Hausdorffova mera in dimenzija
Seminar

Ruslan Urazbakhtin
Fakulteta za matematiko in fiziko
Oddelek za matematiko

1. julij 2025

1 Uvod

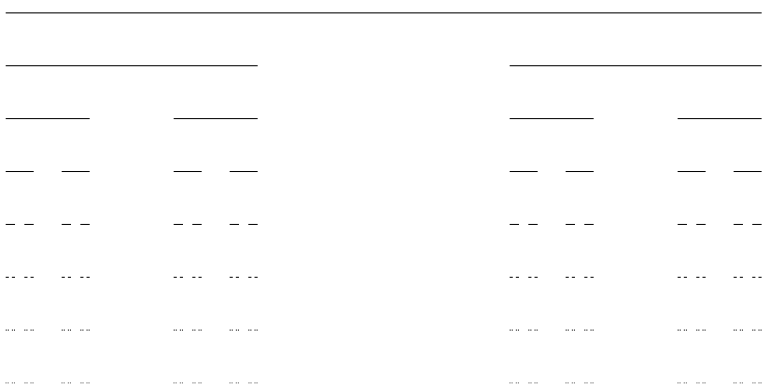
Intuitivno je dimenzija število, ki za dano množico pove, koliko prostora ta zavzema znotraj ambientnega prostora. Za običajne geometrijske objekte, kot so točke, daljice ali ploskve, se ta predstava dobro sklada z našim občutkom: točka ima dimenzijo 0, daljica 1, kvadrat 2 in kocka 3.

Vendar obstajajo množice, ki kljubujejo tem klasičnim predstavam – imenujemo jih *fraktali*. V svojem temeljnem eseju [4] je Benoit Mandelbrot fraktale definiral kot množice, katerih Hausdorffova dimenzija (s katero se bomo seznanili v nadaljevanju) je strogo večja od njihove topološke dimenzije, ki je vedno nenegativno *celo* število. Formalno si lahko topološko dimenzijo predstavljamo tako: množica ima dimenzijo $n \in \mathbb{N}_0$, če lahko v njeni notranjosti vsak del ločimo z robovi, ki so za eno dimenzijo »nižji« – na primer, ravnino, ki ima topološko dimenzijo 2, lahko ločimo z daljicami, ki imajo topološko dimenzijo 1, daljico z točkami, ki imajo topološko dimenzijo 0, itd.

Za občutek si oglejmo enega izmed najbolj znanih primerov fraktalne množice – Cantorjevo množico (slika 1). Dobimo jo tako, da z začetnega intervala $[0, 1]$ v vsakem koraku postopka odstranimo odprto srednjo tretjino vsakega preostalega intervala. S tem dobimo množico, ki nima dolžine, a vseeno vsebuje neštevno mnogo točk. Zdi se, da »zavzema več kot nič, a manj kot eno dimenzijo«, torej ima *necelo* dimenzijo med 0 in 1 – in ta pojav želimo matematično razumeti.

Naravno se pojavi vprašanje: kako definirati dimenzijo za takšne množice, ki ne sodijo v klasične kategorije?

V tej nalogi bomo odgovorili prav na to vprašanje. Naše izhodišče bo formalna definicija Hausdorffove dimenzije, ki jo bomo skrbno razvili in ute-



Slika 1: Cantorjeva množica.

meljili. Nato bomo raziskali njene osnovne lastnosti in pokazali, zakaj gre za naravno posplošitev običajnega pojma dimenzije. Med drugim bomo izračunali dimenzijo Cantorjeve množice in za res pokazali, da ima necelo dimenzijo, ki je strogo večja od 0.

Večina vsebine v tem članku je povzeta po knjigi *Fractal Geometry: Mathematical Foundations and Applications* avtorja Kennetha Falconerja [1], ki predstavlja temeljni vir za razumevanje Hausdorffove mere, fraktalnih dimenzij ter povezanih konceptov.

2 Teorija mere

Če želimo govoriti o fraktalni dimenziji, moramo najprej razumeti pojem mere. Za naš namen pa bo dovolj, da se seznanimo le z osnovnimi idejami tega področja.

Zgledi za mero so dolžina podmnožic v $\mathbb{R}$, ploščina ravninskih likov in prostornina teles v prostoru. Ta pojem želimo posplošiti na poljubne merljive prostore.

Definicija 2.1. *Naj bo X množica. Družino podmnožic $\mathcal{A}$ množice X imenujemo* σ-algebra na X*, če ima naslednje tri lastnosti:*

1. $X \in \mathcal{A}$*;*
2. *za vsako podmnožico $S \in \mathcal{A}$ je tudi $S^c \in \mathcal{A}$;*
3. *za vsako števno družino $(A_i)_{i\in\mathbb{N}}$ elementov iz $\mathcal{A}$ velja, da je tudi njihova unija $\bigcup_{i\in\mathbb{N}} A_i$ element $\mathcal{A}$.*

Elemente družine $\mathcal{A}$ imenujemo merljive množice*. Množico X, opremljeno z družino $\mathcal{A}$, pa imenujemo* merljiv prostor*.*

Opomba 2.2. *Enostavno je videti, da za vsako σ-algebro $\mathcal{A}$ na X velja $\emptyset \in \mathcal{A}$ ter da je zaprta tudi za števne preseke.*

Izkaže se, da je presek družine σ-algeber na množici X spet σ-algebra na X. Zato lahko definiramo:

Definicija 2.3. *Naj bo X topološki prostor in $\mathcal{O}$ družina vseh odprtih podmnožic v X. Presek vseh σ-algeber, ki vsebujejo $\mathcal{O}$, imenujemo* Borelova σ-algebra, *njene elemente pa* Borelove množice. *Označili jo bomo z $\mathcal{B}(X)$.*

Opomba 2.4. *Borelova σ-algebra je najmanjša σ-algebra, ki vsebuje vse odprte in vse zaprte podmnožice X.*

Zdaj lahko definiramo mero

Definicija 2.5. Mera *na merljivem prostoru $(X, \mathcal{A})$ je funkcija*

$$\mu : \mathcal{A} \to [0, \infty],$$

ki zadošča naslednjima pogojema

1. $\mu(\emptyset) = 0$ *in*

2. $\mu \left(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n \right) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n)$ *za vsako števno družino disjunktnih množic* $A_n \in \mathcal{A}$.

Drugemu pogoju pravimo števna aditivnost.

Izredno pomembno orodje za konstruiranje mer na splošnih množicah je pojem zunanje mere. V nadaljevanju bomo tako Lebesgueovo kot Hausdorffovo mero definirali s pomočjo njunih zunanjih mer.

Definicija 2.6. Zunanja mera *na množici X je preslikava*

$$\mu^* : \mathcal{P}(X) \to [0, \infty],$$

ki zadošča naslednjim trem pogojem:

1. $\mu^*(\emptyset) = 0$;

2. $\mu^*(A) \leq \mu^*(B)$, *če je* $A \subseteq B$;

3. $\mu^*(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \mu^*(A_n)$ *za vsako števno družino množic* $A_n \subseteq X$.

Tretjemu pogoju pravimo števna subaditivnost.

Navedemo trditev, ki nam bo koristila pri konstrukciji Hausdorffove mere. Dokaz trditve je mogoče najti v [3, stran 20].

Trditev 2.7. *Naj bo $\mathcal{S}$ družina podmnožic množice X, ki vsebuje $\emptyset$ in X. Naj bo $\mu : \mathcal{S} \to [0, \infty]$ preslikava, za katero velja $\mu(\emptyset) = 0$. Za vsako podmnožico $A \subseteq X$ definiramo*

$$\mu^*(A) = \inf \left\{ \sum_{i=1}^{\infty} \mu(A_i) \mid A_i \in \mathcal{S} \wedge A \subseteq \bigcup_{i \in \mathbb{N}} A_i \right\}.$$

Potem μ^* je zunanja mera na X.

2.1 Lebesgueova mera

Lebesgueova mera je posplošitev klasičnih pojmov, kot so dolžina, ploščina in prostornina, na mnogo širši razred množic.

Natančna konstrukcija Lebesgueove mere presega okvir tega besedila in jo lahko najdemo v [3, poglavje 1]. Tukaj pa bomo predstavili osnovno idejo in rezultat, ki ga bomo uporabljali v nadaljevanju.

Definicija 2.8. *Za vsak interval $I = (a, b) \subseteq \mathbb{R}$ definiramo $l(I) := b - a$.* Lebesgueova zunanja mera *je preslikava $\mathcal{L}_* : \mathcal{P}(\mathbb{R}) \to [0, \infty]$ s predpisom*

$$\mathcal{L}_*(A) = \inf \left\{ \sum_{i=1}^{\infty} l(I_i) \mid A \subseteq \bigcup_{i \in \mathbb{N}} I_i \right\},$$

kjer je $(I_i)_{i \in \mathbb{N}}$ števna družina odprtih intervalov v $\mathbb{R}$.

To definicijo lahko naravno posplošimo tudi na višje dimenzije. Za vsak kvader $K = I_1 \times \cdots \times I_n \subseteq \mathbb{R}^n$ z $\mathrm{vol}(K) = l(I_1) \cdot \dots \cdot l(I_n)$ definiramo njegovo prostornino.

Definicija 2.9. *Naj bo $n \in \mathbb{N}$.* Lebesgueova zunanja n-dimenzionalna mera *je preslikava $\mathcal{L}^n_* : \mathcal{P}(\mathbb{R}^n) \to [0, \infty]$ s predpisom*

$$\mathcal{L}^n_*(A) = \inf \left\{ \sum_{i=1}^{\infty} \mathrm{vol}(K_i) \mid A \subseteq \bigcup_{i \in \mathbb{N}} K_i \right\},$$

kjer je $(K_i)_{i \in \mathbb{N}}$ števna družina odprtih kvadrov v $\mathbb{R}^n$.

Trditev 2.10. *Zožitev Lebesgueve zunanje n-dimenzionalne mere na Borelovo σ-algebro*

$$\mathcal{L}^n := \mathcal{L}^n_*|_{\mathcal{B}(\mathbb{R}^n)}$$

je mera na merljivem prostoru $(\mathbb{R}^n, \mathcal{B}(\mathbb{R}^n))$.

Zgled 2.11. *Cantorjeva množica je merljiva, saj je zaprta. Zato lahko govorimo o njeni dolžini.*

Izkaže se, da je dolžina Cantorjeve množice enaka nič, torej $\mathcal{L}^1(C) = 0$.

Cantorjeva množica nima dolžine, vendar pa vsebuje neštevno mnogo točk. Lahko se vprašamo: ali ji lahko pripišemo takšno smiselno dimenzijo, v kateri bo njena »velikost« končno, pozitivno število? In kaj nam ta dimenzija sploh pove o naravi Cantorjeve množice? S tem vprašanjem se bomo ukvarjali v nadaljevanju.

3 Hausdorffova dimenzija

Hausdorffova dimenzija je najstarejši in matematično najosnovnejši poskus formalizacije dimenzije. Njena moč izhaja iz dejstva, da temelji na zunanji meri, kar omogoča natančno in splošno definicijo.

3.1 Konstrukcija Hausdorffove mere

Začnemo z konstrukcijo Hausdorffove mere.

Definicija 3.1. *Naj bo* (X, d) *metrični prostor. Zunanja mera* μ^* *na* X *je* metrična zunanja mera, *če*

$$\mu^*(A \cup B) = \mu^*(A) + \mu^*(B),$$

za vsaki množici $A, B \subseteq X$, *za kateri velja* $d(A, B) > 0$.

Dokaz naslednje trditve lahko najdemo v [2, stran 349].

Trditev 3.2. *Naj bo* (X, d) *metrični prostor. Če je* μ^* *metrična zunanja mera na* X, *potem je njena zožitev na Borelovo* σ*-algebro* $\mu = \mu^*|_{\mathcal{B}(\mathcal{X})}$ *mera na merljivem prostoru* $(X, \mathcal{B}(X))$.

Zdaj lahko definiramo Hausdorffovo zunanjo mero.

Definicija 3.3. *Naj bo* (X, d) *metrični prostor,* $p \geq 0$ *in* $\delta > 0$. *Za vsako podmnožico* $A \subseteq X$ *definiramo*

$$H^p_\delta(A) = \inf \left\{ \sum_{i=1}^{\infty} (\operatorname{diam} A_i)^p \mid A_i \subseteq X,\ A \subseteq \bigcup_{i \in \mathbb{N}} A_i,\ \operatorname{diam} A_i \leq \delta \right\},$$

kjer je

$$\operatorname{diam} A_i = \sup \{ d(a, b) \mid a, b \in A_i \}$$

premer množice A_i.

Limiti

$$\mathcal{H}^p(A) = \lim_{\delta\to 0} H^p_\delta(A)$$

pravimo p-dimenzionalna Hausdorffova zunanja mera množice A.

Pokritje množice A z množicami premera največ δ imenujemo δ-pokritje množice A.

Opomba 3.4. *Ker se množica dovoljenih δ-pokritij množice A z zmanjševanjem δ oži, je funkcija $H^p_\delta(A)$ naraščajoča. Zato limita $\lim_{\delta\to 0} H^p_\delta(A)$ vedno obstaja (lahko je končna ali enaka ∞).*

Opomba 3.5. *Po dogovoru je* $\inf\emptyset = \infty$.

Opomba 3.6. *V definiciji so $A_i \subseteq X$ poljubne. Enak rezultat lahko dobimo, če se omejimo le na zaprte podmnožice, saj velja $\operatorname{diam} A_i = \operatorname{diam} \overline{A_i}$, ali pa le na odprte podmnožice, saj lahko vsako množico A_i nadomestimo z množico $U_i = \left\{x \in X \mid d(x, A_i) < \frac{\varepsilon}{2^{i+1}}\right\}$, ki ima premer kvečjemu $(\operatorname{diam} A_i) + \frac{\varepsilon}{2^i}$.*

Dokažimo osnovno lastnost $\mathcal{H}_p$.

Trditev 3.7. *Naj bo (X, d) metrični prostor. $\mathcal{H}_p$ je metrična zunanja mera.*

Dokaz. Po trditvi 2.7 sledi, da je H^p_δ zunanja mera na X. Ker je limita monotona, sledi tudi, da je $\mathcal{H}^p$ zunanja mera na X.

Naj bo $A, B \subseteq X$ množici, za kateri velja $d(A, B) > 0$. Izberimo tak $\delta > 0$, da velja $\delta < d(A, B)$. Naj bo $(C_i)_{i\in\mathbb{N}}$ družina podmnožic X, ki je δ-pokritje množice $A \cup B$. Ker je $\operatorname{diam} C_i < d(A, B)$ za vsak $i \in \mathbb{N}$, nobena množica C_i ne seka hkrati množice A in množice B. Razdelimo vsoto $\sum_{i=1}^{\infty}(\operatorname{diam} C_i)^p$ na dva dela:

- $\displaystyle\sum_{C_i\cap B=\emptyset}(\operatorname{diam} C_i)^p$ in
- $\displaystyle\sum_{C_i\cap A=\emptyset}(\operatorname{diam} C_i)^p$.

Po definiciji infimuma velja

$$\sum_{i=1}^{\infty}(\operatorname{diam} C_i)^p \geq \sum_{C_i\cap B=\emptyset}(\operatorname{diam} C_i)^p + \sum_{C_i\cap A=\emptyset}(\operatorname{diam} C_i)^p \geq H^p_\delta(A) + H^p_\delta(B).$$

Ker je bilo pokritje $(C_i)_{i\in\mathbb{N}}$ poljubno, sledi, da $H^p_\delta(A) + H^p_\delta(B)$ spodnja meja za množico dolžin vseh δ-pokritij množice $A\cup B$. Zato po definiciji infimuma velja, da

$$H^p_\delta(A \cup B) \geq H^p_\delta(A) + H^p_\delta(B).$$

V limiti $\delta \to 0$ dobimo:

$$\mathcal{H}^p(A \cup B) \geq \mathcal{H}^p(A) + \mathcal{H}^p(B).$$

Po definiciji zunanje mere, ki je subaditivna, pa velja tudi:

$$\mathcal{H}^p(A \cup B) \leq \mathcal{H}^p(A) + \mathcal{H}^p(B).$$

Iz obeh neenakosti sledi enakost, torej $\mathcal{H}^p$ zadošča pogoju metrike. □

Direktna posledica trditev 3.2 in 3.7 je

Posledica 3.8. *Naj bo (X, d) metrični prostor. Zožitev Hausdorffove zunanje p-dimenzionalne mere na Borelovo σ-algebro*

$$\mathcal{H}^p := \mathcal{H}^p|_{\mathcal{B}(X)}$$

je mera na merljivem prostoru $(X, \mathcal{B}(X))$.

Brez dokaza navedemo še trditev, ki povezuje $\mathcal{L}^n$ in $\mathcal{H}^p$. Dokaz lahko najdemo v [2, stran 351].

Trditev 3.9. *Naj bo $n \in \mathbb{N}$. Obstaja konstanta $c_n > 0$, da je $c_n\mathcal{H}^n$ Lebesgueova mera na merljivem prostoru $(\mathbb{R}^n, \mathcal{B}(\mathbb{R}^n))$.*

Opomba 3.10. *Konstanta c_n je volumen n-dimenzionalne krogle, tj.*

$$c_n = \frac{\pi^{n/2}}{2^n\Gamma(\frac{n}{2}+1)}.$$

V nadaljevanju bomo za metrični prostor (X, d) privzeli navaden evklidski prostor $(\mathbb{R}^n, d_2)$.

3.2 Lastnosti Hausdorffove mere

V tem razdelku bomo našteli in dokazali nekatere geometrijske lastnosti Hausdorffove mere, ki jih lahko prenesemo tudi na Hausdorffovo dimenzijo.

3.2.1 Lastnosti skaliranja

Lastnosti skaliranja so temeljne za razumevanje fraktalnih struktur, saj fraktali po svoji naravi izkazujejo samopodobnost.

Naj bo $P : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ *podobnostna preslikava* s podobnostnim koeficientom $\lambda > 0$, tj. preslikava, za katero velja

$$\forall x, y \in \mathbb{R}^n \,.\, |P(x) - P(y)| = c|x - y|.$$

Intuitivno je jasno, da če raztegnemo daljico λ-krat, se njena dolžina poveča λ-krat, torej

$$\mathcal{L}^1(P(A)) = \lambda \mathcal{L}^1(A),$$

če povečamo stranico kvadrata za faktor λ, se njegova ploščina poveča za faktor λ^2, torej

$$\mathcal{L}^2(P(A)) = \lambda^2 \mathcal{L}^2(A)$$

in tako naprej za višje dimenzije.

Naravno se pojavi vprašanje: ali podobna lastnost velja tudi za Hausdorffovo mero? Odgovor nam da naslednja trditev.

Trditev 3.11. *Naj bo $P : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ podobnostna preslikava s podobnostnim koeficientom $\lambda > 0$ in $A \subseteq \mathbb{R}^n$, $p \geq 0$. Tedaj velja:*

$$\mathcal{H}^p(P(A)) = \lambda^p \mathcal{H}^p(A).$$

Dokaz. Naj bo $(A_i)_{i\in\mathbb{N}}$ δ-pokritje množice A. Tedaj je $(P(A_i))_{i\in\mathbb{N}}$ $\lambda\delta$-pokritje množice $P(A)$, saj velja $\operatorname{diam}(P(A_i)) = \lambda \operatorname{diam}(A_i)$. Torej:

$$\sum_{i=1}^{\infty} (\operatorname{diam} P(A_i))^p = \sum_{i=1}^{\infty} (\lambda \operatorname{diam} A_i)^p = \lambda^p \sum_{i=1}^{\infty} (\operatorname{diam} A_i)^p.$$

Po definiciji infimuma velja

$$H^p_{\lambda\delta}(P(A)) \leq \lambda^p \sum_{i=1}^{\infty} (\operatorname{diam} A_i)^p.$$

Ker je $(A_i)_{i\in\mathbb{N}}$ bilo poljubno δ-pokritje množice A, dobimo:

$$H^p_{\lambda\delta}(P(A)) \leq \lambda^p H^p_{\delta}(A).$$

V limiti $\delta \to 0$ dobimo:

$$\mathcal{H}^p(P(A)) \leq \lambda^p \mathcal{H}^p(A).$$

Za obratno neenakost uporabimo enak argument na preslikavi P^{-1}, ki je tudi podobnostna preslikava s koeficientom $1/\lambda$, in na množici $P(A)$. Dobimo:

$$\mathcal{H}^p(A) \leq (1/\lambda)^p \mathcal{H}^p(P(A)) \implies \mathcal{H}^p(P(A)) \geq \lambda^p \mathcal{H}^p(A).$$

Skupaj s prvo neenakostjo sledi enakost. $\square$

Navedemo eno pomembno posledico

Posledica 3.12. *Naj bo $P : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ izometrija, tj. preslikava, za katero velja*

$$\forall x, y \in \mathbb{R}^n \,.\, |P(x) - P(y)| = |x - y|$$

in $A \subseteq \mathbb{R}^n$, $p \geq 0$. Tedaj velja:

$$\mathcal{H}^p(P(A)) = \mathcal{H}^p(A).$$

Primeri izometrij so rotacije, translacije, zrcaljenja ipd. Posledica pove, da je $\mathcal{H}^p$ invariantna glede na rotacije, translacije in zrcaljenja, kar je pričakovano.

3.2.2 Transformacijske lastnosti

Še en zanimiv razred preslikav so *Höldorjeve preslikave* stopnje $\alpha > 0$, to so preslikave $f : X \subseteq \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$, za katere velja

$$\exists c > 0 \,.\, \forall x, y \in X \,.\, |f(x) - f(y)| \leq c|x - y|^\alpha.$$

V posebnem primeru, ko je $\alpha = 1$, pravimo, da je preslikava f *Lipschitzeva.*

Z istim argumentom kot prej lahko dokažemo naslednjo trditev

Trditev 3.13. *Naj bo $X \subseteq \mathbb{R}^m$, $A \subseteq X$ in $f : X \to \mathbb{R}^n$ Höldorjeva preslikava stopnje $\alpha > 0$ s konstanto $c > 0$. Potem za vsak $p \geq 0$ velja:*

$$\mathcal{H}^{p/\alpha}(f(A)) \leq c^{p/\alpha}\mathcal{H}^p(F).$$

Direktna posledica te trditve je

Posledica 3.14. *Naj bo $X \subseteq \mathbb{R}^m$, $A \subseteq X$ in $f : X \to \mathbb{R}^n$ Lipschitzeva preslikava s konstanto $c > 0$. Potem za vsak $p \geq 0$ velja:*

$$\mathcal{H}^p(f(A)) \leq c^p\mathcal{H}^p(A).$$

Zdaj smo pripravili vsa potrebna orodja za definicijo Hausdorffove dimenzije in za preučevanje njenih lastnosti.

3.3 Hausdorffova dimenzija

V tem razdelku bomo definirali Hausdorffovo dimenzijo množice.

Naj bo $A \subseteq \mathbb{R}^n$. Definiramo funkcijo $\mathcal{H}_A : [0, \infty) \to [0, \infty]$ s predpisom

$$\mathcal{H}_A(p) = \mathcal{H}^p(A).$$

Lema 3.15. *Naj bo $A \subseteq \mathbb{R}^n$. Če je $\mathcal{H}^p(A) < \infty$, potem je $\mathcal{H}^t(A) = 0$ za vse $t > p$.*

Dokaz. Naj bo $\varepsilon > 0$. Naj bo $\delta > 0$ in $(A_i)_{i\in\mathbb{N}}$ δ-pokritje množice A. Tedaj po definiciji infimuma velja

$$H_\delta^{p+\varepsilon}(A) \leq \sum_{i=1}^{\infty}(\operatorname{diam} A_i)^{p+\varepsilon} = \sum_{i=1}^{\infty}(\operatorname{diam} A_i)^{p}(\operatorname{diam} A_i)^{\varepsilon} \leq \delta^\varepsilon \sum_{i=1}^{\infty}(\operatorname{diam} A_i)^{p},$$

torej

$$H_\delta^{p+\varepsilon}(A) \leq \delta^\varepsilon \sum_{i=1}^{\infty}(\operatorname{diam} A_i)^{p}.$$

Ker je $(A_i)_{i\in\mathbb{N}}$ bilo poljubno δ-pokritje množice A, dobimo:

$$H_\delta^{p+\varepsilon}(A) \leq \delta^\varepsilon H_\delta^{p}(A).$$

Ker je $\mathcal{H}^p(A) < \infty$, v limiti $\delta \to 0$ dobimo:

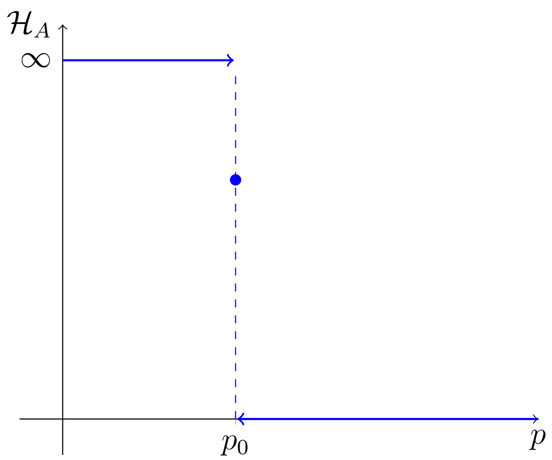
$$\mathcal{H}^{p+\varepsilon}(A) \leq 0.$$

Ker je $\mathcal{H}_A$ nenegativna funkcija, sledi

$$\mathcal{H}^{p+\varepsilon}(A) = 0$$

za vsak $\varepsilon > 0$. ☐

Sedaj si lahko ogledamo graf funkcije $\mathcal{H}_A$



Vidimo, da obstaja kritična točka $p_0 \in [0, \infty)$, pri kateri vrednost funkcije $\mathcal{H}^p$ »skoči« z ∞ na 0. Zato definiramo

Definicija 3.16. Hausdorffova dimenzija množice $A \subseteq \mathbb{R}^n$ *je*

$$\dim_H A = \inf\{p \geq 0 \mid \mathcal{H}^p(A) = 0\} = \sup\{p \geq 0 \mid \mathcal{H}^p(A) = \infty\}.$$

Opomba 3.17. *Po dogovoru je* $\sup \emptyset = 0$.

Zgled 3.18. *Naj bo* $B^n = B(x,r) = \{y \in \mathbb{R}^n \mid d(x,y) < r\}$ *odprta* n*-dim krogla s središčem v* $x \in \mathbb{R}^n$ *in polmerom* $r > 0$. *Po trditvi 3.9 sledi, da velja*

$$\mathcal{H}^n(B^n) = \frac{1}{c_n}\mathcal{L}^n(B^n) = \frac{1}{c_n}\operatorname{vol}(B^n).$$

Torej je

$$0 < \mathcal{H}^n(B^n) < \infty$$

in

$$\dim_H B^n = n.$$

Isti sklep velja tudi za zaprto kroglo $\overline{B}^n \subseteq \mathbb{R}^n$, *tj.*

$$\dim_H \overline{B}^n = n.$$

Opomba 3.19. *Obstajajo tudi druge ekvivalentne definicije Hausdorffove dimenzije, ki jih lahko najdemo v [1].*

3.4 Lastnosti Hausdorffove dimenzije

Sedaj, ko smo definirali Hausdorffovo dimenzijo, lahko nadaljujemo z obravnavo njenih pomembnih geometričnih in topoloških lastnosti ter vpliva na strukturo množic.

Začnimo z lastnostmi, ki pokažejo, da je Hausdorffova dimenzija res naravna posplošitev običajnega pojma dimenzije.

3.4.1 Splošne lastnosti

Naslednja trditev je direktna posledica monotonosti Hausdorffove zunanje mere

Trditev 3.20 (Monotonost)**.** *Hausdorffova dimenzija je monotona, tj.*

$$\forall A, B \subseteq \mathbb{R}^n \,.\, A \subseteq B \implies \dim_H A \leq \dim_H B$$

Trditev 3.21 (Števna stabilnost)**.** *Naj bo* $(A_i)_{i\in\mathbb{N}}$ *družina podmnožic* $\mathbb{R}^n$. *Tedaj velja*

$$\dim_H \bigcup_{i\in\mathbb{N}} A_i = \sup\{\dim_H A_i \mid i \in \mathbb{N}\}.$$

Dokaz. Označimo z $s = \sup\{\dim_H A_i \mid i \in \mathbb{N}\}$.

Ker je $A_i \subseteq \bigcup_{i\in\mathbb{N}} A_i$ za vsak $i \in \mathbb{N}$ in je po trditvi 3.20 Hausdorffova dimenzija monotona, sledi, da

$$\dim_H F_i \leq \dim_H \bigcup_{i\in\mathbb{N}} A_i$$

za vsak $i \in \mathbb{N}$. Po definiciji supremuma velja:

$$s \leq \dim_H \bigcup_{i\in\mathbb{N}} A_i.$$

Naj bo $\varepsilon > 0$. Po definiciji supremuma velja, da $\dim_H A_i < s + \epsilon$ za vsak $i \in \mathbb{N}$. Torej

$$\mathcal{H}^{s+\varepsilon}(A_i) = 0$$

za vsak $i \in \mathbb{N}$. Ker je Hausdorffova zunanja mera subaditivna, sledi, da

$$\mathcal{H}^{s+\varepsilon}\left(\bigcup_{i\in\mathbb{N}} A_i\right) \leq \sum_{i=1}^{\infty} \mathcal{H}^{s+\varepsilon}(A_i) = 0.$$

V limiti $\varepsilon \to 0$ dobimo:

$$\mathcal{H}^{s}\left(\bigcup_{i\in\mathbb{N}} A_i\right) \leq 0.$$

Torej

$$\dim_H \bigcup_{i\in\mathbb{N}} A_i \leq s.$$

Skupaj s prvo neenakostjo sledi enakost. □

Posledica 3.22. *Hausdorffova dimenzija* $\mathbb{R}^n$ *je*

$$\dim_H \mathbb{R}^n = n.$$

Dokaz. Ker je prostor $\mathbb{R}^n$ 2-števen, obstaja števno pokritje $(B_i^n)_{i\in\mathbb{N}}$ množice $\mathbb{R}^n$ z odprtimi krogli. Po trditvi 3.21 in zgledu 3.18 sledi, da

$$\dim_H \mathbb{R}^n \leq n.$$

Ker pa velja $B^n(0,1) \subseteq \mathbb{R}^n$ in je po trditvi 3.20 Hausdorffova dimenzija monotona, sledi tudi obratna neenakost:

$$\dim_H \mathbb{R}^n \geq \dim_H B^n(0,1) = n.$$

Torej je $\dim_H \mathbb{R}^n = n$. □

Trditev 3.23 (Dimenzija števnih množic)**.** *Naj bo $A \subseteq \mathbb{R}^n$. Če je A števna, potem*

$$\dim_H A = 0.$$

Dokaz. Ker je A števna množica, lahko jo zapišemo v obliki

$$A = \{a_1, a_2, a_3, \ldots\}.$$

Definiramo $A_i = \{a_i\}$ za vsak $i \in \mathbb{N}$. Tedaj velja

$$A = \bigcup_{i \in \mathbb{N}} A_i.$$

Ker je $0 < \mathcal{H}^0(A_i) = 1 < \infty$ sledi, da

$$\dim_H A_i = 0$$

za vsak $i \in \mathbb{N}$. Po trditvi 3.21 velja

$$\dim_H A = \dim_H \bigcup_{i \in \mathbb{N}} A_i = \sup\{\dim_H A_i \mid i \in \mathbb{N}\} = 0.$$

□

Zgled 3.24. *Hausdorffova dimenzija $\mathbb{Q} \subseteq \mathbb{R}$ je 0, saj je $\mathbb{Q}$ števna množica.*

Trditev 3.25 (Dimenzija odprtih množic)**.** *Naj bo $U \subseteq \mathbb{R}^n$. Če je U odprta in neprazna, potem*

$$\dim_H U = n.$$

Dokaz. Ker je U odprta in neprazna, vsebuje neko odprto n-dimenzionalno kroglo, po drugi strani pa je vsebovana v $\mathbb{R}^n$. Trditev sledi. □

Ideje dokaza naslednje trditve lahko najdemo v [1, stran 32] in [2, stran 351].

Trditev 3.26 (Dimenzija gladkih množic)**.** *Naj bo $M \subseteq \mathbb{R}^n$. Če je M gladka (tj. C^∞) podmnogoterost dimenzije m, potem*

$$\dim_H M = m.$$

Posebej

- *Če je M gladka krivulja, potem* $\dim_H M = 1$.
- *Če je M gladka ploskev, potem* $\dim_H M = 2$.

3.4.2 Transformacijske lastnosti

Pri proučevanju Hausdorffove dimenzije se naravno zastavi vprašanje, kako se ta obnaša pri različnih transformacijah. Na primer: ali se dimenzija ohranja pri Lipschitzevih ali gladkih preslikavah? Takšna vprašanja so pomembna, saj nam transformacijske lastnosti pogosto omogočajo, da iz znane dimenzije neke množice sklepamo o dimenziji njene slike.

Trditev 3.27. *Naj bo $X \subseteq \mathbb{R}^m$, $A \subseteq X$ in $f : X \to \mathbb{R}^n$ Höldorjeva preslikava stopnje $\alpha > 0$ s konstanto $c > 0$. Tedaj velja*

$$\dim_H f(A) \leq \frac{1}{\alpha} \dim_H A.$$

Dokaz. Označimo z $s := \dim_H A$. Naj bo $\varepsilon > 0$. Po trditvi 3.13 velja

$$\mathcal{H}^{(s+\varepsilon)/\alpha}(f(A)) \leq c^{(s+\varepsilon)/\alpha}\mathcal{H}^{s+\varepsilon}(A) = 0.$$

V limiti $\varepsilon \to 0$ dobimo

$$\mathcal{H}^{s/\alpha}(f(A)) \leq 0,$$

torej

$$\dim_H f(A) \leq \frac{1}{\alpha} \dim_H A.$$

□

V primeru Lipschitzevih preslikav (kjer je $\alpha = 1$) dobimo naslednjo pomembno posledico.

Posledica 3.28. *Naj bo $X \subseteq \mathbb{R}^m$, $A \subseteq X$ in $f : X \to \mathbb{R}^n$ Lipschitzeva preslikava s konstanto $c > 0$. Tedaj velja*

$$\dim_H f(A) \leq \dim_H A.$$

Poseben primer Lipschitzevih preslikav so bi-Lipschitzeve preslikave. V tem primeru se Hausdorffova dimenzija ne spremeni.

Izrek 3.29. *Naj bo $X \subseteq \mathbb{R}^m$, $A \subseteq X$ in $f : X \to \mathbb{R}^n$ bi-Lipschitzeva preslikava, tj. preslikava $f : X \to \mathbb{R}^n$, za katero velja:*

$$\exists c_1, c_2 > 0 \,.\, \forall x, y \in X \,.\, c_1|x-y| \leq |f(x) - f(y)| \leq c_2|x-y|.$$

Tedaj velja

$$\dim_H f(A) = \dim_H A.$$

Dokaz. Ker je f injektivna, je njena zožitev $f : X \to f(X)$ bijektivna z Lipschitzevim inverzom $f^{-1} : f(X) \to X$ s konstanto $1/c_1$. Po posledici 3.28 imamo

$$\dim_H f(A) \leq \dim_H A$$

in

$$\dim_H A = \dim_H f^{-1} f(A) \leq \dim_H f(A).$$

Skupaj s prvo neenakostjo sledi enakost. $\square$

Izrek pove, da je Hausdorffova dimenzija invariantna glede na bi-Lipschitzeve preslikave. To pomeni, da so bi-Lipschitzeve transformacije »dimenzijsko ohranjajoče«. Če imata dve množici različno Hausdorffovo dimenzijo, potem med njima ne more obstajati bi-Lipschitzeva preslikava.

3.4.3 Topološke lastnosti

Hausdorffova dimenzija ima tudi zanimivo povezavo s topologijo. Naslednji rezultat kaže, da dovolj »majhne« množice (v smislu dimenzije) ne morejo biti povezane.

Trditev 3.30. *Naj bo $A \subseteq \mathbb{R}^n$. Če je $\dim_H A < 1$, potem je A popolnoma nepovezana, torej so njene komponente za povezanost enojci.*

Dokaz. Naj bosta $x, y \in A$, $x \neq y$. Definiramo preslikavo $f : A \to [0, \infty)$ s predpisom

$$f(z) = |z - x|.$$

Preslikava f je Lipschitzeva, saj za vse $z, w \in A$ velja:

$$|f(z) - f(w)| = ||z - x| - |w - x|| \leq |z - w|.$$

Po posledici 3.28 sledi:

$$\dim_H f(A) \leq \dim_H A < 1.$$

Znano pa je (trditev 3.25), da vsaka neprazna odprta množica v $\mathbb{R}$ ima Hausdorffovo dimenzijo 1, zato $f(A)$ ne vsebuje nobene neprazne odprte podmnožice, saj je $\dim_H$ monotona. Torej je $f(A)^c$ gosta v $\mathbb{R}$.

Ker je $0 < f(y)$, obstaja $r \in (0, f(y))$, da $r \notin f(A)$. Definiramo množici:

$$U := \{z \in A \mid f(z) < r\}, \quad V := \{z \in A \mid f(z) > r\}.$$

Množici U in V sta odprti v podprostoru A (kot prasliki odprtih množic v $[0, \infty)$, disjunktni in pokrivata cel A, saj $r \notin f(A)$. Poleg tega velja $x \in U$ (ker je $f(x) = 0 < r$) in $y \in V$ (ker je $f(y) > r$). Torej x in y ležita v različnih komponentah za povezanost množice A.

Ker sta bili x in y poljubno izbrani različni točki, sledi, da je vsaka komponenta množice A enojec. $\square$

3.5 Primeri računanja Hausdorffove dimenzije

V tem razdelku bomo izračunali Hausdorffovo dimenzijo Cantorjeve množice. Običajno postopamo tako, da z geometrijskim premislekom podamo spodnjo in zgornjo oceno za dimenzijo ter upamo, da se ti meji ujemata. V tem primeru lahko sklepamo, da smo našli točno dimenzijo.

Trditev 3.31. *Hausdorffova dimenzija Cantorjeve množice (slika 1) je*

$$\dim_H C = \log_3 2.$$

Dokaz. Naj bo C_k k-ta generacija konstrukcije. Tedaj C_k vsebuje 2^k intervalov dolžine 3^{-k}. Označimo $s = \log_3 2$.

Naj bo $\delta > 0$. Potem obstaja $k \in \mathbb{N}$, da velja $3^{-k} \leq \delta$. Intervali iz C_k tvorijo δ-pokritje množice C, zato dobimo oceno

$$H^s_\delta(C) \leq 2^k \cdot 3^{-ks} = 1.$$

V limiti $\delta \to 0$ sledi

$$\mathcal{H}^s(C) \leq 1,$$

torej

$$\dim_H C \leq s.$$

Naj bo $\delta > 0$. Naj bo $(U_i)_{i\in\mathbb{N}}$ poljubno δ-pokritje množice C. Po opombi 3.6 lahko brez škode za splošnost predpostavimo, da so U_i neprazne odprte množice. Ker je C kompaktna, obstaja končno podpokritje

$$U_1, U_2, \ldots, U_N.$$

Za vsak $i \in \{1, 2, \ldots, N\}$ izberimo $k_i \in \mathbb{N}$, da velja

$$3^{-(k_i+1)} \leq \operatorname{diam} U_i < 3^{-k_i}. \tag{1}$$

Tedaj U_i seka kvečjemu en interval v generaciji C_{k_i}, saj je razdalja med dvema sosednjima intervaloma v tej generaciji vsaj 3^{-k_i}.

Če je $j \geq k_i$, potem po konstrukciji Cantorjeve množice U_i lahko seka kvečjemu 2^{j-k_i} intervalov generacije C_j, saj se pri vsakem koraku $C_n \to C_{n+1}$ vsak interval razdeli na dva.

Iz (1) sledi

$$2^{j-k_i} = 2^{k_i} \cdot 3^{-sk_i} = 2^j \cdot 3^s \cdot (3^{-(k_i+1)})^s \leq 2^j \cdot 3^s \cdot (\operatorname{diam} U_i)^s. \tag{2}$$

Torej vsak U_i seka kvečjemu $2^j \cdot 3^s \cdot (\operatorname{diam} U_i)^s$ intervalov generacije C_j.

Izberimo tak $j \in \mathbb{N}$, da velja

$$j \geq \max\{k_1, k_2, \ldots, k_N\}.$$

Ker pokritje $(U_i)_{i\in\mathbb{N}}$ seka vsak izmed 2^j intervalov v generaciji C_j. S preštevanjem teh intervalov na dva načina z uporabo (2) dobimo oceno

$$2^j \leq \sum_{i=1}^{N} 2^j \cdot 3^s \cdot (\operatorname{diam} U_i)^s,$$

od koder sledi

$$\frac{1}{3^s} \leq \sum_{i=1}^{N} (\operatorname{diam} U_i)^s \leq \sum_{i=1}^{\infty} (\operatorname{diam} U_i)^s.$$

Ker je bilo pokritje $(U_i)_{i\in\mathbb{N}}$ poljubno, po definiciji infimuma sledi, da

$$\frac{1}{3^s} \leq H_\delta^s(C).$$

V limiti $\delta \to 0$ dobimo

$$\mathcal{H}^s(C) \geq \frac{1}{3^s} = \frac{1}{2},$$

torej

$$\dim_H C \geq s.$$

Skupaj s prvo neenakostjo sledi enakost. □

Iz zgornjega računa in topoloških lastnosti Hausdorffove dimenzije sledi naslednje:

Posledica 3.32. *Cantorjeva množica C je popolnoma nepovezana.*

Opomba 3.33. *Vidimo, da ima Cantorjeva množica res neničelno* $\log_3 2$*-dimenzionalno mero (oz. velikost). Z natančnejšo spodnjo oceno se lahko pokaže, da velja*

$$\mathcal{H}^s(C) = 1.$$

Tak natančen izračun najdemo v [5].

Če si predstavljamo, da ima Cantorjeva množica maso 1 *kg, potem zaradi lastnosti skaliranja Hausdorffove mere (trditev 3.11), če bi množico raztegnili trikrat – torej začeli z intervalom* $[0,3]$ *namesto* $[0,1]$ *— bi se njena masa povečala za faktor* $3^{\log_3 2}$ *in bi bila enaka* 2 *kg.*

Vidimo, da je izračun Hausdorffove dimenzije pogosto izredno zahteven, celo za preproste množice. Najprej je treba s pomočjo geometrijskih opažanj, simetrije ali samopodobnosti uganiti pravo vrednost dimenzije, nato pa to vrednost še dokazati. Ta postopek zahteva natančno analizo in pogosto precej tehničnega znanja.

Obstajajo tudi druge definicije dimenzije, na primer škatlasta (box-counting) dimenzija, ki jih lahko najdemo v knjigi [1]. Te so pogosto enostavnejše za izračun in se uporabljajo v različnih aplikacijah, vendar imajo tudi nekatere pomanjkljivosti. Na primer, škatlasta dimenzija na splošno ni števno stabilna, torej trditev 3.21 v splošnem ne velja.

Angleško-slovenski slovar strokovnih izrazov

countable stability števna stabilnost

dimension dimenzija

Hausdorff dimension Hausdorffova dimenzija

manifold mnogoterost

measure mera

metric space metrični prostor

motion translacija

outer measure zunanja mera

rotation rotacija

similarity podobnost

totally disconnected set popolnoma nepovezana množica

Literatura

[1] Kenneth Falconer. *Fractal geometry. Mathematical foundations and applications*. English. 2nd ed. Chichester: Wiley, 2003. ISBN: 0-470-84861-8; 0-470-84862-6.

[2] Gerald B. Folland. *Real analysis. Modern techniques and their applications*. English. 2nd ed. Pure Appl. Math., Wiley-Intersci. Ser. Texts Monogr. Tracts. New York, NY: Wiley, 1999. ISBN: 0-471-31716-0.

[3] Bojan Magajna. *Osnove teorije mere*. Slovenian. Zv. 27. Podiplomski Semin. Mat. Ljubljana: Drustvo Matematikov, Fizikov in Astronomov Slovenije (DMFA), 2011. ISBN: 978-961-212-241-6.

[4] Benoit B. Mandelbrot. *The fractal geometry of nature. Rev. ed. of "Fractals", 1977*. English. San Francisco: W. H. Freeman and Company. 461 p. (1982). 1982.

[5] Erin Pearse. *An Introduction to Dimension Theory and Fractal Geometry: Fractal Dimensions and Measures*. Ogled: 01. 07. 2025. 2014. URL: https://pi.math.cornell.edu/~erin/docs/dimension.pdf.