1 Hilbertovi prostori

1. Vektorski prostor s skalarnim produktom
   Naj bo X vektorski prostor nad $\mathbb{R}$ (ali nad $\mathbb{C}$).
   - **Definicija.** Skalarni produkt.
   - **Trditev.** Cauchy-Schwartzova neenakost.
   - **Definicija.** Norma na vektorskem prostoru X.
   - **Trditev.** Norma, ki je dobljena iz skalarnega produkta.
   - **Trditev.** Metrični prostor, porojeni z normo.
2. Hilbertovi prostori
   - **Definicija.** Hilbertov prostor. Banachov prostor.
   - **Zgled.** Standardni skalarni produkti na $\mathbb{R}^n$ in $\mathbb{C}^n$. Norme, ki ne pridejo iz skalarnega produkta.
3. Prostor $L^2([a,b])$
   - **Trditev.** Standardni skalarni produkt na prostoru $C([a,b])$.
   - **Trditev.** Ali je prostor $C([a,b])$ s standardnim skalarnim produktom Hilbertov?
   - **Zgled.** Kako lahko napolnimo prostor $((0,1),d_2)$?
   - **Definicija.** Kadar pravimo, da lahko napolnimo metrični prostor (M,d)? Napolnitev prostora.
   - **Opomba.** Kaj je ponavadi prostor $\overline{M}$?
   - **Opomba.** Prostor $L^1(A)$.
   - **Definicija.** Prostor $L^2([a,b])$.
   - **Opomba.** Ali je produkt dveh $L^2([a,b])$ funkcij $L^1([a,b])$ funkcija? Skalarni produkt na $L^2([a,b])$
   - **Trditev.** Ali je $L^2([a,b])$ vektorski prostor nad $\mathbb{R}$?
   - **Opomba.** Ali je $C([a,b]) \subseteq L^2([a,b])$? Ali je $C([a,b])$ gost v $L^2([a,b])$? Kaj pomeni, da zaporedje $(f_n)_n \in L^2([a,b])$ konvergira k $f \in L^2([a,b])$?
   - **Izrek.** Ali je $L^2([a,b])$ Hilbertov prostor? Kako sta povezana prostora $L^2([a,b])$ in $C([a,b])$? [brez dokaza]
   - **Opomba.** Kako zgleda skalarni produkt nad $\mathbb{C}$?
   - **Zgled.** Navedi primer funkcije ko limita po točkah ni enaka limite v L^2 smislu. Navedi primer funkcije za katero ne obstaja limita po točkah, limita v L^2 smislu pa obstaja.
4. Ortogonalnost
   Naj bo X vektorski prostor s skalarnim produktom, $A \subseteq X$, $A \neq \emptyset$.
   - **Definicija.** Kadar sta dva vektorja pravokotna? Ortogonalni komplement množice A.
   - **Trditev.** Ali je $A^\perp$ vektorski podprostor v X?
   - **Opomba.** V kakšni relaciji sta A in $(A^\perp)^\perp$?
   - **Trditev.** Naj bo $v \in X$. Ali je $f : X \to \mathbb{R}$, $f(x) = \langle x, v\rangle$ zvezna?
   - **Posledica.** Ali je $A^\perp$ zaprt podprostor v X?
   - **Opomba.** Ali je $C([a,b])$ zaprt podprostor v $L^2([a,b])$?
   - **Opomba.** V kakšni relaciji sta A in $(A^\perp)^\perp$, če je X Hilbertov in A zaprt podprostor?
   - **Trditev.** Pitagorjev izrek.

Naj bo X vektorski prostor s skalarnim produktom, $Y \leq X$ podprostor v X.

- **Definicija.** Pravokotna projekcija vektorja $x \in X$ na podprostor Y.
- **Trditev.** Kaj lahko povemo o pravokotne projekcije vektorja $x \in X$ na Y, če obstaja? TODO: *
- **Zgled.** Ali imajo funkcije iz $L^2([a,b]) \setminus C([a,b])$ najboljšo aproksimacijo z zveznimi funkciji?
- **Opomba.** Lastnosti P_Y:
  - Ali je P_Y idempotent?
  - Kakšna zveza med $||x||$ in $||P_Y(x)||$?
  - Ali je $P_Y : X \to Y$ linearna in zvezna?
  - Ali je Y zaprt podprostor, če je P_Y definirana na X?
  - Recimo, da $P_Y(x)$ obstaja. Ali obstaja tudi $P_{Y^\perp}(x)$?
- **Trditev.** Razvoj $P_Y(x)$ po ONB.

5. Ortogonalni sistem

   Naj bo X vektorski prostor s skalarnim produktom.
   - **Definicija.** Ortogonalni sistem (OS). Ortonormiran sistem (ONS).
   - **Trditev.** Besselova neenakost. TODO: *
   - **Posledica.** Čemu je enaka limita $\lim_{j\to\infty}\langle x, e_j\rangle$?
   - **Opomba.** Zakaj potrebujemo absolutno vrednost? Kaj so $(\langle x, e_j\rangle)_{j=1}^{\infty}$?
   - **Trditev.** Naj bo $(e_j)_{j=1}^{\infty}$ ONS, $(c_j)_j$ tako zaporedje števil, da $\sum_{j=1}^{\infty}|c_j|^2 < \infty$. Kaj potem?
   - **Definicija.** Kompleten ortonormiran sistem (KONS).
   - **Trditev.** 6 ekvivalentnih trditev o KONS. TODO: *
   - **Zgled.** Modelni Hilbertov prostor.

6. Prostor $L^2([-\pi,\pi])$
   - ONS na prostoru $L^2([-\pi,\pi])$.
   - **Opomba.** Kako lahko obravnavamo vsako funkcijo $f : [-\pi,\pi] \to \mathbb{R}$ v tem kontekstu?
   - Klasične Fourierjevi koeficienti. Fourierjeva vrsta. TODO: *
   - **Trditev.** Riemann-Lebesgueva lema.
   - **Trditev.** Parsevalova enakost.
   - **Zgled.** Definiramo funkcijo $f : [-\pi,\pi] \to \mathbb{R}$ s predpisom

     $$f(x) = \begin{cases} 1; & 0 \leq x \leq \pi \\ 0; & -\pi < x < 0. \end{cases}$$

     Razvij f v Fourierjevo vrsto ter izračunaj $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$.
   - **Lema.** Naj bo $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ odsekoma zvezna periodična funkcija s periodo 2π. Čemu je enak integral $\int_a^{a+p} f(x)\,dx$?
   - **Lema.** Dirichletovo jedro.
   - **Lema.** 3 lastnosti Dirichletovega jedra.
   - **Izrek.** Fourierjeva vrsta funkcije. TODO: *
   - **Zgled.** S pomočjo vrste iz prejšnjega zgleda izračunaj $\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\frac{1}{2k+1}$.
   - **Definicija.** Cesarjeve delne vsote. Fourierjevo jedro.
   - **Trditev.** 5 lastnosti Fourierjeva jedra.
   - **Izrek.** Naj bo f 2π periodična zvezna funkcija. Kaj lahko povemo o Cesarjevih delnih vsotih?

- **Izrek.** Ali je prej definiran ONS na L^2 KONS?
- **Opomba.** Trigonometrični polinomi.
- **Izrek.** Weierstrassov isrek.

2 Vektorska analiza

1. Skalarno in vektorsko polje
   - **Definicija.** Skalarno polje. Vektorsko polje.
   - **Definicija.** Pozitivno/negativno orientirana ONB.
   - **Opomba.** Prehod med bazi.
2. Smerni odvod skalarnega polja
   Naj bo $u : D \subseteq \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ skalarno polje.
   - **Definicija.** Smerni odvod skalarnega polja u.
   - **Opomba.** Kaj meri smerni odvod? Kaj so smerni odvodi v smeri baznih vektorjev?
   - **Opomba.** Kako izračunamo smerni odvod skalarnega polja u v točki p_0, če je u diferenciabilno v p_0? Kaj to pomeni v kartezičnih koordinatih?
   - **Definicija.** Gradient skalarnega polja.
   - **Opomba.** Ali je gradient odvisen od izbire baze? Kaj smo priredili skalarnemu polju?
   - **Trditev.** V kakšni smeri se najhitreje narašča skalarno polje? V kakšni smeri pa najhitreje pada?
   - **Definicija.** Operator nabla.
   - **Opomba.** Kako se z operatorjem nabla izraža gradient skalarnega polja?
   - **Definicija.** Divergenca vektorskega polja.
   - **Opomba.** Ali je divergenca odvisna od izbire baze?
   - **Definicija.** Rotor vektorskega polja.
   - **Opomba.** Odvisnost rotorja od izbire baze.
   - **Trditev.** Rotor gradienta. Divergenca rotorja.
   - **Opomba.** Ali je divergenca gradienta enaka nič?
   - **Definicija.** Laplaceov operator. Harmonična funkcija.
   - **Definicija.** Potencialno polje. Potencial. Irotacionalno (nevrtinčno) polje. Solenoidalno polje.
   - **Opomba.** Zadosten pogoj, da je polje irotacionalno, Zadosten pogoj, da je polje solenoidalno. Kaj pa obrat?
   - **Zgled.** Izračunaj rotor polja $\vec{f}(x,y,z) = \left(-\frac{y}{x^2+y^2}, \frac{x}{x^2+y^2}, 0\right)$. Ali je polje potencialno?
   - **Definicija.** Zvezdasto območje.
   - **Izrek.** Kdaj je nevrtinčno polje potencialno? Kdaj je polje rotor nekega drugega polja?
   - **Zgled.** Ali je polje $\vec{f}(x,y,z) = (y^2z^3+2, 2xyz^3+1, 3xe^2z^2)$ potencialno? Čemu je enak $\operatorname{rot} \vec{f}$? Ali je polje $\vec{g}(x,y,z) = (2y-1, -1, 4x-2xy)$ solenoidalno?
   - **Opomba.** V kakšni obliki lahko lokalno zapišemo vsako vektorsko polje?
3. Krivuljni integral
   - Regularna parametrizacija krivulje.
   - **Definicija.** Dolžina krivulje.
   - **Opomba.** Ali je definicija neodvisna od izbire regularne parametrizacije?
   - **Zgled.** Naravni parameter.
   - **Zgled.** Vijačnico lahko parametriziramo s predpisom $t \mapsto (a\cos t, a\sin t, bt)$. Določi naravno parametrizacijo vijačnice.

- **Definicija.** Orientacija krivulje. Usklajen izbor orientacije. Orientirana krivulja.
- **Opomba.** Ali je vsaka krivulja orientabilna? Kaj če je krivulja odsekoma gladka? Krivulja z robom.
- **Definicija.** Integral skalarnega polja vzdolž krivulje.
- **Opomba.** Kaj je dolžina krivulje? Ali je vrednost odvisna od izbire regularne parametrizacije? Kaj je skalarno polje v fizikalnem smislu? Kaj če je krivulja odsekoma gladka?
- **Zgled.** Naj bo $\Gamma = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 = a^2,\ y \geq 0\}$ homogena polkrožnica. Določi lego težišča Γ.
- **Definicija.** Integral vektorskega polja vzdolž krivulje.
- **Opomba.** Fizikalni pomen. Ali je definicija odvisna od izbire regularne parametrizacije?
- **Zgled.** Naj bo $\vec{f}(x, y, z) = (xy, z, x - z)$ ter $\Gamma : \vec{r}(t) = (t, t, \frac{1}{2}t^2), t \in [0, 1]$. Izračunaj integral $\vec{f}$ po Γ.
- **Zgled.** TODO: Delo sile teže.
- **Opomba.** Zapis integrala vektorskega polja v diferenciabilni formi. Integral po sklenjeni krivulji.
- **Trditev.** Kaj če integriramo potencialno polje?
- **Posledica.** Kaj če integriramo potencialno polje po sklenjeni krivulji?
- **Zgled.** Izračunaj integral polja $\vec{f}(x, y, z) = \left(-\frac{y}{x^2+y^2}, \frac{x}{x^2+y^2}, 0\right)$ po krožnice.
- **Izrek.** Karakterizacija potencialnih vektorskih polj.

3 Kompleksna analiza

1. Kompleksna števila
   - Komutativni obseg $\mathbb{C}$. Vložitev $\mathbb{R}$ v $\mathbb{C}$.
   - Imaginarna enota i. Kvadrat imaginarne enote i^2.
   - Algebraičen zapis kompleksnega števila. Realni in kompleksni del. Gaussova ravnina.
   - Konjugiranje. Absolutna vrednost. Kaj velja za absolutno vrednost?
   - Polarni zapis kompleksnega števila.
   - Metrika (topologija) na $\mathbb{C}$. Odprt krog v $\mathbb{C}$.
   - Zaporedja v $\mathbb{C}$.
   - Karakterizacija povezanih množic v $\mathbb{C}$. Komponente za povezanost.
   - **Definicija.** Območje.
   - Zveznost preslikave $f : D \subseteq \mathbb{C} \to \mathbb{C}$. Limita.
   - Kako kompleksna funkcija definira realni? Kdaj je kompleksna funkcija f zvezna?
   - Riemannova sfera (kompaktifikacija z eno točko).
2. Holomorfne funkcije
   Naj bo $D \subseteq \mathbb{C}$ območje ter $f : D \to \mathbb{C}$ kompleksna funkcija.
   - **Definicija.** Kompleksni odvod funkcije f v točki $a \in D$. Holomorfna funkcija. Množica vseh holomorfnih funkcij.
   - **Opomba.** Ali je kompleksni odvod močnejši od običajnega?
   - **Posledica.** Ali je kompleksno odvedljiva funkcija v točki $a \in D$ diferenciabilna? Ali je zvezna?
   - **Opomba.** Ali je $f(z) = \overline{z}$ kompleksno linearna? Ali je linearna? Ali je kompleksno odvedljiva?
   - **Trditev.** Kakšno strukturo ima $O(D)$? Pravila za odvajanje.
   - **Trditev.** Kompleksni odvod kompozicije.
3. Cauchy-Riemannove enačbe
   Naj bo $D \subseteq \mathbb{C}$ območje ter $f : D \to \mathbb{C}$ kompleksna funkcija.
   - **Izrek.** Cauchy-Riemannove enačbe.
   - **Opomba.** Kako izračunamo kompleksni odvod?
   - **Zgled.** TODO: Račun odvodov.
   - **Opomba.** Simboli $\frac{\partial f}{\partial \overline{z}}$ ter $\frac{\partial f}{\partial z}$
   - **Trditev.** Karakterizacija holomorfnosti f. Cauchy-Riemmanova enačba.
   - **Zgled.** TODO: Račun odvodov.
   - **Opomba.** Kdaj je intuitivno f holomorfna?
   - **Trditev.** Kdaj je f holomorfna na $D \subseteq \mathbb{C}$ (diferencial)?
   - **Izrek.** Zadosten pogoj, da je f konstanta.
   - **Izrek.** kaj če je f holomorfna na območju D ter $f_*(D) \subseteq \mathbb{R}$?
   - **Izrek.** Pišimo $f = u + iv$. Recimo, da je $f \in O(D)$ ter $f \in C^2(D)$. Kaj lahko povemo o u in v?
   - **Definicija.** Harmonična konjugiranka.
   - **Opomba.** Kaj če imamo eno harmonično konjugiranko? V čim se razlikujeta dve harmonični konjugiranki?
   - **Zgled.** Pokaži, da je $u(x, y) = xy$ harmonična in določi njeno harmonično konjugiranko. Pokaži, da je $\log |z|$ harmonična na $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ in na $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ nima

harmonične konjugiranke.
- **Izrek.** Zadosten pogoj za obstoj harmonične konjugiranke.