Fraktalne dimenzije

Ruslan Urazbakhtin

Fakulteta za matematiko in fiziko, Univerza v Ljubljani

6. maj 2025

„Much of the beauty of fractals is to be found in their mathematics“

— Kenneth Falconer

Kazalo

Kaj so fraktali?

Kaj so fraktali?

- Besedo „fraktal" je uvedel matematik Benoit Mandelbrot v svojem temeljnem eseju leta 1975. Izvira iz latinske besede „fractus".
- Besedo „fraktal" Mendelbrot je uporabljal za opis patoloških množic, ki niso bili usklajene z običajno evklidsko geometrijo.
- V svojem originalnem eseju Benoit Mendelbrot je definiral fraktal kot množico, ki ima Hausdorffovo dimenzijo strogo večjo od njene topološke dimenzije.

Kaj so fraktali?

Če rečemo, da je neka množica F fraktal, potem si mislimo, da

1. F ima fino strukturo, tj. podrobnosti se vidijo vedno enako (neodvisno od skale);
2. F je dovolj nenaravna, da je ne moremo opisat s pomocjo elementarne geometrije tako lokalno kot globalno;
3. F včasih ima samopodobno obliko;
4. Običajno je fraktalna dimenzija F večja od njene topološke dimenzije;
5. V večini primerov je F definirana na zelo preprost način, običajno rekurzivno.

Zakaj potrebujemo fraktalno dimenzijo?

- Metode iz evklidske geometrije/analize niso dovolj, da opišemo lastnosti fraktalov.
- Fraktalna geometrija nam ponuja osnovno konstrukcijo za obravnavo množic, ki izgledajo nekako nenaravno.
- Zelo na grobo povedano nam dimenzija množice pove, koliko prostora ta zavzema v ambientnem prostoru.
- Dimenzija meri kompleksnost množice na poljubno majhnih skalah ter opisuje nekatere njene geometrijske in topološke lastnosti.

Mera

- Če želimo govoriti o fraktalnih dimenzijah, moramo poznati osnovne ideje teorije mere.
- Bomo obravnavali le mere na $\mathbb{R}^n$.

Borelova σ-algebra

Definicija

Družina podmnožic Σ množice $\mathbb{R}^n$ je **σ-algebra**, če:

1. $\mathbb{R}^n \in \Sigma$;
2. Če je $A \in \Sigma$, potem $A^c \in \Sigma$;
3. Poljubna števna unija množic iz Σ je element Σ.

Borelova σ-algebra

Definicija

Družina podmnožic Σ množice $\mathbb{R}^n$ je ***σ*-algebra**, če:

1. $\mathbb{R}^n \in \Sigma$;
2. Če je $A \in \Sigma$, potem $A^c \in \Sigma$;
3. Poljubna števna unija množic iz Σ je element Σ.

Definicija

- Najmanjšo σ-algebro na $\mathbb{R}^n$, ki vsebuje vse odprte podmnožice $\mathbb{R}^n$, imenujemo **Borelova *σ*-algebra**.
- Podmnožica $A \subseteq \mathbb{R}^n$ je **Borelova**, če pripada Borelovi σ-algebri.

Borelova σ-algebra

Definicija

- Najmanjšo σ-algebro na $\mathbb{R}^n$, ki vsebuje vse odprte podmnožice $\mathbb{R}^n$, imenujemo **Borelova σ-algebra**.
- Podmnožica $A \subseteq \mathbb{R}^n$ je **Borelova**, če pripada Borelovi σ-algebri.

Opomba

- Vse odprte in vse zaprte množice so Borelovi.
- Poljubna števna unija (presek) odprtih (zaprtih) množic je Borelova množica.
- Vsi množici, ki smo jih bomo obravnavali, bodo Borelovi.

Mera na $\mathbb{R}^n$

Definicija

Preslikava $\mu : \mathcal{P}(\mathbb{R}^n) \to [0, \infty) \cup \{\infty\}$ je **mera** na $\mathbb{R}^n$, če

1. $\mu(\emptyset) = 0$;
2. Če je $A \subseteq B$, potem $\mu(A) \leq \mu(B)$;
3. Če je $\{A_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ števna družina podmnožic $\mathbb{R}^n$, potem
$$\mu\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) \leq \sum_{i=1}^{\infty} \mu(A_i)$$
4. Če je $\{A_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ števna družina paroma disjunktnih Borelovih podmnožic $\mathbb{R}^n$, potem
$$\mu\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) = \sum_{i=1}^{\infty} \mu(A_i)$$

Mera na $\mathbb{R}^n$

Definicija

Pravimo tudi, da je $\mu(A)$ **mera množice A**.

Opomba

- $\mu(A)$ lahko si predstavljamo kot „velikost" množice A, ki je izmerjena na nek način.
- 4. pogoj pravi, da če množico A razbijemo na števno mnogo paroma disjunktnih Borelovih množic, potem vsota mer delov je enaka mere celotne množice (ponavadi ga težko dokazati).

Primeri mer

- **Mera štetja.**

  Naj bo $A \subseteq \mathbb{R}^n$. Definiramo $\mu(A) = \begin{cases} n; & |A| = n \in \mathbb{N}, \\ \infty; & \text{sicer} \end{cases}$.

  Potem μ je mera na $\mathbb{R}^n$.

- **Točkasta masa.**

  Naj bo $a \in \mathbb{R}^n$, $A \subseteq \mathbb{R}^n$. Definiramo $\mu(A) = \begin{cases} 1; & a \in A, \\ 0; & \text{sicer} \end{cases}$.

  Potem μ je mera (porazdelitev mase) na $\mathbb{R}^n$.

Lebesgueva $\mathcal{L}^n$ mera

Lebesgueva $\mathcal{L}^n$ mera na $\mathbb{R}^n$ je posplošitev evklidskih pojmov „dolžina“, „ploščina“, „volumen“ itn. na večji razred množic.

Lebesgueva $\mathcal{L}^n$ mera

Naj bo $A = \{(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n \mid a_i \leq x_i \leq b_i\}$ kvader v $\mathbb{R}^n$, potem n-dim volumen množice A je

$$\mathrm{vol}^n(A) := (b_1 - a_1)(b_2 - a_2) \dots (b_n - a_n).$$

Definicija

Lebesgueva mera $\mathcal{L}^n : \mathcal{P}(\mathbb{R}^n) \to [0, \infty]$ je definirana s predpisom

$$\mathcal{L}^n(A) = \inf \left\{ \sum_{i=1}^{\infty} \mathrm{vol}^n(A_i) \mid A \subseteq \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \right\},$$

kjer so A_i kvadri.

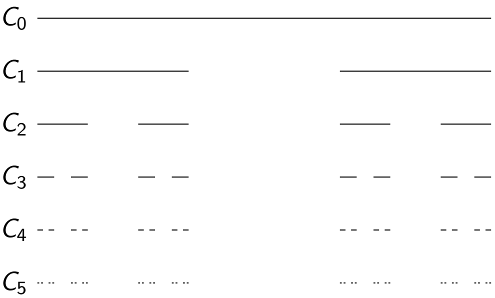
Lebesgueva $\mathcal{L}^n$ mera

Opomba

- Gledamo vsa pokritja množice A z kvadri in vzemimo najmanjši možen volumen.
- $\mathcal{L}^1$ je posplošitev pojma „dolžina“, $\mathcal{L}^2$ je posplošitev pojma „ploščina“ itn.

Cantorjeva množica C

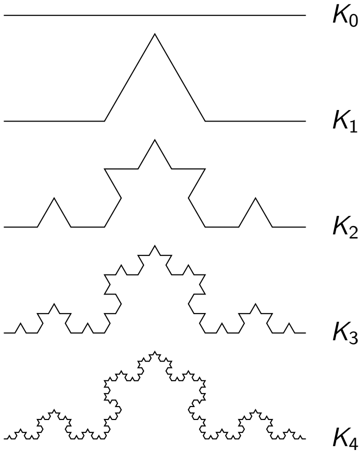
Izračunamo dolžino $\mathcal{L}^1(C)$ Cantorjeve množice $C = \bigcup_{n=1}^{\infty} C_n$.



Lema

Naj bosta $A, B \subseteq \mathbb{R}^n$ Borelovi, $A \subseteq B$. Naj bo μ mera na $\mathbb{R}^n$. Potem $\mu(B \setminus A) = \mu(B) - \mu(A)$.

Kochova krivulja K



Kaj je narobe z C in K?

Kaj je narobe z C in K?

- Očitno je, da je pri izbiri dimenzije nekaj narobe (torej z nami).
- Ni možnosti, da bi dobili kaj pametnega, če bi računali ploščino daljice ali šteli njene točke.

Ali obstaja boljša možnost za izbiro dimenzije?

Ali obstaja boljša možnost za izbiro dimenzije?

Obstaja.

Podobnostna dimenzija

- Kaj lahko povemo o masi daljice, če dvakrat zmanjšamo njeno dolžino?
- Kaj lahko povemo o masi kvadrata, če dvakrat zmanjšamo dolžino njegove stranice?

Podobnostna dimenzija

- Kaj lahko povemo o masi daljice, če dvakrat zmanjšamo njeno dolžino?
- Kaj lahko povemo o masi kvadrata, če dvakrat zmanjšamo dolžino njegove stranice?

Torej

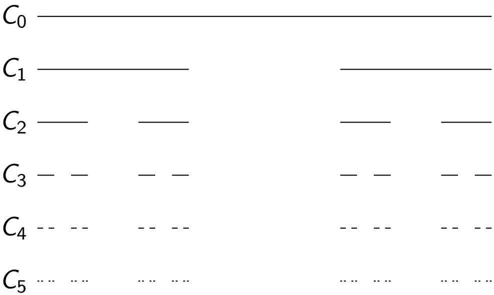
$$m(\lambda D) = \lambda^s m(D).$$

Podobnostna dimenzija

Torej

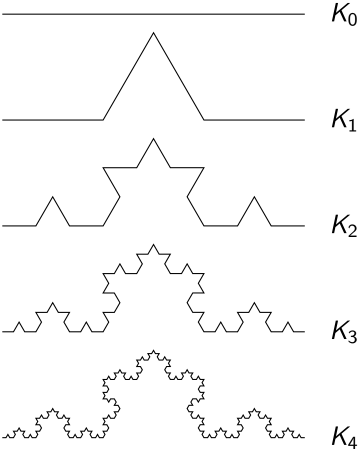
$$m(\lambda D) = \lambda^s m(D).$$

Kaj se zgodi z maso Cantorjeve množice, če trikrat zmanjšamo začetni interval?



Podobnostna dimenzija

Kaj se zgodi z maso Kochove krivulje, če trikrat zmanjšamo začetni interval?



Podobnostna dimenzija

Definicija

Naj bo množica $F \subseteq \mathbb{R}^n$ sestavljena iz m kopij same sebe, kjer je vsaka kopija zmanjšana za faktor r. Potem rečemo, da ima množica F **podobnastno dimenzijo** enako $\log_r m$.

Podobnostna dimenzija

Definicija

Naj bo množica $F \subseteq \mathbb{R}^n$ sestavljena iz m kopij same sebe, kjer je vsaka kopija zmanjšana za faktor r. Potem rečemo, da ima množica F **podobnastno dimenzijo** enako $\log_r m$.

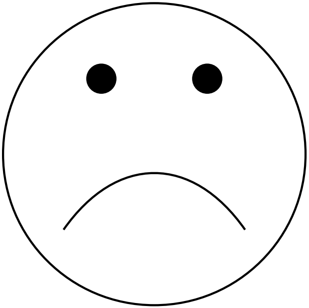
Spet imamo en problem...

Podobnostna dimenzija

Definicija

Naj bo množica $F \subseteq \mathbb{R}^n$ sestavljena iz m kopij same sebe, kjer je vsaka kopija zmanjšana za faktor r. Potem rečemo, da ima množica F **podobnastno dimenzijo** enako $\log_r m$.

Spet imamo en problem...
Samopodobnih množic je zelo malo. Recimo, že krožnica ni taka.

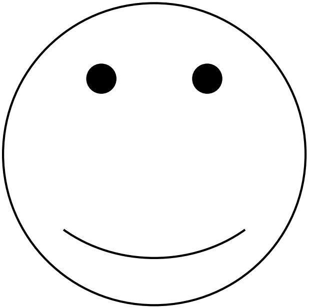


Podobnostna dimenzija

Definicija

Naj bo množica $F \subseteq \mathbb{R}^n$ sestavljena iz m kopij same sebe, kjer je vsaka kopija zmanjšana za faktor r. Potem rečemo, da ima množica F **podobnastno dimenzijo** enako $\log_r m$.

Spet imamo en problem...
Samopodobnih množic je zelo malo. Recimo, že krožnica ni taka.



Hausdorffova dimenzija

- Hausdorffova dimenzija izmed vseh „fraktalnih“ dimenzij, ki jih ljudje uporabljajo, je najbolj stara in verjetno najbolj pomembna.
- Lahko jo definiramo za poljubno množico in matematično je zelo priročna, ker je osnovana na meri, s katero lahko relativno preprosto kaj naredimo.
- Glavna pomanjkljivost je, da jo v večini situacij težko izračunati ali oceniti z numerični metodi.

Hausdorffova mera

Definicija

Naj bo $F \subseteq \mathbb{R}^n$. Naj bo $\{U_i\}$ števna družina množic iz $\mathbb{R}^n$, za katero velja:

1. $\forall i \in \mathbb{N} \,.\, 0 \leq |U_i| \leq \delta$;
2. $F \subseteq \bigcup_{i=1}^{\infty} U_i$.

Potem $\{U_i\}$ imenujemo **δ-pokritje** množice F.

Hausdorffova mera

Naj bo $F \subseteq \mathbb{R}^n$ in $s \geq 0$. Za vsak $\delta > 0$ definiramo

$$\mathcal{H}^s_\delta(F) = \inf \left\{ \sum_{i=1}^{\infty} |U_i|^s \mid \{U_i\} \text{ je } \delta\text{-pokritje } F \right\}$$

Hausdorffova mera

Naj bo $F \subseteq \mathbb{R}^n$ in $s \geq 0$. Za vsak $\delta > 0$ definiramo

$$\mathcal{H}^s_\delta(F) = \inf\left\{ \sum_{i=1}^{\infty} |U_i|^s \;\middle|\; \{U_i\} \text{ je } \delta\text{-pokritje } F \right\}$$

Ko $\delta \to 0$, razred možnih pokritij F se zmanjšuje, torej inf narašča, torej lahko definiramo:

$$\mathcal{H}^s(F) = \lim_{\delta \to 0} \mathcal{H}^s_\delta(F)$$

Ta limita vedno obstaja za vsako množico $F \subseteq \mathbb{R}^n$.

Hausdorffova mera

Naj bo $F \subseteq \mathbb{R}^n$ in $s \geq 0$. Za vsak $\delta > 0$ definiramo

$$\mathcal{H}^s_\delta(F) = \inf \left\{ \sum_{i=1}^{\infty} |U_i|^s \mid \{U_i\} \text{ je } \delta\text{-pokritje } F \right\}$$

Ko $\delta \to 0$, razred možnih pokritij F se zmanjšuje, torej inf narašča, torej lahko definiramo:

$$\mathcal{H}^s(F) = \lim_{\delta \to 0} \mathcal{H}^s_\delta(F)$$

Ta limita vedno obstaja za vsako množico $F \subseteq \mathbb{R}^n$.
Število $\mathcal{H}^s(F)$ imenujemo ***s*-dim Hausdorffova mera** množice F.

Trditev

$\mathcal{H}^s$ je mera na $\mathbb{R}^n$.

Hausdorffova mera

Opomba

Hausdorffova mera je posplošitev Lebesgueve mere na necele dimenzije. Se da pokazati, da

$$\mathcal{H}^n(F) = \frac{1}{c_n}\mathcal{L}^n(F),$$

kjer je c_n volumen n-dim krogle z polmerom $\frac{1}{2}$, tj.

$$c_n = \frac{\pi^{(n/2)}}{\Gamma(n/2+1)}\left(\frac{1}{2}\right)^n$$

Lastnosti skaliranja

Definicija

Podobnostna preslikava z koeficientom podobnosti $c > 0$ je preslikava $P : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, za katero velja:

$$\forall x, y \in \mathbb{R}^n \,.\, |P(x) - P(y)| = c|x - y|$$

Lastnosti skaliranja

Naj bo $P : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ podobnostna preslikava z podobnostnim koeficientom $c > 0$. Naj bo $F \subseteq \mathbb{R}^n$.

Dobro poznamo lastnosti skaliranja dolžine, ploščine, volumna, npr.

- $\mathcal{L}^1(P_*(F)) = c\mathcal{L}^1(F)$
- $\mathcal{L}^2(P_*(F)) = c^2\mathcal{L}^2(F)$
- $\mathcal{L}^3(P_*(F)) = c^3\mathcal{L}^3(F)$

Ali velja enako tudi za $\mathcal{H}^s$?

Lastnosti skaliranja

Naj bo $P : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ podobnostna preslikava z podobnostnim koeficientom $c > 0$. Naj bo $F \subseteq \mathbb{R}^n$.

Trditev

$$\mathcal{H}^s(P_*(F)) = c^s \mathcal{H}^s(F)$$

Lastnosti skaliranja

Definicija

Naj bosta $X \subseteq \mathbb{R}^n$ in $Y \subseteq \mathbb{R}^m$. Preslikava $f : X \to Y$ je **Höldorjeva** stopnje $\alpha > 0$, če

$$\exists c > 0 \,.\, \forall x, y \in X \,.\, |f(x) - f(y)| \leq c|x - y|^{\alpha}$$

Lastnosti skaliranja

Definicija

Naj bosta $X \subseteq \mathbb{R}^n$ in $Y \subseteq \mathbb{R}^m$. Preslikava $f : X \to Y$ je **Höldorjeva** stopnje $\alpha > 0$, če

$$\exists c > 0 \,.\, \forall x, y \in X \,.\, |f(x) - f(y)| \leq c|x - y|^\alpha$$

Trditev

Naj bo $F \subseteq \mathbb{R}^n$ in $f : F \to \mathbb{R}^n$ Höldorjeva preslikava stopnje $\alpha > 0$. Potem za vsak $s \geq 0$ velja:

$$\mathcal{H}^{s/\alpha}(f_*(F)) \leq c^{s/\alpha}\mathcal{H}^s(F)$$

Lastnosti skaliranja

Trditev

Naj bo $F \subseteq \mathbb{R}^n$ in $f : F \to \mathbb{R}^n$ Höldorjeva preslikava stopnje $\alpha > 0$. Potem za vsak $s \geq 0$ velja:

$$\mathcal{H}^{s/\alpha}(f_*(F)) \leq c^{s/\alpha}\mathcal{H}^s(F)$$

Posledica

Če je $f : F \to \mathbb{R}^n$ Lipschitzova, tj.

$$\exists c > 0 \,.\, \forall x, y \in X \,.\, |f(x) - f(y)| \leq c|x - y|,$$

potem

$$\mathcal{H}^s(f_*(F)) \leq c^s\mathcal{H}^s(F)$$

Hausdorffova dimenzija

Naj bo $F \subseteq \mathbb{R}^n$. Gledamo funkcijo

$$\begin{aligned} \mathcal{H}_F : [0,\infty) &\longrightarrow [0,\infty] \\ s &\longmapsto \mathcal{H}^s(F) \end{aligned}$$

Lema

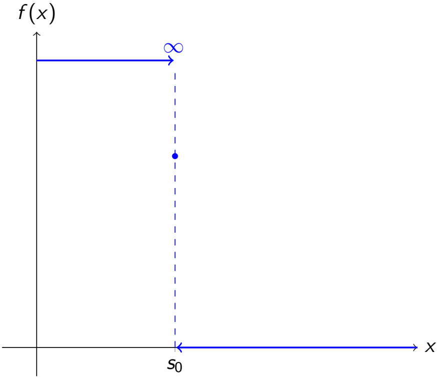
Naj bo $F \subseteq \mathbb{R}^n$. Če je $\mathcal{H}^s(F) < \infty$, potem $\mathcal{H}^t(F) = 0$ za vse $t > s$.

Hausdorffova dimenzija

Lema

Naj bo $F \subseteq \mathbb{R}^n$. Če je $\mathcal{H}^s(F) < \infty$, potem $\mathcal{H}^t(F) = 0$ za vse $t > s$.

Oglejmo si graf funkcije $\mathcal{H}_F$:



Hausdorffova dimenzija

Definicija

Hausdorffova dimenzija množice $F \subseteq \mathbb{R}^n$ je

$$\dim_H F = \inf\{s \geq 0 \mid \mathcal{H}^s(F) = 0\} = \sup\{s \geq 0 \mid \mathcal{H}^s(F) = \infty\}$$

Hausdorffova dimenzija

Definicija

Hausdorffova dimenzija množice $F \subseteq \mathbb{R}^n$ je

$$\dim_H F = \inf \{s \geq 0 \mid \mathcal{H}^s(F) = 0\} = \sup \{s \geq 0 \mid \mathcal{H}^s(F) = \infty\}$$

Opomba

- Po dogovoru $\sup(\emptyset) = 0$.
- Ta dimenzija je definirana za poljubno podmnožico $\mathbb{R}^n$.

Hausdorffova dimenzija

Definicija

Hausdorffova dimenzija množice $F \subseteq \mathbb{R}^n$ je

$$\dim_H F = \inf\{s \geq 0 \mid \mathcal{H}^s(F) = 0\} = \sup\{s \geq 0 \mid \mathcal{H}^s(F) = \infty\}$$

Imamo:

$$\mathcal{H}^s(F) = \begin{cases} \infty; & 0 \leq s < \dim_H F \\ 0; & s > \dim_H F; \end{cases}$$

Če je $s = \dim_H F$, potem $\mathcal{H}^s(F)$ lahko 0, ∞ ali $a \in \mathbb{R}$.

Hausdorffova dimenzija krogle B^n

Lema

$$\dim_H B^n = n$$

Hausdorffova dimenzija krogle B^n

Lema

$$\dim_H B^n = n$$

Spomnimo se

Lema

$$\mathcal{H}^n(F) = \frac{1}{c_n}\mathcal{L}^n(F),$$

kjer je c_n volumen n-dim krogle z polmerom $\frac{1}{2}$, tj.

$$c_n = \frac{\pi^{(n/2)}}{\Gamma(n/2+1)}\left(\frac{1}{2}\right)^n$$

Lastnosti Hausdorffove dimenzije

(1) **Monotonost.** Če je $E \subseteq F$, potem $\dim_H E \leq \dim_H F$.

Lastnosti Hausdorffove dimenzije

(1) **Monotonost.** Če je $E \subseteq F$, potem $\dim_H E \leq \dim_H F$.

(2) **Števna stabilnost.** Če je $F_1, F_2, \ldots$ števno zaporedje množic, potem

$$\dim_H \bigcup_{i=1}^{\infty} F_i = \sup_{1 \leq i < \infty} (\dim_H F_i)$$

Lastnosti Hausdorffove dimenzije

(1) **Monotonost.** Če je $E \subseteq F$, potem $\dim_H E \leq \dim_H F$.

(2) **Števna stabilnost.** Če je $F_1, F_2, \ldots$ števno zaporedje množic, potem

$$\dim_H \bigcup_{i=1}^{\infty} F_i = \sup_{1 \leq i < \infty} (\dim_H F_i)$$

(3) **Dimenzija števnih množic.** Če je F števna, potem $\dim_H F = 0$.

Lastnosti Hausdorffove dimenzije

(1) **Monotonost.** Če je $E \subseteq F$, potem $\dim_H E \leq \dim_H F$.

(2) **Števna stabilnost.** Če je $F_1, F_2, \ldots$ števno zaporedje množic, potem

$$\dim_H \bigcup_{i=1}^{\infty} F_i = \sup_{1 \leq i < \infty} (\dim_H F_i)$$

(3) **Dimenzija števnih množic.** Če je F števna, potem $\dim_H F = 0$.

(4) **Dimenzija odprtih množic.** Naj bo $F \subseteq \mathbb{R}^n$ odprta podmnožica. Potem $\dim_H F = n$.

Lastnosti Hausdorffove dimenzije

(1) **Monotonost.** Če je $E \subseteq F$, potem $\dim_H E \leq \dim_H F$.

(2) **Števna stabilnost.** Če je $F_1, F_2, \ldots$ števno zaporedje množic, potem

$$\dim_H \bigcup_{i=1}^{\infty} F_i = \sup_{1 \leq i < \infty} (\dim_H F_i)$$

(3) **Dimenzija števnih množic.** Če je F števna, potem $\dim_H F = 0$.

(4) **Dimenzija odprtih množic.** Naj bo $F \subseteq \mathbb{R}^n$ odprta podmnožica. Potem $\dim_H F = n$.

(5) **Dimenzija gladkih podmnogoterosti.** Naj bo $F \subseteq \mathbb{R}^n$ gladka podmnogoterost dimenzije m, potem $\dim_H F = m$. Posebej:

- Če je F gladka krivulja, potem $\dim_H F = 1$;
- Če je F gladka ploskev, potem $\dim_H F = 2$.

Lastnosti Hausdorffove dimenzije

Opomba

To so osnovne lastnosti, ki jih lahko zahtevamo od dimenzije, če želimo, da je ta res posplošitev običajne evklidske dimenzije.

Transformacijeske lastnosti Hausdorffove dimenzije

Trditev

Naj bo $F \subseteq \mathbb{R}^n$ in $f : F \to \mathbb{R}^n$ Höldorjeva preslikava stopnje $\alpha > 0$. Potem

$$\dim_H f_*(F) \leq \frac{1}{\alpha} \dim_H F$$

Transformacijeske lastnosti Hausdorffove dimenzije

Trditev

Naj bo $F \subseteq \mathbb{R}^n$ in $f : F \to \mathbb{R}^n$ Höldorjeva preslikava stopnje $\alpha > 0$. Potem

$$\dim_H f_*(F) \leq \frac{1}{\alpha} \dim_H F$$

Spomnimo se

Trditev

Naj bo $F \subseteq \mathbb{R}^n$ in $f : F \to \mathbb{R}^n$ Höldorjeva preslikava stopnje $\alpha > 0$. Potem za vsak $s \geq 0$ velja:

$$\mathcal{H}^{s/\alpha}(f_*(F)) \leq c^{s/\alpha} \mathcal{H}^s(F)$$

Transformacijeske lastnosti Hausdorffove dimenzije

Trditev

Naj bo $F \subseteq \mathbb{R}^n$ in $f : F \to \mathbb{R}^n$ Höldorjeva preslikava stopnje $\alpha > 0$. Potem

$$\dim_H f_*(F) \leq \frac{1}{\alpha} \dim_H F$$

Posledica

- Če je $f : F \to \mathbb{R}^n$ Lipschitzova, potem $\dim_H f_*(F) \leq \dim_H(F)$.

Transformacijeske lastnosti Hausdorffove dimenzije

Trditev

Naj bo $F \subseteq \mathbb{R}^n$ in $f : F \to \mathbb{R}^n$ Höldorjeva preslikava stopnje $\alpha > 0$. Potem

$$\dim_H f_*(F) \leq \frac{1}{\alpha} \dim_H F$$

Posledica

- Če je $f : F \to \mathbb{R}^n$ Lipschitzova, potem $\dim_H f_*(F) \leq \dim_H(F)$.
- Če je $f : F \to \mathbb{R}^n$ bi-Lipschitzova, tj.

$$\exists c_1, c_2 > 0 \,.\, \forall x, y \in X \,.\, c_1|x - y| \leq |f(x) - f(y)| \leq c_2|x - y|,$$

potem $\dim_H f_*(F) = \dim_H(F)$.

Transformacijeske lastnosti Hausdorffove dimenzije

Opomba

Posledica pove, da je $\dim_H$ invariantna glede na bi-Lipschitzeve preslikave. V posebnem, če sta množici imata različni Hausdorffovi dimenziji, potem ne obstaja bi-Lipschitzova preslikava med njima.

Topološke lastnosti Hausdorffove dimenzije

Trditev

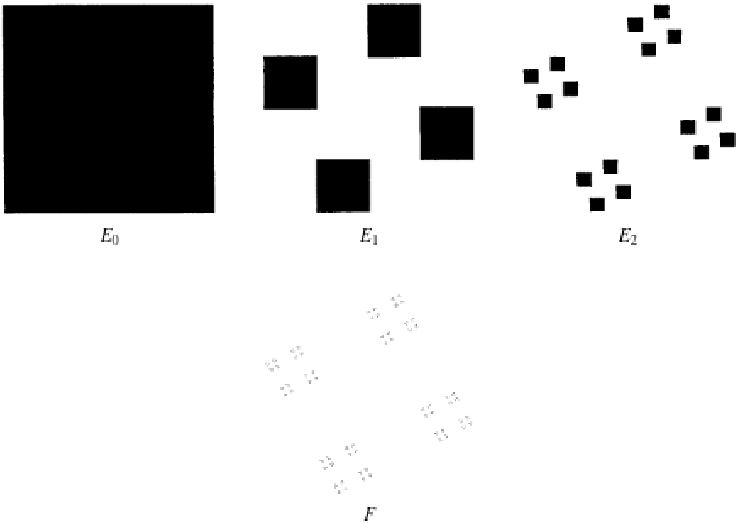
Naj bo $F \subseteq \mathbb{R}^n$. Če je $\dim_H F < 1$, potem je F ...

Topološke lastnosti Hausdorffove dimenzije

Trditev

Naj bo $F \subseteq \mathbb{R}^n$. Če je $\dim_H F < 1$, potem je F popolnoma nepovezana.

Hausdorffova dimenzija Cantorjeva praha



Hausdorffova dimenzija Cantorjeve množice in Kochove krivulje

Primer

Naj bo C Cantorjeva množica in K Kochova krivulja, potem

- $\dim_H C = \log_3 2 = 0.6309\ldots$
- $\dim_H K = \log_3 4 = 1.2618\ldots$

Druge vrste dimenzij

Opomba

- Hausdorffova dimenzija je osnova.
- Ni res, da vse definicije delujejo za vse množice.
- Osnovna ideja za vse dimenzije je „meritev“ v skali $\delta > 0$, tj. za vsak $\delta > 0$ merimo množico na način, ki ignorira nepravilnosti, ki so manjše od δ. Nato pa gledamo, kaj se zgodi v limiti $\delta \to 0$.

Škatlasta dimenzija

Definicija

Naj bo $f : \mathbb{R}_{>0} \to \mathbb{R}$ funkcija.

- **Spodnja limita** funkcije f ko gre x proti 0 je

$$\underline{\lim}_{x\to\infty} f(x) := \lim_{r\to 0} \left(\inf\{f(x) \mid 0 < x < r\}\right)$$

- **Zgornja limita** funkcije f ko gre x proti 0 je

$$\overline{\lim}_{x\to\infty} f(x) := \lim_{r\to 0} \left(\sup\{f(x) \mid 0 < x < r\}\right)$$

Škatlasta dimenzija

Naj bo $F \subseteq \mathbb{R}^n$ omejena in neprazna. Označimo z $N_\delta(F)$ najmanjšo število množic s premerom kvečjemu $\delta > 0$, ki jih potrebujemo za pokritje F.

Škatlasta dimenzija

Naj bo $F \subseteq \mathbb{R}^n$ omejena in neprazna. Označimo z $N_\delta(F)$ najmanjšo število množic s premerom kvečjemu $\delta > 0$, ki jih potrebujemo za pokritje F.

Definicija

- **Spodnja škatlasta dimenzija** množice F je

$$\underline{\dim}_B F = \underline{\lim}_{\delta \to 0} \frac{\ln N_\delta(F)}{-\ln \delta}$$

- **Zgornja škatlasta dimenzija** množice F je

$$\overline{\dim}_B F = \overline{\lim}_{\delta \to 0} \frac{\ln N_\delta(F)}{-\ln \delta}$$

Škatlasta dimenzija

Definicija

- **Spodnja škatlasta dimenzija** množice F je

$$\underline{\dim}_B F = \underline{\lim}_{\delta \to 0} \frac{\ln N_\delta(F)}{-\ln \delta}$$

- **Zgornja škatlasta dimenzija** množice F je

$$\overline{\dim}_B F = \overline{\lim}_{\delta \to 0} \frac{\ln N_\delta(F)}{-\ln \delta}$$

- Če $\underline{\dim}_B F = \overline{\dim}_B F$, potem skupno število imenujemo **Škatlasta dimenzija** množice F, tj.

$$\dim_B F = \lim_{\delta \to 0} \frac{\ln N_\delta(F)}{-\ln \delta}$$

Škatlasta dimenzija

Opomba

- Upoštevamo, da je $\delta > 0$ dovolj majhen, da $-\ln \delta > 0$.
- Da nimamo težav $\ln \infty$ ali $\ln 0$, obravnavamo le omejeni neprazni množici.

Škatlasta dimenzija (ekvivalentne oblike)

Definicija

Naj bo $F \subseteq \mathbb{R}^n$ omejena in neprazna. **Škatlasta dimenzija** množice F je

$$\dim_B F = \lim_{\delta \to 0} \frac{\ln N_\delta(F)}{-\ln \delta}$$

kjer je $N_\delta(F)$ lahko:

- najmanjše število množic s premerom kvečjemu δ, ki pokrivajo F;
- najmanjše število zaprtih krogel z radijem δ, ki pokrivajo F;
- najmanjše število zaprtih kvadrov s stranico δ, ki pokrivajo F;
- število δ-mreža kvadrov, ki sekajo F;
- največje število disjunktnih zaprtih krogel z radijem δ in središči na množici F.

Škatlasta dimenzija (ekvivalentne oblike)

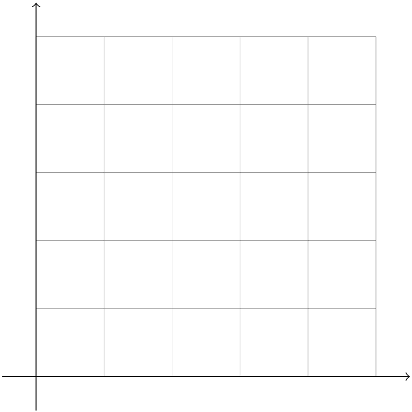
Opomba

- Lahko nadaljujemo ta seznam. V praksi izberimo najbolj relevanten za podano podmnožico.
- V definiciji $\delta \to 0$ lahko nadomestimo s poljubnim padajočim zaporedjem δ_k, za katero velja:

$$\lim_{k \to \infty} \delta_k = 0$$

δ-mreža

$$\dim_B F = \lim_{\delta \to 0} \frac{\ln N_\delta(F)}{-\ln \delta}$$



Disjunktne zaprte krogle

$$\dim_B F = \lim_{\delta \to 0} \frac{\ln N_\delta(F)}{-\ln \delta}$$

Škatlasta dimenzija Cantorjeve množice

Primer

Naj bo C Cantorjeva množica, potem

$$\dim_H C = \log_3 2 = 0.6309\ldots$$

Relacija med Hausdorffovo in škatlasto dimenzijo

Trditev

$$\dim_H F \leq \underline{\dim}_B F \leq \overline{\dim}_B F$$

Relacija med Hausdorffovo in škatlasto dimenzijo

Trditev

$$\dim_H F \leq \underline{\dim}_B F \leq \overline{\dim}_B F$$

Opomba

V splošnem enakost NE velja, ne glede na to, da za nekatere lepe množice enakost drži.

Lastnosti škatlaste dimenzije

(1) **Monotonost.** $\underline{\dim}_B$ in $\overline{\dim}_B$ sta monotoni.

Lastnosti škatlaste dimenzije

(1) **Monotonost.** $\underline{\dim}_B$ in $\overline{\dim}_B$ sta monotoni.

(2) **Končna stabilnost.** $\overline{\dim}_B$ je končno stabilna, tj.

$$\overline{\dim}_B(E \cup F) = \max(\overline{\dim}_B E, \overline{\dim}_B F).$$

Ta identiteta v splošnem NE velja za $\underline{\dim}_B$.

Lastnosti škatlaste dimenzije

(1) **Monotonost.** $\underline{\dim}_B$ in $\overline{\dim}_B$ sta monotoni.

(2) **Končna stabilnost.** $\overline{\dim}_B$ je končno stabilna, tj.

$$\overline{\dim}_B(E \cup F) = \max(\overline{\dim}_B E, \overline{\dim}_B F).$$

Ta identiteta v splošnem NE velja za $\underline{\dim}_B$.

(3) **Dimenzija odprtih množic.** Naj bo $F \subseteq \mathbb{R}^n$ odprta podmnožica. Potem $\dim_B F = n$.

Lastnosti škatlaste dimenzije

(1) **Monotonost.** $\underline{\dim}_B$ in $\overline{\dim}_B$ sta monotoni.

(2) **Končna stabilnost.** $\overline{\dim}_B$ je končno stabilna, tj.

$$\overline{\dim}_B(E \cup F) = \max(\overline{\dim}_B E, \overline{\dim}_B F).$$

Ta identiteta v splošnem NE velja za $\underline{\dim}_B$.

(3) **Dimenzija odprtih množic.** Naj bo $F \subseteq \mathbb{R}^n$ odprta podmnožica. Potem $\dim_B F = n$.

(4) **Dimenzija gladkih podmnogoterosti.** Naj bo $F \subseteq \mathbb{R}^n$ gladka podmnogoterost dimenzije m, potem $\dim_B F = m$.

Težave škatlaste dimenzije

Trditev

Naj bo $F \subseteq \mathbb{R}^n$ omejena in neprazna. Velja:

1. $\underline{\dim}_B \operatorname{Cl} F = \underline{\dim}_B F$.
2. $\overline{\dim}_B \operatorname{Cl} F = \overline{\dim}_B F$.

Težave škatlaste dimenzije

Trditev

Naj bo $F \subseteq \mathbb{R}^n$ omejena in neprazna. Velja:

1. $\underline{\dim}_B \operatorname{Cl} F = \underline{\dim}_B F$.
2. $\overline{\dim}_B \operatorname{Cl} F = \overline{\dim}_B F$.

Posledica

V splošnem

$$\dim_B \bigcup_{i=1}^{\infty} F_i \neq \sup_{1 \leq i < \infty} (\dim_B F_i)$$

Težave škatlaste dimenzije

Ali bomo še vedno imeli težave, če bomo gledali le zaprte množice?

Težave škatlaste dimenzije

Ali bomo še vedno imeli težave, če bomo gledali le zaprte množice? Bomo...

Težave škatlaste dimenzije

Ali bomo še vedno imeli težave, če bomo gledali le zaprte množice?

Primer

Naj bo $F = \left\{\frac{1}{n} \mid n \in \mathbb{N}\right\} \cup \{0\}$.
F je kompaktna množica z $\dim_B F = \frac{1}{2}$.

Od kod pride ta težava?

Opomba

- Pri računanju Hausdorffove dimenzije privzamemo, da množice pokritja $\{U_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ imajo različne velikosti.
- Pri računanju škatlaste dimenzije pa je velikost množic pokritja $\{U_i\}_{1\leq i\leq k}$ vedno fiksna (je enaka δ).

Od kod pride ta težava?

Opomba

- Pri računanju Hausdorffove dimenzije privzamemo, da množice pokritja $\{U_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ imajo različne velikosti.
- Pri računanju škatlaste dimenzije pa je velikost množic pokritja $\{U_i\}_{1\leq i\leq k}$ vedno fiksna (je enaka δ).
- Se nam zdi, da bi belo smiselno definirati mero

$$v(F) = \lim_{\delta\to 0} N_\delta(F)\delta^s$$

Povzetek o škatlasti dimenziji

- Škatlasta dimenzija je zelo uporabna v praksi.
- Pogosto se da dokazati, da je enaka Hausdorffovi.

Hvala za pozornost!