\Leftrightarrow f(L(A)) \subseteq L(f(A))$.

Dokaz. (1) Konstruiramo zaporedje s pomočjo števne baze okolic.
(2) TODO. □

Primer. $(\mathbb{R}, \mathcal{T}_{\text{evkl}})$ je 2-števna.

Definicija 1.17. Prostor $(X, \mathcal{T})$ je **separabilen**, če v X obstaja števna gosta podmnožica.

Primer. $\mathbb{Q}$ v $\mathbb{R}$ ali $\mathbb{Q}^n$ v $\mathbb{R}^n$.

Ali separabilnost in 1-števnost implicira 2-števnost? Ne. Očitno: 2-števnost implicira separabilnost.

Trditev 1.15. V metričnih prostorih je separabilnost ekvivalentna 2-števnosti.

Dokaz. TODO □

Primer. Opazujemo množico $C([0, 1])$.
Weierstrassov izrek pravi, da vsako zvezno funkcijo na poljubnem zaprtem intervalu lahko enakomerno aproksimiramo z polinomi. Vsak polinom pa lahko enakomerno aproksimiramo z polinomi z racionalnimi koeficienti. Slida, da je množica polinomov z racionalnimi koeficienti je števna gosta v $C([0, 1])$. Torej $C([0, 1])$ je separabilen (in metričen) sledi, da je 2-števen.

1.5 Podprostori

Naj bo $(X, \mathcal{T})$ prostor, $A \subseteq X$. Definiramo $\mathcal{T}_A := \{A \cap U \mid U \in T\}$. Trdimo, da je $\mathcal{T}_A$ topologija na A.

Definicija 1.18. Topologija $\mathcal{T}_A$ je **inducirana** (oz. **podedovana**) topologija na A. Prostor $(A, \mathcal{T}_A)$ je **podprostor** prostora $(X, \mathcal{T})$.

Primer. Podprostori.
- Evklidska topologija na $\mathbb{R}$ je inducirana z evklidsko topologijo na $\mathbb{R}^2$.
- Naj bo d metrika na X. Velja:

$$\begin{tikzcd}
& (X,d) \arrow[dl] \arrow[dr] & & \\
(X,\mathcal{T}_d) \arrow[d] & & (A,d|_A) \arrow[d] & \\
(A,(\mathcal{T}_d)_A) & = & (A,\mathcal{T}_{(d|_A)}) & \text{(odprte krogle so iste)}
\end{tikzcd}$$

- Naj bo $B \subseteq A \subseteq (X, \mathcal{T})$. Velja: $\mathcal{T}_B = (\mathcal{T}_A)_B$ (podprostor podprostora spet podprostor).
- Opazujemo $(\mathbb{R}, \mathcal{T}_{\text{evkl}})$. Vzemimo $\mathbb{N} \subseteq \mathbb{R}$. Inducirana topologija je diskretna.

Trditev 1.16. Zaprte množice v $\mathcal{T}_A$ so preseki A z zaprtimi podmnožicamo v X.

Dokaz. TODO □

Velja:
- Če je B baza $\mathcal{T}$, potem $B_A := \{A \cap U \mid U \in B\}$ je baza $\mathcal{T}_A$.
- Če je $(X, \mathcal{T})$ je 1-števen/2-števen, potem $(A, \mathcal{T}_A)$ je 1-števen/2-števen.

Definicija 1.19. Topološka lastnost je **dedna**, če iz prevzetka, da $(X, \mathcal{T})$ ima to lastnost sledi, da jo imajo tudi vsi podprostori.

Primer. Dedni lastnosti.
- Diskretnost in trivialnost topologije sta dedni.
- 1-števnost in 2-števnost sta dedni.
- Metrizabilnost je dedsna.
- Separabilnost ni dedna.
  Naj bo X neštevna množica, $a \in X$. Definiramo $\mathcal{T} := \{U \subseteq X \mid a \in U\} \cup \{\emptyset\}$. Topologija, ki je inducirana na $X - \{a\}$ je diskretna, ki ni separabilna.
  Velja: odprt podprostor separabilnega podprostora je separabilen. Očitno $\{a\}$ je gosta v X.

2 Dodatek

TODO. Lastnosti uniji in preseka.
TODO. Lastnosti slike in praslike.
TODO. Lastnosti metričnih prostorov (kompaktnost, polnost). Kaj ohranjajo zvezne funkcije med m. prostoroma? (kompaktnost).