Fraktalne dimenzije

Ruslan Urazbakhtin

Fakulteta za matematiko in fiziko, Univerza v Ljubljani

6. maj 2025

„Much of the beauty of fractals is to be found in their mathematics“
— Kenneth Falconer

Kazalo

Kaj so fraktali?

Kaj so fraktali?

- Besedo „fraktal“ je uvedel matematik Benoit Mandelbrot v svojem temeljnem eseju leta 1975. Izvira iz latinske besede „fractus“.
- Besedo „fraktal“ Mendelbrot je uporabljal za opis patoloških množic, ki niso bili usklajene z običajno evklidsko geometrijo.
- V svojem originalnem eseju Benoit Mendelbrot je definiral fraktal kot množico, ki ima Hausdorffovo dimenzijo strogo večjo od njene topološke dimenzije.

Kaj so fraktali?

Če rečemo, da je neka množica F fraktal, potem si mislimo, da

1. F ima fino strukturo, tj. podrobnosti se vidijo vedno enako (neodvisno od skale);
2. F je dovolj nenaravna, da je ne moremo opisat s pomocjo elementarne geometrije tako lokalno kot globalno;
3. F včasih ima samopodobno obliko;
4. Običajno je fraktalna dimenzija F večja od njene topološke dimenzije;
5. V večini primerov je F definirana na zelo preprost način, običajno rekurzivno.

Zakaj potrebujemo fraktalno dimenzijo?

- Metode iz evklidske geometrije/analize niso dovolj, da opišemo lastnosti fraktalov.
- Fraktalna geometrija nam ponuja osnovno konstrukcijo za obravnavo množic, ki izgledajo nekako nenaravno.
- Zelo na grobo povedano nam dimenzija množice pove, koliko prostora ta zavzema v ambientnem prostoru.
- Dimenzija meri kompleksnost množice na poljubno majhnih skalah ter opisuje nekatere njene geometrijske in topološke lastnosti.

Mera

- Če želimo govoriti o fraktalnih dimenzijah, moramo poznati osnovne ideje teorije mere.
- Bomo obravnavali le mere na $\mathbb{R}^n$.
- Mera je način opisati „velikost“ množice, ki je izmerjena na nek način.

Borelova σ-algebra

Definicija

Družina podmnožic Σ množice $\mathbb{R}^n$ je σ-algebra, če:

1. $\mathbb{R}^n \in \Sigma$;
2. Če je $A \in \Sigma$, potem $A^c \in \Sigma$;
3. Poljubna števna unija množic iz Σ je element Σ.

Borelova σ-algebra

Definicija

Družina podmnožic Σ množice $\mathbb{R}^n$ je σ-algebra, če:

1. $\mathbb{R}^n \in \Sigma$;
2. Če je $A \in \Sigma$, potem $A^c \in \Sigma$;
3. Poljubna števna unija množic iz Σ je element Σ.

Definicija

- Najmanjšo σ-algebro na $\mathbb{R}^n$, ki vsebuje vse odprte podmnožice $\mathbb{R}^n$, imenujemo **Borelova σ-algebra**.
- Podmnožica $A \subseteq \mathbb{R}^n$ je **Borelova**, če pripada Borelovi σ-algebri.

Borelova σ-algebra

Definicija

- Najmanjšo σ-algebro na $\mathbb{R}^n$, ki vsebuje vse odprte podmnožice $\mathbb{R}^n$, imenujemo **Borelova σ-algebra**.
- Podmnožica $A \subseteq \mathbb{R}^n$ je **Borelova**, če pripada Borelovi σ-algebri.

Opomba

- Vse odprte in vse zaprte množice so Borelovi.
- Poljubna števna unija (presek) odprtih (zaprtih) množic je Borelova množica.
- Vsi množici, ki smo jih bomo obravnavali, bodo Borelovi.

Mera na $\mathbb{R}^n$

Definicija

Preslikava $\mu : \mathcal{P}(\mathbb{R}^n) \to [0, \infty) \cup \{\infty\}$ je **mera** na $\mathbb{R}^n$, če

1. $\mu(\emptyset) = 0$;
2. Če je $A \subseteq B$, potem $\mu(A) \leq \mu(B)$;
3. Če je $\{A_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ števna družina podmnožic $\mathbb{R}^n$, potem
$$\mu\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) \leq \sum_{i=1}^{\infty} \mu(A_i)$$
4. Če je $\{A_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ števna družina paroma disjunktnih Borelovih podmnožic $\mathbb{R}^n$, potem
$$\mu\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) = \sum_{i=1}^{\infty} \mu(A_i)$$

Mera na $\mathbb{R}^n$

Definicija

Pravimo tudi, da je $\mu(A)$ **mera množice A**.

Opomba

- $\mu(A)$ lahko si predstavljamo kot „velikost" množice A, ki je izmerjena na nek način.
- 4. pogoj pravi, da če množico A razbijemo na števno mnogo paroma disjunktnih Borelovih množic, potem vsota mer delov je enaka mere celotne množice (ponavadi ga težko dokazati).

Primeri mer

- **Mera štetja.**

  Naj bo $A \subseteq \mathbb{R}^n$. Definiramo $\mu(A) = \begin{cases} n; & |A| = n \in \mathbb{N}, \\ \infty; & \text{sicer} \end{cases}$.

  Potem μ je mera na $\mathbb{R}^n$.

- **Točkasta masa.**

  Naj bo $a \in \mathbb{R}^n$, $A \subseteq \mathbb{R}^n$. Definiramo $\mu(A) = \begin{cases} 1; & a \in A, \\ 0; & \text{sicer} \end{cases}$.

  Potem μ je mera (porazdelitev mase) na $\mathbb{R}^n$.

Lebesgueva $\mathcal{L}^n$ mera

Lebesgueva $\mathcal{L}^n$ mera na $\mathbb{R}^n$ je posplošitev evklidskih pojmov „dolžina“, „ploščina“, „volumen“ itn. na večji razred množic.

Lebesgueva $\mathcal{L}^n$ mera

Naj bo $A = \{(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n \mid a_i \leq x_i \leq b_i\}$ kvader v $\mathbb{R}^n$, potem n-dim volumen množice A je

$$\mathrm{vol}^n(A) := (b_1 - a_1)(b_2 - a_2)\dots(b_n - a_n).$$

Definicija

Lebesgueva mera $\mathcal{L}^n : \mathcal{P}(\mathbb{R}^n) \to [0, \infty]$ je definirana s predpisom

$$\mathcal{L}^n(A) = \inf\left\{\sum_{i=1}^{\infty} \mathrm{vol}^n(A_i) \mid A \subseteq \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right\},$$

kjer so A_i kvadri.

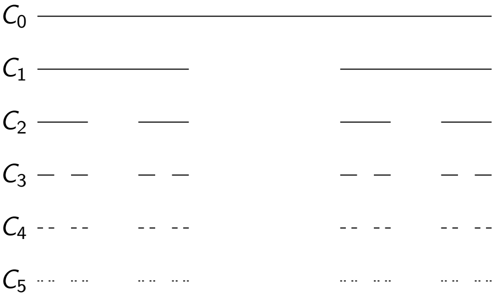
Lebesgueva $\mathcal{L}^n$ mera

Opomba

- Gledamo vsa pokritja množice A z kvadri in vzemimo najmanjši možen volumen.
- $\mathcal{L}^1$ je posplošitev pojma „dolžina“, $\mathcal{L}^2$ je posplošitev pojma „ploščina“ itn.

Cantorjeva množica C

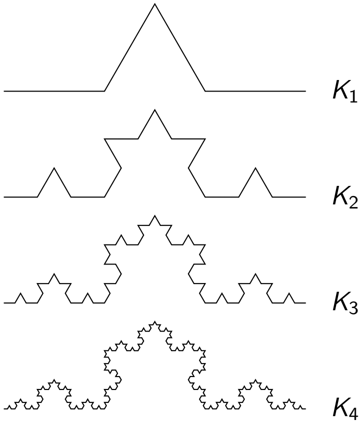
Izračunamo dolžino $\mathcal{L}^1(C)$ Cantorjeve množice $C = \bigcup_{n=1}^{\infty} C_n$.



Lema

Naj bosta $A, B \subseteq \mathbb{R}^n$ Borelovi, $A \subseteq B$. Naj bo μ mera na $\mathbb{R}^n$. Potem $\mu(B \setminus A) = \mu(B) - \mu(A)$.

Kochova krivulja K



Kaj je narobe z C in K?

Kaj je narobe z C in K?

- Očitno je, da je pri izbiri dimenzije nekaj narobe (torej z nami).
- Ni možnosti, da bi dobili kaj pametnega, če bi računali ploščino daljice ali šteli njene točke.

Ali obstaja boljša možnost za izbiro dimenzije?

Ali obstaja boljša možnost za izbiro dimenzije?

Obstaja.

Podobnostna dimenzija

- Kaj lahko povemo o masi daljice, če dvakrat zmanjšamo njeno dolžino?
- Kaj lahko povemo o masi kvadrata, če dvakrat zmanjšamo dolžino njegove stranice?

Podobnostna dimenzija

- Kaj lahko povemo o masi daljice, če dvakrat zmanjšamo njeno dolžino?
- Kaj lahko povemo o masi kvadrata, če dvakrat zmanjšamo dolžino njegove stranice?

Torej

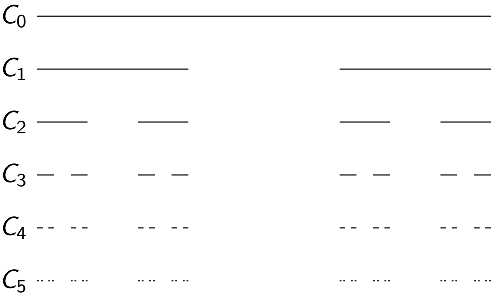
$$m(\lambda D) = \lambda^s m(D).$$

Podobnostna dimenzija

Torej

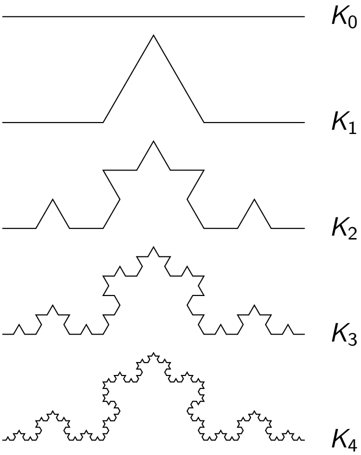
$$m(\lambda D) = \lambda^s m(D).$$

Kaj se zgodi z maso Cantorjeve množice, če trikrat zmanjšamo začetni interval?



Podobnostna dimenzija

Kaj se zgodi z maso Kochove krivulje, če trikrat zmanjšamo začetni interval?



Podobnostna dimenzija

Definicija

Naj bo množica $F \subseteq \mathbb{R}^n$ sestavljena iz m kopij same sebe, kjer je vsaka kopija zmanjšana za faktor r. Potem rečemo, da ima množica F **podobnastno dimenzijo** enako $\log_r m$.

Podobnostna dimenzija

Definicija

Naj bo množica $F \subseteq \mathbb{R}^n$ sestavljena iz m kopij same sebe, kjer je vsaka kopija zmanjšana za faktor r. Potem rečemo, da ima množica F **podobnastno dimenzijo** enako $\log_r m$.

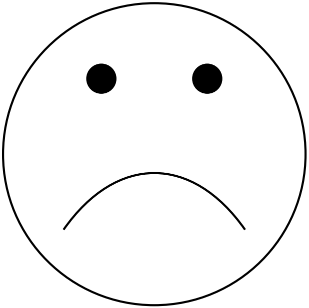
Spet imamo en problem...

Podobnostna dimenzija

Definicija

Naj bo množica $F \subseteq \mathbb{R}^n$ sestavljena iz m kopij same sebe, kjer je vsaka kopija zmanjšana za faktor r. Potem rečemo, da ima množica F **podobnastno dimenzijo** enako $\log_r m$.

Spet imamo en problem...
Samopodobnih množic je zelo malo. Recimo, že krožnica ni taka.

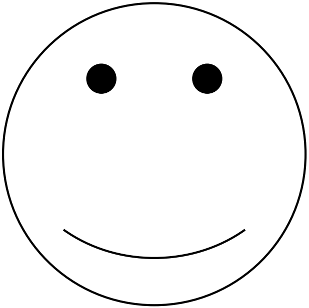


Podobnostna dimenzija

Definicija

Naj bo množica $F \subseteq \mathbb{R}^n$ sestavljena iz m kopij same sebe, kjer je vsaka kopija zmanjšana za faktor r. Potem rečemo, da ima množica F **podobnastno dimenzijo** enako $\log_r m$.

Spet imamo en problem...
Samopodobnih množic je zelo malo. Recimo, že krožnica ni taka.



Hausdorffova dimenzija

- Hausdorffova dimenzija izmed vseh „fraktalnih" dimenzij, ki jih ljudje uporabljajo, je najbolj stara in verjetno najbolj pomembna.
- Lahko jo definiramo za poljubno množico in matematično je zelo priročna, ker je osnovana na meri, s katero lahko relativno preprosto kaj naredimo.
- Glavna pomanjkljivost je, da jo v večini situacij težko izračunati ali oceniti z numerični metodi.

Hausdorffova mera

Definicija

Naj bo $F \subseteq \mathbb{R}^n$. Naj bo $\{U_i\}$ števna družina množic iz $\mathbb{R}^n$, za katero velja:

1. $\forall i \in \mathbb{N} \,.\, 0 \leq |U_i| \leq \delta$;
2. $F \subseteq \bigcup_{i=1}^{\infty} U_i$.

Potem $\{U_i\}$ imenujemo **δ-pokritje** množice F.

Hausdorffova mera

Naj bo $F \subseteq \mathbb{R}^n$ in $s \geq 0$. Za vsak $\delta > 0$ definiramo

$$\mathcal{H}^s_\delta(F) = \inf \left\{ \sum_{i=1}^{\infty} |U_i|^s \mid \{U_i\} \text{ je } \delta\text{-pokritje } F \right\}$$

Hausdorffova mera

Naj bo $F \subseteq \mathbb{R}^n$ in $s \geq 0$. Za vsak $\delta > 0$ definiramo

$$\mathcal{H}^s_\delta(F) = \inf \left\{ \sum_{i=1}^{\infty} |U_i|^s \mid \{U_i\} \text{ je } \delta\text{-pokritje } F \right\}$$

Ko $\delta \to 0$, razred možnih pokritij F se zmanjšuje, torej inf narašča, torej lahko definiramo:

$$\mathcal{H}^s(F) = \lim_{\delta \to 0} \mathcal{H}^s_\delta(F)$$

Ta limita vedno obstaja za vsako množico $F \subseteq \mathbb{R}^n$.

Hausdorffova mera

Naj bo $F \subseteq \mathbb{R}^n$ in $s \geq 0$. Za vsak $\delta > 0$ definiramo

$$\mathcal{H}^s_\delta(F) = \inf \left\{ \sum_{i=1}^{\infty} |U_i|^s \mid \{U_i\} \text{ je } \delta\text{-pokritje } F \right\}$$

Ko $\delta \to 0$, razred možnih pokritij F se zmanjšuje, torej inf narašča, torej lahko definiramo:

$$\mathcal{H}^s(F) = \lim_{\delta \to 0} \mathcal{H}^s_\delta(F)$$

Ta limita vedno obstaja za vsako množico $F \subseteq \mathbb{R}^n$.
Število $\mathcal{H}^s(F)$ imenujemo ***s*-dim Hausdorffova mera** množice F.

Trditev

$\mathcal{H}^s$ je mera na $\mathbb{R}^n$.

Hausdorffova mera

Opomba

Hausdorffova mera je posplošitev Lebesgueve mere na necele dimenzije. Se da pokazati, da

$$\mathcal{H}^n(F) = \frac{1}{c_n}\mathcal{L}^n(F),$$

kjer je c_n volumen n-dim krogle z polmerom $\frac{1}{2}$, tj.

$$c_n = \frac{\pi^{(n/2)}}{2^n\,\Gamma(n/2+1)}$$

Lastnosti skaliranja

Definicija

Podobnostna preslikava z koeficientom podobnosti $c > 0$ je preslikava $P : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, za katero velja:

$$\forall x, y \in \mathbb{R}^n \, . \, |P(x) - P(y)| = c|x - y|$$

Lastnosti skaliranja

Naj bo $P : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ podobnostna preslikava z podobnostnim koeficientom $c > 0$. Naj bo $F \subseteq \mathbb{R}^n$.
Dobro poznamo lastnosti skaliranja dolžine, ploščine, volumna, npr.

- $\mathcal{L}^1(P_*(F)) = c\mathcal{L}^1(F)$
- $\mathcal{L}^2(P_*(F)) = c^2\mathcal{L}^2(F)$
- $\mathcal{L}^3(P_*(F)) = c^3\mathcal{L}^3(F)$

Ali velja enako tudi za $\mathcal{H}^s$?

Lastnosti skaliranja

Naj bo $P : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ podobnostna preslikava z podobnostnim koeficientom $c > 0$. Naj bo $F \subseteq \mathbb{R}^n$.

Trditev

$$\mathcal{H}^s(P_*(F)) = c^s \mathcal{H}^s(F)$$

Lastnosti skaliranja

Definicija

Podobnostna preslikava z koeficientom podobnosti $c > 0$ je preslikava $P : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, za katero velja:

$$\forall x, y \in \mathbb{R}^n \, . \, |P(x) - P(y)| = c|x - y|$$

Lastnosti skaliranja

Naj bo $P : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ podobnostna preslikava z podobnostnim koeficientom $c > 0$. Naj bo $F \subseteq \mathbb{R}^n$.
Dobro poznamo lastnosti skaliranja dolžine, ploščine, volumna, npr.

- $\mathcal{L}^1(P_*(F)) = c\mathcal{L}^1(F)$
- $\mathcal{L}^2(P_*(F)) = c^2\mathcal{L}^2(F)$
- $\mathcal{L}^3(P_*(F)) = c^3\mathcal{L}^3(F)$

Ali velja enako tudi za $\mathcal{H}^s$?

Lastnosti skaliranja

Naj bo $P : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ podobnostna preslikava z podobnostnim koeficientom $c > 0$. Naj bo $F \subseteq \mathbb{R}^n$.

Trditev

$$\mathcal{H}^s(P_*(F)) = c^s \mathcal{H}^s(F)$$

Lastnosti skaliranja

Definicija

Naj bosta $X \subseteq \mathbb{R}^n$ in $Y \subseteq \mathbb{R}^m$. Preslikava $f : X \to Y$ je **Höldorjeva** stopnje $\alpha > 0$, če

$$\exists c > 0 \,.\, \forall x, y \in X \,.\, |f(x) - f(y)| \leq c|x - y|^\alpha$$

Lastnosti skaliranja

Definicija

Naj bosta $X \subseteq \mathbb{R}^n$ in $Y \subseteq \mathbb{R}^m$. Preslikava $f : X \to Y$ je **Höldorjeva** stopnje $\alpha > 0$, če

$$\exists c > 0 \,.\, \forall x, y \in X \,.\, |f(x) - f(y)| \leq c|x - y|^\alpha$$

Trditev

Naj bo $F \subseteq \mathbb{R}^n$ in $f : F \to \mathbb{R}^n$ Höldorjeva preslikava stopnje $\alpha > 0$. Potem za vsak $s \geq 0$ velja:

$$\mathcal{H}^{s/\alpha}(f_*(F)) \leq c^{s/\alpha}\mathcal{H}^s(F)$$

Lastnosti skaliranja

Trditev

Naj bo $F \subseteq \mathbb{R}^n$ in $f : F \to \mathbb{R}^n$ Höldorjeva preslikava stopnje $\alpha > 0$. Potem za vsak $s \geq 0$ velja:

$$\mathcal{H}^{s/\alpha}(f_*(F)) \leq c^{s/\alpha}\mathcal{H}^s(F)$$

Posledica

Če je $f : F \to \mathbb{R}^n$ Lipschitzova, tj.

$$\exists c > 0 \,.\, \forall x, y \in X \,.\, |f(x) - f(y)| \leq c|x - y|,$$

potem

$$\mathcal{H}^s(f_*(F)) \leq c^s\mathcal{H}^s(F)$$

Hausdorffova dimenzija

Naj bo $F \subseteq \mathbb{R}^n$. Gledamo funkcijo

$$\begin{aligned} \mathcal{H}_F : [0,\infty) &\longrightarrow [0,\infty] \\ s &\longmapsto \mathcal{H}^s(F) \end{aligned}$$

Lema

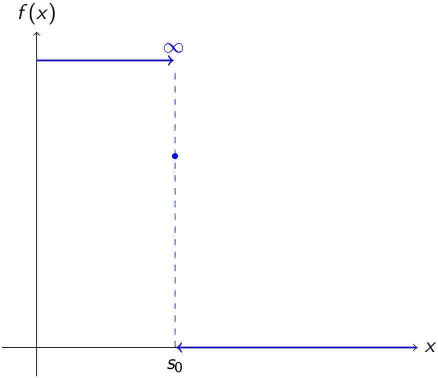
Naj bo $F \subseteq \mathbb{R}^n$. Če je $\mathcal{H}^s(F) < \infty$, potem $\mathcal{H}^t(F) = 0$ za vse $t > s$.

Hausdorffova dimenzija

Lema

Naj bo $F \subseteq \mathbb{R}^n$. Če je $\mathcal{H}^s(F) < \infty$, potem $\mathcal{H}^t(F) = 0$ za vse $t > s$.

Oglejmo si graf funkcije $\mathcal{H}_F$:



Hausdorffova dimenzija

Definicija

Hausdorffova dimenzija množice $F \subseteq \mathbb{R}^n$ je

$$\dim_H F = \inf\{s \geq 0 \mid \mathcal{H}^s(F) = 0\} = \sup\{s \geq 0 \mid \mathcal{H}^s(F) = \infty\}$$

Hausdorffova dimenzija

Definicija

Hausdorffova dimenzija množice $F \subseteq \mathbb{R}^n$ je

$$\dim_H F = \inf\{s \geq 0 \mid \mathcal{H}^s(F) = 0\} = \sup\{s \geq 0 \mid \mathcal{H}^s(F) = \infty\}$$

Opomba

- Po dogovoru $\sup(\emptyset) = 0$.
- Ta dimenzija je definirana za poljubno podmnožico $\mathbb{R}^n$.

Hausdorffova dimenzija

Definicija

Hausdorffova dimenzija množice $F \subseteq \mathbb{R}^n$ je

$$\dim_H F = \inf\{s \geq 0 \mid \mathcal{H}^s(F) = 0\} = \sup\{s \geq 0 \mid \mathcal{H}^s(F) = \infty\}$$

Imamo:

$$\mathcal{H}^s(F) = \begin{cases} \infty; & 0 \leq s < \dim_H F \\ 0; & s > \dim_H F; \end{cases}$$

Če je $s = \dim_H F$, potem $\mathcal{H}^s(F)$ lahko 0, ∞ ali $a \in \mathbb{R}$.

Hausdorffova dimenzija krogle B^n

Lema

$$\dim_H B^n = n$$

Hvala za pozornost!