

Analiza 2a

Ruslan Urazbakhtin

22. julij 2025

Kazalo

1	Funkcije več spremenljivk	3
1.1	Prostor \mathbb{R}^n	3
1.1.1	Zaporedja v \mathbb{R}^n	3
1.2	Zveznost preslikav iz \mathbb{R}^n v \mathbb{R}^m	4
1.3	Parcialni odvodi in diferenciabilnost	6
1.3.1	Parcialni odvod	6
1.3.2	Diferenciabilnost	6
1.3.3	Višji parcialni odvodi	7
1.3.4	Diferenciabilnost preslikav	8
1.4	Izrek o implicitni funkciji	9
1.4.1	Izrek o inverzni preslikavi	9
1.4.2	Osnovna verzija izreka o implicitni funkciji	10
1.4.3	Izrek o implicitni preslikavi	11
1.5	Podmnogoterosti v \mathbb{R}^n	13
1.6	Taylorjeva formula	14
1.7	Ekstremi funkcij več spremenljivk	16
1.7.1	Potrebni in zadostni pogoji na 2. odvodi, da je kritična točka lokalni ekstrem	16
1.7.2	Vezani ekstremi	18
2	Integrali s parametri	20
2.1	Odvajanje integralov s parametri	20
2.2	Integral integrala s parametrom	22
2.3	Posplošeni integrali s parametri	23
2.4	Eulerjeva funkcija gama	26
2.5	Eulerjeva funkcija beta	26
3	Riemannov integral v \mathbb{R}^n	29
3.1	Riemannov integral	31
3.2	Osnovne lastnosti Riemannova integrala po kvadrilih	31
3.3	Fubinijev izrek	33
3.4	Riemannov integral na omejenih množicah	33
3.4.1	Prostornina omejene množice	34
3.5	Lastnosti omejenih množic s prostornino 0	34

1 Funkcije več spremenljivk

1.1 Prostor \mathbb{R}^n

Definicija 1.1. Prostor \mathbb{R}^n je kartezični produkt $\underbrace{\mathbb{R} \times \cdots \times \mathbb{R}}_n$. Na njem definiramo seštevanje in množenje s skalarjem po komponentah. S tema operacijama je $(\mathbb{R}, +, \cdot)$ vektorski prostor nad \mathbb{R} . Posebej definiramo še skalarni produkt

$$x \cdot y = \sum_{i=1}^n x_i y_i,$$

ki nam da normo $\|x\| = \sqrt{x \cdot x}$ in metriko $d(x, y) = \|x - y\|$. (\mathbb{R}^n, d) je tako metrični prostor.

Definicija 1.2. Naj bosta $a, b \in \mathbb{R}^n$ vektorja, za katera je $a_i \leq b_i$ za vse $i \in \{1, \dots, n\}$. **Zaprta kvader**, ki ga določata a in b , je množica

$$[a, b] = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \forall i \in \{1, \dots, n\} : a_i \leq x_i \leq b_i\}.$$

Podobno definiramo **odprta kvader** kot

$$(a, b) = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \forall i \in \{1, \dots, n\} : a_i < x_i < b_i\}.$$

Opomba 1.3. Odprte množice v normah $\|x\|_\infty$ in $\|x\|_2$ so iste.

Izrek 1.4. Množica $K \subseteq \mathbb{R}^n$ je kompaktna natanko tedaj, ko je zaprta in omejena.

1.1.1 Zaporedja v \mathbb{R}^n

Definicija 1.5. Zaporedje v \mathbb{R}^n je preslikava $a : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}^n$. Namesto $a(m)$ pišemo a_m , kjer $a_m = (a_1^m, \dots, a_n^m)$.

Opomba 1.6. Zaporedje v \mathbb{R}^n porodi n zaporedij v \mathbb{R} .

Trditev 1.7. Naj bo $(a_m)_m$ zaporedje v \mathbb{R}^n , $a_m = (a_1^m, \dots, a_n^m)$. Velja:

$$\text{Zaporedje } (a_m)_m \text{ konvergira} \iff \text{konvergira zaporedja } (a_1^m)_m, \dots, (a_n^m)_m.$$

V primeru konvergence velja:

$$\lim_{m \rightarrow \infty} a_m = \left(\lim_{m \rightarrow \infty} a_1^m, \dots, \lim_{m \rightarrow \infty} a_n^m \right).$$

Dokaz. Definicija limite. □

1.2 Zveznost preslikav iz \mathbb{R}^n v \mathbb{R}^m

Definicija 1.8. Naj bo $f : D \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ preslikava. Naj bo $a \in D$. **Preslikava f je zvezna v točki a** , če

$$\forall \epsilon > 0. \exists \delta > 0. \forall x \in D. \|x - a\| < \delta \implies \|f(x) - f(a)\| < \epsilon.$$

Preslikava f je **zvezna na D** , če je zvezna v vsaki točki $a \in D$.

Trditev 1.9. Naj bo $f : D \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ preslikava. Naj bo $a \in D$. Preslikava f je zvezna v točki a natanko tedaj, ko za vsako zaporedje $(x_n)_n$, $x_n \in D$, ki konvergira proti a , zaporedje $(f(x_n))_n$, $f(x_n) \in \mathbb{R}^m$ konvergira proti $f(a)$.

Definicija 1.10. Naj bo $f : D \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ preslikava. Preslikava f je **enakomerno zvezna na D** , če

$$\forall \epsilon > 0. \exists \delta > 0. \forall x, x' \in D. \|x - x'\| < \delta \implies \|f(x) - f(x')\| < \epsilon.$$

Trditev 1.11. Zvezna preslikava na kompaktne množice je enakomerno zvezna.

Trditev 1.12. Naj bo $f : K^{komp} \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ zvezna preslikava. Potem je $f_*(K)$ kompaktna.

Definicija 1.13. Preslikava $f : D \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ je **C -lipschitzova**, če

$$\exists C \in \mathbb{R}. \forall x, x' \in D. \|f(x) - f(x')\| \leq C\|x - x'\|.$$

Trditev 1.14. Za preslikavo $f : D \rightarrow X'$ velja:

$$f \text{ je } C\text{-lipschitzova} \implies f \text{ je enakomerno zvezna} \implies f \text{ je zvezna.}$$

Trditev 1.15. Naj bosta $f, g : D \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ zvezni funkciji v $a \in D$. Naj bo $\lambda \in \mathbb{R}$. Tedaj so v a zvezni tudi funkcije:

$$f + g, f - g, \lambda f, fg.$$

Če za vsak $x \in D$, $g(x) \neq 0$, tedaj so v a zvezna tudi funkcija:

$$\frac{f}{g}.$$

Trditev 1.16. Kompozitum zveznih preslikav je zvezna preslikava.

Dokaz. Z zaporedji kot pri analizi 1. □

Zgled 1.17. Nekaj primerov zveznih preslikav.

- Preslikava $\pi_j(x_1, \dots, x_n) = x_j$ je zvezna na \mathbb{R}^n za vsak $j = 1, \dots, n$.
- Vse polinomi v n -spremenljivkah so zvezne funkcije na \mathbb{R}^n .
- Vse racionalne funkcije so zvezne povsod, razen tam, kjer je imenovalec enak 0.

Definicija 1.18. Preslikava $f : D \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ je **funkcija n -spremenljivk**.

Opomba 1.19. Naj bo (M, d) metrični prostor in $N \subset M$. Naj bo $f : M \rightarrow \mathbb{R}$ zvezna funkcija na M . Potem $f|_N$ je tudi zvezna funkcija na N .

Trditev 1.20. Naj bosta $D \subseteq \mathbb{R}^n$ in $D_j = \pi_j(D)$. Naj bo $a \in D$, $a = (a_1, \dots, a_n)$ in $f : D \rightarrow \mathbb{R}^m$ zvezna v a . Teda za vsak $j = 1, \dots, n$ preslikava $\varphi_j : D_j \rightarrow \mathbb{R}^m$ s predpisom $\varphi_j(t) = f(a_1, \dots, a_{j-1}, t, a_{j+1}, \dots, a_n)$ zvezna v a_j .

Dokaz. Definicija zveznosti v točki. □

Opomba 1.21. Če je funkcija več spremenljivk zvezna v neki točki $a \in \mathbb{R}^n$, je zvezna tudi kot funkcija posameznih spremenljivk.

Zgled 1.22. Naj bo $f(x, y) = \begin{cases} \frac{2xy}{x^2+y^2}; & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0; & (x, y) = (0, 0) \end{cases}$. Ali je f zvezna kot funkcija vsake spremenljivke posebej? Ali je f zvezna na \mathbb{R}^2 ?

Zgled 1.23. Naj bo $f(x, y) = \begin{cases} \frac{2x^2y}{x^4+y^2}; & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0; & (x, y) = (0, 0) \end{cases}$. Ali je f zvezna kot funkcija vsake spremenljivke posebej? Ali je zvezna na vsaki premici? Ali je f zvezna na \mathbb{R}^2 ?

Opomba 1.24. Zgleda pokažeta, da obrat v prejšnji trditvi ne velja.

Naj bo $D \subseteq \mathbb{R}^n$ in $F : D \rightarrow \mathbb{R}^m$ preslikava. Naj bo $x \in D$, potem je $F(x) \in \mathbb{R}^m$, kjer je $F(x) = (y_1, \dots, y_m)$. Lahko pišemo $F(x) = (f_1(x), \dots, f_m(x))$. Torej F določa m funkcij n -spremenljivk.

Trditev 1.25. Naj bo $a \in D \subseteq \mathbb{R}^n$. Naj bo $F = (f_1, \dots, f_m) : D \rightarrow \mathbb{R}^m$ preslikava. Velja:

$$\text{Preslikava } F \text{ je zvezna v } a \iff f_1, \dots, f_m \text{ so zvezne v } a.$$

Dokaz. Definicija zveznosti v točki. □

Zgled 1.26 (Omejenost linearnih preslikav). Naj bo $\mathcal{A} : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ linearna preslikava, potem

$$\exists M \in \mathbb{R}. M > 0. \forall x \in \mathbb{R}^n. x \neq 0. \frac{\|\mathcal{A}x\|}{\|x\|} \leq M \text{ (oz. } \|\mathcal{A}x\| \leq M\|x\|).$$

Trditev 1.27. Naj bo $\mathcal{A} : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ linearna preslikava. Velja:

$$\mathcal{A} \text{ je zvezna} \iff \mathcal{A} \text{ je zvezna v točki } 0 \iff \mathcal{A} \text{ je omejena.}$$

Dokaz. Definicija zveznosti in omejenosti. □

Trditev 1.28. Naj bo $\mathcal{A} : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ linearna preslikava. Teda \mathcal{A} je zvezna.

Dokaz. Na linearno preslikavo lahko gledamo kot na množenje s matriko. □

Opomba 1.29. Ker so linearne preslikave omejene, obstaja supremum, ki nam da metrično normo

$$\sup_{x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}} \frac{\|\mathcal{A}x\|}{\|x\|} = \sup_{\|x\|=1} \|\mathcal{A}x\| = \|\mathcal{A}\|.$$

Definicija 1.30. Naj bo $\mathcal{A} : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ linearna preslikava. Preslikavo $\mathcal{A} : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ s predpisom $x \mapsto \mathcal{A}x + b$, $b \in \mathbb{R}^m$ imenujemo **afina preslikava**.

1.3 Parcialni odvodi in diferenciaciabilnost

1.3.1 Parcialni odvod

Definicija 1.31. Naj bo $f : D \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ funkcija. Naj bo $a = (a_1, \dots, a_n) \in D$ notranja točka. Funkcija f je **parcialno odvedljiva po spremenljivki x_j v točki a** , če obstaja limita

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a_1, \dots, a_{j-1}, a_j + h, a_{j+1}, \dots, a_n) - f(a_1, \dots, a_n)}{h},$$

oz. če je funkcija

$$x_j \mapsto f(a_1, \dots, a_{j-1}, x_j, a_{j+1}, \dots, a_n)$$

odvedljiva v točki a_j .

Če je ta limita obstaja, je to **parcialni odvod** funkcije f po spremenljivki x_j v točki a .

Oznaki: $\frac{\partial f}{\partial x_j}(a)$, $f_{x_j}(a)$, $(D_j f)(a)$.

Opomba 1.32. Vse elementarne funkcije so parcialno odvedljive po vseh spremenljivkah tam, kjer so definirane.

Zgled 1.33. Naj bo $f(x, y, z) = e^{x+2y} + \cos(xz^2)$. Izračunaj $f_x(x, y, z)$, $f_y(x, y, z)$, $f_z(x, y, z)$.

1.3.2 Diferenciaciabilnost

Definicija 1.34. Naj bo $f : D \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ funkcija. Naj bo $a = (a_1, \dots, a_n) \in D$ notranja točka. Funkcija f je **diferenciaciabilna v točki a** , če obstaja tak linearen funkcional $\mathcal{L} : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, da velja:

$$f(a + h) = f(a) + \mathcal{L}(h) + o(h),$$

kjer $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\|o(h)\|}{\|h\|} = 0$.

Opomba 1.35. Če je tak \mathcal{L} obstaja, je enolično določen.

Dokaz. Pokažemo, da iz $\mathcal{L}(h) = (\mathcal{L}_1 - \mathcal{L}_2)(h) = (o_2 - o_1)(h) = o(h)$ sledi, da je $\mathcal{L} = 0$. \square

Definicija 1.36. Če je f diferenciaciabilna v a je \mathcal{L} natanko določen in ga imenujemo **diferencial** funkcije f v točki a . Oznaka: $\mathcal{L} = df_a$. Linearen funkcional \mathcal{L} imenujemo tudi **odvod** funkcije f v točki a . Oznaka: $(Df)(a)$.

Opomba 1.37. Recimo, da je funkcija f diferenciaciabilna v točki a . Preslikava s predpisom $h \mapsto f(a) + (df_a)(h)$ je najboljša afina aproksimacija funkcije $h \mapsto f(a + h)$.

Trditev 1.38. Naj bo $f : D \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ diferenciaciabilna v notranji točki $a \in D$. Teda je f v točki a parcialno odvedljiva po vseh spremenljivkah. Poleg tega je zvezna v točki a . Pri tem za $h = (h_1, \dots, h_n)$ velja:

$$(df_a)(h) = \frac{\partial f}{\partial x_1}(a) \cdot h_1 + \dots + \frac{\partial f}{\partial x_n}(a) \cdot h_n = f_{x_1}(a) \cdot h_1 + \dots + f_{x_n}(a) \cdot h_n$$

Opomba 1.39. Naj bo $\mathcal{L} : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ linearen funkcional, $x \in \mathbb{R}^n$, potem lahko zapišemo

$$\mathcal{L}(x) = l_1 x_1 + \dots + l_n x_n = \begin{bmatrix} l_1 & \dots & l_n \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}, \text{ kjer } \begin{bmatrix} l_1 & \dots & l_n \end{bmatrix} \text{ matrika linearnega}$$

funkcionala glede na standardne baze.

Dokaz. Zveznost pokažemo z limito. Za parcialno odvedljivost pogledimo kaj se dogaja za $h = (h_1, 0, \dots, 0)$. \square

Opomba 1.40. Trditev pove, da je $df_a = \left[\frac{\partial f}{\partial x_1}(a) \quad \dots \quad \frac{\partial f}{\partial x_n}(a) \right] = (\frac{\partial f}{\partial x_1}(a), \dots, \frac{\partial f}{\partial x_n}(a))$.

Zapis: $(\vec{\nabla} f)(a) = (\text{grad } f)(a) = (\frac{\partial f}{\partial x_1}(a), \dots, \frac{\partial f}{\partial x_n}(a))$.

Vektor $(\text{grad } f)(a)$ imenujemo **gradient funkcije** f v točki a . Operator $\vec{\nabla} = (\frac{\partial}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial}{\partial x_n})$ je **operator nabra**.

Zgled 1.41. Naj bo $f(x, y) = \begin{cases} \frac{2xy}{x^2+y^2}; & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0; & (x, y) = (0, 0) \end{cases}$. Ali je f diferenciacijabilna?

Zgled 1.42. Naj bo $f(x, y) = \begin{cases} \frac{2x^2y}{x^2+y^2}; & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0; & (x, y) = (0, 0) \end{cases}$. Ali je f zvezna? Ali je f parcialno odvedljiva? Ali je f diferenciacijabilna?

Opomba 1.43. Zgleda pokažeta, da obrat v prejšnji trditvi ne velja

Izrek 1.44. Naj bo $f : D \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ funkcija in naj bo $a \in D$ notranja točka. Denimo, da je f parcialno odvedljiva po vseh spremenljivkah v točki a in so parcialni odvodi zvezni v točki a . Tedaj je f diferenciacijabilna v točki a .

Dokaz. Za $n = 2$. Definicija diferenciacijabilnosti + 2-krat Lagrangeev izrek. \square

1.3.3 Višji parcialni odvodi

Naj bo $f : D^{\text{odp}} \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ funkcija. Denimo, da je f parcialno odvedljiva po vseh spremenljivkah na D : f_{x_1}, \dots, f_{x_n} . To so tudi funkcije n -spremenljivk in morda so tudi te parcialno odvedljive po vseh oz. nekaterih spremenljivkah.

Trditev 1.45. Naj bo $f : D \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ funkcija, $a \in \text{Int}(D)$. Naj bosta $i, j \in \{1, 2, \dots, n\}$. Denimo, da v točki a obstajata $\frac{\partial f}{\partial x_i}, \frac{\partial f}{\partial x_j}$ in tudi druga odvoda $\frac{\partial}{\partial x_j} \left(\frac{\partial f}{\partial x_i} \right), \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\frac{\partial f}{\partial x_j} \right)$. Če sta $\frac{\partial}{\partial x_j} \left(\frac{\partial f}{\partial x_i} \right), \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\frac{\partial f}{\partial x_j} \right)$ zvezni v točki a , potem sta enaki v točki a :

$$\frac{\partial}{\partial x_j} \left(\frac{\partial f}{\partial x_i} \right) (a) = \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\frac{\partial f}{\partial x_j} \right) (a).$$

Dokaz. Dovolj za $n = 2$.

Definiramo funkcijo $J(h, k) = f(a + h, b + k) - f(a + h, b) - f(a, b + k) + f(a, b)$ ter funkciji $\varphi(x) = f(x, b + k) - f(x, b)$ in $\psi(y) = f(a + h, y) - f(a, y)$. Zapišemo J prvič s pomočjo funkcije φ , drugič pa s pomočjo funkcije ψ ter uporabimo 2-krat Lagrangeev izrek in upoštevamo zveznost. \square

Opomba 1.46. Pravimo, da parcialni odvodi komutirajo in pišemo $\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}$.

Definicija 1.47. Naj bo $D^{\text{odp}} \subseteq \mathbb{R}^n$. Pravimo, da je funkcija $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ **razreda** C^k na D , če obstajajo vse parcialne odvodi funkcije f do reda k in so vse ti parcialni odvodi zvezni na D .

Definicija 1.48. Naj bo $D^{\text{odp}} \subseteq \mathbb{R}^n$. **Množico vseh k -krat zvezno parcialno odvedljivih funkcij** označimo z $C^k(D)$. **Množica gladih funkcij** je $C^\infty(D) = \bigcap_{k=1}^\infty C^k(D)$. **Množica zveznih funkcij na D** je $C(D)$.

Opomba 1.49. Množica $C^k(D)$ z operacijama seštevanja, množenja s skalarji in kompoziranja preslikav je algebra nad \mathbb{R} .

1.3.4 Diferenciaciabilnost preslikav

Definicija 1.50. Naj bo $F : D \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ preslikava, $a \in D$ notranja točka. Preslikava F je **diferenciaciabilna** v točki a , če obstaja taka linearna preslikava $\mathcal{L} : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$, da velja:

$$F(a+h) = F(a) + \mathcal{L}(h) + o(h),$$

kjer je $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{|o(h)|_m}{|h|_n} = 0$.

Preslikavo \mathcal{L} imenujemo **diferencial** F v točki a . Oznaka: dF_a . Imenujemo ga tudi **odvod** F v točki a . Oznaka: $(DF)(a)$.

Opomba 1.51. Kot pri funkcijah, če je tak \mathcal{L} obstaja, je enolično določen.

Zgled 1.52. Obravnavaj diferenciaciabilnost preslikav:

- $\mathcal{A} : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ linearna, $F(x) = \mathcal{A}x$.
- $F : \mathbb{R}^{n \times n} \rightarrow \mathbb{R}^{n \times n}$, $F(X) = X^2$. Namig: S pomočjo CSB neenakosti pokažimo, da je $|H^2| \leq |H|^2$.

Izrek 1.53. Naj bo $a \in D$ notranja točka. Naj bo $F = (f_1, \dots, f_m) : D \rightarrow \mathbb{R}^m$ preslikava. Velja:

Preslikava F je diferenciaciabilna v $a \in D \iff$ so f_1, \dots, f_m diferenciaciabilne v a .

Tedaj

$$(DF)(a) = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(a) & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n}(a) \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial f_m}{\partial x_1}(a) & \dots & \frac{\partial f_m}{\partial x_n}(a) \end{bmatrix}$$

Matrika linearne preslikave $(DF)(a)$, ki je zapisana v standardnih bazah, se imenuje **Jacobijeva matrika**.

Dokaz. (\implies) Zapišemo enakost $F(a+h) = F(a) + dF_a(h) + o(h)$ po komponentah.

(\impliedby) Definicija diferenciaciabilnosti. □

Posledica 1.54. Naj bo $a \in D$ notranja točka. Naj bo $F = (f_1, \dots, f_m) : D \rightarrow \mathbb{R}^m$ preslikava. Tedaj velja: Če so vse funkcije f_1, \dots, f_m v točki a parcialno odvedljivi po vseh spremenljivkah in so ti vse odvodi zvezni v točki a , potem je F diferenciaciabilna v točki a .

Zgled 1.55. Naj bo $F(x, y, z) = (x^2 + 2y + e^z, xy + z^2)$, $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$. Določi $(DF)(1, 0, 1)$.

Definicija 1.56. Preslikava $F : D^{\text{odp}} \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ je razreda $C^k(D)$, če so vse koordinatne funkcije $f_1, \dots, f_m \in C^k(D)$.

Izrek 1.57 (Verižno pravilo). Naj bo $a \in D \subseteq \mathbb{R}^n$ notranja točka. Naj bo $b \in \Omega \subseteq \mathbb{R}^m$ notranja točka. Naj bo $F : D \rightarrow \Omega$ diferenciable v točki a in velja $F(a) = b$. Naj bo $G : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^k$ diferenciable v točki b . Tedaj $G \circ F$ diferenciable v točki a in velja:

$$D(G \circ F)(a) = (DG)(b) \circ (DF)(a) = (DG)(F(a)) \circ (DF)(a).$$

Označimo

$$F(x_1, \dots, x_n) = (f_1(x_1, \dots, x_n), \dots, f_m(x_1, \dots, x_n))$$

in

$$G(y_1, \dots, y_m) = (g_1(y_1, \dots, y_m), \dots, g_k(y_1, \dots, y_m)).$$

Potem

$$D(G \circ F)(a) = \begin{bmatrix} \frac{\partial g_1}{\partial y_1} & \cdots & \frac{\partial g_1}{\partial y_m} \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial g_k}{\partial y_1} & \cdots & \frac{\partial g_k}{\partial y_m} \end{bmatrix} (b) \cdot \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial f_m}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial f_m}{\partial x_n} \end{bmatrix} (a)$$

Dokaz. Definicija diferenciablenosti. □

Posledica 1.58 ($k = 1$, $G = g$ funkcija). Naj bo

$$\Phi(x_1, \dots, x_n) = g(f_1(x_1, \dots, x_n), \dots, f_m(x_1, \dots, x_n)).$$

Potem

$$\frac{\partial \Phi}{\partial x_j}(a) = \frac{\partial g}{\partial y_1}(b) \cdot \frac{\partial f_1}{\partial x_j}(a) + \frac{\partial g}{\partial y_2}(b) \cdot \frac{\partial f_2}{\partial x_j}(a) + \dots + \frac{\partial g}{\partial y_m}(b) \cdot \frac{\partial f_m}{\partial x_j}(a)$$

Zgled 1.59. Naj bo $F(x, y) = (x^2 + y, xy)$, $g(u, v) = uv + v^2$. Naj bo $\Phi = g \circ F$. Izračunaj odvod $(D\Phi)(x, y)$ na dva načina.

1.4 Izrek o implicitni funkciji

1.4.1 Izrek o inverzni preslikavi

Naj bo $\Phi : D^{\text{odp}} \subseteq \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^m$ preslikava, $\Phi \in C^1(D)$. Kakšne so zadostni pogoji za (lokalno) obrnljivost preslikave Φ ?

Definicija 1.60. Naj bosta $D, \Omega \subseteq \mathbb{R}^m$ odprti. Preslikava $\Phi : D \rightarrow \Omega$ je C^1 -**difeomorfizem**, če

1. Φ je bijekcija,
2. $\Phi \in C^1(D)$,
3. $\Phi^{-1} \in C^1(\Omega)$.

Podobno definiramo C^k -**difeomorfizem** za $k \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$.

Zgled 1.61. Ali je $f(x) = x^3$, $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ difeomorfizem?

Trditev 1.62. Naj bosta $D, \Omega \subseteq \mathbb{R}^m$ odprti. Naj bo $\Phi : D \rightarrow \Omega$ C^1 -difeomorfizem. Tedaj je $\det(D\Phi) \neq 0$ na D .

Dokaz. Pogledamo $\Phi^{-1} \circ \Phi = \text{id}_D$ (verižno pravilo). □

Posledica 1.63. $(D\Phi^{-1})(y) = (D\Phi)^{-1}(x)$, kjer $y = \Phi(x)$.

Zgled 1.64. Ali velja obrat trditve? Naj bo $\Phi(x, y) = (e^x \cos y, e^x \sin y)$, $\Phi : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$. Ali je Φ difeomorfizem?

Lema 1.65 (Lagrangeev izrek za funkcijo več spremenljivk). Naj bo $D \subseteq \mathbb{R}^n$ odprta množica, točki $a, b \in D$ taki, da za vsak $t \in [0, 1]$ daljica $(1 - t)a + tb \in D$, $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ funkcija razreda C^1 . Tedaj obstaja taka točka ξ iz daljice med a in b , da je $f(b) - f(a) = (Df)(\xi)(b - a)$.

Dokaz. Lagrangeev izrek za funkcijo $\varphi(t) = f((1 - t)a + tb)$. □

Lema 1.66. Predpostavki kot prej. Naj obstaja tak $M \in \mathbb{R}$, da za vsak $j = 1, \dots, n$ in vsak $x \in D$ velja: $\left| \frac{\partial f}{\partial x_j}(x) \right| \leq M$. Tedaj $|f(b) - f(a)| \leq M\sqrt{n}|b - a|$.

Dokaz. Uporabimo prejšnjo trditev. □

Lema 1.67. Naj bo $D \subseteq \mathbb{R}^n$, $a, b \in D$ kot prej. Naj bo $F : D \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$, $F = (f_1, \dots, f_m)$ preslikava razreda C^1 . Naj obstaja tak $M \in \mathbb{R}$, da za vsak $j = 1, \dots, n$, vsak $i = 1, \dots, m$ in vsak $x \in D$ velja: $\left| \frac{\partial f_i}{\partial x_j}(x) \right| \leq M$. Tedaj $\|F(b) - F(a)\| \leq M\sqrt{mn}\|b - a\|$.

Izrek 1.68 (Izrek o inverzni preslikavi). Naj bo $D \subseteq \mathbb{R}^m$ odprta, $F : D \rightarrow \mathbb{R}^m$ preslikava razreda C^1 , $a \in D$ in $b = F(a)$. Če je $\det(DF)(a) \neq 0$, potem obstajata okolici $a \in U \subseteq \mathbb{R}^m$ in $b \in V \subseteq \mathbb{R}^m$, da je $F : U \rightarrow V$ C^1 -difeomorfizem.

Definicija 1.69. Če je $F : D \rightarrow \Omega$ preslikava med odprtimi množicami v \mathbb{R}^m in je $\det(DF)(x) \neq 0$ za vse $x \in D$, pravimo, da je F **lokalni difeomorfizem**.

Dokaz. Dovolj, da izrek dokažemo za primer, ko $a = b = 0$, $(DF)(0) = I$.

TODO □

Posledica 1.70. Če je Φ razreda C^k za $k \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$, je Φ lokalni C^k difeomorfizem.

Opomba 1.71. Če je $m = 1$, potem $f : I \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$. Naj bo $a \in I$, $f \in C^1(I)$, $f'(a) \neq 0$. Potem $f'(x) \neq 0$ v okolici a , torej f ima lokalni C^1 inverz.

Zgled 1.72. Naj bo $F : \mathbb{R}^{n \times n} \rightarrow \mathbb{R}^{n \times n}$, $F(X) = X^2$. Ali je F v okolici točke $I \in \mathbb{R}^{n \times n}$ lokalni difeomorfizem? Kaj to pomeni?

1.4.2 Osnovna verzija izreka o implicitni funkciji

Radi bi poiskali zadostni pogoji na funkcijo $f(x, y)$, da bi enačba $f(x, y) = 0$ lokalno v okolici točki (a, b) , za katero velja $f(a, b) = 0$, predstavljala graf funkcije $y = \varphi(x)$.

Izrek 1.73 (Osnovna verzija izreka o implicitni funkciji). Naj bo $D \subseteq \mathbb{R}^2$ odprta, $(a, b) \in D$, $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ funkcija razreda $C^1(D)$ in naj velja:

1. $f(a, b) = 0$.
2. $f_y(a, b) \neq 0$.

Potem obstajata $\delta > 0$ in $\epsilon > 0$, da velja: $I \times J \subseteq D$, kjer je $I = (a - \delta, a + \delta)$, $J = (b - \epsilon, b + \epsilon)$ in enolično določena funkcija $\varphi : I \rightarrow J$ razreda C^1 , za katero velja:

1. $\varphi(a) = b$.

2. $\forall (x, y) \in I \times J. f(x, y) = 0 \iff y = \varphi(x)$ (rešitve enačbe $f(x, y) = 0$ so natanko graf funkcije φ).
3. $\varphi'(x) = -\frac{f_x(x, \varphi(x))}{f_y(x, \varphi(x))}$ za vsak $x \in I$.

Dokaz. Funkcijo φ konstruiramo s pomočjo izreka o bisekciji z upoštevanjem stroge monotonosti funkciji $y \mapsto f(x, y)$.

Zveznost ($\bar{I} \times \bar{J}$ je kompaktna), odvedljivost in zveznost odvoda pokažemo z pomočjo izraza $f(x + \Delta x, y + \Delta y) - f(x, y) = 0$ in Lagrangeeva izreka, kjer $x + \Delta x \in (a - \delta, a + \delta)$, $y = \varphi(x)$, $y + \Delta y = \varphi(x + \Delta x)$. \square

Posledica 1.74. Če je funkcija f razreda C^k , potem je tudi funkcija φ razreda C^k .

Zgled 1.75. Kaj če pogoji niso izpolnjeni?

1. $f(x, y) = (x - y)^2$, $f(x, y) = 0$ v okolici točke $(0, 0)$ (pogoji ni potrebni).
2. $f(x, y) = y^3 - x$, $f(x, y) = 0$ v okolici točke $(0, 0)$ (odvedljivost φ).
3. $f(x, y) = y^2 - x^2 - x^4$, $f(x, y) = 0$ v okolici točke $(0, 0)$ (enoličnost φ).
4. $f(x, y) = y^2 + x^2 + x^4$, $f(x, y) = 0$ v okolici točke $(0, 0)$ (množica rešitev).

1.4.3 Izrek o implicitni preslikavi

Imamo $n + m$ spremenljivk: (x, y) , kjer $x = (x_1, \dots, x_n)$, $y = (y_1, \dots, y_m)$ in m enačb. Pričakujemo, da bomo lahko m spremenljivk izrazili kot funkcijo ostalih, tj. najdemo preslikavo $\Phi : D \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$, da velja $y = \Phi(x)$.

Primer 1.76 (Linearen primer). Naj bosta $\mathcal{A} : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$, $\mathcal{B} : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^m$ linearni, $b \in \mathbb{R}^m$. Naj rešujemo enačbo $Ax + By = b$. Kdaj lahko za vsak $b \in \mathbb{R}^m$ iz te enačbe y razrišemo kot funkcijo x ?

Če je $n = 0$, potem rešujemo enačbo $By = b$. Kdaj lahko to enačbo enolično rešimo za vsak $b \in \mathbb{R}^m$?

Naj bo $F : D^{\text{odp}} \subseteq \mathbb{R}_x^n \times \mathbb{R}_y^m \rightarrow \mathbb{R}^m$, $F = (f_1, \dots, f_m)$ preslikava razreda C^1 .

Za vsak $y \in \mathbb{R}^m$ naj bo $\frac{\partial F}{\partial x}$ diferencial preslikave $x \mapsto F(x, y)$. Imenujemo ga **parcialni diferencial na prvo spremenljivko**.

Za vsak $x \in \mathbb{R}^n$ naj bo $\frac{\partial F}{\partial y}$ diferencial preslikave $y \mapsto F(x, y)$. Imenujemo ga **parcialni diferencial na drugo spremenljivko**.

$$\text{Velja: } \frac{\partial F}{\partial x}(x, y) = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(x, y) & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n}(x, y) \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial f_m}{\partial x_1}(x, y) & \dots & \frac{\partial f_m}{\partial x_n}(x, y) \end{bmatrix} \text{ in } \frac{\partial F}{\partial y}(x, y) = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial y_1}(x, y) & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial y_m}(x, y) \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial f_m}{\partial y_1}(x, y) & \dots & \frac{\partial f_m}{\partial y_m}(x, y) \end{bmatrix}.$$

Diferencial preslikave F je potem enak $(DF)(x, y) = \begin{bmatrix} \frac{\partial F}{\partial x}(x, y) & \frac{\partial F}{\partial y}(x, y) \end{bmatrix}$ (bločni zapis).

Opomba 1.77. Za vektor $\begin{bmatrix} h \\ k \end{bmatrix}$, kjer je $h \in \mathbb{R}^n$, $k \in \mathbb{R}^m$ velja: $(DF)(x, y) \begin{bmatrix} h \\ k \end{bmatrix} = \frac{\partial F}{\partial x}(x, y)h + \frac{\partial F}{\partial y}(x, y)k \in \mathbb{R}^m$.

Izrek 1.78 (Izrek o implicitni preslikavi). Naj bo $D \subseteq \mathbb{R}_x^n \times \mathbb{R}_y^m$ odprta množica, $(a, b) \in D$, $F : D \rightarrow \mathbb{R}^m$ preslikava razreda C^1 . Naj velja:

1. $F(a, b) = 0$,
2. $\det(\frac{\partial F}{\partial y}(a, b)) \neq 0$.

Tedaj obstaja okolica $U \subseteq \mathbb{R}^n$ točke a in okolica $V \subseteq \mathbb{R}^m$ točke b in taka enolično določena preslikava $\varphi : U \rightarrow V$ razreda C^1 , da velja:

1. $\varphi(a) = b$.
2. $\forall (x, y) \in U \times V. F(x, y) = 0 \iff y = \varphi(x)$ (rešitve te enačbe je isto kot graf φ znotraj $U \times V$).
3. $(D\varphi)(x) = - \left(\frac{\partial F}{\partial y}(x, y) \right)^{-1} \frac{\partial F}{\partial x}(x, y)$, $y = \varphi(x)$ za vsak $x \in U$.

Dokaz. Uporabimo izrek o inverzni preslikavi.

Definiramo preslikavo $\Phi : D \subseteq \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$, $\Phi(x, y) = (x, F(x, y))$. Kandidata za preslikavo φ najdemo v obliki inverza Φ^{-1} , nato enostavno preverimo lastnosti. \square

Posledica 1.79. Če je preslikava F razreda C^k , je tudi preslikava φ razreda C^k .

Zgled 1.80. Naj bo $x, y \in \mathbb{R}$, $F(x, y) = x^2 + y^2 - 1$. S pomočjo izreka o implicitni preslikavi pokaži, da v okolici točke $(0, 1)$ rešitve enačbe $F(x, y) = 0$ graf neke preslikave φ . Določi tudi preslikavo φ .

Zgled 1.81. Naj bo $F(x, y, z) = (y + xy + xz^2, z + zy + x^2)$, $F = (f, g)$ in naj rešujemo enačbo $F(x, y, z) = 0$. Preveri zahteve izreka v okolici točke $(0, 0, 0)$ in zapiši spremenljivki y in z kot funkciji spremenljivke x . Določi tudi prvi in drugi odvod funkcij f in g po spremenljivke x . Kaj je rezultat?

Zgled 1.82. Naj bo $F : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ in naj rešujemo enačbo $F(x, y, z) = 0$. Recimo, da $F(a, b, c) = 0$. Kakšna povezava med zadostnimi pogajami in rangom $(DF)(a, b, c)$? Kaj če gledamo preslikavo $F : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$?

Definicija 1.83. Naj bo $D^{\text{odp}} \in \mathbb{R}^n$ in $F : D \rightarrow \mathbb{R}^m$ preslikava razreda C^1 , $a \in D$.

1. **Rang preslikave F v točki a** je $\text{rang}_a F := \text{rang}(DF)(a)$.
2. Če je $\text{rang}_a F$ konstanten na D , je F tega ranga na D , tj. $\text{rang } F = \text{rang}_a F$.
3. Preslikava F je **maksimalnega ranga v točki a** , če je $\text{rang}_a F = \min \{m, n\}$.

Opomba 1.84. Ta pogoj je lokalno stabilen, tj. če je $\text{rang}_a F = \min \{n, m\}$, potem obstaja okolica od a , kjer rang F maksimalen.

Posledica 1.85. Naj bo $F : D^{odp} \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ preslikava razreda C^k , $k \in \mathbb{N}$ in naj velja $m < n$. Naj bo $a \in D$, $F(a) = 0$ in F maksimalnega ranga v točki a . Tedaj obstajajo indeksi $i_1 < i_2 < \dots < i_{n-m}$, $j_1 < j_2 < \dots < j_m$, $i_k \neq j_l$ za vse k in l in take funkcije $\varphi_1, \dots, \varphi_m$ razreda C^k definirane v okolici točke $(a_{i_1}, \dots, a_{i_{n-m}})$, da je v neki okolici U točke a enačba $F(x) = 0$ ekvivalentna sistemu enačb:

$$\begin{aligned} x_{j_1} &= \varphi_1(x_{i_1}, \dots, x_{i_{n-m}}) \\ &\vdots \\ x_{j_m} &= \varphi_m(x_{i_1}, \dots, x_{i_{n-m}}) \end{aligned}$$

Ekvivalentno: Obstaja permutacija $\sigma \in S_n$, da v okolici točke a velja:

$$F(x) = 0 \iff (x_{\sigma(1)}, \dots, x_{\sigma(n)}) = (x_{\sigma(1)}, \dots, x_{\sigma(n-m)}, \varphi(x'_\sigma)), \text{ kjer } \varphi = (\varphi_1, \dots, \varphi_m).$$

Dokaz. **TODO** □

Primer 1.86. Naj bo $\mathcal{A} : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ linearna, $m \leq n$, $\text{rang } \mathcal{A} = m$ (\mathcal{A} je surjektivna). Rešujemo enačno $\mathcal{A}x = b$. Prostor rešitev je $n - m$ dimenzialen.

Posledica 1.87. Naj bo $F : D^{odp} \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ preslikava razreda C^1 , $m \leq n$, $a \in D$ in naj velja $\text{rang}_a F = m$. Tedaj obstaja okolica V točke $F(a) = b$ in okolica U točke a , da je $F : U \rightarrow V$ surjektivna.

Dokaz. **TODO** □

1.5 Podmnogoterosti v \mathbb{R}^n

Podmnogoterost je posplošitev pojmov „krivulja“ in „ploskev“.

Definicija 1.88. Naj bo $M \subseteq \mathbb{R}^{n+m}$, $M \neq \emptyset$. Množica M je **gladka (vsaj razreda C^1) podmnogoterost dimenzije n in kodimenzije m prostora \mathbb{R}^{n+m}** , če za vsako točko $a \in M$ obstaja okolica U v \mathbb{R}^{n+m} in take C^1 funkcije $F_1, \dots, F_m : U \rightarrow \mathbb{R}$, da velja:

1. $M \cap U = \{x \in U \mid F_1(x) = \dots = F_m(x) = 0\} = F^*(\{0\})$.
2. $\text{rang}(F_1, \dots, F_m) = m$ na U .

Opomba 1.89. Funkcije F_1, \dots, F_m se imenujejo **lokalne definicijske funkcije** za $M \cap U$.

TODO

1.6 Taylorjeva formula

Naj bo $f : D^{\text{odp}} \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ funkcija, $a \in D$. Funkcijo f bi radi v okolici točke a aproksimirali s polinomi.

Izrek 1.90. *Recimo, da velja*

1. *Množica $D \subseteq \mathbb{R}^n$ odprta, $a \in D$.*
2. *$f : D^{\text{odp}} \rightarrow \mathbb{R}$ funkcija razreda $C^{k+1}(D)$.*
3. *Vektor $h \in \mathbb{R}^n$ tak, da daljica med a in $a + h$ leži v D .*

Tedaj obstaja tak $\theta \in (0, 1)$, da je

$$f(a + h) = f(a) + (D_h f)(a) + \frac{1}{2!}(D_h^2 f)(a) + \dots + \frac{1}{k!}(D_h^k f)(a) + R_k (*),$$

kjer je $D_h = h_1 D_1 + h_2 D_2 + \dots + h_n D_n$ **odvod v smeri h** in $R_k = \frac{1}{(k+1)!}(D_h^{k+1} f)(a + \theta h)$ **ostanek**.

Izraz (*) je **Taylorjeva formula** za funkcijo več spremenljivk.

Dokaz. **TODO**

□

Opomba 1.91. Pokaži, da velja

1. $(D_h f)(a) = \sum_{j=1}^n h_j \frac{\partial f}{\partial x_j}(a)$.
2. $(D_h^2 f)(a) = \sum_{k=1}^n \sum_{j=1}^n h_k h_j \frac{\partial^2 f}{\partial x_k \partial x_j}(a)$.

Primer 1.92. Pokaži, da za $n = 2$ velja $D_{(h,k)}^m = \sum_{j=0}^m \binom{m}{j} h^j k^{m-j} \frac{\partial^m}{\partial x^j \partial y^{m-j}}$.

Opomba 1.93. $h \mapsto f(a) + (D_h f)(a) + \frac{1}{2!}(D_h^2 f)(a) + \dots + \frac{1}{k!}(D_h^k f)(a)$ je polinom stopnje največ k v spremenljivkah h_1, h_2, \dots, h_n .

Opomba 1.94. Če je funkcija f razreda $C^\infty(D)$ lahko tvorimo **Taylorjevo vrsto**:

$$\sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{j!} (D_h^j f)(a).$$

- Vrsta sigurno konvergira za $h = 0$.
- Tudi, če vrsta konvergira za nek $h \neq 0$, ne konvergira nujno k $f(a + h)$.

Definicija 1.95. Če Taylorjeva vrsta konvergira k $f(a + h)$ za vse $\|h\| \leq \delta$ za nek $\delta > 0$, tj.

$$f(a + h) = \sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{j!} (D_h^j f)(a),$$

potem rečemo, da je **funkcija f v okolici točke a (realno) analitična**.

Zgled 1.96. Razvij funkcijo $f(x, y) = e^{xy}$ v Taylorjevo vrsto v okolici točke $(0, 0)$.

Posledica 1.97. *Recimo, da velja*

1. *Podmnožica $D \subseteq \mathbb{R}^n$ odprta, $a \in D$.*
2. *$f : D^{\text{odp}} \rightarrow \mathbb{R}$ funkcija razreda $C^{k+1}(D)$.*
3. *Vektor $h \in \mathbb{R}^n$ tak, da daljica med a in $a + h$ leži v D .*

Potem je

1. $R_k = o(\|h\|^k)$ za $h \rightarrow 0$.
2. $R_k = O(\|h\|^{k+1})$ za $h \rightarrow 0$.

Opomba 1.98. Velja:

1. $R_k = o(\|h\|^k) \iff \lim_{h \rightarrow 0} \frac{|R_k|}{\|h\|^k} = 0$ (izraz je majhen).
2. $R_k = O(\|h\|^{k+1}) \iff \exists M \in \mathbb{R}. \frac{|R_k|}{\|h\|^{k+1}} \leq M$, ko gre h proti 0 (velikostni red).

Dokaz. **TODO**

□

Opomba 1.99. Naj bo $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ funkcija razreda C^∞ v okolici točke $(0, 0)$, $h = (x, y)$. Pokaži, da za koeficient a_{nm} pred $x^n y^m$ velja: $(\frac{\partial^{n+m}}{\partial x^n \partial y^m} f)(0, 0) = a_{nm} n! m!$.

1.7 Ekstremi funkcij več spremenljivk

Definicija 1.100. Naj bo $f : D \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ funkcija, $a \in D$.

1. Funkcija f ima v točki a **lokalni maksimum**, če

$$\exists r > 0. \forall x \in D \cap K(a, r). f(a) \geq f(x).$$

Funkcija f ima v točki a **strogi lokalni maksimum**, če

$$\exists r > 0. \forall x \in D \cap K(a, r). f(a) > f(x).$$

2. Funkcija f ima v točki a **(globalni) maksimum na D** , če

$$\forall x \in D. f(a) \geq f(x).$$

3. Podobno definiramo: **lokalni minimum, (globalni) minimum**.

4. **Lokalni ekstrem** (oz. **globalni ekstrem**) je skupno ime za lokalni (oz. globalni) minimum in maksimum.

Opomba 1.101. Če je $K^{\text{komp}} \subseteq \mathbb{R}^n$ in $f : K \rightarrow \mathbb{R}$ zvezna funkcija, potem ima f na K maksimum in minimum.

Definicija 1.102. Naj bo $D^{\text{odp}} \subseteq \mathbb{R}^n$ in $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ funkcija razreda C^1 (dovolj, da je diferenciable).

Rečemo, da je točka $a \in D$ **stacionarna (oz. kritična) točka funkcije f** , če

$$(Df)(a) = 0, \text{ tj. } \frac{\partial f}{\partial x_1}(a) = \frac{\partial f}{\partial x_2}(a) = \dots = \frac{\partial f}{\partial x_n}(a) = 0.$$

Trditev 1.103. Recimo, da velja

1. Podmnožica $D \subseteq \mathbb{R}^n$ odprta, $a \in D$.

2. $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ funkcija razreda C^1 .

Tedaj, če ima funkcija f v točki a lokalni ekstrem, je a kritična točka za f .

Dokaz. **TODO**

□

Zgled 1.104. Naj bo $K = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 \leq 3\}$, $f(x, y) = x^2 - xy + y^2 - 3x + 4$. Poišči minimum in maksimum funkcije f na K .

1.7.1 Potrebni in zadostni pogoji na 2. odvodu, da je kritična točka lokalni ekstrem

Naj bo $D \subseteq \mathbb{R}^n$ odprta, $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ funkcija razreda C^2 . Definiramo **Hessejevo matriko** 2. odvodov:

$$(Hf)(x) = \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2} & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_n} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_1} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2} & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_n \partial x_1} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_n \partial x_2} & \vdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_n^2} \end{bmatrix}.$$

Opomba 1.105. Če je $f \in C^2(D)$, potem mešani odvodi so enaki, tj. $(Hf)^T = Hf$. Torej Hessejeva matrika je simetrična, torej ima v vsaki točki realne lastne vrednosti.

$\langle (Hf)h, h \rangle$ je **Hessejeva forma** (kvadratna forma, ki pripada matrike $(Hf)(a)$).

Definicija 1.106. Hessejeva matrika Hf je

- **pozitivno semidefinitna** (pišemo $Hf \geq 0$), če $\forall v \in D. \langle (Hf)v, v \rangle \geq 0 \iff$ vse lastne vrednosti so nenagativne;
- **pozitivno definitna** (pišemo $Hf > 0$), če $\forall v \in D. v \neq 0 \implies \langle (Hf)v, v \rangle > 0 \iff$ vse lastne vrednosti so pozitivne;
- **negativno semidefinitna** (pišemo $Hf \leq 0$), če $\forall v \in D. \langle (Hf)v, v \rangle \leq 0 \iff$ vse lastne vrednosti so nepozitivne;
- **negativno definitna** (pišemo $Hf < 0$), če $\forall v \in D. v \neq 0 \implies \langle (Hf)v, v \rangle < 0 \iff$ vse lastne vrednosti so negativne.

Trditev 1.107 (Potrebni pogoji). *Recimo, da velja*

1. Podmnožica $D \subseteq \mathbb{R}^n$ odprta, $a \in D$.
2. Funkcija $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ razreda C^2 .

Tedaj

- Če ima f v točki a lokalni maksimum, potem
 1. $(Df)(a) = 0$,
 2. $Hf(a) \leq 0$.
- Če ima f v točki a lokalni minimum, potem
 1. $(Df)(a) = 0$,
 2. $Hf(a) \geq 0$.

Dokaz. **TODO**

□

Izrek 1.108 (Zadostni pogoji). *Recimo, da velja*

1. Podmnožica $D \subseteq \mathbb{R}^n$ odprta, $a \in D$.
2. Funkcija $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ razreda C^2 .
3. $a \in D$ stacionarna točka funkcije f .

Tedaj

- Če je $(Hf)(a) > 0$, potem ima funkcija f v točki a (strogi) lokalni minimum.
- Če je $(Hf)(a) < 0$, potem ima funkcija f v točki a (strogi) lokalni maksimum.
- Če ima $(Hf)(a)$ tako pozitivne, kot negativne lastne vrednosti, potem funkcija f v točki a nima lokalnega ekstrema.

Zgled 1.109. Določi $(Hf_i)(0, 0)$ za $f_1(x, y) = \frac{1}{2}(x^2 + y^2)$, $f_2(x, y) = \frac{1}{2}(-x^2 - y^2)$, $f_3(x, y) = \frac{1}{2}(x^2 - y^2)$.

Posledica 1.110 (Zadostni pogoji, $n = 2$). *Recimo, da velja*

1. Podmnožica $D \subseteq \mathbb{R}^2$ odprta, $(a, b) \in D$.
2. Funkcija $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ razreda C^2 .
3. $(a, b) \in D$ stacionarna točka funkcije f .

Tedaj

- Če je $f_{xx}f_{yy} - f_{xy}^2(a, b) > 0$, potem ima funkcija f v točki (a, b) .
 - Če je $f_{xx}(a, b) > 0$, potem ima funkcija f v točki (a, b) lokalni minimum.
 - Če je $f_{xx}(a, b) < 0$, potem ima funkcija f v točki (a, b) lokalni maksimum.
- Če je $f_{xx}f_{yy} - f_{xy}^2(a, b) < 0$, potem funkcija f v točki (a, b) nima lokalnega ekstrema.

Dokaz. **TODO**

□

Zgled 1.111. Naj bo $f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 + 2xyz$. Klasificiraj vse stacionarne točke funkcije f .

1.7.2 Vezani ekstremi

Izrek 1.112. *Recimo, da velja*

1. Podmnožica $D \subseteq \mathbb{R}^n$ odprta.
2. Funkciji f, g_1, \dots, g_m razreda $C^1(D)$, $m < n$.
3. Preslikava $G = (g_1, \dots, g_m) : D \rightarrow \mathbb{R}^m$ maksimalnega ranga.
4. $M = G^{-1}(\{0\}) \neq \emptyset$, tj. $M = \{x \in D \mid g_1(x) = 0, \dots, g_m(x) = 0\}$ podmnogoterost v D .
5. Funkcija $f : M \rightarrow \mathbb{R}$ ima v točki $a \in M$ lokalni ekstrem (kot funkcija iz M v \mathbb{R}).

Tedaj obstajajo take realne konstante $\lambda_1, \dots, \lambda_m$, da je

$$(Df)(a) = \lambda_1(Dg_1)(a) + \dots + \lambda_m(Dg_m)(a) = \sum_{j=1}^m \lambda_j(Dg_j)(a).$$

Dokaz. **TODO**

□

Opomba 1.113. Lagrangeeva metoda za iskanja vezanih ekstremov

1. Tvorimo funkcijo $F(\underbrace{x_1, \dots, x_n}_x, \lambda_1, \dots, \lambda_m) = f(x) - \sum_{j=1}^m \lambda_j g_j(x)$.
2. Iščemo stacionarne točke F :
 - $D_x F = (Df)(x) - \sum_{j=1}^m \lambda_j (Dg_j)(x) = 0$ (n enačb).

- $D_{\lambda_j} F = -g_j(x) = 0$ za $j = 1, \dots, m$ (m enačb).

Konstante $\lambda_1, \dots, \lambda_m$ so **Lagrangeevi multiplikatorji**.

Zgled 1.114. Določi stacionarne točke funkcije $f(x, y, z) = z$ na $M = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 + z^2 = 1; x$

Zgled 1.115. Določi stacionarne točke funkcije $f(x, y, z) = x^2 - xy + y^2 - 3x + 4$ na robu $x^2 + y^2 = 9$.

2 Integrali s parametri

Naj bo $f : [a, b]_x \times [c, d]_y \rightarrow \mathbb{R}$ funkcija. Gledamo funkcijo $F(y) = \int_a^b f(x, y) dx$, kjer $y \in [c, d]$ je *parameter*.

Zanima nas v kakšni so povezavi lastnosti funkcije f in funkcije F .

Zgled 2.1. Izračunaj $F(y) = \int_0^\pi \sin(xy) dx$. Ali je $F(y)$ zvezna? Kaj je D_F ?

Zgled 2.2. Eulerjeva funkcija gama je $\Gamma(s) = \int_0^\infty x^{s-1} e^{-x} dx$.

- Določi D_Γ .
- Kakšen predznak ima Γ na D_Γ ?
- Določi osnovno rekurzivno relacijo za Γ .
- Kakšna povezava med fakulteto in Γ ?
- Kako bi lahko definirali Γ za negativne vrednosti? Za katere lahko?

Definicija 2.3. Podmnožica $D \subseteq \mathbb{R}^n$ je *lokalno kompaktna*, če

$$\forall a \in D. \exists r \in \mathbb{R}. r > 0. D \cap \overline{K(a, r)} \text{ kompaktna množica.}$$

Zgled 2.4. Primeri lokalno kompaktnih množic.

- Vsaka zaprta in vsaka odprta množica v \mathbb{R}^n je lokalno kompaktna.
- $D \subseteq \mathbb{R}^2$, $D = K(0, 1) \cup \{(1, 0)\}$ ni lokalno kompaktna.

Trditev 2.5. Recimo, da velja

1. $D \subseteq \mathbb{R}^n$ lokalno kompaktna podmnožica;
2. I zaprt interval na \mathbb{R} ;
3. funkcija $f : I_x \times D_y$ zvezna.

Tedaj je funkcija $F(u, v, y) = \int_u^v f(x, y) dx$, kjer so $(u, v, y) \in I \times I \times D$, zvezna na $I \times I \times D$.

Dokaz. Dokazujemo zveznost v točki $(u_0, v_0, y_0) \in I \times I \times D$. Ocenimo razliko $|F(u, v, y) - F(u_0, v_0, y_0)|$.

- Kaj vemo o funkciji f na nekem kompaktu? □

Posledica 2.6. Recimo, da velja

1. $D \subseteq \mathbb{R}^n$ lokalno kompaktna podmnožica;
2. $I = [a, b]$;
3. funkcija $f : I_x \times D_y$ zvezna.

Tedaj je funkcija $F(y) = \int_a^b f(x, y) dx$, zvezna na D .

2.1 Odvajanje integralov s parametri

Trditev 2.7. Recimo, da velja

1. funkcija $f : [a, b]_x \times (c, d)_y \rightarrow \mathbb{R}$ zvezna;
2. $\forall (x, y) \in [a, b] \times (c, d). f$ parcialno odvedljiva po y ;
3. funkcija $\frac{\partial f}{\partial y}(x, y)$ zvezna na $[a, b] \times (c, d)$.

Tedaj je

1. $F(y) = \int_a^b f(x, y) dx$ odvedljiva funkcija na (c, d) .
2. $F'(y) = \frac{dF}{dy}(y) = \frac{d}{dy} \int_a^b f(x, y) dx = \int_a^b \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) dx$, tj. lahko zamenjamo vrstni red odvajanja.

Dokaz. Dokazujemo, da je F odvedljiva v točki $y \in (c, d)$. Ocenimo razliko $\left| \frac{F(y+h) - F(y)}{h} - \int_a^b \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) dx \right|$

- Lagrangeev izrek.
- Ustrezni kompakti.

□

Posledica 2.8. *Recimo, da velja*

1. funkcija $f : [a, b]_x \times (c, d)_y \rightarrow \mathbb{R}$ zvezna;
2. $\forall (x, y) \in [a, b] \times (c, d)$. f parcialno odvedljiva po y ;
3. funkcija $\frac{\partial f}{\partial y}(x, y)$ zvezna na $[a, b] \times (c, d)$.
4. funkciji $\alpha, \beta : (c, d) \rightarrow [a, b]$ zvezno odvedljivi.

Tedaj $F'(y) = \frac{d}{dy} \int_{\alpha(y)}^{\beta(y)} f(x, y) dx = \int_{\alpha(y)}^{\beta(y)} \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) dx + \beta'(y)f(\beta(y), y) - \alpha'(y)f(\alpha(y), y)$.

Dokaz. $F(u, v, y) = \int_u^v f(x, y) dx \implies \int_{\alpha(y)}^{\beta(y)} f(x, y) dx = F(\alpha(y), \beta(y), y)$. Torej treba izračunati odvod funkcije treh spremenljivk.

- Osnovni izrek analize. □

Posledica 2.9. *Recimo, da velja*

1. podmnožica $D \subseteq \mathbb{R}^n$ odprta;
2. funkcija $f : [a, b]_x \times D_y \rightarrow \mathbb{R}$ zvezna;
3. $\forall (x, y) \in [a, b] \times D$. $\forall j \in [n]$. f parcialno odvedljiva po y_j ;
4. $\forall j \in [n]$. $\frac{\partial f}{\partial y_j}(x, y)$ so zvezne funkcije na $[a, b] \times D$.

Tedaj je

1. $F(y) = \int_a^b f(x, y) dx$ funkcija razreda C^1 na D .
2. $\frac{\partial F}{\partial y_j}(y) = \int_a^b \frac{\partial f}{\partial y_j}(x, y) dx$.

Zgled 2.10. S pomočjo integrala s parametrom $F(a) = \int_0^1 \frac{x^a - 1}{\ln x} dx$ izračunaj $\int_0^1 \frac{x - 1}{\ln x} dx$.

2.2 Integral integrala s parametrom

Izrek 2.11. *Recimo, da velja*

1. funkcija $f : [a, b] \times [c, d] \rightarrow \mathbb{R}$ zvezna.

Tedaj je

$$\int_c^d \left(\int_a^b f(x, y) dx \right) dy = \int_a^b \left(\int_c^d f(x, y) dy \right) dx.$$

Definicija 2.12. Integrali tipa $\int_c^d \left(\int_a^b f(x, y) dx \right) dy$ imenujemo *dvakratni integrali*.

Dokaz. Definiramo $\Psi(y) = \int_c^y \left(\int_a^b f(x, s) dx \right) ds$ in $\Phi(y) = \int_a^b \left(\int_c^y f(x, s) ds \right) dx$. Dopolj, da dokažemo:

- Ψ in Φ se ujemata v eni točki.
- $\Psi' = \Phi'$.

Pomagamo si s osnovnim izrekom analize. □

Zgled 2.13. Izračunaj $\int_0^1 \left(\int_0^2 (x + y^2) dx \right) dy$ na dva načina.

2.3 Posplošeni integrali s parametri

Naj bo Y neka množica, $a \in \mathbb{R}$, $f : [a, \infty)_x \times Y_y \rightarrow \mathbb{R}$ funkcija. Standardni predpostavki:

- Funkcija f za vsak $y \in Y$ zvezna, tj. $x \mapsto f(x, y)$ zvezna na $[a, \infty)$ za vsak $y \in Y$.
- Za vsak $y \in Y$ obstaja integral $F(y) = \int_a^\infty f(x, y) dx$

Opomba 2.14. Integral $F(y) = \int_a^\infty f(x, y) dx$ obstaja po definiciji, če obstaja $\lim_{b \rightarrow \infty} \int_a^b f(x, y) dx$.

Ta limita obstaja natanko tedaj, ko $\lim_{b \rightarrow \infty} \int_b^\infty f(x, y) dx = 0$, kar je ravno konvergenca po točkah. ?

Definicija 2.15. Integral $F(y) = \int_a^\infty f(x, y) dx$ konvergira enakomerno na Y , če

$$\forall \epsilon > 0. \exists b_0 \geq a. \forall b \geq b_0. \forall y \in Y. \left| \int_b^\infty f(x, y) dx \right| < \epsilon.$$

Zgled 2.16. Izračunaj $F(y) = \int_0^\infty ye^{-xy} dx$ za $y \in [0, \infty)$. Ali je konvergenca enakomerna na $[c, \infty)$, $c > 0$? Ali je konvergenca enakomerna na $(0, \infty)$?

Opomba 2.17. Recimo, da $F(y) = \int_a^\infty f(x, y) dx$ konvergira enakomerno. Kaj to pomeni? Naj bo $F_b(y) = \int_a^b f(x, y) dx$. Potem funkcijsko zaporedje $F_b(y)$ konvergira enakomerno proti $F(y)$ na Y .

Trditev 2.18. Recimo, da velja

- podmnožica $Y \subseteq \mathbb{R}^n$ lokalno kompaktna;
- funkcija $f : [a, \infty) \times Y \rightarrow \mathbb{R}$ zvezna;
- integral s parametri $F(y) = \int_a^\infty f(x, y) dx$ konvergira enakomerno na Y .

Tedaj je F zvezna na Y .

Dokaz. Enakomerna limita zveznih funkcij. □

Opomba 2.19. Zveznost (in odvedljivost) sta lokalni lastnosti (zvezna (oz. odvedljiva) v vsaki točki), tj. f je zvezna na Y , če je zvezna v vsaki točki $y \in Y$ (tudi, če je zvezna v okolici vsake točke $y \in Y$). Zato v prejšnji trditvi je za zveznost F na Y dovolj zahtevati, da je integral lokalno enakomerno konvergenca, tj

$$\forall y \in Y. \exists r > 0. F \text{ enakomerno konvergira na } Y \cap K(y, r).$$

Trditev 2.20 (Test enakomerne konvergence). Recimo, da velja

1. funkcija $f : [a, \infty) \times Y \rightarrow \mathbb{R}$ zvezna za vsak $y \in Y$;
2. obstaja taka zvezna funkcija $g : [a, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$, da za vsak $(x, y) \in [a, \infty) \times Y$ velja $|f(x, y)| \leq g(x)$;
3. obstaja integral $\int_a^\infty g(x) dx$.

Tedaj integral $F(y) = \int_a^\infty f(x, y) dx$ konvergira enakomerno na Y .

Dokaz. Cauchyjev kriterij za konvergenco integralov. □

Zgled 2.21. Obravnavaj lokalno enakomerno konvergenco funkcij

- $s \mapsto \int_1^\infty x^{s-1} e^{-x} dx.$
- $s \mapsto \int_0^1 x^{s-1} e^{-x} dx.$

Vpeljava nove spremenljivke $x = t^N$?

Trditev 2.22. *Recimo, da velja*

1. funkcija $f : [a, \infty)_x \times [c, d]_y \rightarrow \mathbb{R}$ zvezna;
2. integral $F(y) = \int_a^\infty f(x, y) dx$ konvergira enakomerno na $[c, d]$.

Tedaj

$$\int_c^d \left(\int_a^\infty f(x, y) dx \right) dy = \int_a^\infty \left(\int_c^d f(x, y) dy \right) dx.$$

Dokaz. Račun. □

Kadar je $\int_c^\infty \left(\int_a^\infty f(x, y) dx \right) dy = \int_a^\infty \left(\int_c^\infty f(x, y) dy \right) dx$?

Opomba 2.23. Podobno vprašanje: Kadar je $\sum_{i=1}^\infty \sum_{j=1}^\infty a_{ij} = \sum_{j=1}^\infty \sum_{i=1}^\infty a_{ij}$?

Trditev 2.24. *Recimo, da velja*

1. funkcija $f : [a, \infty)_x \times [c, \infty)_y \rightarrow [0, \infty)$ nenegativna in zvezna;
2. integral $F(y) = \int_a^\infty f(x, y) dx$ konvergira lokalno enakomerno na $[c, \infty)$ in
integral $G(x) = \int_c^\infty f(x, y) dy$ konvergira lokalno enakomerno na $[a, \infty)$ (imamo zveznost F in G).

Tedaj

$$\int_c^\infty \left(\int_a^\infty f(x, y) dx \right) dy = \int_a^\infty \left(\int_c^\infty f(x, y) dy \right) dx.$$

Torej ali sta oba enaka ∞ , ali pa sta oba končna in enaka.

Dokaz. Ocenimo navzgor $\int_a^b G(x) dx$ in $\int_c^d F(y) dy$. □

Trditev 2.25. *Recimo, da velja*

1. funkcija $f : [a, \infty) \times [c, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ zvezna;
2. integral $F(y) = \int_a^\infty |f(x, y)| dx$ konvergira lokalno enakomerno na $[c, \infty)$ in
integral $G(x) = \int_c^\infty |f(x, y)| dy$ konvergira lokalno enakomerno na $[a, \infty)$;
3. Ali $\int_c^\infty \left(\int_a^\infty |f(x, y)| dx \right) dy$ končen ali $\int_a^\infty \left(\int_c^\infty |f(x, y)| dy \right) dx$ končen.

Tedaj je

$$\int_c^\infty \left(\int_a^\infty |f(x, y)| dx \right) dy = \int_a^\infty \left(\int_c^\infty |f(x, y)| dy \right) dx.$$

Trditev 2.26 (Odvod posplošenega integrala s parametri). *Recimo, da velja*

1. funkcija $f : [a, \infty) \times (c, d) \rightarrow \mathbb{R}$ zvezna;
2. integral $F(y) = \int_a^\infty f(x, y) dx$ konvergira na (c, d) ;

3. $\forall (x, y) \in [a, b] \times (c, d)$. f parcialno odvedljiva po y ;
4. funkcija $\frac{\partial f}{\partial y}(x, y)$ zvezna na $[a, b] \times (c, d)$;
5. integral $y \mapsto \int_a^\infty \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) dx$ konvergira lokalno enakomerno na (c, d) .

Tedaj je

1. $F(y) = \int_a^\infty f(x, y) dx$ zvezno odvedljiva funkcija na (c, d) ;
2. $F'(y) = \frac{dF}{dy}(y) = \frac{d}{dy} \int_a^\infty f(x, y) dx = \int_a^\infty \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) dx$.

Dokaz. **TODO**

□

Zgled 2.27. Naj bo $0 < c < d$. Izračunaj $\int_0^\infty \frac{e^{-cx} - e^{-dx}}{x} dx$.

Trditev 2.28. Recimo, da velja

1. podmnožica $D \subseteq \mathbb{R}^n$ odprta;
2. funkcija $f : [a, \infty) \times D \rightarrow \mathbb{R}$ zvezna;
3. za vsak $(z, y) \in [a, \infty) \times D$ obstajajo $\frac{\partial f}{\partial y_j}$ in so zvezni;
4. za vsak $y \in D$ obstaja $F(y) = \int_a^\infty f(x, y) dx$;
5. za vsak $j \in \{1, \dots, n\}$ integral $F(y) = \int_a^\infty \frac{\partial f}{\partial y_j} dx$ konvergira lokalno enakomerno na D .

Tedaj je

1. $F(y) = \int_a^\infty f(x, y) dx$ zvezno odvedljiva funkcija na D ;
2. $F'(y) = \frac{\partial F}{\partial y_j}(y) = \frac{\partial}{\partial y_j} \int_a^\infty f(x, y) dx = \int_a^\infty \frac{\partial f}{\partial y_j}(x, y) dx$ za vse $j \in \{1, \dots, n\}$.

Zgled 2.29. Opazujemo integral $\int_0^\infty \frac{\sin x}{x} dx$. Velja:

- $\frac{2}{\pi} \int_0^\infty \frac{\sin(ax)}{x} dx = \text{sgn}(a)$.
- $\frac{\sin x}{x}$ je nihanje z padajočo amplitudo, kar je podobno alternirajoče harmonične vrste.
- Integral $\int_0^\infty \frac{|\sin x|}{x} dx$ ne obstaja.
- $\int_0^\infty \frac{\sin x}{x} dx = \frac{\pi}{2}$. Dokaz **TODO**

2.4 Eulerjeva funkcija gama

Definicija 2.30. Funkcija $\Gamma(s) = \int_0^\infty x^{s-1} e^{-x} dx$ je *Eulerjeva funkcija gama*.

Trditev 2.31. Lastnosti Eulerjeve funkcije gama:

- $D_\Gamma = (0, \infty)$.
- $\Gamma(s+1) = s\Gamma(s)$. Če je $n \in \mathbb{N}$, potem $\Gamma(n+1) = n!$.
- $\Gamma(1) = 1$.
- $\Gamma \in C((0, \infty))$.
- $\Gamma(s) = \frac{\Gamma(s+1)}{s}$, $s > 0$. Če je $s \approx 0$, potem $\Gamma(s) \approx \frac{1}{s}$.
- $\Gamma \in C^\infty((0, \infty))$.
- $\Gamma(s) > 0$.
- Γ je konveksna funkcija na $(0, \infty)$. Tudi $\ln \Gamma$ konveksna funkcija na $(0, \infty)$.

Dokaz. **TODO**

□

Opomba 2.32. O konveksnosti. **TODO**

Zgled 2.33. Naj bo $a > 0$. S pomočjo Eulerjeve funkcije gama izračunaj $\int_0^\infty e^{-ax^2} dx$.

Zgled 2.34. Naj bo $a \in \mathbb{R}$, $\sigma > 0$. S pomočjo prejšnjega zgleda izračunaj $\int_{-\infty}^\infty \exp\left(\frac{-(x-a)^2}{2\sigma^2}\right) dx$.

Izrek 2.35. Eulerjeva funkcija Γ je natanko določena z lastnostmi:

1. $\Gamma(1) = 1$;
2. $\Gamma(s+1) = s\Gamma(s)$;
3. $\Gamma(s) > 0$ in Γ je zvezna na $(0, \infty)$;
4. $\ln \Gamma$ je konveksna.

2.5 Eulerjeva funkcija beta

Definicija 2.36. Funkcija $B(p, q) = \int_0^1 x^{p-1}(1-x)^{q-1} dx$ je *Eulerjeva funkcija beta*.

Trditev 2.37. Lastnosti Eulerjeve funkcije beta:

- $D_B = (0, \infty) \times (0, \infty)$.
- $B(p, q) = B(q, p)$.
- $\frac{1}{2}B\left(\frac{\alpha+1}{2}, \frac{\beta+1}{2}\right) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^\alpha t \cos^\beta t dt$ za $\alpha, \beta > -1$.

Trditev 2.38. $B(p, q) = \int_0^\infty \frac{t^{p-1}}{(1+t)^{p+q}} dt$.

Dokaz. V $B(p, q)$ vpeljamo $t = \frac{x}{1-x}$.

□

Posledica 2.39. $B(p, 1-p) \int_0^\infty \frac{t^{p-1}}{1+t} dt$ za $0 < p < 1$.

Posledica 2.40. $B(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}) = \pi$.

Dokaz. Račun.

□

Opomba 2.41. Za $p \in (0, 1)$ velja:

$$B(p, 1 - p) = \frac{\pi}{\sin(p\pi)}.$$

Izrek 2.42 (Osnovna povezava med B in Γ).

$$B(p, q) = \frac{\Gamma(p)\Gamma(q)}{\Gamma(p+q)}.$$

Dokaz. **TODO**

□

Posledica 2.43. $\Gamma(\frac{1}{2}) = \sqrt{\pi}$.

Dokaz. Račun z pomočjo osnovne povezave med B in Γ .

□

Primer 2.44. Izračunaj $\Gamma(\frac{7}{2})$.

Primer 2.45. S pomočjo Eulerjeve funkcije beta izračunaj $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^8 x \cos^6 x \, dx$.

Izrek 2.46 (Stirlingova formula).

$$\lim_{s \rightarrow \infty} \frac{\Gamma(s+1)}{s^s e^{-s} \sqrt{2\pi s}} = 1.$$

Dokaz. **TODO**

□

Posledica 2.47. $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n!}{n^n e^{-n} \sqrt{2\pi n}} = 1$, tj. $n! \approx \sqrt{2\pi n} \left(\frac{n}{e}\right)^n$.

Primer 2.48. Izračunaj $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(2n)!}{n! n^n 2^n}$.

3 Riemannov integral v \mathbb{R}^n

Definicija 3.1. Kvader $[a, b]$ je množica $[a, b] = \{x = (x_1, \dots, x_n) \mid a_j \leq x_j \leq b_j, j = 1, \dots, n\}$ za $a \leq b$.

Prostornina kvadra je $V([a, b]) = \prod_{j=1}^n (b_j - a_j)$.

Definicija 3.2. Delitev D kvadra $K = [a, b]$ dobimo z delitvami robov kvadra K :

$$\forall j \in \{1, \dots, n\} . a_j = x_o^j < x_1^j < \dots < x_{m_j}^j = b_j.$$

Opomba 3.3. Delitev D je dana z delitvami robov. Lahko rečemo, da je delitev D sestavljena iz manjših kvadrov, ki jo delitev robov porodi in pišemo $\sum_{Q \in D}$, tj. gremo po vseh kvadrh delitve D .

Definicija 3.4. Delitev D' kvadra K je *finejša* od delitve D , če vsebuje vse delilne točke delitve D .

Opomba 3.5.

- Če je D delitev K , potem $\sum_{Q \in D} V(Q) = V(K)$.
- Če je D' finejša od D , potem
 - Vsak kvader iz D' leži v enem od kvadrov iz D .
 - Vsak kvader iz D je unija kvadrov iz D' .

Naj bo $f : K = [a, b] \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ omejena funkcija. Definiramo

$$m = m(f) = m(f, K) = m(K) = \inf_K f(x)$$

$$M = M(f) = M(f, K) = M(K) = \sup_K f(x)$$

Naj bo D delitev kvadra K . Naj bo $Q \in D$ (nek manjši kvader). Definiramo

$$m(f, Q) = m(Q) = \inf_Q f(x)$$

$$M(f, Q) = M(Q) = \sup_Q f(x)$$

Definicija 3.6. Spodnja Darbouxoeva vsota funkcije f pri delitvi D je

$$s(f, D) = s(D) = \sum_{Q \in D} m(Q)V(Q).$$

Zgornja Darbouxoeva vsota funkcije f pri delitvi D je

$$S(f, D) = S(D) = \sum_{Q \in D} M(Q)V(Q).$$

Opomba 3.7. Velja: $m(K)V(Q) \leq s(f, D) \leq S(f, D) \leq M(K)V(K)$.

Lema 3.8. Naj bo delitev D' finejša od delitve D . Tedaaj

$$s(f, D) \leq s(f, D') \leq S(f, D') \leq S(f, D).$$

Posledica 3.9. *Naj bosta D_1, D_2 delitvi kvadra K . Teda*

$$s(f, D) \leq S(f, D).$$

Ker za poljubni delitvi D_1, D_2 velja $s(f, D) \leq S(f, D)$. Lahko Definiramo

$$s(f) = \sup_D s(f, D)$$

$$S(f) = \inf_D S(f, d)$$

Velja: $s(f) \leq S(f)$.

Definicija 3.10. Funkcija f je na kvadru K *integrabilna po Darbouxju*, če

$$s(f) = S(f).$$

Opomba 3.11. Če velja enakost, to vrednost trenutno označimo z I_D . Sicer to označimo $\int_K f(x) dx = \int_K f(x) dV(K)$.

Primer 3.12.

$n = 2 : \int_K f(x, y) dx dy$ je *dvojni integral*.

$n = 3 : \int \int \int_K f(x, y, z) dx dy dz$ je *trojni integral*.

3.1 Riemannov integral

Definicija 3.13. Naj bo $K = [a, b]$ kvader, D delitev, $f : K \rightarrow \mathbb{R}$ funkcija. Za vsak $Q \in D$ izberimo neko točko $\eta_Q \in Q$. *Riemannova vsota* funkcije f pri delitvi D in izboru točk $\eta = \{\eta_Q \in Q\}$ je

$$R(f, D, \eta) = \sum_{Q \in D} f(\eta_Q) V(Q).$$

Označimo z $\Delta(D)$ maksimum vseh dolžin vseh tobov kvadrov delitve D .

Definicija 3.14. Funkcija f je *integrabilna po Riemannu* na kvadru K , če obstaja limita njenih Riemannovih vsot, tj.

$$\lim_{\Delta(D) \rightarrow 0} R(f, D, \eta) = I_R.$$

Opomba 3.15. To pomeni, da

$$\forall \epsilon > 0. \exists \delta > 0. \forall D^{\text{delitev}}. \Delta(D) < \delta \implies \forall \eta^{\text{izbor točk}}. |R(f, D, \eta)| < \epsilon.$$

Zgled 3.16. TODO

Opomba 3.17. Če ima funkcija $f : K \rightarrow \mathbb{R}$ limito Riemannovih vsot, je f omejena.

Lema 3.18. Naj bo D_0 delitev kvadra K . Naj bo $\epsilon > 0$. Potem obstaja tak $\delta > 0$, da za vsako delitev D , za katero je $\Delta(D) < \delta$, velja, da je vsota prostornin kvadrov delitve D , ki niso vsebovani v kakšnem od kvadrov delitve D_0 manja od ϵ .

Izrek 3.19. Naj bo $f : K \rightarrow \mathbb{R}$ omejena funkcija. NTSE:

1. f je na K integrabilna po Darbouxju.
2. f je na K integrabilna po Riemannu.
3. $\forall \epsilon > 0. \exists D^{\text{delitev}}. S(f, D) - s(f, D) < \epsilon$.

Dodatek. V tem primeru je $I_D = I_R$.

Dokaz. TODO:

□

Trditev 3.20. Naj bo $f : K \rightarrow \mathbb{R}$ zvezna, potem je f na K integrabilna.

Dokaz. TODO:

□

3.2 Osnovne lastnosti Riemannova integrala po kvadrih

Naj bo $K \subseteq \mathbb{R}^n$ kvader, funkciji f, g integrabilni na K .

1. Naj bosta $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$. Tedaj je tudi

$$\lambda f + \mu g$$

integrabilna na K in

$$\int_K (\lambda f + \mu g)(x) dx = \lambda \int_K f(x) dx + \mu \int_K g(x) dx.$$

Torej množica integrabilnih funkcij na K je vektorski prostor nad \mathbb{R} in integral je linearen funkcional na tem prostoru.

Dokaz. **TODO:**

□

2. Če je $f(x) \leq g(x)$ za vse $x \in K$, je

$$\int_K f(x) \, dx \leq \int_K g(x) \, dx.$$

Dokaz. **TODO:**

□

3. Funkcija $|f|$ je integrabilna in

$$\left| \int_K f(x) \, dx \right| \leq \int_K |f(x)| \, dx.$$

Dokaz. **TODO:**

□

3.3 Fubinijev izrek

- I. Naj bo $A \subseteq \mathbb{R}^n$ kvader in $B \subseteq \mathbb{R}^m$ kvader. Naj bo $f : A \times B \subseteq \mathbb{R}^{n+m} \rightarrow \mathbb{R}$ integrabilna. Naj bo za vsak $x \in A$ funkcija $y \mapsto f(x, y)$ integrabilna na B . Potem je funkcija

$$x \mapsto \int_B f(x, y) dy$$

integrabilna na A in velja:

$$\int \int_{A \times B} f(x, y) dx dy = \int_A \left(\int_B f(x, y) dy \right) dx.$$

- II. Naj bo $A \subseteq \mathbb{R}^n$ kvader in $B \subseteq \mathbb{R}^m$ kvader. Naj bo $f : A \times B \subseteq \mathbb{R}^{n+m} \rightarrow \mathbb{R}$ integrabilna. Naj bo za vsak $y \in B$ funkcija $x \mapsto f(x, y)$ integrabilna na A . Potem je funkcija

$$y \mapsto \int_A f(x, y) dx$$

integrabilna na B in velja:

$$\int \int_{A \times B} f(x, y) dx dy = \int_B \left(\int_A f(x, y) dx \right) dy.$$

Posledica 3.21. Če je f zvezna na $A \times B$, potem

$$\int \int_{A \times B} f(x, y) dx dy = \int_A \left(\int_B f(x, y) dy \right) dx = \int_B \left(\int_A f(x, y) dx \right) dy.$$

Posledica 3.22. Naj bo $f : [a, b] \times [c, d] \rightarrow \mathbb{R}$ zvezna. Tedaj

$$\int \int_{[a, b] \times [c, d]} f(x, y) dx dy = \int_a^b \left(\int_c^d f(x, y) dy \right) dx = \int_c^d \left(\int_a^b f(x, y) dx \right) dy.$$

Posledica 3.23. Naj bo $f : K = [a, b] \times [c, d] \times [g, h] \rightarrow \mathbb{R}$ zvezna. Tedaj

$$\int \int \int_K f(x, y) dx dy = \int_g^h \left(\int_c^d \left(\int_a^b f(x, y) dx \right) dy \right) dz = \text{še 5 drugih vrstnih redov.}$$

Zgled 3.24. TODO:

3.4 Riemannov integral na omejenih množicah

Naj bo podmnožica $A \subseteq \mathbb{R}^n$ omejena, $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ omejena funkcija.

Kako bi lahko definirali $\int_A f(x) dx$? Kaj bi bila prostornina $V(A)$ množice A ?

Ker je A omejena obstaja kvader K , da je $A \subseteq K$. Definiramo funkcijo $\tilde{f}(x) = \begin{cases} f(x); & x \in A \\ 0; & x \notin A \end{cases}$.

Definicija 3.25. Omejena funkcija f na A je *integrabilna* na omejeni množici A , če je \tilde{f} integrabilna na kvadru K , kjer je $A \subseteq K$. Tedaj

$$\int_A f(x) dx = \int_K \tilde{f}(x) dx.$$

Opomba 3.26. Dobra definiranost. **TODO:**

Opomba 3.27. Kaj če je K že kvader? **TODO:**

Zgled 3.28. **TODO:**

Trditev 3.29. Naj bo $A \subseteq \mathbb{R}^n$ omejena podmnožica. Naj bosta $f, g : A \rightarrow \mathbb{R}$ integrabilni na A in naj bosta $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$. Teda je

$$\lambda f + \mu g$$

integrabilna na A in

$$\int_A (\lambda f + \mu g)(x) dx = \lambda \int_A f(x) dx + \mu \int_A g(x) dx.$$

Dokaz. **TODO:**

□

Opomba 3.30. Množica integrabilnih na A funkcij tvori vektorski prostor nad \mathbb{R} in integral je linearen funkcional na tem prostoru.

3.4.1 Prostornina omejene množice

Definiramo *karakteristično funkcijo* množice A :

$$\chi_A(x) = \begin{cases} 1; & x \in A \\ 0; & x \notin A \end{cases}.$$

Definicija 3.31. Omejena množica $A \subseteq \mathbb{R}^n$ ima prostornino, če je funkcija $x \mapsto 1$ integrabilna na A . Tedaj

$$V(A) = \int_A 1 dx.$$

Opomba 3.32. To je Jordanova prostornina množice.

Opomba 3.33. $V(A) = \int_A 1 dx = \int_K \chi_A(x) dx$.

Opomba 3.34. Če ima A prostornino, so vse konstantne funkcije integrabilne na A :

$$\int_A \lambda dx = \lambda V(A).$$

Zgled 3.35. Ali $A = [0, 1]^2 \cap \mathbb{Q}$ ima prostornino?

Trditev 3.36. Omejena množica $Q \subseteq \mathbb{R}^n$ ima prostornino natanko tedaj, ko $V(\partial A) = 0$.

3.5 Lastnosti omejenih množic s prostornino 0