

Analiza 2a

27. oktober 2024

Kazalo

| | | |
|----------|---|----------|
| 1 | Funkcije več spremenljivk | 3 |
| 1.1 | Prostor \mathbb{R}^n | 3 |
| 1.1.1 | Prostor \mathbb{R}^n | 3 |
| 1.1.2 | Zaporedja v \mathbb{R}^n | 3 |
| 1.2 | Zveznost preslikav iz \mathbb{R}^n v \mathbb{R}^m | 4 |
| 1.2.1 | Zveznost preslikav iz \mathbb{R}^n v \mathbb{R} | 4 |
| 1.2.2 | Zveznost preslikav iz \mathbb{R}^n v \mathbb{R}^m | 5 |
| 1.3 | Parcialni odvodi in diferenciabilitynost | 6 |
| 1.3.1 | Parcialni odvod | 6 |
| 1.3.2 | Diferenciabilitynost | 6 |
| 1.3.3 | Višji parcialni odvodi | 7 |
| 1.3.4 | Diferenciabilitynost preslikav | 7 |
| 1.4 | Izrek o implicitni funkciji | 8 |

1 Funkcije več spremenljivk

1.1 Prostor \mathbb{R}^n

1.1.1 Prostor \mathbb{R}^n

Definicija 1.1.1. Prostor \mathbb{R}^n je kartezični produkt $\underbrace{\mathbb{R} \times \cdots \times \mathbb{R}}_n$. Na njem definiramo seštevanje in množenje s skalarjem po komponentah. S tema operacijama je $(\mathbb{R}, +, \cdot)$ vektorski prostor nad \mathbb{R} . Posebej definiramo še skalarni produkt

$$x \cdot y = \sum_{i=1}^n x_i y_i,$$

ki nam da normo $\|x\| = \sqrt{x \cdot x}$ in metriko $d(x, y) = \|x - y\|$. (\mathbb{R}^n, d) je tako metrični prostor.

Definicija 1.1.2. Naj bosta $a, b \in \mathbb{R}^n$ vektorja, za katera je $a_i \leq b_i$ za vse $i \in \{1, \dots, n\}$. Zaprt kvader, ki ga določata a in b , je množica

$$[a, b] = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \forall i \in \{1, \dots, n\} : a_i \leq x_i \leq b_i\}.$$

Podobno definiramo odprt kvader kot

$$(a, b) = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \forall i \in \{1, \dots, n\} : a_i < x_i < b_i\}.$$

Opomba. Odprte množice v normah $\|x\|_\infty$ in $\|x\|_2$ so iste.

Izrek 1.1.3. Množica $K \subseteq \mathbb{R}^n$ je kompaktna natanko tedaj, ko je zaprta in omejena.

1.1.2 Zaporedja v \mathbb{R}^n

Definicija 1.1.4. Zaporedje v \mathbb{R}^n je preslikava $a : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}^n$. Namesto $a(m)$ pišimo a_m , $a_m = (a_1^m, \dots, a_n^m)$.

Opomba. Zaporedje v \mathbb{R}^n porodi n zaporedij v \mathbb{R} .

Trditev 1.1.5. Naj bo $(a_m)_m$ zaporedje v \mathbb{R}^n , $a_m = (a_1^m, \dots, a_n^m)$. Velja:

$$\text{Zaporedje } (a_m)_m \text{ konvergira} \Leftrightarrow \text{konvergira zaporedja } (a_1^m)_m, \dots, (a_n^m)_m.$$

V primeru konvergence velja:

$$\lim_{m \rightarrow \infty} a_m = \left(\lim_{m \rightarrow \infty} a_1^m, \dots, \lim_{m \rightarrow \infty} a_n^m \right).$$

Dokaz. Definicija limite. □

1.2 Zveznost preslikav iz \mathbb{R}^n v \mathbb{R}^m

1.2.1 Zveznost preslikav iz \mathbb{R}^n v \mathbb{R}

Definicija 1.2.1. Če je $m = 1$, potem preslikave rečemo *funkcija*.

Definicija 1.2.2. Naj bo $f : D \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ preslikava. Naj bo $a \in D$. Preslikava f je *zvezna v točki a* , če

$$\forall \epsilon > 0. \exists \delta > 0. \forall x \in D. \|x - a\| < \delta \Rightarrow \|f(x) - f(a)\| < \epsilon.$$

Preslikava f je *zvezna na D* , če je zvezna v vsaki točki $a \in D$.

Trditev 1.2.3. Naj bo $f : D \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ preslikava. Naj bo $a \in D$. Preslikava f je zvezna v točki a natanko tedaj, ko za vsako zaporedje $(x_n)_n$, $x_n \in D$, ki konvergira proti a , zaporedje $(f(x_n))_n$, $f(x_n) \in \mathbb{R}^m$ konvergira proti $f(a)$.

Definicija 1.2.4. Naj bo $f : D \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ preslikava. Preslikava f je *enakomerno zvezna na D* , če

$$\forall \epsilon > 0. \exists \delta > 0. \forall x, x' \in D. \|x - x'\| < \delta \Rightarrow \|f(x) - f(x')\| < \epsilon.$$

Trditev 1.2.5. Zvezna preslikava na kompaktni množici je enakomerno zvezna.

Trditev 1.2.6. Naj bo $f : K^{\text{komp}} \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ zvezna preslikava. Potem je $f_*(K)$ kompaktna.

Definicija 1.2.7. Preslikava $f : D \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ je *C-lipschitzova*, če

$$\exists C \in \mathbb{R}. \forall x, x' \in D. \|f(x) - f(x')\| \leq C\|x - x'\|.$$

Trditev 1.2.8. Za preslikavo $f : D \rightarrow X'$ velja:

$$f \text{ je } C\text{-lipschitzova} \Rightarrow f \text{ je enakomerno zvezna} \Rightarrow f \text{ je zvezna}.$$

Trditev 1.2.9. Naj bosta $f, g : D \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ zvezni funkciji v $a \in D$. Naj bo $\lambda \in \mathbb{R}$. Tedaj so v a zvezni tudi funkcije:

$$f + g, f - g, \lambda f, fg.$$

Če za vsak $x \in D$, $g(x) \neq 0$, tedaj so v a zvezna tudi funkcija:

$$\frac{f}{g}.$$

Trditev 1.2.10. Kompozitum zveznih preslikav je zvezna preslikava.

Dokaz. Z zaporedji kot pri analizi 1. □

Zgled. Nekaj primerov zveznih preslikav.

- Preslikava $\Pi_j(x_1, \dots, x_n) = x_j$ je zvezna na \mathbb{R}^n za vsak $j = 1, \dots, n$.
- Vse polinomi v n -spremenljivkah so zvezne funkcije na \mathbb{R}^n .
- Vse racionalne funkcije so zvezne povsod, razen tam, kjer je imenovalec enak 0.

Definicija 1.2.11. Preslikava $f : D \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ je *funkcija n -spremenljivk*.

Opomba. Naj bo (M, d) metrični prostor in $N \subset M$. Naj bo $f : M \rightarrow \mathbb{R}$ zvezna funkcija na M . Potem $f|_N$ je tudi zvezna funkcija na N .

Trditev 1.2.12. Naj bosta $D \subseteq \mathbb{R}^n$ in $D_j = \Pi_j(D)$. Naj bo $a \in D$, $a = (a_1, \dots, a_n)$ in $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ zvezna v a . Tedaj za vsak $j = 1, \dots, n$ funkcija $\varphi_j : D_j \rightarrow \mathbb{R}$, $\varphi_j(t) = f(a_1, \dots, a_{j-1}, t, a_{j+1}, \dots, a_n)$ zvezna v a_j .

Dokaz. Definicija zveznosti v točki. □

Opomba. Če je funkcija več spremenljivk zvezna v neki točki $a \in \mathbb{R}^n$, je zvezna tudi kot funkcija posameznih spremenljivk.

Zgled. Naj bo $f(x, y) = \begin{cases} \frac{2xy}{x^2+y^2}; & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0; & (x, y) = (0, 0) \end{cases}$. Ali je f zvezna kot funkcija vsake spremenljivke posebej? Ali je f zvezna na \mathbb{R}^2 ?

Zgled. Naj bo $f(x, y) = \begin{cases} \frac{2x^2y}{x^4+y^2}; & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0; & (x, y) = (0, 0) \end{cases}$. Ali je f zvezna kot funkcija vsake spremenljivke posebej? Ali je zvezna na vsaki premici? Ali je f zvezna na \mathbb{R}^2 ?

Opomba. Zgleda pokažeta, da obrat v prejšnji trditvi ne velja.

1.2.2 Zveznost preslikav iz \mathbb{R}^n v \mathbb{R}^m

Naj bo $D \subseteq \mathbb{R}^n$ in $F : D \rightarrow \mathbb{R}^m$ preslikava. Naj bo $x \in D$, potem $F(x) \in \mathbb{R}^m$, $F(x) = y = (y_1, \dots, y_m)$. Lahko pišemo $F(x) = (f_1(x), \dots, f_m(x))$. Torej F določa m funkcij n -spremenljivk.

Trditev 1.2.13. Naj bo $a \in D \subseteq \mathbb{R}^n$. Naj bo $F = (f_1, \dots, f_m) : D \rightarrow \mathbb{R}^m$ preslikava. Velja:

$$\text{Preslikava } F \text{ je zvezna v } a \Leftrightarrow f_1, \dots, f_m \text{ so zvezne v } a.$$

Dokaz. Definicija zveznosti v točki. □

Opomba. Linearne preslikave so zvezne, saj so vse koordinatne funkcije linearne (polinomi 1. stopnje).

Zgled (Omejenost linearnih preslikav). Naj bo $\mathcal{A} : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ linearna preslikava, potem

$$\exists M \in \mathbb{R} . M \geq 0 . \forall x \in \mathbb{R}^n . x \neq 0 . \frac{\|\mathcal{A}x\|}{\|x\|} \leq M.$$

Lahko zapišemo $\sup \frac{\|\mathcal{A}x\|}{\|x\|} = \sup_{\|x\|=1} \|\mathcal{A}x\| = \|\mathcal{A}\|$. Dobimo eno izmed norm na matrikah.

Trdimo: Naj bo $\mathcal{A} : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ linearna preslikava. Tedaj je \mathcal{A} zvezna na \mathbb{R}^n . Zveznost linearnih preslikav je ekvivalentna zveznosti v točki 0. Vse skupaj je ekvivalentno omejenosti linearnih preslikav.

Dokaz. Definicija zveznosti in omejenosti. □

Definicija 1.2.14. Naj bo $\mathcal{A} : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ linearna preslikava. Preslikavo $\mathcal{A} : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$, $x \mapsto \mathcal{A}x + b$, $b \in \mathbb{R}^m$ imenujemo *afina preslikava*.

1.3 Parcialni odvodi in diferenciacijabilnost

1.3.1 Parcialni odvod

Definicija 1.3.1. Naj bo $f : D \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ funkcija. Naj bo $a = (a_1, \dots, a_n) \in D$ notranja točka. Funkcija f je *parcialno odvedljiva po spremenljivki x_j v točki a* , če obstaja limita

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a_1, \dots, a_{j-1}, a_j + h, a_{j+1}, \dots, a_n) - f(a_1, \dots, a_n)}{h},$$

oz. če je funkcija

$$x_j \mapsto f(a_1, \dots, a_{j-1}, x_j, a_{j+1}, \dots, a_n)$$

odvedljiva v točki a_j .

Če je ta limita obstaja, je to *parcialni odvod* funkcije f po spremenljivki x_j v točki a . Oznaki: $\frac{\partial f}{\partial x_j}(a)$, $f_{x_j}(a)$, $(D_j f)(a)$.

Opomba. Vse elementarne funkcije so parcialno odvedljive po vseh spremenljivkah tam, kjer so definirane.

Zgled. Naj bo $f(x, y, z) = e^{x+2y} + \cos(xz^2)$. Izračunaj $f_x(x, y, z)$, $f_y(x, y, z)$, $f_z(x, y, z)$.

1.3.2 Diferenciacijabilnost

Definicija 1.3.2. Naj bo $f : D \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ funkcija. Naj bo $a = (a_1, \dots, a_n) \in D$ notranja točka. Funkcija f je *diferenciacijabilna v točki a* , če obstaja tak linearen funkcional $\mathcal{L} : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, da velja:

$$f(a + h) = f(a) + \mathcal{L}(h) + o(h),$$

kjer

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\|o(h)\|}{\|h\|} = 0.$$

Opomba. Če je tak \mathcal{L} obstaja, je enolično določen.

Dokaz. Pokažemo, da iz $\mathcal{L}(h) = (\mathcal{L}_1 - \mathcal{L}_2)(h) = (o_2 - o_1)(h) = o(h)$ sledi, da je $L = 0$. □

Definicija 1.3.3. Če je f diferenciacijabilna v a je \mathcal{L} natanko določen in ga imenujemo *diferencial* funkcije f v točki a . Oznaka: $\mathcal{L} = df_a$. Linearen funkcional \mathcal{L} imenujemo tudi *odvod* funkcije f v točki a . Oznaka: $(Df)(a)$.

Opomba. Recimo, da je funkcija f diferenciacijabilna v točki a . Preslikava $h \mapsto f(a) + (df_a)(h)$ je najboljše afina aproksimacija funkcije $h \rightarrow f(a + h)$.

Trditev 1.3.4. Naj bo $f : D \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ diferenciacijabilna v notranji točki $a \in D$. Tedaj je f v točki a parcialno odvedljiva po vseh spremenljivkah. Poleg tega je zvezna v točki a . Pri tem za $h = (h_1, \dots, h_n)$ velja:

$$(df_a)(h) = \frac{\partial f}{\partial x_1}(a) \cdot h_1 + \dots + \frac{\partial f}{\partial x_n}(a) \cdot h_n = f_{x_1}(a) \cdot h_1 + \dots + f_{x_n}(a) \cdot h_n$$

Opomba. Naj bo $\mathcal{L} : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ linearen funkcional, $x \in \mathbb{R}^n$, potem $\mathcal{L}(x) = l_1 x_1 + \dots + l_n x_n = \begin{bmatrix} l_1 & \dots & l_n \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$,

kjer $\begin{bmatrix} l_1 & \dots & l_n \end{bmatrix}$ matrika linearnega funkcionala glede na standardne baze.

Dokaz. Zveznost pokažemo z limito. Za parcialno odvedljivost pogledajmo kaj se dogaja za $h = (h_1, 0, \dots, 0)$. □

Opomba. Trditev pove, da je $(df_a)(h) = \begin{bmatrix} \frac{\partial f}{\partial x_1}(a) & \dots & \frac{\partial f}{\partial x_n}(a) \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} h_1 \\ \vdots \\ h_n \end{bmatrix} = (\frac{\partial f}{\partial x_1}(a), \dots, \frac{\partial f}{\partial x_n}(a)) \cdot (h_1, \dots, h_n)$.

Zapis: $(\vec{\nabla} f)(a) = (\text{grad } f)(a) = (\frac{\partial f}{\partial x_1}(a), \dots, \frac{\partial f}{\partial x_n}(a))$.

Vektor $(\text{grad } f)(a)$ imenujemo *gradient funkcije f v točki a* . Operator $\vec{\nabla} = (\frac{\partial}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial}{\partial x_n})$ je *operator Nabla*.

Zgled. Naj bo $f(x, y) = \begin{cases} \frac{2xy}{x^2+y^2}; & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0; & (x, y) = (0, 0) \end{cases}$. Ali je f diferenciacijabilna?

Zgled. Naj bo $f(x, y) = \begin{cases} \frac{2x^2y}{x^2+y^2}; & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0; & (x, y) = (0, 0) \end{cases}$. Ali je f zvezna? Ali je f parcialno odvedljiva? Ali je f diferenciablelna?

Opomba. Zgleda pokažeta, da obrat v prejšnji trditvi ne velja

Izrek 1.3.5. Naj bo $f : D \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ funkcija in naj bo $a \in D$ notranja točka. Denimo, da je f parcialno odvedljiva po vseh spremenljivkah v točki a in so parcialni odvodi zvezni v točki a . Tedaj je f diferenciablelna v točki a .

Dokaz. Za $n = 2$. Definicija diferenciablelnosti + 2-krat Lagrangeev izrek. □

1.3.3 Višji parcialni odvodi

Naj bo $f : D^{\text{odp}} \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ funkcija. Denimo, da je f parcialno odvedljiva po vseh spremenljivkah na D : f_{x_1}, \dots, f_{x_n} . To so tudi funkcije n -spremenljivk in morda so tudi te parcialno odvedljive po vseh oz. nekaterih spremenljivkah.

Trditev 1.3.6. Naj bo funkcija f definirana v okolici $a \in \mathbb{R}^n$. Naj bosta $i, j \in \{1, 2, \dots, n\}$. Denimo, da na tej okolici obstajata $\frac{\partial f}{\partial x_i}, \frac{\partial f}{\partial x_j}$ in tudi druga odvoda $\frac{\partial}{\partial x_j}(\frac{\partial f}{\partial x_i}), \frac{\partial}{\partial x_i}(\frac{\partial f}{\partial x_j})$. Če sta $\frac{\partial}{\partial x_j}(\frac{\partial f}{\partial x_i}), \frac{\partial}{\partial x_i}(\frac{\partial f}{\partial x_j})$ zvezna v a , potem sta enaka v točki a :

$$\frac{\partial}{\partial x_j} \left(\frac{\partial f}{\partial x_i} \right) (a) = \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\frac{\partial f}{\partial x_j} \right) (a).$$

Dokaz. Dovolj za $n = 2$.

Definiramo $J = f(a+h, b+k) - f(a+h, b) - f(a, b+k) + f(a, b)$ in $\varphi(x) = f(x, b+k) - f(x, b)$, $\psi(y) = f(a+h, y) - f(a, y)$. Zapišemo J s pomočjo funkcij φ, ψ ter uporabimo 2-krat Lagrangeev izrek in upoštevamo zveznost. □

Opomba. Pravimo, da parcialni odvodi komutirajo in pišemo $\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}$.

Definicija 1.3.7. Naj bo $D^{\text{odp}} \subseteq \mathbb{R}^n$. Vektorski prostor vseh k -krat zvezno parcialno odvedljivih funkcij označimo z $C^k(D)$. Prostor gladkih funkcij je $C^\infty(D) = \bigcap_{k=1}^\infty C^k(D)$. Prostor zveznih funkcij na D je $C(D)$.

Opomba. Funkcija $f \in C^k(D)$, če obstajajo vse parcialni odvodi funkcije f do reda k in so vse ti parcialni odvodi zvezni na D .

1.3.4 Diferenciablelnost preslikav

Definicija 1.3.8. Naj bo $F : D \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ preslikava, $a \in D$ notranja točka. Preslikava F je *diferenciablelna* v točki a , če obstaja taka linearna preslikava $\mathcal{L} : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$, da velja:

$$F(a+h) = F(a) + \mathcal{L}(h) + o(h),$$

kjer je $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{|o(h)|_m}{|h|_n} = 0$.

Preslikavo \mathcal{L} imenujemo *diferencial* F v točki a . Oznaka: dF_a . Imenujemo ga tudi *odvod* F v točki a . Oznaka: $(DF)(a)$.

Opomba. Kot pri funkcijah, če je tak \mathcal{L} obstaja, je enolično določen.

Zgled. Obravnavaj diferenciablelnost preslikav:

- $\mathcal{A} : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ linearna, $F(x) = \mathcal{A}x$.
- $F : \mathbb{R}^{n \times n} \rightarrow \mathbb{R}^{n \times n}$, $F(X) = X^2$. Namig: S pomočjo neenakosti CSB pokažimo, da $|H^2| \leq |H|^2$.

Izrek 1.3.9. Naj bo $a \in D$ notranja točka. Naj bo $F = (f_1, \dots, f_m) : D \rightarrow \mathbb{R}^m$ preslikava. Velja:

Preslikava F je diferenciablelna v $a \in D \Leftrightarrow$ so f_1, \dots, f_m diferenciablelne v a .

Tedaj

$$(DF)(a) = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(a) & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n}(a) \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial f_m}{\partial x_1}(a) & \dots & \frac{\partial f_m}{\partial x_n}(a) \end{bmatrix}$$

Dokaz. (\Rightarrow) Zapišemo enakost $F(a+h) = F(a) + dF_a(h) + o(h)$ po komponentah.

(\Leftarrow) Definicija diferenciablelnosti. □

Posledica 1.3.9.1. Naj bo $a \in D$ notranja točka. Naj bo $F = (f_1, \dots, f_m) : D \rightarrow \mathbb{R}^m$ preslikava. Velja: Če so vse funkcije f_1, \dots, f_m v točki a parcialno odvedljivi po vseh spremenljivkah in so ti vse odvodi zvezni v točki a , potem je F diferenciable v točki a .

Zgled. Naj bo $F(x, y, z) = (x^2 + 2y + e^z, xy + z^2)$, $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$. Določi $(DF)(1, 0, 1)$.

Opomba. Preslikava $F : D^{\text{odp}} \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ je razreda $C^k(D)$ oz. je k -krat zvezno odvedljiva, če so $f_1, \dots, f_m \in C^k(D)$.

Izrek 1.3.10 (Verižno pravilo). Naj bo $a \in D \subseteq \mathbb{R}^n$ notranja točka. Naj bo $b \in \Omega \subseteq \mathbb{R}^m$ notranja točka. Naj bo $F : D \rightarrow \Omega$ diferenciable v točki a in velja $F(a) = b$. Naj bo $G : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^k$ diferenciable v točki b . Tedaj $G \circ F$ diferenciable v točki a in velja:

$$D(G \circ F)(a) = (DG)(b) \cdot (DF)(a) = (DG)(F(a)) \cdot (DF)(a).$$

Označimo $F(x_1, \dots, x_n) = (f_1(x_1, \dots, x_n), \dots, f_m(x_1, \dots, x_n))$ in $G(y_1, \dots, y_m) = (g_1(y_1, \dots, y_m), \dots, g_k(y_1, \dots, y_m))$. Potem

$$D(G \circ F)(a) = \begin{bmatrix} \frac{\partial g_1}{\partial y_1} & \cdots & \frac{\partial g_1}{\partial y_m} \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial g_k}{\partial y_1} & \cdots & \frac{\partial g_k}{\partial y_m} \end{bmatrix} (b) \cdot \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial f_m}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial f_m}{\partial x_n} \end{bmatrix} (a)$$

Dokaz. Definicija diferenciablenosti. □

Posledica 1.3.10.1 ($k = 1$, $G = g$ funkcija). Naj bo $\Phi(x_1, \dots, x_n) = g(f_1(x_1, \dots, x_n), \dots, f_m(x_1, \dots, x_n))$. Potem

$$\frac{\partial \Phi}{\partial x_j}(a) = \frac{\partial g}{\partial y_1}(b) \cdot \frac{\partial f_1}{\partial x_j}(a) + \frac{\partial g}{\partial y_2}(b) \cdot \frac{\partial f_2}{\partial x_j}(a) + \dots + \frac{\partial g}{\partial y_m}(b) \cdot \frac{\partial f_m}{\partial x_j}(a)$$

Zgled. Naj bo $F(x, y) = (x^2 + y, xy)$, $g(u, v) = uv + v^2$. Naj bo $\Phi = g \circ F$. Izračunaj $(D\Phi)(x, y)$ na dva načina.

1.4 Izrek o implicitni funkciji

Radi bi poiskali zadostni pogoji na funkcijo $f(x, y)$, da bi enačba $f(x, y) = 0$ lokalno v okolici točki (a, b) , za katero velja $f(a, b) = 0$, predstavljala graf funkcije $y = \varphi(x)$.

Izrek 1.4.1 (Osnovna verzija izreka o implicitni funkciji). Naj bo $D^{\text{odp}} \subseteq \mathbb{R}^2$. Naj bo $(a, b) \in D$. Naj bo $f \in C^1(D)$ in naj velja:

1. $f(a, b) = 0$.
2. $f_y(a, b) \neq 0$.

Potem obstajata $\delta > 0$ in $\epsilon > 0$, da velja: $I \times J \subseteq D$, kjer je $I = (a - \delta, a + \delta)$, $J = (b - \epsilon, b + \epsilon)$ in enolično določena C^1 funkcija $\varphi : I \rightarrow J$, za katero velja:

1. $\varphi(a) = b$.
2. $\forall (x, y) \in I \times J. f(x, y) = 0 \Leftrightarrow y = \varphi(x)$ (rešitve enačbe $f(x, y) = 0$ so natanko graf funkcije φ).
3. $\varphi'(x) = -\frac{f_x(x, \varphi(x))}{f_y(x, \varphi(x))}$ za vsak $x \in I$.