

1 Kombinatorika

1. Osnovna načela kombinatorike

- **Trditev.** Načelo produkta.
- **Trditev.** Posplošeno načelo produkta.
- **Trditev.** Načelo vsote.
- **Trditev.** Posplošeno načelo vsote.
- **Trditev.** Načelo enakosti.
- **Primer.** Določi moč množice $\mathcal{P}(A)$, kjer $|A| = n$.
- **Trditev.** Načelo dvojnega preštevanja.
- **Primer.** Eulerjeva funkcija ϕ . Določi $\sum_{d|n} \phi(d)$.
- **Trditev.** Dirichletovo načelo.
- **Opomba.** Kombinatorična interpretacija Dirichletovega načela.
- **Primer.** Naj bo $X \subset [100]$, $|X| = 10$. Pokaži, da X vsebuje dve disjunktni podmnožici z isto vsoto.

Izpitna vprašanja:

- Katera so osnovna načela kombinatoričnega preštevanja? Kako Dirichletovo načelo izrazimo v jeziku funkcij? Kako z enim izmed osnovnih načel dokažemo formulo $\sum_{d|n} \phi(d) = n$?

2. Število preslikav

- **Definicija.** Množica vseh preslikav iz A v B .
- **Definicija.** Padajoča potenca. Naraščajoča potenca. n -fakulteta.
- **Trditev.** Koliko je preslikav iz n -množici v k -množico? Koliko je injektivnih? Koliko je bijektivnih?

3. Binomski koeficienti in binomski izrek

- **Definicija.** Binomski koeficienti.
- **Trditev.** Binomska števila.
- **Opomba.** Čemu je enako $\binom{0}{0}$ in $\binom{n}{k}$ za $0 \leq k \leq n$?
- **Definicija.** Množica vseh k -podmnožic množice N .
- **Trditev.** Moč $\binom{N}{k}$.
- **Trditev.** Rekurzivna formula za binomska števila.
- **Definicija.** Paskalov trikotnik.
- **Izrek.** Binomski izrek.
- **Opomba.** Kaj sta a in b v binomskem izreku?

Izpitna vprašanja:

- Koliko je vseh preslikav med končnima množicama, koliko je vseh injektivnih preslikav, bijektivnih preslikav in surjektivnih preslikav? Zapišite binomski izrek.

4. Izbori

Naj bo N n -množica. Opazujemo izbore k elementov.

- Koliko je urejenih izborov z ponavljanjem in brez?
- Koliko je neurejenih izborov brez ponavljanja?
- **Trditev.** Koliko je neurejenih izborov s ponavljanjem?

Izpitna vprašanja:

- Koliko je urejenih in neurejenih izborov z in brez ponavljanja? Utemeljite formulo za neurejene izbore s ponavljanjem.

5. Multimnožice

- **Definicija.** Permutacija množice A . Inverzija. Soda permutacija. Liha permutacija.
- **Trditev.** Določi $|S_n|$.
- **Definicija.** Multimnožica. Kratnost elementa. Moč multimnožice.
- **Opomba.** Kako formalno podamo multimnožico?
- **Opomba.** Kakšna zvezna med multimnožico in neurejenim izborom z ponavljanjem?
- **Definicija.** Permutacija multimnožice.
- **Trditev.** Število permutacij multimnožice.
- **Definicija.** Multinomski koeficient.
- **Trditev.** Multinomski izrek.

Izpitna vprašanja:

- Kaj je permutacija multimnožice? Definirajte multinomske koeficiente in zapišite multinomski izrek.

6. Kompozicije naravnega števila

- **Definicija.** Kompozicija naravnega števila. Dolžina kompozicije. Velikost kompozicije. Členi kompoziciji.
- **Trditev.** Število kompozicij števila $n \in \mathbb{N}$. Število kompozicij števila $n \in \mathbb{N}$ dolžine k .
- **Definicija.** Šibka kompozicija naravnega števila.
- **Trditev.** Število šibkih kompozicij števila $n \in \mathbb{N}$ dolžine k .

Izpitna vprašanja:

- Kaj je kompozicija naravnega števila? Koliko je vseh kompozicij števila n in koliko jih ima k členov? Kaj je šibka kompozicija naravnega števila in koliko je takih kompozicij števila n s k členi?

7. Razčlenitve naravnega števila

- **Definicija.** Razčlenitev naravnega števila. Dolžina razčlenitve. Velikost razčlenitve. Členi razčlenitve.
- **Definicija.** Ferrersov diagram razčlenitve. Konjugirana razčlenitev.
- **Trditev.** Število razčlenitev števila $n \in \mathbb{N}$. Število razčlenitev števila $n \in \mathbb{N}$ s k členi. Število razčlenitev števila $n \in \mathbb{N}$ z največ k členi.

Izpitna vprašanja:

- Kaj je razčlenitev naravnega števila? Koliko je vseh razčlenitev števila n s k členi in koliko s kvečjemu k členi?

8. Stirlingova števila I. vrste

- **Definicija.** Stirlingovo število I. vrste. $C(n, 0)$, $n > 0$ in $C(0, 0)$
- **Primer.** Izračunaj $C(n, n)$, $C(n, 1)$ in $C(4, 2)$.
- **Trditev.** Osnovna rekurzivna zveza za Stirlingova števila I. vrste.
- Stirlingova matrika I. vrste.
- **Trditev.** Dokaži, da $x^n = \sum_{k=0}^{\infty} C(n, k)x^k$.

Izpitna vprašanja:

- Kako so definirana Stirlingova števila prve vrste in kako jih izračunamo? Zapišite začetni del Stirlingove matrike prve vrste.

9. Stirlingova števila II. vrste in Bellova števila

- **Definicija.** Razdelitev množice.
- **Definicija.** Stirlingovo število II. vrste. $S(n, 0)$, $n > 0$ in $S(0, 0)$
- **Primer.** Izračunaj $S(n, n)$, $S(n, 1)$ in $S(n, 2)$.
- **Trditev.** Osnovna rekurzivna zveza za Stirlingova števila II. vrste.
- Stirlingova matrika II. vrste.
- **Trditev.** Dokaži, da $x^n = \sum_{k=0}^{\infty} S(n, k)x^k$.
- **Trditev.** Število surjekcij iz n -množice v k -množico.
- **Definicija.** Bellovo število.
- **Trditev.** Osnovna rekurzivna zveza za Bellova števila.

Izpitna vprašanja:

- Kako so definirana Stirlingova števila druge vrste in kako jih izračunamo? Zapišite začetni del Stirlingove matrike druge vrste. Kakšna je povezava med temi števili in ekvivalenčnimi relacijami?

10. Lahova števila

- **Definicija.** Lahovo število.
- **Trditev.** Osnovna rekurzivna zveza za Lahova števila.
- **Trditev.** Eksplicitna formula za Lahova števila.

Izpitna vprašanja:

- Kako so definirana Lahova števila in kako jih izračunamo - kako rekurzivno in kako eksplicitno?

11. Dvajnastera pot

- **Izrek.** Dvajnastera pot.

Izpitna vprašanja:

- Kaj je dvanajstera pot? Zapišite in napolnite ustrezno tabelo.

12. Načelo vključitev in izključitev

- **Primer.** Koliko so števil v [30] ni tujih s 30? Koliko so tujih?
- **Izrek.** Načelo vključitev in izključitev.
- **Primer.** Na koliko načinov lahko razporedimo n označenih predmetov v k označenih predalov, če je vsaj en predal prazen?
- **Posledica.** Naj bo X N -množica in so $A_1, \dots, A_n \subseteq X$. Koliko je elementov množice X , ki niso v nobeni izmed množic A_1, \dots, A_n ?

- **Definicija.** Premestitev množice.
- **Primer.** Izračunaj število premestitev množice $[n]$.
- **Izrek.** Naj bo $n = p_1^{e_1} \dots p_r^{e_r}$ razcep $n \in \mathbb{N}$ na prafaktorji. Čemu je enako $\phi(n)$?

Izpitna vprašanja:

- Formulirajte in dokažite načelo vključitev in izključitev.

13. Rekurzivne enačbe

- **Primer.** Na koliko načinov lahko prehodimo n stopnic, če vsakič prehodimo 1 ali 2?
- **Primer.** Koliko je dvojiških dreves s korenem z n vozlišč?
- **Izrek.** Splošna rešitev 2-člene rekurzije. Karakteristična enačba.
- **Definicija.** d -člena linearna rekurzija s konstantnimi koeficienti. Homogena rekurzija.
- **Izrek.** Splošna rešitev d -člene homogene linearne rekurzije s konstantnimi koeficienti.
- Kako rešimo nehomogeno rekurzijo?

Izpitna vprašanja:

- Pojasnite pojem linearne rekurzivne enačbe s konstantnimi koeficienti. Kako lahko zapišemo splošno rešitev dvočlene rekurzije? Kako formulo dokažemo?
- Kakšna je splošna rešitev d -člene linearne rekurzivne enačbe s konstantnimi koeficienti? Opišite korake dokaza te formule.

14. Formalne potenčne vrste (Rodovne funkcije)

- **Definicija.** Formalna potenčna vrsta zaporedja $(a_n)_n$.
- **Definicija.** Seštevanje potenčnih vrst, množenje potenčne vrste s skalarji, množenje potenčnih vrst.
- **Opomba.** Kakšno strukturo ima množica formalnih potenčnih vrst?
- **Definicija.** Obrnljiva formalna potenčna vrsta.
- **Trditev.** Karakterizacija obrnljivosti.
- **Definicija.** Rodovna funkcija.
- **Primer.** Določi rodovno funkcijo Fibonaccijeva zaporedja.
- **Definicija.** Odvod formalne potenčne vrste.
- **Trditev.** Odvod produkta.
- **Primer.** Naj bo $a_0 = 2, a_1 = 3, a_n = 2a_{n-1} - a_{n-2}, n \geq 2$. Določi splošno formulo za a_n .
- Koraki splošnega reševanja nekega kombinatoričnega problema.

Izpitna vprašanja:

- Kaj je formalna potenčna vrsta in kaj je rodovna funkcija? Katere formalne potenčne vrste so obrnljive? Kakšen je splošen recept za reševanje rekurzivnih enačb s pomočjo rodovnih funkcij?

15. Catalanova števila

- **Definicija.** Catalanova števila.
- **Trditev.** Rekurzivna zveza za Catalanova števila.
- **Trditev.** Eksplicitna formula za Catalanova števila.
- **Primer.** Kaj lahko preštejemo s Catalanovi števili?

Izpitna vprašanja:

- Kaj so Catalanova števila? Naštejte nekaj primerov kombinatoričnih objektov, ki jih preštejejo Catalanova števila.