1 Kompleksna analiza

Naj bo $f : D \subseteq \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, $f = u + iv$, $f \in C^1(D)$ kompleksna funkcija.

Elementarne funkcije v $\mathbb{C}$

- $\ln_{\mathbb{C}} z = \ln_{\mathbb{R}} |z| + i \arg(z)$, $\ln \in \mathcal{O}(\mathbb{C} \setminus (-\infty, 0])$.
- $e^{iz} = \cos(z) + i \sin(z)$, $z \in \mathbb{C}$.
  - $\sin z = \frac{1}{2i}(e^{iz} - e^{-iz})$, $\cos z = \frac{1}{2}(e^{iz} + e^{-iz})$; $\sinh z = \frac{1}{2}(e^{z} - e^{-z})$, $\cosh = \frac{1}{2}(e^{z} + e^{-z})$.
  - $\cosh(iz) = \cos z$, $\cos(iz) = \cosh z$, $\sinh(iz) = i \sin z$, $\sin(iz) = i \sinh(z)$.
  - $\sin(x + iy) = \sin x \cosh y + i \cos x \sinh y$, $\cos(x + iy) = \cos x \cosh y - i \sin x \sinh y$.
- Naj bo $a \in \mathbb{C}$. $z^a = e^{a \ln_{\mathbb{C}} z}$.

Holomorfne funkcije

Izr. $f \in \mathcal{O}(D) \iff u_x = v_y,\ u_y = -v_x \iff \frac{\partial f}{\partial \overline{z}} = 0$.
Trd. [D je območje] Če $f \in \mathcal{O}(D)$ in $f_*(D) \subseteq \mathbb{R} \implies f \equiv \text{const}$.
Izr. Če je $f \in \mathcal{O}(D) \implies \triangle u = 0,\ \triangle v = 0$.
Izr. Harmonična konjugiranka na odp. zvezd. območju vedno obstaja.
Izr. [D območje, $f \in \mathcal{O}(D)$] $f \not\equiv \text{const} \implies f$ je odprta.

Razvoj v vrsto

Def. Potenčna vrsta je vrsta oblike $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (z-a)^n$.
Izr. Vsaka potenčna vrsta ima **konvergenčni polmer** $R \in [0, \infty]$:

- $1/R = \limsup \sqrt[n]{|c_n|}$.
- $1/R = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|c_n|}$.
- $1/R = \lim_{n\to\infty} \frac{|c_{n+1}|}{|c_n|}$.

Vsota potenčne vrste je holomorfna funkcija. Obrat: Vsako holomorfno funkcijo se da razviti v vrsto.
Def. Naj bo $f \in \mathcal{O}(A(a; r, R))$ ter $A(a; r, R) = \{z \in \mathbb{C} \mid |z - a| \in (r, R)\}$. Tedaj $f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n (z-a)^n$. To je **Laurentova vrsta**.

Krivuljni integral

Green. $\int_{\partial D} f\, dz + g\, d\overline{z} = 2i \iint_D (f_{\overline{z}} - g_z)\, dx\, dy$.
Cauchy. [$f \in \mathcal{O}(D) \cap C^1(\overline{D})$] $\int_{\partial D} f(z)\, dz = 0$.
Cauchyjeva formula. [$f \in \mathcal{O}(D) \cap C^1(\overline{D})$] $\int_{\partial D} \frac{f(z)}{z - z_0}\, dz = 2\pi i f(z_0)$, kjer $z_0 \in D$.

Singularnosti

Naj bo a **izolirana singularnost** za f, tj. $f \in \mathcal{O}(D \setminus \{a\})$. Tedaj a je

- **odpravljiva singularnost**, če $\exists \lim_{z\to a} f(z) = \alpha$.;
- **pol stopnje** n, če
  - $f(z)(z-a)^n$ ima odpravljivo singularnost v a;
  - $f(z) = \sum_{k=-n}^{\infty} c_k (z-a)^k$, $c_{-n} \neq 0$;
- **bistvena singularnost**, če $f(z) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k (z-a)^k$ ter $c_{-l} \neq 0$ za neskončno indeksov $l \in \mathbb{N}$.

Residui

Def. Residuum je $\mathrm{Res}(f, a) = c_{-1}$, kjer je c_{-1} koeficient pri $(z-a)^{-1}$ v Laurentovi vrsti.
Trd. Če ima f v točki a pol stopnje kvečjemu n, potem

$$\mathrm{Res}(f, a) = \frac{1}{(n-1)!} \lim_{z \to a} ((z-a)^n f(z))^{(n-1)}.$$

Izr. [D območje] Naj bodo $a_1, \dots, a_m \in D$ izolirane singularne točke in $f \in C^1(\overline{D} \setminus \{a_1, \dots, a_m\}) \cap \mathcal{O}(D \setminus \{a_1, \dots, a_m\})$. Tedaj

$$\int_{\partial D} f(z)\, dz = 2\pi i \sum_{j=1}^{m} \mathrm{Res}(f, a_j).$$

Holomorfne funkcije kot preslikave

Def. Naj bosta $D, E \subseteq \mathbb{C}$ odprti. Preslikava $f : D \to E$, $f \in C^1(D)$ je **konformna**, če ohranja kote (in njihovo orientacijo) med krivuljami.
Izr. f je konformna v okolici $a \in D \iff f \in \mathcal{O}(D),\ f'(a) \neq 0$.
Def. Lomljena linearna preslikava je $z \mapsto \frac{az+b}{cz+d}$, $ad - bc \neq 0$.
Trd. $\mathbb{CP} = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$. V $\mathbb{CP}$ so premice ravno krožnice, skozi ∞. Vsako lomljeno linearno preslikavo f lahko razširimo do biholomorfne preslikave $\widehat{f} : \mathbb{CP} \to \mathbb{CP}$, $\widehat{f}(\infty) = \lim_{z\to\infty} f(z) = \frac{a}{c}$.
Def. Območji D in E sta **biholomorfni**, če obstaja bijektivna holomorfna preslikava $f : D \to E$.
Riemann. Naj bo $D^{\text{odp}} \subseteq \mathbb{C}$. $D \sim \triangle \iff D \neq \mathbb{C}$, D je enostavno povezana (brez lukenj).

Osnovni izreki

Identičnost. [D območje, $f \in \mathcal{O}(D)$] Če ima $Z_f = \{z \in D \mid f(z) = 0\}$ stekališče v $D \implies f \equiv 0$.
Posl. [D območje, $f, g \in \mathcal{O}(D)$] Če se f, g ujemata na množici, ki ima stekališče v D, potem sta enaki.
Maksimum. [D območje, $f \in \mathcal{O}(D)$ omejena] Funkcija f bodisi konstanta bodisi $\forall z \in D\, .\, |f(z)| < \sup_{w \in D} |f(w)|$.
Liouville. [$f \in \mathcal{O}(D)$] Če obstajata $c > 0$ in $n \in \mathbb{N}_0$, da velja $\forall z \in \mathbb{C}\, .\, |f(z)| \leq c(1 + |z|^n)$, potem je f polinom stopnje največ n.
Posl. $f \in \mathcal{O}(D)$ Če je f omejena, je konstanta.
Argument. Naj bo f meromorfna na D in $\Omega \subseteq D$ območje. Denimo, da f nima ničel in polov na $\partial\Omega$. Tedaj

$$\int_{\partial\Omega} \frac{f'(z)}{f(z)}\, dz = 2\pi i (Z_f - S_f),$$

kjer je Z_j # ničel f v Ω, S_f pa # polov f v D štetih z večkratnostjo.
Rouche. Naj bosta $f, g \in \mathcal{O}(D)$. Naj velja $\forall z \in \partial D\, .\, |g(z)| < |f(z)|$. Tedaj imata f in $f + g$ na D enako število ničel, štetih z večkratnostjo.
Dodatek: $f + g$ nima ničel na ∂D.
Posl. [$f \in \mathcal{O}(D)$] Naj bo $\overline{\triangle(a, r)} \subseteq D$ ter $|f(a)| < \min_{|z-a|=r} |f(z)|$. Tedaj ima f ničlo na $\triangle(a, r)$.

Vaje

Določanje holomorfne funkcije

- Poznamo u: [D območje, $f \in \mathcal{O}(D)$] Naj bo $A \subseteq (\mathbb{R} \times \{0\}) \cap D$. Dovolj je določiti predpis za $f|_A$ in uporabiti princip identičnosti:

$$f(x + i \cdot 0) = u(x, 0) + i \int -u_y(x, 0)\, dx.$$

- Poznamo $|f|$ ali $\arg(f)$: Definiramo $g(z) = \ln(f(z))$.
- Če je treba ugotoviti, ali obstaja $f \in \mathcal{O}(D)$, poglejmo zveznost, pripadajočo vrsto itn.

Razvoj funkcije v vrsto

Če razvijemo okoli točke $z_0 = a$, vpeljemo novo spr. $w = z - z_0$. Nato uporabimo znane Taylorjeve razvoje. Splošna formula: $c_n = \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}$. Pri razvoju na kolobarjih običajno uporabimo geometrijsko vrsto. Včasih pa razvijemo „navzven“. tj. v imenovalcu izpostavimo z. Geometrijska vrsta: $\frac{1}{1-q} = \sum_{k=0}^{\infty} q^k$, $|q| < 1$.

Krivuljni integral

Naj ima krivulja K parametrizacijo $\vec{r}(t) = x(t) + iy(t)$, $t \in [a, b]$. Tedaj

$$I = \int_K f(z)\, dz = \int_K (u\, dx - v\, dy) + i \int_K (u\, dy + v\, dx).$$

Standardne parametrizacije:

- Krožnica s polmerom R: $z = Re^{i\varphi}$, $dz = ie^{i\varphi}\, d\varphi$.
- Navpična premica: $z = it$, $dz = i\, dt$.
- Vodoravna premica: $z = x$, $dz = dx$.

I izračunamo tako, da vstavimo namesto z pravo parametrizacijo ali uporabimo Greenovo formulo.

Kompleksna integracija

Želimo izračunati posplošen integral funkcije g, npr. $\int_a^{\infty} g(x)\, dx$.

1. Nadomestimo g z ustreznim kompleksnim analogom:
   - $\cos x$, $\sin x \rightsquigarrow e^{ix} = \cos x + i \sin x$.
   - $x \rightsquigarrow z$.
2. Integriramo po robu danega območja na dva načina. Običajno celoten integral je nič ali pa enak vsote residuumov. Nato integral računamo na vsakem kosu roba posebej. Za dokaz, da je nek integral v limiti enak 0, uporabimo trikotniško neenakost.

Rezultati z vaj:

- Običajna območja: Zgornja polkrožnica, zgornji polkolobar, zgornji pravokotnik.
- $\int_0^{2\pi} h(\cos x, \sin x)\, dx = \int_{|z|=1} h(\frac{z^2+1}{2z}, \frac{z^2-1}{2iz})\, \frac{dz}{iz}$.

Ničla funkcije

Za dokaz, da ima enačba le realne ničle, določimo # vseh realnih ničel na $\triangle(0, R_n)$ ($(R_n)_n$ je neko ustrezno zaporedje radijev) in # vseh kompleksnih ničel na $\triangle(0, R_n)$ z pomočjo Rouchejevega izreka. Nato ugotovimo, da sta števili enaki.

Biholomorfnost

Postopek je standarden. Najprej s pomočjo lomljene linearne preslikave poskusimo „izravnavati“ podano območje. To storimo tako, da izberimo slike za 3 točke na robu (ponavadi presek robnih komponent in vmesni točki). Eno točko preslikamo v ∞, drugi pa v 0 in 1. Kako zgleda slika razberemo iz dejstva, da biholomorfne preslikave ohranjajo kot in orientacijo. Lahko tudi eksplicitno izračunamo sliko kake točke.

Standardne preslikave:

- Naj bo $E = \{z \in \mathbb{C} \mid r \in (0, \infty), \varphi \in (0, \frac{\pi}{r}), r \in (0, 1)\}$. Definiramo $f(z) = z^r$, $\arg z \in (\frac{\pi}{r})$. Tedaj $f_*(E) = \mathbb{R} \times (0, \infty) =: \mathrm{Im}_+$.
- $f_0 : \mathrm{Im}_+ \to \triangle$, $f_0(z) = \frac{iz+1}{iz-1}$.
- Naj bo $E = \{z \in \mathbb{C} \mid \mathrm{Im}(z) \in (0, a)\}$. Najprej preslikamo ta vodoraven pas v $F = \{z \in \mathbb{C} \mid \mathrm{Im}(z) \in (0, \pi)\}$ z preslikavo $f(z) = \frac{\pi z}{a}$. Nato pa ta pas z preslikavo $f(z) = e^z$ preslikamo v Im_+.
  Splošno: Če imamo pas, vzemimo preslikavo $f(z) = e^z$ in poglejmo njen del e^x, ki nam da meji za r, in del e^{iy}, ki nam da meji za φ. S tem je slika v polarnih koordinatah natančno določena.

Opazimo tudi, da pot v sliki gre skozi točko ∞ natanko tedaj, ko gre v prasliki skozi točko, ki slika v točko ∞.