

1 Hilbertovi prostori

1. Vektorski prostor s skalarnim produktom

Naj bo X vektorski prostor nad \mathbb{R} (ali nad \mathbb{C}).

- **Definicija.** Skalarni produkt.
- **Trditev.** Cauchy-Schwartzova neenakost.
- **Definicija.** Norma na vektorskem prostoru X .
- **Trditev.** Norma, ki je dobljena iz skalarnega produkta.
- **Trditev.** Metrični prostor, porojeni z normo.

2. Hilbertovi prostori

- **Definicija.** Hilbertov prostor. Banachov prostor.
- **Zgled.** Standardni skalarni produkti na \mathbb{R}^n in \mathbb{C}^n . Norme, ki ne pridejo iz skalarnega produkta.

3. Prostor $L^2([a, b])$

- **Trditev.** Standardni skalarni produkt na prostoru $C([a, b])$.
- **Trditev.** Ali je prostor $C([a, b])$ s standardnim skalarnim produktom Hilbertov?
- **Zgled.** Kako lahko napolnimo prostor $((0, 1), d_2)$?
- **Definicija.** Kadar pravimo, da lahko napolnimo metrični prostor (M, d) ? Napolnitev prostora.
- **Opomba.** Kaj je ponavadi prostor \overline{M} ?
- **Opomba.** Prostor $L^1(A)$.
- **Definicija.** Prostor $L^2([a, b])$.
- **Opomba.** Ali je produkt dveh $L^2([a, b])$ funkcij $L^1([a, b])$ funkcija? Skalarni produkt na $L^2([a, b])$
- **Trditev.** Ali je $L^2([a, b])$ vektorski prostor nad \mathbb{R} ?
- **Opomba.** Ali je $C([a, b]) \subseteq L^2([a, b])$? Ali je $C([a, b])$ gost v $L^2([a, b])$? Kaj pomeni, da zaporedje $(f_n)_n \in L^2([a, b])$ konvergira k $f \in L^2([a, b])$?
- **Izrek.** Ali je $L^2([a, b])$ Hilbertov prostor? Kako sta povezana prostora $L^2([a, b])$ in $C([a, b])$? [brez dokaza]
- **Opomba.** Kako zgleda skalarni produkt nad \mathbb{C} ?
- **Zgled.** Navedi primer funkcije ko limita po točkah ni enaka limite v L^2 smislu. Navedi primer funkcije za katero ne obstaja limita po točkah, limita v L^2 smislu pa obstaja.

4. Ortogonalnost

Naj bo X vektorski prostor s skalarnim produktom, $A \subseteq X$, $A \neq \emptyset$.

- **Definicija.** Kadar sta dva vektorja pravokotna? Ortogonalni komplement množice A .
- **Trditev.** Ali je A^\perp vektorski podprostor v X ?
- **Opomba.** V kakšni relaciji sta A in $(A^\perp)^\perp$?
- **Trditev.** Naj bo $v \in X$. Ali je $f : X \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \langle x, v \rangle$ zvezna?
- **Posledica.** Ali je A^\perp zaprt podprostor v X ?
- **Opomba.** Ali je $C([a, b])$ zaprt podprostor v $L^2([a, b])$?
- **Opomba.** V kakšni relaciji sta A in $(A^\perp)^\perp$, če je X Hilbertov in A zaprt podprostor?
- **Trditev.** Pitagorjev izrek.

Naj bo X vektorski prostor s skalarnim produktom, $Y \leq X$ podprostor v X .

- **Definicija.** Pravokotna projekcija vektorja $x \in X$ na podprostor Y .
- **Trditev.** Kaj lahko povemo o pravokotne projekcije vektorja $x \in X$ na Y , če obstaja? **TODO: ***
- **Zgled.** Ali imajo funkcije iz $L^2([a, b]) \setminus C([a, b])$ najboljšo aproksimacijo z zveznimi funkcijami?
- **Opomba.** Lastnosti P_Y :
 - Ali je P_Y idempotent?
 - Kakšna zveza med $\|x\|$ in $\|P_Y(x)\|$?
 - Ali je $P_Y : X \rightarrow Y$ linearna in zvezna?
 - Ali je Y zaprt podprostor, če je P_Y definirana na X ?
 - Recimo, da $P_Y(x)$ obstaja. Ali obstaja tudi $P_{Y^\perp}(x)$?
- **Trditev.** Razvoj $P_Y(x)$ po ONB.

5. Ortogonalni sistem

Naj bo X vektorski prostor s skalarnim produktom.

- **Definicija.** Ortogonalni sistem (OS). Ortonormiran sistem (ONS).
- **Trditev.** Besselova neenakost. **TODO: ***
- **Posledica.** Čemu je enaka limita $\lim_{j \rightarrow \infty} \langle x, e_j \rangle$?
- **Opomba.** Zakaj potrebujemo absolutno vrednost? Kaj so $(\langle x, e_j \rangle)_{j=1}^\infty$?
- **Trditev.** Naj bo $(e_j)_{j=1}^\infty$ ONS, $(c_j)_j$ tako zaporedje števil, da $\sum_{j=1}^\infty |c_j|^2 < \infty$. Kaj potem?
- **Definicija.** Kompletan ortonormiran sistem (KONS).
- **Trditev.** 6 ekvivalentnih trditev o KONS. **TODO: ***
- **Zgled.** Modelni Hilbertov prostor.

6. Prostor $L^2([-\pi, \pi])$

- ONS na prostoru $L^2([-\pi, \pi])$.
- **Opomba.** Kako lahko obravnavamo vsako funkcijo $f : [-\pi, \pi] \rightarrow \mathbb{R}$ v tem kontekstu?
- Klasične Fourierjevi koeficienti. Fourierjeva vrsta. **TODO: ***
- **Trditev.** Riemann-Lebesgueva lema.
- **Trditev.** Parsevalova enakost.
- **Zgled.** Izračunaj $\sum_{n=1}^\infty \frac{1}{n^2}$.
- **Lema.** Naj bo $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ odsekoma zvezna periodična funkcija s periodo 2π . Čemu je enak integral $\int_a^{a+2\pi} f(x) dx$?
- **Lema.** Dirichletovo jedro.
- **Lema.** Lastnosti Dirichletovega jedra.
- **Izrek.** Fourierjeva vrsta funkcije. **TODO: ***
- **Zgled.** Izračunaj $\sum_{k=0}^\infty (-1)^k \frac{1}{2k+1}$.