1 Fourierjeva analiza

Naj bo funkcija $f : [-\pi, \pi]$ nezvezna v končno mnogo točkah, kjer obstajata levi in desni odvod, vmes pa je med tema točkama odvedljiva. Tedaj

$$\mathrm{FV}(f)(x) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx)),$$

kjer $a_0 = \dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,dx$ ter $a_n = \dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos(nx)\,dx$ in $b_n = \dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin(nx)\,dx$.
Za vsak $x \in [-\pi, \pi]$ Fourierjeva vrsta funkcije f konvergira proti

- $f(x)$, če je f zvezna v x in
- $\frac{f(x-)+f(x+)}{2}$, če f ni zvezna v x.

Naj bo $f : [0, \pi] \to \mathbb{R}$ funkcija. Funkcijo f s predpisom $f(x) = f(-x), x < 0$ lahko razširimo do sode funkcije ter s predpisom $f(x) = -f(-x)$ do lihe. Tedaj

$$\mathrm{FV}_{\cos}(f)(x) = \mathrm{FV}(f_{\text{soda}}(x)) \quad \text{ter} \quad \mathrm{FV}_{\sin}(f)(x) = \mathrm{FV}(f_{\text{liha}}(x))$$

Parsevalova enakost:

$$\int_{-\pi}^{\pi} f^2(x)\,dx = 2\pi a_0^2 + \pi\sum_{n=1}^{\infty}(a_n^2 + b_n^2).$$

1.1 Nasveti

- Za izračun integralov z sin in cos lahko uporabljamo enakost

$$\cos(nx) + \sin(nx) = e^{inx}.$$

- Če je funkcija soda, potem $\forall n > 1 \,.\, b_n = 0$; če je funkcija liha, potem $\forall n > 0 \,.\, a_n = 0$.
- Če želimo sešteti številsko vrsto, najprej razvijemo funkcijo v vrsto, potem vzamemo vrednost v pravi točki.
- Vsak polinom v sin in cos ima končno Fourierjevo vrsto. Dobimo jo s pomočjo trigonometrije.

2 Vektorska analiza

2.1 Krivuljni integral skalarnega polja

Naj bo K krivulja z regularno parametrizacijo $\vec{r} : [a, b] \to \mathbb{R}^3,\ \vec{r} = (x, y, z)$. Tedaj

$$ds = |\dot{\vec{r}}(t)|dt = \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2}.$$

Naj bo $u : D \subseteq \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ skalarno polje. Definiramo

$$\int_K u\,ds = \int_a^b u(\vec{r}(t))|\dot{\vec{r}}(t)|dt.$$

2.2 Ploskovni integral skalarnega polja

Naj bo S ploskev z regularno paramaterizacijo $\vec{r} : \triangle = [a, b] \times [c, d] \to \mathbb{R}^3$. Tedaj

$$dS = \sqrt{EG - F^2}\, dudv$$

Naj bo $\mu : D \subseteq \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ skalarno polje. Definiramo

$$\int_S \mu\, dS = \int_\triangle \mu(\vec{r}(u, v))|\vec{r}_u \times \vec{r}_v|\, dudv.$$

- Če je $S \subseteq \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \{a\}$, potem
$$\int_S \mu\, dS = \int_\triangle \mu(x, y, a)\, dxdy,$$
kjer je $\triangle$ projekcija v xy-ravnino. Podobno za poljubno permutacijo koordinat.

2.3 Krivuljni integral vektorskega polja

Naj bo K krivulja z regularno parametrizacijo $\vec{r} : [a, b] \to \mathbb{R}^3$, $\vec{r} = (x, y, z)$.
Naj bo $\vec{f} : D \subseteq \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ vektorsko polje. Definiramo

$$\int_K \vec{f} \cdot d\vec{r} = \int_a^b (\vec{f}(\vec{r}(t)) \cdot \dot{\vec{r}}(t))\, dt.$$

- Parametrizacija krivulje določa tudi njeno orientacijo.
- **Cirkulacija** je integral vektorskega polja vzdolž sklenjene krivulje.

2.4 Ploskovni integral vektorskega polja

Naj bo S ploskev z regularno paramaterizacijo $\vec{r} : \triangle = [a, b] \times [c, d] \to \mathbb{R}^3$.
Naj bo $\vec{f} : D \subseteq \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ vektorsko polje. Definiramo

$$\int_S \vec{f} \cdot d\vec{S} = \int_S (\vec{f} \cdot \vec{n})\, dS,$$

kjer je $\vec{n}$ enotska normala. Orientacija ploskve je potem določna z smerjo normale. Za izračun uporabljamo formulo

$$\int_S \vec{f} \cdot d\vec{S} = \int_\triangle \vec{f}(\vec{r}(u, v)) \cdot (\vec{r}_u \times \vec{r}_v)\, dudv,$$

pri čemer smer $\vec{r}_u \times \vec{r}_v$ se mora ujemati s predpisano orientacijo.

- TODO: Naloga na strani 8: parametrizacija sfere.

2.5 Integralski izreki

Naj bo $\vec{f} : D \subseteq \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ vektorsko polje.

Izrek 2.1 (Stokesov izrek)**.** *Naj bo ∂S sklenjena krivulja. Tedaj*

$$\int_{\partial S} \vec{f} \cdot d\vec{r} = \iint_S \operatorname{rot} \vec{f} \cdot d\vec{S},$$

pri čemer orientacije za ∂S in S morajo biti usklajeni: Če hodimo po ∂S v smeri predpisane orientacije in je S na naši levi strani, glava določa normalo $\vec{N}$.

Izrek 2.2 (Gaussov izrek)**.** *Naj bo ∂D sklenjena ploskev. Tedaj*

$$\int_{\partial D} \vec{f} \cdot d\vec{S} = \int_D \operatorname{div} \vec{f}\, dV$$

2.6 Splošno

- Naj bo $f(\vec{r}) = \frac{1}{|\vec{r}-\vec{a}|}$ skalarno polje. $\operatorname{div}(\operatorname{grad} f) = 0$. Torej je $\operatorname{grad} f = -\frac{\vec{r}-\vec{a}}{|\vec{r}-\vec{a}|^3}$ solenoidalno polje.
- $\operatorname{rot}(\vec{r} \times \vec{a}) = -2\vec{a}$; $\operatorname{rot}(\vec{a} \times \vec{r}) = 2\vec{a}$.
- Potencial polja dobimo z unijo členov po integraciji parcialnih odvodov.
- Pri parametrizaciji lahko si pomagamo s sferični, cilindrični itn. koordinati.

3 Splošno

TODO:
- Ploščine n-kotnikov ter 2D likov. Volumne ter ploščine 3D figur.
- Integrali, vpeljava novih spremenljivk.
-