Fraktalne dimenzije

Kuslan Urazbakhti

Uvo

Opomba o teorije

Podobnostna dimenzija

Hausdorffov

Hausdorffova mera

Hausdorffova dimenzija

Hausdorffove dimenzije

Primeri računa Hausdorffove

Škatlasta

Ekvivalentr

Relacija med Hausdorffovo in škatlasto dimenzij

Lastnosti škatlaste Iimenzije

Fraktalne dimenzije

Ruslan Urazbakhtin

Fakulteta za matematiko in fiziko, Univerza v Ljubljani

6. maj 2025

"Much of the beauty of fractals is to be found in their mathematics"

— Kenneth Falconer



Kazalo

Fraktalne dimenzije

Urazbakhtii

Uvc

Opomba o teor mere Podobnostna dimenzija

Hausdorffova dimenzija Hausdorffova m Hausdorffova dimenzija

Lastnosti Hausdorffove dimenzije Primeri računanj: Hausdorffove dimenzije

dimenzija Ekvivalentni definicije

dennicije Relacija med Hausdorffovo in Škatlasto dimenzijo Lastnosti škatlaste dimenzije

1 Uvod

- Kaj so fraktali?
- Opomba o teorije mere
- Podobnostna dimenzija

2 Hausdorffova dimenzija

- Hausdorffova mera
- Hausdorffova dimenzija
- Lastnosti Hausdorffove dimenzije
- Primeri računanja Hausdorffove dimenzije

3 Škatlasta dimenzija

- Ekvivalentne definicije
- Relacija med Hausdorffovo in škatlasto dimenzijo
- Lastnosti škatlaste dimenzije

Kaj so fraktali?

Fraktalne dimenzije



Kaj so fraktali?

Fraktalne dimenzije

Urazbakhti

Uvc

Kaj so fraktali? Opomba o teori mere Podobnostna dimenzija

Podobnostna dimenzija Hausdorffo

Hausdorffova dimenzija Hausdorffova mera Hausdorffova dimenzija Lastnosti Hausdorffove dimenzije

Škatlast dimenzi

> Ekvivalentne definicije

Relacija med Hausdorffovo in škatlasto dimenzijo Lastnosti škatlaste

- Besedo "fraktal" je uvedel matematik Benoit Mandelbrot v svojem temeljnem eseju leta 1975. Izvira iz latinske besede "fractus".
- Besedo "fraktal" Mendelbrot je uporabljal za opis patoloških množic, ki niso bili usklajene z običajno evklidsko geometrijo.
- V svojem originalnem eseju Benoit Mendelbrot je definiral fraktal kot množico, ki ima Hausdorffovo dimenzijo strogo večjo od njene topološke dimenzije.

Kaj so fraktali?

Fraktalne dimenzije

Ruslan Urazbakhti

Uv

Kaj so fraktali? Opomba o teori mere

Podobnostna dimenzija Hausdorffov

limenzija Hausdorffova mera Hausdorffova dimenzija Lastnosti

Lastnosti Hausdorffove dimenzije Primeri računanja Hausdorffove dimenzije

dimenzija Ekvivalentno definicije

definicije
Relacija med
Hausdorffovo in
škatlasto dimenzijo
Lastnosti škatlaste

Če rečemo, da je neka množica F fraktal, potem si mislimo, da

- *F* ima fino strukturo, tj. podrobnosti se vidijo vedno enako (neodvisno od skale);
- **2** *F* je dovolj nenaravna, da je ne moremo opisat s pomocjo elementarne geometrije tako lokalno kot globalno;
- 3 F včasih ima samopodobno obliko;
- 4 Običajno je fraktalna dimenzija *F* večja od njene topološke dimenzije;
- **V** večini primerov je *F* definirana na zelo preprost način, običajno rekurzivno.

Zakaj potrebujemo fraktalno dimenzijo?

Fraktalne dimenzije

Urazbakhti

Uvo

Kaj so fraktali? Opomba o teori mere Podobnostna dimenzija

Hausdorffov dimenzija

Hausdorffova mera
Hausdorffova
dimenzija
Lastnosti
Hausdorffove
dimenzije
Primeri računanja
Hausdorffove
dimenzije

dimenzija Ekvivalentni

definicije Relacija med Hausdorffovo in škatlasto dimenzijo Lastnosti škatlaste

- Metode iz evklidske geometrije/analize niso dovolj, da opišemo lastnosti fraktalov.
- Fraktalna geometrija nam ponuja osnovno konstrukcijo za obravnavo množic, ki izgledajo nekako nenaravno.
- Zelo na grobo povedano nam dimenzija množice pove, koliko prostora ta zavzema v ambientnem prostoru.
- Dimenzija meri kompleksnost množice na poljubno majhnih skalah ter opisuje nekatere njene geometrijske in topološke lastnosti.

Mera

Fraktalne dimenzije

Opomba o teorije

- Če želimo govoriti o fraktalnih dimenzijah, moramo poznati osnovne ideje teorije mere.
- Bomo obravnavali le mere na \mathbb{R}^n .

Borelova σ -algebra

Fraktalne dimenzije

Urazbakhtii

Uvo

Kaj so frakta

Opomba o teorije mere

Podobnostr dimenzija

Hausdorffov

dimenzija Hausdorffova m

Hausdorffova dimenzija

Hausdorffove dimenzije

Primeri račun Hausdorffove

Škatlasta

Ekvivalenti

Relacija med Hausdorffovo in škatlasto dimenzijo

.astnosti škatlast limenzije

Definicija

Družina podmnožic Σ množice \mathbb{R}^n je σ -algebra, če:

- \mathbb{I} $\mathbb{R}^n \in \Sigma$;
- **2** Če je $A \in \Sigma$, potem $A^c \in \Sigma$;
- 3 Poljubna števna unija množic iz Σ je element Σ .

Borelova σ -algebra

Fraktalne dimenzije

Urazbakhti

Uvod

Kaj so fraktali? Opomba o teorije

mere Podobnostna dimenzija

Hausdorffov dimenzija

> Hausdorffova meri Hausdorffova dimenzija Lastnosti

Lastnosti Hausdorffove dimenzije Primeri računanja Hausdorffove dimenzije

dimenzija Ekvivalenti

definicije
Relacija med
Hausdorffovo in
škatlasto dimenzijo
Lastnosti škatlaste
dimenzije

Definicija

Družina podmnožic Σ množice \mathbb{R}^n je σ -algebra, če:

- \mathbb{I} $\mathbb{R}^n \in \Sigma$;
- **2** Če je $A \in \Sigma$, potem $A^c \in \Sigma$;
- \blacksquare Poljubna števna unija množic iz Σ je element Σ .

Definicija

- Najmanjšo σ -algebro na \mathbb{R}^n , ki vsebuje vse odprte podmnožice \mathbb{R}^n , imenujemo Borelova σ -algebra.
- Podmnožica $A \subseteq \mathbb{R}^n$ je **Borelova**, če pripada Borelovi σ -algebri.

Borelova σ -algebra

Fraktalne dimenzije

Urazbakhtii

Kaj so fraktali?

Opomba o teorije mere

Hausdorffov dimenzija

> Hausdorffova mera Hausdorffova dimenzija Lastnosti Hausdorffove dimenzije Primeri računanja Hausdorffove

dimenzija

definicije Relacija med Hausdorffovo in škatlasto dimenzijo Lastnosti škatlaste

Definicija

- Najmanjšo σ -algebro na \mathbb{R}^n , ki vsebuje vse odprte podmnožice \mathbb{R}^n , imenujemo Borelova σ -algebra.
- Podmnožica $A \subseteq \mathbb{R}^n$ je **Borelova**, če pripada Borelovi σ -algebri.

Opomba

- Vse odprte in vse zaprte množice so Borelovi.
- Poljubna števna unija (presek) odprtih (zaprtih) množic je Borelova množica.
- Vsi množici, ki smo jih bomo obravnavali, bodo Borelovi.

Relacija med Hausdorffovo in škatlasto dimenzijo Lastnosti škatlaste dimenzije

Definicija

Preslikava $\mu:\mathcal{P}(\mathbb{R}^n) \to [0,\infty) \cup \{\infty\}$ je **mera** na \mathbb{R}^n , če

- \blacksquare Če je $\{A_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ števna družina podmnožic \mathbb{R}^n , potem

$$\mu\left(\bigcup_{i=1}^{\infty}A_i\right)\leq\sum_{i=1}^{\infty}\mu(A_i)$$

4 Če je $\{A_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ števna družina paroma disjunktnih Borelovih podmnožic \mathbb{R}^n , potem

$$\mu\left(\bigcup_{i=1}^{\infty}A_i\right)=\sum_{i=1}^{\infty}\mu(A_i)$$

Mera na \mathbb{R}^n

Fraktalne dimenzije

Urazbakhti

Uvod

Kaj so fraktali?

Opomba o teorije
mere

Podobnostna dimenzija

Hausdorffova dimenzija

> Hausdorffova mera Hausdorffova dimenzija Lastnosti Hausdorffove dimenzije

Škatlast dimenzij

> definicije Relacija med Hausdorffovo in škatlasto dimenzije

Definicija

Pravimo tudi, da je $\mu(A)$ mera množice A.

Opomba

- $\mu(A)$ lahko si predstavljamo kot "velikost" množice A, ki je izmerjena na nek način.
- 4. pogoj pravi, da če množico A razbijemo na števno mnogo paroma disjunktnih Borelovih množic, potem vsota mer delov je enaka mere celotne množice (ponavadi ga težko dokazati).

Uvo

Opomba o teorije mere Podobnostna

Hausdorffova dimenzija

> Hausdorffova mera Hausdorffova dimenzija Lastnosti Hausdorffove

dimenzije
Primeri računan Hausdorffove dimenzije

dimenzija Ekvivalent

> Relacija med Hausdorffovo in škatlasto dimenzijo Lastnosti škatlaste

Mera štetja.

Naj bo $A \subseteq \mathbb{R}^n$. Definiramo $\mu(A) = \begin{cases} n; & |A| = n \in \mathbb{N}, \\ \infty; & \text{sicer} \end{cases}$. Potem μ je mera na \mathbb{R}^n .

■ Točkasta masa.

Naj bo $a \in \mathbb{R}^n$, $A \subseteq \mathbb{R}^n$. Definiramo $\mu(A) = \begin{cases} 1; & a \in A, \\ 0; & \text{sicer} \end{cases}$. Potem μ je mera (porazdelitev mase) na \mathbb{R}^n .

Lebesgueva \mathcal{L}^n mera

Fraktalne dimenzije

Urazbakhti

Uvo

Kaj so fraktal

Opomba o teorije mere

Podobnostr dimenzija

Hausdorffova Iimenzija

Hausdorffova mera Hausdorffova

dimenzija Lastnosti

Primeri računa

Škatlasta

dimenzija

Ekvivalentr definicije

Relacija med Hausdorffovo in škatlasto dimenzijo

Lastnosti škatlasti dimenzije Lebesgueva \mathcal{L}^n mera na \mathbb{R}^n je posplošitev evklidskih pojmov "dolžina", "ploščina", "volumen" itn. na večji razred množic.

Lebesgueva \mathcal{L}^n mera

Fraktalne dimenzije

Urazbakhti

Uvo

Opomba o teorije mere

Podobnostna dimenzija

dimenzija

Hausdorffova m

Hausdorffova dimenzija

Hausdorffove dimenzije Primeri računanj Hausdorffove

Škatlasta

Ekvivalentn definicije

Relacija med Hausdorffovo in škatlasto dimenzijo Lastnosti škatlaste Naj bo $A = \{(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n \mid a_i \le x_i \le b_i\}$ kvader v \mathbb{R}^n , potem n-dim volumen množice A je

$$\operatorname{vol}^n(A) := (b_1 - a_1)(b_2 - a_2) \dots (b_n - a_n).$$

Definicija

Lebesgueva mera $\mathcal{L}^n:\mathcal{P}(\mathbb{R}^n) \to [0,\infty]$ je definirana s predpisom

$$\mathcal{L}^n(A) = \inf \left\{ \sum_{i=1}^{\infty} \operatorname{vol}^n(A_i) \mid A \subseteq \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \right\},$$

kjer so A_i kvadri.

Lebesgueva \mathcal{L}^n mera

Fraktalne dimenziie

Opomba o teorije

Opomba

- Gledamo vsa pokritja množice A z kvadri in vzemimo najmanjši možen volumen.
- ullet \mathcal{L}^1 je posplošitev pojma "dolžina", \mathcal{L}^2 je posplošitev pojma "ploščina" itn.

Cantorjeva množica C

Fraktalne dimenzije

Kusian Urazbakhti

Uvo

Opomba o teorije

mere Podobnostna

Hausdorffova

Hausdorffova me

Hausdorffova dimenzija

Hausdorffove dimenzije Primeri računanj

Škatlast

Ekvivalentne definicije

definicije Relacija med Hausdorffovo in Škatlasto dimenzijo Lastnosti škatlaste Izračunamo dolžino $\mathcal{L}^1(\mathcal{C})$ Cantorjeve množice $\mathcal{C}=\bigcup_{n=1}^\infty \mathcal{C}_n$.

 C_2 — — — —

· 4 -- -- -- -- -- -- -- -- -- --

*C*₅

Lema

Naj bosta $A, B \subseteq \mathbb{R}^n$ Borelovi, $A \subseteq B$. Naj bo μ mera na \mathbb{R}^n . Potem $\mu(B \setminus A) = \mu(B) - \mu(A)$.

Kochova krivulja K

Fraktalne dimenzije

Urazbakhtir

Uvo

Kaj so fraktali?

Mere o teoriji

Podobnostna dimenzija

Hausdorffova

Hausdorffova mera

Hausdorffova dimenzija

Lastnosti

dimenzije Primeri računar

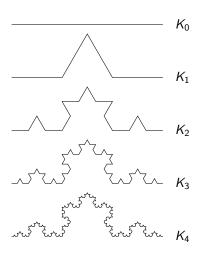
Hausdorffow dimenzije

Škatlasta

Ekvivalent

Relacija med Hausdorffovo in škatlasto dimenzij

_astnosti škatlaste limenzije



Kaj je narobe z *C* in *K*?

Fraktalne dimenzije

Ruslan Urazbakhti

Uvoc

Kaj so frakta

Opomba o teori

Podobnostna dimenzija

Hausdorffova

Hausdorffova mera

Hausdorffova

dimenzija

Hausdorffov

Primeri računanj Hausdorffove

Škatlasta

Elamalant

definicije

Relacija med Hausdorffovo in škatlasto dimenzijo

Lastnosti škatlast Jimenzije

Kaj je narobe z C in K?

Fraktalne dimenzije

Urazbakhtii

Uvo

iaj so fraktali?)pomba o teorije nere

Podobnostna

Hausdorffov

Hausdorffova mer

Hausdorffova dimenzija

Hausdorffove dimenzije

Primeri račun Hausdorffove

Škatlasta

Ekvivalent

Relacija med Hausdorffovo in škatlasto dimenzij Očitno je, da je pri izbiri dimenzije nekaj narobe (torej z nami).

 Ni možnosti, da bi dobili kaj pametnega, če bi računali ploščino daljice ali šteli njene točke.

Ali obstaja boljša možnost za izbiro dimenzije?

Fraktalne dimenzije

Ruslan Urazbakhtii

Uvo

Kaj so fraktal

Opomba o teor

Podobnostna

dimenzija

dimenzija

Hausdorffova mera

dimenzija

Lastnosti Hausdorffov

dimenzije Primeri račun

Škatlasta

dimenzija

definicije

Relacija med Hausdorffovo in Katlasto dimenzijo

Lastnosti škatlast dimenziie

Ali obstaja boljša možnost za izbiro dimenzije?

Fraktalne dimenzije

Urazbakhti

Uvc

Kaj so frakta

mere e

Podobnostna dimenzija

Hausdorffova

Hausdorffova mera

Hausdorffova

Lastnosti

Hausdorffove dimenzije

Hausdorffove dimenzije

Škatlasta

Ekvivalent

Relacija med Hausdorffovo in

Lastnosti škatlast

Obstaja.

Fraktalne dimenzije

Urazbakhti

Uvoc

aj so fraktali*!* Ipomba o teorije Iere

Podobnostna

Hausdorffov

Hausdorffova mer

Hausdorffova dimenzija

Hausdorffove dimenzije

dimenzije

dimenzija

Ekvivalenti definicije

Relacija med Hausdorffovo in škatlasto dimenzijo

.astnosti škatlaste limenzije

- Kaj lahko povemo o masi daljice, če dvakrat zmanjšamo njeno dolžino?
- Kaj lahko povemo o masi kvadrata, če dvakrat zmanjšamo dolžino njegove stranice?

Fraktalne dimenzije

Urazbakhti

Uvc

Opomba o teorije mere

Podobnostna dimenzija

Hausdorffova dimenzija

Hausdorffova Hausdorffova dimenziia

Lastnosti Hausdorffove dimenzije

dimenzije Škatlasta

Ekvivalenti

Relacija med Hausdorffovo in škatlasto dimenzij Kaj lahko povemo o masi daljice, če dvakrat zmanjšamo njeno dolžino?

Kaj lahko povemo o masi kvadrata, če dvakrat zmanjšamo dolžino njegove stranice?

Torej

$$m(\lambda D) = \lambda^s m(D).$$

Fraktalne dimenzije

Urazbakhti

Uvo

pomba o teorije ere

Podobnostna dimenzija

Hausdorffova

dimenzija Hausdorffova n

Hausdorffova

dimenzija

Hausdorffove dimenzije Primeri računan

Škatlasta

Ekvivalenti

Relacija med Hausdorffovo in škatlasto dimenzijo Lastnosti škatlaste Torej

$$m(\lambda D) = \lambda^s m(D).$$

Kaj se zgodi z maso Cantorjeve množice, če trikrat zmanjšamo začetni interval?

 C_0 —

 C_1 ———

<u>-2</u>

- - -

C₄ -- -- -- --

- -- -- --

C₅

...

Fraktalne dimenzije

Ruslan Urazbakhti

Uvo

Kaj so fraktali Opomba o teo mere

Podobnostna

dimenzija

Hausdorffova dimenzija

> Hausdorffova mera Hausdorffova

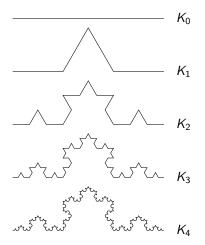
Hausdorffova dimenzija Lastnosti

dimenzije
Primeri računanj

Škatlasta

Ekvivalentn

Relacija med Hausdorffovo in škatlasto dimenzijo Kaj se zgodi z maso Kochove krivulje, če trikrat zmanjšamo začetni interval?



Fraktalne dimenzije

Kuslan Urazbakhtii

Uvo

iaj so fraktali?)pomba o teorije

Podobnostna

Hausdorffov

Hausdorffova me

Hausdorffova dimenzija

Hausdorffove dimenzije

Primeri računa Hausdorffove dimenzije

Škatlasta

Ekvivalentr

Relacija med Hausdorffovo in škatlasto dimenzijo

astnosti škatlaste imenzije

Definicija

Naj bo množica $F \subseteq \mathbb{R}^n$ sestavljena iz m kopij same sebe, kjer je vsaka kopija zmanjšana za faktor r. Potem rečemo, da ima množica F podobnastno dimenzijo enako $\log_r m$.

Fraktalne dimenziie

Podobnostna

Definicija

Naj bo množica $F \subseteq \mathbb{R}^n$ sestavljena iz m kopij same sebe, kjer je vsaka kopija zmanjšana za faktor r. Potem rečemo, da ima množica F podobnastno dimenzijo enako log, m.

Spet imamo en problem...

Fraktalne dimenzije

Urazbakhti

Uvo

aj so fraktali? pomba o teorije ere

Podobnostna dimenzija

Hausdorffova dimenzija

Hausdorffova mera Hausdorffova dimenzija

Lastnosti Hausdorffove dimenzije Primeri računanj: Hausdorffove

Škatlasta

Ekvivalentn

Relacija med Hausdorffovo in škatlasto dimenzijo Lastnosti škatlaste

Definicija

Naj bo množica $F\subseteq\mathbb{R}^n$ sestavljena iz m kopij same sebe, kjer je vsaka kopija zmanjšana za faktor r. Potem rečemo, da ima množica F podobnastno dimenzijo enako $\log_r m$.

Spet imamo en problem...

Samopodobnih množic je zelo malo. Recimo, že krožnica ni taka.



Fraktalne dimenzije

Kuslan Urazbakhti

Uvo

aj so fraktali? pomba o teorije ere

Podobnostna dimenzija

Hausdorffova dimenzija

Hausdorffova mer Hausdorffova dimenzija

Lastnosti Hausdorffove dimenzije Primeri računanj

Škatlasta

Ekvivalentn

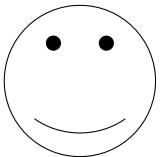
Relacija med Hausdorffovo in škatlasto dimenzijo Lastnosti škatlaste

Definicija

Naj bo množica $F \subseteq \mathbb{R}^n$ sestavljena iz m kopij same sebe, kjer je vsaka kopija zmanjšana za faktor r. Potem rečemo, da ima množica F podobnastno dimenzijo enako $\log_r m$.

Spet imamo en problem...

Samopodobnih množic je zelo malo. Recimo, že krožnica ni taka.



Hausdorffova dimenzija

Fraktalne dimenzije

Rusian Urazbakhti

Uvo

Kaj so fraktali Opomba o teo mere Podobnostna dimenzija

Hausdorffova dimenzija

Hausdorffova mera Hausdorffova dimenzija Lastnosti Hausdorffove dimenzije

Škatlast

Ekvivalentr definicije

Relacija med Hausdorffovo in škatlasto dimenzij Lastnosti škatlaste

- Hausdorffova dimenzija izmed vseh "fraktalnih" dimenzij, ki jih ljudje uporabljajo, je najbolj stara in verjetno najbolj pomembna.
- Lahko jo definiramo za poljubno množico in matematično je zelo priročna, ker je osnovana na meri, s katero lahko relativno preprosto kaj naredimo.
- Glavna pomanjkljivost je, da jo v večini situacij težko izračunati ali oceniti z numerični metodi.

Fraktalne dimenzije

Urazbakhti

Uvo

)pomba o teorij

Podobnostna dimenzija

Hausdorffov

Hausdorffova mera

Hausdorffova dimenzija

Hausdorffove dimenzije

Hausdorffove dimenzije

dimenzija

Ekvivalenti definicije

Relacija med Hausdorffovo in škatlasto dimenzijo

.astnosti škatlast Iimenzije

Definicija

Naj bo $F \subseteq \mathbb{R}^n$. Naj bo $\{U_i\}$ števna družina množic iz \mathbb{R}^n , za katero velja:

 $\forall i \in \mathbb{N} . 0 \leq |U_i| \leq \delta;$

 $F \subseteq \bigcup_{i=1}^{\infty} U_i.$

Potem $\{U_i\}$ imenujemo δ -pokritje množice F.

Fraktalne dimenzije

Urazbakhti

Uvo

Kaj so fraktali? Opomba o teorij

mere
Podobnostna

Hausdorffov

Hausdorffova mera

Hausdorffova

Lastnosti

dimenzije

Primeri računai Hausdorffove

Škatlasta

Ekvivalent

Relacija med Hausdorffovo in škatlasto dimenzij

Lastnosti škatlaste dimenzije Naj bo $F \subseteq \mathbb{R}^n$ in $s \ge 0$. Za vsak $\delta > 0$ definiramo

$$\mathcal{H}^s_\delta(F) = \inf \left\{ \sum_{i=1}^\infty |U_i|^s \mid \{U_i\} \text{ je } \delta\text{-pokritje } F
ight\}$$

Fraktalne dimenzije

Kusian Urazbakhti

Uvo

Kaj so fraktali? Opomba o teorije nere Podobnostna

Hausdorffova dimenzija

Hausdorffova mera Hausdorffova

Lastnosti Hausdorffove dimenzije Primeri računanja

Škatlas

Ekvivalenti

Relacija med Hausdorffovo in škatlasto dimenzijo Lastnosti škatlaste Naj bo $F \subseteq \mathbb{R}^n$ in $s \ge 0$. Za vsak $\delta > 0$ definiramo

$$\mathcal{H}^s_\delta(F) = \inf \left\{ \sum_{i=1}^\infty |U_i|^s \mid \{U_i\} \text{ je δ-pokritje } F
ight\}$$

Ko $\delta \to 0$, razred možnih pokritij F se zmanjšuje, torej inf narašča, torej lahko definiramo:

$$\mathcal{H}^{s}(F) = \lim_{\delta \to 0} \mathcal{H}^{s}_{\delta}(F)$$

Ta limita vedno obstaja za vsako množico $F \subseteq \mathbb{R}^n$.

Fraktalne dimenzije

Urazbakhti

Uvo

Kaj so fraktali? Opomba o teorije nere Podobnostna

Hausdorffova dimenzija

Hausdorffova mera Hausdorffova

Lastnosti
Hausdorffove
dimenzije
Primeri računanja
Hausdorffove

Skatlasta dimenzija

definicije Relacija med Hausdorffovo in škatlasto dimenzij Naj bo $F \subseteq \mathbb{R}^n$ in $s \ge 0$. Za vsak $\delta > 0$ definiramo

$$\mathcal{H}^s_\delta(F) = \inf \left\{ \sum_{i=1}^\infty |U_i|^s \mid \{U_i\} \text{ je δ-pokritje } F
ight\}$$

Ko $\delta \to 0$, razred možnih pokritij F se zmanjšuje, torej inf narašča, torej lahko definiramo:

$$\mathcal{H}^{s}(F) = \lim_{\delta \to 0} \mathcal{H}^{s}_{\delta}(F)$$

Ta limita vedno obstaja za vsako množico $F \subseteq \mathbb{R}^n$. Število $\mathcal{H}^s(F)$ imenujemo s-dim Hausdorffova mera množice F.

Trditev

 \mathcal{H}^s je mera na \mathbb{R}^n .

Fraktalne dimenzije

Urazbakhti

Uvo

(aj so fraktali?)pomba o teorije

mere Podobnostna dimenzija

Hausdorffov dimenzija

Hausdorffova mera

Hausdorffova

Lastnosti Hausdorffor

dimenzije Primeri računan

Hausdorffove dimenzije

Ekvivalenti

Relacija med Hausdorffovo in

Lastnosti škatlaste Iimenzije

Opomba

Hausdorffova mera je posplošitev Lebesgueve mere na necele dimenzije. Se da pokazati, da

$$\mathcal{H}^n(F) = \frac{1}{c_n} \mathcal{L}^n(F),$$

kjer je c_n volumen n-dim krogle z polmerom $\frac{1}{2}$, tj.

$$c_n = \frac{\pi^{(n/2)}}{\Gamma(n/2+1)} \left(\frac{1}{2}\right)^n$$

Fraktalne dimenzije

Urazbakhtir

Uvo

(aj so fraktali?)pomba o teorije ----

Podobnostna dimenzija

Hausdorffova dimenzija

Hausdorffova mera

dimenzija

Hausdorffove dimenzije

Primeri račun Hausdorffove

Škatlasta

Ekvivalenti

Relacija med Hausdorffovo in škatlasto dimenzij

> .astnosti škatlaste limenziie

Definicija

Podobnostna preslikava z koeficientom podobnosti c>0 je preslikava $P:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^n$, za katero velja:

$$\forall x, y \in \mathbb{R}^n . |P(x) - P(y)| = c|x - y|$$

Fraktalne dimenzije

Urazbakhti

Uvc

Opomba o teor mere Podobnostna

Hausdorffova dimenzija

Hausdorffova mera Hausdorffova

dimenzija Lastnosti

Primeri računanj Hausdorffove dimenzije

dimenzija

Ekvivalentne definicije

Hausdorffovo in škatlasto dimenziji Lastnosti škatlaste Naj bo $P: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ podobnostna preslikava z podobnostnim koeficientom c > 0. Naj bo $F \subseteq \mathbb{R}^n$.

Dobro poznamo lastnosti skaliranja dolžine, ploščine, volumna, npr.

Ali velja enako tudi za \mathcal{H}^s ?

Fraktalne dimenzije

Urazbakhti

Uvo

vaj so fraktali? Opomba o teorij: ----

Podobnostna dimenzija

Hausdorffov

Hausdorffova mera

Trauscornova men

Hausdorffova

Lastnosti Hausdorffo

Primeri račun

Škatlasta

dimenzija

definicije

Relacija med Hausdorffovo in škatlasto dimenzijo

Lastnosti škatlast dimenzije Naj bo $P: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ podobnostna preslikava z podobnostnim koeficientom c > 0. Naj bo $F \subseteq \mathbb{R}^n$.

Trditev

$$\mathcal{H}^s(P_*(F))=c^s\mathcal{H}^s(F)$$

Fraktalne dimenzije

Urazbakhtir

Uvo

Kaj so fraktali? Opomba o teorije mere

mere Podobnostna dimenzija

Hausdorffov

Hausdorffova mera

dimenzija

Hausdorffo

Orimenzije
Primeri račiji

Hausdorffov dimenzije

Škatlasta

Ekvivalent

Relacija med Hausdorffovo in škatlasto dimenzi

> .astnosti škatlaste Iimenzije

Definicija

Naj bosta $X \subseteq \mathbb{R}^n$ in $Y \subseteq \mathbb{R}^m$. Preslikava $f: X \to Y$ je **Höldorjeva** stopnje $\alpha > 0$, če

$$\exists c > 0 . \forall x, y \in X . |f(x) - f(y)| \le c|x - y|^{\alpha}$$

Fraktalne dimenzije

Urazbakhti

Uvo

Opomba o teorije mere

Podobnostna dimenzija

Hausdorffov dimenzija

Hausdorffova mera

dimenzija Lastnosti

Hausdorffove dimenzije Primeri računanj Hausdorffove

Škatlast dimenzi

Ekvivalenti

Relacija med Hausdorffovo in škatlasto dimenziji

Definicija

Naj bosta $X \subseteq \mathbb{R}^n$ in $Y \subseteq \mathbb{R}^m$. Preslikava $f: X \to Y$ je **Höldorjeva** stopnje $\alpha > 0$, če

$$\exists c > 0 \, . \, \forall x, y \in X \, . \, |f(x) - f(y)| \le c|x - y|^{\alpha}$$

Trditev

Naj bo $F\subseteq \mathbb{R}^n$ in $f:F\to \mathbb{R}^n$ Höldorjeva preslikava stopnje $\alpha>0$. Potem za vsak $s\geq 0$ velja:

$$\mathcal{H}^{s/\alpha}(f_*(F)) \leq c^{s/\alpha}\mathcal{H}^s(F)$$

Fraktalne dimenzije

Urazbakhti

Uvo

Opomba o teorije nere

dimenzija

Hausdorffova dimenzija

Hausdorffova mera

Hausdorffova dimenzija Lastnosti

dimenzije Primeri računanj: Hausdorffove

dimenzije Škatlasta

Ekvivalentr

Relacija med Hausdorffovo in škatlasto dimenziji

Trditev

Naj bo $F \subseteq \mathbb{R}^n$ in $f : F \to \mathbb{R}^n$ Höldorjeva preslikava stopnje $\alpha > 0$. Potem za vsak s > 0 velja:

$$\mathcal{H}^{s/\alpha}(f_*(F)) \leq c^{s/\alpha}\mathcal{H}^s(F)$$

Posledica

Če je $f: F \to \mathbb{R}^n$ Lipschitzova, tj.

$$\exists c>0 \,.\, \forall x,y\in X\,.\, |f(x)-f(y)|\leq c|x-y|,$$

potem

$$\mathcal{H}^s(f_*(F)) \leq c^s \mathcal{H}^s(F)$$

Fraktalne dimenzije

Urazbakhti

Uvo

Kaj so fraktal Opomba o te

mere
Podobnostna

Hausdorffov dimenzija

Hausdorffova m

Hausdorffova dimenzija

Lastnosti

dimenzije

Hausdorfl dimenzije

Škatlasta

Ekvivalent

Relacija med Hausdorffovo in škatlasto dimenzijo

.astnosti škatlast Iimenzije Naj bo $F \subseteq \mathbb{R}^n$. Gledamo funkcijo

$$\mathcal{H}_F: [0,\infty) \longrightarrow [0,\infty]$$

 $s \longmapsto \mathcal{H}^s(F)$

Lema

Naj bo $F\subseteq \mathbb{R}^n$. Če je $\mathcal{H}^s(F)<\infty$, potem $\mathcal{H}^t(F)=0$ za vse t>s.

Fraktalne dimenzije

Ruslan Urazbakhtir

Uvo

(aj so fraktali? Opomba o teorije nere

mere Podobnostna

Hausdorffova dimenzija

Hausdorffova m

..

Hausdorffova dimenzija

Lastnosti

Hausdorffov dimenzije

Primeri rači Hausdorffov

Škatlasta

Ekvivalenti

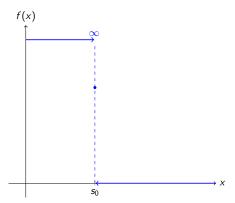
Relacija med Hausdorffovo in škatlasto dimenzijo

Lastnosti škatlaste dimenzije

Lema

Naj bo $F\subseteq \mathbb{R}^n$. Če je $\mathcal{H}^s(F)<\infty$, potem $\mathcal{H}^t(F)=0$ za vse t>s.

Oglejmo si graf funkcije \mathcal{H}_F :



Fraktalne dimenzije

Urazbakhtir

Uvo

(aj so fraktali? Opomba o teoriji

Podobnostna dimenzija

-Hausdorffov

dimenzija

Hausdorffova mera

Hausdorffova

dimenzija

Hausdorffov

Primeri računar Hausdorffove

Škatlasta

Ekvivalent

Relacija med Hausdorffovo in škatlasto dimenzij

.astnosti škatlasti Iimenzije

Definicija

Hausdorffova dimenzija množice $F \subseteq \mathbb{R}^n$ je

$$\mathrm{dim}_{H}F=\inf\left\{s\geq0\mid\mathcal{H}^{s}(F)=0\right\}=\sup\left\{s\geq0\mid\mathcal{H}^{s}(F)=\infty\right\}$$

Fraktalne dimenzije

Urazbakhtii

Uvo

kaj so fraktali? Opomba o teorije nere

Podobnostna dimenzija

Hausdorffova

dimenzija

Hausdorffova mer

Hausdorffova dimenzija

Lastnosti Hausdorffove

Primeri računar Hausdorffove dimenzije

Škatlast

Ekvivalenti

Relacija med Hausdorffovo in škatlasto dimenzij

.astnosti škatlaste limenzije

Definicija

Hausdorffova dimenzija množice $F \subseteq \mathbb{R}^n$ je

$$\mathsf{dim}_{\mathcal{H}}F = \inf\left\{s \geq 0 \mid \mathcal{H}^s(F) = 0\right\} = \sup\left\{s \geq 0 \mid \mathcal{H}^s(F) = \infty\right\}$$

Opomba

- Po dogovoru $\sup(\emptyset) = 0$.
- Ta dimenzija je definirana za poljubno podmnožico \mathbb{R}^n .

Fraktalne dimenziie

Hausdorffova

dimenziia

Definicija

Hausdorffova dimenzija množice $F \subseteq \mathbb{R}^n$ je

$$\mathsf{dim}_H F = \inf \left\{ s \geq 0 \mid \mathcal{H}^s(F) = 0 \right\} = \sup \left\{ s \geq 0 \mid \mathcal{H}^s(F) = \infty \right\}$$

Imamo:

$$\mathcal{H}^{s}(F) = \begin{cases} \infty; & 0 \leq s < \dim_{H} F \\ 0; & s > \dim_{H} F; \end{cases}$$

Če je $s = \dim_H F$, potem $\mathcal{H}^s(F)$ lahko $0, \infty$ ali $a \in \mathbb{R}$.

Hausdorffova dimenzija krogle B^n

Fraktalne dimenzije

Urazbakhtir

Uvo

Kaj so frakta

Opomba o teoriji mere

Podobnostna dimenzija

Hausdorffova dimenzija

Hausdorffova mera

Hausdorffova

Hausdorffova dimenzija

Hausdorffov dimenzije

Primeri računanj Hausdorffove

Škatlasta

Ekvivalent

Relacija med Hausdorffovo in Kratlasto dimonziji

Lastnosti škatlast Iimenzije

Lema

 $\dim_H B^n = n$

Hausdorffova dimenzija krogle B^n

Fraktalne dimenziie

Hausdorffova

dimenziia

Lema

$\dim_H B^n = n$

Spomnimo se

Lema

$$\mathcal{H}^n(F) = \frac{1}{c_n} \mathcal{L}^n(F),$$

kjer je c_n volumen *n*-dim krogle z polmerom $\frac{1}{2}$, tj.

$$c_n = \frac{\pi^{(n/2)}}{\Gamma(n/2+1)} \left(\frac{1}{2}\right)^n$$

Fraktalne dimenzije

Kuslan Urazbakhti

Uvo

Kaj so frakta

Opomba o teorij mere

Podobnostna dimenzija

Hausdorffova dimenzija

Hausdorffova mera

Lastnosti Hausdorffove dimenzije

Primeri računanja Hausdorffove dimenzije

Škatlasta

Ekvivalenti

Relacija med Hausdorffovo in škatlasto dimenzijo

.astnosti škatlaste limenziie (1) **Monotonost.** Če je $E \subseteq F$, potem $\dim_H E \leq \dim_H F$.

Fraktalne dimenzije

Urazbakhti

Uvo

Kaj so fraktali? Opomba o teorije mere

Podobnostna dimenzija

Hausdorffova dimenzija

Hausdorffova mera Hausdorffova dimenzija

Lastnosti Hausdorffove dimenzije

Hausdorffove dimenzije

Škatlasta dimenzija

Ekvivalenti

Relacija med Hausdorffovo in škatlasto dimenzijo

Lastnosti škatlaste dimenzije

- (1) **Monotonost.** Če je $E \subseteq F$, potem $\dim_H E \leq \dim_H F$.
 - (2) **Števna stabilnost.** Če je F_1, F_2, \ldots števno zaporedje množic, potem

$$\dim_H \bigcup_{i=1}^{\infty} F_i = \sup_{1 \le i < \infty} (\dim_H F_i)$$

Fraktalne dimenzije

Kusian Urazbakhti

Uvo

Naj so fraktali? Opomba o teorije mere Podobnostna

Hausdorffova

Hausdorffova mera

Lastnosti Hausdorffove dimenzije

Primeri računan Hausdorffove dimenzije

dimenzija

definicije Relacija med Hausdorffovo in škatlasto dimenzi

Katlasto dimenzijo Lastnosti škatlaste dimenzije

- (1) **Monotonost.** Če je $E \subseteq F$, potem $\dim_H E \le \dim_H F$.
- (2) **Števna stabilnost.** Če je F_1, F_2, \ldots števno zaporedje množic, potem

$$\dim_H \bigcup_{i=1}^{\infty} F_i = \sup_{1 \le i < \infty} (\dim_H F_i)$$

(3) **Dimenzija števnih množic.** Če je F števna, potem $\dim_H F = 0$.

Fraktalne dimenzije

Urazbakhtii

Uvo

Naj so fraktali? Opomba o teorije mere Podobnostna dimenzija

Hausdorffova dimenzija

Hausdorffova mera Hausdorffova dimenzija

Hausdorffove dimenzije Primeri računan

Hausdorffove dimenzije

dimenzija Ekvivalenti

> definicije Relacija med Hausdorffovo in Škatlasto dimenzijo Lastnosti škatlaste

(1) **Monotonost.** Če je $E \subseteq F$, potem $\dim_H E \leq \dim_H F$.

(2) **Števna stabilnost.** Če je F_1, F_2, \ldots števno zaporedje množic, potem

$$\dim_H \bigcup_{i=1}^{\infty} F_i = \sup_{1 \le i < \infty} (\dim_H F_i)$$

- (3) **Dimenzija števnih množic.** Če je F števna, potem $\dim_H F = 0$.
- (4) **Dimenzija odprtih množic.** Naj bo $F \subseteq \mathbb{R}^n$ odprta podmnožica. Potem $\dim_H F = n$.

Fraktalne dimenzije

Rusian Urazbakhtii

Uvod Kaj so fral Opomba o

Opomba o teoriji mere Podobnostna dimenzija

dimenzija

Hausdorffova mer

Hausdorffova

dimenzija

Lastnosti Hausdorffove dimenzije Primeri računanja Hausdorffove dimenzije

dimenzija Ekvivalentne definicije

definicije Relacija med Hausdorffovo in škatlasto dimenzijo Lastnosti škatlaste dimenzije (1) **Monotonost.** Če je $E \subseteq F$, potem $\dim_H E \leq \dim_H F$.

(2) **Števna stabilnost.** Če je F_1, F_2, \ldots števno zaporedje množic, potem

$$\dim_H \bigcup_{i=1}^{\infty} F_i = \sup_{1 \le i < \infty} (\dim_H F_i)$$

- (3) **Dimenzija števnih množic.** Če je F števna, potem $\dim_H F = 0$.
- (4) **Dimenzija odprtih množic.** Naj bo $F \subseteq \mathbb{R}^n$ odprta podmnožica. Potem $\dim_H F = n$.
- (5) **Dimenzija gladkih podmnogoterosti.** Naj bo $F \subseteq \mathbb{R}^n$ gladka podmnogoterost dimenzije m, potem dim $_H F = m$. Posebej:
 - Če je F gladka krivulja, potem dim $_HF=1$;
 - Če je F gladka ploskev, potem dim $_HF=2$.

Fraktalne dimenzije

Ruslan Urazbakhti

Uvo

Kaj so frakt:

mere Podobnostna

Hausdorffov

Hausdorffova me

dimenzija

Lastnosti

Hausdorffove

dimenzije Primeri računanja Hausdorffove

Škatlasta dimenzija

Ekvivalenti

Relacija med Hausdorffovo in škatlasto dimenzijo

katlasto dimenzijo .astnosti škatlaste :----:

Opomba

To so osnovne lastnosti, ki jih lahko zahtevamo od dimenzije, če želimo, da je ta res posplošitev običajne evklidske dimenzije.

Fraktalne dimenzije

Ruslan Urazbakhtir

Uvo

Kaj so fraktali? Opomba o teorij

Podobnostna

Hausdorffov

Hausdorffova mera Hausdorffova

Lastnosti Hausdorffove dimenzije

Primeri računanja Hausdorffove dimenzije

Škatlasta

Ekvivalent

Relacija med Hausdorffovo in škatlasto dimenzij

Lastnosti škatlast Iimenzije

Trditev

Naj bo $F\subseteq \mathbb{R}^n$ in $f:F\to \mathbb{R}^n$ Höldorjeva preslikava stopnje $\alpha>0.$ Potem

$$\dim_H f_*(F) \leq \frac{1}{\alpha} \dim_H F$$

Fraktalne dimenzije

Ruslan Urazbakhti

Uvc

Kaj so fraktali? Opomba o teorije mere Podobnostna

mere Podobnostna dimenzija

Hausdorffova dimenzija

> Hausdorffova mera Hausdorffova dimenziia

Lastnosti Hausdorffove dimenzije

Hausdorffove dimenzije

dimenzija Ekvivalentr

Relacija med Hausdorffovo in škatlasto dimenzije

Trditev

Naj bo $F\subseteq \mathbb{R}^n$ in $f:F\to \mathbb{R}^n$ Höldorjeva preslikava stopnje $\alpha>0.$ Potem

$$\dim_H f_*(F) \leq \frac{1}{\alpha} \dim_H F$$

Spomnimo se

Trditev

Naj bo $F \subseteq \mathbb{R}^n$ in $f : F \to \mathbb{R}^n$ Höldorjeva preslikava stopnje $\alpha > 0$. Potem za vsak $s \ge 0$ velja:

$$\mathcal{H}^{s/\alpha}(f_*(F)) \leq c^{s/\alpha}\mathcal{H}^s(F)$$

Fraktalne dimenzije

Ruslan Urazbakhti

Uvo

(aj so fraktali? Opomba o teorije nere

mere Podobnostna dimenzija

Hausdorffova dimenziia

Hausdorffova mera Hausdorffova dimenzija

Lastnosti Hausdorffove dimenzije

Hausdorffove dimenzije

Ekvivalenti

Relacija med Hausdorffovo in škatlasto dimenzij

> .astnosti škatlaste limenziie

Trditev

Naj bo $F\subseteq \mathbb{R}^n$ in $f:F\to \mathbb{R}^n$ Höldorjeva preslikava stopnje $\alpha>0$. Potem

$$\dim_H f_*(F) \leq \frac{1}{\alpha} \dim_H F$$

Posledica

• Če je $f: F \to \mathbb{R}^n$ Lipschitzova, potem $\dim_H f_*(F) \leq \dim_H(F)$.

Naj so traktali! Opomba o teorije mere Podobnostna

Podobnostna dimenzija

Hausdorffov dimenzija

Hausdorffova mera Hausdorffova dimenzija

Lastnosti Hausdorffove dimenzije Primeri računar

Hausdorffove dimenzije

dimenzija Ekvivalentr

> Relacija med Hausdorffovo in škatlasto dimenzijo

katlasto dimenzijo .astnosti škatlaste limenziie

Trditev

Naj bo $F\subseteq \mathbb{R}^n$ in $f:F\to \mathbb{R}^n$ Höldorjeva preslikava stopnje $\alpha>0$. Potem

$$\mathrm{dim}_H f_*(F) \leq \frac{1}{\alpha} \mathrm{dim}_H F$$

Posledica

- Če je $f: F \to \mathbb{R}^n$ Lipschitzova, potem $\dim_H f_*(F) \leq \dim_H(F)$.
- Če je $f: F \to \mathbb{R}^n$ bi-Lipschitzova, tj.

$$\exists c_1, c_2 > 0 \, . \, \forall x, y \in X \, . \, c_1 |x - y| \leq |f(x) - f(y)| \leq c_2 |x - y|,$$

potem
$$\dim_H f_*(F) = \dim_H(F)$$
.

Fraktalne dimenzije

Ruslan Urazbakhti

Uvc

(aj so fraktali?)pomba o teor

Podobnostna

Hausdorffova

Hausdorffova mera

Lastnosti Hausdorffove dimenzije

Primeri računanj Hausdorffove dimenzije

dimenzija

Ekvivalentn definicije

Relacija med Hausdorffovo in škatlasto dimenzijo

.astnosti škatlast limenzije

Opomba

Posledica pove, da je \dim_H invariantna glede na bi-Lipschitzeve preslikave. V posebnem, če sta množici imata različni Hausdorffovi dimenziji, potem ne obstaja bi-Lipschitzova preslikava med njima.

Topološke lastnosti Hausdorffove dimenzije

Fraktalne dimenzije

Ruslan Urazbakhtir

Uvo

Kaj so frakta

Opomba o teorij mere

Podobnostna dimenzija

Hausdorffova

Hausdorffova mera Hausdorffova

Lastnosti Hausdorffove dimenzije

Primeri računanja Hausdorffove

Škatlasta

Ekvivalenti

Relacija med Hausdorffovo in škatlasto dimenzija

.astnosti škatlast Iimenzije

Trditev

Naj bo $F \subseteq \mathbb{R}^n$. Če je $\dim_H F < 1$, potem je F ...

Topološke lastnosti Hausdorffove dimenzije

Fraktalne dimenzije

Ruslan Urazbakhtir

Uvo

Kaj so frakt:

mere o teori

Podobnostna dimenzija

Hausdorffova

Hausdorffova mera Hausdorffova

Lastnosti Hausdorffove

dimenzije Primeri računanj Hausdorffove

Škatlasta

Ekvivalent

Relacija med Hausdorffovo in

astnosti škatlast Iimenzije

Trditev

Naj bo $F\subseteq \mathbb{R}^n$. Če je $\dim_H F<1$, potem je F popolnoma nepovezana.

Hausdorffova dimenzija Cantorjeva praha

Fraktalne dimenzije

Kuslan Urazbakhtir

Uvo

Kaj so frakt

Opomba o teorijo mere

mere Podobnostna

Hausdorffov dimenzija

Hausdorffova mei

Hausdorffova

unitenzija

Hausdorffove

Primeri računanja Hausdorffove dimenzije

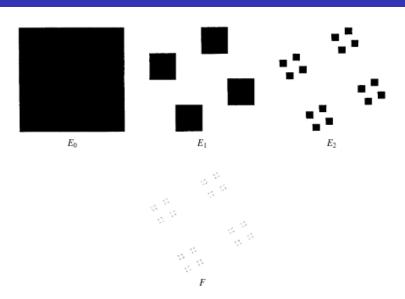
Škatlasta

Ekvivalent

definicije

Hausdorffovo in

Lastnosti škatlast



Hausdorffova dimenzija Cantorjeve množice in Kochove krivulje

Fraktalne dimenzije

Urazbakhtii

Uvc

Kaj so frakta

mere Podobnostna

Hausdorffov ...

dimenzija

Hausdorffova

Lastnosti Hausdorffove

Primeri računanja Hausdorffove dimenzije

Škatlasta

Ekvivalent

Relacija med Hausdorffovo in škatlasto dimenzij

astnosti škatlast Iimenzije

Primer

Naj bo C Cantorjeva množica in K Kochova krivulja, potem

- \bullet dim_H $C = \log_3 2 = 0.6309...$
- \bullet dim_HK = log₃ 4 = 1.2618...

Druge vrste dimenzij

Fraktalne dimenzije

Ruslan Urazbakhtii

Uvo

Naj so traktali! Opomba o teor mere Podobnostna

Hausdorffova

Hausdorffova me

Lastnosti Hausdorffove dimenzije Primeri računan

Škatlasta

Ekvivalentne definicije

Relacija med Hausdorffovo in škatlasto dimenzije

Opomba

- Hausdorffova dimenzija je osnova.
- Ni res, da vse definicije delujejo za vse množice.
- Osnovna ideja za vse dimenzije je "meritev" v skali $\delta>0$, tj. za vsak $\delta>0$ merimo množico na način, ki ignorira nepravilnosti, ki so manjše od δ . Nato pa gledamo, kaj se zgodi v limiti $\delta\to0$.

Fraktalne dimenziie

Ekvivalentne definiciie

Definicija

Naj bo $f: \mathbb{R}_{>0} \to \mathbb{R}$ funkcija.

Spodnja limita funkcije f ko gre x proti 0 je

$$\underline{\lim}_{x \to \infty} f(x) := \lim_{r \to 0} \left(\inf \left\{ f(x) \mid 0 < x < r \right\} \right)$$

Zgornja limita funkcije f ko gre x proti 0 je

$$\overline{\lim}_{x \to \infty} f(x) := \lim_{r \to 0} \left(\sup \left\{ f(x) \mid 0 < x < r \right\} \right)$$

Fraktalne dimenzije

Urazbakhti

Uvc

kaj so traktali? Opomba o teorij nere

Podobnostn dimenzija

Hausdorffov

Hausdorffova m

Hausdorffova dimenzija

Hausdorffove dimenzije

Primeri račun: Hausdorffove dimenzije

Škatlasta

Ekvivalentne definicije

Relacija med Hausdorffovo in škatlasto dimenzijo

katlasto dimenzijo Lastnosti škatlaste limenzije Naj bo $F\subseteq \mathbb{R}^n$ omejena in neprazna. Označimo z $N_\delta(F)$ najmanjšo število množic s premerom kvečjemu $\delta>0$, ki jih potrebujemo za pokritje F.

Fraktalne dimenzije

Urazbakhtii

Uvo

Opomba o teor mere Podobnostna dimenzija

Hausdorffova dimenzija

Hausdorffova mera Hausdorffova dimenzija

Hausdorffove dimenzije Primeri računanj

Škatlasta dimenzija

Ekvivalentne definicije

Relacija med Hausdorffovo in škatlasto dimenziji Lastnosti škatlaste Naj bo $F \subseteq \mathbb{R}^n$ omejena in neprazna. Označimo z $N_{\delta}(F)$ najmanjšo število množic s premerom kvečjemu $\delta > 0$, ki jih potrebujemo za pokritje F.

Definicija

■ Spodnja škatlasta dimenzija množice F je

$$\underline{\dim}_{B}F = \underline{\lim}_{\delta \to 0} \frac{\ln N_{\delta}(F)}{-\ln \delta}$$

■ Zgornja škatlasta dimenzija množice F je

$$\overline{\dim}_B F = \overline{\lim}_{\delta \to 0} \frac{\ln N_{\delta}(F)}{-\ln \delta}$$

Fraktalne dimenzije

Kuslan Urazbakhti

Uvo

Opomba o teorije mere

Podobnostn dimenzija

Hausdorffova dimenzija

Hausdorffova mera Hausdorffova

Lastnosti Hausdorffove dimenzije Primeri računanja

Škatlasta

Ekvivalentne

Relacija med Hausdorffovo in škatlasto dimenzijo Lastnosti škatlaste

Definicija

■ Spodnja škatlasta dimenzija množice F je

$$\underline{\dim}_{B} F = \underline{\lim}_{\delta \to 0} \frac{\ln N_{\delta}(F)}{-\ln \delta}$$

■ **Zgornja škatlasta dimenzija** množice *F* je

$$\overline{\dim}_B F = \overline{\lim}_{\delta \to 0} \frac{\ln N_{\delta}(F)}{-\ln \delta}$$

• Če $\underline{\dim}_B F = \overline{\dim}_B F$, potem skupno število imenujemo **Škatlasta dimenzija** množice F, tj.

$$\dim_B F = \lim_{\delta \to 0} \frac{\ln N_{\delta}(F)}{-\ln \delta}$$

Fraktalne dimenzije

Ruslan Urazbakhtir

Uvo

Opomba o teor mere Podobnostna

Podobnostna dimenzija

Hausdorffova dimenzija

Hausdorffova mera

dimenzija Lastnosti

dimenzije Primeri računa

Škatlasta

Ekvivalentne definicije

Relacija med Hausdorffovo in škatlasto dimenzij

astnosti škatlast Iimenzije

Opomba

- Upoštevamo, da je $\delta > 0$ dovolj majhen, da $-\ln \delta > 0$.
- Da nimamo težav ln ∞ ali ln 0, obravnavamo le omejeni neprazni množici.

Škatlasta dimenzija (ekvivalentne oblike)

Fraktalne dimenzije

Kuslan Urazbakhti

Uvo

Opomba o teori mere Podobnostna dimenzija

Hausdorffova dimenzija

Hausdorffova mera Hausdorffova dimenzija

Lastnosti Hausdorffove dimenzije Primeri računanja Hausdorffove

Škatlasta dimenzija Ekvivalentne

> **definicije** Relacija med Hausdorffovo in škatlasto dimenzijc Lastnosti škatlaste

Definicija

Naj bo $F \subseteq \mathbb{R}^n$ omejena in neprazna. **Škatlasta dimenzija** množice F je

$$\dim_B F = \lim_{\delta \to 0} \frac{\ln N_\delta(F)}{-\ln \delta}$$

kjer je $N_{\delta}(F)$ lahko:

- lacksquare najmanjše število množic s premerom kvečjemu δ , ki pokrivajo F;
- najmanjše število zaprtih krogel z radijem δ , ki pokrivajo F;
- najmanjše število zaprtih kvadrov s stranico δ , ki pokrivajo F;
- število δ -mreža kvadrov, ki sekajo F;
- največje število disjunktnih zaprtih krogel z radijem δ in središči na množici F.

Škatlasta dimenzija (ekvivalentne oblike)

Fraktalne dimenzije

Kuslan Urazbakhtir

Uvo

Opomba o teor mere Podobnostna dimenzija

Hausdorffova dimenzija

Hausdorffova mera Hausdorffova

dimenzija Lastnosti

dimenzije
Primeri računa:
Hausdorffove

Škatlasta

Ekvivalentne definicije

Relacija med Hausdorffovo in škatlasto dimenzijo

Opomba

- Lahko nadaljujemo ta seznam. V praksi izberimo najbolj relevanten za podano podmnožico.
- V definiciji $\delta \to 0$ lahko nadomestimo s poljubnim padajočim zaporedjem δ_k , za katero velja:

$$\lim_{k\to\infty}\delta_k=0$$

δ -mreža

Fraktalne dimenzije

Ruslan Urazbakhtii

Uvo

Kaj so fraktali?

Opomba o teoriji mere

Podobnostna dimenzija

Hausdorffova

Hausdorffova mera

Hausdorffova

dimenzija

Lastnosti Ll=----l=--ff---

Hausdorrrov dimenzije

Primeri račun

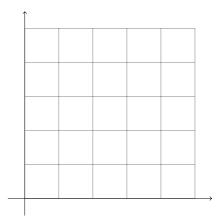
Škatlasta

Ekvivalentne

Relacija med Hausdorffovo in škatlasto dimenzi

> .astnosti škatlaste limenzije

$$\mathrm{dim}_B F = \lim_{\delta \to 0} \frac{\ln N_\delta(F)}{-\ln \delta}$$



Disjunktne zaprte krogle

Fraktalne dimenzije

Ekvivalentne definiciie

$\mathrm{dim}_B F = \lim_{\delta \to 0} \frac{\ln \mathit{N}_\delta(F)}{-\ln \delta}$

Škatlasta dimenzija Cantorjeve množice

Fraktalne dimenzije

Urazbakhtin

Uvo

Kaj so fraktali!

mere Podobnostna

-Hausdorffov

dimenzija

Hausdorffova mera

Lastnosti Hausdorffove

Primeri računanja Hausdorffove dimenzije

Škatlasta

Ekvivalentne definicije

Relacija med Hausdorffovo in škatlasto dimenzij

.astnosti škatlast Iimenzije

Primer

Naj bo C Cantorjeva množica, potem

$$\dim_H C = \log_3 2 = 0.6309\dots$$

Relacija med Hausdorffovo in škatlasto dimenzijo

Fraktalne dimenzije

Kuslan Urazbakhtir

Uvo

Kaj so frakta

Opomba o teorij mere

Podobnostna

Hausdorffova

Hausdorffova mer

Hausdorffova

Lastnosti

Hausdorffov

Primeri računanja Hausdorffove dimenzije

Škatlasta

Ekvivalentr

Relacija med Hausdorffovo in škatlasto dimenzijo

astnosti škatlaste

Trditev

 $\dim_H F \leq \underline{\dim}_B F \leq \dim_B F$

Relacija med Hausdorffovo in škatlasto dimenzijo

Fraktalne dimenzije

Kuslan Urazbakhtii

Uvo

Opomba o teorije nere Podobnostna

Hausdorffova

Hausdorffova mer

Hausdorffova dimenzija

Hausdorffove dimenzije

Hausdorffove dimenzije

dimenzija Ekvivalentr

Relacija med Hausdorffovo in škatlasto dimenzijo

Lastnosti škatlasti

Trditev

 $\dim_H F \leq \underline{\dim}_B F \leq \overline{\dim}_B F$

Opomba

V splošnem enakost NE velja, ne glede na to, da za nekatere lepe množice enakost drži.

Fraktalne dimenzije

Urazbakhti

Uvo

Kaj so frakt

Opomba o teorij mere

Podobnostna dimenzija

Hausdorffova Himenzija

Hausdorffova mera

Hausdorffova dimenzija

Lastnosti Hausdorffove dimenzije

Primeri računanja Hausdorffove dimenzije

Škatlasta

Ekvivalenti

Relacija mei Hausdorffov

Lastnosti škatlaste

Lastnosti škatlaste dimenzije (1) **Monotonost.** $\underline{\dim}_B$ in $\overline{\dim}_B$ sta monotoni.

Fraktalne dimenzije

Urazbakhti

Uvo

Kaj so fraktali? Opomba o teorije nere Podobnostna

Hausdorffova

<mark>dimenzija</mark> Hausdorffova m

Hausdorffova dimenzija

Lastnosti Hausdorffove

Primeri računa Hausdorffove

Škatlasta

Ekvivalent

Relacija me Hausdorffov

Lastnosti škatlaste

(1) **Monotonost.** $\underline{\dim}_B$ in $\overline{\dim}_B$ sta monotoni.

(2) Končna stabilnost. $\overline{\dim}_B$ je končno stabilna, tj.

$$\overline{\dim}_B(E \cup F) = \max(\overline{\dim}_B E, \overline{\dim}_B F).$$

Ta identiteta v splošnem NE velja za $\underline{\dim}_B$.

Fraktalne dimenzije

Urazbakhti

Uvo

Kaj so fraktali? Opomba o teorije nere Podobnostna Iimenzija

Hausdorffova

Hausdorffova dimenzija Lastnosti Hausdorffove dimenzije

Hausdorffove dimenzije

Ekvivalentn

Relacija med Hausdorffovo i škatlasto dime

Lastnosti škatlaste dimenzije

- (1) **Monotonost.** $\underline{\dim}_B$ in $\overline{\dim}_B$ sta monotoni.
- (2) Končna stabilnost. $\overline{\dim}_B$ je končno stabilna, tj.

$$\overline{\dim}_B(E \cup F) = \max(\overline{\dim}_B E, \overline{\dim}_B F).$$

Ta identiteta v splošnem NE velja za $\underline{\dim}_B$.

(3) **Dimenzija odprtih množic.** Naj bo $F \subseteq \mathbb{R}^n$ odprta podmnožica. Potem dim $_BF = n$.

Fraktalne dimenzije

Kusian Urazbakhti

Uvo

Kaj so fraktali? Opomba o teorije nere Podobnostna dimenzija

Hausdorffova dimenzija Hausdorffova r

Hausdorffova dimenzija Lastnosti Hausdorffove dimenzije Primeri računanja Hausdorffove dimenzije

dimenzija Ekvivalentn

Relacija med Hausdorffovo in škatlasto dimenzijo Lastnosti škatlaste (1) **Monotonost.** $\underline{\dim}_B$ in $\overline{\dim}_B$ sta monotoni.

(2) Končna stabilnost. $\overline{\dim}_B$ je končno stabilna, tj.

$$\overline{\dim}_B(E \cup F) = \max(\overline{\dim}_B E, \overline{\dim}_B F).$$

Ta identiteta v splošnem NE velja za $\underline{\dim}_B$.

- (3) **Dimenzija odprtih množic.** Naj bo $F \subseteq \mathbb{R}^n$ odprta podmnožica. Potem $\dim_B F = n$.
- (4) **Dimenzija gladkih podmnogoterosti.** Naj bo $F \subseteq \mathbb{R}^n$ gladka podmnogoterost dimenzije m, potem dim $_BF = m$.

Fraktalne dimenzije

Ruslan Urazbakhtir

Uvo

Kaj so frakta

mere

Podobnostna dimenzija

Hausdorffova dimenzija

Hausdorffova mera

dimenzija

Hausdorffove dimenzije

Primeri računanj Hausdorffove dimenzije

Škatlasta

Ekvivalent

Relacija med Hausdorffow

škatlasto dimenzijo Lastnosti škatlaste

.astnosti škatlaste Iimenzije

Trditev

Naj bo $F \subseteq \mathbb{R}^n$ omejena in neprazna. Velja:

- $\overline{\dim}_B \operatorname{Cl} F = \overline{\dim}_B F.$

Fraktalne dimenzije

Ruslan Urazbakhtii

Uvo

Kaj so frakta

mere . . .

Podobnostna dimenzija

Hausdorffova dimenzija

Hausdorffova mera

dimenzija Lastnosti Hausdorffove

Primeri računan Hausdorffove

Škatlasta dimenzija

Ekvivalent

Relacija med Hausdorffovo

Lastnosti škatlaste

Trditev

Naj bo $F \subseteq \mathbb{R}^n$ omejena in neprazna. Velja:

- $\overline{\dim}_B \operatorname{Cl} F = \overline{\dim}_B F.$

Posledica

V splošnem

$$\dim_B \bigcup_{i=1}^{\infty} F_i \neq \sup_{1 \le i < \infty} (\dim_B F_i)$$

Fraktalne dimenzije

Lastnosti škatlaste

dimenzije

Ali bomo še vedno imeli težave, če bomo gledali le zaprte množice?

Fraktalne dimenzije

Urazbakhti

Uvoc

Kaj so frakta

mere o teori

Podobnostna dimenzija

Hausdorffova dimenziia

Hausdorffova mera

dimenzija Lastnosti

dimenzije Primeri računanja Hausdorffove

Škatlasta

Ekvivalenti

Relacija med Hausdorffovo

škatlasto dimenzijo Lastnosti škatlaste

Lastnosti škatlaste dimenzije Ali bomo še vedno imeli težave, če bomo gledali le zaprte množice? Bomo...

Fraktalne dimenzije

Urazbakhtii

Uvo

Kaj so fraktal

Opomba o teorije mere

Podobnost dimenzija

Hausdorffova dimenzija

Hausdorffova mera Hausdorffova

dimenzija Lastnosti

dimenzije

Primeri račun Hausdorffove

Škatlasta

Ekvivalentr

Relacija med Hausdorffovo

Lastnosti škatlaste

Ali bomo še vedno imeli težave, če bomo gledali le zaprte množice?

Primer

Naj bo $F = \left\{ \frac{1}{n} \mid n \in \mathbb{N} \right\} \cup \{0\}.$

F je kompaktna množica z dim $_BF = \frac{1}{2}$.

Od kod pride ta težava?

Fraktalne dimenzije

Urazbakhtii

Uvo

Opomba o teorije mere Podobnostna dimenzija

Hausdorffova dimenzija

Hausdorffova mera

Lastnosti Hausdorffove

Primeri računan Hausdorffove dimenzije

dimenzija

definicije

Hausdorffovo ir škatlasto dimer

Lastnosti škatlaste dimenzije

Opomba

- Pri računanju Hausdorffove dimenzije privzamemo, da množice pokritja $\{U_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ imajo različne velikosti.
- Pri računanju škatlaste dimenzije pa je velikost množic pokritja $\{U_i\}_{1 < i < k}$ vedno fiksna (je enaka δ).

Od kod pride ta težava?

Fraktalne dimenzije

Urazbakhti

Uvo

Opomba o teor mere Podobnostna dimenzija

Hausdorffova dimenzija

Hausdorffova mera Hausdorffova dimenzija

Hausdorffove dimenzije Primeri računanj

Škatlast

Ekvivalentn

Relacija me Hausdorffov

> Lastnosti škatlaste dimenzije

Opomba

- Pri računanju Hausdorffove dimenzije privzamemo, da množice pokritja $\{U_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ imajo različne velikosti.
- Pri računanju škatlaste dimenzije pa je velikost množic pokritja $\{U_i\}_{1 < i < k}$ vedno fiksna (je enaka δ).
- Se nam zdi, da bi belo smiselno definirati mero

$$v(F) = \lim_{\delta \to 0} N_{\delta}(F) \delta^{s}$$

Povzetek o škatlasti dimenziji

Fraktalne dimenzije

Urazbakhti

Uvo

Kaj so frakta

Opomba o teoriji mere

Podobnostna dimenzija

Hausdorffova dimenzija

Hausdorffova mera Hausdorffova

dimenzija

Hausdorffove dimenzije

Hrimeri računanj Hausdorffove dimenzije

Škatlasta

Ekvivalent

Relacija med Hausdorffow

Lastnosti škatlaste dimenzije

- Škatlasta dimenzija je zelo uporabna v praksi.
- Pogosto se da dokazati, da je enaka Hausdorffovi.

Fraktalne dimenzije

Ruslan Urazbakhtir

Uvo

Kaj so fraktali?

mere

Podobnostna

Hausdorffova

dimenzija

Hausdorffova

Lastnosti

Hausdorffove dimenzije

Primeri računanja Hausdorffove dimenzije

Škatlasta

Ekvivalent

definicije

Hausdorffovo in škatlasto dimenzi

Lastnosti škatlaste dimenzije

Hvala za pozornost!