Analiza 2b

26. februar 2025

Kazalo

1 Hilbertovi prostori **3**

1.1 Vektorski prostori s skalarnim produktom 3

1.2 Hilbertovi prostori 3

1.3 Prostor $L^2([a,b])$ 4

1 Hilbertovi prostori

1.1 Vektorski prostori s skalarnim produktom

Naj bo X vektorski prostor nad $\mathbb{R}$ (ali nad $\mathbb{C}$).

Definicija. **Skalarni produkt** $\langle\ ,\ \rangle$ je preslikava $\langle\ ,\ \rangle : X \times X \to \mathbb{R}$ (oz. $\mathbb{C}$) za katero velja:

1. $\forall x \in X \,.\, \langle x, x\rangle \geq 0$;
2. $\forall x \in X \,.\, \langle x, x\rangle = 0 \Leftrightarrow x = 0$;
3. $\forall x, y \in X \,.\, \langle x, y\rangle = \overline{\langle y, x\rangle}$;
4. $\forall x, y, z \in X \,.\, \forall \lambda, \mu \in \mathbb{R}$ (oz. $\mathbb{C}$) $.\, \langle \lambda x + \mu y, z\rangle = \lambda \langle x, z\rangle + \mu \langle y, z\rangle$.

Opomba. 1. – 2. je **pozitivna definitnost** skalarnega produkta, 3. je **poševna simetričnost** (**simetričnost** nad $\mathbb{R}$), 4. je linearnost v prvem faktorju.

Trditev (Cauchy-Schwartzova neenakost)**.** Naj bo $\langle\ ,\ \rangle$ skalarni produkt na X. Velja:

$$\forall x, y \in X \,.\, |\langle x, y\rangle| \leq \sqrt{\langle x, x\rangle} \cdot \sqrt{\langle y, y\rangle} = ||x|| \cdot ||y||.$$

Dokaz. Nad $\mathbb{R}$: Definiramo $t \to \langle x + ty, x + ty\rangle = f(t) \geq 0$.
Nad $\mathbb{C}$: Naj bo $x, y \in X$. Obstaja $\alpha \in \mathbb{C}$, $|\alpha| = 1$, da $\langle x, y\rangle = \alpha \cdot |\langle x, y\rangle|$. □

Definicija. Norma na vektorskem prostoru X je preslikava $||\ || : X \to \mathbb{R}$ za katero velja:

1. $\forall x \in X \,.\, ||x|| \geq 0$;
2. $\forall x \in X \,.\, ||x|| = 0 \Leftrightarrow x = 0$;
3. $\forall \lambda \in \mathbb{R}$ (oz. $\mathbb{C}$) $.\, ||\lambda x|| = |\lambda| \cdot ||x||$;
4. Trikotniška neenakost: $\forall x, y \in X \,.\, ||x + y|| \leq ||x|| + ||y||$.

Trditev. Naj bo $(X, \langle\ ,\ \rangle)$ vektorski prostor s skalarnim produktom. Potem je $(X, ||\ ||)$, kjer je $\forall x \in X \,.\, ||x|| = \sqrt{\langle x, x\rangle}$, vektorski prostor z normo.

Dokaz. Preverimo lastnosti. Za trikotniško neenakost uporabimo CS neenakost. □

Trditev. Naj bo $(X, ||\ ||)$ vektorski prostor s normo. Potem je (X, d), kjer je $\forall x, y \in X \,.\, d(x, y) = ||x - y||$, metrični prostor.

Dokaz. Preverimo lastnosti. □

1.2 Hilbertovi prostori

Definicija. **Hilbertov prostor** je vektorski prostor X s skalarnim produktom $\langle\ ,\ \rangle$, ki je v metriki, porojeni iz skalarnega produkta, poln metrični prostor.

Opomba. $(X, \langle\ ,\ \rangle) \rightsquigarrow (X, ||\ ||) \rightsquigarrow (X, d)$, kjer je $\forall x, y \in X \,.\, d(x, y) = ||x - y||$.

Opomba. **Banachov prostor** je vektorski prostor X z normo $||\ ||$, ki je v metriki, porojeni iz norme, poln metrični prostor.

Zgled.

1. Naj bo $X = \mathbb{R}^n$. Definiramo skalarni produkt. Naj bo $x, y \in \mathbb{R}^n$, $x = (x_1 \ldots, x_n)$, $y = (y_1, \ldots, y_n)$. **Standardni skalarni produkt** je

$$x \cdot y = \sum_{k=1}^{n} x_k y_k.$$

Ta skalarni produkt nam da normo

$$||x|| = \sqrt{\sum_{k=1}^{n} x_k^2},$$

ki porodi metriko

$$d_2(x, y) = \sqrt{\sum_{k=1}^{n} (x_k - y_k)^2}.$$

Vemo, da je $(\mathbb{R}^n, d_2)$ poln metrični prostor. Torej $(\mathbb{R}^n, \cdot)$ Hilbertov prostor.

2. Na $\mathbb{R}^n$ lahko definiramo tudi druge norme, npr.
   - $||x||_\infty = \max\{|x_1|, \ldots, |x_n|\}$;
   - $||x||_1 = |x_1| + \ldots + |x_n|$.

   Te dve normi ne prideta iz skalarnega produkta, ker za njih ne velja paralelogramsko pravilo. $(\mathbb{R}^n, ||x||_\infty)$ in $(\mathbb{R}^n, ||x||_1)$ sta Banachova prostora.
3. Naj bo $X = \mathbb{C}^n$. Definiramo skalarni produkt. Naj bo $z, w \in \mathbb{C}^n,\ z = (z_1 \ldots, z_n),\ w = (w_1, \ldots, w_n)$. **Standardni skalarni produkt** je

$$z \cdot w = \sum_{k=1}^{n} z_k \overline{w_k}.$$

   Ta skalarni produkt nam da normo

$$||z|| = \sqrt{\sum_{k=1}^{n} |z_k|^2},$$

   ki porodi metriko

$$d_2(z, w) = \sqrt{\sum_{k=1}^{n} |z_k - w_k|^2}.$$

   Vemo, da je $(\mathbb{C}^n, d_2)$ poln metrični prostor. Torej $(\mathbb{C}^n, \cdot)$ Hilbertov prostor.

1.3 Prostor $L^2([a, b])$

Trditev. Naj bo $C([a, b])$ vektorski prostor nad $\mathbb{R}$. Potem je s predpisom

$$\forall f, g \in C([a, b])\,.\ \langle f,\, g\rangle = \int_a^b f(x)g(x)\, dx$$

definiran skalarni produkt na $C([a, b])$.

Dokaz. Preverimo lastnosti. □

Trditev. $(C([a, b]), \langle\ ,\ \rangle)$ ni Hilbertov prostor.

Dokaz. Definiramo $f_n(x) = \begin{cases} 1; & \frac{1}{n} \leq x \leq 1 \\ nx; & -\frac{1}{n} < x < \frac{1}{n} \\ -1; & -1 \leq x \leq -\frac{1}{n} \end{cases}$. Pokažemo, da je $(f_n)_n$ Cauchyjevo zaporedje v $C([a, b])$, ki nima limite. □

Definicija. Naj bo (M, d) metrični prostor. Pravimo, da lahko **napolnimo** prostor M, če obstaja prostor $(\overline{M}, \overline{d})$, za kateri velja:
1. $(\overline{M}, \overline{d})$ je poln metrični prostor;
2. $M \subseteq \overline{M}$;
3. $\overline{d}|_{M\times M} = d$;
4. M je gost v $\overline{M}$, tj. $\mathrm{Cl}\, M = \overline{M}$.

Prostoru $\overline{M}$ rečemo **napolnitev** prostora M.

Opomba. Ideja: $\overline{M}$ je prostor vseh limit Cauchyjevih zaporedij v M (+ kvocient).