

1 Prostori in preslikave

1.1 Topološki prostori

1. Topološki prostori

- **Definicija.** Topologija. Odprte množice.
- **Opomba.** Kako običajno preverimo aksiom T2?
- **Definicija.** Topološki prostor.
- **Definicija.** Finejša topologija. Grobejša topologija.
- **Primer.** Naj bo (M, d) metrični prostor. **Porojena (inducirana)** topologija z metriko d . Evklidska topologija.
- **Definicija.** Metrizabilen prostor.
- **Primer.** Trivialna topologija. Diskretna topologija. Ali sta metrizabilna?
- **Definicija.** Notranjost množice A .
- **Trditev.** Čemu je enaka $\text{Int } A$ (unija množic)?
- **Trditev.** Čemu je enaka $\text{Int } A$ (točke)?
- **Definicija.** Zaprta množica.
- **Opomba.** Kako vpeljemo topologijo z pomočjo zaprtih množic?
- **Primer.** Topologija končnih komplementov. Ali so vse točke zaprte? Ali je metrizabilna?
- **Definicija.** Zaprtje množice A .
- **Trditev.** Čemu je enako $\text{Cl } A$ (preseki množic)?
- **Trditev.** Čemu je enako $\text{Cl } A$ (točke)?
- **Primer.** Kakšna zvezna med $\overline{A \cup B}$ in $\overline{A} \cup \overline{B}$ ter med $\overline{A \cap B}$ in $\overline{A} \cap \overline{B}$?
- **Definicija.** Mejna točka.
- **Definicija.** Meja množice.
- **Trditev.** Čemu je enaka $\text{Fr } A$ (formula)?
- **Opomba.** Ali je $\text{Fr } A$ vedno zaprta množica?

Rezultati z vaj

- **Topologija vsebovane točke.** [2.3. naloga]
- Ali je presek poljubne družine topologij spet topologija? [2.5. naloga]

1.2 Zvezne preslikave

1. Slike in praslike

- **Definicija.** Praslika. Slika.
- **Trditev.** Monotonost slike in praslike.
- **Trditev.** Praslika unije in preseka. Slika unije in preseka.
- **Opomba.** Kadar slika ohranja preseke?
- **Trditev.** Praslika komplementa.
- **Trditev.** Praslika slike. Slika praslike.

2. Zvezne preslikave

- **Definicija.** Zvezna preslikava.
- **Primer.** Ali so zvezne:
 - Vse zvezne funkcije v smislu metričnih prostorov.
 - Funkcije v prostor s trivialno topologijo.

- Funkcije iz prostora z diskretno topologijo.
- **Primer.** Ugotovi:
 - Kadar je $\text{id} : (X, \mathcal{T}) \rightarrow (X, \mathcal{T}')$ zvezna?
 - Katere funkcije $f : (\mathbb{R}, \mathcal{T}_{kk}) \rightarrow (\mathbb{R}, \mathcal{T}_{evkl})$ so zvezne?
 - Naj bosta X, Y neskončni, d metrika na Y . Katere funkcije $f : (X, \mathcal{T}_{kk}) \rightarrow (Y, \mathcal{T}_d)$ so zvezne?
- **Trditev.** Kaj lahko povemo o kompozitumu zveznih preslikav?
- **Trditev.** 2 karakterizaciji zveznosti preslikave $f : X \rightarrow Y$.

1.3 Homeomorfizmi

1. Homeomorfizmi

- **Definicija.** Homeomorfizem.
- **Definicija.** Homeomorfna prostora.
- **Opomba.** Ali je homeomorfizem ekvivalenčna relacija? Kako nam to pomaga?
- **Definicija.** Odrpna preslikava. Zaprta preslikava.
- **Trditev.** 3 karakterizaciji homeomorfizma.
- **Primer.** Ali sta prostora $[0, 1) \cup \{2\}$ in $[0, 1]$ homeomorfna? Ali inverz zvezne bijekcije vedno zvezen?
- **Primer.** Pokaži, da vsak interval (končen ali neskončen) homeomorfen enemu izmed $[0, 1]$, $[0, 1)$, $(0, 1)$.
- **Primer.** Pokaži, da intervali $[0, 1]$, $[0, 1)$, $(0, 1)$ niso paroma homeomorfni.
- Kaj je najboljša izbira za homeomorfizem $(-1, 1) \approx \mathbb{R}$?
- **Definicija.** Enotska n -krogla. Odrpna enotska n -krogla. Enotska $(n-1)$ -sfera.
- **Primer.** Kako lahko $(0, 1) \approx \mathbb{R}$ posplošimo do homeomorfizma med odrpno kroglo \dot{B}^n in \mathbb{R}^n ?
- **Primer.** Zakaj sfera S^{n-1} v \mathbb{R}^n topološko bolj podobna \mathbb{R}^{n-1} kot \mathbb{R}^n ? **Stereografska projekcija.**
- **Definicija.** Mnogoterosti.
- **Primer.** Ali je $f : [0, 2\pi] \rightarrow S^1$, $f(t) = e^{it}$ zvezna in bijektivna? Ali je zaprta? Kaj to pove o f^{-1} ?
- **Primer.** Ali je projekcija $\text{pr} : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, $\text{pr}(x, y) = x$ zaprta?
- **Definicija.** Topološka lastnost.
- **Primer.** Ali je omejenost in polnost topološka lastnost?
- **Primer.** Ali je možno, da $\mathbb{R} \approx \mathbb{R}^2$? Ali enak sklep deluje za \mathbb{R}^3 in \mathbb{R}^2 ?

1.4 Baze in predbaze

1. Baza

Naj bo (X, \mathcal{T}) topološki prostor.

- (*) **Definicija.** Lokalna baza okolic.
- **Zgled.** Lokalna baza $x \in X$ v metričnem prostoru (X, d) .
- (*) **Definicija.** Baza topologije \mathcal{T} .
- **Zgled.**
 - Kaj je baza metričnega prostora?
 - Kaj je baza diskretnega prostora?

- **Trditev.** Kako iz baze pridemo do lokalne baze okolic za neko točko $x \in X$? Kako pa obrat?
- **Trditev.** Kaj lahko preverimo na bazi?
- **Zgled.** Ali je $f : S^1 \rightarrow S^1 \subseteq \mathbb{C}$ (enotska kompleksna števila), $f(z) = z^2$ odprta?
- (*) **Trditev.** Topologija, generirana z bazo.
- (*) **Definicija.** Produktna topologija.
- **Opomba.** Ali družina produktov baznih množic tudi generira produktno topologijo?
- **Trditev.** O projekcijah na produktne topologije.
- **Zgled.** Ali je projekcija zaprta?

2. Predbaza

Naj bo $\mathcal{P} \subseteq \mathcal{P}(X)$.

- (*) **Trditev.** Predbaza.
- **Zgled.** Predbaza produktne topologije.
- **Trditev.** Kaj lahko testiramo na predbazi?
- **Trditev.** Kdaj je $f : X \rightarrow X_1 \times \dots \times X_n$ zvezna?
- **Definicija.** Kdaj je prostor 1-števen?
- **Zgled.** Ali so metrični prostori 1-števni?
- **Definicija.** Kdaj je prostor 2-števen?
- **Zgled.** Ali je \mathbb{R}^n 2-števen?
- **Opomba.** Ali je vsak 2-števen prostor tudi 1-števen? Ali je vsak 1-števen prostor tudi 2-števen?
- (*) **Definicija.** Povsod gosta podmnožica. Separabilni prostor.
- (*) **Trditev.** Ali 2-števnost implicira separabilnost?
- (*) **Izrek.** Kdaj je metrični prostor 2-števen?

1.5 Podprostori

1. Podprostori

- **Definicija.** Inducirana topologija. Podprostor.
- **Zgled.** Kakšno topologijo podeduje $\mathbb{N} \subseteq \mathbb{R}$? Ali je topologija na $\mathbb{Q} \subseteq \mathbb{R}$ diskretna? Kaj so podprostori prostorov z diskretno in s trivialno topologijo?
- **Trditev.**
 - (a) Kako dobimo bazo/predbazo podprostora?
 - (b) Kaj so zaprti množici v podprostoru?
- **Trditev.** Kdaj je odprta/zaprta množica v podprostoru odprta tudi v celotnem prostoru?
- **Definicija.** Dedna lastnost.
- **Zgled.** Ali je metrizabilnost dedna? Ali je separabilnost dedna?

2. Preslikavi na pokritjih

Naj bo $\{X_\lambda\}$ pokritje X .

- **Definicija.** Usklajena družina preslikav $(f_\lambda : X_\lambda \rightarrow Y)_\lambda$.
- (*) **Lema.** Recimo, da je $\{X_\lambda\}$ odprto pokritje. Kdaj je $A \subseteq X$ odprta?
- **Definicija.** Lokalno končno pokritje.
- (*) **Lema.** Recimo, da je $\{X_\lambda\}$ zaprto pokritje. Kdaj je $A \subseteq X$ zaprto?
- (*) **Izrek.** Kako dobimo zvezno preslikavo iz družine preslikav na nekem po-

kritju?

- (*) **Posledica.** Kako lahko preverimo zveznost $f : X \rightarrow Y$ z pokritji?

3. Vložitve

- **Zgled.** Ali imata \mathbb{N} in $f_*(\mathbb{N}) \subseteq \mathbb{R}$ isto topologijo, če
 - $f(n) = n$;
 - $f(0) = 0$, $f(n) = \frac{1}{n}$.
- **Definicija.** Vložitev.
- (*) **Trditev.** Naj bo $f : X \rightarrow Y$ injektivna. Kdaj je f vložitev?

Rezultati z vaj

- Ali so vse vektorski operaciji v evklidske topologiji zvezne? [3.2. naloga]
- Kako lahko gledamo na ravnino \mathbb{R}^2 ? [3.2. naloga]
- Ali so vse p -norme ekvivalentne med sabo? Kaj to pomeni o topologii oz. o konvergenca zaporedij? [3.3. naloga]
- (?) Kam zvezna preslikava preslika konvergentna zaporedja? [3.4. naloga]
- Kaj lahko povemo o preslikavi $\mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, ki ima lokalni ekstrem? [3.5. naloga]

2 Topološke lastnosti

2.1 Ločljivost

Naj bo (X, \mathcal{T}) topološki prostor.

1. Hausdorffovi in Frechetovi prostori

- **Definicija.** Kadar pravimo, da \mathcal{T} loči $A \subseteq X$ od $B \subseteq X$?
- **Definicija.** Kadar pravimo, da \mathcal{T} ostro loči $A \subseteq X$ od $B \subseteq X$?
- **Zgled.** Ali je trivialna topologija loči množice? Kaj pa diskretna?
- **Zgled.** Kaj je zaprtje podmnožice $A \subseteq X$ v jeziku ločljivosti?
- (*) **Definicija.** Hausdorffov prostor.
- **Zgled.** Ali so Hausdorffovi:
 - Metrični prostori.
 - (X, \mathcal{T}_{kk}) , X je neskončna.
- (*) **Trditev.** 2 karakterizaciji Hausdorffovih prostorov.
- (*) **Izrek.** Lastnosti Hausdorffovih prostorov:
 - (a) Kaj lahko povemo o končnih množicah?
 - (b) Koliko limit lahko ima zaporedje v Hausdorffovem prostoru?
 - (c) (*) Naj bosta $f, g : X \rightarrow Y^{\text{Haus}}$ preslikavi. Kaj lahko povemo o množici $\{x \in X \mid f(x) = g(x)\}$?
 - (d) (*) Naj bosta $f, g : X \rightarrow Y^{\text{Haus}}$ preslikavi. Kaj če se f, g ujemata na kakšne goste podmnožice $A \subseteq X$?
 - (e) (*) Kaj lahko povemo o grafu preslikave $f : X \rightarrow Y^{\text{Haus}}$?
- (*) **Definicija.** Frechetov prostor.
- **Zgled.** Ali so Hausdorffovi prostori Frechetovi? Ali je trivialen prostor Frechetov?
- (*) **Trditev.** Karakterizacija Frechetova prostora (enojčki).
- **Definicija.** Multiplikativna lastnost.
- **Trditev.** Ali sta Hausdorffova in Frechetova lastnosti dedni in multiplikativni?

2. Regularnost in normalnost

- (*) **Definicija.** Normalen prostor.
- **Zgled.** V kakšni povezavi so normalnost, regularnost, Hausdorff in Frechet?
- **Zgled.** Naj bo (X, \mathcal{T}) Hausdorffov in $\mathcal{T} \subseteq \mathcal{T}'$. Ali je (X, \mathcal{T}') Hausdorffov? Ali je Hausdorffova lastnost implicira regularnost?
- (*) **Trditev.** Ali je vsak metričen prostor normalen?
- (*) **Trditev.** Ali je normalnost dedna?
- (*) **Definicija.** Regularen prostor.
- **Opomba.** Ali je normalnost implicira regularnost?
- **Trditev.** Ali je regularnost dedna?

3. Aksiomi ločljivosti

- (*) **Definicija.** Aksiomi $T_0 - T_4$.
- (*) **Trditev.** Karakterizacija T_3 .
- (*) **Trditev.** Karakterizacija T_4 .
- (*) **Trditev.** Ali je T_3 multiplikativna?
- **Posledica.** Ali je regularnost multiplikativna?
- (*) **Izrek.** Izrek Tihonova.

Rezultati z vaj

- Ali je T_4 multiplikativna? Ali je normalnost multiplikativna?

2.2 Povezanost

Naj bo (X, \mathcal{T}) topološki prostor.

1. Povezanost

- **Definicija.** Nepovezan prostor.
- **Definicija.** Povezan prostor.
- **Trditev.** 4 ekvivalentne trditve o nepovezanosti.
 - **Opomba.** Kaj pravi trditev o povezanosti?
- **Izrek.** Karakterizacija povezanosti v \mathbb{R} .
- **Izrek.** Ali je povezanost topološka lastnost?
- **Izrek.** Lastnosti povezanosti:
 - (a) Kaj lahko povemo o uniji družine povezanih podmnožic v X , ki imajo neprazen presek?
 - (b) Ali je povezanost multiplikativna?
 - (c) **Pot v X .** Zadostni pogoj za povezanost prostora.
 - (d) Recimo, da je A povezan. Kaj lahko povemo o vsake množice B , za katero velja $A \subseteq B \subseteq \overline{A}$?
- **Zgled.** Ali so povezane:
 - Vsaka konveksna podmnožica v \mathbb{R}^n .
 - Komplement končne množice v \mathbb{R}^n , $n > 1$.
 - Komplement števne množice v \mathbb{R}^n , $n > 1$.
- **Zgled.** Ali je $\mathbb{R} \approx \mathbb{R}^n$, $n > 1$?
- **Izrek.** Izrek o vmesni vrednosti.

2. Povezanost s potmi

- **Zgled.** Kaj je varšavski lok (oz. lok Sierpinskega)?
- **Definicija.** Kadar rečemo, da je X povezan s potmi?
- **Trditev.** Zadostni pogoj za povezanost X .
 - **Opomba.** Ali velja implikacija v nasprotno smer?

3. Komponente

2.3 Kompaktnost

1. Kompaktnost

- (*) **Definicija.** Kompakten prostor.
- **Trditev.** Ali lahko testiramo kompaktnost na baze? Kako dokažemo kompaktnost podprostora?
- **Zgled.** Ali je vsak končen prostor kompakten? Kompakten podprostor iz konvergentnega zaporedja. Ali so lahko neomejeni metrični prostori kompaktni?
- (*) **Izrek.** Ali je zaprti intervali $[a, b] \subseteq \mathbb{R}$ kompaktni?
- (*) **Izrek.** Kaj lahko povemo o vsake neskončne podmnožice kompaktnega prostora?
- (*) **Izrek.** Ali je kompaktnost multiplikativna?
- (*) **Izrek.** Bolzano-Weierstrassov izrek.

- (*) **Trditev.** Kaj lahko povemo o vsaki kompaktni podmnožici metričnega prostora?
 - (*) **Izrek.**
 - (a) Ali je kompaktnost dedna?
 - (b) Kaj lahko povemo o Hausdorffovih prostorih (ločljivost)?
 - (c) Kaj lahko povemo o kompaktni podmnožici Hausdorffovega prostora?
 - (*) **Posledica.** Kaj lahko povemo o kompaktnih Hausdorffovih prostorih?
 - (*) **Izrek.** Kdaj so podmnožice \mathbb{R}^n kompaktne?
 - (*) **Zgled.** Ali je množica unitarnih matrik kompakten podprostor R^{n^2} ?
 - (*) **Trditev.** Opis kompaktnosti z zaprtimi množicami.
 - (*) **Posledica.** Cantorjev izrek.
 - (*) **Izrek.** Kaj lahko povemo o zvezni sliki kompakta?
 - (*) **Posledica.** Kaj lahko povemo o preslikavah iz kompakta v \mathbb{R} ?
 - (*) **Lema.** Lebesgueva lema.
 - (*) **Posledica.** Naj bosta X, Y metrična prostora. Kaj lahko povemo o preslikavi $f : X \rightarrow Y$, če je X kompakt?
 - (*) **Izrek.** Kaj lahko povemo o preslikavah iz kompakta v T_2 prostor?
2. Lokalna kompaktnost
- (*) **Definicija.** Relativno kompaktna množica.
 - (*) **Definicija.** Lokalno kompakten prostor.
 - (*) **Izrek.** Opis lokalne kompaktnosti v T_2 prostorih. Ali je vsak kompakten Hausdorffov prostor lokalno kompakten?
 - **Zgled.** Ali so metrični prostori lokalno kompaktni? Kaj lahko povemo o odprtih prostorih lokalno kompaktnih prostorov?
 - (*) **Izrek.** Kaj lahko povemo o lokalno kompaktnih Hausdorffovih prostorih?
 - (*) **Izrek.** Bairov izrek za lokalno kompaktne podmnožice.

3 Prostor preslikav

1. Topologije na prostorih preslikav

Naj bosta X, Y topološka prostora

- Množica vseh preslikav iz $A \subseteq X$ v $U \subseteq Y$.
- (*) **Definicija.** Topologija konvergence po točkah.
- (*) **Trditev.** O topologiji konvergence po točkah.
- (*) **Definicija.** Kompaktno-odprta topologija. Prostor zveznih funkcij, opremljen z kompaktno-odprto topologijo.
- (*) **Trditev.** Baza $\widehat{C}(X, Y)$, če je Y metričen prostor. Topologija enakomerne konvergence na kompaktih.
- (*) **Trditev.** Kakšna poveza med Y in $\widehat{C}(X, Y)$.
- (*) **Trditev.** Povezava ločljivostih lastnosti Y in $\widehat{C}(X, Y)$.
- Kaj če je domena X diskreten prostor?

2. Preslikave na normalnih prostorih

- Kaj so zvezne preslikave iz neskončne množice X z topologijo končnih komplementov v \mathbb{R} ?
- (*) **Izrek.** Urisonova lema.
- (*) **Izrek.** Urisonov metrizacijski izrek.
- (*) **Posledica.** Čemu je ekvivalentna metrizabilnost v 2-števnih prostorih?
- (*) **Izrek.** Tietzejev razširitveni izrek.

3. Stone-Weierstrassov izrek

- (*) **Izrek.** Weierstrassov izrek.
- (*) **Izrek.** Stone-Weierstrassov izrek.