Uvod v geometrijsko topologijo

3. marec 2025

Uvod

Cilj topologije Razumeti prostore in preslikave med njimi.

Preslikave
- Vedno zvezne;
- Pomembne: Homeomorfizmi, vložitve;
- Odprte ali zaprte.

Prostori
- Osnovni interes so metrični prostori;
- Različne konstrukcije dajo prostore, ki niso nujno metrični ali pa ne takoj jasno da so – zato si pomagamo s topološkimi lastnostmi.

Konstrukcije prostorov
- **Podprostor**. Naj bo $(X, \mathcal{T})$ topološki prostor in $A \subseteq X$. Potem
$$\mathcal{T}_A = \{A \cap U \mid U \in \mathcal{T}\}$$
topologija na A in $(A, \mathcal{T}_A)$ topološki prostor.
- **Vsota (oz. disjunktna unija)**. Naj bodo $\{(X_\lambda, \mathcal{T}_\lambda) \mid \lambda \in \Lambda\}$ topološki prostori in $X = \bigcup_{\lambda \in \Lambda} X_\lambda \times \{\lambda\}$. Potem
$$\mathcal{T} = \{U \subseteq X \mid \forall \lambda \in \Lambda \,.\, U \cap X_\lambda \text{ odprta v } X_\lambda\}$$
je topologija na X porojena z bazo $\bigcup_{\lambda \in \Lambda} \mathcal{T}_\lambda$.
- **Produkt**. Naj bodo $\{(X_\lambda, \mathcal{T}_\lambda) \mid \lambda \in \Lambda\}$ topološki prostori in $\prod_{\lambda \in \Lambda} X_\lambda = \{(x_\lambda)_{\lambda \in \Lambda} \mid x_\lambda \in X_\lambda\}$.
  - Na $X \times Y$ definiramo bazo
  $$\mathcal{B} = \left\{U \times V \mid U^{\text{odp}} \subseteq X,\ V^{\text{odp}} \subseteq Y\right\}.$$
  Topologija $\mathcal{T}_{A \times B}$ na množici $X \times Y$ je topologija porojena z bazo $\mathcal{B}$.

  Opomba. Baza $\mathcal{B}$ pride iz predbaze, ki je določena z pogojem, da so projekcije na faktorje zvezne.
  - Množico $\prod_{\lambda \in \Lambda} X_\lambda = \{(x_\lambda)_{\lambda \in \Lambda} \mid x_\lambda \in X_\lambda\}$ opremimo z najslabšo topologijo, glede na katero so vse projekcije
  $$\gamma_\mu : \prod_{\lambda \in \Lambda} X_\lambda \to X_\mu,\ \mu \in \Lambda$$
  zvezni.
  Predbazo sestavljajo
  $$\gamma_\mu^*(U_\mu) = U_\mu \times \prod_{\lambda \neq \mu} X_\lambda,\ \text{kjer } U_\mu^{\text{odp}} \subseteq X_\mu.$$
  Bazne množice so
  $$U_{\mu_1} \times U_{\mu_2} \times \ldots \times U_{\mu_k} \times \prod_{\lambda \neq \mu_1, \ldots, \mu_k} X_\lambda.$$
- **Kompaktifikacija z 1 točko**.
- **„Slika prostora pri zvezni preslikavi“**. Naj bo $f : X \to Y$ preslikava. Gledamo $f_*(X)$. $f_*(X)$ dobi topologijo iz Y. Problem, da topologijo na Y lahko menjamo. Hočemo jo dobiti odvisno od X.
  Družina $\{f^*(y) \mid y \in f_*(X)\}$ je **razdelitev** množice X. V tej družine so množice paroma disjunktne. Torej ta družina določa ekvivalenčno relacijo na X in obratno, vsaka ekvivalenčna relacija na X določna razdelitev na ekvivalenčne razrede.

1 Kvocientni prostori

1.1 Kvocientna topologija

Definicija. Naj bo X množica, $\sim$ ekvivalenčna relacija na X.

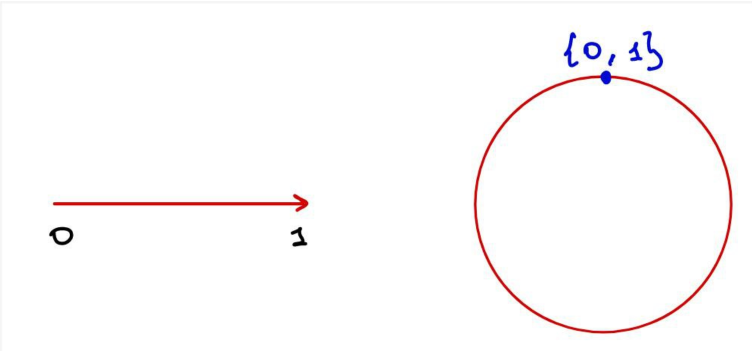
- Za poljuben $x \in X$ označimo $[x] = \{y \in X \mid y \sim x\}$ **ekvivalenčni razred**, ki pripada x.
- **Kvocientna množica** množice X po relacije $\sim$ je množica vseh ekvivalenčnih razredov $\{[x] \mid x \in X\} =: X/_\sim$.
- Preslikava $q : X \to X/_\sim$, $q(x) = [x]$ je **kvocientna projekcija**.

Opomba. Ekvivalenčni razredi predstavljamo kot točke.

Primer. Naj bo $X = [0, 1]$. Ekvivalenčna relacija $\sim$ določna z

$$0 \sim 1 \quad (1 \sim 0, \forall x \in X \,.\, x \sim x).$$

Kako si lahko predstavljamo kvocientno množico $X/_\sim$? Bodisi kot interval $[0, 1)$ bodisi kot krožnico.



Opomba.

- Pri opisu ekvivalenčne relacije bomo običajno navedli le netrivialne relacije, ki generirajo ekvivalenčno relacijo, ob upoštevanju lastnosti ekvivalenčnih relacij.
- Ekvivalenčna relacija $\sim$ na X določna razdelitev množice X na ekvivalenčne razrede. To razdelitev označimo z $\mathcal{R} = \{[x] \mid x \in X\} \subseteq P(X)$. Kvocientno množico lahko označimo z $X/_\sim = X/_\mathcal{R}$.
- Če $\sim$ določna le en netrivialen ekvivalenčni razred $A \subseteq X$, $|A| \neq 1$, potem kvocientno množico označimo z $X/_A$.

Če je X topološki prostor in $\sim$ ekvivalenčna relacija na X, želimo $X/_\sim$ opremiti z topologijo tako, da bo ta odražala lastnosti prostora X. Posebej želimo, da je kvocientna projekcija $q : X \to X/_\sim$ zvezna.
Pogoj

$$\forall V^{\text{odp}} \subseteq X/_\sim \,.\, q^*(V)^{\text{odp}} \subseteq X$$

topologije na $X/_\sim$ ne določna enolično – če neka topologija na $X/_\sim$ temu ustreza, ustreza tudi vsaka šibkejša. Zato je $X/_\sim$ smiselno opremiti z najmočnejšo topologijo, pri kateri je q zvezna. Torej za odprte množice v $X/_\sim$ vzamemo vse, ki imajo odprte praslike v X.

Definicija. Naj bo $(X, \mathcal{T})$ topološki prostor in $\sim$ ekvivalenčna relacija na X.

- **Kvocientna topologija** na $X/_\sim$ je

$$\mathcal{T}_\sim = \{V \subseteq X/_\sim \mid q^*(V) \subseteq X \text{ odprta}\}\,.$$

Trditev. $\mathcal{T}_\sim$ je topologija na $X/_\sim$.

Opomba. V kvocientni topologiji na $X/_\sim$ velja:

$$V^{\text{odp}} \subseteq X/_\sim \Leftrightarrow q^*(V)^{\text{odp}} \subseteq X.$$

($\Rightarrow$) je zveznost preslikave q;
($\Leftarrow$) je največjost $\mathcal{T}_\sim$.
Velja tudi:

$$Z^{\text{zap}} \subseteq X/_\sim \Leftrightarrow q^*(Z)^{\text{zap}} \subseteq X.$$

Primer. Ali je torej q odprta in zaprta? Ni nujno!

- Naj bo $X = [0, 1]$, $\mathcal{R} = \{[0, 1), 1\}$. Kaj je $X/_\mathcal{R}$? Ali sta $\{[0]\}$ in $\{[1]\}$ odprti? Ali je q zaprta?
- Naj bo $X = [0, 2]$, $[1, 2]$ edini netrivialni ekvivalenčni razred. Kaj je $X/_{[1,2]}$? Ali je q odprta?
- Naj bo $X = [0, 1]$, $A = X \cap \mathbb{Q}$, $B = X \setminus \mathbb{Q}$. Kaj je $X/_{\{A,B\}}$? Kaj je kvocientna topologija?

Definicija. Naj bo X množica in $\sim$ ekvivalenčna relacija.

- Za $A \subseteq X$ je njeno **nasičenje** enako

$$q^*(q_*(A)) = \bigcup \{B \in X/_\sim \mid A \cap B \neq \emptyset\}\,.$$

Trditev. Naj bo X topološki prostor, $\sim$ ekvivalenčna relacija, $A \subseteq X$. Velja:

- $q_*(A)$ je odprta/zaprta $\Leftrightarrow$ nasičenje $q^*(q_*(A))$ odprto/zaprto.
- $\forall U^{\text{odp}} \subseteq X\,.\, q^*(q_*(U))$ odprto/zaprto $\Rightarrow q$ je odprta/zaprta.

Cilj Imamo nek topološki prostor X in ekvivalenčno relacijo $\sim$. Če je to mogoče, želimo poiskati nek geometrični model Y za kvocient $X/_\sim$ in jasno pokazati, da je $X/_\sim \approx Y$.

Primer.

- Naj bo $X = \mathbb{R},\ A = \mathbb{Z}$. Kaj je $\mathbb{R}/_A$?
- Naj bo $X = [0,1],\ A = \left\{\frac{1}{n} \mid n \in \mathbb{N}\right\} \cup \{0\}$. Kaj je $\mathbb{R}/_A$? Ali je kompakten?

V obeh primerih imamo števno mnogo krožnic, spetih v eni točki. Ali sta ta prostora homeomorfna?

1.2 Kvocientne preslikave

Cilj Razumeti preslikave iz kvocientov.
Naj bo X topološki prostor, $\sim$ ekvivalenčna relacija.

$$\begin{tikzcd} X \arrow[d, "q"'] \arrow[dr, "f := g \circ q"] & \\ X/_\sim \arrow[r, "g"'] & Y \end{tikzcd}$$

Zvezna preslikava $g : X/_\sim \to Y$ določa zvezno preslikavo $f = g \circ q : X \to Y$.
Če je $x \sim y$ v X, je $[x] = q(x) = q(y) = [y]$ in zato je $f(x) = g(q(x)) = g(q(y)) = f(y)$. Torej ta f je konstantna na ekvivalenčnih razredih, tj. ekvivalentne točke slika v iste.
Želimo obratno: za preslikavo $f : X \to Y$ poiskati pogoje, da določa preslikavo iz $X/_\sim$ v Y.

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "f"] \arrow[d, "q"'] & Y \\ X/_\sim \arrow[ur, dashed, "\overline{f}"'] & \end{tikzcd}$$

Če naj diagram komutira, mora biti f konstantna na ekvivalenčnih razredih:

$$\forall x, y \in X\,.\, x \sim y \Rightarrow f(x) = f(y).$$

Če to velja, potem definiramo

$$\overline{f}([x]) := f(x).$$

$\overline{f}$ je preslikava, inducirana s f.

Trditev. Naj bo X topološki prostor, $\sim$ ekvivalenčna relacija, $f : X \to Y$ zvezna preslikava, ki je konstantna na ekvivalenčnih razredih. Potem f določa dobro definirano preslikavo

$$\overline{f} : X/_\sim \to Y,$$

za katero velja:

$$\overline{f} \circ q = f.$$

Poleg tega velja:

- Če je f zvezna, potem je tudi $\overline{f}$ zvezna.
- Če je f surjektivna, je $\overline{f}$ surjektivna.
- Če za $\forall x, y \in X\,.\, x \not\sim y \Rightarrow f(x) \neq f(y)$, potem je $\overline{f}$ injektivna, tj. f loči ekvivalenčne razrede.

Dokaz. Definicija kvocientne topologije. $\square$

Zanima nas, kdaj bo $\overline{f}$ homeomorfizem. Velja:
$\overline{f} : X/_{\sim} \to Y$ je homeomorfizem, če

- zvezna, bijektivna in inverz zvezen oz.
- bijekcija iz $X/_{\sim}$ v Y in porodi bijekcijo med topologiji na $X/_{\sim}$ in Y.

Torej NTSE

- $\overline{f}$ je homeomorfizem.
- $\overline{f}$ je bijekcija iz $X/_{\sim}$ v Y in porodi bijekcijo med odprtimi množici.
- $\overline{f}$ je bijekcija in velja:

$$\forall V \subseteq Y \,.\, V \text{ je odprta} \Leftrightarrow \overline{f}^*(V)^{\text{odp}} \subseteq X/_{\sim} \Leftrightarrow f^*(V)^{\text{odp}} = q^*(\overline{f}^*(V))^{\text{odp}} \subseteq X.$$

Definicija. Naj bosta X, Y topološka prostora in $f : X \to Y$ preslikava. Če je f surjektivna in če

$$\forall V \subseteq Y \,.\, V \text{ je odprta} \Leftrightarrow f^*(V) \subseteq X \text{ je odprta},$$

potem f imenujemo **kvocientna preslikava**.

Opomba.

- Po definiciji kvocientne topologiji, je kvocientna projekcija kvocientna preslikava.
  Obratno: vsako kvocientno preslikavo $f : X \to Y$ lahko obravnavamo kot kvocientno projekcijo pri ekvivalenčni relaciji, določeni z razbitjem X na praslike točk.
- Kvocientna preslikava je vedno zvezna, ni pa nujno odprta niti zaprta.
- Implikacija $(\Leftarrow)$ v definiciji kvocientne preslikave je posebna lastnost, tej včasih rečemo **kvocient v ožjem smislu**. Za zvezno surjekcijo je za njeno kvocientnost potrebno preveriti le ta pogoj.
- Surjektivna preslikava f je kvicientna natanko tedaj, ko

$$\forall Z \subseteq Y \,.\, Z \text{ je zaprta} \Leftrightarrow f^*(Z) \subseteq X \text{ je zaprta},$$

Lema. Naj bo $f : X \to Y$ zvezna in surjektivna. Če je f odprta ali zaprta, je kvocientna.

Dokaz. Preveriti je treba le kvocientnost v ožjem smislu. □

Izrek (O prepoznavi kvocienta)**.** Naj bosta X, Y topološka prostora in $\sim$ ekvivalenčna relacija na X. Naj bo $f : X \to Y$ kvocientna preslikava, ki naredi enake identifikacije kot $\sim$, tj. f je konstantna na ekvivalenčnih razredih in loči ekvivalenčne razrede:

$$\forall x, y \in X \,.\, x \sim y \Leftrightarrow f(x) = f(y).$$

Potem je inducirana preslikava $\overline{f} : X/_{\sim} \to Y$ homeomorfizem.