1 Kvocientni prostori

1.1 Kvocientna topologija

1. Kvocientna topologija
   Naj bo $(X, \mathcal{T})$ topološki prostor in $\sim$ ekvivalenčna relacija na X.
   - **Definicija.** Ekvivalenčni razred elementa $x \in X$. Kvocientna množica. Kvocientna projekcija.
   - *Opomba.* Kako si lahko predstavljamo ekvivalenčni razredi? Ali so disjunktne?
   - **Definicija.** Kvocientna topologija.
   - **Trditev.** $\mathcal{T}/_\sim$ je topologija na $X/_\sim$
   - *Opomba.* Karakteriziraj odprte/zaprte množice v $X/_\sim$. Kaj pomeni vsaka implikacija posebej?
   - *Primer.* Ali je kvocientna projekcija vedno odprta/zaprta?
   - **Definicija.** Nasičenje množice $A \subseteq X$
   - **Trditev.** Naj bo $A \subseteq X$
     – Kdaj je $q_*(A) \subseteq X/_\sim$ odprta/zaprta?
     – Zadosten pogoj, da je kvocientna projekcija odprta/zaprta.

1.2 Kvocientne preslikave

1. Kvocientne preslikave
   Naj bo $(X, \mathcal{T})$ topološki prostor in $\sim$ ekvivalenčna relacija na X.
   - **Trditev.** Kdaj je f določa preslikavo $\overline{f} : X/_\sim \to Y$? Kaj za njo velja? Kdaj je $\overline{f}$ zvezna, surjektivna ali injektivna?

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "f"] \arrow[d, "q"'] & Y \\ X/_\sim \arrow[ur, dashed, "\overline{f}"'] & \end{tikzcd}$$

   - *Opomba.* Kdaj je $\overline{f}$ homeomorfizem v jeziku množic iz Y?
   - **Definicija.** Kvocientna preslikava. Kvocientnost v ožjem smislu.
   - *Opomba.* Ali je kvocientna projekcija kvocientna preslikava?
   - **Lema.** Naj bo $f : X \to Y$ zvezna in surjektivna. Zadosten pogoj, da je f kvocientna.
   - **Izrek.** O prepoznavi kvocienta.
2. Operacije s kvocientnimi preslikavami
   - **Trditev.** Naj bosta $f : X \to Y$ in $g : Y \to Z$ preslikavi.
     – Kaj lahko povemo o kompozitumu kvocientnih presliakav?
     – Kaj če je $g \circ f$ kvocientna in sta f, g zvezni?
   - **Trditev.** Zadostni pogoji na f, da porodi homeomorfizem $\overline{f}$:

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "f"] \arrow[d, "q_X"'] \arrow[dr, "q_Y \circ f"] & Y \arrow[d, "q_Y"] \\ X/_{\sim_X} \arrow[r, dashed, "\overline{f}"'] & Y/_{\sim_Y} \end{tikzcd}$$

1.3 Deljivost topoloških lastnosti

1. Deljivost topoloških lastnosti
   Naj bo $(X, \mathcal{T})$ topološki prostor in $\sim$ ekvivalenčna relacija na X.
   - **Definicija.** Kdaj rečemo, da je topološka lastnost deljiva?
   - **Trditev.** Karakterizacija T_1 za prostor $X/_\sim$
   - **Izrek.** Izrek Aleksandrova [brez dokaza]
   - *Opomba.* Kako lahko karakteriziramo Cantorjevo množico? Kako jo lahko surjektivno zvezno preslikamo na interval $[0, 1]$? Ali je preslikava iz izreka Aleksandrova kvocientna?
   - **Trditev.** Deljive in nedeljive lastnosti.

1.4 Topološke grupe in delovanja

1. Topološke grupe
   - **Definicija.** Topološka grupa.
   - *Primer.* Topološke grupe:
     - Poljubna grupa G, opremljena z diskretno topologijo.
     - Podgrupa $H \leq G$ topološke grupe G z inducirano topologijo.
     - $(\mathbb{R}, +)$, $(\mathbb{C}, +)$, $(\mathbb{H}, +)$, tudi $(\mathbb{R}^*, \cdot)$, $(\mathbb{C}^*, \cdot)$, $(\mathbb{H}^*, \cdot)$
     - Norma je multiplikativna $\rightsquigarrow (S^0, \cdot)$, $(S^1, \cdot)$, $(S^3, \cdot)$. Ali tudi S^2 dopušča strukturo topološke grupe?
     - Produkt topoloških grup, opremljen z operacijama po komponentah in produktno topologijo.
     - Topološke grupe linearnih izomorfizmov ($\mathrm{GL}_n(\mathbb{F})$) in njihove standardne podgrupe.
   - **Definicija.** Leva (desna) translacija.
   - **Trditev.** Ali je leva (desna) translacija homeomorfizem?
   - **Posledica.** Ali je topološka grupa homogen prostor? Kaj to pomeni?
2. Delovanja grup
   - **Definicija.** Levo delovanje topološke grupe G na prostor X.
   - *Opomba.* Ali tudi delovanje določa translacijo, ki je homeomorfizem prostora X?
   - *Opomba.* Kaj lahko povemo o orbitah delovanja? Kaj to pomeni za nas?
   - **Definicija.** Prostor orbit.
   - **Definicija.** Stabilizatorska podgrupa G_x.
   - *Opomba.* V kakšnem odnosu sta $G \cdot x$ in $G/_{G_x}$?
   - **Trditev.** Ali je kvocientna projekcija na prostor orbit vedno odprta?

1.5 Konstrukcije kvocientov

1. Zlepki
   - **Definicija.** Zlepek prostorov X in Y.
   - *Opomba.* Kako zgledajo ekvivalenčni razredi v zlepku?
   - **Izrek.** Zadosten pogoj za normalnost zlepka.
   - **Trditev.** Zadosten pogoj, da je zlepek 2-števen. Zadosten pogoj, da je zlepek T_2.