Uvod
Kaj so fraktali?
Podobnostna dimenzija
Hausdorffova dimenzija
Hausdorffova mera
Hausdorffova dimenzija
Lastnosti Hausdorffove dimenzije
Primeri računanja Hausdorffove dimenzije
Škatlasta dimenzija
Ekvivalentne definicije
Relacija med Hausdorffovo in škatlasto dimenzijo
Lastnosti škatlaste dimenzije

Fraktalne dimenzije

Ruslan Urazbakhtin

Fakulteta za matematiko in fiziko, Univerza v Ljubljani

6. maj 2025

„Much of the beauty of fractals is to be found in their mathematics"
— Kenneth Falconer

Kazalo

1 Uvod
- Kaj so fraktali?
- Podobnostna dimenzija

2 Hausdorffova dimenzija
- Hausdorffova mera
- Hausdorffova dimenzija
- Lastnosti Hausdorffove dimenzije
- Primeri računanja Hausdorffove dimenzije

3 Škatlasta dimenzija
- Ekvivalentne definicije
- Relacija med Hausdorffovo in škatlasto dimenzijo
- Lastnosti škatlaste dimenzije

Uvod
Kaj so fraktali?
Podobnostna dimenzija
Hausdorffova dimenzija
Hausdorffova mera
Hausdorffova dimenzija
Lastnosti Hausdorffove dimenzije
Primeri računanja Hausdorffove dimenzije
Škatlasta dimenzija
Ekvivalentne definicije
Relacija med Hausdorffovo in škatlasto dimenzijo
Lastnosti škatlaste dimenzije

Kaj so fraktali?

Fraktalne dimenzije

Ruslan Urazbakhtin

Uvod
Kaj so fraktali?
Podobnostna dimenzija
Hausdorffova dimenzija
Hausdorffova mera
Hausdorffova dimenzija
Lastnosti Hausdorffove dimenzije
Primeri računanja Hausdorffove dimenzije
Škatlasta dimenzija
Ekvivalentne definicije
Relacija med Hausdorffovo in škatlasto dimenzijo
Lastnosti škatlaste dimenzije

Kaj so fraktali?

- Besedo „fraktal“ je uvedel matematik Benoit Mandelbrot v svojem temeljnem eseju leta 1975. Izvira iz latinske besede „fractus“.
- Besedo „fraktal“ Mandelbrot je uporabljal za opis patoloških množic, ki niso bili usklajene z običajno evklidsko geometrijo.
- V svojem originalnem eseju Benoit Mandelbrot je definiral fraktal kot množico, ki ima Hausdorffovo dimenzijo strogo večjo od njene topološke dimenzije.

Kaj so fraktali?

Če rečemo, da je neka množica F fraktal, potem si mislimo, da

1. F ima fino strukturo, tj. podrobnosti se vidijo vedno enako (neodvisno od skale);
2. F je dovolj nenaravna, da je ne moremo opisat s pomocjo elementarne geometrije tako lokalno kot globalno;
3. F včasih ima samopodobno obliko;
4. Običajno je fraktalna dimenzija F večja od njene topološke dimenzije;
5. V večini primerov je F definirana na zelo preprost način, običajno rekurzivno.

Zakaj potrebujemo fraktalno dimenzijo?

Fraktalne dimenzije

Ruslan Urazbakhtin

Uvod
Kaj so fraktali?
Podobnostna dimenzija
Hausdorffova dimenzija
Hausdorffova mera
Hausdorffova dimenzija
Lastnosti Hausdorffove dimenzije
Primeri računanja Hausdorffove dimenzije
Škatlasta dimenzija
Ekvivalentne definicije
Relacija med Hausdorffovo in škatlasto dimenzijo
Lastnosti škatlaste dimenzije

- Metode iz evklidske geometrije/analize niso dovolj, da opišemo lastnosti fraktalov.
- Fraktalna geometrija nam ponuja osnovno konstrukcijo za obravnavo množic, ki izgledajo nekako nenaravno.
- Zelo na grobo povedano nam dimenzija množice pove, koliko prostora ta zavzema v ambientnem prostoru.
- Dimenzija meri kompleksnost množice na poljubno majhnih skalah ter opisuje nekatere njene geometrijske in topološke lastnosti.

Borelova σ-algebra

Definicija

Družina podmnožic Σ množice $\mathbb{R}^n$ je **σ-algebra**, če:

1. $\mathbb{R}^n \in \Sigma$;
2. Če je $A \in \Sigma$, potem $A^c \in \Sigma$;
3. Poljubna števna unija množic iz Σ je element Σ.

Borelova σ-algebra

Definicija

Družina podmnožic Σ množice $\mathbb{R}^n$ je ***σ*-algebra**, če:

1. $\mathbb{R}^n \in \Sigma$;
2. Če je $A \in \Sigma$, potem $A^c \in \Sigma$;
3. Poljubna števna unija množic iz Σ je element Σ.

Definicija

- Najmanjšo σ-algebro na $\mathbb{R}^n$, ki vsebuje vse odprte podmnožice $\mathbb{R}^n$, imenujemo **Borelova σ-algebra**.
- Podmnožica $A \subseteq \mathbb{R}^n$ je **Borelova**, če pripada Borelovi σ-algebri.

Borelova σ-algebra

Definicija

- Najmanjšo σ-algebro na $\mathbb{R}^n$, ki vsebuje vse odprte podmnožice $\mathbb{R}^n$, imenujemo **Borelova σ-algebra**.
- Podmnožica $A \subseteq \mathbb{R}^n$ je **Borelova**, če pripada Borelovi σ-algebri.

Opomba

- Vse odprte in vse zaprte množice so Borelovi.
- Poljubna števna unija (presek) odprtih (zaprtih) množic je Borelova množica.
- Vsi množici, ki smo jih bomo obravnavali, bodo Borelovi.

Mera na $\mathbb{R}^n$

Definicija

Preslikava $\mu : \mathcal{P}(\mathbb{R}^n) \to [0, \infty) \cup \{\infty\}$ je **mera** na $\mathbb{R}^n$, če

1. $\mu(\emptyset) = 0$;
2. Če je $A \subseteq B$, potem $\mu(A) \leq \mu(B)$;
3. Če je $\{A_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ števna družina podmnožic $\mathbb{R}^n$, potem
$$\mu\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) \leq \sum_{i=1}^{\infty} \mu(A_i)$$
4. Če je $\{A_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ števna družina paroma disjunktnih Borelovih podmnožic $\mathbb{R}^n$, potem
$$\mu\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) = \sum_{i=1}^{\infty} \mu(A_i)$$

Mera na $\mathbb{R}^n$

Definicija

Pravimo tudi, da je $\mu(A)$ **mera množice** A.

Opomba

- $\mu(A)$ lahko si predstavljamo kot „velikost“ množice A, ki je izmerjena na nek način.
- 4. pogoj pravi, da če množico A razbijemo na števno mnogo paroma disjunktnih Borelovih množic, potem vsota mer delov je enaka mere celotne množice (ponavadi ga težko dokazati).

Primeri mer

- **Mera štetja.**

  Naj bo $A \subseteq \mathbb{R}^n$. Definiramo $\mu(A) = \begin{cases} n; & |A| = n \in \mathbb{N}, \\ \infty; & \text{sicer} \end{cases}.$

  Potem μ je mera na $\mathbb{R}^n$.

- **Točkasta masa.**

  Naj bo $a \in \mathbb{R}^n$, $A \subseteq \mathbb{R}^n$. Definiramo $\mu(A) = \begin{cases} 1; & a \in A, \\ 0; & \text{sicer} \end{cases}.$

  Potem μ je mera (porazdelitev mase) na $\mathbb{R}^n$.

Lebesgueva $\mathcal{L}^n$ mera

Fraktalne dimenzije

Ruslan Urazbakhtin

Uvod

Kaj so fraktali?

Podobnostna dimenzija

Hausdorffova dimenzija

Hausdorffova mera

Hausdorffova dimenzija

Lastnosti Hausdorffove dimenzije

Primeri računanja Hausdorffove dimenzije

Škatlasta dimenzija

Ekvivalentne definicije

Relacija med Hausdorffovo in škatlasto dimenzijo

Lastnosti škatlaste dimenzije

Lebesgueva $\mathcal{L}^n$ mera na $\mathbb{R}^n$ je posplošitev evklidskih pojmov „dolžina“, „ploščina“, „volumen“ itn. na večji razred množic.

Lebesgueva $\mathcal{L}^n$ mera

Fraktalne dimenzije

Ruslan Urazbakhtin

Uvod
- Kaj so fraktali?
- Podobnostna dimenzija

Hausdorffova dimenzija
- Hausdorffova mera
- Hausdorffova dimenzija
- Lastnosti Hausdorffove dimenzije
- Primeri računanja Hausdorffove dimenzije

Škatlasta dimenzija
- Ekvivalentne definicije
- Relacija med Hausdorffovo in škatlasto dimenzijo
- Lastnosti škatlaste dimenzije

Naj bo $A = \{(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n \mid a_i \leq x_i \leq b_i\}$ kvader v $\mathbb{R}^n$, potem n-dim volumen množice A je

$$\mathrm{vol}^n(A) := (b_1 - a_1)(b_2 - a_2)\dots(b_n - a_n).$$

Definicija

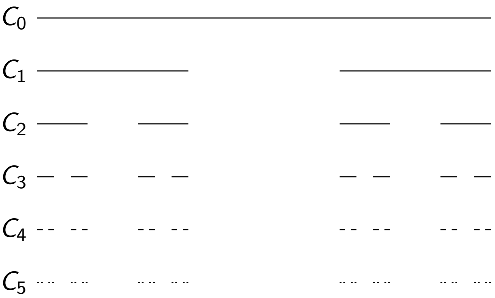
Lebesgueva mera $\mathcal{L}^n : \mathcal{P}(\mathbb{R}^n) \to [0, \infty]$ je definirana s predpisom

$$\mathcal{L}^n(A) = \inf\left\{\sum_{i=1}^{\infty} \mathrm{vol}^n(A_i) \mid A \subseteq \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right\},$$

kjer so A_i kvadri.

Cantorjeva množica C

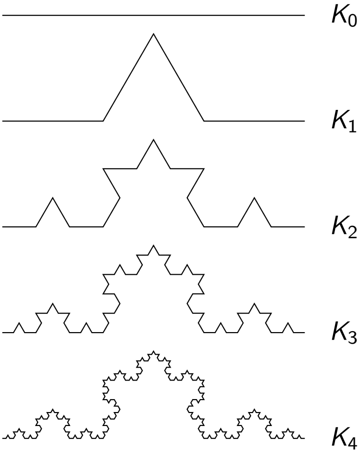
Izračunamo dolžino $\mathcal{L}^1(C)$ Cantorjeve množice $C = \bigcup_{n=1}^{\infty} C_n$.



Lema

Naj bosta $A, B \subseteq \mathbb{R}^n$ Borelovi, $A \subseteq B$. Naj bo μ mera na $\mathbb{R}^n$. Potem $\mu(B \setminus A) = \mu(B) - \mu(A)$.

Kochova krivulja K



Kaj je narobe z C in K?

Fraktalne dimenzije
Ruslan Urazbakhtin
Uvod
Kaj so fraktali?
Podobnostna dimenzija
Hausdorffova dimenzija
Hausdorffova mera
Hausdorffova dimenzija
Lastnosti Hausdorffove dimenzije
Primeri računanja Hausdorffove dimenzije
Škatlasta dimenzija
Ekvivalentne definicije
Relacija med Hausdorffovo in škatlasto dimenzijo
Lastnosti škatlaste dimenzije

Kaj je narobe z C in K?

Fraktalne dimenzije

Ruslan Urazbakhtin

Uvod

Kaj so fraktali?

Podobnostna dimenzija

Hausdorffova dimenzija

Hausdorffova mera

Hausdorffova dimenzija

Lastnosti Hausdorffove dimenzije

Primeri računanja Hausdorffove dimenzije

Škatlasta dimenzija

Ekvivalentne definicije

Relacija med Hausdorffovo in škatlasto dimenzijo

Lastnosti škatlaste dimenzije

- Očitno je, da je pri izbiri dimenzije nekaj narobe (torej z nami).
- Ni možnosti, da bi dobili kaj pametnega, če bi računali ploščino daljice ali šteli njene točke.

Ali obstaja boljša možnost za izbiro dimenzije?

Ali obstaja boljša možnost za izbiro dimenzije?

Obstaja.

Podobnostna dimenzija

- Kaj lahko povemo o masi daljice, če dvakrat zmanjšamo njeno dolžino?
- Kaj lahko povemo o masi kvadrata, če dvakrat zmanjšamo dolžino njegove stranice?

Podobnostna dimenzija

Fraktalne dimenzije

Ruslan Urazbakhtin

Uvod
- Kaj so fraktali?
- Podobnostna dimenzija

Hausdorffova dimenzija
- Hausdorffova mera
- Hausdorffova dimenzija
- Lastnosti Hausdorffove dimenzije
- Primeri računanja Hausdorffove dimenzije

Škatlasta dimenzija
- Ekvivalentne definicije
- Relacija med Hausdorffovo in škatlasto dimenzijo
- Lastnosti škatlaste dimenzije

- Kaj lahko povemo o masi daljice, če dvakrat zmanjšamo njeno dolžino?
- Kaj lahko povemo o masi kvadrata, če dvakrat zmanjšamo dolžino njegove stranice?

Torej
$$m(\lambda D) = \lambda^s m(D).$$

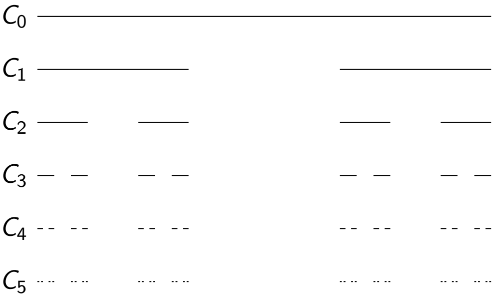
Podobnostna dimenzija

Fraktalne dimenzije
Ruslan Urazbakhtin
Uvod
Kaj so fraktali?
Podobnostna dimenzija
Hausdorffova dimenzija
Hausdorffova mera
Hausdorffova dimenzija
Lastnosti Hausdorffove dimenzije
Primeri računanja Hausdorffove dimenzije
Škatlasta dimenzija
Ekvivalentne definicije
Relacija med Hausdorffovo in škatlasto dimenzijo
Lastnosti škatlaste dimenzije

Torej

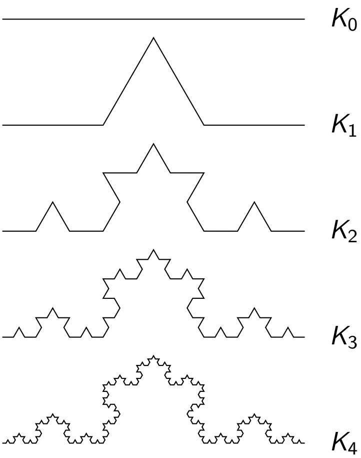
$$m(\lambda D) = \lambda^s m(D).$$

Kaj se zgodi z maso Cantorjeve množice, če trikrat zmanjšamo začetni interval?



Podobnostna dimenzija

Kaj se zgodi z maso Kochove krivulje, če trikrat zmanjšamo začetni interval?



Podobnostna dimenzija

Fraktalne dimenzije

Ruslan Urazbakhtin

Uvod

Kaj so fraktali?

Podobnostna dimenzija

Hausdorffova dimenzija

Hausdorffova mera

Hausdorffova dimenzija

Lastnosti Hausdorffove dimenzije

Primeri računanja Hausdorffove dimenzije

Škatlasta dimenzija

Ekvivalentne definicije

Relacija med Hausdorffovo in škatlasto dimenzijo

Lastnosti škatlaste dimenzije

Definicija

Naj bo množica $F \subseteq \mathbb{R}^n$ sestavljena iz m kopij same sebe, kjer je vsaka kopija zmanjšana za faktor r. Potem rečemo, da ima množica F **podobnastno dimenzijo** enako $\log_r m$.

Podobnostna dimenzija

Fraktalne dimenzije

Ruslan Urazbakhtin

Uvod
Kaj so fraktali?
Podobnostna dimenzija
Hausdorffova dimenzija
Hausdorffova mera
Hausdorffova dimenzija
Lastnosti Hausdorffove dimenzije
Primeri računanja Hausdorffove dimenzije
Škatlasta dimenzija
Ekvivalentne definicije
Relacija med Hausdorffovo in škatlasto dimenzijo
Lastnosti škatlaste dimenzije

Definicija

Naj bo množica $F \subseteq \mathbb{R}^n$ sestavljena iz m kopij same sebe, kjer je vsaka kopija zmanjšana za faktor r. Potem rečemo, da ima množica F **podobnastno dimenzijo** enako $\log_r m$.

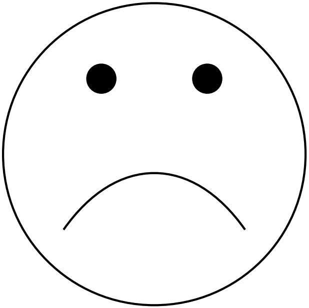
Spet imamo en problem...

Podobnostna dimenzija

Definicija

Naj bo množica $F \subseteq \mathbb{R}^n$ sestavljena iz m kopij same sebe, kjer je vsaka kopija zmanjšana za faktor r. Potem rečemo, da ima množica F **podobnastno dimenzijo** enako $\log_r m$.

Spet imamo en problem...
Samopodobnih množic je zelo malo. Recimo, že krožnica ni taka.

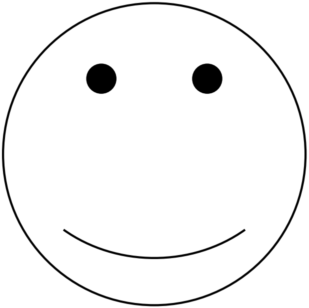


Podobnostna dimenzija

Definicija

Naj bo množica $F \subseteq \mathbb{R}^n$ sestavljena iz m kopij same sebe, kjer je vsaka kopija zmanjšana za faktor r. Potem rečemo, da ima množica F **podobnastno dimenzijo** enako $\log_r m$.

Spet imamo en problem...
Samopodobnih množic je zelo malo. Recimo, že krožnica ni taka.



Hausdorffova dimenzija

- Hausdorffova dimenzija izmed vseh „fraktalnih“ dimenzij, ki jih ljudje uporabljajo, je najbolj stara in verjetno najbolj pomembna.
- Lahko jo definiramo za poljubno množico in matematično je zelo priročna, ker je osnovana na meri, s katero lahko relativno preprosto kaj naredimo.
- Glavna pomanjkljivost je, da jo v večini situacij težko izračunati ali oceniti z numerični metodi.

Uvod
Kaj so fraktali?
Podobnostna dimenzija
Hausdorffova dimenzija
Hausdorffova mera
Hausdorffova dimenzija
Lastnosti Hausdorffove dimenzije
Primeri računanja Hausdorffove dimenzije
Škatlasta dimenzija
Ekvivalentne definicije
Relacija med Hausdorffovo in škatlasto dimenzijo
Lastnosti škatlaste dimenzije

Hausdorffova mera

Definicija

Naj bo $F \subseteq \mathbb{R}^n$. Naj bo $\{U_i\}$ števna družina množic iz $\mathbb{R}^n$, za katero velja:

1. $\forall i \in \mathbb{N} \,.\, 0 \leq |U_i| \leq \delta$;
2. $F \subseteq \bigcup_{i=1}^{\infty} U_i$.

Potem $\{U_i\}$ imenujemo **δ-pokritje** množice F.

Fraktalne dimenzije
Ruslan Urazbakhtin
Uvod
Kaj so fraktali?
Podobnostna dimenzija
Hausdorffova dimenzija
Hausdorffova mera
Hausdorffova dimenzija
Lastnosti Hausdorffove dimenzije
Primeri računanja Hausdorffove dimenzije
Škatlasta dimenzija
Ekvivalentne definicije
Relacija med Hausdorffovo in škatlasto dimenzijo
Lastnosti škatlaste dimenzije

Hausdorffova mera

Naj bo $F \subseteq \mathbb{R}^n$ in $s \geq 0$. Za vsak $\delta > 0$ definiramo

$$\mathcal{H}^s_\delta(F) = \inf\left\{\sum_{i=1}^{\infty} |U_i|^s \mid \{U_i\} \text{ je } \delta\text{-pokritje } F\right\}$$

Hausdorffova mera

Fraktalne dimenzije

Ruslan Urazbakhtin

Uvod
Kaj so fraktali?
Podobnostna dimenzija
Hausdorffova dimenzija
Hausdorffova mera
Hausdorffova dimenzija
Lastnosti Hausdorffove dimenzije
Primeri računanja Hausdorffove dimenzije
Škatlasta dimenzija
Ekvivalentne definicije
Relacija med Hausdorffovo in škatlasto dimenzijo
Lastnosti škatlaste dimenzije

Naj bo $F \subseteq \mathbb{R}^n$ in $s \geq 0$. Za vsak $\delta > 0$ definiramo

$$\mathcal{H}^s_\delta(F) = \inf \left\{ \sum_{i=1}^{\infty} |U_i|^s \mid \{U_i\} \text{ je } \delta\text{-pokritje } F \right\}$$

Ko $\delta \to 0$, razred možnih pokritij F se zmanjšuje, torej inf narašča, torej lahko definiramo:

$$\mathcal{H}^s(F) = \lim_{\delta \to 0} \mathcal{H}^s_\delta(F)$$

Ta limita vedno obstaja za vsako množico $F \subseteq \mathbb{R}^n$.

Hausdorffova mera

Fraktalne dimenzije

Ruslan Urazbakhtin

Uvod
Kaj so fraktali?
Podobnostna dimenzija
Hausdorffova dimenzija
Hausdorffova mera
Hausdorffova dimenzija
Lastnosti Hausdorffove dimenzije
Primeri računanja Hausdorffove dimenzije
Škatlasta dimenzija
Ekvivalentne definicije
Relacija med Hausdorffovo in škatlasto dimenzijo
Lastnosti škatlaste dimenzije

Naj bo $F \subseteq \mathbb{R}^n$ in $s \geq 0$. Za vsak $\delta > 0$ definiramo

$$\mathcal{H}^s_\delta(F) = \inf\left\{\sum_{i=1}^{\infty} |U_i|^s \mid \{U_i\} \text{ je } \delta\text{-pokritje } F\right\}$$

Ko $\delta \to 0$, razred možnih pokritij F se zmanjšuje, torej inf narašča, torej lahko definiramo:

$$\mathcal{H}^s(F) = \lim_{\delta \to 0} \mathcal{H}^s_\delta(F)$$

Ta limita vedno obstaja za vsako množico $F \subseteq \mathbb{R}^n$.
Število $\mathcal{H}^s(F)$ imenujemo ***s*-dim Hausdorffova mera** množice F.

Trditev

$\mathcal{H}^s$ je mera na $\mathbb{R}^n$.

Uvod
Kaj so fraktali?
Podobnostna dimenzija
Hausdorffova dimenzija
Hausdorffova mera
Hausdorffova dimenzija
Lastnosti Hausdorffove dimenzije
Primeri računanja Hausdorffove dimenzije
Škatlasta dimenzija
Ekvivalentne definicije
Relacija med Hausdorffovo in škatlasto dimenzijo
Lastnosti škatlaste dimenzije

Hausdorffova mera

Opomba

Hausdorffova mera je posplošitev Lebesgueve mere na necele dimenzije. Se da pokazati, da

$$\mathcal{H}^n(F) = \frac{1}{c_n}\mathcal{L}^n(F),$$

kjer je c_n volumen n-dim krogle z polmerom $\frac{1}{2}$, tj.

$$c_n = \frac{\pi^{(n/2)}}{\Gamma(n/2+1)}\left(\frac{1}{2}\right)^n$$

Lastnosti skaliranja

Fraktalne dimenzije

Ruslan Urazbakhtin

Uvod

Kaj so fraktali?

Podobnostna dimenzija

Hausdorffova dimenzija

Hausdorffova mera

Hausdorffova dimenzija

Lastnosti Hausdorffove dimenzije

Primeri računanja Hausdorffove dimenzije

Škatlasta dimenzija

Ekvivalentne definicije

Relacija med Hausdorffovo in škatlasto dimenzijo

Lastnosti škatlaste dimenzije

Definicija

Podobnostna preslikava z koeficientom podobnosti $c > 0$ je preslikava $P : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, za katero velja:

$$\forall x, y \in \mathbb{R}^n \,.\, |P(x) - P(y)| = c|x - y|$$

Lastnosti skaliranja

Uvod
Kaj so fraktali?
Podobnostna dimenzija
Hausdorffova dimenzija
Hausdorffova mera
Hausdorffova dimenzija
Lastnosti Hausdorffove dimenzije
Primeri računanja Hausdorffove dimenzije
Škatlasta dimenzija
Ekvivalentne definicije
Relacija med Hausdorffovo in škatlasto dimenzijo
Lastnosti škatlaste dimenzije

Naj bo $P : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ podobnostna preslikava z podobnostnim koeficientom $c > 0$. Naj bo $F \subseteq \mathbb{R}^n$.
Dobro poznamo lastnosti skaliranja dolžine, ploščine, volumna, npr.

- $\mathcal{L}^1(P_*(F)) = c\mathcal{L}^1(F)$
- $\mathcal{L}^2(P_*(F)) = c^2\mathcal{L}^2(F)$
- $\mathcal{L}^3(P_*(F)) = c^3\mathcal{L}^3(F)$

Ali velja enako tudi za $\mathcal{H}^s$?

Lastnosti skaliranja

Uvod
Kaj so fraktali?
Podobnostna dimenzija
Hausdorffova dimenzija
Hausdorffova mera
Hausdorffova dimenzija
Lastnosti Hausdorffove dimenzije
Primeri računanja Hausdorffove dimenzije
Škatlasta dimenzija
Ekvivalentne definicije
Relacija med Hausdorffovo in škatlasto dimenzijo
Lastnosti škatlaste dimenzije

Naj bo $P : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ podobnostna preslikava z podobnostnim koeficientom $c > 0$. Naj bo $F \subseteq \mathbb{R}^n$.

Trditev

$$\mathcal{H}^s(P_*(F)) = c^s \mathcal{H}^s(F)$$

Lastnosti skaliranja

Fraktalne dimenzije

Ruslan Urazbakhtin

Uvod
Kaj so fraktali?
Podobnostna dimenzija

Hausdorffova dimenzija
Hausdorffova mera
Hausdorffova dimenzija
Lastnosti Hausdorffove dimenzije
Primeri računanja Hausdorffove dimenzije

Škatlasta dimenzija
Ekvivalentne definicije
Relacija med Hausdorffovo in škatlasto dimenzijo
Lastnosti škatlaste dimenzije

Definicija

Naj bosta $X \subseteq \mathbb{R}^n$ in $Y \subseteq \mathbb{R}^m$. Preslikava $f : X \to Y$ je **Höldorjeva** stopnje $\alpha > 0$, če

$$\exists c > 0 \,.\, \forall x, y \in X \,.\, |f(x) - f(y)| \leq c|x - y|^{\alpha}$$

Lastnosti skaliranja

Definicija

Naj bosta $X \subseteq \mathbb{R}^n$ in $Y \subseteq \mathbb{R}^m$. Preslikava $f : X \to Y$ je **Höldorjeva** stopnje $\alpha > 0$, če

$$\exists c > 0 \,.\, \forall x, y \in X \,.\, |f(x) - f(y)| \leq c|x - y|^{\alpha}$$

Trditev

Naj bo $F \subseteq \mathbb{R}^n$ in $f : F \to \mathbb{R}^n$ Höldorjeva preslikava stopnje $\alpha > 0$. Potem za vsak $s \geq 0$ velja:

$$\mathcal{H}^{s/\alpha}(f_*(F)) \leq c^{s/\alpha}\mathcal{H}^s(F)$$

Lastnosti skaliranja

Trditev

Naj bo $F \subseteq \mathbb{R}^n$ in $f : F \to \mathbb{R}^n$ Höldorjeva preslikava stopnje $\alpha > 0$. Potem za vsak $s \geq 0$ velja:

$$\mathcal{H}^{s/\alpha}(f_*(F)) \leq c^{s/\alpha}\mathcal{H}^s(F)$$

Posledica

Če je $f : F \to \mathbb{R}^n$ Lipschitzova, tj.

$$\exists c > 0 \,.\, \forall x, y \in X \,.\, |f(x) - f(y)| \leq c|x - y|,$$

potem

$$\mathcal{H}^s(f_*(F)) \leq c^s\mathcal{H}^s(F)$$

Fraktalne dimenzije

Ruslan Urazbakhtin

Uvod
Kaj so fraktali?
Podobnostna dimenzija

Hausdorffova dimenzija
Hausdorffova mera
Hausdorffova dimenzija
Lastnosti Hausdorffove dimenzije
Primeri računanja Hausdorffove dimenzije

Škatlasta dimenzija
Ekvivalentne definicije
Relacija med Hausdorffovo in škatlasto dimenzijo
Lastnosti škatlaste dimenzije

Hausdorffova dimenzija

Naj bo $F \subseteq \mathbb{R}^n$. Gledamo funkcijo

$$\begin{aligned} \mathcal{H}_F : [0, \infty) &\longrightarrow [0, \infty] \\ s &\longmapsto \mathcal{H}^s(F) \end{aligned}$$

Lema

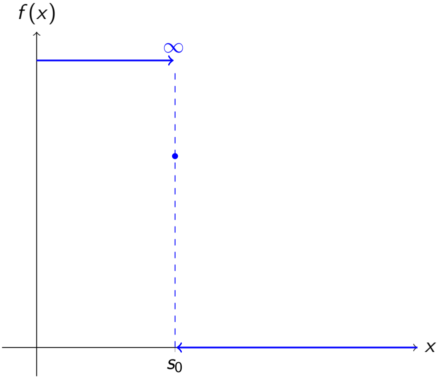
Naj bo $F \subseteq \mathbb{R}^n$. Če je $\mathcal{H}^s(F) < \infty$, potem $\mathcal{H}^t(F) = 0$ za vse $t > s$.

Hausdorffova dimenzija

Lema

Naj bo $F \subseteq \mathbb{R}^n$. Če je $\mathcal{H}^s(F) < \infty$, potem $\mathcal{H}^t(F) = 0$ za vse $t > s$.

Oglejmo si graf funkcije $\mathcal{H}_F$:



Fraktalne dimenzije
Ruslan Urazbakhtin
Uvod
Kaj so fraktali?
Podobnostna dimenzija
Hausdorffova dimenzija
Hausdorffova mera
Hausdorffova dimenzija
Lastnosti Hausdorffove dimenzije
Primeri računanja Hausdorffove dimenzije
Škatlasta dimenzija
Ekvivalentne definicije
Relacija med Hausdorffovo in škatlasto dimenzijo
Lastnosti škatlaste dimenzije

Hausdorffova dimenzija

Definicija

Hausdorffova dimenzija množice $F \subseteq \mathbb{R}^n$ je

$$\dim_H F = \inf \{ s \geq 0 \mid \mathcal{H}^s(F) = 0 \} = \sup \{ s \geq 0 \mid \mathcal{H}^s(F) = \infty \}$$

Hausdorffova dimenzija

Fraktalne dimenzije

Ruslan Urazbakhtin

Uvod
Kaj so fraktali?
Podobnostna dimenzija
Hausdorffova dimenzija
Hausdorffova mera
Hausdorffova dimenzija
Lastnosti Hausdorffove dimenzije
Primeri računanja Hausdorffove dimenzije
Škatlasta dimenzija
Ekvivalentne definicije
Relacija med Hausdorffovo in škatlasto dimenzijo
Lastnosti škatlaste dimenzije

Definicija

Hausdorffova dimenzija množice $F \subseteq \mathbb{R}^n$ je

$$\dim_H F = \inf\{s \geq 0 \mid \mathcal{H}^s(F) = 0\} = \sup\{s \geq 0 \mid \mathcal{H}^s(F) = \infty\}$$

Opomba

- Po dogovoru $\sup(\emptyset) = 0$.
- Ta dimenzija je definirana za poljubno podmnožico $\mathbb{R}^n$.

Hausdorffova dimenzija

Definicija

Hausdorffova dimenzija množice $F \subseteq \mathbb{R}^n$ je

$$\dim_H F = \inf\{s \geq 0 \mid \mathcal{H}^s(F) = 0\} = \sup\{s \geq 0 \mid \mathcal{H}^s(F) = \infty\}$$

Imamo:

$$\mathcal{H}^s(F) = \begin{cases} \infty; & 0 \leq s < \dim_H F \\ 0; & s > \dim_H F; \end{cases}$$

Če je $s = \dim_H F$, potem $\mathcal{H}^s(F)$ lahko 0, ∞ ali $a \in \mathbb{R}$.

Hausdorffova dimenzija krogle B^n

Lema

$$\dim_H B^n = n$$

Fraktalne dimenzije

Ruslan Urazbakhtin

Uvod
Kaj so fraktali?
Podobnostna dimenzija

Hausdorffova dimenzija
Hausdorffova mera
Hausdorffova dimenzija
Lastnosti Hausdorffove dimenzije
Primeri računanja Hausdorffove dimenzije

Škatlasta dimenzija
Ekvivalentne definicije
Relacija med Hausdorffovo in škatlasto dimenzijo
Lastnosti škatlaste dimenzije

Hausdorffova dimenzija krogle B^n

Lema

$$\dim_H B^n = n$$

Spomnimo se

Lema

$$\mathcal{H}^n(F) = \frac{1}{c_n}\mathcal{L}^n(F),$$

kjer je c_n volumen n-dim krogle z polmerom $\frac{1}{2}$, tj.

$$c_n = \frac{\pi^{(n/2)}}{\Gamma(n/2+1)}\left(\frac{1}{2}\right)^n$$

Lastnosti Hausdorffove dimenzije

Fraktalne dimenzije

Ruslan Urazbakhtin

Uvod
Kaj so fraktali?
Podobnostna dimenzija
Hausdorffova dimenzija
Hausdorffova mera
Hausdorffova dimenzija
Lastnosti Hausdorffove dimenzije
Primeri računanja Hausdorffove dimenzije
Škatlasta dimenzija
Ekvivalentne definicije
Relacija med Hausdorffovo in škatlasto dimenzijo
Lastnosti škatlaste dimenzije

(1) **Monotonost.** Če je $E \subseteq F$, potem $\dim_H E \leq \dim_H F$.

Lastnosti Hausdorffove dimenzije

Fraktalne dimenzije

Ruslan Urazbakhtin

Uvod
Kaj so fraktali?
Podobnostna dimenzija

Hausdorffova dimenzija
Hausdorffova mera
Hausdorffova dimenzija
Lastnosti Hausdorffove dimenzije
Primeri računanja Hausdorffove dimenzije

Škatlasta dimenzija
Ekvivalentne definicije
Relacija med Hausdorffovo in škatlasto dimenzijo
Lastnosti škatlaste dimenzije

(1) **Monotonost.** Če je $E \subseteq F$, potem $\dim_H E \leq \dim_H F$.

(2) **Števna stabilnost.** Če je $F_1, F_2, \dots$ števno zaporedje množic, potem

$$\dim_H \bigcup_{i=1}^{\infty} F_i = \sup_{1 \leq i < \infty} (\dim_H F_i)$$

Fraktalne dimenzije

Ruslan Urazbakhtin

Uvod
Kaj so fraktali?
Podobnostna dimenzija

Hausdorffova dimenzija
Hausdorffova mera
Hausdorffova dimenzija
Lastnosti Hausdorffove dimenzije
Primeri računanja Hausdorffove dimenzije

Škatlasta dimenzija
Ekvivalentne definicije
Relacija med Hausdorffovo in škatlasto dimenzijo
Lastnosti škatlaste dimenzije

Lastnosti Hausdorffove dimenzije

(1) **Monotonost.** Če je $E \subseteq F$, potem $\dim_H E \leq \dim_H F$.

(2) **Števna stabilnost.** Če je $F_1, F_2, \ldots$ števno zaporedje množic, potem

$$\dim_H \bigcup_{i=1}^{\infty} F_i = \sup_{1 \leq i < \infty} (\dim_H F_i)$$

(3) **Dimenzija števnih množic.** Če je F števna, potem $\dim_H F = 0$.

Lastnosti Hausdorffove dimenzije

(1) **Monotonost.** Če je $E \subseteq F$, potem $\dim_H E \leq \dim_H F$.

(2) **Števna stabilnost.** Če je $F_1, F_2, \ldots$ števno zaporedje množic, potem

$$\dim_H \bigcup_{i=1}^{\infty} F_i = \sup_{1 \leq i < \infty} (\dim_H F_i)$$

(3) **Dimenzija števnih množic.** Če je F števna, potem $\dim_H F = 0$.

(4) **Dimenzija odprtih množic.** Naj bo $F \subseteq \mathbb{R}^n$ odprta podmnožica. Potem $\dim_H F = n$.

Lastnosti Hausdorffove dimenzije

Fraktalne dimenzije
Ruslan Urazbakhtin
Uvod
Kaj so fraktali?
Podobnostna dimenzija
Hausdorffova dimenzija
Hausdorffova mera
Hausdorffova dimenzija
Lastnosti Hausdorffove dimenzije
Primeri računanja Hausdorffove dimenzije
Škatlasta dimenzija
Ekvivalentne definicije
Relacija med Hausdorffovo in škatlasto dimenzijo
Lastnosti škatlaste dimenzije

(1) **Monotonost.** Če je $E \subseteq F$, potem $\dim_H E \leq \dim_H F$.

(2) **Števna stabilnost.** Če je $F_1, F_2, \ldots$ števno zaporedje množic, potem

$$\dim_H \bigcup_{i=1}^{\infty} F_i = \sup_{1 \leq i < \infty} (\dim_H F_i)$$

(3) **Dimenzija števnih množic.** Če je F števna, potem $\dim_H F = 0$.

(4) **Dimenzija odprtih množic.** Naj bo $F \subseteq \mathbb{R}^n$ odprta podmnožica. Potem $\dim_H F = n$.

(5) **Dimenzija gladkih podmnogoterosti.** Naj bo $F \subseteq \mathbb{R}^n$ gladka podmnogoterost dimenzije m, potem $\dim_H F = m$. Posebej:

- Če je F gladka krivulja, potem $\dim_H F = 1$;
- Če je F gladka ploskev, potem $\dim_H F = 2$.

Transformacijeske lastnosti Hausdorffove dimenzije

Fraktalne dimenzije
Ruslan Urazbakhtin
Uvod
Kaj so fraktali?
Podobnostna dimenzija
Hausdorffova dimenzija
Hausdorffova mera
Hausdorffova dimenzija
Lastnosti Hausdorffove dimenzije
Primeri računanja Hausdorffove dimenzije
Škatlasta dimenzija
Ekvivalentne definicije
Relacija med Hausdorffovo in škatlasto dimenzijo
Lastnosti škatlaste dimenzije

Trditev

Naj bo $F \subseteq \mathbb{R}^n$ in $f : F \to \mathbb{R}^n$ Höldorjeva preslikava stopnje $\alpha > 0$. Potem

$$\dim_H f_*(F) \leq \frac{1}{\alpha} \dim_H F$$

Transformacijeske lastnosti Hausdorffove dimenzije

Trditev

Naj bo $F \subseteq \mathbb{R}^n$ in $f : F \to \mathbb{R}^n$ Höldorjeva preslikava stopnje $\alpha > 0$. Potem

$$\dim_H f_*(F) \leq \frac{1}{\alpha} \dim_H F$$

Spomnimo se

Trditev

Naj bo $F \subseteq \mathbb{R}^n$ in $f : F \to \mathbb{R}^n$ Höldorjeva preslikava stopnje $\alpha > 0$. Potem za vsak $s \geq 0$ velja:

$$\mathcal{H}^{s/\alpha}(f_*(F)) \leq c^{s/\alpha} \mathcal{H}^s(F)$$

Transformacijeske lastnosti Hausdorffove dimenzije

Fraktalne dimenzije

Ruslan Urazbakhtin

Uvod
Kaj so fraktali?
Podobnostna dimenzija

Hausdorffova dimenzija
Hausdorffova mera
Hausdorffova dimenzija
Lastnosti Hausdorffove dimenzije
Primeri računanja Hausdorffove dimenzije

Škatlasta dimenzija
Ekvivalentne definicije
Relacija med Hausdorffovo in škatlasto dimenzijo
Lastnosti škatlaste dimenzije

Trditev

Naj bo $F \subseteq \mathbb{R}^n$ in $f : F \to \mathbb{R}^n$ Höldorjeva preslikava stopnje $\alpha > 0$. Potem

$$\dim_H f_*(F) \leq \frac{1}{\alpha} \dim_H F$$

Posledica

- Če je $f : F \to \mathbb{R}^n$ Lipschitzova, potem $\dim_H f_*(F) \leq \dim_H(F)$.

Transformacijeske lastnosti Hausdorffove dimenzije

Trditev

Naj bo $F \subseteq \mathbb{R}^n$ in $f : F \to \mathbb{R}^n$ Höldorjeva preslikava stopnje $\alpha > 0$. Potem

$$\dim_H f_*(F) \leq \frac{1}{\alpha} \dim_H F$$

Posledica

- Če je $f : F \to \mathbb{R}^n$ Lipschitzova, potem $\dim_H f_*(F) \leq \dim_H(F)$.
- Če je $f : F \to \mathbb{R}^n$ bi-Lipschitzova, tj.

$$\exists c_1, c_2 > 0 \,.\, \forall x, y \in X \,.\, c_1|x - y| \leq |f(x) - f(y)| \leq c_2|x - y|,$$

potem $\dim_H f_*(F) = \dim_H(F)$.

Topološke lastnosti Hausdorffove dimenzije

Fraktalne dimenzije

Ruslan Urazbakhtin

Uvod
Kaj so fraktali?
Podobnostna dimenzija
Hausdorffova dimenzija
Hausdorffova mera
Hausdorffova dimenzija
Lastnosti Hausdorffove dimenzije
Primeri računanja Hausdorffove dimenzije
Škatlasta dimenzija
Ekvivalentne definicije
Relacija med Hausdorffovo in škatlasto dimenzijo
Lastnosti škatlaste dimenzije

Trditev

Naj bo $F \subseteq \mathbb{R}^n$. Če je $\dim_H F < 1$, potem je F ...

Uvod
Kaj so fraktali?
Podobnostna dimenzija
Hausdorffova dimenzija
Hausdorffova mera
Hausdorffova dimenzija
Lastnosti Hausdorffove dimenzije
Primeri računanja Hausdorffove dimenzije
Škatlasta dimenzija
Ekvivalentne definicije
Relacija med Hausdorffovo in škatlasto dimenzijo
Lastnosti škatlaste dimenzije

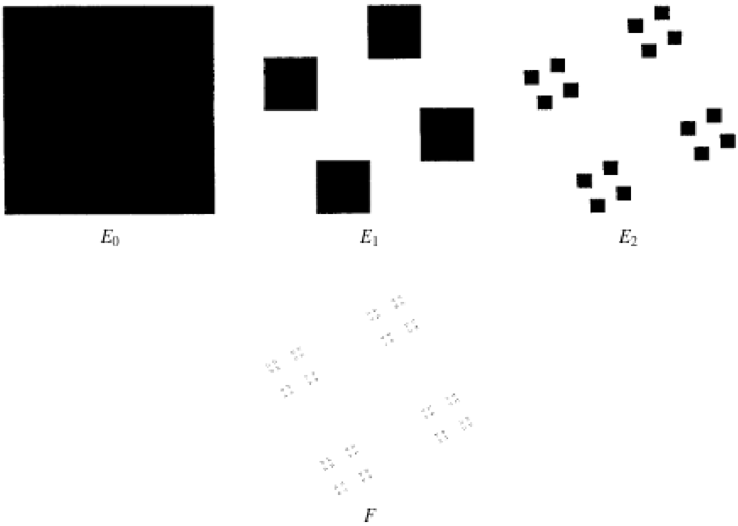
Topološke lastnosti Hausdorffove dimenzije

Trditev

Naj bo $F \subseteq \mathbb{R}^n$. Če je $\dim_H F < 1$, potem je F popolnoma nepovezana.

Hausdorffova dimenzija Cantorjeva praha

Uvod
Kaj so fraktali?
Podobnostna dimenzija
Hausdorffova dimenzija
Hausdorffova mera
Hausdorffova dimenzija
Lastnosti Hausdorffove dimenzije
Primeri računanja Hausdorffove dimenzije
Škatlasta dimenzija
Ekvivalentne definicije
Relacija med Hausdorffovo in škatlasto dimenzijo
Lastnosti škatlaste dimenzije



Hausdorffova dimenzija Cantorjeve množice in Kochove krivulje

Fraktalne dimenzije

Ruslan Urazbakhtin

Uvod
Kaj so fraktali?
Podobnostna dimenzija

Hausdorffova dimenzija
Hausdorffova mera
Hausdorffova dimenzija
Lastnosti Hausdorffove dimenzije
Primeri računanja Hausdorffove dimenzije

Škatlasta dimenzija
Ekvivalentne definicije
Relacija med Hausdorffovo in škatlasto dimenzijo
Lastnosti škatlaste dimenzije

Primer

Naj bo C Cantorjeva množica in K Kochova krivulja, potem

- $\dim_H C = \log_3 2 = 0.6309\dots$
- $\dim_H K = \log_3 4 = 1.2618\dots$

Druge vrste dimenzij

Uvod
Kaj so fraktali?
Podobnostna dimenzija
Hausdorffova dimenzija
Hausdorffova mera
Hausdorffova dimenzija
Lastnosti Hausdorffove dimenzije
Primeri računanja Hausdorffove dimenzije
Škatlasta dimenzija
Ekvivalentne definicije
Relacija med Hausdorffovo in škatlasto dimenzijo
Lastnosti škatlaste dimenzije

Opomba

- Hausdorffova dimenzija je osnova.
- Ni res, da vse definicije delujejo za vse množice.
- Osnovna ideja za vse dimenzije je „meritev“ v skali $\delta > 0$, tj. za vsak $\delta > 0$ merimo množico na način, ki ignorira nepravilnosti, ki so manjše od δ. Nato pa gledamo, kaj se zgodi v limiti $\delta \to 0$.

Škatlasta dimenzija

Definicija

Naj bo $f : \mathbb{R}_{>0} \to \mathbb{R}$ funkcija.

- **Spodnja limita** funkcije f ko gre x proti 0 je

$$\underline{\lim}_{x\to\infty} f(x) := \lim_{r\to 0} \left(\inf \{f(x) \mid 0 < x < r\}\right)$$

- **Zgornja limita** funkcije f ko gre x proti 0 je

$$\overline{\lim}_{x\to\infty} f(x) := \lim_{r\to 0} \left(\sup \{f(x) \mid 0 < x < r\}\right)$$

Škatlasta dimenzija

Naj bo $F \subseteq \mathbb{R}^n$ omejena in neprazna. Označimo z $N_\delta(F)$ najmanjšo število množic s premerom kvečjemu $\delta > 0$, ki jih potrebujemo za pokritje F.

Škatlasta dimenzija

Fraktalne dimenzije

Ruslan Urazbakhtin

Uvod
Kaj so fraktali?
Podobnostna dimenzija

Hausdorffova dimenzija
Hausdorffova mera
Hausdorffova dimenzija
Lastnosti Hausdorffove dimenzije
Primeri računanja Hausdorffove dimenzije

Škatlasta dimenzija
Ekvivalentne definicije
Relacija med Hausdorffovo in škatlasto dimenzijo
Lastnosti škatlaste dimenzije

Naj bo $F \subseteq \mathbb{R}^n$ omejena in neprazna. Označimo z $N_\delta(F)$ najmanjšo število množic s premerom kvečjemu $\delta > 0$, ki jih potrebujemo za pokritje F.

Definicija

- **Spodnja škatlasta dimenzija** množice F je

$$\underline{\dim}_B F = \underline{\lim}_{\delta \to 0} \frac{\ln N_\delta(F)}{-\ln \delta}$$

- **Zgornja škatlasta dimenzija** množice F je

$$\overline{\dim}_B F = \overline{\lim}_{\delta \to 0} \frac{\ln N_\delta(F)}{-\ln \delta}$$

Škatlasta dimenzija

Definicija

- **Spodnja škatlasta dimenzija** množice F je

$$\underline{\dim}_B F = \underline{\lim}_{\delta \to 0} \frac{\ln N_\delta(F)}{-\ln \delta}$$

- **Zgornja škatlasta dimenzija** množice F je

$$\overline{\dim}_B F = \overline{\lim}_{\delta \to 0} \frac{\ln N_\delta(F)}{-\ln \delta}$$

- Če $\underline{\dim}_B F = \overline{\dim}_B F$, potem skupno število imenujemo **Škatlasta dimenzija** množice F, tj.

$$\dim_B F = \lim_{\delta \to 0} \frac{\ln N_\delta(F)}{-\ln \delta}$$

Škatlasta dimenzija (ekvivalentne oblike)

Fraktalne dimenzije

Ruslan Urazbakhtin

Uvod
Kaj so fraktali?
Podobnostna dimenzija
Hausdorffova dimenzija
Hausdorffova mera
Hausdorffova dimenzija
Lastnosti Hausdorffove dimenzije
Primeri računanja Hausdorffove dimenzije
Škatlasta dimenzija
Ekvivalentne definicije
Relacija med Hausdorffovo in škatlasto dimenzijo
Lastnosti škatlaste dimenzije

Definicija

Naj bo $F \subseteq \mathbb{R}^n$ omejena in neprazna. **Škatlasta dimenzija** množice F je

$$\dim_B F = \lim_{\delta \to 0} \frac{\ln N_\delta(F)}{-\ln \delta}$$

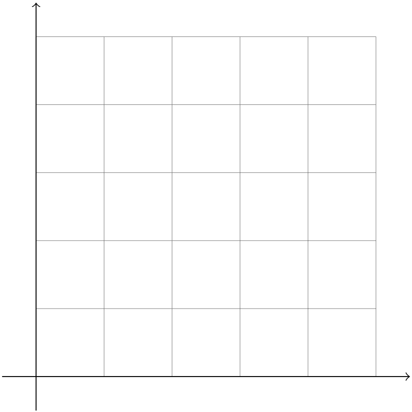
kjer je $N_\delta(F)$ lahko:

- najmanjše število množic s premerom kvečjemu δ, ki pokrivajo F;
- najmanjše število zaprtih krogel z radijem δ, ki pokrivajo F;
- najmanjše število zaprtih kvadrov s stranico δ, ki pokrivajo F;
- število δ-mreža kvadrov, ki sekajo F;
- največje število disjunktnih zaprtih krogel z radijem δ in središči na množici F.

δ-mreža

Uvod
Kaj so fraktali?
Podobnostna dimenzija
Hausdorffova dimenzija
Hausdorffova mera
Hausdorffova dimenzija
Lastnosti Hausdorffove dimenzije
Primeri računanja Hausdorffove dimenzije
Škatlasta dimenzija
Ekvivalentne definicije
Relacija med Hausdorffovo in škatlasto dimenzijo
Lastnosti škatlaste dimenzije

$$\dim_B F = \lim_{\delta \to 0} \frac{\ln N_\delta(F)}{-\ln \delta}$$



Disjunktne zaprte krogle

$$\dim_B F = \lim_{\delta \to 0} \frac{\ln N_\delta(F)}{-\ln \delta}$$

Škatlasta dimenzija Cantorjeve množice

Fraktalne dimenzije

Ruslan Urazbakhtin

Uvod
Kaj so fraktali?
Podobnostna dimenzija
Hausdorffova dimenzija
Hausdorffova mera
Hausdorffova dimenzija
Lastnosti Hausdorffove dimenzije
Primeri računanja Hausdorffove dimenzije
Škatlasta dimenzija
Ekvivalentne definicije
Relacija med Hausdorffovo in škatlasto dimenzijo
Lastnosti škatlaste dimenzije

Primer

Naj bo C Cantorjeva množica, potem

$$\dim_H C = \log_3 2 = 0.6309\ldots$$

Fraktalne dimenzije

Ruslan Urazbakhtin

Uvod
Kaj so fraktali?
Podobnostna dimenzija

Hausdorffova dimenzija
Hausdorffova mera
Hausdorffova dimenzija
Lastnosti Hausdorffove dimenzije
Primeri računanja Hausdorffove dimenzije

Škatlasta dimenzija
Ekvivalentne definicije
Relacija med Hausdorffovo in škatlasto dimenzijo
Lastnosti škatlaste dimenzije

Relacija med Hausdorffovo in škatlasto dimenzijo

Trditev

$$\dim_H F \leq \underline{\dim}_B F \leq \overline{\dim}_B F$$

Fraktalne dimenzije

Ruslan Urazbakhtin

Uvod
Kaj so fraktali?
Podobnostna dimenzija
Hausdorffova dimenzija
Hausdorffova mera
Hausdorffova dimenzija
Lastnosti Hausdorffove dimenzije
Primeri računanja Hausdorffove dimenzije
Škatlasta dimenzija
Ekvivalentne definicije
Relacija med Hausdorffovo in škatlasto dimenzijo
Lastnosti škatlaste dimenzije

Relacija med Hausdorffovo in škatlasto dimenzijo

Trditev

$$\dim_H F \leq \underline{\dim}_B F \leq \overline{\dim}_B F$$

Opomba

V splošnem enakost NE velja, ne glede na to, da za nekatere lepe množice enakost drži.

Lastnosti škatlaste dimenzije

Fraktalne dimenzije

Ruslan Urazbakhtin

Uvod

Kaj so fraktali?

Podobnostna dimenzija

Hausdorffova dimenzija

Hausdorffova mera

Hausdorffova dimenzija

Lastnosti Hausdorffove dimenzije

Primeri računanja Hausdorffove dimenzije

Škatlasta dimenzija

Ekvivalentne definicije

Relacija med Hausdorffovo in škatlasto dimenzijo

Lastnosti škatlaste dimenzije

(1) **Monotonost.** $\underline{\dim}_B$ in $\overline{\dim}_B$ sta monotoni.

Lastnosti škatlaste dimenzije

(1) **Monotonost.** $\underline{\dim}_B$ in $\overline{\dim}_B$ sta monotoni.

(2) **Končna stabilnost.** $\overline{\dim}_B$ je končno stabilna, tj.

$$\overline{\dim}_B(E \cup F) = \max(\overline{\dim}_B E, \overline{\dim}_B F).$$

Ta identiteta v splošnem NE velja za $\underline{\dim}_B$.

Lastnosti škatlaste dimenzije

(1) **Monotonost.** $\underline{\dim}_B$ in $\overline{\dim}_B$ sta monotoni.

(2) **Končna stabilnost.** $\overline{\dim}_B$ je končno stabilna, tj.

$$\overline{\dim}_B(E \cup F) = \max(\overline{\dim}_B E, \overline{\dim}_B F).$$

Ta identiteta v splošnem NE velja za $\underline{\dim}_B$.

(3) **Dimenzija odprtih množic.** Naj bo $F \subseteq \mathbb{R}^n$ odprta podmnožica. Potem $\dim_B F = n$.

Lastnosti škatlaste dimenzije

Fraktalne dimenzije

Ruslan Urazbakhtin

Uvod
Kaj so fraktali?
Podobnostna dimenzija

Hausdorffova dimenzija
Hausdorffova mera
Hausdorffova dimenzija
Lastnosti Hausdorffove dimenzije
Primeri računanja Hausdorffove dimenzije

Škatlasta dimenzija
Ekvivalentne definicije
Relacija med Hausdorffovo in škatlasto dimenzijo
Lastnosti škatlaste dimenzije

(1) **Monotonost.** $\underline{\dim}_B$ in $\overline{\dim}_B$ sta monotoni.

(2) **Končna stabilnost.** $\overline{\dim}_B$ je končno stabilna, tj.

$$\overline{\dim}_B(E \cup F) = \max(\overline{\dim}_B E, \overline{\dim}_B F).$$

Ta identiteta v splošnem NE velja za $\underline{\dim}_B$.

(3) **Dimenzija odprtih množic.** Naj bo $F \subseteq \mathbb{R}^n$ odprta podmnožica. Potem $\dim_B F = n$.

(4) **Dimenzija gladkih podmnogoterosti.** Naj bo $F \subseteq \mathbb{R}^n$ gladka podmnogoterost dimenzije m, potem $\dim_B F = m$.

Težave škatlaste dimenzije

Uvod
Kaj so fraktali?
Podobnostna dimenzija
Hausdorffova dimenzija
Hausdorffova mera
Hausdorffova dimenzija
Lastnosti Hausdorffove dimenzije
Primeri računanja Hausdorffove dimenzije
Škatlasta dimenzija
Ekvivalentne definicije
Relacija med Hausdorffovo in škatlasto dimenzijo
Lastnosti škatlaste dimenzije

Trditev

Naj bo $F \subseteq \mathbb{R}^n$ omejena in neprazna. Velja:

1. $\underline{\dim}_B \operatorname{Cl} F = \underline{\dim}_B F$.
2. $\overline{\dim}_B \operatorname{Cl} F = \overline{\dim}_B F$.

Težave škatlaste dimenzije

Fraktalne dimenzije

Ruslan Urazbakhtin

Uvod
Kaj so fraktali?
Podobnostna dimenzija

Hausdorffova dimenzija
Hausdorffova mera
Hausdorffova dimenzija
Lastnosti Hausdorffove dimenzije
Primeri računanja Hausdorffove dimenzije

Škatlasta dimenzija
Ekvivalentne definicije
Relacija med Hausdorffovo in škatlasto dimenzijo
Lastnosti škatlaste dimenzije

Trditev

Naj bo $F \subseteq \mathbb{R}^n$ omejena in neprazna. Velja:

1. $\underline{\dim}_B \operatorname{Cl} F = \underline{\dim}_B F$.
2. $\overline{\dim}_B \operatorname{Cl} F = \overline{\dim}_B F$.

Posledica

V splošnem

$$\dim_B \bigcup_{i=1}^{\infty} F_i \neq \sup_{1 \leq i < \infty} (\dim_B F_i)$$

Težave škatlaste dimenzije

Ali bomo še vedno imeli težave, če bomo gledali le zaprte množice?

Težave škatlaste dimenzije

Uvod
Kaj so fraktali?
Podobnostna dimenzija
Hausdorffova dimenzija
Hausdorffova mera
Hausdorffova dimenzija
Lastnosti Hausdorffove dimenzije
Primeri računanja Hausdorffove dimenzije
Škatlasta dimenzija
Ekvivalentne definicije
Relacija med Hausdorffovo in škatlasto dimenzijo
Lastnosti škatlaste dimenzije

Ali bomo še vedno imeli težave, če bomo gledali le zaprte množice? Bomo...

Težave škatlaste dimenzije

Ali bomo še vedno imeli težave, če bomo gledali le zaprte množice?

Primer

Naj bo $F = \left\{\frac{1}{n} \mid n \in \mathbb{N}\right\} \cup \{0\}$.
F je kompaktna množica z $\dim_B F = \frac{1}{2}$.

Od kod pride ta težava?

Opomba

- Pri računanju Hausdorffove dimenzije privzamemo, da množice pokritja $\{U_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ imajo različne velikosti.
- Pri računanju škatlaste dimenzije pa je velikost množic pokritja $\{U_i\}_{1\leq i\leq k}$ vedno fiksna (je enaka δ).

Od kod pride ta težava?

Opomba

- Pri računanju Hausdorffove dimenzije privzamemo, da množice pokritja $\{U_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ imajo različne velikosti.
- Pri računanju škatlaste dimenzije pa je velikost množic pokritja $\{U_i\}_{1\leq i\leq k}$ vedno fiksna (je enaka δ).
- Se nam zdi, da bi belo smiselno definirati mero

$$v(F) = \lim_{\delta\to 0} N_\delta(F)\delta^s$$

Povzetek o škatlasti dimenziji

Uvod
Kaj so fraktali?
Podobnostna dimenzija
Hausdorffova dimenzija
Hausdorffova mera
Hausdorffova dimenzija
Lastnosti Hausdorffove dimenzije
Primeri računanja Hausdorffove dimenzije
Škatlasta dimenzija
Ekvivalentne definicije
Relacija med Hausdorffovo in škatlasto dimenzijo
Lastnosti škatlaste dimenzije

- Škatlasta dimenzija je zelo uporabna v praksi.
- Pogosto se da dokazati, da je enaka Hausdorffovi.

Hvala za pozornost!