

## 1 Hilbertovi prostori

### 1. Vektorski prostor s skalarnim produktom

Naj bo  $X$  vektorski prostor nad  $\mathbb{R}$  (ali nad  $\mathbb{C}$ ).

- **Definicija.** Skalarni produkt.
- **Trditev.** Cauchy-Schwartzova neenakost.
- **Definicija.** Norma na vektorskem prostoru  $X$ .
- **Trditev.** Norma, ki je dobljena iz skalarnega produkta.
- **Trditev.** Metrični prostor, porojeni z normo.

### 2. Hilbertovi prostori

- **Definicija.** Hilbertov prostor. Banachov prostor.
- **Zgled.** Standardni skalarni produkti na  $\mathbb{R}^n$  in  $\mathbb{C}^n$ . Norme, ki ne pridejo iz skalarnega produkta.

### 3. Prostor $L^2([a, b])$

- **Trditev.** Standardni skalarni produkt na prostoru  $C([a, b])$ .
- **Trditev.** Ali je prostor  $C([a, b])$  s standardnim skalarnim produktom Hilbertov?
- **Zgled.** Kako lahko napolnimo prostor  $((0, 1), d_2)$ ?
- **Definicija.** Kadar pravimo, da lahko napolnimo metrični prostor  $(M, d)$ ? Napolnitev prostora.
- **Opomba.** Kaj je ponavadi prostor  $\overline{M}$ ?
- **Opomba.** Prostor  $L^1(A)$ .
- **Definicija.** Prostor  $L^2([a, b])$ .
- **Opomba.** Ali je produkt dveh  $L^2([a, b])$  funkcij  $L^1([a, b])$  funkcija? Skalarni produkt na  $L^2([a, b])$
- **Trditev.** Ali je  $L^2([a, b])$  vektorski prostor nad  $\mathbb{R}$ ?
- **Opomba.** Ali je  $C([a, b]) \subseteq L^2([a, b])$ ? Ali je  $C([a, b])$  gost v  $L^2([a, b])$ ? Kaj pomeni, da zaporedje  $(f_n)_n \in L^2([a, b])$  konvergira k  $f \in L^2([a, b])$ ?
- **Izrek.** Ali je  $L^2([a, b])$  Hilbertov prostor? Kako sta povezana prostora  $L^2([a, b])$  in  $C([a, b])$ ? [brez dokaza]
- **Opomba.** Kako zgleda skalarni produkt nad  $\mathbb{C}$ ?
- **Zgled.** Navedi primer funkcije ko limita po točkah ni enaka limite v  $L^2$  smislu. Navedi primer funkcije za katero ne obstaja limita po točkah, limita v  $L^2$  smislu pa obstaja.

### 4. Ortogonalnost

Naj bo  $X$  vektorski prostor s skalarnim produktom,  $A \subseteq X$ ,  $A \neq \emptyset$ .

- **Definicija.** Kadar sta dva vektorja pravokotna? Ortogonalni komplement množice  $A$ .
- **Trditev.** Ali je  $A^\perp$  vektorski podprostor v  $X$ ?
- **Opomba.** V kakšni relaciji sta  $A$  in  $(A^\perp)^\perp$ ?
- **Trditev.** Naj bo  $v \in X$ . Ali je  $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = \langle x, v \rangle$  zvezna?
- **Posledica.** Ali je  $A^\perp$  zaprt podprostor v  $X$ ?
- **Opomba.** Ali je  $C([a, b])$  zaprt podprostor v  $L^2([a, b])$ ?
- **Opomba.** V kakšni relaciji sta  $A$  in  $(A^\perp)^\perp$ , če je  $X$  Hilbertov in  $A$  zaprt podprostor?
- **Trditev.** Pitagorjev izrek.

Naj bo  $X$  vektorski prostor s skalarnim produktom,  $Y \leq X$  podprostor v  $X$ .

- **Definicija.** Pravokotna projekcija vektorja  $x \in X$  na podprostor  $Y$ .
- **Trditev.** Kaj lahko povemo o pravokotne projekcije vektorja  $x \in X$  na  $Y$ , če obstaja? **TODO: \***
- **Zgled.** Ali imajo funkcije iz  $L^2([a, b]) \setminus C([a, b])$  najboljšo aproksimacijo z zveznimi funkciji?
- **Opomba.** Lastnosti  $P_Y$ :
  - Ali je  $P_Y$  idempotent?
  - Kakšna zveza med  $\|x\|$  in  $\|P_Y(x)\|$ ?
  - Ali je  $P_Y : X \rightarrow Y$  linearna in zvezna?
  - Ali je  $Y$  zaprt podprostor, če je  $P_Y$  definirana na  $X$ ?
  - Recimo, da  $P_Y(x)$  obstaja. Ali obstaja tudi  $P_{Y^\perp}(x)$ ?
- **Trditev.** Razvoj  $P_Y(x)$  po ONB.

## 5. Ortogonalni sistem

Naj bo  $X$  vektorski prostor s skalarnim produktom.

- **Definicija.** Ortogonalni sistem (OS). Ortonormiran sistem (ONS).
- **Trditev.** Besselova neenakost. **TODO: \***
- **Posledica.** Čemu je enaka limita  $\lim_{j \rightarrow \infty} \langle x, e_j \rangle$ ?
- **Opomba.** Zakaj potrebujemo absolutno vrednost? Kaj so  $(\langle x, e_j \rangle)_{j=1}^\infty$ ?
- **Trditev.** Naj bo  $(e_j)_{j=1}^\infty$  ONS,  $(c_j)_j$  tako zaporedje števil, da  $\sum_{j=1}^\infty |c_j|^2 < \infty$ . Kaj potem?
- **Definicija.** Kompletan ortonormiran sistem (KONS).
- **Trditev.** 6 ekvivalentnih trditev o KONS. **TODO: \***
- **Zgled.** Modelni Hilbertov prostor.

## 6. Prostor $L^2([-\pi, \pi])$

- ONS na prostoru  $L^2([-\pi, \pi])$ .
- **Opomba.** Kako lahko obravnavamo vsako funkcijo  $f : [-\pi, \pi] \rightarrow \mathbb{R}$  v tem kontekstu?
- Klasične Fourierjevi koeficienti. Fourierjeva vrsta. **TODO: \***
- **Trditev.** Riemann-Lebesgueva lema.
- **Trditev.** Parsevalova enakost.
- **Zgled.** Definiramo funkcijo  $f : [-\pi, \pi] \rightarrow \mathbb{R}$  s predpisom

$$f(x) = \begin{cases} 1; & 0 \leq x \leq \pi \\ 0; & -\pi < x < 0. \end{cases}$$

Razvij  $f$  v Fourierjevo vrsto ter izračunaj  $\sum_{n=1}^\infty \frac{1}{n^2}$ .

- **Lema.** Naj bo  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  odsekoma zvezna periodična funkcija s periodo  $2\pi$ . Čemu je enak integral  $\int_a^{a+p} f(x) dx$ ?
- **Lema.** Dirichletovo jedro.
- **Lema.** 3 lastnosti Dirichletovega jedra.
- **Izrek.** Fourierjeva vrsta funkcije. **TODO: \***
- **Zgled.** S pomočjo vrste iz prejšnjega zgleda izračunaj  $\sum_{k=0}^\infty (-1)^k \frac{1}{2k+1}$ .
- **Definicija.** Cesarjeve delne vsote. Fourierjevo jedro.
- **Trditev.** 5 lastnosti Fourierjeva jedra.
- **Izrek.** Naj bo  $f$   $2\pi$  periodična zvezna funkcija. Kaj lahko povemo o Cesarjevih delnih vsotih?

- **Izrek.** Ali je prej definiran ONS na  $L^2$  KONS?
- **Opomba.** Trigonometrični polinomi.
- **Izrek.** Weierstrassov isrek.

## 2 Vektorska analiza

### 1. Skalarno in vektorsko polje

- **Definicija.** Skalarno polje. Vektorsko polje.
- **Definicija.** Pozitivno/negativno orientirana ONB.
- **Opomba.** Prehod med bazi.

### 2. Smerni odvod skalarnega polja

Naj bo  $u : D \subseteq \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$  skalarno polje.

- **Definicija.** Smerni odvod skalarnega polja  $u$ .
- **Opomba.** Kaj meri smerni odvod? Kaj so smerni odvodi v smeri baznih vektorjev?
- **Opomba.** Kako izračunamo smerni odvod skalarnega polja  $u$  v točki  $p_0$ , če je  $u$  diferenciable v  $p_0$ ? Kaj to pomeni v kartezičnih koordinatah?
- **Definicija.** Gradient skalarnega polja.
- **Opomba.** Ali je gradient odvisen od izbire baze? Kaj smo priredili skalarneemu polju?
- **Trditev.** V kakšni smeri se najhitreje narašča skalarno polje? V kakšni smeri pa najhitreje pada?
- **Definicija.** Operator nabra.
- **Opomba.** Kako se z operatorjem nabra izraža gradient skalarnega polja?
- **Definicija.** Divergenca vektorskega polja.
- **Opomba.** Ali je divergenca odvisna od izbire baze?
- **Definicija.** Rotor vektorskega polja.
- **Opomba.** Odvisnost rotorja od izbire baze.
- **Trditev.** Rotor gradienta. Divergenca rotorja.
- **Opomba.** Ali je divergenca gradienta enaka nič?
- **Definicija.** Laplaceov operator. Harmonična funkcija.
- **Definicija.** Potencialno polje. Potencial. Irotacionalno (nevrtilčno) polje. Solenoidalno polje.
- **Opomba.** Zadosten pogoj, da je polje irotacionalno, Zadosten pogoj, da je polje solenoidalno. Kaj pa obrat?
- **Zgled.** Izračunaj rotor polja  $\vec{f}(x, y, z) = \left(-\frac{y}{x^2+y^2}, \frac{x}{x^2+y^2}, 0\right)$ . Ali je polje potencialno?
- **Definicija.** Zvezdasto območje.
- **Izrek.** Kdaj je nevrtilčno polje potencialno? Kdaj je polje rotor nekega drugega polja?
- **Zgled.** Ali je polje  $\vec{f}(x, y, z) = (y^2z^3 + 2, 2xyz^3 + 1, 3xe^2z^2)$  potencialno? Čemu je enak rot  $\vec{f}$ ? Ali je polje  $\vec{g}(x, y, z) = (2y - 1, -1, 4x - 2xy)$  solenoidalno?
- **Opomba.** V kakšni obliki lahko lokalno zapišemo vsako vektorsko polje?

### 2.1 Krivuljni in ploskovni integral

#### 1. Dolžina krivulje

- Regularna parametrizacija krivulje.
- **Definicija.** Dolžina krivulje.
- **Trditev.** Ali je definicija neodvisna od izbire regularne parametrizacije?
- **Zgled.** Naravni parameter.

- **Zgled.** Vijačnico lahko parametriziramo s predpisom  $t \mapsto (a \cos t, a \sin t, bt)$ . Določi naravno parametrizacijo vijačnice.
2. Krivuljni integral skalarne polja
    - **Definicija.** Orientacija krivulje. Usklajen izbor orientacije. Orientirana krivulja.
    - **Opomba.** Ali je vsaka krivulja orientabilna? Kaj če je krivulja odsekoma gladka? Krivulja z robom.
    - **Definicija.** Integral skalarne polja vzdolž krivulje.
    - **Opomba.** Kaj je dolžina krivulje? Ali je vrednost odvisna od izbire regularne parametrizacije? Kaj je skalarne polje v fizikalnem smislu? Kaj če je krivulja odsekoma gladka?
    - **Zgled.** Naj bo  $\Gamma = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 = a^2, y \geq 0\}$  homogena polkrožnica. Določi lego težišča  $\Gamma$ .
  3. Krivuljni integral vektorskega polja
    - **Definicija.** Integral vektorskega polja vzdolž krivulje.
    - **Opomba.** Fizikalni pomen. Ali je definicija odvisna od izbire regularne parametrizacije?
    - **Zgled.** Naj bo  $\vec{f}(x, y, z) = (xy, z, x - z)$  ter  $\Gamma : \vec{r}(t) = (t, t, \frac{1}{2}t^2), t \in [0, 1]$ . Izračunaj integral  $\vec{f}$  po  $\Gamma$ .
    - **Zgled.** **TODO: Delo sile teže.**
    - **Opomba.** Zapis integrala vektorskega polja v diferencialni formi. Integral po sklenjeni krivulji.
    - **Trditev.** Kaj če integriramo potencialno polje?
    - **Posledica.** Kaj če integriramo potencialno polje po sklenjeni krivulji?
    - **Zgled.** Izračunaj integral polja  $\vec{f}(x, y, z) = \left(-\frac{y}{x^2+y^2}, \frac{x}{x^2+y^2}, 0\right)$  po krožnici.
    - **Izrek.** Karakterizacija potencialnih vektorskih polj.
  4. Površina ploskve
    - Intuitivna izpeljava formule za površine ploskve.
    - **Definicija.** Površina ploskve.
    - **Trditev.** Ali je definicija odvisna od izbire regularne parametrizacije?
  5. Orientacija ploskev
 

Naj bo  $\Sigma \subseteq \mathbb{R}^3$  gladka ploskev.

    - **Definicija.** Orientacija  $\Sigma$ . Orientabilna ploskev.
    - **Opomba.** Koliko orientacij lahko ima orientabilna povezana ploskev?
    - **Zgled.** Določi ali je ploskev  $\Sigma$  orientabilna, če
      - $\Sigma$  je graf funkcije;
      - $\Sigma$  je sfera;
      - $\Sigma$  je plašč valja;
      - $\Sigma$  je torus; je sklenjena ploskev;
      - $\Sigma$  je Mobiusov trak.
    - **Definicija.** Gladka ploskev z robom. Rob ploskve. Skladna orientacija roba.
    - **Opomba.** Orientacija, ki je usklajena z parametrizacijo.
    - **Definicija.** Odsekoma gladka ploskev. Orientacija odsekoma gladke ploskve.
  6. Ploskovni integral skalarne polja
    - **Definicija.** Ploskovni integral skalarne polja.
    - **Opomba.** Kaj je površina ploskve?

- **Trditev.** Ali je integral odvisen od izbire regularne parametrizacije?
  - **Opomba.** Ali je orientacija ploskve pomembna? Ali je ta integral obstaja na Mobiusovem traku?
  - **Opomba.** Kaj je masa ploskve? Homogena ploskev.
  - **Zgled.** Izračunaj vztrajnostni moment homogene sfere z polmerom  $R$  okoli  $z$ -osi.
7. Ploskovni integral vektorskega polja
- **Definicija.** Ploskovni integral vektorskega polja. Pretok vektorskega polja skozi ploskev.
  - **Trditev.** Ali je integral odvisen od izbire regularne parametrizacije?
  - **Opomba.** Kaj pravi formula, če izberimo orientacijo, ki je usklajena z regularno parametrizacijo? Kaj če imamo odsekoma gladko ploskev?
  - **Zgled.** **TODO: sfera.**
  - **Opomba.** Diferencialna 1-forma.
8. Integralski izreki
- **Izrek.** Gauss-Ostrogradski.  
*Dokaz.* **TODO:** □
  - **Izrek.** Stokesov izrek.  
*Dokaz.* **TODO:** □
  - **Izrek.** Greenova formula.  
*Dokaz.* **TODO:** □
  - **Zgled.** **TODO: Račun integralov.**
  - **Definicija.** Divergenca, ki je neodvisna od izbire koordinatnega sistema.
  - **Definicija.** Rotor, ki je neodvisen od izbire koordinatnega sistema.
  - **Izrek.** Greenovi identiteti.
  - **Opomba.** O diferencialnih formah.

### 3 Kompleksna analiza

#### 1. Kompleksna števila

- Komutativni obseg  $\mathbb{C}$ . Vložitev  $\mathbb{R}$  v  $\mathbb{C}$ .
- Imaginarna enota  $i$ . Kvadrat imaginarne enote  $i^2$ .
- Algebrastičen zapis kompleksnega števila. Realni in kompleksni del. Gaussova ravnina.
- Konjugiranje. Absolutna vrednost. Kaj velja za absolutno vrednost?
- Polarni zapis kompleksnega števila.
- Metrika (topologija) na  $\mathbb{C}$ . Odprt krog v  $\mathbb{C}$ .
- Zaporedja v  $\mathbb{C}$ .
- Karakterizacija povezanih množic v  $\mathbb{C}$ . Komponente za povezanost.
- **Definicija.** Območje.
- Zveznost preslikave  $f : D \subseteq \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ . Limita.
- Kako kompleksna funkcija definira realni? Kdaj je kompleksna funkcija  $f$  zvezna?
- Riemannova sfera (kompaktifikacija z eno točko).

#### 2. Holomorfne funkcije

Naj bo  $D \subseteq \mathbb{C}$  območje ter  $f : D \rightarrow \mathbb{C}$  kompleksna funkcija.

- **Definicija.** Kompleksni odvod funkcije  $f$  v točki  $a \in D$ . Holomorfna funkcija. Množica vseh holomorfnih funkcij.
- **Opomba.** Ali je kompleksni odvod močnejši od običajnega?
- **Posledica.** Ali je kompleksno odvedljiva funkcija v točki  $a \in D$  diferenciable? Ali je zvezna?
- **Opomba.** Ali je  $f(z) = \bar{z}$  kompleksno linearna? Ali je linearna? Ali je kompleksno odvedljiva?
- **Trditev.** Kakšno strukturo ima  $O(D)$ ? Pravila za odvajanje.
- **Trditev.** Kompleksni odvod kompozicije.

#### 3. Cauchy-Riemannove enačbe

Naj bo  $D \subseteq \mathbb{C}$  območje ter  $f : D \rightarrow \mathbb{C}$  kompleksna funkcija.

- **Izrek.** Cauchy-Riemannove enačbe.
- **Opomba.** Kako izračunamo kompleksni odvod?
- **Zgled.** **TODO: Račun odvodov.**
- **Opomba.** Simboli  $\frac{\partial f}{\partial \bar{z}}$  ter  $\frac{\partial f}{\partial z}$
- **Trditev.** Karakterizacija holomorfности  $f$ . Cauchy-Riemannova enačba.
- **Zgled.** **TODO: Račun odvodov.**
- **Opomba.** Kdaj je intuitivno  $f$  holomorfna?
- **Trditev.** Kdaj je  $f$  holomorfna na  $D \subseteq \mathbb{C}$  (diferencial)?
- **Izrek.** Zadosten pogoj, da je  $f$  konstanta.
- **Izrek.** kaj če je  $f$  holomorfna na območju  $D$  ter  $f_*(D) \subseteq \mathbb{R}$ ?
- **Izrek.** Pišimo  $f = u + iv$ . Recimo, da je  $f \in O(D)$  ter  $f \in C^2(D)$ . Kaj lahko povemo o  $u$  in  $v$ ?
- **Definicija.** Harmonična konjugiranka.
- **Opomba.** Kaj če imamo eno harmonično konjugiranko? V čim se razlikujeta dve harmonični konjugiranki?
- **Zgled.** Pokaži, da je  $u(x, y) = xy$  harmonična in določi njeno harmonično konjugiranko. Pokaži, da je  $\log |z|$  harmonična na  $\mathbb{C} \setminus \{0\}$  in na  $\mathbb{C} \setminus \{0\}$  nima

harmonične konjugiranke.

- **Izrek.** Zadosten pogoj za obstoj harmonične konjugiranke.

#### 4. Potenčne vrste v kompleksnem

- **Definicija.** Kdaj kompleksna številska vrsta konvergira? Kdaj vrsta konvergira absolutno?
- **Opomba.** Kakšno strukturo ima množica konvergentnih številskih vrst? Ali pri absolutni konvergenci lahko seštevamo v poljubnem vrstnem redu?
- **Definicija.** Kdaj funkcijska vrsta konvergira po točkah? Kdaj konvergira enakomerno? Kdaj konvergira enakomerno na kompaktnih?
- **Zgled.** Gledamo  $f_n(z) = z^n$  kot zaporedje oziroma

$$g_1(z) = 1, \quad g_n(z) = z^n - z^{n-1}, \quad n \geq 2$$

kot vrsto. Ali vrsta  $\sum_{n=1}^{\infty} g_n(z)$  konvergira enakomerno na  $\Delta$ ? Ali konvergira po kompaktnih v  $\Delta$ ?

- **Izrek.** Weierstrassov kriterij.
- **Definicija.** Potenčna vrsta.
- **Izrek.** Konvergenčni polmer. Obstoj in formula.
- **Definicija.** Kdaj pravimo, da kompleksno funkcijo se da razviti v potenčno vrsto?
- **Izrek.** Kaj lahko povemo o funkciji, če jo se da razviti v kompleksno vrsto?
- **Posledica.** Ali je vsota konvergentne potenčne vrste holomorfná funkcija? Kaj je njen odvod?
- **Posledica.** Lokalna oblika prejšnje posledice.
- **Zgled.** Razvoj v potenčno vrsto. Koefficienti.

#### 5. Elementarne funkcije v kompleksnem

- Eksponentna funkcija.
- **Trditev.** Čemu je enako  $e^{z+w}$ ?
- Funkciji sinus in kosinus. Povezava z eksponento.
- Eulerjeva formula.
- Hiperbolični sinus in kosinus. Povezava z navadnimi.
- Ali ima eksponenta ničla na  $\mathbb{C}$ ?
- Koliko rešitev ima enačba  $e^z = 1$ ? Ali je  $e^z$  periodična?
- Ničle funkcije sinus. Sinus vsote.
- Logaritemska funkcija.
- Korenska funkcija.