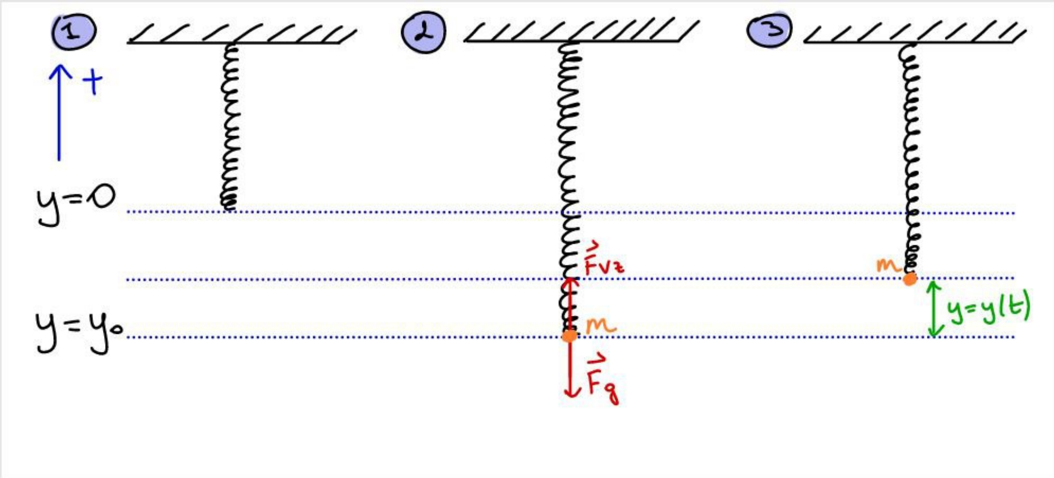
Fizika 2

7. april 2025

1 Mehansko nihanje in valovanje

1.1 Enostavna nihala - enačba (dušenega) nihanja

Utež na vijačni vzmeti



1. Vzmet je neraztegnjena.
2. Obesimo vzmet z utežjo mase m. Izračunamo y_0 (ravnovesno lego):
   - Zapišemo sile, ki delujejo na utež:
     (1) Sila teže: $\vec{F}_{\mathrm{g}} = (0,\, -mg_0,\, 0)$, kjer je $g_0 = 10\, m/s^2$ težni pospešek;
     (2) Sila vzmeti: $\vec{F}_{\mathrm{vz}} = (0,\, -ky_0,\, 0)$, kjer je $k > 0$ koeficient vzmeti.
   - Zapišemo II. Newtonov zakon:
     $$\vec{a} = 0 \iff \vec{F} = m\vec{a} = 0 \implies \vec{F}_{\mathrm{g}} + \vec{F}_{\mathrm{vz}} = 0.$$
     Torej
     $$-mg_0 - ky_0 = 0 \implies mg_0 = -ky_0 \implies y_0 = -\frac{mg_0}{k} \qquad (*)$$
3. Zdaj odmikamo utež od ravnovesne lege. Izračunamo spremembo y-koordinate v odvisnosti od časa $y = y(t)$:
   - Utež ima hitrost v smeri y: $v_y = \frac{dy}{dt} = \dot{y} =\neq 0$.
   - Zapišemo sile, ki delujejo na utež:
     (1) Sila teže: $\vec{F}_{\mathrm{g}} = -mg_0\widehat{e}_y$, kjer je $\widehat{e}_y$ enotski vektor v smeri y;
     (2) Sila vzmeti: $\vec{F}_{\mathrm{vz}} = -ky\widehat{e}_y$;
     (3) Sila upora (linearni zakon upora, viskoznost): $\vec{F}_{\mathrm{u}} = -C\vec{v} = -C\dot{y}\widehat{e}_y$, kjer je $C > 0$ **koeficient upora**.
       * Sila upora se pojavi, ker nismo v vakuumu.
   - Zapišemo II. Newtonov zakon:
     - $\vec{F} = \vec{F}_{\mathrm{g}} + \vec{F}_{\mathrm{vz}} + \vec{F}_{\mathrm{u}}$;
     - $\vec{F} = m\vec{a} = m\ddot{y}\widehat{e}_y$.

     Torej
     $$-C\dot{y}\widehat{e}_y - ky\widehat{e}_y - mg_0\widehat{e}_y = m\ddot{y}\widehat{e}_y \implies \left(\ddot{y} + \frac{C}{m}\dot{y} + \frac{k}{m}y + g_0\right)\widehat{e}_y = 0 \implies \ddot{y} + \frac{C}{m}\dot{y} + \frac{k}{m}y + g_0 = 0.$$
   - Vpeljemo oznake: $\beta := \frac{C}{m}$, $[\beta] = s^{-1}$ je **koeficient dušenja**; in $\omega_0^2 := \frac{k}{m}$, $[\omega_0^2] = s^{-2}$ je **lastna frekvenca**. Dobimo enačbo:
     $$\ddot{y} + \beta\dot{y} + \omega_0^2 y + g_0 = 0.$$
   - Iz $(*)$ sledi, da $g_0 = -\frac{k}{m}y_0 = -\omega_0^2 y_0$. **Enačba dušenega nihanja** je:
     $$\boxed{\ddot{y} + \beta\dot{y} + \omega_0^2(y - y_0) = 0}$$

Opomba. Enačba $\ddot{y} + \beta\dot{y} + \omega_0^2 y = \omega_0^2 y_0$ je
- Diferencialna enačba 2. reda za y.
- Linearna (členi y, $\dot{y}$, $\ddot{y}$ imajo 1. potenco).
- Koeficienti so konstantni (niso odvisni od časa).
- Pogojno nehomogena (lahko jo spravimo v homogeno enačbo).

Postopek reševanja enačbe dušenega nihanja

1. Definiramo $y' := y - y_0$ **odmik od ravnovesne lege**. S tem enačba postane homogena.
2. Enačbo rešujemo z nastavkov $y' = Ae^{\lambda t}$, kjer sta A, λ neki konstanti, $[\lambda] = s^{-1}$, $[A] = m$. Dobimo karakteristični polinom $\lambda^2 + \beta\lambda + \omega_0^2 = 0$.
3. Karakteristični polinom ima diskriminanto $D = \beta^2 - 4\omega_0^2$. Definiramo $\boxed{\omega^2 := \omega_0^2 - \left(\frac{\beta}{2}\right)^2}$. Dobimo $D = -4\omega^2$. Ločimo možnosti.

(a) $D < 0$ $(\omega^2 > 0)$. V tem primeru dobimo **podkritično dušenje**.
Splošna rešitev (vsota dveh rešitev) je

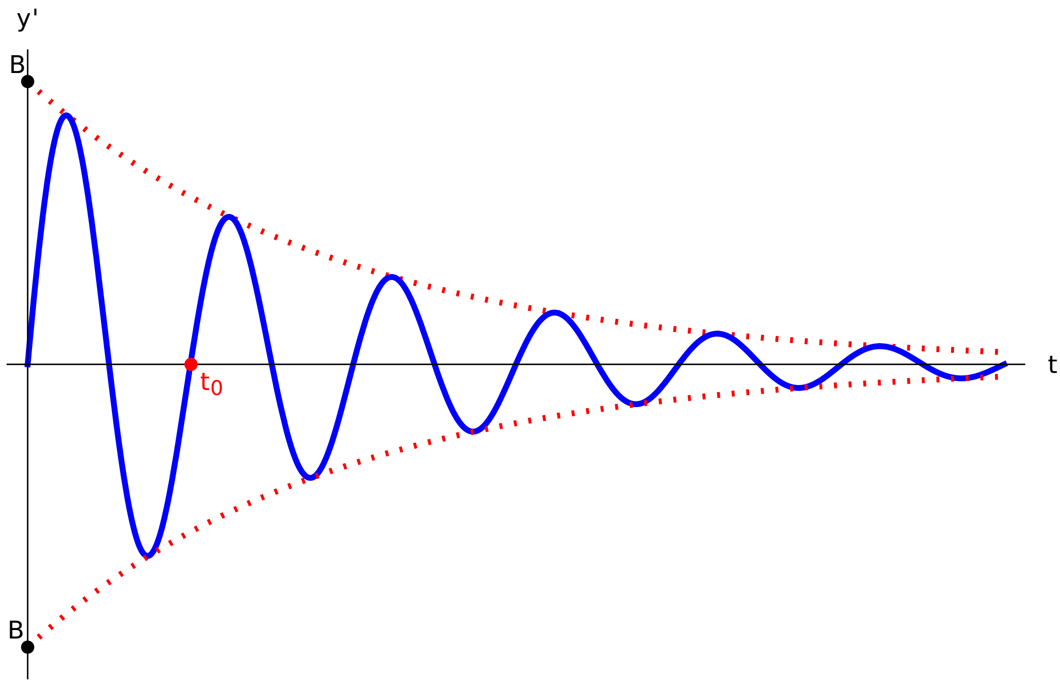
$$y' = \exp\left(-\frac{\beta}{2}t\right)(A_1 \exp(i\omega t) + A_2 \exp(-i\omega t)) = \exp\left(-\frac{\beta}{2}t\right)(B_1 \cos(\omega t) + B_2 \sin(\omega t)).$$

Lahko jo zapišemo v obliki:

$$\boxed{y' = B \exp\left(-\frac{\beta}{2}t\right)\sin(\omega t + \delta)}$$

kjer je δ **fazni zamik**.

Primer. Če je $\delta = 0$, potem $y'(t) = B\exp(-\frac{\beta}{2}t)\sin(\omega t)$.



Slika 1: Dušeno nihanje v primeru podkritičnega dušenja

Definiramo količine:

- $t_0 = \frac{2pi}{\omega}$ je **nihajni čas** (čas enega nihaja).
- $\nu = \frac{1}{t_0}$ je **frekvenca**.
  - $\nu = \frac{1}{t_0} = \frac{\omega}{2\pi} \implies \boxed{\omega = 2\pi\nu}$

Če je dušenje zelo šibko, potem $\left(\frac{\beta}{2}\right)^2 \ll w_0^2 \implies t_0 \approx \frac{2\pi}{\sqrt{\omega_0^2}} = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}$

Kako dobimo parametri B in δ? Iz začetnih pogojev! Na primer:

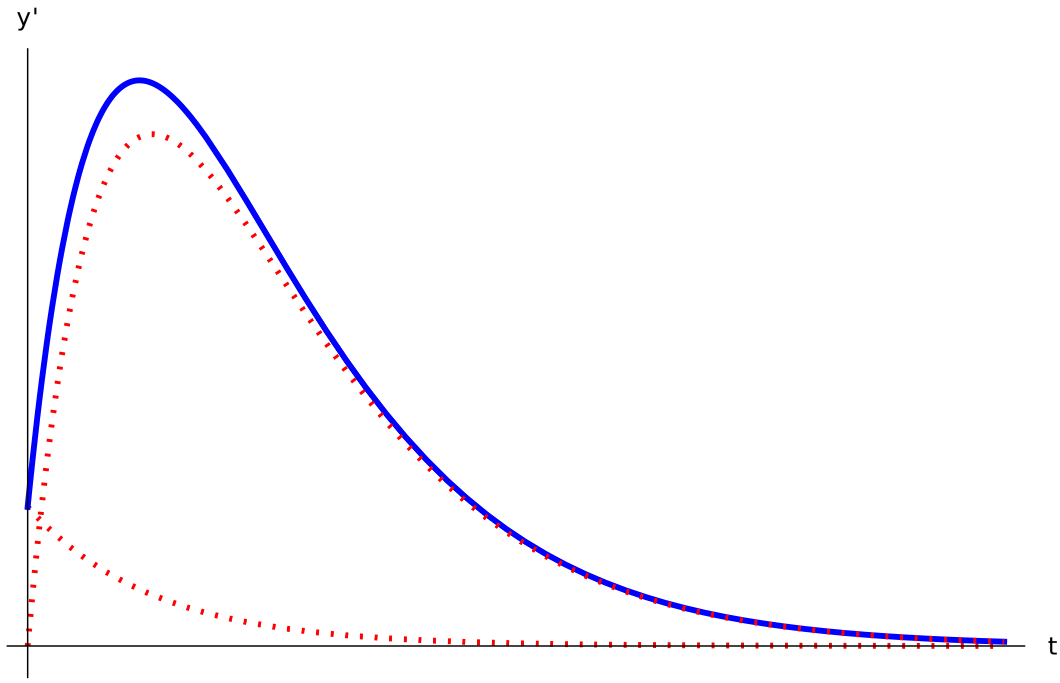
- $y'(0) = a$ odmik od ravnovesne lege v času $t = 0$;
- $\dot{y}'(0) = b$ hitrost v času $t = 0$.

Rešimo enostaven sistem enačb in definiramo $r := \frac{a}{b}$, potem $\boxed{\delta = \arctan\left(\frac{r\omega}{1 + \frac{r\beta}{2}}\right)}$ in $\boxed{B = \frac{|b|}{\omega}}$

(b) $D = 0$ ($\omega = 0$). V tem primeru dobimo **kritično dušenje**.
Rešitvi sta $y_1' = B_1 \exp\left(-\frac{\beta}{2}t\right)$ in $y_2' = B_2 t \exp\left(-\frac{\beta}{2}t\right)$. Splošna rešitev je

$$\boxed{(B_1 + B_2 t)\exp\left(-\frac{\beta}{2}t\right)}$$

Opomba. Opazimo, da nihanja sploh ni.



Slika 2: Dušeno nihanje v primeru kritičnega dušenja

(c) $D > 0$ ($\omega^2 < 0$). V tem primeru dobimo **nadkritično dušenje**.
Splošna rešitev je

$$\boxed{y' = B_1 \exp\left(-\frac{\beta}{2}\left[1 + \sqrt{1 - \frac{4\omega_0^2}{\beta^2}}\right]t\right) + B_2 \exp\left(-\frac{\beta}{2}\left[1 - \sqrt{1 - \frac{4\omega_0^2}{\beta^2}}\right]t\right)}$$

Opomba. Rešitev je vsota dveh eksponentno padajočih prispevkov (nihanja ni).

V primeru zelo močnega dušenja ($\frac{4\omega_0^2}{\beta^2} \ll 1$) velja, da $\sqrt{1 - \frac{4\omega_0^2}{\beta^2}} \approx 1 - \frac{2\omega_0^2}{\beta^2}$. V tem primeru

$$y' = C_1 \exp(-\beta t) + C_2 \exp\left(-\frac{\beta}{2}\frac{2\omega_0^2}{\beta^2}t\right)$$

- Prvi člen: zelo hitro padanje k ničli (hitreje, kot pri kritičnem dušenju);
- Drugi člen: zelo počasno približanje ravnovesni legi!

Energija nihala

Posamezni prispevki energije:
- $W_\mathrm{k} = \frac{1}{2}mv^2$, $v = v_y = \dot{y} = (\dot{y - y_0}) = \dot{y'} \implies W_\mathrm{k} = \frac{1}{2}m(\dot{y'})^2$
- $W_\mathrm{pr} = \frac{1}{2}ky^2 = \frac{1}{2}(y' + y_0)^2$
- $W_\mathrm{p} = mg_0(y' + y_0)$

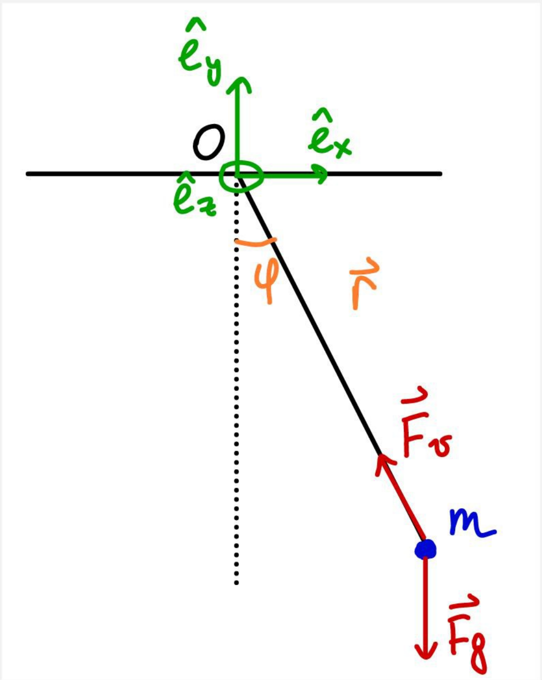
Torej $\boxed{W = W_\mathrm{k} + W_\mathrm{pr} + W_\mathrm{p}}$

***W* za zelo šibko dušenje** $\left(\frac{\beta}{2}t \ll 1\right)$**:** $\left(\frac{\beta}{2}\right)^2 \ll \omega_0^2 \implies \omega \approx \omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$.
Z enostavnim računom dobimo, da

$$\boxed{W = \frac{1}{2}kB^2 + \frac{1}{2}ky_0^2 + mg_0y_0 = \text{const}}$$

***W* za nihanje z dušenjem:** TODO: DN

Nitno (matematično) nihalo



Naj bo $|\vec{r}| = l$.

1. Izračunamo navor $\vec{M} = \vec{r} \times (\sum \vec{F})$ na točkasto telo z maso m. Dobimo: $\vec{M} = (0, 0, -mgl \sin\phi)$.
2. Zapišemo II. Newtonov zakon za vrtenje okoli fiksne osi $\hat{e}_z$:

$$M_z = J_z \alpha = ml^2 \ddot{\phi}$$

3. Dobimo enačbo

$$\boxed{\ddot{\phi} + \frac{g_0}{l} \sin\phi = 0}$$

Opomba. V splošnem to ni enačba sinusnega nihanja.

Če je $\phi \ll 1$, potem $\sin\phi \approx \phi$. V tem primeru dobimo enačbo:

$$\boxed{\ddot{\phi} + \omega_0^2 \phi = 0}$$

ki ima rešitev $\phi(t) = B \sin(w_0 t + \delta)$, kjer $\omega_0 = \sqrt{\frac{g_0}{l}}$. Od tod dobimo, da je

- $t_0 = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g_0}}$

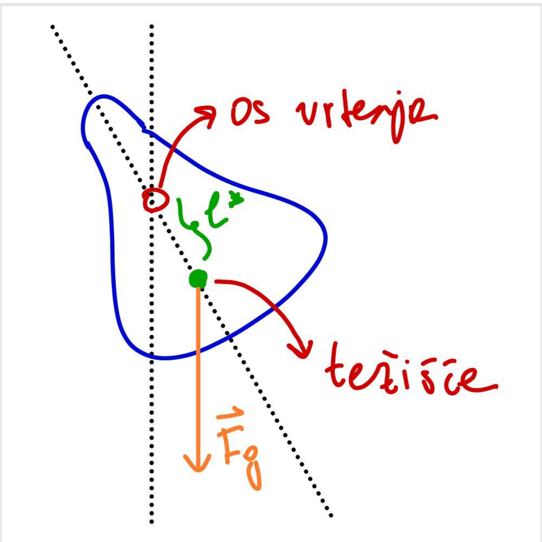
Energija matematičnega nihala

Preprost račun pokaže, da

$$\boxed{W = W_{\mathrm{k}} + W_{\mathrm{p}} = -mg_0 l(1 - \frac{1}{2}B^2) = \mathrm{const}}$$

Opomba. Ohranitev $W = W_{\mathrm{k}} + W_{\mathrm{p}}$ velja tudi, ko $\phi \not\ll 1$.

Fizična nihala



Naj bo l^* razdalja med osjo vrtenja in težiščem. Potem

$$M_z = -mgl^* \sin\phi \quad \text{in} \quad M_z = J_z \alpha,$$

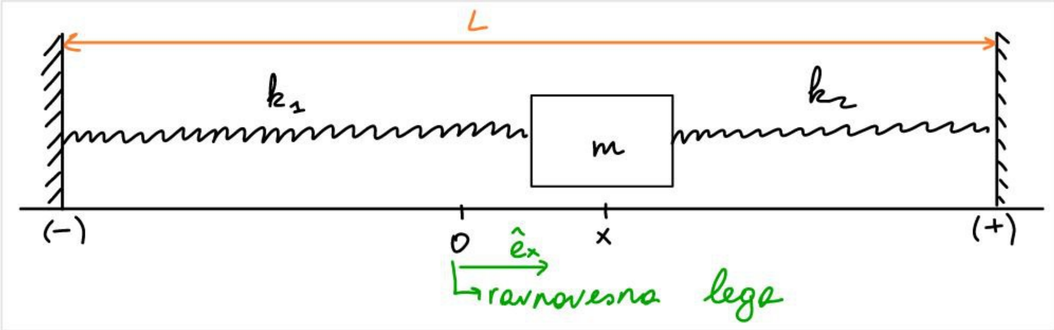
kjer je J_z vztrajnostni moment telesa pri vrtenju okoli dane osi (izračunamo ga z uporabo Steinerjevega izreka).
Dobimo enačbo nedušenega nihanja

$$\boxed{\ddot{\phi} + \frac{mgl^* J_z}{\phi} = 0}$$

Iz njo dobimo

- $\omega_0^2 = \frac{mgl^*}{J_z}$
- $t_0 = \frac{2\pi}{\omega_0} = 2\pi\sqrt{\frac{J_z}{mgl^*}}$

Nihalo na vijačnih vzmeteh na zračni klopi



- Naj bo $l_{1,0}$ začetna dolžina 1. vzmeti
- Naj bo $l_{1,r}$ dolžina 1. vzmeti, ko je telo v ravnovesni legi.
- Naj bo $\Delta l_{1,r} = l_{1,r} - l_{1,0}$ raztezek ali skrček 1. vzmeti, ko je telo v ravnovesni legi.

Zapišemo sili, ki delujejo na telo v ravnovesni legi:

- $\vec{F}_{1,r} = -k_1 \Delta l_{1,r} \hat{e}_x$ je sila 1. vzmeti
- $\vec{F}_{2,r} = +k_2 \Delta l_{2,r} \hat{e}_x$ je sila 2. vzmeti

Zapišemo II. Newtonov zakon v ravnovesju:

$$\vec{F}_r = \vec{F}_{1,r} + \vec{F}_{2,r} + \vec{F}_g + \vec{F}_N = \vec{F}_{1,r} + \vec{F}_{2,r} = 0 \implies \frac{\Delta l_{1,r}}{\Delta l_{2,r}} = \frac{k_2}{k_1}$$

Zapišemo II. Newtonov zakon v legi x:

- $\Delta l_1 = \Delta l_{1,r} + x$ in $\Delta l_2 = \Delta l_{2,r} - x$
- $\vec{F}_1 = -k_1 \Delta l_1 \hat{e}_x = \vec{F}_{1,r} - k_1 x \hat{e}_x$ in $\vec{F}_2 = +k_2 \Delta l_2 \hat{e}_x = \vec{F}_{2,r} - k_2 x \hat{e}_x$

Dobimo enačbo

$$\boxed{\ddot{x} + \frac{k_1 + k_2}{m} x = 0}$$

Iz njo dobimo:

- $\omega_0^2 = \frac{k_1+k_2}{m}$
- $t_0 = 2\pi \sqrt{\frac{m}{k_1+k_2}}$

1.2 Vsiljeno (dušeno) nihanje

Delujemo z dodatno $\nu = \frac{1}{t_v}$ frekvenco vsiljevanja na našo nihalo ($\omega_v = 2\pi\nu_v$). Naj bo dodatna sila $\vec{F}_y = F_0 \sin(\omega_v t) \hat{e}_y$. Zanima nas, kaj je $y(t)$? Enačba gibanja je

$$\boxed{\ddot{y} + \beta \dot{y} + \omega_0^2 (y - y_0) = \frac{F_0}{m} \sin(\omega_v t)}$$

Opomba. Ta enačba je nehomogena!

Postopek reševanja:

1. Naredimo substitucijo $y' = y - y_0$. Dobimo enačbo $\ddot{y'} + \beta \dot{y'} + \omega_0^2 y' = \frac{F_0}{m} \sin(\omega_v t)$
2. Najbolj splošna rešitev je oblike $y' = y'_h + y'_p$, kjer je y'_h rešitev homogenega dela in y'_p neka partikularna rešitev

Rešitev homogenega dela (za podkritično dušenje) že poznamo:

$$y'_h = B \exp\left(-\frac{\beta}{2} t\right) \sin(\omega t + \delta_h),$$

kjer $\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \left(\frac{\beta}{2}\right)^2}$.

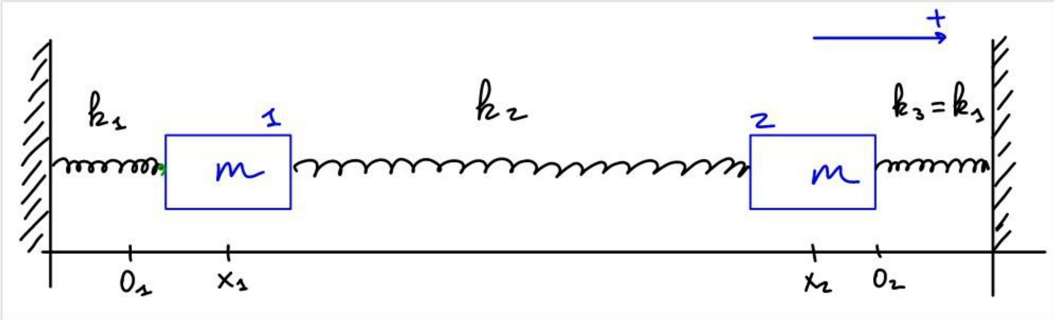
Opazimo, za da čase $t \gg \frac{1}{\beta}$: $y'_h \to 0$. Takrat bo rešitev

$$\boxed{y' \approx y'_p = B_p \sin(\omega_v t - \delta_p)}$$

kjer $B_p > 0$.

Opomba. Za dovolj velike čase bo frekvenca ω_v namesto ω.

1.3 Sklopljeno nihanje



Predpostavimo, da dušenja ni. Za začetek rešimo simetrični problem:

- $m_1 = m_2 = m$
- $k_1 = k_3$

Dobimo enačbi gibanja:

$$\boxed{\ddot{x}_1 + \omega_1^2 x_1 + \omega_2^2 (x_1 - x_2) = 0 \quad \text{in} \quad \ddot{x}_2 + \omega_1^2 x_2 - \omega_2^2 (x_1 - x_2) = 0}$$

kjer $\omega_1^2 = \frac{k_1}{m}$ in $\omega_2^2 = \frac{k_2}{m}$.
Rešitvi sta

$$\boxed{x_1 = B_1 \sin(\omega_a t + \delta_a) + B_2 \sin(\omega_b t + \delta_b) \quad \text{in} \quad x_2 = B_1 \sin(\omega_a t + \delta_a) - B_2 \sin(\omega_b t + \delta_b)}$$

kjer $\omega_a = \omega_1$ in $\omega_b = \sqrt{\omega_1^2 + 2\omega_2^2}$.
Konstanti $B_1,\ B_2,\ \delta_a,\ \delta_b$ dobimo iz začetnih pogojev (položaji in hitrosti nihal ob času $t = 0$).

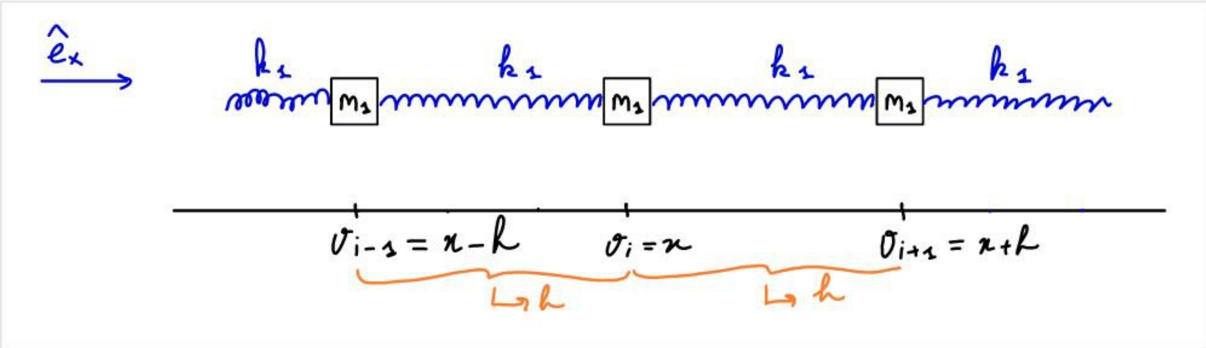
Lastno nihanje sestavljenega nihala

TODO: Poglavje

1.4 Mehansko valovanje - valovna enačba

Valovanje po vijačni vzmeti

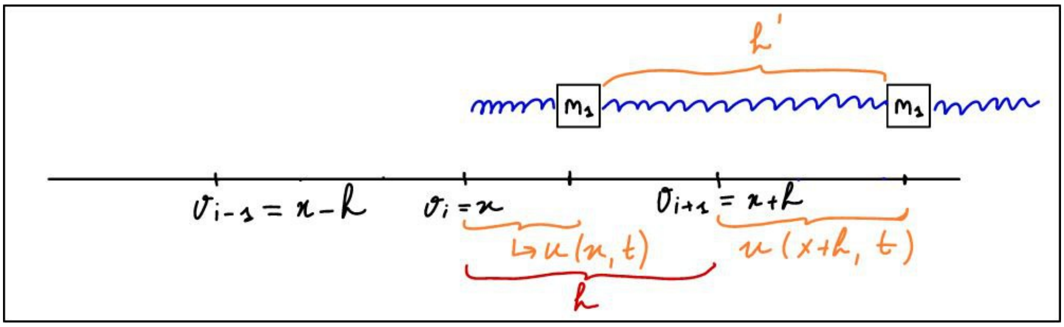
- Poskus: valovanje - širjenje motnje (def.) po vijačni vzmeti
- Model masivne vzmeti: veliko število drobnih mas, povezanih z neskončno lahkimi vijačnimi vzmetmi (sklopljena vzmetna nihala)



Začetna situacija:
- Masa celotne vzmeti: m
- Koeficient vzmeti: k
- Dolžina vzmeti: l

Razbijemo na n majhnih delov:
- Število uteži: n
- Masa eni uteži: $m_1 \frac{m}{n}$
- Razdalja med dvema uteži v ravnovesju: $h = \frac{l}{n} \iff n = \frac{l}{h}$
- Koeficient vzmeti med uteži: $k_1 = kn = k\frac{l}{h}$
- Ravnovesna lega i-te uteži: x

Kaj se dogaja izmed ravnovesja?



- Označimo z $u(x,t)$ odmik uteži, ki je v ravnovesni legi na položaju x, od ravnovesne lege v času t
  - Podobno definiramo: $u(x-h,t)$, $u(x+h,t)$ itn.
- Vsi odmiki so v smeri $\hat{e}_x$
- $x \neq x(t)$, tj. vzmet se ne premika sleda, da ravnovesne lege se ne premika
  - Tudi $\dot{x} = 0$
- $u(x,t) + h' = h + u(x+h,t) \implies \Delta h = h' - h = u(x+h,t) - u(x,t)$

Zdaj bi radi zapisali Newtonov zakon na i-ti utež. Dobimo:

$$\sum F_i = kl \cdot \frac{u(x+h,t) - 2u(x,t) + u(x-h,t)}{h}$$

Po drugi strani:

$$F_i = m_1 \cdot \frac{d^2u(x,t)}{dt^2} = m_1 \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{m}{n} h \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$$

Newtonov zakon za i-ti utež je torej

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{kl^2}{m} \cdot \frac{u(x+h,t) - 2u(x,t) + u(x-h,t)}{h^2}$$

Če $n \to \infty$, potem $h = \frac{l}{n} \to 0$. Dobimo

$$\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2} = \lim_{h\to 0} \frac{u(x+h,t) - 2u(x,t) + u(x-h,t)}{h^2} \quad (*)$$

$\dfrac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2}$ imenujemo **drugi simetrični odvod** u po x. Ta odvod je enak limiti na desni v izrazu (*), če obstaja.
Torej v limiti dobimo enačbo

$$\boxed{\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2} = C^2 \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2}}$$

kjer $C^2 = \dfrac{kl^2}{m}$. Tej enačbe pravimo **valovna enačba**.

- $[C^2] = \frac{\mathrm{m}^2}{\mathrm{s}^2} \implies [C] = \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$. C je **hitrost valovanja**.

Valovanje v tekočini, zaprti v tanki togi cevi

- Viskoznost: $\eta \to 0$, tj. ni sil med tekočino in steno
- $S = \mathrm{const}$, tj. cev je toga
- Stisljivost tekočine: χ

Velja:

$$\Delta p = -\frac{1}{\chi}\frac{\Delta V}{V} \text{ (sprememba tlaka)} \implies \frac{\Delta F}{S} = -\frac{1}{\chi}\frac{S\Delta l}{Sl} \implies \Delta F = -\frac{S}{\chi l}\Delta l$$

Če definiramo $k = \frac{S}{\chi l}$, dobimo zvezo $\Delta F = -k\Delta l$, ke je podobna Hookovemu zakonu. Torej tekočino lahko obravnavamo kot vzmet!
Po istem postopku dobimo valovno enačbo, pri čemer

$$C^2 = \frac{kl^2}{m} = \frac{Sl^2}{\chi lm} = \frac{Sl}{\chi m} = \frac{V}{\chi m} = \frac{1}{\chi\rho} \implies C^2 = \frac{1}{\chi\rho}$$

Valovanje po elastični palici

- Elastični modul: E
  - $[E] = \frac{\mathrm{N}}{\mathrm{m}^2}$
  - $\frac{\Delta F}{S} = -E\frac{\Delta l}{l}$

Če definiramo $k = \frac{ES}{l}$, dobimo $\Delta F = -k\Delta l$.
Spet uporabimo isti matematični model, dobimo isto enačbo, kjer

$$C^2 = \frac{kl^2}{m} = \frac{ESl^2}{lm} = \frac{ESl}{m} = \frac{EV}{m} = \frac{E}{\rho} \implies C^2 = \frac{E}{\rho}$$