

Diskretna matematika 1

7. januar 2025

1 Kombinatorika

1.1 Osnovna načela kombinatorike

Trditev (Načelo produkta). Če sta A, B končni množici, potem je

$$|A \times B| = |A| \cdot |B|.$$

Trditev (Posplošeno načelo produkta). Če so A_1, \dots, A_k končne, potem je

$$|\prod_{i=1}^k A_i| = \prod_{i=1}^k |A_i|.$$

Trditev (Načelo vsote). Če sta A in B končni in disjunktni množici, potem je

$$|A \cup B| = |A| + |B|.$$

Trditev (Posplošeno načelo vsote). Če so A_1, \dots, A_k končne, paroma disjunktne množice, potem je

$$\bigcup_{i=1}^k A_i = \sum_{i=1}^k |A_i|.$$

Trditev (Načelo enakosti). Če obstaja bijekcija $A \rightarrow B$, potem je

$$|A| = |B|.$$

Označimo z $[k] = \{1, 2, \dots, k\}$.

Primer. Naj bo A končna množica, $|A| = n$, $A = \{a_1, a_2, \dots, a_n\}$. Naj bo 2^A potenčna množica. Določi moč 2^A .

Trditev (Načelo dvojnega preštevanja). Z njim pokažemo, da sta dva izraza/formuli enaka, če z obema na različna načina preštejemo elemente iste množice.

Primer (Eulorjeva funkcija ϕ). Za $n \in \mathbb{N}$ definiramo $\phi(n)$ = število števil iz $[n]$, ki so tuji z n . Določi $\sum_{d|n} \phi(d)$.

Trditev (Dirichletovo načelo). Če sta $n, m \in \mathbb{N}$ in je $n > m$, potem ne obstaja injektivna preslikava $[n] \rightarrow [m]$.

Opomba (Kombinatorična interpretacija). Če n predmetov razporedimo v m predalov in je $n > m$, potem sta vsaj v enem predalu vsaj dva predmeta.

Primer. Naj bo $X \subset [100]$, $|X| = 10$. Pokaži, da X vsebuje dve disjunktni podmnožici z isto vsoto.

1.2 Število preslikav

Definicija. Množica $B^A = \{f : A \rightarrow B\}$ je množica vseh preslikav iz A v B .

Definicija. Definiramo:

- $n^{\underline{k}} = \underbrace{n(n-1) \dots (n-k+1)}_{k \text{ faktorjev}}$ je padajoča potenca.
- $n^{\overline{k}} = n(n+1) \dots (n+k-1)$ je naraščajoča potenca.
- $n! = n^{\underline{n}}$ je n fakulteta.
- Množica z n elementi se imenuje n -množica.

Trditev. Naj bosta N in K končni množici z $|N| = n$, $|K| = k$. Tedaj velja:

- $|K^N| = k^n$.
- Število injektivnih preslikav iz N v K je $k^{\underline{n}}$.
- Število bijekcij iz N v K je $n!$, če $n = k$ in je 0 sicer.

Dokaz. Za 1. in 2. točko uporabimo načelo enakosti. V 3. točki upoštevamo, kadar je preslikava iz končne množice v končno množico bijektivna. □

1.3 Binomski koeficienti in binomski izrek

Definicija. Naj bo $x \in \mathbb{C}$. Naj bo $k \in \mathbb{N}_0 = \{1, 2, \dots\}$. Definiramo $\binom{x}{k} = \frac{x^k}{k!} = \frac{x(x-1)\dots(x-k+1)}{k!}$. Števila $\binom{x}{k}$ so *binomski koeficienti*. Če je $k \notin \mathbb{N}_0$ definiramo $\binom{x}{k} = 0$.

Trditev. Če je $n \in \mathbb{N}_0$ in $k \leq n$, $k \in \mathbb{N}_0$, potem je

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}.$$

Števila $\binom{n}{k}$ so *binomska števila*.

Dokaz. Definicija binomskega koeficienta. □

Opomba. Tudi $\binom{0}{0} = 1$. Razlaga: $0! = 1$ je število bijektivnih preslikav iz \emptyset v \emptyset .

Opomba. Če je $0 \leq k \leq n$, potem $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$.

Definicija. Naj bo N množica. Definiramo $\binom{N}{k} = \{A \in P(N) \mid |A| = k\}$.

Trditev. Če je N n -množica in je $0 \leq k \leq n$, potem je

$$\left| \binom{N}{k} \right| = \binom{n}{k}.$$

Dokaz. Definiramo $X = \{(n_1, n_2, \dots, n_k); n_i \in \mathbb{N} \text{ paroma različni}\}$. Označimo $X_{n,k} = \left| \binom{N}{k} \right|$. Preštejemo elementi množici X na 2 načina. □

Trditev. Za $n \in \mathbb{N}$ in $1 \leq k \leq n$ velja:

$$\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k}.$$

Dokaz. Naj bo N n -množica. Naj bo $x \in N$ poljuben fiksni element.

Definiramo $\mathcal{A} = \{A \in \binom{N}{k}; x \in A\}$ in $\mathcal{B} = \{B \in \binom{N}{k}; x \notin B\}$. Potem $\binom{N}{k} = \mathcal{A} \cup \mathcal{B}$. Uporabimo prejšnjo trditev in načelo vsote. □

Definicija. *Pascalov trikotnik* je trikotnik oblike

$$\begin{array}{ccccccc} & & & & 1 & & & \\ & & & & & 1 & & \\ & & & 1 & & 2 & & 1 \\ & & 1 & & 3 & & 3 & & 1 \\ & 1 & & 4 & & 6 & & 4 & & 1 \\ 1 & & 5 & & 10 & & 10 & & 5 & & 1 \end{array}$$

Opomba. S pomočjo Paskalovega trikotnika se lahko spomnimo rekurzivno formulo za $\binom{n}{k}$ (n je številka vrstice, k je številka diagonale, ki jo gledamo z leve proti desni). Šteteti vrstice in diagonale začnemo z 0.

Izrek (Binomski izrek). Za vsak $n \in \mathbb{N}_0$ velja:

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^k b^{n-k}.$$

Dokaz. Izberimo k -krat a izmed n oklepajev. □

Opomba. V izreku sta a in b elementi poljubnega komutativnega kolobarja.

1.4 Izbori

Naj bo N n -množica. Opazujemo izbore k -elementov.

1. Izbor je urejen (važno v kakšnem vrstnem redu izberimo elementi):
 - 1.1 Elementi si lahko ponavljajo: n^k .
 - 1.2 Elementi se ne smejo ponavljati: $n^{\underline{k}}$.
2. Izbor je neurejen:
 - 2.1 Elementi si lahko ponavljajo [trditev]: $\binom{n+k-1}{k}$.
 - 2.2 Elementi se ne smejo ponavljati: $\binom{n}{k}$.

Trditev. Število neurejenih izborov s ponavljanjem dolžine k iz n -množice N je

$$\binom{n+k-1}{k}.$$

Dokaz. Naj bo $N = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$.

Neurejenemu izboru $\underbrace{x_1 \dots x_1}_{k_1} \underbrace{x_2 \dots x_2}_{k_2} \dots \underbrace{x_n \dots x_n}_{k_n}$ priredimo niz $\underbrace{1 \dots 1}_{k_1} 0 \underbrace{1 \dots 1}_{k_2} 0 \dots 0 \underbrace{1 \dots 1}_{k_n}$. □

1.5 Permutacije in permutacije s ponavljanjem

Definicija. Naj bo A n -množica. *Permutacija množice A* je bijektivna preslikava $\pi : A \rightarrow A$.

Množico vseh permutacij velikosti n (permutacij na $[n]$) označimo z S_n . Množico vseh permutacij množice A označimo z S_A .

Trditev. $|S_n| = n!$.

Dokaz. Z indukcijo pokažemo, da je $|S_n| = n|S_{n-1}|$ in $|S_1| = 1$. □

Trditev. Vsako permutacijo lahko zapišemo kot produkt disjunktnih ciklov.

Definicija. Naj bo $\pi \in S_n$. Par je *inverzija*, če velja: $i < j$ in $\pi(i) > \pi(j)$.

Definicija. Permutacija $\pi \in S_n$ je *soda* (oz. *liha*), če ima sodo mnogo inverzij (oz. liho mnogo inverzij).

1.5.1 Multimnožice

Definicija. *Multimnožica z elementi v množici S* je preslikava $\mu : S \rightarrow \mathbb{N}_0$. Pri tem številu $\mu(a)$, $a \in S$, rečemo *kratnost elementa a v multimnožici μ* , vsoti $\sum_{a \in S} \mu(a)$ pa *moč multimnožice μ* . Multimnožica je *končna*, če je njena moč končna.

Opomba. Multimnožico M formalno podamo z urejenim parom (S, μ) . Namesto da elemente zapišemo večkrat, lahko kratnost označimo tudi s formalno potenco: $M = \{a, a, b, c, c, c\} = \{a^2, b, c^3\}$.

Multimnožica je isto kot neurejen izbor s ponavljanjem. Tojer obstaja $\binom{n+k-1}{k}$ k -elementnih multimnožic v množici z n elementi.

1.5.2 Permutacije multimnožic

Permutacija multimnožice $M = (S, \mu)$ moči n je zaporedje (x_1, \dots, x_n) , kjer je $x_i \in S$ in se vsak $a \in S$ v zaporedju pojavi $\mu(a)$ -krat.

Trditev. Število permutacij multimnožice $M = \{1^{\alpha_1}, 2^{\alpha_2}, \dots, k^{\alpha_k}\}$ moči $n = \alpha_1 + \dots + \alpha_k$ je

$$\frac{n!}{\alpha_1! \alpha_2! \dots \alpha_k!}.$$

Dokaz. Najprej izberimo položaje elementa 1, nato izberimo položaje elementa 2 itd. □

Definicija. Številu $\frac{n!}{\alpha_1! \alpha_2! \dots \alpha_k!}$ rečemo *multinomski koeficient* in ga označimo z $\binom{n}{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_k}$.

Opomba. Multinomski koeficient je posplošitev binomskega koeficienta.

Trditev (Multinomski izrek). Velja

$$(x_1 + \dots + x_k)^n = \sum \binom{n}{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_k} x_1^{\alpha_1} \dots x_k^{\alpha_k},$$

kjer vsota teče po vseh izbirah naravnih števil $\alpha_1, \dots, \alpha_k$, katerih vsota je n .

Dokaz. Število permutacij multimnožice moči n , kjer je S množica indeksov. □

1.6 Kompozicije naravnega števila

Definicija. *Kompozicija naravnega števila n je zaporedje pozitivnih naravnih števil $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_l)$, za katero velja $\lambda_1 + \dots + \lambda_l = n$. Dolžina kompozicije λ , $l(\lambda)$ je število elementov zaporedja, številu n pa rečemo *velikost kompozicije*. Števila $\lambda_1, \dots, \lambda_l$ imenujemo *členi kompozicije*.*

Trditev. Naj bo $n \geq 1$.

1. Število kompozicij števila n je enako 2^{n-1} .
2. Število kompozicij dolžine k števila n je enako $\binom{n-1}{k-1}$.

Dokaz. Število n lahko si predstavljamo kot zaporedje n kgolic, kompozicijo pa s pregradami med kroglicami: $\bullet | \bullet \bullet | \bullet$. □

Opomba. Lahko razumemo kompozicijo števila n s k členi kot rešitev enačbe $x_1 + \dots + x_k = n$, kjer so $x_i \in \mathbb{N}$.

1.6.1 Šibke kompozicije

Šibka kompozicija števila n ima isto definicijo kot kompozicija, le da dovolimo med členi tudi ničle.

Trditev. Število šibkih kompozicij števila n s k členi je $\binom{n+k-1}{k-1} = \binom{n+k-1}{n}$.

Dokaz. 1. način. Rešujemo enačbo $x_1 + \dots + x_k = n$, kjer so $x_i \in \mathbb{N}_0$.

2. način. Kroglice in pregrade.

3. način. Neurejeni izbori s ponavljanjem. □

1.7 Razčlenitve naravnega števila

Definicija. *Razčlenitev naravnega števila n je zaporedje pozitivnih naravnih števil $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_l)$, kjer je $\lambda_1 \geq \dots \geq \lambda_l$ in $\lambda_1 + \dots + \lambda_l = n$. Dolžina razčlenitve λ , $l(\lambda)$ je število elementov zaporedja, številu n pa rečemo *velikost razčlenitve*. Števila $\lambda_1, \dots, \lambda_l$ imenujemo *členi razčlenitve*. Razčlenitvam rečemo tudi *particije*.*

Definicija. Naj bo $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_l)$ račlenitev naravnega števila n . *Ferrersov diagram* λ je seznam vrstic oblike:

$$\begin{array}{l} 1. \text{ vrsta: } \underbrace{\circ \circ \circ \dots \circ}_{\lambda_1 \text{ krožcev}} \\ 2. \text{ vrsta: } \underbrace{\circ \circ \dots \circ}_{\lambda_2 \text{ krožcev}} \\ \vdots \\ k. \text{ vrsta: } \underbrace{\circ \dots \circ}_{\lambda_l \text{ krožcev}} \end{array}$$

Definicija. Naj bo $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_l)$ račlenitev naravnega števila n . *Konjugirana razčlenitev* $\bar{\lambda}$ je razčlenitev, ki ima transponiran Ferrersov diagram.

Uvedemo oznake:

- $p(n)$ je število razčlenitev števila n . Funkciji $p(n)$ rečemo tudi *razčlenitvena funkcija*.
- $p_k(n)$ je število razčlenitev števila n s k členi.
- $\bar{p}_k(n)$ je število razčlenitev števila n z največ k členi.

Trditev. Za naravni števili n in k velja:

1. $p_k(n) = p_{k-1}(n-1) + p_k(n-k)$.
2. $p_k(n) = \bar{p}_k(n-k)$.
3. $\bar{p}_k(n) = \bar{p}_{k-1}(n) + \bar{p}_k(n-k)$.

Dokaz. Pomagamo si z Ferrersovim diagramom.

1. Razbijemo razčlenitve na tiste, ki vsebujejo 1 in tiste, ki jo ne vsebujejo.
2. Odštejemo od prvega stolpca 1.
3. Razčlenitev n z največ k členi ima bodisi natanko k členov bodisi kvečjemi $k-1$ členov. □

1.8 Stirlingova števila I. vrste

Definicija. Naj bo $1 \leq k \leq n$. *Stirlingovo število I. vrste* $C(n, k)$ je število permutacij množice $[n]$, ki se zapišejo kot produkt k disjunktih ciklov. Velja: $C(n, 0) = 0$, $n > 0$ in $C(0, 0) = 1$.

Primer. Izračunaj $C(n, n)$, $C(n, 1)$, $C(4, 2)$.

Trditev. Naj bo $1 \leq k \leq n$. Velja:

$$C(n, k) = C(n-1, k-1) + (n-1)C(n-1, k).$$

Dokaz. Permutacije $[n]$ s k cikli razdelimo takole:

1. tiste, kjer je n negibna točka in
2. ostale.

□

Za izračun $C(n, k)$ lahko si pomagamo s Stirlingovo matriko I. vrste, ki jo dobimo s pomočjo rekurzivne zveze.

Trditev. $x^{\overline{n}} = \sum_{k=0}^{\infty} C(n, k)x^k$.

Dokaz. Indukcija po n .

□

Primer. Izračunaj $x^{\overline{4}}$.

1.9 Stirlingova števila II. vrste in Bellova števila

Definicija. *Razdelitev množice* X je družina podmnožic $\{X_i\}_{i \in I}$ za katero velja:

1. $\bigcup_{i \in I} X_i = X$,
2. $X_i \cap X_j = \emptyset$ za vsaka $i, j \in I$, $i \neq j$.

Definicija. Naj bo $1 \leq k \leq n$. *Stirlingovo število II. vrste* $S(n, k)$ je število razdelitev množice $[n]$ v k nepraznih razredov. Velja: $S(n, 0) = 0$, $n > 0$ in $S(0, 0) = 1$.

Primer. Izračunaj $S(n, n)$, $S(n, 1)$, $S(n, 2)$.

Definicija. *Bellovo število* $B(n) = \sum_{k=0}^{\infty} S(n, k)$ je število vseh razdelitev n -množice v neprazne razrede.

Trditev. Naj bo $1 \leq k \leq n$. Velja:

$$S(n, k) = S(n-1, k-1) + kS(n-1, k).$$

Dokaz. Vzemimo množico $[n]$. Razdelitve v k razredov razdelimo takole:

1. tiste, ki imajo $\{n\}$ kot samostojni del in
2. ostale.

□

Za izračun $S(n, k)$ lahko si pomagamo s Stirlingovo matriko II. vrste, ki jo dobimo s pomočjo rekurzivne zveze.

Trditev. $x^n = \sum_{k=0}^{\infty} S(n, k)x^{\underline{k}}$.

Dokaz. **TODO**

□

Opomba. Če dva polinoma stopnje n ujemata v $n+1$ točk, potem sta enaka.

Izrek. Število surjekcij iz n -množice v k -množico je enako

$$k!S(n, k).$$

Dokaz. Vsaka surjekcija določa razdelitev n -množice v k nepraznih razredov.

□

Trditev. $B(n+1) = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{n}{k} B(k)$.

Dokaz. **TODO**

□

Definicija. Naj bo $1 \leq k \leq n$. *Lahovo število* $L(n, k)$ je število razdelitev n -množice v k linearno urejenih kosov.

1.10 Dvajnastera pot

Naj bo N n -množica (predmetov) in K k -množica (predalov). Gledamo „funkcijo“ $f : N \rightarrow K$, ki predmeti razporedi po predalih.

Imamo 12 možnosti: predmeti in predali lahko bodisi ločimo med seboj bodisi ne ločimo med seboj, funkcija lahko poljubna, injektivna (vsak predal ima kvečjemu 1 predmet) ali surjektivna (noben predal ni prazen).

Izrek (Dvajnastera pot). Velja:

ločimo predmeti/predali	poljubna	injektivna	surjektivna
DA/DA	k^n	$k^{\underline{n}}$	$k!S(n, k)$
DA/NE	$\sum_{i \leq k} S(n, i)$	$\begin{cases} 1; & n \leq k \\ 0; & \text{sicer} \end{cases}$	$S(n, k)$
NE/DA	$\binom{n+k-1}{k-1}$	$\begin{cases} \binom{k}{n}; & n \leq k \\ 0; & \text{sicer} \end{cases}$	$\binom{n-1}{k-1}$
NE/NE	$\bar{p}_k(n)$	$\begin{cases} 1; & n \leq k \\ 0; & \text{sicer} \end{cases}$	$p_k(n)$

Dokaz. Uporabimo že znane rezultate (kompozicije, razčlenitve) itd. □

1.11 Načelo vključitev in izključitev

Recimo, da sta A, B poljubni množici, potem $|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|$.

Primer. Koliko so števil v [30] ni tujih s 30? Koliko so tujih?

Izrek (Načelo vključitev in izključitev). Naj bo A_1, \dots, A_n množice. Velja:

$$\left| \bigcup_{i=1}^n A_i \right| = \sum_{j=1}^n (-1)^{j+1} \sigma_j,$$

$$\text{kjer je } \sigma_j = \sum_{I \in \binom{[n]}{j}} \left| \bigcap_{i \in I} A_i \right|.$$

Dokaz. Pokažemo, da če $x \in \bigcup_{i=1}^n A_i$, potem prispeva natanko 1 k formuli. □

Primer. Na koliko načinov lahko razporedimo n označenih predmetov v k označenih predalov, če je vsaj en predal prazen?

Posledica. Če je X N -množica in so $A_1, \dots, A_n \subset X$, potem je število elementov množice X , ki niso v nobeni izmed množic A_1, \dots, A_n enako

$$N + \sum_{j=1}^n (-1)^j \sigma_j.$$

Definicija. Premestitev množice $[n]$ je permutacija $\pi \in S_n$ brez negibnih točk.

Primer. Izračunaj število premestitev množice $[n]$.

Izrek. Če je $n = p_1^{e_1} \dots p_r^{e_r}$ razcep $n \in \mathbb{N}$ na prafaktorji, potem je

$$\phi(n) = n \left(1 - \frac{a}{p_1}\right) \dots \left(1 - \frac{1}{p_r}\right) \text{ (Eulorjeva funkcija).}$$

Dokaz. **TODO** □

1.12 Rekurzivne enačbe

Primer. Na koliko načinov lahko prehodimo n stopnic, če vsakič pregodimo 1 ali 2?

Primer. Koliko je dvojiških dreves s korenem z n vozlišč?

Izrek. Naj bo zaporedje $(a_n)_{n \geq 0}$ podano takole:

$$a_0 = b_0, a_1 = b_1, a_n = Aa_{n-1} + Ba_{n-2}, n \geq 2,$$

kjer so b_0, b_1, A, B fiksna števila. Naj bosta α in β korena **karakteristične enačbe** $x^2 = Ax + B$. Tedaj velja:

1. Če je $\alpha \neq \beta$, potem obstajata konstanti K_1, K_2 , tako da je

$$a_n = K_1 \alpha^n + K_2 \beta^n.$$

2. Če je $\alpha = \beta$, potem obstajata konstanti K_1, K_2 , tako da je

$$a_n = (K_1 + K_2 n) \alpha^n.$$

Splošen primer

Zaporedje $(a_n)_{n \geq 0}$ je podano takole:

1. $a_0 = b_0, a_1 = b_1, \dots, a_{d-1} = d_{d-1}$, kjer so b_0, b_1, \dots, b_{d-1} fiksna števila.
2. $c_d a_{n+d} + c_{d-1} a_{n+d-1} + \dots + c_1 a_{n+1} + c_0 a_n = f(n)$ (*), kjer so c_d, \dots, c_0 fiksna števila, $f(n) : \mathbb{N}_0 \rightarrow \mathbb{C}$.

Definicija. (*) je **d -člena linearna rekurzija s konstantnimi koeficienti**. Če je $f(n) \equiv 0$, potem rečemo, da je rekurzija (*) **homogena**.

Kako rešimo homogeno rekurzijo?

Zaporedja gledamo v prostoru $\mathbb{C}^{\mathbb{N}_0}$ vseh kompleksnih zaporedij. Naredimo vektorski prostor $(\mathbb{C}^{\mathbb{N}_0}, +, \cdot)$ na naraven način. Gledamo še prostor $\text{End}(\mathbb{C}^{\mathbb{N}_0})$ in naredimo vektorski prostor $(\text{End}(\mathbb{C}^{\mathbb{N}_0}), +, \circ)$.

Naj bo $E \in (\text{End}(\mathbb{C}^{\mathbb{N}_0}))$, $E(a_0, a_1, a_2, \dots) = (a_1, a_2, \dots)$ (odrežemo prvi člen). BŠS: $c_d = 1$.

1. Priredimo polinom: $Q(x) = x^d + c_{d-1}x^{d-1} + \dots + c_1x + c_0$.
2. (!) Poglejmo $\ker Q(E)$:

$$\begin{aligned} (a_n)_n \in \ker Q(E) &\Leftrightarrow Q(E)((a_n)_n) = 0 \Leftrightarrow (E^d + c_{d-1}E^{d-1} + \dots + c_1E + c_0I)(a_n)_n = 0 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow E^d(a_n)_n + c_{d-1}E^{d-1}(a_n)_n + \dots + c_1E(a_n)_n + c_0I(a_n)_n = 0 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow (a_d, a_{d+1}, \dots) + c_{d-1}(a_{d-1}, a_d, \dots) + \dots + c_1(a_1, a_2, \dots) + c_0(a_0, a_1, \dots) = 0 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow (a_d + c_{d-1}a_{d-1} + \dots + c_1a_1 + c_0a_0, a_{d+1} + c_{d-1}a_d + \dots + c_1a_2 + c_0a_1, \dots) = 0 \Leftrightarrow (a_n)_n \text{ reši (*)}. \end{aligned}$$

Torej splošne rešitve homogene enačbe so natanko elementi iz $\ker(Q(E))$.

3. Polinom $Q(x)$ lahko zapišemo v obliki $Q(x) = (x - \lambda_1)^{s_1} \dots (x - \lambda_k)^{s_k}$, potem

$$\ker Q(E) = \ker((E - \lambda_1 I)^{s_1}) \oplus \dots \oplus \ker((E - \lambda_k I)^{s_k}).$$

Hočemo torej določiti $\ker((E - \lambda I)^s)$.

4. Vemo: $\dim(\ker((E - \lambda I)^s)) = s$. Baza prostora je $(\lambda^n)_{n \geq 0}, (n\lambda^n)_{n \geq 0}, \dots, (n^{s-1}\lambda^n)_{n \geq 0}$ (dokaz težek).

Izrek. $(a_n)_{n \geq 0} \in \ker((E - \lambda I)^s) \Leftrightarrow a_n$ je oblike $a_n = P(n)\lambda^n$, kjer je $P(n)$ polinom stopnje kvečjemu $s - 1$.

Izrek. Splošna rešitev enačbe

$$c_d a_{n+d} + c_{d-1} a_{n+d-1} + \dots + c_1 a_{n+1} + c_0 a_n = 0$$

je oblike

$$A_1(n)\lambda_1^n + \dots + A_k(n)\lambda_k^n,$$

kjer so λ_i ničla karakterističnega polinoma kratnosti s_i , in je $A_i(n)$ polinom stopnje kvečjemu $s_i - 1$ za vse $i \in [k]$.

Kako rešemo nehomogeno rekurzijo?

Rešitev nehomogene enačbe

$$c_d a_{n+d} + c_{d-1} a_{n+d-1} + \dots + c_1 a_{n+1} + c_0 a_n = f(n) \quad (*)$$

je oblike

$$z_n + b_n,$$

kjer je z_n splošna rešitev ustrezne homogene enačbe in je b_n neka partikularna rešitev enačbe $(*)$.

Pri tem b_n praviloma iščemo z ustreznim nastavkom, pri čemer upoštevamo, da če je $f(n)$ aditivna, torej

$$f(n) = f_1(n) + \dots + f_t(n),$$

potem b_n lahko dobimo kot vsoto partikularnih rešitev od

$$c_d a_{n+d} + c_{d-1} a_{n+d-1} + \dots + c_1 a_{n+1} + c_0 a_n = f_i(n).$$

Primer. Pri začetnih pogojah $a_0 = 0$, $a_1 = 1$, reši enačbo $a_n = 4a_{n-1} - 4a_{n-2} - 2n + 5 \cdot 3^n$.

1.13 Formalne potenčne vrste (Rodovne funkcije)

Definicija. Naj bo $a : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{C}$ zaporedje. Vrsta $\sum_{n \geq 0} a_n x^n$ je **formalna potenčna vrsta** zaporedja a_n .

Definicija. Naj bo $(a_n)_n, (b_n)_n \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}_0}$.

- $\sum_{n \geq 0} a_n x^n + \sum_{n \geq 0} b_n x^n = \sum_{n \geq 0} (a_n + b_n) x^n$.
- $\lambda \cdot \sum_{n \geq 0} a_n x^n = \sum_{n \geq 0} (\lambda a_n) x^n$.
- $(\sum_{n \geq 0} a_n x^n) \cdot (\sum_{n \geq 0} b_n x^n) = \sum_{n \geq 0} c_n x^n$, kjer $c_n = \sum_{k=0}^n a_k b_{n-k}$.

Opomba. Formalne potenčne vrste tvorijo algebro.

Definicija. F. p. v. $A(x)$ je **obrnljiva**, če obstaja f. p. v. $B(x)$, da velja $A(x) \cdot B(x) = (1, 0, 0, \dots)$.

Trditev. Formalna potenčna vrsta $A(x)$ je obrnljiva natanko tedaj, ko $a_0 \neq 0$

Dokaz. (\Rightarrow) Definicija množenja.

(\Leftarrow) Induktivno konstruiramo členi f. p. v. $B(x)$. □

Definicija. Če je $(a_n)_n$ zaporedje, ki je rešitev nekega kombinatoričnega problema, potem $\sum_{n \geq 0} a_n x^n$ pravimo **rodovna funkcija**. Pišemo: $G(x) = \sum_{n \geq 0} a_n x^n$.

Primer. Določi rodovno funkcijo Fibonaccijeva zaporedja.

Definicija. Naj bo $A(x) = \sum_{n \geq 0} a_n x^n$ f. p. v. **Odvod** f. p. v. je $A'(x) = \sum_{n \geq 1} n a_n x^{n-1} = \sum_{n \geq 0} (n+1) a_{n+1} x^n$.

Trditev. $(A(x) \cdot B(x))' = A'(x)B(x) + A(x)B'(x)$. □

Dokaz. Račun.

Reševanje rekurzij z rodovnimi funkcijami

Primer. Naj bo $a_0 = 2, a_1 = 3, a_n = 2a_{n-1} - a_{n-2}, n \geq 2$. Določi splošno formulo za a_n .

Koraki splošnega reševanja nekega kombinatoričnega problema

- Rešitev problema zapišemo z rekurzivno enačbo.
- Zapišemo rodovno funkcijo zaporedja z pomočjo rekurzivne zveze.
- Z algebro nad rodovnimi funkcijami, rodovno funkcijo razvijemo v vrsto.
- Iz razvoja preberemo rešitev našega začetnega problema.

1.14 Catalanova števila

Imejmo produkt n števil $x_1 x_2 \dots x_n$. Na koliko načinov lahko izračunamo ta produkt, če po vrsti zmnožimo dve zaporedni števili in jih nadomestimo s produktom?

Definicija. **Catalanovo število** C_n je število načinov, s katerimi lahko izračunamo produkt $x_1 x_2 \dots x_n$.

Trditev. $C_n = \frac{1}{n+1} \binom{2n}{n}$.

Dokaz. Rodovne funkcije. □