Diskretna matematika 1

11. november 2024

1 Kombinatorika

1.1 Osnovna načela kombinatorike

Trditev 1.1 (Načelo produkta)**.** *Če sta A, B končni množici, potem je*

$$|A \times B| = |A| \cdot |B|.$$

Trditev 1.2 (Posplošeno načelo produkta)**.** *Če so $A_1, \dots, A_k$ končne, potem je*

$$|\Pi_{i=1}^{k} A_i| = \Pi_{i=1}^{k} |A_i|.$$

Trditev 1.3 (Načelo vsote)**.** *Če sta A in B končni in disjunktni množici, potem je*

$$|A \cup B| = |A| + |B|.$$

Trditev 1.4 (Posplošeno načelo vsote)**.** *Če so $A_1, \dots, A_k$ končne, paroma disjunktne množice, potem je*

$$\bigcup_{i=1}^{k} A_i = \sum_{i=1}^{k} |A_i|.$$

Trditev 1.5 (Načelo enakosti)**.** *Če obstaja bijekcija $A \to B$, potem je*

$$|A| = |B|.$$

Označimo z $[k] = \{1, 2, \dots, k\}$.

Primer. Naj bo A končna množica, $|A| = n$, $A = \{a_1, a_2, \dots, a_n\}$. Naj bo 2^A potenčna množica. Določi moč 2^A.

Trditev 1.6 (Načelo dvojnega preštevanja)**.** *Z njim pokažemo, da sta dva izraza/formuli enaka, če z obema na različna načina preštejemo elemente iste množice.*

Primer (Eulorjeva funkcija ϕ). Za $n \in \mathbb{N}$ definiramo $\phi(n) =$ število števil iz $[n]$, ki so tuji z n. Določi $\sum_{d|n} \phi(d)$.

Trditev 1.7 (Dirichletovo načelo)**.** *Če sta $n, m \in \mathbb{N}$ in je $n > m$, potem ne obstaja injektivna preslikava $[n] \to [m]$.*

Opomba (Kombinatorična interpretacija). Če n predmetov razporedimo v m predalov in je $n > m$, potem sta vsaj v enem predalu vsaj dva predmeta.

Primer. Naj bo $X \subset [100]$, $|X| = 10$. Pokaži, da X vsebuje dve disjunktni podmnožici z isto vsoto.

1.2 Število preslikav

Definicija 1.1. Množica $B^A = \{f : A \to B\}$ je *množica vseh preslikav iz A v B.*

Definicija 1.2. Definiramo:

- $n^{\underline{k}} = \underbrace{n(n-1)\dots(n-k+1)}_{k \text{ faktorjev}}$ je *padajoča potenca.*
- $n^{\overline{k}} = n(n+1)\dots(n+k-1)$ je *naraščajoča potenca.*
- $n! =^{\underline{n}}$ je *n fakulteta.*
- Množica z n elementi se imenuje *n-množica.*

Trditev 1.8. *Naj bosta N in K končni množici z $|N| = n$, $|K| = k$. Tedaj velja:*

1. $|K^N| = k^n$.
2. *Število injektivnih preslikav iz N v K je $k^{\underline{n}}$.*
3. *Število bijekcij iz N v K je $n!$, če $n = k$ in je 0 sicer.*

Dokaz. Za 1. in 2. točko uporabimo načelo enakosti. V 3. točki upoštevamo, kadar je preslikava iz končne množice v končno množico bijektivna. □

1.3 Binomski koeficienti in binomski izrek

Definicija 1.3. Naj bo $x \in \mathbb{C}$. Naj bo $k \in \mathbb{N}_0 = \{1, 2, \dots\}$. Definiramo $\binom{x}{k} = \frac{x^{\underline{k}}}{k!} = \frac{x(x-1)\dots(x-k+1)}{k!}$. Števila $\binom{x}{k}$ so *binomski koeficienti.* Če je $k \notin \mathbb{N}_0$ definiramo $\binom{x}{k} = 0$.

Trditev 1.9. *Če je $n \in \mathbb{N}_0$ in $k \leq n,\ k \in \mathbb{N}_0$, potem je*

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}.$$

Števila $\binom{n}{k}$ so binomska števila.

Dokaz. Definicija binomskega koeficienta. □

Opomba. Tudi $\binom{0}{0} = 1$. Razlaga: $0! = 1$ je število bijektivnih preslikav iz $\emptyset$ v $\emptyset$.

Opomba. Če je $0 \leq k \leq n$, potem $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$.

Definicija 1.4. Naj bo N množica. Definiramo $\binom{N}{k} = \{A \in P(N) \mid |A| = k\}$.

Trditev 1.10. *Če je N n-množica in je $0 \leq k \leq n$, potem je*

$$\left|\binom{N}{k}\right| = \binom{n}{k}.$$

Dokaz. Definiramo $X = \{(n_1, n_2, \dots, n_k);\ n_i \in \mathbb{N}$ paroma različni$\}$. Označimo $X_{n,k} = \left|\binom{N}{k}\right|$. Preštejemo elementi množici X na 2 načina. □

Trditev 1.11. *Za $n \in \mathbb{N}$ in $1 \leq k \leq n$ velja:*

$$\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k}.$$

Dokaz. Naj bo N n-množica. Naj bo $x \in N$ poljuben fiksen element.
Definiramo $\mathcal{A} = \left\{A \in \binom{N}{k};\ x \in A\right\}$ in $\mathcal{B} = \left\{B \in \binom{N}{k};\ x \notin B\right\}$. Potem $\binom{N}{k} = \mathcal{A} \cup \mathcal{B}$. Uporabimo prejšnjo trditev in načelo vsote. □

Definicija 1.5. *Pascalov trikotnik* je trikotnik oblike

$$\begin{array}{ccccccccccc}
 & & & & & 1 & & & & & \\
 & & & & 1 & & 1 & & & & \\
 & & & 1 & & 2 & & 1 & & & \\
 & & 1 & & 3 & & 3 & & 1 & & \\
 & 1 & & 4 & & 6 & & 4 & & 1 & \\
1 & & 5 & & 10 & & 10 & & 5 & & 1
\end{array}$$

Opomba. S pomočjo Paskalovega trikotnika se lahko spomnimo rekurzivno formulo za $\binom{n}{k}$ (n je številka vrstice, k je številka diagonale, ki jo gledamo z leve proti desni). Šteteti vrstice in diagonale začnemo z 0.

Izrek 1.12 (Binomski izrek)**.** *Za vsak $n \in \mathbb{N}_0$ velja:*

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k}.$$

Dokaz. Izberimo k-krat a izmed n oklepajev. □

Opomba. V izreku sta a in b elementi poljubnega komutativnega kolobarja.

1.4 Izbori

Naj bo N n-mnižica. Opazujemo izbori k-elementov.

1. Izbor je urejen (važno v kakšnem vrstnem redu izberimo elementi):
   1.1 Elementi si lahko ponavljajo: n^k.
   1.2 Elementi se ne smejo ponavljati: $n^{\underline{k}}$.
2. Izbor je neurejen:
   2.1 Elementi si lahko ponavljajo [trditev]: $\binom{n+k-1}{k}$.
   2.2 Elementi se ne smejo ponavljati: $\binom{n}{k}$.

Trditev 1.13. *Število neurejenih izborov s ponavljanjem dolžine k iz n-množice N je*

$$\binom{n+k-1}{k}.$$

Dokaz. Naj bo $N = \{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$.
Neurejenemu izboru $\underbrace{x_1 \ldots x_1}_{k_1}\underbrace{x_2 \ldots x_2}_{k_2}\ldots\underbrace{x_n \ldots x_n}_{k_n}$ priredimo niz $\underbrace{1\ldots1}_{k_1}0\underbrace{1\ldots1}_{k_2}0\ldots0\underbrace{1\ldots1}_{k_n}$. ☐

1.5 Permutacije in permutacije s ponavljanjem

Definicija 1.6. Naj bo A n-množica. *Permutacija množice A* je bijektivna preslikava $\pi : A \to A$.
Množico vseh permutacij velikosti n (permutacij na $[n]$) označimo z S_n. Množico vseh permutacij množice A označimo z S_A.

Trditev 1.14. $|S_n| = n!$.

Dokaz. Z indukcijo pokažemo, da je $|S_n| = n|S_{n-1}|$ in $|S_1| = 1$. ☐

Trditev 1.15. *Vsako permutacijo lahko zapišemo kot produkt disjunknih ciklov.*

Definicija 1.7. Naj bo $\pi \in S_n$. Par je *inverzija*, če velja: $i < j$ in $\pi(i) > \pi(j)$.

Definicija 1.8. Permutacija $\pi \in S_n$ je *soda* (oz. *liha*), če ima sodo mnogo inverzij (oz. liho mnogo inverzij).

1.5.1 Multimnožice

Definicija 1.9. *Multimnožica z elementi v množici S* je preslikava $\mu : S \to \mathbb{N}_0$. Pri tem številu $\mu(a), a \in S$, rečemo *kratnost elementa a v multimnožici μ*, vsoti $\sum_{a\in S}\mu(a)$ pa *moč multimnožice μ*. Multimnožica je *končna*, če je njena moč končna.

Opomba. Multimnožico M formalno podamo z urejenim parom (S, μ). Namesto da elemente zapišemo večkrat, lahko kratnost označimo tudi s formalno potenco: $M = \{a, a, b, c, c, c\} = \{a^2, b, c^3\}$.
Multimnožica je isto kot neurejen izbor s ponavljanjem. Tojer obstaja $\binom{n+k-1}{k}$ k-elementnih multimnožic v množici z n elementi.

1.5.2 Permutacije multimnožic

Permutacija multimnožice $M = (S, \mu)$ moči n je zaporedje $(x_1, \ldots, x_n)$, kjer je $x_i \in S$ in se vsak $a \in S$ v zaporedju pojavi $\mu(a)$-krat.

Trditev 1.16. *Število permutacij multimnožice $M = \{1^{\alpha_1}, 2^{\alpha_2}, \ldots, k^{\alpha_k}\}$ moči $n = \alpha_1 + \ldots + \alpha_k$ je*

$$\frac{n!}{\alpha_1!\alpha_2!\ldots\alpha_k!}.$$

Dokaz. Najprej izberimo položaje elementa 1, nato izberimo položaje elementa 2 itd. ☐

Definicija 1.10. Številu $\frac{n!}{\alpha_1!\alpha_2!\ldots\alpha_k!}$ rečemo *multinomski koeficient* in ga označimo z $\binom{n}{\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_k}$.

Opomba. Multinomski koeficient je posplošitev binomskega koeficienta.

Trditev 1.17 (Multinomski izrek)**.** *Velja*

$$(x_1 + \ldots + x_k)^n = \sum \binom{n}{\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k} x_1^{\alpha_1} \ldots x_k^{\alpha_k},$$

kjer vsota teče po vseh izbirah naravnih števil $\alpha_1, \ldots, \alpha_k$, katerih vsota je n.

Dokaz. Število permutacij multimnožice moči n, kjer je S množica indeksov. ☐

1.6 Kompozicije naravnega števila

Definicija 1.11. *Kompožicija naravnega števila* n je zaporedje pozitivnih naravnih števil $\lambda = (\lambda_1, \ldots, \lambda_l)$, za katero velja $\lambda_1 + \ldots + \lambda_l = n$. *Dolžina* kompozicije λ, $l(\lambda)$ je število elemetnov zaporedja, številu n pa rečemo *velikost kompozicije.* Števila $\lambda_1, \ldots, \lambda_l$ imenujemo *členi kompozicije.*

Trditev 1.18. *Naj bo* $n \geq 1$.
1. *Število kompožicij števila* n *je enako* 2^{n-1}.
2. *Število kompožicij dolžine* k *števila* n *je enako* $\binom{n-1}{k-1}$.

Dokaz. Število n lahko si predstavljamo kot zaporedje n kgoglic, kompozicijo pa s pregradami med kroglicami: $\bullet \mid \bullet\ \bullet \mid \bullet$. □

Opomba. Lahko razumemo kompozicijo števila n s k členi kot rešitev enačbe $x_1 + \ldots + x_k = n$, kjer so $x_i \in \mathbb{N}$.

1.6.1 Šibke kompozicije

Šibka kompozicija števila n ima isto definicijo kot kompozicija, le da dovolimo med členi tudi ničle.

Trditev 1.19. *Število šibkih kompozicij števila* n *s* k *členi je* $\binom{n+k-1}{k-1} = \binom{n+k-1}{n}$.

Dokaz. 1. način. Rešujemo enačbo $x_1 + \ldots + x_k = n$, kjer so $x_i \in \mathbb{N}_0$.
2. način. Kroglice in pregrade.
3. način. Neurejeni izbori s ponavljanjem. □

1.7 Razčlenitve naravnega števila

Definicija 1.12. *Razčlenitev naravnega števila* n je zaporedoje pozitivnih naravnih števil $\lambda = (\lambda_1, \ldots, \lambda_l)$, kjer je $\lambda_1 \geq \ldots \lambda_l$ in $\lambda_1 + \ldots + \lambda_l = n$. *Dolžina* razčlenitve λ, $l(\lambda)$ je število elemetnov zaporedja, številu n pa rečemo *velikost razčlenitve.* Števila $\lambda_1, \ldots, \lambda_l$ imenujemo *členi razčlenitve.* Razčlenitvam rečemo tudi *particije.*

Definicija 1.13. Naj bo $\lambda = (\lambda_1, \ldots, \lambda_l)$ račlenitev naravnega števila n. *Ferrersov diagram* λ je seznam vrstic oblike:

$$\begin{array}{rl}
\text{1. vrsta:} & \underbrace{\circ\ \circ\ \circ\ \ldots\ \circ}_{\lambda_1 \text{ krožcev}} \\
\text{2. vrsta:} & \underbrace{\circ\ \circ\ \ldots\ \circ}_{\lambda_2 \text{ krožcev}} \\
 & \vdots \\
\text{k. vrsta:} & \underbrace{\circ\ \ldots\ \circ}_{\lambda_l \text{ krožcev}}
\end{array}$$

Definicija 1.14. Naj bo $\lambda = (\lambda_1, \ldots, \lambda_l)$ račlenitev naravnega števila n. *Konjugirana razčlenitev* $\overline{\lambda}$ je razčlenitev, ki ima transponiran Ferrersov diagram.

Uvedemo oznake:
- $p(n)$ je število razčlenitev števila n. Funkciji $p(n)$ rečemo tudi *razčlenitvena funkcija.*
- $p_k(n)$ je število razčlenitev števila n s k členi.
- $\overline{p}_k(n)$ je število razčlenitev števila n z največ k členi.

Trditev 1.20. *Za naravni števili* n *in* k *velja:*
1. $p_k(n) = p_{k-1}(n-1) + p_k(n-k)$.
2. $p_k(n) = \overline{p}_k(n-k)$.
3. $\overline{p}_k(n) = \overline{p}_{k-1}(n) + \overline{p}_k(n-k)$.

Dokaz. Pomagamo si z Ferrersovim diagramom.
1. Razbijemo razčlinitve na tiste, ki vsebujejo 1 in tiste, ki jo ne vsebujejo.
2. Odštejemo od prvega stolpca 1.
3. Razčlenitev n z največ k členi ima bodisi natanko k členov bodisi kvečjemi $k-1$ členov. □

1.8 Stirlingova števila I. vrste

Definicija 1.15. Naj bo $1 \leq k \leq n$. *Stirlingovo število I. vrste* $C(n,k)$ je število permutacij množice $[n]$, ki se zapišejo kot produkt k disjunktnih ciklov. Velja: $C(n,0) = 0,\ n > 0$ in $C(0,0) = 1$.

Trditev 1.21. *Naj bo* $1 \leq k \leq n$. *Velja:*

$$C(n,k) = C(n-1,k-1) + (n-1)C(n-1,k).$$

Dokaz. Permutacije $[n]$ s k cikli razdelimo takole:

1. tiste, kjer je n negibna točka in
2. ostale. □

Za izračun $C(n,k)$ lahko si pomagamo s Stirlingovo matriko I. vrste in rekurzivno zvezo.

Trditev 1.22. $x^{\overline{n}} = \sum_{k=0}^{\infty} C(n,k)x^k$.

Dokaz. Indukcija po n. □

1.9 Stirlingova števila II. vrste in Bellova števila

Definicija 1.16. *Razdelitev množice* X je družina podmnožic $\{X_i\}_{i\in I}$ za katero velja:

1. $\bigcup_{i=I} X_i = X$,
2. $X_i \cap X_j = \emptyset$ za vsaka $i, j \in I,\ i \neq j$.