Analiza 2a

Ruslan Urazbakhtin

1. september 2025

Kazalo

1 Funkcije več spremenljivk

1.1 Prostor $\mathbb{R}^n$

Definicija 1.1. **Prostor** $\mathbb{R}^n$ je kartezični produkt $\underbrace{\mathbb{R} \times \cdots \times \mathbb{R}}_{n}$. Na njem definiramo seštevanje in množenje s skalarjem po komponentah. S tema operacijama je $(\mathbb{R}, +, \cdot)$ vektorski prostor nad $\mathbb{R}$. Posebej definiramo še skalarni produkt

$$x \cdot y = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i,$$

ki nam da normo $||x|| = \sqrt{x \cdot x}$ in metriko $d(x, y) = ||x - y||$. $(\mathbb{R}^n, d)$ je tako metrični prostor.

Definicija 1.2. Naj bosta $a, b \in \mathbb{R}^n$ vektorja, za katera je $a_i \leq b_i$ za vse $i \in \{1, \ldots, n\}$. **Zaprt kvader**, ki ga določata a in b, je množica

$$[a, b] = \{x \in \mathbb{R}^n \,|\, \forall i \in \{1, \ldots, n\} \colon a_i \leq x_i \leq b_i\}.$$

Podobno definiramo **odprt kvader** kot

$$(a, b) = \{x \in \mathbb{R}^n \,|\, \forall i \in \{1, \ldots, n\} \colon a_i < x_i < b_i\}.$$

Opomba 1.3. Odprte množice v normah $||x||_\infty$ in $||x||_2$ so iste.

Izrek 1.4. *Množica $K \subseteq \mathbb{R}^n$ je kompaktna natanko tedaj, ko je zaprta in omejena.*

1.1.1 Zaporedja v $\mathbb{R}^n$

Definicija 1.5. **Zaporedje v** $\mathbb{R}^n$ je preslikava $a : \mathbb{N} \to \mathbb{R}^n$. Namesto $a(m)$ pišemo a_m, kjer $a_m = (a_1^m, \ldots, a_n^m)$.

Opomba 1.6. Zaporedje v $\mathbb{R}^n$ porodi n zaporedij v $\mathbb{R}$.

Trditev 1.7. *Naj bo $(a_m)_m$ zaporedje v $\mathbb{R}^n$, $a_m = (a_1^m, \ldots, a_n^m)$. Velja:*

$$\textit{Zaporedje } (a_m)_m \textit{ konvergia} \iff \textit{konvergira zaporedja } (a_1^m)_m, \ldots, (a_n^m)_m.$$

V primeru konvergence velja:

$$\lim_{m\to\infty} a_m = (\lim_{m\to\infty} a_1^m, \ldots, \lim_{m\to\infty} a_n^m).$$

Dokaz. Definicija limite. $\square$

1.2 Zveznost preslikav iz $\mathbb{R}^n$ v $\mathbb{R}^m$

Definicija 1.8. Naj bo $f : D \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ preslikava. Naj bo $a \in D$. **Preslikava f je zvezna v točki** a, če

$$\forall \epsilon > 0 \,.\, \exists \delta > 0 \,.\, \forall x \in D \,.\, ||x - a|| < \delta \implies ||f(x) - f(a)|| < \epsilon.$$

Preslikava f je **zvezna na** D, če je zvezna v vsaki točki $a \in D$.

Trditev 1.9. *Naj bo $f : D \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ preslikava. Naj bo $a \in D$. Preslikava f je zvezna v točki a natanko tedaj, ko za vsako zaporedje $(x_n)_n,\ x_n \in D$, ki konvergira proti a, zaporedje $(f(x_n))_n,\ f(x_n) \in \mathbb{R}^m$ konvergira proti $f(a)$.*

Definicija 1.10. Naj bo $f : D \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ preslikava. Preslikava f je **enakomerno zvezna na** D, če

$$\forall \epsilon > 0 \,.\, \exists \delta > 0 \,.\, \forall x, x' \in D \,.\, ||x - x'|| < \delta \implies ||f(x) - f(x')|| < \epsilon.$$

Trditev 1.11. *Zvezna preslikava na kompaktne množice je enakomerno zvezna.*

Trditev 1.12. *Naj bo $f : K^{komp} \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ zvezna preslikava. Potem je $f_*(K)$ kompaktna.*

Definicija 1.13. Preslikava $f : D \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ je **C-lipschitzova**, če

$$\exists C \in \mathbb{R} \,.\, \forall x, x' \in D \,.\, ||f(x) - f(x')|| \leq C||x - x'||.$$

Trditev 1.14. *Za preslikavo $f : D \to X'$ velja:*

$$f \text{ je } C\text{-lipschitzova} \implies f \text{ je enakomerno zvezna} \implies f \text{ je zvezna.}$$

Trditev 1.15. *Naj bosta $f, g : D \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ zvezni funkciji v $a \in D$. Naj bo $\lambda \in \mathbb{R}$. Tedaj so v a zvezni tudi funkcije:*

$$f + g,\ f - g,\ \lambda f,\ fg.$$

Če za vsak $x \in D,\ g(x) \neq 0$, tedaj so v a zvezna tudi funkcija:

$$\frac{f}{g}.$$

Trditev 1.16. *Kompozitum zveznih preslikav je zvezna preslikava.*

Dokaz. Z zaporedji kot pri analizi 1. □

Zgled 1.17. Nekaj primerov zveznih preslikav.

- Preslikava $\pi_j(x_1, \ldots, x_n) = x_j$ je zvezna na $\mathbb{R}^n$ za vsak $j = 1, \ldots, n$.
- Vse polinomi v n-spremenljivkah so zvezne funkcije na $\mathbb{R}^n$.
- Vse racionalne funkcije so zvezne povsod, razen tam, kjer je imenovalec enak 0.

Definicija 1.18. Preslikava $f : D \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ je **funkcija n-spremenljivk.**

Opomba 1.19. Naj bo (M, d) metrični prostor in $N \subset M$. Naj bo $f : M \to \mathbb{R}$ zvezna funkcija na M. Potem $f|_N$ je tudi zvezna funkcija na N.

Trditev 1.20. *Naj bosta $D \subseteq \mathbb{R}^n$ in $D_j = \pi_j(D)$. Naj bo $a \in D$, $a = (a_1, \dots, a_n)$ in $f : D \to \mathbb{R}^m$ zvezna v a. Tedaj za vsak $j = 1, \dots, n$ preslikava $\varphi_j : D_j \to \mathbb{R}^m$ s predpisom $\varphi_j(t) = f(a_1, \dots, a_{j-1}, t, a_{j+1}, \dots, a_n)$ zvezna v a_j.*

Dokaz. Definicija zveznosti v točki. □

Opomba 1.21. Če je funkcija več spremenljivk zvezna v neki točki $a \in \mathbb{R}^n$, je zvezna tudi kot funkcija posameznih spremenljivk.

Zgled 1.22. Naj bo $f(x,y) = \begin{cases} \frac{2xy}{x^2+y^2}; & (x,y) \neq (0,0) \\ 0; & (x,y) = (0,0) \end{cases}$. Ali je f zvezna kot funkcija vsake spremenljivke posebej? Ali je f zvezna na $\mathbb{R}^2$?

Zgled 1.23. Naj bo $f(x,y) = \begin{cases} \frac{2x^2y}{x^4+y^2}; & (x,y) \neq (0,0) \\ 0; & (x,y) = (0,0) \end{cases}$. Ali je f zvezna kot funkcija vsake spremenljivke posebej? Ali je zvezna na vsaki premici? Ali je f zvezna na $\mathbb{R}^2$?

Opomba 1.24. Zgleda pokažeta, da obrat v prejšnji trditvi ne velja.

Naj bo $D \subseteq \mathbb{R}^n$ in $F : D \to \mathbb{R}^m$ preslikava. Naj bo $x \in D$, potem je $F(x) \in \mathbb{R}^m$, kjer je $F(x) = (y_1, \dots, y_m)$. Lahko pišemo $F(x) = (f_1(x), \dots, f_m(x))$. Torej F določa m funkcij n-spremenljivk.

Trditev 1.25. *Naj bo $a \in D \subseteq \mathbb{R}^n$. Naj bo $F = (f_1, \dots, f_m) : D \to \mathbb{R}^m$ preslikava. Velja:*

$$\textit{Preslikava } F \textit{ je zvezna v } a \iff f_1, \dots, f_m \textit{ so zvezne v } a.$$

Dokaz. Definicija zveznosti v točki. □

Zgled 1.26 (Omejenost linearnih preslikav)**.** Naj bo $\mathcal{A} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ linearna preslikava, potem

$$\exists M \in \mathbb{R} \,.\, M > 0 \,.\, \forall x \in \mathbb{R}^n \,.\, x \neq 0 \,.\, \frac{||\mathcal{A}x||}{||x||} \leq M \text{ (oz. } ||\mathcal{A}x|| \leq M||x||).$$

Trditev 1.27. *Naj bo $\mathcal{A} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ linearna preslikava. Velja:*

$$\mathcal{A} \textit{ je zvezna} \iff \mathcal{A} \textit{ je zvezna v točki } 0 \iff \mathcal{A} \textit{ je omejena.}$$

Dokaz. Definicija zveznosti in omejenosti. □

Trditev 1.28. *Naj bo $\mathcal{A} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ linearna preslikava. Tedaj $\mathcal{A}$ je zvezna.*

Dokaz. Na linearno preslikavo lahko gledamo kot na množenje s matriko. □

Opomba 1.29. Ker so linearne preslikave omejene, obstaja supremum, ki nam da matrično normo

$$\sup_{x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}} \frac{||\mathcal{A}x||}{||x||} = \sup_{||x||=1} ||\mathcal{A}x|| = ||\mathcal{A}||.$$

Definicija 1.30. Naj bo $\mathcal{A} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ linearna preslikava. Preslikavo $\mathcal{A} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ s predpisom $x \mapsto \mathcal{A}x + b$, $b \in \mathbb{R}^m$ imenujemo **afina preslikava**.

1.3 Parcialni odvodi in diferenciabilnost

1.3.1 Parcialni odvod

Definicija 1.31. Naj bo $f : D \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ funkcija. Naj bo $a = (a_1, \ldots, a_n) \in D$ notranja točka. Funkcija f je **parcialno odvedljiva po spremenljivki x_j v točki** a, če obstaja limita

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(a_1, \ldots, a_{j-1}, a_j + h, a_{j+1}, \ldots, a_n) - f(a_1, \ldots, a_n)}{h},$$

oz. če je funkcija

$$x_j \mapsto f(a_1, \ldots, a_{j-1}, x_j, a_{j+1}, \ldots, a_n)$$

odvedliva v točki a_j.
Če je ta limita obstaja, je to **parcialni odvod** funkcije f po spremenljivki x_j v točki a. Oznaki: $\frac{\partial f}{\partial x_j}(a),\ f_{x_j}(a),\ (D_j f)(a)$.

Opomba 1.32. Vse elementarne funkcije so parcialno odvedljive po vseh spremenljivkah tam, kjer so definirane.

Zgled 1.33. Naj bo $f(x, y, z) = e^{x+2y} + \cos(xz^2)$. Izračunaj $f_x(x, y, z),\ f_y(x, y, z),\ f_z(x, y, z)$.

1.3.2 Diferenciabilnost

Definicija 1.34. Naj bo $f : D \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ funkcija. Naj bo $a = (a_1, \ldots, a_n) \in D$ notranja točka. Funkcija f je **diferenciabilna v točki** a, če obstaja tak linearen funkcional $\mathcal{L} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, da velja:

$$f(a + h) = f(a) + \mathcal{L}(h) + o(h),$$

kjer $\lim_{h \to 0} \frac{||o(h)||}{||h||} = 0$.

Opomba 1.35. Če je tak $\mathcal{L}$ obstaja, je enolično določen.

Dokaz. Pokažemo, da iz $\mathcal{L}(h) = (\mathcal{L}_1 - \mathcal{L}_2)(h) = (o_2 - o_1)(h) = o(h)$ sledi, da je $L = 0$. □

Definicija 1.36. Če je f diferenciabilna v a je $\mathcal{L}$ natanko določen in ga imenujemo **diferencial** funkcije f v točki a. Oznaka: $\mathcal{L} = df_a$. Linearen funkcional $\mathcal{L}$ imenujemo tudi **odvod** funkcije f v točki a. Oznaka: $(Df)(a)$.

Opomba 1.37. Recimo, da je funkcija f diferenciabilna v točki a. Preslikava s predpisom $h \mapsto f(a) + (df_a)(h)$ je najboljša afina aproksimacija funkcije $h \mapsto f(a + h)$.

Trditev 1.38. *Naj bo $f : D \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ diferenciabilna v notranji točki $a \in D$. Tedaj je f v točki a parcialno odvedljiva po vseh spremenljivkah. Poleg tega je zvezna v točki a. Pri tem za $h = (h_1, \ldots, h_n)$ velja:*

$$(df_a)(h) = \frac{\partial f}{\partial x_1}(a) \cdot h_1 + \ldots + \frac{\partial f}{\partial x_n}(a) \cdot h_n = f_{x_1}(a) \cdot h_1 + \ldots + f_{x_n}(a) \cdot h_n$$

Opomba 1.39. Naj bo $\mathcal{L} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ linearen funkcional, $x \in \mathbb{R}^n$, potem lahko zapišemo $\mathcal{L}(x) = l_1 x_1 + \ldots + l_n x_n = \begin{bmatrix} l_1 & \ldots & l_n \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$, kjer $\begin{bmatrix} l_1 & \ldots & l_n \end{bmatrix}$ matrika linearnega funkcionala glede na standardne baze.

Dokaz. Zveznost pokažemo z limito. Za parcialno odvedljivost poglejmo kaj se dogaja za $h = (h_1, 0, \dots, 0)$. $\square$

Opomba 1.40. Trditev pove, da je $df_a = \left[\frac{\partial f}{\partial x_1}(a) \quad \dots \quad \frac{\partial f}{\partial x_n}(a)\right] = (\frac{\partial f}{\partial x_1}(a), \dots, \frac{\partial f}{\partial x_n}(a))$.
Zapis: $(\vec{\nabla} f)(a) = (\operatorname{grad} f)(a) = (\frac{\partial f}{\partial x_1}(a), \dots, \frac{\partial f}{\partial x_n}(a))$.
Vektor $(\operatorname{grad} f)(a)$ imenujemo **gradient funkcije** f v točki a. Operator $\vec{\nabla} = (\frac{\partial}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial}{\partial x_n})$ je **operator nabla**.

Zgled 1.41. Naj bo $f(x,y) = \begin{cases} \frac{2xy}{x^2+y^2}; & (x,y) \neq (0,0) \\ 0; & (x,y) = (0,0) \end{cases}$. Ali je f diferenciabilna?

Zgled 1.42. Naj bo $f(x,y) = \begin{cases} \frac{2x^2y}{x^2+y^2}; & (x,y) \neq (0,0) \\ 0; & (x,y) = (0,0) \end{cases}$. Ali je f zvezna? Ali je f parcialno odvedljiva? Ali je f diferenciabilna?

Opomba 1.43. Zgleda pokažeta, da obrat v prejšnji trditvi ne velja

Izrek 1.44. *Naj bo $f : D \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ funkcija in naj bo $a \in D$ notranja točka. Denimo, da je f parcialno odvedljiva po vseh spremenljivkah v točki a in so parcialni odvodi zvezni v točki a. Tedaj je f diferenciabilna v točki a.*

Dokaz. Za $n = 2$. Definicija diferenciabilnosti + 2-krat Lagrangeev izrek. $\square$

1.3.3 Višji parcialni odvodi

Naj bo $f : D^{\mathrm{odp}} \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ funkcija. Denimo, da je f parcialno odvedljiva po vseh spremenljivkah na D: $f_{x_1}, \dots, f_{x_n}$. To so tudi funkcije n-spremenljivk in morda so tudi te parcialno odvedljive po vseh oz. nekatarih spremenljivkah.

Trditev 1.45. *Naj bo $f : D \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ funkcija, $a \in \operatorname{Int}(D)$. Naj bosta $i, j \in \{1, 2, \dots, n\}$. Denimo, da v točki a obstajata $\frac{\partial f}{\partial x_i}$, $\frac{\partial f}{\partial x_j}$ in tudi druga odvoda $\frac{\partial}{\partial x_j}\left(\frac{\partial f}{\partial x_i}\right)$, $\frac{\partial}{\partial x_i}\left(\frac{\partial f}{\partial x_j}\right)$. Če sta $\frac{\partial}{\partial x_j}\left(\frac{\partial f}{\partial x_i}\right)$, $\frac{\partial}{\partial x_i}\left(\frac{\partial f}{\partial x_j}\right)$ zvezni v točki a, potem sta enaki v točki a:*

$$\frac{\partial}{\partial x_j}\left(\frac{\partial f}{\partial x_i}\right)(a) = \frac{\partial}{\partial x_i}\left(\frac{\partial f}{\partial x_j}\right)(a).$$

Dokaz. Dovolj za $n = 2$.
Definiramo funkcijo $J(h,k) = f(a+h, b+k) - f(a+h, b) - f(a, b+k) + f(a,b)$ ter funkciji $\varphi(x) = f(x, b+k) - f(x,b)$ in $\psi(y) = f(a+h, y) - f(a, y)$. Zapišemo J prvič s pomočjo funkcije φ, drugič pa s pomočjo funkcije ψ ter uporabimo 2-krat Lagrangeev izrek in upoštevamo zveznost. $\square$

Opomba 1.46. Pravimo, da parcialni odvodi komutirajo in pišemo $\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}$.

Definicija 1.47. Naj bo $D^{\mathrm{odp}} \subseteq \mathbb{R}^n$. Pravimo, da je funkcija $f : D \to \mathbb{R}$ **razreda C^k na D**, če obstajajo vse parcialne odvodi funkcije f do reda k in so vse ti parcialni odvodi zvezni na D.

Definicija 1.48. Naj bo $D^{\text{odp}} \subseteq \mathbb{R}^n$. **Množico vseh k-krat zvezno parcialno odvedljivih funkcij** označimo z $C^k(D)$. **Množica gladkih funkcij** je $C^\infty(D) = \bigcap_{k=1}^\infty C^k(D)$. **Množica zveznih funkcij na D** je $C(D)$.

Opomba 1.49. Množica $C^k(D)$ z operacijama seštevanja, množenja s skalarji in komponiranja preslikav je algebra nad $\mathbb{R}$.

1.3.4 Diferenciabilnost preslikav

Definicija 1.50. Naj bo $F : D \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ preslikava, $a \in D$ notranja točka. Preslikava F je **diferenciabilna** v točki a, če obstaja taka linearna preslikava $\mathcal{L} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$, da velja:

$$F(a+h) = F(a) + \mathcal{L}(h) + o(h),$$

kjer je $\lim_{h\to 0} \frac{|o(h)|_m}{|h|_n}$.
Preslikavo $\mathcal{L}$ imenujemo **diferencial** F v točki a. Oznaka: dF_a. Imenujemo ga tudi **odvod** F v točki a. Oznaka: $(DF)(a)$.

Opomba 1.51. Kot pri funkcijah, če je tak $\mathcal{L}$ obstaja, je enolično določen.

Zgled 1.52. Obravnavaj diferenciabilnost preslikav:
- $\mathcal{A} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ linearna, $F(x) = \mathcal{A}x$.
- $F : \mathbb{R}^{n\times n} \to \mathbb{R}^{n\times n}$, $F(X) = X^2$. Namig: S pomočjo CSB neenakosti pokažimo, da je $|H^2| \leq |H|^2$.

Izrek 1.53. *Naj bo $a \in D$ notranja točka. Naj bo $F = (f_1, \dots, f_m) : D \to \mathbb{R}^m$ preslikava. Velja:*

Preslikava F je diferenciabilna v $a \in D$ $\iff$ so $f_1, \dots, f_m$ diferenciabilne v a.

Tedaj

$$(DF)(a) = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(a) & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n}(a) \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial f_m}{\partial x_1}(a) & \dots & \frac{\partial f_m}{\partial x_n}(a) \end{bmatrix}$$

*Matrika linearne preslikave $(DF)(a)$, ki je zapisana v standardnih bazah, se imenuje **Jacobijeva matrika**.*

Dokaz. ($\Longrightarrow$) Zapišemo enakost $F(a+h) = F(a) + dF_a(h) + o(h)$ po komponentah.
($\Leftarrow$) Definicija diferenciabilnosti. □

Posledica 1.54. *Naj bo $a \in D$ notranja točka. Naj bo $F = (f_1, \dots, f_m) : D \to \mathbb{R}^m$ preslikava. Tedaj velja: Če so vse funkcije $f_1, \dots, f_m$ v točki a parcialno odvedlivi po vseh spremenljivkah in so ti vse odvodi zvezni v točki a, potem je F diferenciabilna v točki a.*

Zgled 1.55. Naj bo $F(x,y,z) = (x^2 + 2y + e^z, xy + z^2)$, $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$. Določi $(DF)(1,0,1)$.

Definicija 1.56. Preslikava $F : D^{\text{odp}} \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ je razreda $C^k(D)$, če so vse koordinatne funkcije $f_1, \dots, f_m \in C^k(D)$.

Izrek 1.57 (Verižno pravilo)**.** *Naj bo $a \in D \subseteq \mathbb{R}^n$ notranja točka. Naj bo $b \in \Omega \subseteq \mathbb{R}^m$ notranja točka. Naj bo $F : D \to \Omega$ diferenciabilna v točki a in velja $F(a) = b$. Naj bo $G : \Omega \to \mathbb{R}^k$ diferenciabilna v točki b. Tedaj $G \circ F$ diferenciabilna v točki a in velja:*

$$D(G \circ F)(a) = (DG)(b) \circ (DF)(a) = (DG)(F(a)) \circ (DF)(a).$$

Označimo

$$F(x_1, \ldots, x_n) = (f_1(x_1, \ldots, x_n), \ldots, f_m(x_1, \ldots, x_n))$$

in

$$G(y_1, \ldots, y_m) = (g_1(y_1, \ldots, y_m), \ldots, g_k(y_1, \ldots, y_m)).$$

Potem

$$D(G \circ F)(a) = \begin{bmatrix} \frac{\partial g_1}{\partial y_1} & \cdots & \frac{\partial g_1}{\partial y_m} \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial g_k}{\partial y_1} & \cdots & \frac{\partial g_k}{\partial y_m} \end{bmatrix} (b) \cdot \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial f_m}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial f_m}{\partial x_n} \end{bmatrix} (a)$$

Dokaz. Definicija diferenciabilnosti. □

Posledica 1.58 ($k = 1$, $G = g$ funkcija)**.** *Naj bo*

$$\Phi(x_1, \ldots, x_n) = g(f_1(x_1, \ldots, x_n), \ldots, f_m(x_1, \ldots, x_n)).$$

Potem

$$\frac{\partial \Phi}{\partial x_j}(a) = \frac{\partial g}{\partial y_1}(b) \cdot \frac{\partial f_1}{\partial x_j}(a) + \frac{\partial g}{\partial y_2}(b) \cdot \frac{\partial f_2}{\partial x_j}(a) + \ldots + \frac{\partial g}{\partial y_m}(b) \cdot \frac{\partial f_m}{\partial x_j}(a)$$

Zgled 1.59. Naj bo $F(x, y) = (x^2 + y, xy),\ g(u, v) = uv + v^2$. Naj bo $\Phi = g \circ F$. Izračunaj odvod $(D\Phi)(x, y)$ na dva načina.

1.4 Izrek o implicitni funkciji

1.4.1 Izrek o inverzni preslikavi

Naj bo $\Phi : D^{\text{odp}} \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ preslikava, $\Phi \in C^1(D)$. Kakšne so zadostni pogoji za (lokalno) obrnljivost preslikave Φ?

Definicija 1.60. Naj bosta $D, \Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ odprti. Preslikava $\Phi : D \to \Omega$ je C^1**-difeomorfizem**, če

1. Φ je bijekcija,
2. $\Phi \in C^1(D)$,
3. $\Phi^{-1} \in C^1(\Omega)$.

Podobno definiramo C^k**-difeomorfizem** za $k \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$.

Zgled 1.61. Ali je $f(x) = x^3,\ f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ difeomorfizem?

Trditev 1.62. *Naj bosta $D, \Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ odprti. Naj bo $\Phi : D \to \Omega$ C^1-difeomorfizem. Tedaj je $\det(D\Phi) \neq 0$ na D.*

Dokaz. Pogledamo $\Phi^{-1} \circ \Phi = \mathrm{id}_D$ (verižno pravilo 1.57). □

Posledica 1.63. $(D\Phi^{-1})(y) = ((D\Phi)(x))^{-1}$*, kjer* $y = \Phi(x)$*.*

Zgled 1.64. Ali velja obrat trditve? Naj bo $\Phi(x,y) = (e^x \cos y, e^x \sin y)$, $\Phi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$. Ali je Φ difeomorfizem?

Lema 1.65 (Lagrangeev izrek za funkcijo več spremenljivk)**.** *Naj bo $D \subseteq \mathbb{R}^n$ odprta množica, točki $a, b \in D$ sta taki, da za vsak $t \in [0,1]$ daljica $(1-t)a + tb$ leži v D, funkcija $f : D \to \mathbb{R}$ razreda C^1. Tedaj obstaja taka točka ξ iz daljice med a in b, da je*

$$f(b) - f(a) = (Df)(\xi)(b-a).$$

Dokaz. Lagrangeev izrek za funkcijo $\varphi(t) = f((1-t)a + tb)$. □

Posledica 1.66. *Naj bo $D \subseteq \mathbb{R}^n$, $a, b \in D$ ter funkcija f kot prej. Naj obstaja tak $M \in \mathbb{R}$, da za vsak $j = 1, \ldots, n$ in vsak $x \in D$ velja: $\left|\frac{\partial f}{\partial x_j}(x)\right| \leq M$. Tedaj*

$$|f(b) - f(a)| \leq M\sqrt{n}||b-a||.$$

Dokaz. Uporabimo trditev 1.65 in CSB neenakost. □

Posledica 1.67. *Naj bo $D \subseteq \mathbb{R}^n$, $a, b \in D$ kot prej. Naj bo $F : D \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$, kjer $F = (f_1, \ldots, f_m)$, preslikava razreda C^1. Naj obstaja tak $M \in \mathbb{R}$, da za vsak $j = 1, \ldots, n$, vsak $i = 1, \ldots, m$ in vsak $x \in D$ velja: $\left|\frac{\partial f_i}{\partial x_j}(x)\right| \leq M$.*
Tedaj

$$||F(b) - F(a)|| \leq M\sqrt{mn}||b-a||.$$

Dokaz. Zapišemo po komponentah ter uporabimo posledico 1.66. □

Lema 1.68. *Naj bo*

- *množica $D \subseteq \mathbb{R}^n$ odprta;*
- *preslikava $F : D \to \mathbb{R}^n$ razreda C^1 ter*
- *$F(0) = 0$ in $DF(0) = I$.*

Definiramo $H(x) := F(x) - x$. Tedaj

$$\exists r > 0 \,.\, \forall x_1, x_2 \in \overline{K(0,r)} \,.\, ||H(x_1) - H(x_2)|| \leq \frac{1}{2}||x_1 - x_2||.$$

Opomba 1.69. Izrek o inverzni preslikavi in izrek o implicitni funkciji sta invariantna glede na linearne premike in raztezke. Recimo, da imamo preslikavo $\Phi : D \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, za katero velja $\det(D\Phi(x)) \neq 0$ za vse $x \in D$, in naj bo $\Phi(a) = b$. Definirajmo novo preslikavo

$$F(x) := (D\Phi(a))^{-1}(\Phi(a+x) - \Phi(a)),$$

ki zadošča $F(0) = 0$ in $DF(0) = I$. Če izrek dokažemo za preslikavo F, ga dokažemo za

$$\Phi(x) = D\Phi(a)F(x-a) + \Phi(a),$$

saj

$$\Phi^{-1}(y) = F^{-1}[(D\Phi(a))^{-1}(y - \Phi(a))] + a.$$

Izrek 1.70 (Izrek o inverzni preslikavi)**.** *Naj bo*
- *množica $D \subseteq \mathbb{R}^n$ odprta;*
- *preslikava $F : D \to \mathbb{R}^n$ razreda C^1 na D ter*
- *$a \in D$ in $b = F(a)$.*

Recimo, da $\det(DF)(a) \neq 0$*, tedaj obstajata okolici $a \in U \subseteq \mathbb{R}^m$ in $b \in V \subseteq \mathbb{R}^n$, da je preslikava $F : U \to V$ C^1-difeomorfizem.*

Dokaz. BŠS (opomba 1.69) $a = b = 0$ ter $DF(0) = I$.
Definiramo $H(x) := F(x) - x$. Za to preslikavo velja pomožna trditev 1.68, dobimo $r > 0$.
1. F je injektivna na $\overline{K(0,r)}$.
2. $F : \overline{K(0,r)} \to F_*(\overline{K(0,r)})$ je bijekcija in inverz je zvezen.
3. Slika je dovolj velika, tj. $\overline{K(0,r/2)} \subseteq F_*(\overline{K(0,r)})$. Torej

$$\forall y \in \overline{K(0,r/2)}\,.\,\exists x \in \overline{K(0,r)}\,.\,F(x) = y.$$

S pomočjo Banachova skrčitvenega načela 4.2 poiščemo negibno točko preslikave

$$T_y(x) := -H(x) + y.$$

Lahko sklepamo tudi, da $K(0,r/2) \subseteq F_*(K(0,r))$.
Izberimo okolici $V = K(0,r/2)$ in $K(0,r) \cap F^*(V)$.
4. Pokažemo, da je preslikava $F^{-1} : V \to U$ razreda C^1. □

Definicija 1.71. Če je $F : D \to \Omega$ preslikava med odprtimi množicami v $\mathbb{R}^n$ in je $\det(DF)(x) \neq 0$ za vse $x \in D$, pravimo, da je F **lokalni difeomorfizem**.

Posledica 1.72. *Če je F razreda C^k D za $k \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$, je F lokalni C^k-difeomorfizem.*

Dokaz. Verižno pravilo 1.57 in indukcija. □

Opomba 1.73. Če je $n = 1$, potem $f : I \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Naj bo $a \in I$, $f \in C^1(I)$, $f'(a) \neq 0$. Potem $f'(x) \neq 0$ v okolici a, torej f ima lokalni C^1 inverz.

Zgled 1.74. Naj bo $F : \mathbb{R}^{n\times n} \to \mathbb{R}^{n\times n}$, $F(X) = X^2$. Ali je F v okolici točke $I \in \mathbb{R}^{n\times n}$ lokalni difeomorfizem? Kaj to pomeni?

1.4.2 Osnovna verzija izreka o implicitni funkciji

Radi bi poiskali zadostni pogoji na funkcijo $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, da bi enačba $f(x,y) = 0$ lokalno v okolici točki (a,b), za katero velja $f(a,b) = 0$, predstavljala graf funkcije $y = \varphi(x)$.

Izrek 1.75 (Osnovna verzija izreka o implicitni funkciji)**.** *Naj bo*
- *množica $D \subseteq \mathbb{R}^2$ odprta, $(a,b) \in D$;*
- *funkcija $f : D^{odp} \to \mathbb{R}$ razreda C^1 na D ter*
- *$f(a,b) = 0$ in $f_y(a,b) \neq 0$.*

Tedaj obstajata $\delta > 0$ in $\epsilon > 0$, da velja: $I \times J \subseteq D$, kjer je $I = (a-\delta, a+\delta)$, $J = (b-\epsilon, b+\epsilon)$ in enolično določena funkcija $\varphi : I \to J$ razreda C^1 na I, za katero velja:
1. *$\varphi(a) = b$.*
2. *$\forall (x,y) \in I \times J\,.\,f(x,y) = 0 \iff y = \varphi(x)$ (rešitve enačbe $f(x,y) = 0$ so natanko graf funkcije φ).*

3. $\varphi'(x) = -\dfrac{f_x(x,\varphi(x))}{f_y(x,\varphi(x))}$ *za vsak* $x \in I$.

Dokaz.
1. Konstruiramo funkcijo φ s pomočjo izreka o bisekciji z upoštevanjem stroge monotonosti funkciji $y \mapsto f(x,y)$.
2. Pokažemo zveznost φ s pomočjo izraza $f(x+\Delta x, y+\Delta y) - f(x,y)$ z uporabo Lagrangeeva izreka ter upoštevanja, da smo skoraj na kompaktu.
3. Odvedljivost in zveznost odvoda sledi iz obstoja limite $\lim_{\Delta x\to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$. □

Posledica 1.76. *Če je funkcija f razreda C^k, potem je tudi funkcija φ razreda C^k.*

Dokaz. Uporabimo formulo za odvod in indukcijo. □

Zgled 1.77. Kaj če pogoji niso izpolnjeni?
1. $f(x,y) = (x-y)^2,\ f(x,y) = 0$ v okolici točke $(0,0)$ (pogoji ni potrebni).
2. $f(x,y) = y^3 - x,\ f(x,y) = 0$ v okolici točke $(0,0)$ (odvedljivost φ).
3. $f(x,y) = y^2 - x^2 - x^4,\ f(x,y) = 0$ v okolici točke $(0,0)$ (enoličnost φ).
4. $f(x,y) = y^2 + x^2 + x^4,\ f(x,y) = 0$ v okolici točke $(0,0)$ (množica rešitev).

1.4.3 Izrek o implicitni preslikavi

Imamo $n+m$ spremenljivk: (x,y), kjer $x = (x_1,\dots,x_n),\ y = (y_1,\dots,y_m)$ in m enačb. Pričakujemo, da bomo lahko m spremenljivk izrazili kot funkcijo ostalih, tj. najdemo preslikavo $\Phi : D \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$, da velja $y = \Phi(x)$.

Primer 1.78 (Linearen primer)**.** Naj bosta $\mathcal{A} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m,\ \mathcal{B} : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^m$ linearni, $b \in \mathbb{R}^m$. Naj rešujemo enačbo $Ax + By = b$. Kdaj lahko za vsak $b \in \mathbb{R}^m$ iz te enačbe y razrešimo kot funkcijo x? Če je $n = 0$, potem rešujemo enačbo $By = b$. Kdaj lahko to enačbo enolično rešimo za vsak $b \in \mathbb{R}^m$?

Naj bo $F : D^{\mathrm{odp}} \subseteq \mathbb{R}^n_x \times \mathbb{R}^m_y \to \mathbb{R}^m,\ F = (f_1,\dots,f_m)$ preslikava razreda C^1.
Za vsak $y \in \mathbb{R}^m$ naj bo $\frac{\partial F}{\partial x}$ diferencial preslikave $x \mapsto F(x,y)$. Imenujemo ga **parcialni diferenical na prvo spremenljivko**.
Za vsak $x \in \mathbb{R}^n$ naj bo $\frac{\partial F}{\partial y}$ diferencial preslikave $y \mapsto F(x,y)$. Imenujemo ga **parcialni diferenical na drugo spremenljivko**.
Velja: $\frac{\partial F}{\partial x}(x,y) = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(x,y) & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n}(x,y) \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial f_m}{\partial x_1}(x,y) & \dots & \frac{\partial f_m}{\partial x_n}(x,y) \end{bmatrix}$ in $\frac{\partial F}{\partial y}(x,y) = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial y_1}(x,y) & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial y_m}(x,y) \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial f_m}{\partial x_1}(x,y) & \dots & \frac{\partial f_m}{\partial y_m}(x,y) \end{bmatrix}$.
Diferencial preslikave F je potem enak $(DF)(x,y) = \begin{bmatrix} \frac{\partial F}{\partial x}(x,y) & \frac{\partial F}{\partial y}(x,y) \end{bmatrix}$ (bločni zapis).

Opomba 1.79. Za vektor $\begin{bmatrix} h \\ k \end{bmatrix}$, kjer je $h \in \mathbb{R}^n,\ k \in \mathbb{R}^m$ velja: $(DF)(x,y)\begin{bmatrix} h \\ k \end{bmatrix} = \frac{\partial F}{\partial x}(x,y)h + \frac{\partial F}{\partial y}(x,y)k \in \mathbb{R}^m$.

Izrek 1.80 (Izrek o implicitni preslikavi)**.** *Naj bo $D \subseteq \mathbb{R}^n_x \times \mathbb{R}^m_y$ odprta množica, $(a,b) \in D$, $F : D \to \mathbb{R}^m$ preslikava razreda C^1. Naj velja:*
1. $F(a,b) = 0$,
2. $\det(\frac{\partial F}{\partial y}(a,b)) \neq 0$.

Tedaj obstaja okolica $U \subseteq \mathbb{R}^n$ točke a in okolica $V \subseteq \mathbb{R}^m$ točke b in taka enolično določena preslikava $\varphi : U \to V$ razreda C^1, da velja:

1. $\varphi(a) = b$.
2. $\forall (x, y) \in U \times V \,.\, F(x, y) = 0 \iff y = \varphi(x)$ *(rešitve te enačbe je isto kot graf φ znotraj $U \times V$).*
3. $(D\varphi)(x) = -\left(\frac{\partial F}{\partial y}(x, y)\right)^{-1} \frac{\partial F}{\partial x}(x, y),\ y = \varphi(x)$ *za vsak $x \in U$.*

Dokaz. Uporabimo izrek o inverzni preslikavi 1.70.

1. Definiramo preslikavo $\Phi : D \subseteq \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m,\ \Phi(x, y) = (x, F(x, y))$.
2. Preverimo zahteve izreka o inverzni preslikavi za preslikavo Φ.
3. Kandidata za preslikavo φ najdemo v oblike inverza Φ^{-1}.
4. Preverimo lastnosti. □

Posledica 1.81. *Če je preslikava F razreda C^k, je tudi preslikava φ razreda C^k.*

Dokaz. Z indukcijo. □

Zgled 1.82. Naj bo $x, y \in \mathbb{R},\ F(x, y) = x^2 + y^2 - 1$. S pomočjo izreka o implicitni preslikavi pokaži, da v okolici točke $(0, 1)$ rešitve enačbe $F(x, y) = 0$ je graf neke preslikave φ. Določi tudi preslikavo φ.

Zgled 1.83. Naj bo $F(x, y, z) = (y + xy + xz^2, z + zy + x^2),\ F = (f, g)$ in naj rešujemo enačbo $F(x, y, z) = 0$. Preveri zahteve izreka v okolici točke $(0, 0, 0)$ in zapiši spremenljivki y in z kot funkciji spremenljivke x. Določi tudi prvi in drugi odvod funkcij f in g po spremenljivke x. Kaj je rezultat?

1.4.4 Rang preslikave

Zgled 1.84. Naj bo $F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ in naj rešujemo enačbo $F(x, y, z) = 0$. Recimo, da $F(a, b, c) = 0$. Kakšna povezava med zadostnimi pogoji in rangom $(DF)(a, b, c)$? Kaj če gledamo preslikavo $F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$?

Definicija 1.85. Naj bo $D^{\text{odp}} \subseteq \mathbb{R}^n$ in $F : D \to \mathbb{R}^m$ preslikava razreda C^1, $a \in D$.

1. **Rang preslikave F v točki** a je $\operatorname{rang}_a F := \operatorname{rang}(DF)(a)$.
2. Če je $\operatorname{rang}_a F$ konstanten na D, je F tega ranga na D, tj. $\operatorname{rang} F = \operatorname{rang}_a F$.
3. Preslikava F je **maksimalnega ranga v točki** a, če je $\operatorname{rang}_a F = \min\{m, n\}$.

Opomba 1.86. Ta pogoj je lokalno stabilen, tj. če je $\operatorname{rang}_a F = \min\{n, m\}$, potem obstaja okolica od a, kjer $\operatorname{rang} F$ maksimalen.

Posledica 1.87. *Naj bo*

- *preslikava $F : D^{odp} \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ razreda C^k, $k \in \mathbb{N}$ in naj velja $m < n$, $a \in D$;*
- *preslikava F je maksimalnega ranga v točki a;*
- $F(a) = 0$.

Tedaj obstajajo indeksi $i_1 < i_2 < \ldots < i_{n-m}$, $j_1 < j_2 < \ldots < j_m$, $i_k \neq j_l$ za vse k in l in take funkcije $\varphi_1, \ldots, \varphi_m$ razreda C^k definirane v okolici točke $(a_{i_1}, \ldots, a_{i_{n-m}})$, da je v neki okolici U točke a enačba $F(x) = 0$ ekvivalentna sistemu enačb:

$$\begin{aligned} x_{j_1} &= \varphi_1(x_{i_1}, \ldots, x_{i_{n-m}}) \\ &\vdots \\ x_{j_m} &= \varphi_m(x_{i_1}, \ldots, x_{i_{n-m}}) \end{aligned}$$

Ekvivalentno: Obstaja permutacija $\sigma \in S_n$, da v okolici točke a velja:

$$F(x) = 0 \iff (x_{\sigma(1)}, \ldots, x_{\sigma(n)}) = (\underbrace{x_{\sigma(1)}, \ldots, x_{\sigma(n-m)}}_{x'_\sigma}, \varphi(x'_\sigma)),$$

kjer $\varphi = (\varphi_1, \ldots, \varphi_m)$.

Dokaz. Poiščemo obrnljivo $m \times m$ podmatriko ter permutiramo koordinate. □

Primer 1.88. Naj bo $\mathcal{A} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ linearna, $m \leq n$, $\operatorname{rang} \mathcal{A} = m$ ($\mathcal{A}$ je surjektivna). Rešujemo enačbo $\mathcal{A}x = b$. Prostor rešitev je $n - m$ dimenzialen.

Posledica 1.89. *Naj bo*

- *preslikava $F : D^{odp} \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ preslikava razreda C^1, $m \leq n$ in $a \in D$;*
- $\operatorname{rang}_a F = m$.

Tedaj obstaja okolica V točke $F(a) = b$ in okolica U točke a, da je $F : U \to V$ surjektivna.

Dokaz. Oglejmo si preslikavo $\Phi : \mathbb{R}^{n+m} \to \mathbb{R}^m$, $\Phi(x, y) = F(x) - y$. Uporabimo posledico 1.87. □

1.5 Podmnogoterosti v $\mathbb{R}^n$

Podmnogoterost je posplošitev pojmov „krivulja“ in „ploskev“.

Definicija 1.90. Naj bo $M \subseteq \mathbb{R}^{n+m}$, $M \neq \emptyset$. Množica M je gladka (vsaj razreda C^1) **podmnogoterost** dimenzije n in kodimenzije m prostora $\mathbb{R}^{n+m}$, če za vsako točko $a \in M$ obstaja okolica U v $\mathbb{R}^{n+m}$ in take C^1 funkcije $F_1, \ldots, F_m : U \to \mathbb{R}$, da velja:

1. $M \cap U = \{x \in U \mid F_1(x) = \ldots = F_m(x) = 0\} = F^*(\{0\})$.
2. $\operatorname{rang}(F_1, \ldots, F_m) = m$ na U.

Opomba 1.91. Funkcije $F_1, \ldots, F_m$ imenujemo **lokalne definicijske funkcije** za $M \cap U$.

Opomba 1.92. Če je $m = 0$, potem je M odprta množica.

Zgled 1.93. Naj bo $M \subseteq \mathbb{R}^3$ ter $\mathcal{A}_1, \mathcal{A}_2, \mathcal{A}_3$ linearne funkcije.

- Če $\mathcal{A}_1(x, y, z) = 0, \mathcal{A}_1 \not\equiv 0$, potem dobimo ravnino dimenzije 2 in kodimenzije 1.
- Če $\mathcal{A}_{1,2}(x, y, z) = 0, \mathcal{A}_{1,2} \not\equiv 0$, potem dobimo premico dimenzije 1 in kodimenzije 2.

V splošnem, če je $\dim M = 1$, govorimo o krivuljah, če je $\dim M = 2$, govorimo o ploskvah.

- Če $\mathcal{A}_{1,2,3}(x, y, z) = 0, \mathcal{A}_{1,2,3} \not\equiv 0$ ter funkcije linearno neodvisni, potem dobimo točko dimenzije 0 in kodimenzije 3.

Zgled 1.94. Ugotovi ali so naslednje množice mnogoterosti in če so, določi tudi njihovo dimenzijo.

- $M = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 + z^2 = 1\}$.
- $M = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 + z^2 = 1,\ x + y + z = 0\}$.
- $M = (\{0\} \times \mathbb{R}) \cup (\mathbb{R} \times \{0\})$.
- $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R}) = \{A \in \mathbb{R}^{n \times n} \mid \det A \neq 0\}$.
- $\mathrm{SL}_n(\mathbb{R}) = \{A \in \mathbb{R}^{n \times n} \mid \det A = 1\}$.

Definicija 1.95. Če mnogoterost M v okolici U točke $a \in M$ podana kot

$$M \cap U = \{x \in U \mid F_1(x) = \ldots = F_m(x) = 0\},\ \operatorname{rang} F = m,$$

rečemo, da je **mnogoterost podana implicitno**.

1.6 Eksplicitno podajanje mnogoterosti

Trditev 1.96. *Neprazna podmnožica $M \subseteq \mathbb{R}^{n+m}$ je podmnogoterost dimenzije n natanko tedaj, ko za vsako točko $a \in M$ obstaja odprta okolica $U \subseteq \mathbb{R}^{n+m}$ točke a in taka permutacija koordinat σ:*

$$(x_1, \ldots, x_{n+m}) \mapsto (x_{\sigma(1)}, \ldots, x_{\sigma(n+m)}),$$

da je $M \cap U$ graf neke C^1 preslikave $\varphi : D^{odp} \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$, tj.

$$M \cap U = \{x \in U \mid (x_1, \ldots, x_{n+m}) = (x_{\sigma(1)}, \ldots, x_{\sigma(n)}, \varphi(x_1, \ldots, x_{\sigma(n)}))\}.$$

Dokaz. TODO: □

Definicija 1.97. Če mnogoterost podajamo kot graf, rečemo, da je **mnogoterost podana eksplicitno.**

Zgled 1.98. Ali je $M = \{(x, x^2) \mid x \in \mathbb{R}\}$ mnogoterost?

1.7 Parametrično podajanje mnogoterosti

Zgled 1.99. Ali je parametrizacija $\varphi \mapsto (a\cos\varphi, a\sin\varphi)$, $a > 0$, $\varphi \in [0, 2\pi)$ določa podmnogoterost?

Trditev 1.100.

1. *Naj bo $M \subseteq \mathbb{R}^{n+m}$ podmnogoterost dimenzije n. Potem za vsako točko $a \in M$ obstaja taka okolica $U \subseteq \mathbb{R}^{n+m}$ točke a in taka C^1 preslikava*

$$\Phi : D^{odp} \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^{n+m}$$

ranga n, da je

$$\Phi(D) = M \cap U.$$

2. *Naj bo $D^{odp} \subseteq \mathbb{R}^n$ in $\Phi : D \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^{n+m}$ C^1 preslikava ranga n. Potem za vsako točko $t_0 \in D$ obstaja okolica $V \subseteq D$ točke t_0, da je $\Phi_*(V)$ podmnogoterost dimenzije n v $\mathbb{R}^{n+m}$.*

1.8 Podajanje krivulj in ploskev v $\mathbb{R}^3$

Krivuljo lahko podamo parametrično z preslikavo $\Phi : [a, b] \to \mathbb{R}^3$:

$$\Phi(t) = (x(t),\ y(t),\ z(t)).$$

Pri čemer mora biti preslikava Φ maksimalnega ranga:

$$\forall t \in [a, b] \,.\, \operatorname{rang} D\Phi(t) = 1.$$

Kar lahko tudi karakteriziramo na naslednji način:

$$\forall t \in [a, b] \,.\, \operatorname{rang} D\Phi(t) = 1 \iff \forall t \in [a, b] \,.\, \dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2 \neq 0.$$

Parametrizaciji Φ rečemo **regularna parametrizacija**.

Ploskev lahko podamo parametrično z preslikavo $\Phi : D \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$:

$$\Phi(t, s) = (x(t, s),\ y(t, s),\ z(t, s)).$$

Pri čemer mora biti preslikava Φ maksimalnega ranga, kar lahko karakteriziramo na naslednji način:

$$\forall t \in [a, b] \,.\, \operatorname{rang} D\Phi(t) = 2 \iff (X_t,\ Y_t,\ Z_t) \times (X_s,\ Y_s,\ Z_s) \neq \vec{0}.$$

Trditev 1.101. *Naj bo $M \subseteq \mathbb{R}^{n+m}$ podmnogoterost dimenzije n. Za vsako točko $a \in M$ obstaja taka okolica $U \subseteq \mathbb{R}^{n+m}$ točke a in tak C^1 difeomorfizem $\Phi : U \to W \subseteq \mathbb{R}^{n+m}$, da je*

$$\Phi(M \cap U) = D \times \{0\}^n,$$

kjer je D neka odprta množica v $\mathbb{R}^n$.

Dokaz. TODO: □

Opomba 1.102. Rečemo, da lahko podmnogoterost lokalno izravnavamo.

Opomba 1.103. TODO:

1.9 Tangentni prostor

Naj bo $\gamma : (\alpha, \beta) \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$, $\gamma(t) = (x_1(t), \ldots, x_n(t))$ preslikava razreda C^1 na (α, β). Označimo z $\dot{\gamma}(t) = (\dot{x_1}(t), \ldots, \dot{x}_n(t))$.

Definicija 1.104. Naj bo $M \subseteq \mathbb{R}^n$ podmnogoterost in $a \in M$. **Tangentni prostor** na M v točki a je

$$T_aM = \{\dot{\gamma}(t_0) \,|\, \gamma : (\alpha, \beta) \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n,\ \gamma \in C^1(\alpha, \beta),\ \gamma(t_0) = a\}.$$

Opomba 1.105. Tangentni prostor dobimo tako, da vzemimo vse možne krivulje, ki gredo skozi točko a in tvorimo množico tangentnih vektorjev na M v točki a.

Trditev 1.106. *Naj bo $M \subseteq \mathbb{R}^n$ podmnogoterost in $a \in M$. Potem je T_aM vektorski podprostor dimenzije enake kot mnogoterost M, tj.*

$$\forall a \in M \,.\, \dim T_aM = \dim M.$$

Zdaj navedemo kako lahko določimo tangentni prostor, če je mnogoterost podana eksplicitno, implicitno ali parametrično.

Trditev 1.107. *Naj bo mnogoterost M lokalno v okolici U točke a podana kot graf, tj.*

$$M \cap U = \{(x', \varphi(x')) \,|\, x' \in D^{odp} \subseteq \mathbb{R}^d,\ \varphi : D \to \mathbb{R}^{n-d},\ \varphi \in C^1(D)\}.$$

Naj bo $a = (a', \varphi(a')) \in M$. Tedaj

$$T_aM = \operatorname{im} \begin{bmatrix} I \\ D\varphi(a') \end{bmatrix}.$$

Opomba 1.108. T_aM je graf odvoda $D\varphi(a')$.

Trditev 1.109. *Naj bo mnogoterost M lokalno v okolici U točke a podana implicitno, tj.*

$$M \cap U = \{x \in U \mid F_1(x) = \dots F_{n-d}(x) = 0,\ \operatorname{rang}(F_1, \dots, F_{n-d}) = n - d\}.$$

Tedaj

$$T_a M = \ker DF(a).$$

Trditev 1.110. *Naj bo $M \subseteq \mathbb{R}^n$ podmnogoterost dimenzije d. Naj bo $a \in M$ in naj bo $\Phi : D^{odp} \subseteq \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^n$ C^1 preslikava ranga d taka, da*

1. $\Phi(t_0) = a,\ t_0 \in D$;
2. $\Phi(D) = M \cap U$ *za neko okolico $U \subseteq \mathbb{R}^n$ točke a.*

Tedaj

$$T_a M = \operatorname{im} D\Phi(t_0).$$

1.10 Taylorjeva formula

Naj bo $f : D^{\text{odp}} \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ funkcija, $a \in D$. Funkcijo f bi radi v okolici točke a aproksimirali s polinomi.

Izrek 1.111. *Recimo, da velja*

1. *Množica $D \subseteq \mathbb{R}^n$ odprta, $a \in D$.*
2. *$f : D^{odp} \to \mathbb{R}$ funkcija razreda $C^{k+1}(D)$.*
3. *Vektor $h \in \mathbb{R}^n$ tak, da daljica med a in $a+h$ leži v D.*

Tedaj obstaja tak $\vartheta \in (0,1)$, da je

$$f(a+h) = f(a) + (D_h f)(a) + \frac{1}{2!}(D_h^2 f)(a) + \ldots + \frac{1}{k!}(D_h^k f)(a) + R_k \ (*),$$

kjer je $D_h = h_1 D_1 + h_2 D_2 + \ldots + h_n D_n$ ***odvod v smeri*** *h in $R_k = \frac{1}{(k+1)!}(D_h^{k+1} f)(a + \vartheta h)$* ***ostanek****.*
Izraz (*) je ***Taylorjeva formula*** *za funkcijo več spremenljivk.*

Dokaz. TODO □

Opomba 1.112. Pokaži, da velja

1. $(D_h f)(a) = \sum_{j=1}^n h_j \frac{\partial f}{\partial x_j}(a)$.
2. $(D_h^2 f)(a) = \sum_{k=1}^n \sum_{j=1}^n h_k h_j \frac{\partial^2 f}{\partial x_k \partial x_j}(a)$.

Primer 1.113. Pokaži, da za $n = 2$ velja $D^m_{(h,k)} = \sum_{j=0}^m \binom{m}{j} h^j k^{m-j} \frac{\partial^m}{\partial x^j \partial y^{m-j}}$.

Opomba 1.114. $h \mapsto f(a) + (D_h f)(a) + \frac{1}{2!}(D_h^2 f)(a) + \ldots + \frac{1}{k!}(D_h^k f)(a)$ je polinom stopnje največ k v spremenljivkah $h_1, h_2, \ldots, h_n$.

Opomba 1.115. Če je funkcija f razreda $C^\infty(D)$ lahko tvorimo **Taylorjevo vrsto**:

$$\sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{j!}(D_h^j f)(a).$$

- Vrsta sigurno konvergira za $h = 0$.
- Tudi, če vrsta konvergira za nek $h \neq 0$, ne konvergira nujno k $f(a+h)$.

Definicija 1.116. Če Taylorjeva vrsta konvergira k $f(a+h)$ za vse vse $||h|| \leq \delta$ za nek $\delta > 0$, tj.

$$f(a+h) = \sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{j!}(D_h^j f)(a),$$

potem rečemo, da je **funkcija f v okolici točke a (realno) analitična**.

Zgled 1.117. Razvij funkcijo $f(x,y) = e^{xy}$ v Taylorjevo vrsto v okolici točke $(0,0)$.

Posledica 1.118. *Recimo, da velja*

1. *Podmnožica $D \subseteq \mathbb{R}^n$ odprta, $a \in D$.*
2. *$f : D^{odp} \to \mathbb{R}$ funkcija razreda $C^{k+1}(D)$.*
3. *Vektor $h \in \mathbb{R}^n$ tak, da daljica med a in $a+h$ leži v D.*

Potem je

1. $R_k = o(||h||^k)$ *za* $h \to 0$.
2. $R_k = O(||h||^{k+1})$ *za* $h \to 0$.

Opomba 1.119. Velja:

1. $R_k = o(||h||^k) \iff \lim_{h\to 0} \frac{|R_k|}{||h||^k} = 0$ (izraz je majhen).
2. $R_k = O(||h||^{k+1}) \iff \exists M \in \mathbb{R}\,.\, \frac{|R_k|}{||h||^{k+1}} \leq M,$ ko gre h proti 0 (velikostni red).

Dokaz. TODO □

Opomba 1.120. Naj bo $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ funkcija razreda C^∞ v okolici točke $(0,0)$, $h = (x,y)$. Pokaži, da za koeficient a_{nm} pred $x^n y^m$ velja: $(\frac{\partial^{n+m}}{\partial x^n \partial y^m} f)(0,0) = a_{nm} n! m!$.

1.11 Ekstremi funkcij več spremenljivk

Definicija 1.121. Naj bo $f : D \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ funkcija, $a \in D$.

1. Funkcija f ima v točki a **lokalni maksimum**, če
$$\exists r > 0 \,.\, \forall x \in D \cap K(a, r) \,.\, f(a) \geq f(x).$$
Funkcija f ima v točki a **strogi lokalni maksimum**, če
$$\exists r > 0 \,.\, \forall x \in D \cap K(a, r) \,.\, f(a) > f(x).$$
2. Funkcija f ima v točki a **(globalni) maksimum na** D, če
$$\forall x \in D \,.\, f(a) \geq f(x).$$
3. Podobno definiramo: **lokalni minimum**, **(globalni) minimum**.
4. **Lokalni ekstrem** (oz. **globalni ekstrem**) je skupno ime za lokalni (oz. globalni) minumum in maksimum.

Opomba 1.122. Če je $K^{\text{komp}} \subseteq \mathbb{R}^n$ in $f : K \to \mathbb{R}$ zvezna funkcija, potem ima f na K maksimum in minimum.

Definicija 1.123. Naj bo $D^{\text{odp}} \subseteq \mathbb{R}^n$ in $f : D \to \mathbb{R}$ funkcija razreda C^1 (dovolj, da je diferenciabilna).
Rečemo, da je točka $a \in D$ **stacionarna (oz. kritična) točka funkcije** f, če
$$(Df)(a) = 0, \text{ tj. } \frac{\partial f}{\partial x_1}(a) = \frac{\partial f}{\partial x_2}(a) = \ldots = \frac{\partial f}{\partial x_n}(a) = 0.$$

Trditev 1.124. *Recimo, da velja*

1. *Podmnožica $D \subseteq \mathbb{R}^n$ odprta, $a \in D$.*
2. *$f : D \to \mathbb{R}$ funkcija razreda C^1.*

Tedaj, če ima funkcija f v točki a lokalni ekstrem, je a kritična točka za f.

Dokaz. TODO □

Zgled 1.125. Naj bo $K = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \,|\, x^2 + y^2 \leq 3\}$, $f(x, y) = x^2 - xy + y^2 - 3x + 4$. Poišči minimum in maksimum funkcije f na K.

1.11.1 Potrebni in zadostni pogoji na 2. odvodi, da je kritična točka lokalni ekstrem

Naj bo $D \subseteq \mathbb{R}^n$ odprta, $f : D \to R$ funkcija razreda C^2. Definiramo **Hessejevo matriko** 2. odvodov:
$$(Hf)(x) = \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2} & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_n} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_1} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2} & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_n} \\ \vdots & & & \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_n \partial x_1} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_n \partial x_2} & \vdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_n^2} \end{bmatrix}.$$

Opomba 1.126. Če je $f \in C^2(D)$, potem mešani odvodi so enaki, tj. $(Hf)^T = Hf$. Torej Hessejeva matrika je simetrična, torej ima v vsaki točki realne lastne vrednosti.

$\langle (Hf)h, h\rangle$ je **Hessejeva forma** (kvadratna forma, ki pripada matrike $(Hf)(a)$).

Definicija 1.127. Hessejeva matrika Hf je

- **pozitivno semidefinitna** (pišemo $Hf \geq 0$), če $\forall v \in D \,.\, \langle (Hf)v, v\rangle \geq 0 \iff$ vse lastne vrednosti so nenagitvne;
- **pozitivno definitna** (pišemo $Hf > 0$), če $\forall v \in D \,.\, v \neq 0 \implies \langle (Hf)v, v\rangle > 0 \iff$ vse lastne vrednosti so pozitivne;
- **negativno semidefinitna** (pišemo $Hf \leq 0$), če $\forall v \in D \,.\, \langle (Hf)v, v\rangle \leq 0 \iff$ vse lastne vrednosti so nepozitivne;
- **negativno definitna** (pišemo $Hf < 0$), če $\forall v \in D \,.\, v \neq 0 \implies \langle (Hf)v, v\rangle < 0 \iff$ vse lastne vrednosti so negativne.

Trditev 1.128 (Potrebni pogoji)**.** *Recimo, da velja*

1. *Podmnožica $D \subseteq \mathbb{R}^n$ odprta, $a \in D$.*
2. *Funkcija $f : D \to \mathbb{R}$ razreda C^2.*

Tedaj

- *Če ima f v točki a lokalni maksimum, potem*
  1. *$(Df)(a) = 0$,*
  2. *$Hf(a) \leq 0$.*
- *Če ima f v točki a lokalni minimum, potem*
  1. *$(Df)(a) = 0$,*
  2. *$(Hf)(a) \geq 0$.*

Dokaz. TODO □

Izrek 1.129 (Zadostni pogoji)**.** *Recimo, da velja*

1. *Podmnožica $D \subseteq \mathbb{R}^n$ odprta, $a \in D$.*
2. *Funkcija $f : D \to \mathbb{R}$ razreda C^2.*
3. *$a \in D$ stacionarna točka funkcije f.*

Tedaj

- *Če je $(Hf)(a) > 0$, potem ima funkcija f v točki a (strogi) lokalni minimum.*
- *Če je $(Hf)(a) < 0$, potem ima funkcija f v točki a (strogi) lokalni maksimum.*
- *Če ima $(Hf)(a)$ tako pozitivne, kot negativne lastne vrednosti, potem funkcija f v točki a nima lokalnega ekstrema.*

Zgled 1.130. Določi $(Hf_i)(0,0)$ za $f_1(x,y) = \frac{1}{2}(x^2+y^2)$, $f_2(x,y) = \frac{1}{2}(-x^2-y^2)$, $f_3(x,y) = \frac{1}{2}(x^2 - y^2)$.

Posledica 1.131 (Zadostni pogoji, $n = 2$)**.** *Recimo, da velja*

1. *Podmnožica $D \subseteq \mathbb{R}^2$ odprta, $(a,b) \in D$.*
2. *Funkcija $f : D \to \mathbb{R}$ razreda C^2.*
3. *$(a,b) \in D$ stacionarna točka funkcije f.*

Tedaj

- *Če je $f_{xx}f_{yy} - f_{xy}^2(a,b) > 0$, potem ima funkcija f v točki (a,b).*
  - *Če je $f_{xx}(a,b) > 0$, potem ima funkcija f v točki (a,b) lokalni minimum.*
  - *Če je $f_{xx}(a,b) < 0$, potem ima funkcija f v točki (a,b) lokalni maksimum.*
- *Če je $f_{xx}f_{yy} - f_{xy}^2(a,b) < 0$, potem funkcija f v točki (a,b) nima lokalnega ekstrema.*

Dokaz. TODO □

Zgled 1.132. Naj bo $f(x,y,z) = x^2 + y^2 + z^2 + 2xyz$. Klasificiraj vse stacionarne točke funkcije f.

1.11.2 Vezani ekstremi

Izrek 1.133. *Recimo, da velja*

1. *Podmnožica $D \subseteq \mathbb{R}^n$ odprta.*
2. *Funkciji $f, g_1, \ldots, g_m$ razreda $C^1(D)$, $m < n$.*
3. *Preslikava $G = (g_1, \ldots, g_m) : D \to \mathbb{R}^m$ maksimalnega ranga.*
4. *$M = G^{-1}(\{0\}) \neq \emptyset$, tj. $M = \{x \in D \,|\, g_1(x) = 0, \ldots, g_m(x) = 0\}$ podmnogoterost v D.*
5. *Funkcija $f : M \to \mathbb{R}$ ima v točki $a \in M$ lokalni ekstrem (kot funkcija iz M v $\mathbb{R}$).*

Tedaj obstajajo take realne konstante $\lambda_1, \ldots, \lambda_m$, da je

$$(Df)(a) = \lambda_1(Dg_1)(a) + \ldots + \lambda_m(Dg_m)(a) = \sum_{j=1}^{m} \lambda_j(Dg_j)(a).$$

Dokaz. TODO □

Opomba 1.134. Lagrangeeva metoda za iskanja vezanih ekstremov

1. Tvorimo funkcijo $F(\underbrace{x_1, \ldots, x_n}_{x}, \lambda_1, \ldots, \lambda_m) = f(x) - \sum_{j=1}^{m} \lambda_j g_j(x)$.
2. Iščemo stacionarne točke F:
   - $D_x F = (Df)(x) - \sum_{j=1}^{m} \lambda_j(Dg_j)(x) = 0$ (n enačb).

- $D_{\lambda_j} F = -g_j(x) = 0$ za $j = 1, \dots, m$ (m enačb).

Konstante $\lambda_1, \dots, \lambda_m$ so **Lagrangeevi multiplikatorji**.

Zgled 1.135. Določi stacionarne točke funkcije $f(x, y, z) = z$ na $M = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 + z^2 = 1;\ x + y + z = 0\}$.

Zgled 1.136. Določi stacionarne točke funkcije $f(x, y, z) = x^2 - xy + y^2 - 3x + 4$ na robu $x^2 + y^2 = 9$.

2 Integrali s parametri

Naj bo $f : [a,b]_x \times [c,d]_y \to \mathbb{R}$ funkcija. Gledamo funkcijo $F(y) = \displaystyle\int_a^b f(x,y)\,dx$, kjer $y \in [c,d]$ je *parameter*.
Zanima nas v kakšni so povezavi lastnosti funkcije f in funkcije F.

Zgled 2.1. Izračunaj $F(y) = \displaystyle\int_0^\pi \sin(xy)\,dx$. Ali je $F(y)$ zvezna? Kaj je D_F?

Zgled 2.2. *Eulerjeva funkcija gama* je $\Gamma(s) = \displaystyle\int_0^\infty x^{s-1}e^{-x}\,dx$.
- Določi D_Γ.
- Kakšen predznak ima Γ na D_Γ?
- Določi osnovno rekurzivno relacijo za Γ.
- Kakšna povezava med fakulteto in Γ?
- Kako bi lahko definirali Γ za negativne vrednosti? Za katere lahko?

Definicija 2.3. Podmnožica $D \subseteq \mathbb{R}^n$ je *lokalno kompaktna*, če

$$\forall a \in D\,.\,\exists r \in \mathbb{R}\,.\,r > 0\,.\,D \cap \overline{K(a,r)} \text{ kompaktna množica.}$$

Zgled 2.4. Primeri lokalno kompaktnih množic.
- Vsaka zaprta in vsaka odprta množica v $\mathbb{R}^n$ je lokalno kompaktna.
- $D \subseteq \mathbb{R}^2$, $D = K(0,1) \cup \{(1,0)\}$ ni lokalno kompaktna.

Trditev 2.5. *Recimo, da velja*
1. *$D \subseteq \mathbb{R}^n$ lokalno kompaktna podmnožica;*
2. *I zaprt interval na $\mathbb{R}$;*
3. *funkcija $f : I_x \times D_y$ zvezna.*

Tedaj je funkcija $F(u,v,y) = \displaystyle\int_u^v f(x,y)\,dx$, kjer so $(u,v,y) \in I \times I \times D$, zvezna na $I \times I \times D$.

Dokaz. Dokazujemo zveznost v točki $(u_0,v_0,y_0) \in I \times I \times D$. Ocenimo razliko $|F(u,v,y) - F(u_0,v_0,y_0)|$.
- Kaj vemo o funkciji f na nekem kompaktu? □

Posledica 2.6. *Recimo, da velja*
1. *$D \subseteq \mathbb{R}^n$ lokalno kompaktna podmnožica;*
2. *$I = [a,b]$;*
3. *funkcija $f : I_x \times D_y$ zvezna.*

Tedaj je funkcija $F(y) = \displaystyle\int_a^b f(x,y)\,dx$, zvezna na D.

2.1 Odvajanje integralov s parametri

Trditev 2.7. *Recimo, da velja*
1. *funkcija $f : [a,b]_x \times (c,d)_y \to \mathbb{R}$ zvezna;*
2. *$\forall (x,y) \in [a,b] \times (c,d)\,.\,f$ parcialno odvedljiva po y;*
3. *funkcija $\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)$ zvezna na $[a,b] \times (c,d)$.*

Tedaj je

1. $F(y) = \int_a^b f(x,y)\,dx$ *odvedljiva funkcija na* (c,d).
2. $F'(y) = \frac{dF}{dy}(y) = \frac{d}{dy}\int_a^b f(x,y)\,dx = \int_a^b \frac{\partial f}{\partial y}(x,y)\,dx$, *tj. lahko zamenjamo vrstni red odvajanja.*

Dokaz. Dokazujemo, da je F odvedljiva v točki $y \in (c,d)$. Ocenimo razliko $\left| \frac{F(y+h)-F(y)}{h} - \int_a^b \frac{\partial f}{\partial y}(x, y\right.$

- Lagrangeev izrek.
- Ustrezni kompakti. $\square$

Posledica 2.8. *Recimo, da velja*

1. *funkcija* $f : [a,b]_x \times (c,d)_y \to \mathbb{R}$ *zvezna;*
2. $\forall (x,y) \in [a,b] \times (c,d)\,.\, f$ *parcialno odvedljiva po* y*;*
3. *funkcija* $\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)$ *zvezna na* $[a,b] \times (c,d)$*.*
4. *funkciji* $\alpha, \beta : (c,d) \to [a,b]$ *zvezno odvedljivi.*

Tedaj $F'(y) = \dfrac{d}{dy} \displaystyle\int_{\alpha(y)}^{\beta(y)} f(x,y)\,dx = \int_{\alpha(y)}^{\beta(y)} \frac{\partial f}{\partial y}(x,y)\,dx + \beta'(y) f(\beta(y),y) - \alpha'(y) f(\alpha(y),y)$*.*

Dokaz. $F(u,v,y) = \displaystyle\int_u^v f(x,y)\,dx \implies \int_{\alpha(y)}^{\beta(y)} f(x,y)\,dx = F(\alpha(y), \beta(y), y)$. Torej treba izračunati odvod funkcije treh spremenljivk.

- Osnovni izrek analize. □

Posledica 2.9. *Recimo, da velja*

1. *podmnožica* $D \subseteq \mathbb{R}^n$ *odprta;*
2. *funkcija* $f : [a,b]_x \times D_y \to \mathbb{R}$ *zvezna;*
3. $\forall (x,y) \in [a,b] \times D\,.\, \forall j \in [n]\,.\, f$ *parcialno odvedljiva po* y_j*;*
4. $\forall j \in [n]\,.\, \frac{\partial f}{\partial y_j}(x,y)$ *so zvezne funkcije na* $[a,b] \times D$*.*

Tedaj je

1. $F(y) = \displaystyle\int_a^b f(x,y)\,dx$ *funkcija razreda* C^1 *na* D*.*
2. $\dfrac{\partial F}{\partial y_j}(y) = \displaystyle\int_a^b \frac{\partial f}{\partial y_j}(x,y)\,dx$*.*

Zgled 2.10. S pomočjo integrala s parametrom $F(a) = \displaystyle\int_0^1 \frac{x^a - 1}{\ln x}\,dx$ izračunaj $\displaystyle\int_0^1 \frac{x-1}{\ln x}\,dx$.

2.2 Integral integrala s parametrom

Izrek 2.11. *Recimo, da velja*

1. *funkcija* $f : [a,b] \times [c,d] \to \mathbb{R}$ *zvezna.*

Tedaj je

$$\int_c^d \left(\int_a^b f(x,y)\,dx \right) dy = \int_a^b \left(\int_c^d f(x,y)\,dy \right) dx.$$

Definicija 2.12. Integrali tipa $\displaystyle\int_c^d \left(\int_a^b f(x,y)\,dx \right) dy$ imenujemo *dvakratni integrali.*

Dokaz. Definiramo $\Psi(y) = \displaystyle\int_c^y \left(\int_a^b f(x,s)\,dx \right) ds$ in $\Phi(y) = \displaystyle\int_a^b \left(\int_c^y f(x,s)\,ds \right) dx$. Dololj, da dokažemo:

- Ψ in Φ se ujemata v eni točki.
- $\Psi' = \Phi'$.

Pomagamo si s osnovnim izrekom analize. □

Zgled 2.13. Izračunaj $\displaystyle\int_0^1 \left(\int_0^2 (x + y^2)\,dx \right) dy$ na dva načina.

2.3 Posplošeni integrali s parametri

Naj bo Y neka množica, $a \in \mathbb{R}$, $f : [a, \infty)_x \times Y_y \to \mathbb{R}$ funkcija. Standardni predpostavki:

- Funkcija f za vsak $y \in Y$ zvezna, tj. $x \mapsto f(x, y)$ zvezna na $[a, \infty)$ za vsak $y \in Y$.
- Za vsak $y \in Y$ obstaja integral $F(y) = \displaystyle\int_a^\infty f(x, y)\, dx$

Opomba 2.14. Integral $F(y) = \displaystyle\int_a^\infty f(x, y)\, dx$ obstaja po definiciji, če obstaja $\displaystyle\lim_{b\to\infty} \int_a^b f(x, y) dx$. Ta limita obstaja natanko tedaj, ko $\displaystyle\lim_{b\to\infty} \int_b^\infty f(x, y)\, dx = 0$, kar je ravno konvergenca po točkah. ?

Definicija 2.15. Integral $F(y) = \displaystyle\int_a^\infty f(x, y)\, dx$ *konvergira enakomerno* na Y, če

$$\forall \epsilon > 0 \,.\, \exists b_0 \geq a \,.\, \forall b \geq b_0 \,.\, \forall y \in Y \,.\, \left| \int_b^\infty f(x, y)\, dx \right| < \epsilon.$$

Zgled 2.16. Izračunaj $F(y) = \displaystyle\int_0^\infty ye^{-xy}\, dx$ za $y \in [0, \infty)$. Ali je konvergenca enakomerna na $[c, \infty)$, $c > 0$? Ali je konvergenca enakomerna na $(0, \infty)$?

Opomba 2.17. Recimo, da $F(y) = \displaystyle\int_a^\infty f(x, y)\, dx$ konvergira enakomerno. Kaj to pomeni? Naj bo $F_b(y) = \int_a^\infty f(x, y)\, dx$. Potem funkcijsko zaporedje $F_b(y)$ konvergira enakomerno proti $F(y)$ na Y.

Trditev 2.18. *Recimo, da velja*

- *podmnožica $Y \subseteq \mathbb{R}^n$ lokalno kompaktna;*
- *funkcija $f : [a, \infty) \times Y \to \mathbb{R}$ zvezna;*
- *integral s parametri $F(y) = \displaystyle\int_a^\infty f(x, y)\, dx$ konvergira enakomerno na Y.*

Tedaj je F zvezna na Y.

Dokaz. Enakomerna limita zveznih funkcij. □

Opomba 2.19. Zveznost (in odvedljivost) sta lokalni lastnosti (zvezna (oz. odvedljiva) v vsaki točki), tj. f je zvezna na Y, če je zvezna v vsaki točki $y \in Y$ (tudi, če je zvezna v okolici vsake točke $y \in Y$). Zato v prejšnji trditvi je za zveznost F na Y dovolj zahtevati, da je integral *lokalno enakomerno konvergira*, tj

$$\forall y \in Y \,.\, \exists r > 0 \,.\, F \text{ enakomerno konvergira na } Y \cap K(y, r).$$

Trditev 2.20 (Test enakomerne konvergence)**.** *Recimo, da velja*

1. *funkcija $f : [a, \infty) \times Y \to \mathbb{R}$ zvezna za vsak $y \in Y$;*
2. *obstaja taka zvezna funkcija $g : [a, \infty) \to \mathbb{R}$, da za vsak $(x, y) \in [a, \infty) \times Y$ velja $|f(x, y)| \leq g(x)$;*
3. *obstaja integral $\displaystyle\int_a^\infty g(x)\, dx$.*

Tedaj integral $F(y) = \displaystyle\int_a^\infty f(x, y)\, dx$ konvergira enakomerno na Y.

Dokaz. Cauchyjev kriterij za konvergenco integralov. □

Zgled 2.21. Obravnavaj lokalno enakomerno konvergenco funkcij

- $s \mapsto \int_1^\infty x^{s-1}e^{-x}\,dx$.
- $s \mapsto \int_0^1 x^{s-1}e^{-x}\,dx$.

Vpeljava nove spremenljivke $x = t^N$?

Trditev 2.22. *Recimo, da velja*

1. *funkcija* $f : [a,\infty)_x \times [c,d]_y \to \mathbb{R}$ *zvezna;*
2. *integral* $F(y) = \int_a^\infty f(x,y)\,dx$ *konvergira enakomerno na* $[c,d]$.

Tedaj

$$\int_c^d \left(\int_a^\infty f(x,y)\,dx\right)dy = \int_a^\infty \left(\int_c^d f(x,y)\,dy\right)dx.$$

Dokaz. Račun. □

Kadar je $\int_c^\infty \left(\int_a^\infty f(x,y)\,dx\right)dy = \int_a^\infty \left(\int_c^\infty f(x,y)\,dy\right)dx$?

Opomba 2.23. Podobno vprašanje: Kadar je $\sum_{i=1}^\infty \sum_{j=1}^\infty a_{ij} = \sum_{j=1}^\infty \sum_{i=1}^\infty a_{ij}$?

Trditev 2.24. *Recimo, da velja*

1. *funkcija* $f : [a,\infty)_x \times [c,\infty)_y \to [0,\infty)$ *nenegativna in zvezna;*
2. *integral* $F(y) = \int_a^\infty f(x,y)\,dx$ *konvergira lokalno enakomerno na* $[c,\infty)$ *in integral* $G(x) = \int_c^\infty f(x,y)\,dy$ *konvergira lokalno enakomerno na* $[a,\infty)$ *(imamo zveznost* F *in* G*).*

Tedaj

$$\int_c^\infty \left(\int_a^\infty f(x,y)\,dx\right)dy = \int_a^\infty \left(\int_c^\infty f(x,y)\,dy\right)dx.$$

Torej ali sta oba enaka ∞, *ali pa sta oba končna in enaka.*

Dokaz. Ocenimo navzgor $\int_a^b G(x)\,dx$ in $\int_c^d F(y)\,dy$. □

Trditev 2.25. *Recimo, da velja*

1. *funckija* $f : [a,\infty) \times [c,\infty) \to \mathbb{R}$ *zvezna;*
2. *integral* $F(y) = \int_a^\infty |f(x,y)|\,dx$ *konvergira lokalno enakomerno na* $[c,\infty)$ *in integral* $G(x) = \int_c^\infty |f(x,y)|\,dy$ *konvergira lokalno enakomerno na* $[a,\infty)$*;*
3. *Ali* $\int_c^\infty \left(\int_a^\infty |f(x,y)|\,dx\right)dy$ *končen ali* $\int_a^\infty \left(\int_c^\infty |f(x,y)|\,dy\right)dx$ *končen.*

Tedaj je

$$\int_c^\infty \left(\int_a^\infty |f(x,y)|\,dx\right)dy = \int_a^\infty \left(\int_c^\infty |f(x,y)|\,dy\right)dx.$$

Trditev 2.26 (Odvod posplošenega integrala s parametri)**.** *Recimo, da velja*

1. *funkcija* $f : [a,\infty) \times (c,d) \to \mathbb{R}$ *zvezna;*
2. *integral* $F(y) = \int_a^\infty f(x,y)\,dx$ *konvergira na* (c,d)*;*

3. $\forall (x, y) \in [a, b] \times (c, d)\,.\, f$ parcialno odvedljiva po y;
4. funkcija $\frac{\partial f}{\partial y}(x, y)$ zvezna na $[a, b] \times (c, d)$;
5. integral $y \mapsto \displaystyle\int_a^\infty \frac{\partial f}{\partial y}(x, y)\, dx$ konvergira lokalno enakomerno na (c, d).

Tedaj je
1. $F(y) = \displaystyle\int_a^\infty f(x, y)\, dx$ zvezno odvedljiva funkcija na (c, d);
2. $F'(y) = \dfrac{dF}{dy}(y) = \dfrac{d}{dy} \displaystyle\int_a^\infty f(x, y)\, dx = \int_a^\infty \frac{\partial f}{\partial y}(x, y)\, dx$.

Dokaz. TODO □

Zgled 2.27. Naj bo $0 < c < d$. Izračunaj $\displaystyle\int_0^\infty \frac{e^{-cx} - e^{-dx}}{x}$.

Trditev 2.28. *Recimo, da velja*
1. podmnožica $D \subseteq \mathbb{R}^n$ odprta;
2. funkcija $f : [a, \infty) \times D \to \mathbb{R}$ zvezna;
3. za vsak $(z, y) \in [a, \infty)\times$ obstajajo $\frac{\partial f}{\partial y_j}$ in so zvezni;
4. za vsak $y \in D$ obstaja $F(y) = \displaystyle\int_a^\infty f(x, y)\, dx$;
5. za vsak $j \in \{1, \dots, n\}$ integral $F(y) = \displaystyle\int_a^\infty \frac{\partial f}{\partial y_j}\, dx$ konvergira lokalno enakomerno na D.

Tedaj je
1. $F(y) = \displaystyle\int_a^\infty f(x, y)\, dx$ zvezno odvedljiva funkcija na D;
2. $F'(y) = \dfrac{\partial F}{\partial y_j}(y) = \dfrac{\partial}{\partial y_j} \displaystyle\int_a^\infty f(x, y)\, dx = \int_a^\infty \frac{\partial f}{\partial y_j}(x, y)\, dx$ za vse $j \in \{1, \dots, n\}$.

Zgled 2.29. Opazujemo integral $\displaystyle\int_0^\infty \frac{\sin x}{x}\, dx$. Velja:

- $\dfrac{2}{\pi} \displaystyle\int_0^\infty \frac{\sin(ax)}{x}\, dx = \operatorname{sgn}(a)$.
- $\dfrac{\sin x}{x}$ je nihanje z padajočo amplitudo, kar je podobno alternirajoče harmonične vrste.
- Integral $\displaystyle\int_0^\infty \frac{|\sin x|}{x}\, dx$ ne obstaja.
- $\displaystyle\int_0^\infty \frac{\sin x}{x}\, dx = \frac{\pi}{2}$. Dokaz TODO

2.4 Eulerjeva funkcija gama

Definicija 2.30. Funkcija $\Gamma(s) = \int_0^\infty x^{s-1}e^{-x}\,dx$ je *Eulerjeva funkcija gama.*

Trditev 2.31. *Lastnosti Eulerjeve funkcije gama:*
- $D_\Gamma = (0, \infty)$.
- $\Gamma(s+1) = s\Gamma(s)$. *Če je* $n \in \mathbb{N}$, *potem* $\Gamma(n+1) = n!$.
- $\Gamma(1) = 1$.
- $\Gamma \in C((0, \infty))$.
- $\Gamma(s) = \frac{\Gamma(s+1)}{s}$, $s > 0$. *Če je* $s \approx 0$, *potem* $\Gamma(s) \approx \frac{1}{s}$.
- $\Gamma \in C^\infty((0, \infty))$.
- $\Gamma(s) > 0$.
- Γ *je konveksna funkcija na* $(0, \infty)$. *Tudi* $\ln \Gamma$ *konveksna funkcija na* $(0, \infty)$.

Dokaz. TODO □

Opomba 2.32. O konveksnosti. TODO

Zgled 2.33. Naj bo $a > 0$. S pomočjo Eulerjeve funkcije gama izračunaj $\int_0^\infty e^{-ax^2}\,dx$.

Zgled 2.34. Naj bo $a \in \mathbb{R}$, $\sigma > 0$. S pomočjo prejšnjega zgleda izračunaj $\int_{-\infty}^\infty \exp\left(\frac{-(x-a)^2}{2\sigma^2}\right)dx$.

Izrek 2.35. *Eulerjeva funkcija* Γ *je natanko določena z lastnostmi:*
1. $\Gamma(1) = 1$;
2. $\Gamma(s+1) = s\Gamma(s)$;
3. $\Gamma(s) > 0$ *in* Γ *je zvezna na* $(0, \infty)$;
4. $\ln \Gamma$ *je konveksna.*

2.5 Eulerjeva funkcija beta

Definicija 2.36. Funkcija $B(p,q) = \int_0^1 x^{p-1}(1-x)^{q-1}\,dx$ je *Eulerjeva funkcija beta.*

Trditev 2.37. *Lastnosti Eulerjeve funkcije beta:*
- $D_B = (0, \infty) \times (0, \infty)$.
- $B(p,q) = B(q,p)$.
- $\frac{1}{2}B(\frac{\alpha+1}{2}, \frac{\beta+1}{2}) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^\alpha t \cos^\beta t\,dt$ *za* $\alpha, \beta > -1$.

Trditev 2.38. $B(p,q) = \int_0^\infty \frac{t^{p-1}}{(1+t)^{p+q}}\,dt$.

Dokaz. V $B(p,q)$ vpeljamo $t = \frac{x}{1-x}$. □

Posledica 2.39. $B(p, 1-p) \int_0^\infty \frac{t^{p-1}}{1+t}\,dt$ *za* $0 < p < 1$.

Posledica 2.40. $B(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}) = \pi$.

Dokaz. Račun. □

Opomba 2.41. Za $p \in (0,1)$ velja:

$$B(p, 1-p) = \frac{\pi}{\sin(p\pi)}.$$

Izrek 2.42 (Osnovna povezava med B in Γ)**.**

$$B(p,q) = \frac{\Gamma(p)\Gamma(q)}{\Gamma(p+q)}.$$

Dokaz. TODO □

Posledica 2.43. $\Gamma(\frac{1}{2}) = \sqrt{\pi}$.

Dokaz. Račun z pomočjo osnovne povezave med B in Γ. □

Primer 2.44. Izračunaj $\Gamma(\frac{7}{2})$.

Primer 2.45. S pomočjo Eulerjeve funkcije beta izračunaj $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^8 x \cos^6 x \, dx$.

Izrek 2.46 (Stirlingova formula)**.**

$$\lim_{s\to\infty} \frac{\Gamma(s+1)}{s^s\, e^{-s}\sqrt{2\pi s}} = 1.$$

Dokaz. TODO □

Posledica 2.47. $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{n!}{n^n\, e^{-n}\sqrt{2\pi n}} = 1$, *tj.* $n! \approx \sqrt{2\pi n}(\frac{n}{e})^n$.

Primer 2.48. Izračunaj $\lim_{n\to\infty} \frac{(2n)!}{n!\, n^n\, 2^n}$.

3 Riemannov integral v $\mathbb{R}^n$

Definicija 3.1. *Kvader* $[a, b]$ je množica $[a, b] = \{x = (x_1, \ldots, x_n) \,|\, a_j \leq x_j \leq b_j,\ j = 1, \ldots, n\}$ za $a \leq b$.
Prostornina kvadra je $V([a, b]) = \prod_{j=1}^{n}(b_j - a_j)$.

Definicija 3.2. *Delitev* D kvadra $K = [a, b]$ dobimo z delitvami robov kvadra K:

$$\forall j \in \{1, \ldots, n\} \,.\, a_j = x_o^j < x_1^j < \ldots < x_{m_j}^j = b_j.$$

Opomba 3.3. Delitev D je dana z delitvami robov. Lahko rečemo, da je delitev D sestavljena iz manjših kvadrov, ki jo delitev robov porodi in pišemo $\sum_{Q \in D}$, tj. gremo po vseh kvadrih delitve D.

Definicija 3.4. Delitev D' kvadra K je *finejša* od delitve D, če vsebuje vse delilne točke delitve D.

Opomba 3.5.
- Če je D delitev K, potem $\sum_{Q \in D} V(Q) = V(K)$.
- Če je D' finejša od D, potem
  - Vsak kvader iz D' leži v enem od kvadrov iz D.
  - Vsak kvader iz D je unija kvadrov iz D'.

Naj bo $f : K = [a, b] \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ omejena funkcija. Definiramo

$$m = m(f) = m(f, K) = m(K) = \inf_K f(x)$$
$$M = M(f) = M(f, K) = M(K) = \sup_K f(x)$$

Naj bo D delitev kvadra K. Naj bo $Q \in D$ (nek manjši kvader). Definiramo

$$m(f, Q) = m(Q) = \inf_Q f(x)$$
$$M(f, Q) = M(Q) = \sup_Q f(x)$$

Definicija 3.6. *Spodnja Darbouxoeva vsota* funkcije f pri delitvni D je

$$s(f, D) = s(D) = \sum_{Q \in D} m(Q)V(Q).$$

Zgornja Darbouxoeva vsota funkcije f pri delitvni D je

$$S(f, D) = S(D) = \sum_{Q \in D} M(Q)V(Q).$$

Opomba 3.7. Velja: $m(K)V(Q) \leq s(f, D) \leq S(f, D) \leq M(K)V(K)$.

Lema 3.8. *Naj bo delitev D' finejša od delitve D. Tedaj*

$$s(f, D) \leq s(f, D') \leq S(f, D') \leq S(f, D).$$

Posledica 3.9. *Naj bosta D_1, D_2 delitvi kvadra K. Tedaj*

$$s(f, D) \leq S(f, D).$$

Ker za poljubni delitvi D_1, D_2 velja $s(f, D) \leq S(f, D)$. Lahko Definiramo

$$s(f) = \sup_D s(f, D)$$
$$S(f) = \inf_D S(f, d)$$

Velja: $s(f) \leq S(f)$.

Definicija 3.10. Funkcija f je na kvadru K *integrabilna po Darbouxju*, če

$$s(f) = S(f).$$

Opomba 3.11. Če velja enakost, to vrednost trenutno iznačimo z I_D. Sicer to označimo $\int_K f(x)\, dx = \int_K f(x)\, dV(K)$.

Primer 3.12.
$n = 2 : \int\int_K f(x, y) dxdy$ je *dvojni integral.*
$n = 3 : \int\int\int_K f(x, y, z) dxdydz$ je *trojni integral.*

3.1 Riemannov integral

Definicija 3.13. Naj bo $K = [a, b]$ kvader, D delitev, $f : K \to \mathbb{R}$ funkcija. Za vsak $Q \in D$ izberimo neko točko $\eta_Q \in Q$. *Riemannova vsota* funkcije f pri delitvi D in izboru točk $\eta = \{\eta_Q \in Q\}$ je

$$R(f, D, \eta) = \sum_{Q \in D} f(\eta_Q)V(Q).$$

Označimo z $\Delta(D)$ maksimum vseh dolžin vseh tobov kvadrov delitve D.

Definicija 3.14. Funkcija f je *integrabilna po Riemannu* na kvadru K, če obstaja limita njenih Riemannovih vsot, tj.

$$\lim_{\Delta(D) \to 0} R(f, D, \eta) = I_R.$$

Opomba 3.15. To pomeni, da

$$\forall \epsilon > 0 \,.\, \exists \delta > 0 \,.\, \forall D^{\text{delitev}} \,.\, \Delta(D) < \delta \implies \forall \eta^{\text{izbor točk}} \,.\, |R(f, D, \eta)| < \epsilon.$$

Zgled 3.16. TODO

Opomba 3.17. Če ima funkcija $f : K \to \mathbb{R}$ limito Riemannovih vsot, je f omejena.

Lema 3.18. *Naj bo D_0 delitev kvadra K. Naj bo $\epsilon > 0$. Potem obstaja tak $\delta > 0$, da za vsako delitev D, za katero je $\Delta(D) < \delta$, velja, da je vsota prostornin kvadrov delitve D, ki niso vsebovani v kakšnem od kvadrov delitve D_0 manja od ϵ.*

Izrek 3.19. *Naj bo $f : K \to \mathbb{R}$ omejena funkcija. NTSE:*

1. *f je na K integrabilna po Darbouxju.*
2. *f je na K integrabilna po Riemannu.*
3. *$\forall \epsilon > 0 \,.\, \exists D^{delitev} \,.\, S(f, D) - s(f, D) < \epsilon$.*

Dodatek. *V tem primeru je $I_D = I_R$.*

Dokaz. TODO: □

Trditev 3.20. *Naj bo $f : K \to \mathbb{R}$ zvezna, potem je f na K integrabilna.*

Dokaz. TODO: □

3.2 Osnovne lastnosti Riemannova integrala po kvadrih

Naj bo $K \subseteq \mathbb{R}^n$ kvader, funkciji f, g integrabilni na K.

1. Naj bosta $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$. Tedaj je tudi

   $$\lambda f + \mu g$$

   integrabilna na K in

   $$\int_K (\lambda f + \mu g)(x)\,dx = \lambda \int_K f(x)\,dx + \mu \int_K g(x)\,dx.$$

   Torej množica integrabilnih funkcij na K je vektorski prostor nad $\mathbb{R}$ in integral je linearen funkcional na tem prostoru.

Dokaz. TODO: □

2. Če je $f(x) \leq g(x)$ za vse $x \in K$, je

$$\int_K f(x)\,dx \leq \int_K g(x)\,dx.$$

Dokaz. TODO: □

3. Funkcija $|f|$ je integrabilna in

$$\left|\int_K f(x)\,dx\right| \leq \int_K |f(x)|\,dx.$$

Dokaz. TODO: □

3.3 Fubinijev izrek

I. Naj bo $A \subseteq \mathbb{R}^n$ kvader in $B \subseteq \mathbb{R}^m$ kvader. Naj bo $f : A \times B \subseteq \mathbb{R}^{n+m} \to \mathbb{R}$ integrabilna. Naj bo za vsak $x \in A$ funkcija $y \mapsto f(x,y)$ integrabilna na B. Potem je funkcija

$$x \mapsto \int_B f(x,y)\,dy$$

integrabilna na A in velja:

$$\int\int_{A\times B} f(x,y)\,dxdy = \int_A \left(\int_B f(x,y)\,dy\right)\,dx.$$

II. Naj bo $A \subseteq \mathbb{R}^n$ kvader in $B \subseteq \mathbb{R}^m$ kvader. Naj bo $f : A \times B \subseteq \mathbb{R}^{n+m} \to \mathbb{R}$ integrabilna. Naj bo za vsak $y \in B$ funkcija $x \mapsto f(x,y)$ integrabilna na A. Potem je funkcija

$$y \mapsto \int_A f(x,y)\,dy$$

integrabilna na B in velja:

$$\int\int_{A\times B} f(x,y)\,dxdy = \int_B \left(\int_A f(x,y)\,dx\right)\,dy.$$

Posledica 3.21. *Če je f zvezna na $A \times B$, potem*

$$\int\int_{A\times B} f(x,y)\,dxdy = \int_A \left(\int_B f(x,y)\,dy\right)\,dx = \int_B \left(\int_A f(x,y)\,dx\right)\,dy.$$

Posledica 3.22. *Naj bo $f : [a,b]\times[c,d] \to \mathbb{R}$ zvezna. Tedaj*

$$\int\int_{[a,b]\times[c,d]} f(x,y)\,dxdy = \int_a^b \left(\int_c^d f(x,y)\,dy\right)\,dx = \int_c^d \left(\int_a^b f(x,y)\,dx\right)\,dy.$$

Posledica 3.23. *Naj bo $f : K = [a,b]\times[c,d]\times[g,h] \to \mathbb{R}$ zvezna. Tedaj*

$$\int\int\int_K f(x,y)\,dxdy = \int_g^h \left(\int_c^d \left(\int_a^b f(x,y)\,dx\right)\,dy\right)\,dz = \textit{še 5 drugih vrstnih redov.}$$

Zgled 3.24. TODO:

3.4 Riemannov integral na omejenih množicah

Naj bo podmnožica $A \subseteq \mathbb{R}^n$ omejena, $f : A \to \mathbb{R}$ omejena funkcija.
Kako bi lahko definirali $\int_A f(x)\,dx$? Kaj bi bila prostornina $V(A)$ množice A?

Ker je A omejena obstaja kvader K, da je $A \subseteq K$. Definiramo funkcijo $\widetilde{f}(x) = \begin{cases} f(x); & x \in A \\ 0; & x \notin A \end{cases}$.

Definicija 3.25. Omejena funkcija f na A je *integrabilna* na omejeni množici A, če je $\widetilde{f}$ integrabilna na kvadru K, kjer je $A \subseteq K$. Tedaj

$$\int_A f(x)\,dx = \int_K \widetilde{f}(x)\,dx.$$

Opomba 3.26. Dobra definiranost. TODO:

Opomba 3.27. Kaj če je K že kvader? TODO:

Zgled 3.28. TODO:

Trditev 3.29. *Naj bo $A \subseteq \mathbb{R}^n$ omejena podmnožica. Naj bosta $f, g : A \to \mathbb{R}$ integrabilni na A in naj bosta $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$. Teda je*

$$\lambda f + \mu g$$

integrabilna na A in

$$\int_A (\lambda f + \mu g)(x)\, dx = \lambda \int_A f(x)\, dx + \mu \int_A g(x)\, dx.$$

Dokaz. TODO: □

Opomba 3.30. Množica integrabilnih na A funkcij tvori vektroski prostor nad R in integral je linearen funkcional na tem prostoru.

3.4.1 Prostornina omejene množice

Definiramo *karakteristično funkcijo* množice A:

$$\chi_A(x) = \begin{cases} 1; & x \in A \\ 0; & x \notin A \end{cases}.$$

Definicija 3.31. Omejena množica $A \subseteq \mathbb{R}^n$ *ima prostornino*, če je funkcija $x \mapsto 1$ integrabilna na A. Tedaj

$$V(A) = \int_A 1\, dx.$$

Opomba 3.32. To je Jordanova prostornina množice.

Opomba 3.33. $V(A) = \int_A 1\, dx = \int_K \chi_A(x)\, dx.$

Opomba 3.34. Če ima A prostornino, so vse konstantne funkcije integrabilne na A:

$$\int_A \lambda\, dx = \lambda V(A).$$

Zgled 3.35. Ali $A = [0,1]^2 \cap \mathbb{Q}$ ima prostornino?

Trditev 3.36. *Omejena množica $Q \subseteq \mathbb{R}^n$ ima prostornino natanko tedaj, ko $V(\partial A) = 0$.*

3.5 Lastnosti omejenih množic s prostornino 0

4 Dodatek

4.1 Banachovo skrčitveno načelo

Definicija 4.1. Naj bo (M, d) metrični prostor. Preslikava $f : M \to M$ je **skrčitev**, če

$$\exists q \in [0, 1) \,.\, \forall x, y \in M \,.\, d(f(x), f(y)) \le q d(x, y)$$

Izrek 4.2 (Banachovo skrčitveno načelo)**.** *Naj bo*

- *prostor (M, d) je poln metrični prostor;*
- *preslikava $f : M \to M$ je skrčitev.*

Tedaj ima preslikava f natanko eno negibno točko, tj.

$$\exists! a \in M \,.\, f(a) = a$$

ter za vsak $x \in M$ zaporedje

$$x, f(x), f(f(x)), \ldots$$

konvergira proti točki a.