

1 Hilbertovi prostori

1. Vektorski prostor s skalarnim produktom

Naj bo X vektorski prostor nad \mathbb{R} (ali nad \mathbb{C}).

- **Definicija.** Skalarni produkt.
- **Trditev.** Cauchy-Schwartzova neenakost.
- **Definicija.** Norma na vektorskem prostoru X .
- **Trditev.** Norma, ki je dobljena iz skalarnega produkta.
- **Trditev.** Metrični prostor, porojeni z normo.

2. Hilbertovi prostori

- **Definicija.** Hilbertov prostor. Banachov prostor.
- **Zgled.** Standardni skalarni produkti na \mathbb{R}^n in \mathbb{C}^n . Norme, ki ne pridejo iz skalarnega produkta.

3. Prostor $L^2([a, b])$

- **Trditev.** Standardni skalarni produkt na prostoru $C([a, b])$.
- **Trditev.** Ali je prostor $C([a, b])$ s standardnim skalarnim produktom Hilbertov?
- **Zgled.** Kako lahko napolnimo prostor $((0, 1), d_2)$?
- **Definicija.** Kadar pravimo, da lahko napolnimo metrični prostor (M, d) ? Napolnitev prostora.
- **Opomba.** Kaj je ponavadi prostor \overline{M} ?
- **Opomba.** Prostor $L^1(A)$.
- **Definicija.** Prostor $L^2([a, b])$.
- **Opomba.** Ali je produkt dveh $L^2([a, b])$ funkcij $L^1([a, b])$ funkcija? Skalarni produkt na $L^2([a, b])$
- **Trditev.** Ali je $L^2([a, b])$ vektorski prostor nad \mathbb{R} ?
- **Opomba.** Ali je $C([a, b]) \subseteq L^2([a, b])$? Ali je $C([a, b])$ gost v $L^2([a, b])$? Kaj pomeni, da zaporedje $(f_n)_n \in L^2([a, b])$ konvergira k $f \in L^2([a, b])$?
- **Izrek.** Ali je $L^2([a, b])$ Hilbertov prostor? Kako sta povezana prostora $L^2([a, b])$ in $C([a, b])$? [brez dokaza]
- **Opomba.** Kako zgleda skalarni produkt nad \mathbb{C} ?
- **Zgled.** Navedi primer funkcije ko limita po točkah ni enaka limite v L^2 smislu. Navedi primer funkcije za katero ne obstaja limita po točkah, limita v L^2 smislu pa obstaja.

4. Ortogonalnost

Naj bo X vektorski prostor s skalarnim produktom, $A \subseteq X$, $A \neq \emptyset$.

- **Definicija.** Kadar sta dva vektorja pravokotna? Ortogonalni komplement množice A .
- **Trditev.** Ali je A^\perp vektorski podprostor v X ?
- **Opomba.** V kakšni relaciji sta A in $(A^\perp)^\perp$?
- **Trditev.** Naj bo $v \in X$. Ali je $f : X \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \langle x, v \rangle$ zvezna?
- **Posledica.** Ali je A^\perp zaprt podprostor v X ?
- **Opomba.** Ali je $C([a, b])$ zaprt podprostor v $L^2([a, b])$?
- **Opomba.** V kakšni relaciji sta A in $(A^\perp)^\perp$, če je X Hilbertov in A zaprt podprostor?
- **Trditev.** Pitagorjev izrek.

Naj bo X vektorski prostor s skalarnim produktom, $Y \leq X$ podprostor v X .

- **Definicija.** Pravokotna projekcija vektorja $x \in X$ na podprostor Y .
- **Trditev.** Kaj lahko povemo o pravokotne projekcije vektorja $x \in X$ na Y , če obstaja? **TODO: ***
- **Zgled.** Ali imajo funkcije iz $L^2([a, b]) \setminus C([a, b])$ najboljšo aproksimacijo z zveznimi funkciji?
- **Opomba.** Lastnosti P_Y :
 - Ali je P_Y idempotent?
 - Kakšna zveza med $\|x\|$ in $\|P_Y(x)\|$?
 - Ali je $P_Y : X \rightarrow Y$ linearna in zvezna?
 - Ali je Y zaprt podprostor, če je P_Y definirana na X ?
 - Recimo, da $P_Y(x)$ obstaja. Ali obstaja tudi $P_{Y^\perp}(x)$?
- **Trditev.** Razvoj $P_Y(x)$ po ONB.

5. Ortogonalni sistem

Naj bo X vektorski prostor s skalarnim produktom.

- **Definicija.** Ortogonalni sistem (OS). Ortonormiran sistem (ONS).
- **Trditev.** Besselova neenakost. **TODO: ***
- **Posledica.** Čemu je enaka limita $\lim_{j \rightarrow \infty} \langle x, e_j \rangle$?
- **Opomba.** Zakaj potrebujemo absolutno vrednost? Kaj so $(\langle x, e_j \rangle)_{j=1}^\infty$?
- **Trditev.** Naj bo $(e_j)_{j=1}^\infty$ ONS, $(c_j)_j$ tako zaporedje števil, da $\sum_{j=1}^\infty |c_j|^2 < \infty$. Kaj potem?
- **Definicija.** Kompletan ortonormiran sistem (KONS).
- **Trditev.** 6 ekvivalentnih trditev o KONS. **TODO: ***
- **Zgled.** Modelni Hilbertov prostor.

6. Prostor $L^2([-\pi, \pi])$

- ONS na prostoru $L^2([-\pi, \pi])$.
- **Opomba.** Kako lahko obravnavamo vsako funkcijo $f : [-\pi, \pi] \rightarrow \mathbb{R}$ v tem kontekstu?
- Klasične Fourierjevi koeficienti. Fourierjeva vrsta. **TODO: ***
- **Trditev.** Riemann-Lebesgueva lema.
- **Trditev.** Parsevalova enakost.
- **Zgled.** Definiramo funkcijo $f : [-\pi, \pi] \rightarrow \mathbb{R}$ s predpisom

$$f(x) = \begin{cases} 1; & 0 \leq x \leq \pi \\ 0; & -\pi < x < 0. \end{cases}$$

Razvij f v Fourierjevo vrsto ter izračunaj $\sum_{n=1}^\infty \frac{1}{n^2}$.

- **Lema.** Naj bo $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ odsekoma zvezna periodična funkcija s periodo 2π . Čemu je enak integral $\int_a^{a+p} f(x) dx$?
- **Lema.** Dirichletovo jedro.
- **Lema.** 3 lastnosti Dirichletovega jedra.
- **Izrek.** Fourierjeva vrsta funkcije. **TODO: ***
- **Zgled.** S pomočjo vrste iz prejšnjega zgleda izračunaj $\sum_{k=0}^\infty (-1)^k \frac{1}{2k+1}$.
- **Definicija.** Cesarjeve delne vsote. Fourierjevo jedro.
- **Trditev.** 5 lastnosti Fourierjeva jedra.
- **Izrek.** Naj bo f 2π periodična zvezna funkcija. Kaj lahko povemo o Cesarjevih delnih vsotih?

- **Izrek.** Ali je prej definiran ONS na L^2 KONS?
- **Opomba.** Trigonometrični polinomi.
- **Izrek.** Weierstrassov isrek.

2 Vektorska analiza

1. Skalarno in vektorsko polje

- **Definicija.** Skalarno polje. Vektorsko polje.
- **Definicija.** Pozitivno/negativno orientirana ONB.
- **Opomba.** Prehod med bazi.

2. Smerni odvod skalarnega polja

Naj bo $u : D \subseteq \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ skalarno polje.

- **Definicija.** Smerni odvod skalarnega polja u .
- **Opomba.** Kaj meri smerni odvod? Kaj so smerni odvodi v smeri baznih vektorjev?
- **Opomba.** Kako izračunamo smerni odvod skalarnega polja u v točki p_0 , če je u diferenciable v p_0 ? Kaj to pomeni v kartezičnih koordinatah?
- **Definicija.** Gradient skalarnega polja.
- **Opomba.** Ali je gradient odvisen od izbire baze? Kaj smo priredili skalarneemu polju?
- **Trditev.** V kakšni smeri se najhitreje narašča skalarno polje? V kakšni smeri pa najhitreje pada?
- **Definicija.** Operator nabra.
- **Opomba.** Kako se z operatorjem nabra izraža gradient skalarnega polja?
- **Definicija.** Divergenca vektorskega polja.
- **Opomba.** Ali je divergenca odvisna od izbire baze?
- **Definicija.** Rotor vektorskega polja.
- **Opomba.** Odvisnost rotorja od izbire baze.
- **Trditev.** Rotor gradienta. Divergenca rotorja.
- **Opomba.** Ali je divergenca gradienta enaka nič?
- **Definicija.** Laplaceov operator. Harmonična funkcija.
- **Definicija.** Potencialno polje. Potencial. Irotacionalno (nevrtilčno) polje. Solenoidalno polje.
- **Opomba.** Zadosten pogoj, da je polje irotacionalno, Zadosten pogoj, da je polje solenoidalno. Kaj pa obrat?
- **Zgled.** Izračunaj rotor polja $\vec{f}(x, y, z) = \left(-\frac{y}{x^2+y^2}, \frac{x}{x^2+y^2}, 0\right)$. Ali je polje potencialno?
- **Definicija.** Zvezdasto območje.
- **Izrek.** Kdaj je nevrtilčno polje potencialno? Kdaj je polje rotor nekega drugega polja?
- **Zgled.** Ali je polje $\vec{f}(x, y, z) = (y^2z^3 + 2, 2xyz^3 + 1, 3xe^2z^2)$ potencialno? Čemu je enak rot \vec{f} ? Ali je polje $\vec{g}(x, y, z) = (2y - 1, -1, 4x - 2xy)$ solenoidalno?
- **Opomba.** V kakšni obliki lahko lokalno zapišemo vsako vektorsko polje?

2.1 Krivuljni in ploskovni integral

1. Dolžina krivulje

- Regularna parametrizacija krivulje.
- **Definicija.** Dolžina krivulje.
- **Trditev.** Ali je definicija neodvisna od izbire regularne parametrizacije?
- **Zgled.** Naravni parameter.

- **Zgled.** Vijačnico lahko parametriziramo s predpisom $t \mapsto (a \cos t, a \sin t, bt)$. Določi naravno parametrizacijo vijačnice.
2. Krivuljni integral skalarne polja
 - **Definicija.** Orientacija krivulje. Usklajen izbor orientacije. Orientirana krivulja.
 - **Opomba.** Ali je vsaka krivulja orientabilna? Kaj če je krivulja odsekoma gladka? Krivulja z robom.
 - **Definicija.** Integral skalarne polja vzdolž krivulje.
 - **Opomba.** Kaj je dolžina krivulje? Ali je vrednost odvisna od izbire regularne parametrizacije? Kaj je skalarne polje v fizikalnem smislu? Kaj če je krivulja odsekoma gladka?
 - **Zgled.** Naj bo $\Gamma = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 = a^2, y \geq 0\}$ homogena polkrožnica. Določi lego težišča Γ .
 3. Krivuljni integral vektorskega polja
 - **Definicija.** Integral vektorskega polja vzdolž krivulje.
 - **Opomba.** Fizikalni pomen. Ali je definicija odvisna od izbire regularne parametrizacije?
 - **Zgled.** Naj bo $\vec{f}(x, y, z) = (xy, z, x - z)$ ter $\Gamma : \vec{r}(t) = (t, t, \frac{1}{2}t^2), t \in [0, 1]$. Izračunaj integral \vec{f} po Γ .
 - **Zgled.** **TODO: Delo sile teže.**
 - **Opomba.** Zapis integrala vektorskega polja v diferencialni formi. Integral po sklenjeni krivulji.
 - **Trditev.** Kaj če integriramo potencialno polje?
 - **Posledica.** Kaj če integriramo potencialno polje po sklenjeni krivulji?
 - **Zgled.** Izračunaj integral polja $\vec{f}(x, y, z) = \left(-\frac{y}{x^2+y^2}, \frac{x}{x^2+y^2}, 0\right)$ po krožnici.
 - **Izrek.** Karakterizacija potencialnih vektorskih polj.
 4. Površina ploskve
 - Intuitivna izpeljava formule za površine ploskve.
 - **Definicija.** Površina ploskve.
 - **Trditev.** Ali je definicija odvisna od izbire regularne parametrizacije?
 5. Orientacija ploskev

Naj bo $\Sigma \subseteq \mathbb{R}^3$ gladka ploskev.

 - **Definicija.** Orientacija Σ . Orientabilna ploskev.
 - **Opomba.** Koliko orientacij lahko ima orientabilna povezana ploskev?
 - **Zgled.** Določi ali je ploskev Σ orientabilna, če
 - Σ je graf funkcije;
 - Σ je sfera;
 - Σ je plašč valja;
 - Σ je torus; je sklenjena ploskev;
 - Σ je Mobiusov trak.
 - **Definicija.** Gladka ploskev z robom. Rob ploskve. Skladna orientacija roba.
 - **Opomba.** Orientacija, ki je usklajena z parametrizacijo.
 - **Definicija.** Odsekoma gladka ploskev. Orientacija odsekoma gladke ploskve.
 6. Ploskovni integral skalarne polja
 - **Definicija.** Ploskovni integral skalarne polja.
 - **Opomba.** Kaj je površina ploskve?

- **Trditev.** Ali je integral odvisen od izbire regularne parametrizacije?
 - **Opomba.** Ali je orientacija ploskve pomembna? Ali je ta integral obstaja na Mobiusovem traku?
 - **Opomba.** Kaj je masa ploskve? Homogena ploskev.
 - **Zgled.** Izračunaj vztrajnostni moment homogene sfere z polmerom R okoli z -osi.
7. Ploskovni integral vektorskega polja
- **Definicija.** Ploskovni integral vektorskega polja. Pretok vektorskega polja skozi ploskev.
 - **Trditev.** Ali je integral odvisen od izbire regularne parametrizacije?
 - **Opomba.** Kaj pravi formula, če izberimo orientacijo, ki je usklajena z regularno parametrizacijo? Kaj če imamo odsekoma gladko ploskev?
 - **Zgled.** **TODO: sfera.**
 - **Opomba.** Diferencialna 1-forma.
8. Integralski izreki
- **Izrek.** Gauss-Ostrogradski.
Dokaz. **TODO:** □
 - **Izrek.** Stokesov izrek.
Dokaz. **TODO:** □
 - **Izrek.** Greenova formula.
Dokaz. **TODO:** □
 - **Zgled.** **TODO: Račun integralov.**
 - **Definicija.** Divergenca, ki je neodvisna od izbire koordinatnega sistema.
 - **Definicija.** Rotor, ki je neodvisen od izbire koordinatnega sistema.
 - **Izrek.** Greenovi identiteti.
 - **Opomba.** O diferencialnih formah.

3 Kompleksna analiza

1. Kompleksna števila

- Komutativni obseg \mathbb{C} . Vložitev \mathbb{R} v \mathbb{C} .
- Imaginarna enota i . Kvadrat imaginarne enote i^2 .
- Algebrائي zapis kompleksnega števila. Realni in kompleksni del. Gaussova ravnina.
- Konjugiranje. Absolutna vrednost. Kaj velja za absolutno vrednost?
- Polarni zapis kompleksnega števila. Argument kompleksnega števila.
- Metrika (topologija) na \mathbb{C} . Odprt krog v \mathbb{C} .
- Zaporedja v \mathbb{C} .
- Karakterizacija povezanih množic v \mathbb{C} . Komponente za povezanost.
- **Definicija.** Območje.
- Zveznost preslikave $f : D \subseteq \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$. Limita.
- Kako kompleksna funkcija definira realni? Kdaj je kompleksna funkcija f zvezna?
- Riemannova sfera (kompaktifikacija z eno točko).

2. Holomorfne funkcije

Naj bo $D \subseteq \mathbb{C}$ območje ter $f : D \rightarrow \mathbb{C}$ kompleksna funkcija.

- **Definicija.** Kompleksni odvod funkcije f v točki $a \in D$. Holomorfna funkcija. Cela funkcija. Množica vseh holomorfnih funkcij.
- **Opomba.** Ali je kompleksni odvod močnejši od običajnega?
- **Posledica.** Ali je kompleksno odvedljiva funkcija v točki $a \in D$ diferenciable? Ali je zvezna?
- **Opomba.** Ali je $f(z) = \bar{z}$ kompleksno linearna? Ali je linearna? Ali je kompleksno odvedljiva?
- **Trditev.** Kakšno strukturo ima $O(D)$? Pravila za odvajanje.
- **Trditev.** Kompleksni odvod kompozicije.

3. Cauchy-Riemannove enačbe

Naj bo $D \subseteq \mathbb{C}$ območje ter $f : D \rightarrow \mathbb{C}$ kompleksna funkcija.

- **Izrek.** Cauchy-Riemannove enačbe.
- **Opomba.** Kako izračunamo kompleksni odvod?
- **Zgled.** **TODO: Račun odvodov.**
- **Opomba.** Simboli $\frac{\partial f}{\partial \bar{z}}$ ter $\frac{\partial f}{\partial z}$
- **Trditev.** Karakterizacija holomorfности f . Cauchy-Riemannova enačba.
- **Zgled.** **TODO: Račun odvodov.**
- **Opomba.** Kdaj je intuitivno f holomorfna?
- **Trditev.** Kdaj je f holomorfna na $D \subseteq \mathbb{C}$ (diferencial)?
- **Izrek.** Zadosten pogoj, da je f konstanta.
- **Izrek.** Kaj če je f holomorfna na območju D ter $f_*(D) \subseteq \mathbb{R}$?
- **Izrek.** Pišimo $f = u + iv$. Recimo, da je $f \in O(D)$ ter $f \in C^2(D)$. Kaj lahko povemo o u in v ?
- **Definicija.** Harmonična konjugiranka.
- **Opomba.** Kaj če imamo eno harmonično konjugiranko? V čim se razlikujeta dve harmonični konjugiranki?
- **Zgled.** Pokaži, da je $u(x, y) = xy$ harmonična in določi njeno harmonično konjugiranko. Pokaži, da je $\log |z|$ harmonična na $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ in na $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ nima

harmonične konjugiranke.

- **Izrek.** Zadosten pogoj za obstoj harmonične konjugiranke.

4. Potenčne vrste v kompleksnem

- **Definicija.** Kdaj kompleksna številska vrsta konvergira? Kdaj vrsta konvergira absolutno?
- **Opomba.** Kakšno strukturo ima množica konvergentnih številskih vrst? Ali pri absolutni konvergenci lahko seštevamo v poljubnem vrstnem redu?
- **Definicija.** Kdaj funkcijska vrsta konvergira po točkah? Kdaj konvergira enakomerno? Kdaj konvergira enakomerno po kompaktnih?
- **Zgled.** Gledamo $f_n(z) = z^n$ kot zaporedje oziroma

$$g_1(z) = 1, \quad g_n(z) = z^n - z^{n-1}, \quad n \geq 2$$

kot vrsto. Ali vrsta $\sum_{n=1}^{\infty} g_n(z)$ konvergira enakomerno na Δ ? Ali konvergira po kompaktnih v Δ ?

- **Izrek.** Weierstrassov kriterij.
- **Definicija.** Potenčna vrsta.
- **Izrek.** Konvergenčni polmer. Obstoj in formula.
- **Definicija.** Kdaj pravimo, da kompleksno funkcijo se da razviti v potenčno vrsto?
- **Izrek.** Kaj lahko povemo o funkciji, če jo se da razviti v potenčno vrsto v okolici točke $a \in D$?
- **Posledica.** Ali je vsota konvergentne potenčne vrste holomorfná funkcija? Kaj je njen odvod?
- **Posledica.** Lokalna oblika prejšnje posledice.
- **Zgled.** Razvoj v potenčno vrsto. Koeficienti.

5. Elementarne funkcije v kompleksnem

- Eksponentna funkcija.
- **Trditev.** Čemu je enako e^{z+w} ?
- Funkciji sinus in kosinus. Povezava z eksponento.
- Eulerjeva formula.
- Hiperbolični sinus in kosinus. Povezava z navadnimi.
- Ali ima eksponenta ničla na \mathbb{C} ?
- Koliko rešitev ima enačba $e^z = 1$? Ali je e^z periodična?
- Ničle funkcije sinus. Sinus vsote.
- Logaritemska funkcija.
- Korenska funkcija.

6. Krivuljni integral v \mathbb{C}

- **Definicija.** Krivuljni integral v \mathbb{C} .
- **Trditev.** Trikotniška neenakost.
- **Trditev.** Ocena vrednosti integrala po krivulje.
- **Opomba.** Zapis diferencialne 1-forme v kompleksne oblike. Integral po $d\bar{z}$.
- **Trditev.** Osnovna formula integralskega računa v kompleksnem.
- **Posledica.** Naj bo $n \in \mathbb{N}$. Čemu je enak integral $\int_{\gamma} z^n dz$, če je γ sklenjena pot v \mathbb{C} ?
- **Posledica.** Verzija prejšnje posledice za $n \in \mathbb{Z}$.

7. Greenova formula v kompleksnem

- **Trditev.** Greenova formula v kompleksnem.

- **Posledica.** Cauchyjev izrek.
 - **Izrek.** Cauchyjeva formula.
 - **Opomba.** S čim je enolično določena holomorfná funkcija? Cauchyjevo jedro.
 - **Posledica.** Lastnost povprečne vrednosti.
 - **Opomba.** Ali je potrebna predpostavka, da je $f \in C^1(\Omega)$? Kaj pravi posledica?
 - **Posledica.** Kaj če $f \in O(\Omega) \cap C^1(\Omega)$? Formula za odvod.
 - **Izrek.** Morerov (Morera) izrek.
 - **Izrek.** Goursatov (Goursat) izrek.
 - **Trditev.** Princip maksima.
 - **Posledica.** Recimo, da $f \in C(\bar{\Omega}) \cap O(\Omega)$. Čemu je enak maksimum f ?
 - **Trditev.** O funkcijskem zaporedju holomorfnih funkcij.
8. Razvoj holomorfne funkcije v vrsto
- **Izrek.** Ali lahko vsako holomorfnó funkcijo razvijemo v vrsto? Kje konvergira ta vrsta? Kaj je njena vsota?
 - **Izrek.** Cauchyjeve ocene.
 - **Izrek.** Liouvilleov (Liouville) izrek.
 - **Posledica.** Zadosten pogoj, da je f konstanta.
 - **Izrek.** Osnovni izrek algebre.
 - **Posledica.** Koliko ničel ima vsak nekonstanten polinom stopnje n v \mathbb{C} ?
 - **Trditev.** Razcep funkcije $f \in O(\Delta(a, r))$. Stopnja ničle.
 - **Izrek.** Princip identičnosti.
 - **Posledica.** Zadosten pogoj za enakost holomorfnih funkcij.
 - **Posledica.** O izoliranih ničlah.
9. Izolirane singularne točke
- **Definicija.** Kdaj pravimo, da ima f v a izolirno singularno točko? Singularna točka.
 - **Trditev.** Odpravljliva singularna točka.
 - **Izrek.** Punktiran disk. Laurentova vrsta. Koeficienti. Regularni in glavni del vrste.
 - **Opomba.** Ali so integrali, ki določajo koeficienti odvisni od izbire r ? Kje konvergira glavni del in kje regularni?
 - **Zgled.** **TODO: Odpravljliva singularnost.**
 - **Definicija.** Odpravljliva singularnost. Pol stopnje n . Bistvena singularnost.
 - **Zgled.** **TODO: Tipi singularnosti.**
 - **Trditev.** Karakterizacija odpravljlive singularnosti.
 - **Trditev.** Karakterizacija pola.
 - **Posledica.** Karakterizacija pola (limita).
 - **Izrek.** Karakterizacija bistvene singularnosti.
 - **Izrek.** Veliki Picardov izrek.
 - **Zgled.** **TODO:**
 - **Posledica.** Mali Picardov izrek.
 - **Opomba.** **TODO: O točke ∞ na Riemmanovi sferi.**
 - **Zgled.** **TODO:**
10. Residui