1 Prostori in preslikave

1.1 Metrični prostori

Naj bo (M, d) metrični prostor. Za $S \subseteq M$, $S \neq \emptyset$ definiramo funkcijo razdalje $d(-, S) : M \to \mathbb{R}$ s predpisom $d(x, S) := \inf \{d(x, y) \mid y \in S\}$. Velja

- $d(-, S)$ je dobro definirana zvezna preslikava.
- $\overline{S} = d(-, S)^*(\{0\})$. S je zaprta $\Leftrightarrow S = d(-, S)^*(\{0\})$.

1.2 Topologija

- Naj bo $A+B = \{\mathrm{in}_1(a) \mid a \in A\} \cup \{\mathrm{in}_2(b) \mid b \in B\}$. $\mathcal{T}_{A+B}$ je topologija porojena z bazo $\{\mathrm{in}_{1*}(\mathcal{T}_A)\} \cup \{\mathrm{in}_{2*}(\mathcal{T}_B)\}$. Torej $\mathcal{T}_{A+B} = \{\mathrm{in}_{1*}(U) \cup \mathrm{in}_{2*}(V) \mid U \in T_A \wedge V \in \mathcal{T}_B\}$. Injekciji sta odprti in zaprti vložitvi.
- $\mathcal{B}_S = \{[a, b) \mid a \in \mathbb{R}, b \in \mathbb{R}, a < b\}$ generira $\mathcal{T}_S$, ki jo imenujemo **Sorgenfreyeva premica**. Oznaka: $\mathbb{R}_S$.

1.3 Slike in praslike

Definicija. Naj bo $f : A \to B$ preslikava.

- **Praslika** podmnožice $S \in B$ je $f^*(S) := \{x \in A \mid f(x) \in S\}$.
- **Slika** podmnožice $T \in A$ je $f_*(T) := \{y \in B \mid \exists x \in T \,.\, f(x) = y\}$.

Trditev. Praslike ohranjajo preseke in unije.

Trditev. Slike ohranjajo unije. Če je preslikava injektivna, potem slika ohranja tudi preseke.

Trditev. Naj bo $f : A \to B$ preslikava. Za $S \subseteq B$ velja $f^*(S^c) = (f^*(S))^c$.

Trditev. Naj bo $f : A \to B$ preslikava, $S \subseteq A$, $T \subseteq B$. Velja:

- $S \subseteq f^*(f_*(S))$.
- $f_*(f^*(T)) \subseteq T$.

1.4 Baze in predbaze

Definicija. Naj bo $(X, \mathcal{T})$ prostor, $x \in X$. Družina $\mathcal{B}_x \subseteq \mathcal{T}$, $\forall B \in \mathcal{B}_x \,.\, x \in B$ je **lokalna baza okolic** točke x, če za vsako odprto okolico $U \in \mathcal{T}$ točke x, obstaja $B \in \mathcal{B}_x$, da $x \in B \subseteq U$.

Opomba. Običajno prevzamemo, da so množice iz $\mathcal{B}_x$ okolice točke x. S tem lahko poskusimo si predstaviti, kako zgleda prostor okoli vsake točke.

Definicija. Naj bo $(X, \mathcal{T})$ prostor. Družina $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{T}$ je **baza** topologije $\mathcal{T}$, če lahko vse elemente $\mathcal{T}$ zapišemo kot unije elementov $\mathcal{B}$.

Trditev. Naj bo $\mathcal{B}$ baza prostora $(X, \mathcal{T})$, $\mathcal{B}'$ baza prostora $(X', \mathcal{T}')$ in $f : X \to X'$ poljubna funkcija. Velja:

1. $U \subseteq X$ je odprta $\Leftrightarrow \forall x \in U \,.\, \exists B \in \mathcal{B} \,.\, x \in B \subseteq U$.
2. f je zvezna $\Leftrightarrow \forall B' \in \mathcal{B}' \,.\, f^*(B') \in \mathcal{T}$.
3. f je odprta $\Leftrightarrow \forall B \in \mathcal{B} \,.\, f_*(B) \in \mathcal{T}'$.

1.4.1 Topologija generirana z bazo

Trditev. Naj bo $\mathcal{B}$ družina podmnožic X, ki ustreza pogojema

1. Unija elementov $\mathcal{B}$ je cel X (vzemimo točko $x \in X$ in najdemo neko bazno množico B, da je $x \in B$).
2. Presek dveh baznih je unija baznih (vzemimo dve bazni okolici in točko v preseku, ter najdemo poljubno bazno okolico točke, ki še vedno v preseku)

Definicija. **Produktna topologija** $\mathcal{T}_{X \times X'}$ je topologija, ki jo kot baza generirana $\{U \times U' \mid U \in \mathcal{T}, U' \in \mathcal{T}'\}$.

Opomba. Če sta $\mathcal{B}$ in $\mathcal{B}'$ bazi $\mathcal{T}$ in $\mathcal{T}'$, potem družina $\{U \times U' \mid U \in \mathcal{B}, U' \in \mathcal{B}'\}$ generira produktno topologijo.

Trditev. Naj bo $(X \times Y, \mathcal{T}_{X \times Y})$ produktna. Projekciji $\mathrm{pr}_x : X \times Y \to X$, $\mathrm{pr}_y : X \times Y \to Y$ sta zvezni in odprti.

1.4.2 Predbaza

Trditev. Naj bo $\mathcal{P}$ poljubna družina podmnožic X. Če je $\mathcal{P}$ pokritje X, potem je $\mathcal{T}$ topologija, ki jo kot baza generirajo končni preseki elementov $\mathcal{P}$. Pravimo, da je $\mathcal{P}$ **predbaza topologije $\mathcal{T}$**.

Trditev. Naj bosta $(X, \mathcal{T}_X), (Y, \mathcal{T}_Y)$ prostora. Naj bo $\mathcal{P}$ predbaza $\mathcal{T}_Y$. Velja:

$$\text{Funkcija } f : X \to Y \text{ je zvezna} \Leftrightarrow \forall B \in \mathcal{P} \,.\, f^*(B) \in \mathcal{T}_X.$$

Pozor! Odprtost funkcije f v splošnem ne moremo testirati na predbaze. Saj slike ne ohranjajo preseke.

Trditev. Naj bodo X, Y, Z prostori. Velja:

$$\text{Funkcija } f : X \to Y \times Z,\ f = (f_Y, f_Z) \text{ je zvezna} \Leftrightarrow f_Y, f_Z \text{ sta zvezni.}$$

1.4.3 Aksiomi števnosti

Definicija (1. aksiom števnosti)**.** Naj bo $(X, \mathcal{T})$ prostor. Vsaka točka $x \in X$ ima števno bazo okolic.

Definicija (2. aksiom števnosti)**.** Naj bo $(X, \mathcal{T})$ prostor. Obstaja kaka števna baza za topologijo $\mathcal{T}$.

Trditev. Naj bo prostor $(X, \mathcal{T})$ 1-števen. Velja:
1. Za vsako množico $A \subseteq X$ je $\overline{A} = L(A) = \{x \mid x \text{ je limita zaporedja v } A\}$.

1.4.4 Separabilnost

Definicija. Podmnožica A je **povsod gosta** v X, če seka vsako odprto množico X, ali ekvivalentno, če je $\overline{A} = X$.

Definicija. Prostor $(X, \mathcal{T})$ je **separabilen**, če v X obstaja števna gosta podmnožica.

Trditev. 2-števnost implicira separabilnost.

Izrek. Metrični prostor (X, d) je 2-števen natanko takrat, ko v njem obstaja števna povsod gosta podmnožica.

Opomba. V metričnih prostorih je 2-števnost ekvivalentna separabilnosti, slednjo pa je pogosto lažje dokazati.

1.5 Podprostori

Naj bo $(X, \mathcal{T})$ prostor, $A \subseteq X$. Definiramo $\mathcal{T}_A := \{A \cap U \mid U \in T\}$. $\mathcal{T}_A$ topologija na A.

Definicija. Topologiji $\mathcal{T}_A$ pravimo **inducirana** topologija na A. Prostor $(A, \mathcal{T}_A)$ je **podprostor** prostora $(X, \mathcal{T})$.

Trditev. Naj bo $(X, \mathcal{T})$ prostor in $(A, \mathcal{T}_A)$ njegov podprostor.
1. Če je $\mathcal{B}$ neka baza topologije $\mathcal{T}$, potem je $\mathcal{B}_A := \{A \cap B \mid B \in \mathcal{B}\}$ baza topologije $\mathcal{T}_A$. Analogna trditev velja za predbaze.
2. Množica $B \subseteq A$ je zaprta v topologiji $\mathcal{T}_A$, če in samo če je $F = A \cap F$ za neko množico F, ke je zaprta v topologiji $\mathcal{T}$.
3. Veljajo formule: $\operatorname{Cl}_A B = A \cap \operatorname{Cl}_X B$, $\operatorname{Int}_A B \supseteq A \cap \operatorname{Int}_X B$, $\operatorname{Fr}_A B \subseteq A \cap \operatorname{Fr}_X B$.

Trditev. Naj bo $(X, \mathcal{T})$ prostor in $(A, \mathcal{T}_A)$ njegov podprostor.
1. Podmnožica odprtega podprostora odprta natanko tedaj, ko je odprta v celem prostoru.
2. Podmnožica zaprtega podprostora zaprta natanko tedaj, ko je zaprta v celem prostoru.

1.5.1 Dednost

Definicija. Topološka lastnost je **dedna**, če iz prevzetka, da $(X, \mathcal{T})$ ima to lastnost sledi, da jo imajo tudi vsi podprostori.

1.5.2 Odsekoma definirane funkcije

Definicija. Naj bo $\{X_\lambda\}$ pokritje X. Za družino $f_\lambda : X_\lambda \to Y$ rečemo, da je **usklajena**, če je $f_{\lambda|X_\lambda \cap X_\mu} = f_{\mu|X_\lambda \cap X_\mu}$ za poljubna indeksa λ, μ.

Trditev. Vsaka usklajena družina določa funkcijo $f : X \to Y$, za katero je $f_{|X_\lambda} = f_\lambda$.

Lema. Naj bo $\{X_\lambda\}$ odprto pokritje X. Tedaj je $A \subseteq X$ odprta natanko tedaj, ko je $X_\lambda \cap A$ odprta v X_λ za vse λ.

Definicija. Pokritje $\{X_\lambda\}$ za X je **lokalno končno**, če za vsako točko $x \in X$ obstaja okolica, ki seka le končno mnogo različnih X_λ.

Lema. Naj bo $\{X_\lambda\}$ zaprto pokritje X, ki je lokalno končno. Tedaj je $A \subseteq X$ zaprta natanko tedaj, ko je $X_\lambda \cap A$ zaprta v X_λ za vse λ.

Izrek. Naj bo $\{X_\lambda\}$ pokritje za X, ki je bodisi odprto bodisi lokalno končno in zaprto. Tedaj vsaka usklajena družina preslikav $f_\lambda : X_\lambda \to Y$ enolično določa preslikavo $f : X \to Y$, za katero je $f_{|X_\lambda} = f_\lambda$.

Posledica. Naj bo $\{X_\lambda\}$ pokritje za X, ki je bodisi odprto bodisi lokalno končno in zaprto. Tedaj je funkcija $f : X \to Y$ zvezna natanko tedaj, ko so zvezne vse zožitve $f_{|X_\lambda}$.

1.5.3 Vložitve

Definicija. Preslikava $f : X \to Y$ je **vložitev**, če je f homeomorfizem med X in $f_*(X)$ (glede na od Y podedovano topologijo).

Opomba. Potreben primer za homeomorfizem je injektivnost preslikave f.

Trditev. Naj bo $f : X \to Y$ injektivna preslikava.
- Če je $f(X)$ odprt v Y, potem je f vložitev natanko tedaj, ko je preslikava $f : X \to Y$ odprta.
- Če je $f(X)$ zaprt v Y, potem je f vložitev natanko tedaj, ko je preslikava $f : X \to Y$ zaprta.

2 Topološki lastnosti

2.1 Ločljivost

Definicija. Za topologjo $\mathcal{T}$ na množici X pravimo, da **loči** podmnožico $A \subseteq X$ od pomnožice $B \subseteq X$, če obstaja $U \in \mathcal{T}$, za katero je $A \subseteq U$ in $B \cap U = \emptyset$.

Definicija. Za topologjo $\mathcal{T}$ na množici X pravimo, da **ostro loči** podmnožici $A \subseteq X$ in $B \subseteq X$, če obstajata $U, V \in \mathcal{T}$, za kateri je $A \subseteq U,\ B \subseteq V$ in $U \cap V = \emptyset$.

2.1.1 Hausdorffova in Frechetova lastnosti

Definicija. Za prostor $(X, \mathcal{T})$ pravimo, da je **Hausdorffov**, če $\mathcal{T}$ ostro loči vsaki dve različni točki X.

Trditev. Ekvivalentne so naslednje izjave:
1. X je Hausdorffov.
2. $\forall x \in X\,.\, \bigcap_{U \in \mathcal{U}} \overline{U} = \{x\}$, kjer je $\mathcal{U}$ družina vseh okolic x (ekvivalentno $x \neq y \Rightarrow \exists U \in \mathcal{T}\,.\, x \in U \wedge y \notin \overline{U}$).
3. **Diagonala** $\Delta = \{(x, x) \in X \times X \mid x \in X\}$ je zaprt podprostor produkta $X \times X$.

Izrek. Naj bo prostor Y Hausdorffov. Velja:
1. Vsaka končna podmnožica Y je zaprta. Posebej, točke so zaprte.
2. Točka y je stekališče množice $A \subseteq Y$ natanko tedaj, ko vsaka okolica Y vsebuje neskončno točk iz A.
3. Zaporedje v Y ima največ eno limito.
4. Množica točk ujemanja $\{x \in X \mid f(x) = g(x)\}$ je zaprta v X za poljubni preslikavi $f, g : X \to Y$.
5. Če se preslikavi $f, g : X \to Y$ ujemata na neki gosti podmnožici X, potem je $f = g$.
6. Graf preslikave $f : X \to Y$ je zaprt podprostor produkta $X \times Y$.

Izrek. Naj bo prostor X 1-števen, prostor Y pa Hausdorffov. Potem je funkcija $f : X \to Y$ zvezna natanko takrat, ko za vsako konvergentno zaporedje (x_n) v X velja $\lim f(x_n) = f(\lim x_n)$.

Definicija. Prostor $(X, \mathcal{T})$ je **Frechetov**, če $\mathcal{T}$ vsako točko X loči od vsake druge točke X.

Trditev. Prostor X je Frechetov natanko tedaj, ko so vse enojčki zaprte.

2.1.2 Regularnost in normalnost

Ostrejše zahteve za ločljivost dobimo, če točke nadomestimo z zaprtimi množicami.

Definicija. Prostor $(X, \mathcal{T})$ je **regularen** če je Frechetov in če $\mathcal{T}$ ostro loči točke od zaprtih množic.

Definicija. Prostor $(X, \mathcal{T})$ je **normalen**, če je Frechetov in če $\mathcal{T}$ ostro loči disjunktne zaprte množice.

Trditev. Vsak metričen prostor je normalen.

Trditev. Zaprt podprostor normalnega prostora je normalen.

Izrek (Izrek Tihonova)**.** Prostor, ki je regularen in 2-števen je normalen.

Opomba. Iz izreka sledi, da je poljuben podprostor normalnega 2-števnega prostora normalen. Podobno je tudi produkt 2-števnih normalnih prostorov normalen.

2.1.3 Aksiomi ločljivosti

X je T_0: Za točki $x, x' \in X$ obstaja okolica ene izmed točk x, x', ki jo loči od druge točke.
X je T_1: Za točki $x, x' \in X$ obstaja okolica x, ki jo loči od x' in obstaja okolica točke x', ki jo loči od x.
X je T_2: Za točki $x, x' \in X$ obstajata okolici, ki ostro ločita x in x'.
X je T_3: Za točko $x \in X$ in zaprto množico $A \subseteq X$, ki ne vsebuje x, obstajata okolici, ki ostro ločita x in A.
X je T_4: Za disjunktni zaprti množici $A, B \subseteq X$ obstajata okolici, ki ostro ločita A in B.

Opomba. T_1 je Frechetova lastnost, T_2 je Hausdorffova lastnost. Regularnost je $T_1 + T_3$, normalnost je $T_1 + T_4$.

Trditev. Prostor X ima lastnost T_3 natanko tedaj, ko za vsak $x \in X$ in vsako odprto okolico U za x obstaja taka odprta množica V, da velja $x \in V \subseteq \overline{V} \subseteq U$.

Trditev. Prostor X ima lastnost T_4 natanko tedaj, ko za vsako zaprto podmnožico $A \subseteq X$ in vsako odprto okolico U za A obstaja taka odprta množica V, da velja $A \subseteq V \subseteq \overline{V} \subseteq U$.

2.2 Povezanost

Definicija. Razcep prostora X je zapis X kot disjunktne unije dveh nepraznih odprtih množic. Če prostor dopušča kakšen razcep, pravimo, da je **nepovezan**, v nasprotnem primeru pa pravimo, da je **povezan**.

Trditev. Naslednje trditve so ekvivalentne:
1. Prostor X je nepovezan.
2. Prostor X je disjunktna unija dveh nepraznih zaprtih podmnožic.
3. Obstaja prava, neprazna, odprto-zaprta podmnožica $A \subseteq X$.
4. Obstaja surjektivna preslikava $f : X \to \{0, 1\}^{\text{disk}}$.

Izrek. Naj bo $X \subseteq \mathbb{R}$. Velja:

$$X \text{ je povezan} \Leftrightarrow X \text{ je interval.}$$

Izrek. Zvezna slika povezanega prostora je povezan prostor.

Izrek (Izrek o vmesni vrednosti)**.** Naj bo X povezan prostor. Če je funkcija $X \to \mathbb{R}$ zvezna, potem $f_*(X)$ je interval.

Posledica. Naj bo X povezan prostor. Če je funkcija $X \to \mathbb{R}$ zvezna in zaloga vrednosti f vsebuje pozitivne in negativne vrednosti, potem f ima ničlo.

Izrek. Naj bo X prostor. Zadostni pogoji za povezanost:
- Naj bo $\{A_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$ družina povezanih podmnožic X in $\bigcap A_\lambda \neq \emptyset$. Potem $\bigcup A_\lambda$ je povezan.
- Topološki produkt povezanih prostorov je povezan.
- Če za poljubna $a, b \in X$ obstaja pot od a do b, kjer **pot v** X je preslikava $\gamma : [0, 1] \to X, \gamma(0) = a, \gamma(1) = b$, potem X je povezan.
- Naj bo $A \subseteq X$ povezan. Če za $B \subseteq X$ velja, da $A \subseteq B \subseteq \overline{A}$, potem B je povezan.

Definicija. Prostor X je **povezan s potmi**, če med poljubnima $a, b \in X$ obstaja pot v X od a do b.

Lastnosti povezanosti s potmi so podobne lastnostim povezanosti:
- Povezanost s potmi je topološka lastnost.
- Zvezna slika povezanega s potmi prostora je povezana s potmi.
- Prostor, ki je povezan s potmi, je povezan.
- Če je $\{A_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$ družina povezanih s potmi podmnožic X in $\bigcap A_\lambda \neq \emptyset$. Potem $\bigcup A_\lambda$ je povezan s potmi.
- Zaprtje s potmi povezanega prostora v splošnem **ni** povezano s potmi.

2.2.1 Komponente

Definicija. Komponenta $C(x)$ točke $x \in X$ je unija vseh povezanih podmnožic X, ki vsebujejo x.

Trditev. Lastnosti komponent:
- $x \in C(x)$.
- $C(x)$ je povezana.
- $C(x)$ je maksimalna povezana podmnožica v X izmed vseh povezanih podmnožic X, ki vsebujejo x.
- $C(x)$ je zaprta v X (zaprtje je povezano).
- $\forall x, y \in X \,.\, C(x) \cap C(y) = \emptyset \vee C(x) = C(y)$.

Izrek. Komponente prostora X so maksimalne povezane podmnožice v X in določajo particijo X na disjunktne zaprte podmnožice. Za poljubno preslikava $f : X \to Y$ leži slika vsake komponente X v celoti v neki komponenti Y.

Definicija. Prostor X je **lokalno povezan**, če ima bazo iz povezanih množic.

Opomba. Prostor X je **lokalno povezan**, če vsaka okolica vsake točke ima manjšo povezano okolico.

Trditev. Prostor X je lokalno povezan natanko takrat, ko so komponente vsake odprte podmnožice X odprte. Posebej so komponente vsakega lokalno povezanega prostora odprte.

Komponenta za povezanost potmi točke $x \in X$ označimo z $\widetilde{C}(x)$ in definiramo kot unijo vseh povezanih s potmi podmnožic X, ki vsebujejo x.

Opomba.
- Potni komponente ravno maksimalne s potmi povezane podmnožice X.
- Potni komponente razdelijo X na disjunktne podmnožice.

V splošnem potni komponente niso zaprte: varšavski lok ima dve komponenti za povezanost s potmi od katerih je le ena zaprta. Za X pravimo, da je **lokalno povezan s potmi**, če ima bazo iz s potmi povezanih množic.

Opomba. Prostor X je **lokalno povezan s potmi**, če vsaka okolica vsake točke ima manjšo povezano s potmi okolico.

Izrek. Če je prostor X lokalno povezan s potmi, potem njegove komponente za povezanost sovpadajo s komponentami za povezanost s potmi.

Posledica. Če je X lokalno povezan s potmi, potem

$$X \text{ je povezan} \Leftrightarrow X \text{ je povezan s potmi.}$$

Posledica. Odprte podmnožice v $\mathbb{R}^n$ so povezane natanko tadaj, ko so povezane s potmi.

2.3 Kompaktnost

Definicija. Prostor X je **kompakten**, če ima vsako odprto pokritje X končno podpokritje.

Trditev. Prostor X je kompakten, če za vsako pokritje z množicami iz neke baze topologije obstaja končno podpokritje.

Opomba. Naj bo X prostor, $A \subseteq X$. Dovolj je dokazati, da za vsako pokritje A z množicami, ki so odprte v X, obstaja končno podpokritje.

Izrek. V kompaktnem prostoru ima vsaka neskončna množica stekališče.

Izrek (Multiplikativnost kompaktnosti)**.** Če sta X, Y kompaktna prostora, potem $X \times Y$ kompakten

Posledica. Če so $X_1, \dots, X_n$ kompaktni, potem $X_1 \times \dots \times X_n$ kompakten.

Izrek (Bolzano-Weierstrass)**.** Vsako omejeno zaporedje v $\mathbb{R}^n$ ima konvergentno podzaporedje.

Trditev. Kompaktna podmnožica metričnega prostora je omejena.

Trditev. Zaprt podprostor kompaktnega prostora je kompakten.

Trditev. V Hausdorffovem prostoru topologija ostro loči kompakte od točk.

Trditev. Če je X Hausdorffov in $K \subseteq X$ kompakten, potem je K zaprt v X.

Posledica. Vsak kompakten Hausdorffov prostor je normalen.

Izrek (Heine-Borel-Lebesgue)**.** Podprostor v $\mathbb{R}^n$ je kompakten natanko tedaj, ko je zaprt in omejen.

Opomba. Če je M metrični prostor, potem so zaprte krogle kompaktne natanko tedaj, ko velja Heine-Borelov izrek za ta prostor.

Trditev (Reformulacija definiciji kompaktnosti na zaprte množice)**.** Prostor X je kompakten natanko tedaj, ko v vsaki družini zaprtih podmnožic s praznim presekom obstaja končna podmnožica, katere presek je prazen.

Izrek (Cantorjev izrek)**.** Naj bo X kompakten in $F_1 \supseteq F_2 \supseteq \dots$ padajoče zaporedje zaprtih nepraznih podmnožic. Potem je $\bigcap F_\lambda \neq \emptyset$.

Izrek. Zvezna slika kompakta je kompakt.

Posledica. Če je $X \subseteq \mathbb{R}^n$ kompakt, potem je vsaka preslikava $f : X \to \mathbb{R}$ omejena in zavzame minimum in maksimum.

Izrek (Lebesgueova lema)**.** Za vsako odprto pokritje $\mathcal{U}$ metričnega kompakta X obstaja tako imenovano **Lebesgueovo število** $\lambda = \lambda(\mathcal{U})$ z lastnostjo, da vsaka krogla s polmerom manjšim od λ leži v celoti v nekem elementu $\mathcal{U}$.

Izrek. Naj bosta X in Y metrična prostora. Če je X kompakten, potem je vsaka preslikava $f : X \to Y$ enakomerno zvezna.

Izrek. Naj bo X kompakten, Y pa Hausdorffov prostor.
- Vsaka preslikava $f : X \to Y$ je zaprta.
- Vsaka injektivna preslikava $f : X \to Y$ je vložitev.
- Vsaka bijektivna preslikava $f : X \to Y$ je homeomorfizem.

Definicija. Odprta podmnožica $U \subseteq X$ je **relativno kompaktna**, če je njeno zaprtje $\overline{U}$ kompaktno.

Definicija. Prostor X je **lokalno kompakten**, če ima bazo iz relativno kompaktnih množic.

Izrek. Hausdorffov prostor X, v katerem ima vsaka točka kakšno kompaktno okolico, je lokalno kompakten. Posebej, vsak kompakten prostor je lokalno kompakten.

Primer. $\mathbb{Q}$ ni lokalno kompakten.

Izrek. Vsak lokalno kompaktni Hausdorffov prostor je regularen.

3 Prostori preslikav

3.1 Topologije na prostorih preslikav

Če želimo govoriti o konvergenci zaporedij preslikav med prostoroma X in Y, moramo najprej množico vseh preslikav $C(X, Y)$ opremiti s primerno topologijo. Opisali bomo konstrukcijo, ki na enovit način posploši oba najpomembnejša primera, točkasto in enakomerno konvergenco. Za $A \subseteq X$ in $U \subseteq Y$ označimo z $\langle A, U\rangle$ množico vseh preslikav, ki slikajo A v U, tj.

$$\langle A, U\rangle = \{f \in C(X, Y) \mid f_*(A) \subseteq U\}.$$

Naj bo $\mathcal{T}$ topologija na $C(X, Y)$, ki jo kot predbaza generira družina $\mathcal{P} = \{\langle\{x\}, U\rangle \mid x \in X,\ U \text{ odprta v } Y\}$. Tipična bazična okolica v tej topologiji je presek $\langle x_1, U_1\rangle \cap \ldots \cap \langle x_n, U_n\rangle$, ki si ga lahko predstavljamo kot družino vseh funkcij, ki gredo po točkah $x_1, \ldots, x_n$ skozi predpisane prehode $U_1, \ldots, U_n$.

Trditev. Naj bo (f_n) zaporedje preslikav v $C(X, Y)$. Funkcije f_n konvergirajo po točkah proti neki funkciji f natanko takrat, ko zaporedje (f_n) konvergira proti f v topologiji $\mathcal{T}$. Zaradi tega $\mathcal{T}$ imenujemo **topologija konvergnce po točkah**.

Definicija. **Kompaktno-odprta topologija** na $C(X, Y)$ je topologija, ki jo generira predbaza

$$\mathcal{P}' = \{\langle K, U\rangle \mid K \text{ kompakten v } X,\ U \text{ odprta v } Y\}.$$

Prostor zveznih funkcij, opremljen s to topologijo, označimo $\widehat{C}(X, Y)$.

Bazo kompaktno-odprte topologije tvorijo preseki predbazičnih množic. Delo s temi preseli je včasih precej nepregledno, zato pri preslikavah v metrični prostor Y raje kompaktno-odprto topologijo podamo z bazo, ki je posplošitev baze iz krogel v metričnih prostorih. Denimo torej, da je (Y, d) metrični prostor, ter za izbrano preslikavo $f : X \to Y$, kompakt $K \subseteq X$ in $\epsilon > 0$ vpeljimo

$$\langle f, K, \epsilon\rangle = \{g \in C(X, Y) \mid d(f(x), g(x)) < \epsilon \text{ za vse } x \in K\}.$$

Trditev. Naj bo Y metrični prostor. Družina $\mathcal{B} = \{\langle f, K, \epsilon\rangle \mid f \in C(X, Y), K \text{ kompakt v } X, \epsilon > 0\}$ je baza kompaktno odprte topologije na $C(X, Y)$.

Opomba. $\mathcal{B}$ generira kompaktno-odprto topologijo.

Če je $K \subseteq K'$ ali $\epsilon > \epsilon'$, je $\langle f, K', \epsilon' \rangle \subseteq \langle f, K, \epsilon \rangle$, zato po potrebi lahko za bazo kompaktno-odprte topologije vzamemo le množice $\langle f, K, \epsilon \rangle$ za velike kompakte K ali majhne ϵ. Posebej če je X kompakten, se lahko omejimo na množice $\langle f, X, \epsilon \rangle$, kar so ravno ϵ krogle v supremum metriki. Vidimo torej, da se za kompakten X in metričen Y kompaktno-odprta topologija ujema s topologijo enakomerne konvergence. Če pa X ni kompakten, je glede na to topologijo konvergenca enakomerna le, kadar se omejimo na kompaktne podmnožice (tako kot pri Taylorjevih vrstah), zato ji pravimo tudi **topologija enakomerne konvergence na kompaktih**.

Kodomeno Y vedno lahko gledamo kot podprostor v $\widehat{C}(X, Y)$.

Trditev. Preslikava $c : Y \to \widehat{C}(X, Y)$, ki vsakemu $y \in Y$ priredi konstantno preslikavo c_y, ki vse točke X preslika v y, je vložitev. Če je prostor Y Hausdorffov, je vložitev zaprta.

Trditev. Prostor $\widehat{C}(X, Y)$ je Hausdorffov natanko tedaj, ko je Y Hausdorffov, in regularen natanko tedaj, ko je Y regularen.

3.2 Preslikave na normalnih prostorih

Obstajajo primeri Hausdorffovih in celo regularnih prostorov, na katerih so edine realne preslikave konstante. Zakaj potem na evklidskih prostorih obstaja tako veliko zveznih preslikav? Morda je to metrika: v metričnem prostoru (X, d) je za poljuben $x \in X$ funkcija $d(x, -) : X \to \mathbb{R}$, $x' \mapsto d(x, x')$ zvezna in nekonstantna. Še več, vrednosti funkcije lahko delno definiramo vnaprej: za poljubna $A, B \subseteq X$ postavimo $f(x) := \frac{d(x,A)}{d(x,A)+d(x,B)}$. Funkcija f je definirana in zvezna, če je le imenovalec neničeln, to je takrat, ko x ni hkrati v zaprtju A in v zaprtju B. Če je $\overline{A} \cap \overline{B} = \emptyset$, potem zgornja formula definira preslikavo $f : X \to [0, 1]$, ki ima vrednost 0 na množici A in vrednost 1 na množici B. Lahko rečemo, da smo s preslikavo f ločili A in B.

Izrek (Urisonova lema)**.** Hausdorffov prostor X je normalen natanko takrat, ko za poljubni disjunktni neprazni zaprti podmnožici $A, B \subseteq X$ obstaja preslikava $f : (X, A, B) \to ([0, 1], 0, 1)$.

Izrek (Urisonov metrizacijski izrek)**.** Vsak normalen, 2-števen prostor je metrizabilen.

Posledica. V 2-števnih prostorih je metrizabilnost ekvivalentna regularnosti.

Izrek (Tietzejev razširitveni izrek)**.** Naj bo A zaprt podprostor normalnega prostora X in $J \subseteq \mathbb{R}$ poljuben interval. Tedaj vsako preslikavo $f : A \to J$ lahko razširimo do preslikave $F : X \to J$.

4 Splošno

Lastnost	Top	Mul	Ded	Primeri	Proti primeri
Metrizabilnost	+	+	+	m. pr., $\mathcal{T}_{\text{disk}}$	$\mathcal{T}_{\text{triv}}$, $\mathcal{T}_{\text{kk}}$
1-števnost	+	+	+	m. pr., $\mathbb{R}_S$, $\mathcal{T}_{\text{evkl}}$	
2-števnost	+	+	+	$\mathcal{T}_{\text{evkl}}$	$(X^{\text{neštevna}}, \mathcal{T}_{\text{disk}})$, $\mathbb{R}_S$
Separabilnost (baza)	+	+		$(\mathbb{R}^n, \mathcal{T}_{\text{evkl}})$, $\mathbb{R}_S$	
T_0 (baza)	+	+	+	m. pr., $\mathbb{R}_S$	$\mathcal{T}_{\text{triv}}$
T_1 (baza)	+	+	+	m. pr., $\mathcal{T}_{\text{kk}}$, $\mathbb{R}_S$	$\mathcal{T}_{\text{triv}}$
T_2 (baza)	+	+	+	m. pr., $\mathbb{R}_S$	$\mathcal{T}_{\text{triv}}$, $(X^{\text{neskončna}}, \mathcal{T}_{\text{kk}})$
T_3	+	+	+	m. pr., $\mathcal{T}_{\text{triv}}$, $\mathbb{R}_S$	
T_4	+			m. pr., $\mathcal{T}_{\text{triv}}$, $\mathbb{R}_S$	
Regularnost	+	+	+	m. pr.	$\mathcal{T}_{\text{triv}}$
Normalnost	+			m. pr.	$\mathcal{T}_{\text{triv}}$
Povezanost	+	+			
Povezanost s potmi	+	+			
Kompaktnost	+	+			