Analiza 2a

28. oktober 2024

Kazalo

1 Funkcije več spremenljivk

1.1 Prostor $\mathbb{R}^n$

1.1.1 Prostor $\mathbb{R}^n$

Definicija 1.1.1. *Prostor* $\mathbb{R}^n$ je kartezični produkt $\underbrace{\mathbb{R} \times \cdots \times \mathbb{R}}_{n}$. Na njem definiramo seštevanje in množenje s skalarjem po komponentah. S tema operacijama je $(\mathbb{R}, +, \cdot)$ vektorski prostor nad $\mathbb{R}$. Posebej definiramo še skalarni produkt

$$x \cdot y = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i,$$

ki nam da normo $||x|| = \sqrt{x \cdot x}$ in metriko $d(x, y) = ||x - y||$. $(\mathbb{R}^n, d)$ je tako metrični prostor.

Definicija 1.1.2. Naj bosta $a, b \in \mathbb{R}^n$ vektorja, za katera je $a_i \leq b_i$ za vse $i \in \{1, \dots, n\}$. *Zaprt kvader*, ki ga določata a in b, je množica

$$[a, b] = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \forall i \in \{1, \dots, n\} : a_i \leq x_i \leq b_i\}.$$

Podobno definiramo *odprt kvader* kot

$$(a, b) = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \forall i \in \{1, \dots, n\} : a_i < x_i < b_i\}.$$

Opomba. Odprte množice v normah $||x||_\infty$ in $||x||_2$ so iste.

Izrek 1.1.3. Množica $K \subseteq \mathbb{R}^n$ je kompaktna natanko tedaj, ko je zaprta in omejena.

1.1.2 Zaporedja v $\mathbb{R}^n$

Definicija 1.1.4. *Zaporedje v* $\mathbb{R}^n$ je preslikava $a : \mathbb{N} \to \mathbb{R}^n$. Namesto $a(m)$ pišimo a_m, $a_m = (a_1^m, \dots, a_n^m)$.

Opomba. Zaporedje v $\mathbb{R}^n$ porodi n zaporedij v $\mathbb{R}$.

Trditev 1.1.5. Naj bo $(a_m)_m$ zaporedje v $\mathbb{R}^n$, $a_m = (a_1^m, \dots, a_n^m)$. Velja:

$$\text{Zaporedje } (a_m)_m \text{ konvergia } \Leftrightarrow \text{ konvergira zaporedja } (a_1^m)_m, \dots, (a_n^m)_m.$$

V primeru konvergence velja:

$$\lim_{m\to\infty} a_m = (\lim_{m\to\infty} a_1^m, \dots, \lim_{m\to\infty} a_n^m).$$

Dokaz. Definicija limite. $\square$

1.2 Zveznost preslikav iz $\mathbb{R}^n$ v $\mathbb{R}^m$

1.2.1 Zveznost preslikav iz $\mathbb{R}^n$ v $\mathbb{R}$

Definicija 1.2.1. Če je $m = 1$, potem preslikave rečemo *funkcija.*

Definicija 1.2.2. Naj bo $f : D \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ preslikava. Naj bo $a \in D$. *Preslikava f je zvezna v točki a*, če

$$\forall \epsilon > 0 \,.\, \exists \delta > 0 \,.\, \forall x \in D \,.\, ||x - a|| \Rightarrow ||f(x) - f(a)||.$$

Preslikava f je *zvezna na D*, če je zvezna v vsaki točki $a \in D$.

Trditev 1.2.3. Naj bo $f : D \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ preslikava. Naj bo $a \in D$. Preslikava f je zvezna v točki a natanko tedaj, ko za vsako zaporedje $(x_n)_n,\ x_n \in D$, ki konvergira proti a, zaporedje $(f(x_n))_n,\ f(x_n) \in \mathbb{R}^m$ konvergira proti $f(a)$.

Definicija 1.2.4. Naj bo $f : D \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ preslikava. Preslikava f je *enakomerno zvezna na D*, če

$$\forall \epsilon > 0 \,.\, \exists \delta > 0 \,.\, \forall x, x' \in D \,.\, ||x - x'|| < \delta \Rightarrow ||f(x) - f(x')|| < \epsilon.$$

Trditev 1.2.5. Zvezna preslikava na kompaktne množice je enakomerno zvezna.

Trditev 1.2.6. Naj bo $f : K^{\text{komp}} \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ zvezna preslikava. Potem je $f_*(K)$ kompaktna.

Definicija 1.2.7. Preslikava $f : D \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ je *C-lipschitzova*, če

$$\exists C \in \mathbb{R} \,.\, \forall x, x' \in D \,.\, ||f(x) - f(x')|| \leq C||x - x'||.$$

Trditev 1.2.8. Za preslikavo $f : D \to X'$ velja:

$$f \text{ je } C\text{-lipschitzova } \Rightarrow f \text{ je enakomerno zvezna } \Rightarrow f \text{ je zvezna.}$$

Trditev 1.2.9. Naj bosta $f, g : D \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ zvezni funkciji v $a \in D$. Naj bo $\lambda \in \mathbb{R}$. Tedaj so v a zvezni tudi funkcije:

$$f + g,\ f - g,\ \lambda f,\ fg.$$

Če za vsak $x \in D,\ g(x) \neq 0$, tedaj so v a zvezna tudi funkcija:

$$\frac{f}{g}.$$

Trditev 1.2.10. Kompozitum zveznih preslikav je zvezna preslikava.

Dokaz. Z zaporedji kot pri analizi 1. □

Zgled. Nekaj primerov zveznih preslikav.
- Preslikava $\Pi_j(x_1, \ldots, x_n) = x_j$ je zvezna na $\mathbb{R}^n$ za vsak $j = 1, \ldots, n$.
- Vse polinomi v n-spremenljivkah so zvezne funkcije na $\mathbb{R}^n$.
- Vse racionalne funkcije so zvezne povsod, razen tam, kjer je imenovalec enak 0.

Definicija 1.2.11. Preslikava $f : D \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ je *funkcija n-spremenljivk.*

Opomba. Naj bo (M, d) metrični prostor in $N \subset M$. Naj bo $f : M \to \mathbb{R}$ zvezna funkcija na M. Potem $f|_N$ je tudi zvezna funkcija na N.

Trditev 1.2.12. Naj bosta $D \subseteq \mathbb{R}^n$ in $D_j = \Pi_j(D)$. Naj bo $a \in D,\ a = (a_1, \ldots, a_n)$ in $f : D \to \mathbb{R}$ zvezna v a. Tedaj za vsak $j = 1, \ldots, n$ funkcija $\varphi_j : D_j \to \mathbb{R},\ \varphi_j(t) = f(a_1, \ldots, a_{j-1}, t, a_{j+1}, \ldots, a_n)$ zvezna v a_j.

Dokaz. Definicija zveznosti v točki. □

Opomba. Če je funkcija več spremenljivk zvezna v neki točki $a \in \mathbb{R}^n$, je zvezna tudi kot funkcija posameznih spremenljivk.

Zgled. Naj bo $f(x, y) = \begin{cases} \frac{2xy}{x^2+y^2}; & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0; & (x, y) = (0, 0) \end{cases}$. Ali je f zvezna kot funkcija vsake spremenljivke posebej? Ali je f zvezna na $\mathbb{R}^2$?

Zgled. Naj bo $f(x, y) = \begin{cases} \frac{2x^2y}{x^4+y^2}; & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0; & (x, y) = (0, 0) \end{cases}$. Ali je f zvezna kot funkcija vsake spremenljivke posebej? Ali je zvezna na vsaki premici? Ali je f zvezna na $\mathbb{R}^2$?

Opomba. Zgleda pokažeta, da obrat v prejšnji trditvi ne velja.

1.2.2 Zveznost preslikav iz $\mathbb{R}^n$ v $\mathbb{R}^m$

Naj bo $D \subseteq \mathbb{R}^n$ in $F : D \to \mathbb{R}^m$ preslikava. Naj bo $x \in D$, potem $F(x) \in \mathbb{R}^m,\ F(x) = y = (y_1, \dots, y_m)$.
Lahko pišemo $F(x) = (f_1(x), \dots, f_m(x))$. Torej F določa m funkcij n-spremenljivk.

Trditev 1.2.13. Naj bo $a \in D \subseteq \mathbb{R}^n$. Naj bo $F = (f_1, \dots, f_m) : D \to \mathbb{R}^m$ preslikava. Velja:

$$\text{Preslikava } F \text{ je zvezna v } a \Leftrightarrow f_1, \dots, f_m \text{ so zvezne v } a.$$

Dokaz. Definicija zveznosti v točki. □

Opomba. Linearne preslikave so zvezne, saj so vse koordinatne funkcije linearne (polinomi 1. stopnje).

Zgled (Omejenost linearnih preslikav)**.** Naj bo $\mathcal{A} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ linearna preslikava, potem

$$\exists M \in \mathbb{R} \,.\, M \geq 0 \,.\, \forall x \in \mathbb{R}^n \,.\, x \neq 0 \,.\, \frac{||\mathcal{A}x||}{||x||} \leq M.$$

Lahko zapišemo $\sup \frac{||\mathcal{A}x||}{||x||} = \sup_{||x||=1} ||\mathcal{A}x|| = ||A||$. Dobimo eno izmed norm na matrikah.
Trdimo: Naj bo $\mathcal{A} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ linearna preslikava. Tedaj je $\mathcal{A}$ zvezna na $\mathbb{R}^n$. Zveznost linearnih preslikav je ekvivalentna zveznosti v točki 0. Vse skupaj je ekvivalentno omejenosti linearnih preslikav.

Dokaz. Definicija zveznosti in omejenosti. □

Definicija 1.2.14. Naj bo $\mathcal{A} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ linearna preslikava. Preslikavo $\mathcal{A} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m,\ x \mapsto \mathcal{A}x + b,\ b \in \mathbb{R}^m$ imenujemo *afina preslikava.*

1.3 Parcialni odvodi in diferenciabilnost

1.3.1 Parcialni odvod

Definicija 1.3.1. Naj bo $f : D \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ funkcija. Naj bo $a = (a_1, \ldots, a_n) \in D$ notranja točka. Funkcija f je *parcialno odvedljiva po spremenljivki* x_j *v točki* a, če obstaja limita

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(a_1, \ldots, a_{j-1}, a_j + h, a_{j+1}, \ldots, a_n) - f(a_1, \ldots, a_n)}{h},$$

oz. če je funkcija

$$x_j \mapsto f(a_1, \ldots, a_{j-1}, x_j, a_{j+1}, \ldots, a_n)$$

odvedliva v točki a_j.
Če je ta limita obstaja, je to *parcialni odvod* funkcije f po spremenljivki x_j v točki a. Oznaki: $\frac{\partial f}{\partial x_j}(a),\ f_{x_j}(a),\ (D_j f)(a)$.

Opomba. Vse elementarne funkcije so parcialno odvedljive po vseh spremenljivkah tam, kjer so definirane.

Zgled. Naj bo $f(x, y, z) = e^{x+2y} + \cos(xz^2)$. Izračunaj $f_x(x, y, z),\ f_y(x, y, z),\ f_z(x, y, z)$.

1.3.2 Diferenciabilnost

Definicija 1.3.2. Naj bo $f : D \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ funkcija. Naj bo $a = (a_1, \ldots, a_n) \in D$ notranja točka. Funkcija f je *diferenciabilna v točki* a, če obstaja tak linearen funkcional $\mathcal{L} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, da velja:

$$f(a + h) = f(a) + \mathcal{L}(h) + o(h),$$

kjer

$$\lim_{h \to 0} \frac{||o(h)||}{||h||} = 0.$$

Opomba. Če je tak $\mathcal{L}$ obstaja, je enolično določen.

Dokaz. Pokažemo, da iz $\mathcal{L}(h) = (\mathcal{L}_1 - \mathcal{L}_2)(h) = (o_2 - o_1)(h) = o(h)$ sledi, da je $L = 0$. □

Definicija 1.3.3. Če je f diferenciabilna v a je $\mathcal{L}$ natanko določen in ga imenujemo *diferencial* funkcije f v točki a. Oznaka: $\mathcal{L} = df_a$. Linearen funkcional $\mathcal{L}$ imenujemo tudi *odvod* funkcije f v točki a. Oznaka: $(Df)(a)$.

Opomba. Recimo, da je funkcija f diferenciabilna v točki a. Preslikava $h \mapsto f(a) + (df_a)(h)$ je najboljša afina aproksimacija funkcije $h \to f(a + h)$.

Trditev 1.3.4. Naj bo $f : D \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ diferenciabilna v notranji točki $a \in D$. Tedaj je f v točki a parcialno odvedljiva po vseh spremenljivkah. Poleg tega je zvezna v točki a. Pri tem za $h = (h_1, \ldots, h_n)$ velja:

$$(df_a)(h) = \frac{\partial f}{\partial x_1}(a) \cdot h_1 + \ldots + \frac{\partial f}{\partial x_n}(a) \cdot h_n = f_{x_1}(a) \cdot h_1 + \ldots + f_{x_n}(a) \cdot h_n$$

Opomba. Naj bo $\mathcal{L} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ linearen funkcional, $x \in \mathbb{R}^n$, potem $\mathcal{L}(x) = l_1 x_1 + \ldots + l_n x_n = \begin{bmatrix} l_1 & \ldots & l_n \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$,
kjer $\begin{bmatrix} l_1 & \ldots & l_n \end{bmatrix}$ matrika linearnega funkcionala glede na standardne baze.

Dokaz. Zveznost pokažemo z limito. Za parcialno odvedljivost poglejmo kaj se dogaja za $h = (h_1, 0, \ldots, 0)$. □

Opomba. Trditev pove, da je $(df_a)(h) = \begin{bmatrix} \frac{\partial f}{\partial x_1}(a) & \ldots & \frac{\partial f}{\partial x_n}(a) \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} h_1 \\ \vdots \\ h_n \end{bmatrix} = (\frac{\partial f}{\partial x_1}(a), \ldots, \frac{\partial f}{\partial x_n}(a)) \cdot (h_1, \ldots, h_n)$.

Zapis: $(\vec{\nabla} f)(a) = (\operatorname{grad} f)(a) = (\frac{\partial f}{\partial x_1}(a), \ldots, \frac{\partial f}{\partial x_n}(a))$.
Vektor $(\operatorname{grad} f)(a)$ imenujemo *gradient funkcije* f v točki a. Operator $\vec{\nabla} = (\frac{\partial}{\partial x_1}, \ldots, \frac{\partial}{\partial x_n})$ je *operator Nabla.*

Zgled. Naj bo $f(x, y) = \begin{cases} \frac{2xy}{x^2+y^2}; & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0; & (x, y) = (0, 0) \end{cases}$. Ali je f diferenciabilna?

Zgled. Naj bo $f(x,y) = \begin{cases} \frac{2x^2y}{x^2+y^2}; & (x,y) \neq (0,0) \\ 0; & (x,y) = (0,0) \end{cases}$. Ali je f zvezna? Ali je f parcialno odvedljiva? Ali je f diferenciabilna?

Opomba. Zgleda pokažeta, da obrat v prejšnji trditvi ne velja

Izrek 1.3.5. Naj bo $f : D \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ funkcija in naj bo $a \in D$ notranja točka. Denimo, da je f parcialno odvedljiva po vseh spremenljivkah v točki a in so parcialni odvodi zvezni v točki a. Tedaj je f diferenciabilna v točki a.

Dokaz. Za $n = 2$. Definicija diferenciabilnosti + 2-krat Lagrangeev izrek. □

1.3.3 Višji parcialni odvodi

Naj bo $f : D^{\text{odp}} \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ funkcija. Denimo, da je f parcialno odvedljiva po vseh spremenljivkah na D: $f_{x_1}, \dots, f_{x_n}$. To so tudi funkcije n-spremenljivk in morda so tudi te parcialno odvedljive po vseh oz. nekatareih spremenljivkah.

Trditev 1.3.6. Naj bo funkcija f definirana v okolici $a \in \mathbb{R}^n$. Naj bosta $i, j \in \{1, 2, \dots, n\}$. Denimo, da na tej okolici obstajata $\frac{\partial f}{\partial x_i}$, $\frac{\partial f}{\partial x_j}$ in tudi druga odvoda $\frac{\partial}{\partial x_j}(\frac{\partial f}{\partial x_i})$, $\frac{\partial}{\partial x_i}(\frac{\partial f}{\partial x_j})$. Če sta $\frac{\partial}{\partial x_j}(\frac{\partial f}{\partial x_i})$, $\frac{\partial}{\partial x_i}(\frac{\partial f}{\partial x_j})$ zvezna v a, potem sta enaka v točki a:

$$\frac{\partial}{\partial x_j}\left(\frac{\partial f}{\partial x_i}\right)(a) = \frac{\partial}{\partial x_i}\left(\frac{\partial f}{\partial x_j}\right)(a).$$

Dokaz. Dovolj za $n = 2$.
Definiramo $J = f(a+h, b+k) - f(a+h, b) - f(a, b+k) + f(a, b)$ in $\varphi(x) = f(x, b+k) - f(x, b)$, $\psi(y) = f(a+h, y) - f(a, y)$. Zapišemo J s pomočjo funkcij φ, ψ ter uporabimo 2-krat Lagrangeev izrek in upoštevamo zveznost. □

Opomba. Pravimo, da parcialni odvodi komutirajo in pišemo $\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}$.

Definicija 1.3.7. Naj bo $D^{\text{odp}} \subseteq \mathbb{R}^n$. *Vektroski prostor vseh k-krat zvezno parcialno odvedljivih funkcij* označimo z $C^k(D)$. *Prostor gladkih funkcij* je $C^\infty(D) = \bigcap_{k=1}^\infty C^k(D)$. *Prostor zveznih funkcij na D* je $C(D)$.

Opomba. Funkcija $f \in C^k(D)$, če obstajajo vse parcialni odvodi funkcije f do reda k in so vse ti parcialni odvodi zvezni na D.

1.3.4 Diferenciabilnost preslikav

Definicija 1.3.8. Naj bo $F : D \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ preslikava, $a \in D$ notranja točka. Preslikava F je *diferenciabilna* v točki a, če obstaja taka linearna preslikava $\mathcal{L} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$, da velja:

$$F(a+h) = F(a) + \mathcal{L}(h) + o(h),$$

kjer je $\lim_{h\to 0} \frac{|o(h)|_m}{|h|_n}$.
Preslikavo $\mathcal{L}$ imenujemo *diferencial* F v točki a. Oznaka: dF_a. Imenujemo ga tudi *odvod* F v točki a. Oznaka: $(DF)(a)$.

Opomba. Kot pri funkcijah, če je tak $\mathcal{L}$ obstaja, je enolično določen.

Zgled. Obravnavaj diferenciabilnost preslikav:
- $\mathcal{A} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ linearna, $F(x) = \mathcal{A}x$.
- $F : \mathbb{R}^{n\times n} \to \mathbb{R}^{n\times n}$, $F(X) = X^2$. Namig: S pomočjo neenakosti CSB pokažimo, da $|H^2| \leq |H|^2$.

Izrek 1.3.9. Naj bo $a \in D$ notranja točka. Naj bo $F = (f_1, \dots, f_m) : D \to \mathbb{R}^m$ preslikava. Velja:

$$\text{Preslikava } F \text{ je diferenciabilna v } a \in D \Leftrightarrow \text{so } f_1, \dots, f_m \text{ diferenciabilne v } a.$$

Tedaj

$$(DF)(a) = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(a) & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n}(a) \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial f_m}{\partial x_1}(a) & \dots & \frac{\partial f_m}{\partial x_n}(a) \end{bmatrix}$$

Dokaz. ($\Rightarrow$) Zapišemo enakost $F(a+h) = F(a) + dF_a(h) + o(h)$ po komponentah.
($\Leftarrow$) Definicija diferenciabilnosti. □

Posledica 1.3.9.1. Naj bo $a \in D$ notranja točka. Naj bo $F = (f_1, \ldots, f_m) : D \to \mathbb{R}^m$ preslikava. Velja:
Če so vse funkcije $f_1, \ldots, f_m$ v točki a parcialno odvedlivi po vseh spremenljivkah in so ti vse odvodi zvezni v točki a, potem je F diferenciabilna v točki a.

Zgled. Naj bo $F(x, y, z) = (x^2 + 2y + e^z, xy + z^2)$, $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$. Določi $(DF)(1, 0, 1)$.

Definicija 1.3.10. Preslikava $F : D^{\text{odp}} \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ je razreda $C^k(D)$, če so $f_1, \ldots, f_m \in C^k(D)$.

Izrek 1.3.11 (Verižno pravilo)**.** Naj bo $a \in D \subseteq \mathbb{R}^n$ notranja točka. Naj bo $b \in \Omega \subseteq \mathbb{R}^m$ notranja točka. Naj bo $F : D \to \Omega$ diferenciabilna v točki a in velja $F(a) = b$. Naj bo $G : \Omega \to \mathbb{R}^k$ diferenciabilna v točki b. Tedaj $G \circ F$ diferenciabilna v točki a in velja:

$$D(G \circ F)(a) = (DG)(b) \cdot (DF)(a) = (DG)(F(a)) \cdot (DF)(a).$$

Označimo $F(x_1, \ldots, x_n) = (f_1(x_1, \ldots, x_n), \ldots, f_m(x_1, \ldots, x_n))$ in $G(y_1, \ldots, y_m) = (g_1(y_1, \ldots, y_m), \ldots, g_k(y_1, \ldots, y_m))$. Potem

$$D(G \circ F)(a) = \begin{bmatrix} \frac{\partial g_1}{\partial y_1} & \cdots & \frac{\partial g_1}{\partial y_m} \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial g_k}{\partial y_1} & \cdots & \frac{\partial g_k}{\partial y_m} \end{bmatrix} (b) \cdot \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial f_m}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial f_m}{\partial x_n} \end{bmatrix} (a)$$

Dokaz. Definicija diferenciabilnosti. □

Posledica 1.3.11.1 ($k = 1$, $G = g$ funkcija)**.** Naj bo $\Phi(x_1, \ldots, x_n) = g(f_1(x_1, \ldots, x_n), \ldots, f_m(x_1, \ldots, x_n))$. Potem

$$\frac{\partial \Phi}{\partial x_j}(a) = \frac{\partial g}{\partial y_1}(b) \cdot \frac{\partial f_1}{\partial x_j}(a) + \frac{\partial g}{\partial y_2}(b) \cdot \frac{\partial f_2}{\partial x_j}(a) + \ldots + \frac{\partial g}{\partial y_m}(b) \cdot \frac{\partial f_m}{\partial x_j}(a)$$

Zgled. Naj bo $F(x, y) = (x^2 + y, xy)$, $g(u, v) = uv + v^2$. Naj bo $\Phi = g \circ F$. Izračunaj $(D\Phi)(x, y)$ na dva načina.

1.4 Izrek o implicitni funkciji

1.4.1 Osnovna verzija izreka o implicitni funkciji

Radi bi poiskali zadostni pogoji na funkcijo $f(x, y)$, da bi enačba $f(x, y) = 0$ lokalno v okolici točki (a, b), za katero velja $f(a, b) = 0$, predstavljala graf funkcije $y = \varphi(x)$.

Izrek 1.4.1 (Osnovna verzija izreka o implicitni funkciji)**.** Naj bo $D^{\text{odp}} \subseteq \mathbb{R}^2$. Naj bo $(a, b) \in D$. Naj bo $f : D \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ funkcija, $f \in C^1(D)$ in naj velja:

1. $f(a, b) = 0$.
2. $f_y(a, b) \neq 0$.

Potem obstajata $\delta > 0$ in $\epsilon > 0$, da velja: $I \times J \subseteq D$, kjer je $I = (a - \delta, a + \delta)$, $J = (b - \epsilon, b + \epsilon)$ in enolično določena C^1 funkcija $\varphi : I \to J$, za katero velja:

1. $\varphi(a) = b$.
2. $\forall (x, y) \in I \times J \,.\, f(x, y) = 0 \Leftrightarrow y = \varphi(x)$ (rešitve enačbe $f(x, y) = 0$ so natanko graf funkcije φ).
3. $\varphi'(x) = -\frac{f_x(x,\varphi(x))}{f_y(x,\varphi(x))}$ za vsak $x \in I$.

Dokaz. Funkcijo φ konstruiramo s pomočjo izreka o bisekciji z upoštevanjem stroge monotonosti funkciji $y \mapsto f(x, y)$. Zveznost ($\overline{I} \times \overline{J}$ je kompaktna), odvedljivost in zveznost odvoda pokažemo z pomočjo izraza $f(x+\Delta x, y+\Delta y) - f(x, y) = 0$ in Lagrangeeva izreka, kjer $x + \Delta x \in (a - \delta, a + \delta)$, $y = \varphi(x)$, $y + \Delta y = \varphi(x + \Delta x)$. ☐

Opomba. Če je $f \in C^k(D)$, potem $\varphi \in C^k(I)$.

Zgled. Kaj če pogoji niso izpolnjeni?

1. $f(x, y) = (x - y)^2$, $f(x, y) = 0$ v okolici točke $(0, 0)$ (pogoji ni potrebni).
2. $f(x, y) = y^3 - x$, $f(x, y) = 0$ v okolici točke $(0, 0)$ (odvedljivost φ).
3. $f(x, y) = y^2 - x^2 - x^4$, $f(x, y) = 0$ v okolici točke $(0, 0)$ (enoličnost φ).
4. $f(x, y) = y^2 + x^2 + x^4$, $f(x, y) = 0$ v okolici točke $(0, 0)$ (množica rešitev).

1.4.2 Izrek o inverzni preslikavi

Naj bo $\Phi : D^{\text{odp}} \subseteq \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^m$ preslikava, $\Phi \in C^1(D)$. Kakšne so zadostni pogoji za (lokalno) obrnljivost preslikave Φ?

Definicija 1.4.2. Naj bosta D, $\Omega \subseteq \mathbb{R}^m$ odprti. Preslikava $\Phi : D \to \Omega$ je C^1*-difeomorfizem*, če

1. Φ je bijekcija,
2. $\Phi \in C^1(D)$,
3. $\Phi^{-1} \in C^1(\Omega)$.

Podobno definiramo C^k*-difeomorfizem* za $k \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$.

Zgled. Ali je $f(x) = x^3$, $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ difeomorfizem?

Trditev 1.4.3. Naj bosta D, $\Omega \subseteq \mathbb{R}^m$ odprti. Naj bo $\Phi : D \to \Omega$ C^1-difeomorfizem. Tedaj je $\det(D\Phi) \neq 0$ na D.

Dokaz. Pogledamo $\Phi^{-1} \circ \Phi = \mathrm{id}_D$ (verižno pravilo). ☐

Posledica 1.4.3.1. $(D\Phi^{-1})(y) = (D\Phi)^{-1}(x)$, kjer $y = \Phi(x)$.

Zgled. Ali velja obrat trditve? Naj bo $\Phi(x, y) = (e^x \cos y, e^x \sin y)$, $\Phi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$. Ali je Φ difeomorfizem?

Izrek 1.4.4 (Izrek o inverzni preslikavi)**.** Naj bo $D^{\text{odp}} \subseteq \mathbb{R}^m$ in $\Phi : D \to \mathbb{R}^m$ preslikava razreda C^1. Naj bo $a \in D$ in $b = \Phi(a)$. Če je $\det(D\Phi)(a) \neq 0$, potem obstajata okolici $a \in U \subseteq \mathbb{R}^m$ in $b \in V \subseteq \mathbb{R}^m$, da je $\Phi : U \to V$ C^1-difeomorfizem. Pravimo, da je preslikava Φ *lokalni difeomorfizem*.

Dokaz. TODO. ☐

Posledica 1.4.4.1. Če je Φ razreda C^k za $k \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$, je Φ lokalni C^k difeomorfizem.

Dokaz. Indukcija na k. ☐

Opomba. Če je $m = 1$, dobimo izrek iz analize 1.

1.4.3 Izrek o implicitni funkciji

Imamo $n+m$ spremenljivk: (x, y), kjer $x = (x_1, \ldots, x_n)$, $y = (y_1, \ldots, y_m)$ in m enačb:

$$\begin{aligned} f_1(x, y) &= 0 \\ f_2(x, y) &= 0 \\ &\vdots \\ f_m(x, y) &= 0 \end{aligned}$$

Ali lahko zapišemo $y = \Phi(x)$?

Primer (Linearen primer)**.** Naj bosta $\mathcal{A} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$, $\mathcal{B} : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^m$ linearni, $b \in \mathbb{R}^m$. Naj rešujemo enačbo $Ax+By = b$. Kdaj lahko za vsak $b \in \mathbb{R}^m$ iz te enačbe y razrišemo kot funkcijo x?
Če je $n = 0$, potem rešujemo enačbo $By = b$. Kdaj lahko to enačbo enolično rešimo za vsak $b \in \mathbb{R}^m$?