

1 Hilbertovi prostori

1. Vektorski prostor s skalarnim produktom

Naj bo X vektorski prostor nad \mathbb{R} (ali nad \mathbb{C}).

- **Definicija.** Skalarni produkt.
- **Trditev.** Cauchy-Schwartzova neenakost.
- **Definicija.** Norma na vektorskem prostoru X .
- **Trditev.** Norma, ki je dobljena iz skalarnega produkta.
- **Trditev.** Metrični prostor, porojeni z normo.

2. Hilbertovi prostori

- **Definicija.** Hilbertov prostor. Banachov prostor.
- **Zgled.** Standardni skalarni produkti na \mathbb{R}^n in \mathbb{C}^n . Norme, ki ne pridejo iz skalarnega produkta.

3. Prostor $L^2([a, b])$

- **Trditev.** Standardni skalarni produkt na prostoru $C([a, b])$.
- **Trditev.** Ali je prostor $C([a, b])$ s standardnim skalarnim produktom Hilbertov?
- **Zgled.** Kako lahko napolnimo prostor $((0, 1), d_2)$?
- **Definicija.** Kadar pravimo, da lahko napolnimo metrični prostor (M, d) ? Napolnitev prostora.
- **Opomba.** Kaj je ponavadi prostor \overline{M} ?
- **Opomba.** Prostor $L^1(A)$.
- **Definicija.** Prostor $L^2([a, b])$.
- **Opomba.** Ali je produkt dveh $L^2([a, b])$ funkcij $L^1([a, b])$ funkcija? Skalarni produkt na $L^2([a, b])$
- **Trditev.** Ali je $L^2([a, b])$ vektorski prostor nad \mathbb{R} ?
- **Opomba.** Ali je $C([a, b]) \subseteq L^2([a, b])$? Ali je $C([a, b])$ gost v $L^2([a, b])$? Kaj pomeni, da zaporedje $(f_n)_n \in L^2([a, b])$ konvergira k $f \in L^2([a, b])$?
- **Izrek.** Ali je $L^2([a, b])$ Hilbertov prostor? Kako sta povezana prostora $L^2([a, b])$ in $C([a, b])$? [brez dokaza]
- **Opomba.** Kako zgleda skalarni produkt nad \mathbb{C} ?