1 ŠTEVILA

1. Naravna števila
   - Kaj so naravna števila. Množica naravnih števil.
   - **Peanovi aksoimi.** Aksiom popolne indukcije.
   - Operaciji na množici naravnih števil.
   - Urejenost množice naravnih števil.
2. Cela števila
   - Zakaj potrebujemo celi števili?
   - Množica celih števil.
   - Operacije na množice celih števil.
   - Urejenost množice celih števil. Ali je dobra?
3. Racionalna števila
   - Zakaj potrebujemo racionalna števila?
   - Ulomek. Kadar dva različna ulomka predstavljata isto racionalno število?
   - **Definicija.** Racionalno število. Oznaka.
   - Množica racionalnih števil.
   - Seštevanje in množenje racionalnih števil. Ali sta dobro definirani?
   - Ali na vsakem odprtem intervalu (a, b), $a, b \in \mathbb{Q}$ leži racionalno število? Ali racionalna števila napolnijo številsko premico?
4. Lastnosti računskih operacij
   - Aksiomi seštevanja.
   - Kako rečemo množice A z operacijo $+$, ki izpolnjuje aksiome seštevanja?
   - **Trditev.** Naj bo število $a \in A$. Koliko nasprotnih števil lahko ima a?
   - **Trditev.** Pravilo krajšanja za seštevanje.
   - **Posledica.** Ali je $-0 = 0$?
     - **Dokaz.** Vse dokažemo z uporabo aksiom.
   - **Definicija.** Odštevanje. Ali je asociativno oz. komutativno? Ali je $(A, -)$ Abelova?
   - Aksiomi množenja.
   - Kako rečemo množice $A \setminus \{0\}$ z operacijo $\cdot$, ki izpolnjuje aksiome množenja?
   - **Trditev.** Naj bo število $a \in A$, $a \neq 0$. Koliko obratnih števil lahko ima a?
   - **Trditev.** Pravilo krajšanja za množenje.
   - **Posledica.** Ali je $1^{-1} = 1$?
     - **Dokaz.** Vse dokažemo z uporabo aksiom.
   - Aksioma polja.
   - Kako rečemo množice $(A, +, \cdot)$, ki izpolnjuje aksiome seštevanja, množenja in polja?
   - Aksioma urejenosti.
   - Kako rečemo množice $(A, +, \cdot, <)$, ki izpolnjuje aksiome seštevanja, množenja, polja in urejenosti?
   - *Primer.* Ali je $(\mathbb{Q}, +, \cdot, <)$ urejeni komutativni obseg?
   - **Definicija.** Urejenost v urejenem komutativnem obsegu.
   - **Trditev.** Naj bo A urejeni obseg. Ali je 1 pozitivno število? Ali ima A neskončno elementov?
     - **Dokaz.** (1) Enostavno s protislovjem z uporabo aksiom.
       (2) Poglejmo vsoto vsih pozitivnih členov.
   - **Trditev.** Kaj sledi iz aksiome $A11$ za poljubni števili $a, b \in A$?
   - **Trditev.** 4 lastnosti relacije $<$.
     - **Dokaz.** Definicija urejenosti in aksiomi.
   - **Definicija.** Relacija $\geq$.

5. Dedekindov aksiom in realna števila

- Realna števila
  - Zakaj potrebujemo realna števila?
  - *Primer.* Ali je rešitev enačbe $x^2 = 2$ racionalno število?
  - Dedekindov pristop za definicijo realnega števila.
  - **Definicija.** Rez.
  - *Primer.* $A = \{p \in \mathbb{Q};\ p < 0\}$. Ali je A rez?
  - **Definicija.** Množica realnih števil.
  - **Trditev.** Preslikava, ki vloži množico racionalnih števil v množico realnih števil. Ali je injektivna?
  - **Definicija.** Vsota realnih števil. Oznaka.
  - **Trditev.** Ali je vsota realnih števil realno število?
    - **Dokaz.** Pokažemo, da je rez.
  - **Definicija.** Pozitivno realno število.
  - **Definicija.** Produkt realnih števil.
  - **Trditev.** $(\mathbb{R}, +, \cdot, <)$ izpolnjuje aksiome $A1 - A4$.
    - **Dokaz.** Preverimo aksiome z uporabo definicji reza.
      Enota je 0^*, inverz od A je $-A = \{p \in \mathbb{Q};\ \text{obstaja } r \in \mathbb{Q}, r > 0, -p - r \notin A\}$.
  -
  - **Trditev.** $(\mathbb{R}, +, \cdot, <)$ izpolnjuje aksiome $A1 - A12$.
  - **Trditev.** Ali je urejeni obseg $\mathbb{R}$ vsebuje urejeni obseg $\mathbb{Q}$ kot podobseg? Zakaj?
    - **Dokaz.** Čemu je enako $(p+q)^*$, $(p \cdot q)^*$ in kadar je $p < q$, $p, q \in \mathbb{Q}$?
- Dedekindov aksiom
  - **Definicija.** Navzgor (navzdol) omejena množica. Zgornja (spodnja) meja množice.
  - **Definicija.** Natančna zgornja/spodnja meja množice (supremum/infimum). Kaj natančno velja za supremum/infimum?
  - **Definicija.** Maksimum/minimum množice.
  - *Primer.* Kako sta povezana maksumum in supremum množice?
  - *Primer.* Določi supremum množice, če obstaja.
    - $B = \{x \in \mathbb{Q},\ x < 0\} \subset \mathbb{Q}$.
    - $C = \{x \in \mathbb{Q},\ x^2 < 0\} \subset \mathbb{Q}$.
  - **Dedekindov aksiom.**
  - *Opomba.* Ali je $\mathbb{Q}$ izpolnjuje Dedekindov aksiom?
  - **Izrek.** Ali je vsaka navzgor omejena podmnožica v $\mathbb{R}$ ima supremum?
    - **Dokaz.** Izberimo poljubno neprazno navzgor omejeno podmnožico $\mathcal{A}$ v $\mathbb{R}$. Definiramo $C := \bigcup_{A \in \mathcal{A}} A$. Pokažemo, da je $C \in \mathbb{R}$ in $C = \sup \mathcal{A}$.
  - **Posledica.** Ali je vsaka navzdol omejena podmnožica v $\mathbb{R}$ ima infimum?
  - **Posledica.** Ali je $\mathbb{R}$ izpolnjuje Dedekindov aksiom?
  - **Izrek.** Ali je $(\mathbb{R}, +, \cdot, <)$ izpolnjuje aksiome $A1 - A13$? Ali vsebuje $\mathbb{Q}$ kot podobseg?
- Posledice Dedekindovega aksioma
  - **Posledica 1.** Ali je množica celih števil navzgor omejena?
    - **Dokaz.** Če je $M = \sup \mathbb{Z}$, potem $M - 1$ ni $\sup \mathbb{Z}$.
  - **Posledica 2.** Ali za vsak $a \in \mathbb{R}$ obstaja $b \in \mathbb{Z}$, da velja $b > a$?
    - **Dokaz.** Protislovje s prvo posledico.
  - **Posledica 3.** Arhimedska lastnost.
    - **Dokaz.** Sledi iz posledice 2.
  - **Posledica 4.** Naj bo $a \in \mathbb{R}, a > 0$. Ali obstaja $n \in \mathbb{N}$ za katero valja $\frac{1}{n} < a$?
    - **Dokaz.** Sledi iz posledice 2.
  - **Posledica 5.** Ali je $\mathbb{Q}$ povsod gosta v $\mathbb{R}$?
    - **Dokaz.** Definicija realnega števila.
- Intervali
  - **Definicija.** Zaprti (odprti) interval. Polodprti interval. Neskončni intervali.
  - **Definicija.** Naj bo $a \in \mathbb{R}$. ϵ-okolica števila a. Okolica števila a.

- Decimalni ulomki
  - Ali vsakemu realnemu številu lahko priredimo neskončen decimanli zapis?
  - Množica decimalnih približkov števila x.
  - **Trditev.** Čemu je enak supremum množice decimalnih približkov števila x?
    - **Dokaz.** Po konstrukciji x je zgornja meja. Recimo, da je $y = \sup \mathcal{A} < x$. Potem obstaja $p \in \mathbb{N}$, da $x - y > \frac{1}{10^p}$. Vzemimo $z = n_0 + \frac{n_1}{10} + \ldots + \frac{n_p}{10^p}$ in izračunamo $x - z$.
  - **Definicija.** Zapis števila x kot neskončen decimalni ulomek.
  - **Trditev.** Ali je zapis števila $x \in \mathbb{R}$ kot neskončen decimalni ulomek enoličen? Kaj velja za dva različna zapisa števila x?
    - **Dokaz.** (1) Naj bo $\mathcal{A}$ množica decimalnih približkov števila x. Pokažemo, da je y natančna zgornja meja od $\mathcal{A}$ tako, da pokažemo, da $y - \frac{1}{10^p}$ ni zgornja meja za noben $pin\mathbb{N}$.
      (2) Obstaja najmanjši indeks $k \in \mathbb{N}_0 :\ n_k \neq m_k$. Recimo, da $n_k < m_k$. Pokažemo, da edina možnost je $m_k = n_k + 1$ in da $m_{k+l} = 0$ za vse $l \in \mathbb{N}$ in da $n_{k+j} = 9$ za vse $j \in \mathbb{N}$.
  - **Trditev.** Karakterizacija racionalnega števila (decimalni zapis).
    - **Dokaz.** ($\Rightarrow$) Iz periodičnega decimalnega zapisa dobimo ulomek.
      ($\Leftarrow$) Vemo, da $x \in \mathbb{Q} \Rightarrow x = \frac{m}{n}$. Pogledamo ostanki pri deljenju.
- Uporaba Dedekinovega aksioma za uvedbo korenov in logaritma
  - **Izrek.** Naj bo $x \in \mathbb{R},\ x > 0,\ n \in \mathbb{N}$. Koliko rešitev ima enačba $y^n = x$?
  - **Izrek.** Naj bo $x \in \mathbb{R},\ x > 0$ in $b \in \mathbb{R},\ b > 0,\ b \neq 1$. Koliko rešitev ima enačba $b^y = x$?
- Absolutna vrednost
  - **Definicija.** Absolutna vresnost števila $x \in \mathbb{R}$.
  - **Trditev.** 8 lastnosti absolutne vrednosti.
  - **Posledica.** Oceni $||x| - |y||$ in $|x_1 + x_2 + \ldots + x_n|$.
    - **Dokaz.** Najprej pokažemo, da $|x - y| \leq |x| + |y|$, nato pa pišemo $|x| = |(x + y) - y|$.

6. Kompleksna števila
    - Zakaj potrebujemo kompleksna števila?
    - **Definicija.** Kompleksno število. Množica kompleksnih števil.
    - *Opomba.* Kadar sta kompleksna števila enaKa? Seštevanje in množenje kompleksnih števil.
    - **Izrek.** Ali je $(\mathbb{C}, +, \cdot)$ polje?
        - **Dokaz.** Preverimo aksiome $A1 - A8$.
    - *Opomba.* Ali lahko v $\mathbb{C}$ vpeljamo ureditve, za kateri bi bila urejeni obseg?
    - **Trditev.** Preslikava, ki vloži množico realnih števil v množico kompleksnih števil. Ali je injektina? S čim lahko enačimo urejene pare oblike $(a, 0)$? Zakaj?
    - **Definicija.** Imaginarna enota.
    - *Opomba.* Čemu je enako i^2? Algebraični zapis kompleksnega števila.
    - **Definicija.** Naj bo $z \in \mathbb{C}$. Realni del in imaginarni del z. Konjugirano število z. Absolutna vresnost z.
    - **Trditev.** 2 lastnosti konjugiranja. Čemu je enako $\mathrm{Re}z$ in $\mathrm{Im}z$? Čemu je enako $|z|^2, z \in \mathbb{C}$?
        - **Dokaz.** Poračunamo.
    - **Trditev.** 6 lastnosi absolutne vrednosti kompleksnega števila.
        - **Dokaz.** Poračunamo.
    - **Izrek.** Osnovni izrek algebre. [Brez dokaza]

◦ Geometrijska interpretacija kompleksnega števila
    - Kako predstavimo kompleksno število?
    - S čim se ujema seštevanje kompleksnih števil?
    - Kaj je absolutna vrednost kompleksnega števila?
    - Kako lahko interpretiramo trikotniško neenakost?

◦ Polarni zapis kompleksnega števila števila
    - Kako je podana lega točke v izbranem koordinatnem sistemu?
    - Kako dobimo razdalje do izhodišča in polarni kot?
    - Kaj vemo, če je kompleksno število podano v polarnem zapisu?
    - **Definicija.** Polarni zapis kompleksenga števila.
    - **Definicija.** Argument kompleksnega števila.
    - *Opomba.* Kaj lahko povemo o številu $\cos\phi + i\sin\phi$?

◦ Množenje kompleksnih števil
    - Formula za množenje komplekšnih števil v polarnem zapisu.

◦ Potenciranje
    - Moivreova formula za potenciranje kompleksnega števila.

◦ Konjugiranje
    - Konjugiranje v polarnem zapisu.

◦ Korenjenje kompeksnih števil
    - **Definicija.** n-ti koreni kompleksnega števila z.
    - Formula za korenjenje v polarnem zapisu.
    - Kaj sestavljajo rešitve enačbe $w^n = z$?
    - *Opomba.* Kaj je rešitve enačbe $w^n = 1$?

O MNOŽICAH IN PRESLIKAVAH

1. O množicah in preslikavah
   - **Definicija.** Preslikava f iz množice A v množico B. Zapis.
   - Domena preslikave f ali definicijsko območje od f. Kodomena preslikave f. Zaloga vrednosti preslikave f.
   - **Definicija.** Surjektivna, injektivna, bijektivna preslikava.
   - **Definicija.** Inverzna preslikava.
   - *Opomba.* Ali je inverzna preslikava res preslikava?
   - **Definicija.** Ekvipolentni ali enako močni množici.
   - *Opomba.* Kadar končni množici imata enako moč?
   - **Definicija.** Števno neskončna množica.
   - **Trditev.** Množici $\mathbb{Z}$ in $\mathbb{Q}$ sta števno neskončni.
     - **Dokaz.** Po definiciji.
   - **Trditev.** Množica $\mathbb{R}$ ni števno neskončna.
     - **Dokaz.** S protislovjem z uporabo Cantorjeva diagonalnega postopka.

2 ŠTEVILSKA ZAPOREDJA

1. Stevilska zaporedja
   - **Definicija.** Zaporedje. n-ti člen zaporedja. Zapis.
   - **Definicija.** Navzgor (navzdol) omejeno zaporedje. Zgornja (spodnja) meja zaporedja. Natančna zgornja (spodnja) meja. Oznaki.
   - **Definicija.** Zaporedje konvergira proti $a \in \mathbb{R}$. Konvergentno/divergentno zaporedje. Limita zaporedja.
     - *Opomba.* Recimo, da zaporedje konvergira proti a. Kaj lahko povemo o zunajnosti ε-okolice od a?
     - *Opomba.* Kaj če zaporedje ni konvergira proti a?
   - *Primer.* Obravnavaj konvergenco zaporedji:
     - $a_n = 1,\ n \in \mathbb{N}$.
     - $a_n = \frac{1}{n},\ n \in \mathbb{N}$.
     - $b_n = (-1)^n,\ n \in \mathbb{N}$.
   - **Trditev.** Koliko limit lahko ima konvergentno zaporedje?
     - **Dokaz.** Izračunamo $|a - b|$ z uporabo definicije limite, kjer a in b limiti zaporedja $(a_n)_n$.
   - **Trditev.** Ali je vsako konvergentno zaporedje omejeno?
     - **Dokaz.** Definicija limite. Koliko členov leži izven ϵ-okolice?
   - *Opomba.* Ali je vsako omejeno zaporedje konvergentno?
2. Stekališča
   - **Definicija.** Stekališče zaporedja.
   - *Opomba.* Definicija stekališča s ϵ-okolicami. Koliko stekališč lahko ima konvergentno zaporedje?
   - *Primer.* Obravnavaj primeri:
     - Določi stekališča zaporedja $(-1)^n$.
     - Ali obstaja zaporedje, ki ima natanko $m \in \mathbb{N}$ stekališč?
     - Ali obstaja zaporedje, ki ima za stekališče vsa naravna števila?
     - Ali obstaja zaporedje, katerega množica stekališč je $\mathbb{R}$?
     - Ali obstaja zaporedje, katerega množica stekališč je $\mathbb{Q}$?
   - **Trditev.** Zadosten pogoj, da bi bilo število s stekališče (okolice od s).
     - **Dokaz.** Definicija stekališča. Členi v okolici najdemo induktivno.
   - **Izrek.** Kaj lahko povemo o omejenom zaporedju?
     - **Dokaz.** Definiramo $S = \{u \in \mathbb{R}; a_n < u$ izpolnjeno za kvečjemu končno mnogo členov $(a_n)_n\}$. Pokažemo, da ima S supremum in ta supremum je stekališče.
3. Monotona zaporedja
   - **Definicija.** Naraščajoče/padajoče zaporedje. Strogo naraščajoče/padajoče zaporedje. Monotono zaporedje.
   - **Izrek.** Karakterizacija konvergence pri monotonih zaporedjih.
     - **Dokaz.** ($\Leftarrow$) Definiramo $A = \{a_n;\ n \in \mathbb{N}\}$. Pokažemo, da ima ta množica supremum in ta supremum je limita zaporedja $(a_n)_n$.
       ($\Rightarrow$) Že vemo.
   - *Opomba.* Čemu je enaka limita naraščajočega/padajočega zaporedja? Ali je vsako naraščajoče zaporedje navzdol omejeno?
   - *Primer.* Obravnavaj konvergenco zaporedja: $a_n = \frac{1}{\sqrt{n}}$.
4. Podzaporedja
   - **Definicija.** Podzaporedje zaporedja $(a_n)_n$.
   - **Definicija.** Rep zaporedja.
   - *Primer.* Naj bo $b_n = (-1)^n$. Določi stekališča danega zaporedja. Ali obstaja podzapodja, ki konvergirajo k danim stekališčam?
   - **Trditev.** Kaj lahko povemo o konvergence podzaporedja konvergentnega zaporedja?
     - **Dokaz.** Po definiciji limite in podzaporedja.
   - **Posledica.** Kaj lahko povemo o konvergence repa konvergentnega zaporedja?
   - **Izrek.** (1) Naj bo s stekališče zaporedja $(a_n)_n$. Ali vedno obstaja konvergentno podzaporedje z limito s? (2) Recimo, da s limita podzaporedja zaporedja $(a_n)_n$. Kaj je s za $(a_n)_n$?
     - **Dokaz.** (1) Induktivno konstruiramo strogo naraščajoče zaporedje $(n_j)_j$ tako, da $a_{n_k} \in (s - \frac{1}{k}, s + \frac{1}{k})$ za vsak $k = 1, \ldots, j$. Pokažemo po definiciji, da je podzaporedje konvergira proti s.
       (2) Po definiciji podzaporedja, limite in stekališča.

5. Računanje z zaporedji
   - **Trditev.** Konvergenca vsote, razlike in produkta zaporedij.
     - **Dokaz.** Enostavno po definicije limite.
   - **Posledica.** Kaj se zgodi s konvergenco, če konvergentno zaporedje pomnožimo z $\lambda \in \mathbb{R}$?
   - *Opomba.* Ali ustrezni pravili veljajo za končno mnogo zaporedij?
   - **Trditev.** Konvergenca zaporedja obratnih vrednosti.
     - **Dokaz.** Enostavno po definicije limite.
   - **Posledica.** Konvergenca kvocienta zaporedij.
     - **Dokaz.** Obratna vrednost in nato produkt.
   - **Trditev.** Naj bosta $(a_n)_n$ in $(b_n)_n$ konvergentni zaporedji. Recimo, da velja $a_n \leq b_n$ za vse $n \in \mathbb{N}$. Kaj lahko povemo o limitah teh zaporedij?
     - **Dokaz.** Enostavno s protislovjem.
   - *Opomba.* Ali iz $a_n < b_n$ za vse $n \in \mathbb{N}$ sledi, da je $\lim_{n\to\infty} a_n < \lim_{n\to\infty} b_n$?
   - *Primer.* Obravnavaj konvergenco zaporedja podanega rekurzivno: $x_1 = 2,\ x_{n+1} = x_n - \frac{x_n^2-2}{2x_n}$.
   - **Izrek.** Izrek o sendviču.
     - **Dokaz.** Definicija limite.
   - *Primer.* Obravnavaj konvergenco zaporedja $b_n = \sqrt{n+1} - \sqrt{n}$.
   - **Izrek.** O vloženih intervalih.
     - **Dokaz.** Pokažemo, da zaporedji $(a_n)_n$ in $(b_n)_n$ konvergentni in velja $\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} b_n$. Definiramo $c = \lim_{n\to\infty} a_n$.
6. Cauchyjev pogoj
   - **Definicija.** Cauchyjev pogoj. Cauchyjevo zaporedje.
   - **Trditev.** Ali je omejeno zaporedje, ki ima eno samo stekališče s konvergentno?
     - **Dokaz.** Naj bo $\epsilon > 0$. S protislovjem pokažemo, da zunaj $(s-\epsilon, s+\epsilon)$ leži kvečjemu končno mnogo členov zaporedja.
   - *Opomba.* Zakaj potrebujemo omejenost v prejšnji trditvi?
   - **Izrek.** Karakterizacija konvergence zaporedja z Cauchyjevim pogojem.
     - **Dokaz.** ($\Rightarrow$) Enostavno po definicijam.
       ($\Leftarrow$) 1. Pokažemo, da je vsako Cauchyjevo zaporedje omejeno.
       2. Pokažemo, da Cauchyjevo zaporedje nima dveh različnih stekališč s in t (poiščemo prostislovje z $\epsilon = \frac{1}{3}|s-t|$) in uporabimo prejšnjo trditev.
7. Zgornja limita, spodnja limita, limita neskončno
   - **Definicija.** Zaporedje $(a_n)_n$ konvergira proti $\pm\infty$.
   - **Definicija.** Zgornja limita (limes superior). Spodnja limita (limes inferior). Oznake.
   - *Opomba.* Zakaj je definicija dobra?
   - **Trditev.** Karakterizacija limes superioira.
     - **Dokaz.** ($\Rightarrow$) Definicija limes superiora, stekališča in prejšnje trditve.
       ($\Leftarrow$) Ali je s največje stekališče?
   - **Posledica.** Ali je limes superior stekališče zaporedja?
   - **Trditev.** Čemu je enak $\limsup_{n\to\infty} a_n$?
     - **Dokaz.** Najprej pokažemo, da je zaporedje $\sup_{k\geq n} a_k$ konvergentno in določimo njegovo limito. Nato pokažemo na podlage prejšnje trditve, da je ta limita enaka $\limsup_{n\to\infty} a_n$.
   - **Trditev.** Naj bosta $(a_n)_n$ in $(b_n)_n$ omejeni zaporedji. Recimo, da velja $a_n \leq b_n$ za vse $n \in \mathbb{N}$. Kaj lahko povemo o limes superiorah in limes inferiorah teh zaporedij?
   - **Definicija.** Limes superior in limes inferior za neomejena zaporedja (navzgor neomejeno, navzdol neomejeno, omejeno navzdol in neomojeno navzgor, omejeno navzor in neomejeno navzdol).

8. Primeri posebnih zaporedij
   - **Trditev.** Naj bo $a \in \mathbb{R}$. Obravnavaj konvergenco zaporedja $a_n = a^n$.
     - **Dokaz.** (1) $a \in (0,1)$: Pokažemo, da zaporedje $(a_n)_n$ padajoče in navzdol omejeno.
       $a \in (-1,0)$: Ocenimo $-|a_n| \leq a_n \leq |a_n|$.
       (2) Pokažemo, da zaporedje je naraščajoče in navzdol omejeno z 1. Kaj je edina možna limita?
   - **Trditev.** Naj bo $x \in \mathbb{R},\ x > 0$. Obravnavaj konvergenco zaporedja $a_n = \sqrt[n]{x}$.
     - **Dokaz.** (1) $x > 1$: Pokažemo, da zaporedje $(\sqrt[n]{x})_n$ je padajoče in navzdol omejeno. Pokažemo, da je 1 spodnja meja in ocenimo $L = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{x}$.
       (2) $x < 1 \Rightarrow x = \frac{a}{b}$.
   - **Trditev.** Obravnavaj konvergenco zaporedja $a_n = \sqrt[n]{n}$.
     - **Dokaz.** Z pomočjo binomske formule in zapisa $n = (\sqrt[n]{n})^n = (1 + (\sqrt[n]{n} - 1))^n$ ocenimo izraz $\sqrt[n]{n} - 1$.
   - **Izrek.** Obravnavaj konvergenco zaporedja $\left(\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n\right)_n$.
     - **Dokaz.** Najprej izračunamo $\binom{n}{k}\frac{1}{n^k}$. Nato s pomočjo binomske formule pokažemo, da je zaporedje naraščajoče. Z istim trikom in vsoto geometrijske vreste pokažemo, da je zaporedje navzgor omejeno.
   - **Definicija.** Eulerjevo število.
   - *Opomba.* Določi $\lim\limits_{m\to-\infty} \left(1 + \dfrac{1}{m}\right)^m$.
9. Definicija potence pri realnem eksponentu
   - **Definicija.** Definicija potence pri racionalnem eksponentu.
   - *Opomba.* Kaj velja za računanje z racionalnimi potencami (3 lastnosti + monotonost)?
   - **Trditev.** Naj bo $a \in \mathbb{R},\ a > 0$. Ali lahko za vsak $\epsilon > 0$ najdemo $\delta > 0$, za katero velja: če je $h \in \mathbb{Q},\ |h| < \delta$, potem $|a^h - 1| < \epsilon$?
     - **Dokaz.** Uporabimo znani limiti: $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a}$ in $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{1}{a}}$.
   - **Trditev.** Naj bo $a \in \mathbb{R},\ a > 0$. Denimo, da zaporedje $(q_n)_n,\ q_n \in \mathbb{Q}$ konvergira proti $x \in \mathbb{R}$. Ali potem kovergira zaporedje $(a^{q_n})_n$. Kaj če je $x \in \mathbb{Q}$?
     - **Dokaz.** Pokažemo, da je zaporedje $(a^{q_n})_n$ Cauchyjevo. Izraz za limito dokažemo po definiciji. Pri dokazu uporabimo prejšnjo trditev.
   - **Trditev.** Naj bo $a \in \mathbb{R},\ a > 0$. Denimo, da imata zaporedja $(q_n)_n,\ q_n \in \mathbb{Q}$ in $(r_n)_n,\ r_n \in \mathbb{Q}$ enako limito. Ali potem $\lim_{n\to\infty} a^{q_n} = \lim_{n\to\infty} a^{r_n}$?
     - **Dokaz.** Pokažemo, da je $\lim_{n\to\infty}(a^{q_n} - a^{r_n}) = 0$. Pri dokazu uporabimo predprejšnjo trditev.
   - **Definicija.** Definicija potence pri realnem eksponentu.
   - **Trditev.** Dokaži, da za vse $x, y \in \mathbb{R}$ in vse $a \in \mathbb{R},\ a > 0$ velja:
     (1) $a^x \cdot a^y = a^{x+y}$.
     (2) $a^x \cdot b^x = (a \cdot b)^x$.
     - **Dokaz.** Poračunamo.
   - **Trditev.** Naj bo $a \in \mathbb{R},\ a > 0$. Določi limito zaporedja $b_n = \frac{1}{n^a}$.
     - **Dokaz.** Definicija limite in arhimedska lastnost.
   - **Trditev.** Naj bo $\alpha \in \mathbb{R},\ q \in \mathbb{R},\ q > 1$. Določi limito zaporedja $a_n = \frac{n^\alpha}{q^n}$.
     - **Dokaz.** Pokažemo, da je padajoče in navzdol omejeno. Limito izračunamo iz rekuzivne zveze.
10. Zaporedja kompleksnih števil
   - **Definicija.** Zaporedje kompleksnih števil. Zapis.
   - **Definicija.** Zaporedje kompleksnih števil konvergira proti $z \in \mathbb{C}$.
   - **Trditev.** Karakterizacija konvergence zaporedja kompleksnih števil (realni in imaginarni del).
     - **Dokaz.** Enostavno z izračunom absolutne vrednosti števila $z \in \mathbb{C}$.
   - **Trditev.** Konvergenca vsote, razlike, produkta in kvocienta zaporedij kompleksnih števil.
     - **Dokaz.** Podobno kot pri realnih zaporedjih.
   - **Definicija.** Cauchyjevo zaporedje.
   - **Izrek.** Karakterizacija konvergence zaporedja kompleksnih števil (Cauchyjev pogoj).
     - **Dokaz.** Podobno kot pri prejšnje karakterizacije pokažemo, da $(z_n)_n$ je Cauchyjevo natanko takrat, ko $(\mathrm{Re}\ z_n)_n$ in $(\mathrm{Im}\ z_n)_n$ sta Cauchyjevi.

3 ŠTEVILSKE VRSTE

1. Osnovni definiciji
   - **Definicija.** Številska vrsta, splošni člen vrste.
   - **Definicija.** Zaporedje delnih vsot.
   - **Definicija.** Konvergentna vrsta, vsota vrste.
   - *Primer.* Obravnavaj konvergenco:
     - Geometrijske vrste $\sum_{n=0}^{\infty} aq^n$.
     - Vrste $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)}$. Razcep na delne ulomke.
   - **Trditev.** Cauchyjev pogoj za konvergenco vrste $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$.
     - **Dokaz.** Definicija konvergence vrste + Cauchyjev pogoj za zaporedja.
   - **Posledica.** Konvergenca zaporedja $(a_n)_n$.
     - **Dokaz.** Definicija limite zaporedja + prejšnja trditev.
   - Ostanek vrste. **Trditev** o ostanku vrste.
     - **Dokaz.** Vsota konvergentnih zaporedij.
   - **Trditev.** Lastnosti seštevanja in množenja s konstanto konvergentnih vrst.
     - **Dokaz.** Uporabimo znane lastnosti za računanje s konvergentimi zaporedji.
   - *Opomba.* Ali konvergentne številske vrste sestavljajo vektorski prostor?
2. Vrste z nenegativnimi členi
   - Vrsta z nenagitivnimi členi. Kaj lahko povemo o zaporedju delnih vsot?
   - **Trditev.** Karakterizacija konvergence vrste z nenegativnimi členi.
     - **Dokaz.** Definicija konvergence vrste + opazka o zaporedju delnih vsot.
   - *Primer.* Harmonična vrsta $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$.
     - **Dokaz.** Ocena za $\frac{1}{m+1} + \ldots + \frac{1}{2m}$ in za podzaporedje $(s_{2^k})_k$.
   - **Trditev.** Primerjalni kriterij za konvergenco vrst. Majoranta.
     - **Dokaz.** Karakterizacija konvergence vrste z nenagitivnimi členi.
   - *Primer.* Konvergenca vrste $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$, $p \in \mathbb{R}$. Riemannova zeta funkcija.
     - **Dokaz.** Konvergenco za $p > 1$ pokažemo z oceno $(s_{2^k})_k$ z ustrezno geometrijsko vrsto.
   - **Izrek.** D'Alembertov-kvocientni kriterij za konvergenco vrst.
     - **Dokaz.** Konvergenco pokažemo z oceno člena a_{n+1} z členom a_1. Divergenco z dokazom: $\lim_{n\to\infty} a_n \neq 0$.
   - **Izrek.** Cauchyjev-korenski kriterij za konvergenco vrst.
     - **Dokaz.** Konvergenco pokažemo z ustrezno geometrijsko vrsto. Divergenco z dokazom: $\lim_{n\to\infty} a_n \neq 0$.
   - **Izrek.** Raabejev kriterij za konvergenco vrst.
     - **Dokaz.** Konvergenca. Zapišemo $q = 1 + s$, $s > 0$. Po definiciji pokažemo, da konvergira vrsta z splošnim členom $b_n = na_n - (n+1)a_{n+1}$.
       Divergenca. Ocenimo člen a_{n+1} z členom a_1.
3. Absolutna konvergenca
   - **Definicija.** Absolutno konvergentna vrsta.
   - **Izrek** o absolutno konvergentni vrsti.
     - **Dokaz.** Cauchyjev pogoj za vrste.
   - **Izrek.** Leibnizev kriterij za konvergenco alternirajočih vrst. Ocena ostanka.
     - **Dokaz.** Konvergenca. Pokažemo, da sodi in lihi členi zaporedja delnih vsot konvergirajo k iste limite.
       Ocena. Ocenimo razliki $s_{2n} - s_{2n+2k}$ in $s_{2n} - s_{2n+2k+1}$. Podobno za lihe delne vsote.
   - *Primer.* Konvergenca vrste $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{n}$. Kaj primer pove?
4. Preureditve vrst
   - Preureditev vrste.
   - **Izrek** o preureditve absolutno konvergentne vrste.
     - **Dokaz!** Po definiciji pokažemo, da $\lim(s_n' - s_n) = 0$, kjer je s_n' n-ta delna vsota preurejene vrste.
       Namig. Naj bo za števili M in N velja: $\{1, 2, \ldots, N\} \subset \{\pi(1), \pi(2), \ldots, \pi(M)\}$. Kako lahko zapišemo M-to delno vsoto preurejene vrste?
   - **Definicija.** Pogojno konvergentna vrsta.
   - **Izrek** o preureditve pogojno konvergentne vrste (Riemann).
     - **Dokaz.** Razbijemo n-to delno vsoto na vsoto vseh pozitivnih členov $p_{k(n)}$ ter vsoto vseh nasprotnih vrednosti negativnih členov $q_{m(n)}$. Pokažemo, da vrsti $\sum_{k=1}^{\infty} p_{k(n)}$ in $\sum_{m=1}^{\infty} q_{m(n)}$ divergirata. od tod konstruiramo vrsto z željeno vsoto.

5. Množenje vrst
    - Vrsta, ki je sestavljena iz vseh produktov.
    - **Trditev** o vrste, ki je sestavljena iz vseh produktov členov absolutno konvergentnih vrst.
        - **Dokaz.** Izberimo nek vrstni red in z oceno pokažemo, da vrsta absolutno konvergira. Za izračun vsote vrste spet izberimo ustrezen vrstni red seštevanja.
6. Dvakratne vrste
    - **Definicija.** Dvakratna vrsta.
    - **Trditev** o konvergence dvakratnih vrst (brez dokaza).

4 FUNKCIJE REALNE SPREMENLJIVKE

4.1 FUNKCIJE

1. Osnovni definiciji in trditvi
   - **Definicija.** Realna funkcija realne spremenljivke, definicijsko območje funkcije.
   - *Opomba.* Katera podatka sta združena v besedi funkcija? Kadar sta funkciji enaki?
   - *Dogovor.* Ali lahko podamo funkcijo samo s predpisom?
   - *Primer.* (1) Določi definicijsko območje funkciji z predpisom $f(x) = \sqrt{x}$.
     (2) Ali predpisa $f(x) = \ln(x-1) + \ln(x+1)$ in $g(x) = \ln(x^2-1)$ določata enaki funkciji?
   - **Definicija.** Razšeritev in zožitev funkcije. Oznaka za zožitev.
   - **Definicija.** Graf funkcije.
   - *Opomba.* Funkcija in njen graf. Katere podmnožice $S \subset \mathbb{R}^2$ so grafi?
   - **Definicija.** Naraščajoča (padajoča) funkcija. Monotona funkcija.
2. Opercaije s funkcijami
   - **Definicija.** Kompozitum funkcij.
   - *Primer.* Določi $g \circ f$ in $f \circ g$, če obstaja: $f(x) = x^2 + 1$, $g(x) = \ln x^2$.
   - **Definicija.** Inverzna funkcija.
   - *Opomba.* Predpis za inverzno preslikavo. Kako pridemo od injektivne preslikave do bijektivne preslikave?
   - *Primer.* Določi f^{-1}, če obstaja: $f(x) = \frac{2x+3}{3x-1}$.
   - *Opomba.* Kako dobimo graf inverzne funkcije?
   - **Definicija.** Navzgor omejena funkcija, omejena funkcija, supremum funkcije, maksimum funkcije.
   - **Definicija.** Ničla funkcije.
   - **Definicija.** Vsota, razlika, produkt in kvocient funkcij.
   - **Definicija.** Funkciji $\max\{f, g\}$, $\min\{f, g\}$.
   - **Definicija.** Funkciji $\sup_{\gamma\in\Gamma} f_\gamma$ in $\inf_{\gamma\in\Gamma} f_\gamma$.
   - *Primer.* Določi funkciji $\sup_{\gamma\in\Gamma} f_\gamma$ in $\inf_{\gamma\in\Gamma} f_\gamma$, če je $f_\gamma(x) = \dfrac{1}{1+\gamma x^2}$, $\gamma \in (0, \infty)$.

4.2 ZVEZNOST

1. Osnovni definiciji
   - **Definicija.** Zveznost funkcije f v točke $a \in D$.
   - *Primer.* Zveznost funkcij $\sin\frac{1}{x}$ in $x\sin\frac{1}{x}$ v točkah $a \in \mathbb{R}$.
   - **Definicija.** δ-okolica točke a v D. Okolica točke a v D.
   - **Definicija (ekivalentna).** Zveznost funkcije f v točke $a \in D$ ($\varepsilon - \delta$ okolici).
   - **Definicija (ekivalentna).** Zveznost funkcije f v točke $a \in D$ (okolici).
2. Opis zveznosti z zaporedji
   - **Izrek.** Karakterizacija zveznosti v točke a z zaporedji.
     - **Dokaz.** ($\Rightarrow$) Definicija zveznosti ter definicija limite zaporedja.
       ($\Leftarrow$) S protislovjem najdemo zaporedje x_n, ki konvergira proti a, vendar $f(x_n)$ ne konvergira proti $f(a)$.
   - **Izrek.** Zveznost v točke a vsote, razlike, produkta in kvocienta zveznih v točke a funkcij.
     - **Dokaz.** Karakterizacija + pravila za računanje z zaporedji.
   - **Izrek.** Zveznost v točke a kompozituma funkcij.
     - **Dokaz.** Karakterizacija.
   - **Definicija.** Zvezna funkcija.
   - *Primer.* Zveznost konstant. Zveznost $f(x) = x$. Zveznost polinomov in racionalnih funkcij.
3. Limita funkcije
   - Motivacija. Prebodena okolica.
   - **Definicija.** Limita funkcije f, ko gre x proti a. Oznaka.
   - *Opomba.* Vplivnost vrednosti $f(a)$ na limito funkcije f, ko gre x proti a.
   - **Trditev.** Karakterizacija zveznosti v točke a z limito funkcije f, ko gre x proti a.
     - **Dokaz.** Definicija limite in zveznosti.
   - **Izrek.** Karakterizacija limite funkcije f, ko gre x proti a z zaporedji.
     - **Dokaz.** Podobno kot pri zveznosti.
   - *Opomba.* Pravila za računanje s funkcijskimi limitami.
   - **Izrek.** Pravila za računanje s funkcijskimi limitami.
     - **Dokaz.** Karakterizacija limite z zaporedji.
   - **Definicija.** Leva (desna) limita funkcije v točki a.
   - **Trditev.** Karakterizacija obstoja limite funkcije v točki a z levo in desno limitama.
     - **Dokaz.** Iz definicij limite ter leve in desne limite.
   - **Izrek.** Obstoj leve in desne limite monotone funkcije na $[a, b]$. Karakterizacija zveznosti v točki $c \in (a, b)$ monotone na intervale $[a, b]$ funkcije f z levo in desno limitama.
     - **Dokaz.** Kaj vemo o naraščajoče funkcije? Ali obstaja $\sup\{f(x);\ x \in (a, c)\}$. Zakaj iz predpostavk izreka sledi zveznost?
   - **Definicija.** Skok funkcije f v točke $c \in D$.
   - **Izrek.** Koliko točk nezveznosti lahko ima monotona na intervale $[a, b]$ funkcije f?
     - **Dokaz.** Pokažemo, da obstaja injektivna preslikava $r : \mathcal{N} \to \mathbb{Q}$, kjer $\mathcal{N}$ množica vseh točk nezveznosti.
   - **Definicija.** Limita L funkcije f, ko gre x čez vse meje (proti neskončno).
   - *Opomba.* Kaj je v tem primeru $y = L$?.
   - **Definicija.** Cauchyjev pogoj pri točke a (v ∞).
   - *Opomba.* Karakterizacija obstoja limite s Cauchyjevem pogojem.
     - **Dokaz.** Podobno kot pri zaporedj pokažemo, da če funkcija ima limito, potem izpolnjuje Cauchyjev pogoj. Obratno brez dokaza.
   - **Definicija.** Limita funkcije f, ko gre x proti a enaka neskončno.
   - *Primer.* $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x} = 1$, $\lim\limits_{x\to\pm\infty}(1 + \dfrac{1}{x})^x = e$, $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{a^h - 1}{h} = \ln a$.
     - **Dokaz.** (1) Z pomočjo enotske krožnice dokažemo, da $\sin x \le x \le \tan x$.
       (2) Uporabimo znano limito zaporedja.
       (3) Vpeljamo $a^h - 1 = \frac{1}{x}$.

4. Enakomerna zveznost
   - **Definicija.** Enakomerno zvezna funkcija f na D.
   - *Primer.* Ali je funkcija $f(x) = \frac{1}{x}$ enakomerno zvezna?
   - *Opomba.* Ali je vsaka enakomerno zvezna funkcija na D, tudi zvezna na D? Ali je vsaka zvezna funkcija na D, tudi enakomerno zvezna na D?
   - **Lema** o pokritjih.
     - **Dokaz.** Definiramo $S = \{c \in [a, b];$ interval $[a, c]$ lahko pokrijemo s končno mnogo članicami $O_x\}$. Pokažemo, da ima ta množica maksimum in velja: $\max S = b$.
   - **Posledica** leme o pokritjih.
     - **Dokaz.** Za vsak $x \in [a, b]$ obstaja $\lambda(x)$, da je $x \in I_{\lambda(x)}$. Za vsak $x \in [a, b]$ definiramo $\delta(x) > 0$ tako, da je $(x - \delta(x),\ x + \delta(x)) \subset I_{\lambda(x)}$.
   - **Izrek** o zvezne funkcije f na zaprtem intervalu $[a, b]$.
     - **Dokaz!** Definiramo ustrezno pokritije intervala $[a, b]$, nato uporabimo lemo o pokritjih in vzemimo $\delta = \min\{\delta(x_1), \dots, \delta(x_m)\}$. Na koncu upoštevamo definicijo enakomerne zveznosti.
5. Lastnosti zveznih funkcij na zaprtem intervalu
   - **Izrek.** Metod bisekcije.
     - **Dokaz.** Na vsakem koraku gledamo vrednost v središču intervala. Tako bodisi najdemo ničlo, bodisi dobimo zaporedje vloženih intervalov.
   - **Izrek** o omejenosti zvezne funkcije f na zaprtem intervalu $[a, b]$.
     - **Dokaz!** Omejenost dokažimo z protislovjem. Definiramo zaporedje $x_n \in [a, b],\ f(x_n) \geq n$.
       To, da f doseže maksimum tudi pokažemo s protislovjem z definicijo supremuma in funkcijo $\frac{1}{\sup f - f}$.
   - *Opomba.* Kaj pove izrek?
   - **Posledica.** Ali je zvezna funkcija funkcija na zaprtem intervalu $[a, b]$ zavzame vse vrednosti med minimumom in maksimumom?
     - **Dokaz.** Naj bo $c \in (\min f, \max f)$. Definiramo funkcijo $g(x) = f(x) - c$. Ali ta funkcija ima ničlo?
   - **Izrek** o inverze strogo monotone zvezne funkcije na zaprtem intervalu $[a, b]$.
     - **Dokaz.** Recimo, da je f strogo naraščajoča. Po definiciji pokažemo, da je funkcija f^{-1} zvezna v točki $y_0 \in [f(a), f(b)]$. Definiramo $\delta = \min\{|y_0 - f(f^{-1}(y_0) - \epsilon)|, |y_0 - f(f^{-1}(y_0) + \epsilon)|\}$.
   - *Primer.* Zveznost inverzne funkcije od funkcije $f(x) = x^n$, $n \in \mathbb{N}$.
   - **Posledica.** Zveznost funkcije $x \mapsto x^r$ na $(0, \infty)$ (ali $[0, \infty)$, če je $r > 0$) za vsak $r \in \mathbb{Q}$.
     - **Dokaz.** Kompozitum zveznih funkcij.
6. Zveznost posebnih funkcij
   - **Trditev.** Monotonost eksponentne funkcije $x \mapsto a^x$.
     - **Dokaz.** Z definicijo realne eksponente pokažemo, da iz $x_1 > x_2$ sledi $a^{x_1 - x_2} > 0$.
   - **Izrek.** Zveznost eksponentne funkcije $x \mapsto a^x$.
     - **Dokaz.** Zveznost v točke $a = 0$ pokažemo po definiciji z znano oceno za izraz $|a^h - 1|$.
       Zveznost v ostalih točkah $x_0 \in \mathbb{R}$ pokažemo z prevodom ocene $|a^x - a^{x_0}|$ na zveznost v točke 0.
   - **Posledica.** $(a^x)^y = a^{xy}$
     - **Dokaz.** Upoštevamo definicijo eksponentne funkcije ter ustrezne zveznosti.
   - **Definicija.** Logaritemska funkcija z osnovo a, naravni logaritem.
   - **Trditev.** $\log_a(xy) = \log_a(x) + \log_a(y)$. $\log_a(x^\lambda) = \lambda \log_a(x)$.
     - **Dokaz.** Definicija logaritma.
   - **Izrek.** Zveznost logaritemske funkcije.
     - **Dokaz.** Izrek o inverze zvezne strogo monotone funkcije.
   - **Posledica.** Zveznost funkcije $x \mapsto x^y$ za vsak $y \in \mathbb{R}$.
     - **Dokaz.** $x^y = e^{\ln x^y}$.
   - **Izrek.** Zveznost sinusa, kosinusa, tangensa in kotangensa.
     - **Dokaz.** Dovolj, da pokažemo zveznost sinusa z upoštevanjem definicije sinusa ter definiciji zveznosti.
   - **Izrek.** Zveznost arkus sinusa, arkus kosinusa, arkus tangensa in arkus kotangensa.
     - **Dokaz.** Izrek o inverze zvezne strogo monotone funkcije.

4.3 ODVOD

1. Osnovni definiciji in trditvi
   - **Definicija.** Odvod funkcije f v točki a. Odvedljiva v točki a funkcija.
   - *Opomba.* Diferenčni kvocient.
   - Geometrijski pomen odvoda.
   - *Primer.* Določi odvod, če obstaja:
     - $f(x) = x^2, \ a = 3$.
     - $g(x) = \sqrt[3]{x}, \ a = 0$.
     - $h(x) = |x|, \ a = 0$.
     - $q(x) = x \sin \frac{1}{x}, \ q(0) = 0, \ a = 0$.
   - **Izrek** o zveznosti v točki a odvedljive v točki a funkcije f.
     - **Dokaz.** Z diferenčnim kvocientom pokažemo, da $\lim_{x\to a} f(x) = f(a)$.
   - *Opomba.* Ali v prejšnjem izreku velja implikacija v nasprotno smer?
   - **Definicija.** Levi (desni) odvod funkcije f v točki a.
   - **Trditev.** Karakterizacija odvedljivosti funkcije f v točki a z levim in desnim odvodami.
     - **Dokaz.** Že vemo od prej (karakterizacija obstoja limite).
   - **Definicija.** Odvdeljiva na (a, b) funkcija f. Odvedliva na $[a, b]$ funkcija f.
   - *Primer.* Kjer je odvedljiva funkcija arcsin?
   - **Definicija.** Odvod funkcije f.
   - **Definicija.** Zvezno odvedljiva funkcija. Množica vseh zveznih funkcij na I. Množica vseh zvezno odvedljivih funkcij na I.
   - **Definicija.** Odsekoma zvezna funkcija f.
   - **Definicija.** Odsekoma zvezno odvedljiva funkcija f.
   - *Opomba.* Kaj pomeni odsekoma zvezna odvedlivost?
2. Diferencial
   - Naj bo funkcija f definirana v okolici točke a in odvedljiva v točki a. Funkcija $o(h)$. Kaj pomeni, da je $\lim_{h\to 0} \frac{o(h)}{h} = 0$? Aproksimacija razlike $f(a+h) - f(a)$.
   - **Definicija.** Diferenciabilna v točki a funkcija f. Diferencial funkcije f v točki a.
   - *Opomba.* Enoličnost diferenciala.
   - **Izrek.** Karakterizacija diferenciabilnosti v točki a funkcije f.
     - **Dokaz.** ($\Leftarrow$) Začetna izpeljava.
       ($\Rightarrow$) Pri izračunu odvoda upoštevamo, da $\mathcal{L}(h) = c \cdot h$.
   - Zapis: $f' = \frac{df}{dx}$.
3. Pravila za odvajanje
   - Odvod konstante.
   - **Trditev.** Pravila za odvod vsote, razlike, produkta in kvocientna dveh odvedljivih v točki a funkcij.
     - **Dokaz.** Vsota in razlika: Definicija odvoda v točke a.
       Produkt in kvocient: Prištejemo in odštejemo ustrezen nič.
   - **Posledica.** Pravilo za odvod funkcije pomnožene s konstanto.
     - **Dokaz.** Odvod produkta in nato konstante.
   - **Posledica.** Pravilo za odvod produkta n funkcij.
     - **Dokaz.** Z indukcijo.
   - **Trditev.** Odvod kompozicije.
     - **Dokaz.** Z izračunim pokažemo, da je $g \circ f$ diferenciabilna v točki a.
   - **Izrek** o odvedlivosti inverzne funkcije.
     - **Dokaz.** Z uporabo diferenčnega kvocienta izračunamo odvod funkcije f^-1 v točki $f(c)$.
   - *Opomba.* Pravilo za odvod inverzne funkcije.

4. Odvodi elementarnih funkcij
   - Odvod konstante, odvod funkcije $f(x) = x$.
     - **Dokaz.** Po definiciji.
   - Odvod funkcije $f(x) = x^q$ za $q \in \mathbb{Q}$ ($\mathbb{N} \to \mathbb{Z} \to \frac{1}{n} \to \mathbb{Q}$).
     - **Dokaz.** $n \in \mathbb{N}$: Odvod produkta. $m \in \mathbb{Z}$: Odvod kvocienta.
       $q = \frac{1}{n}$, $n \in \mathbb{N}$: Izrek o odvode inverza. $q \in \mathbb{Q}$: Odvod kompozicije.
   - Odvod logaritma.
     - **Dokaz.** Po definiciji.
   - Odvod eksponentne funkcije.
     - **Dokaz.** Izrek o odvode inverza.
   - Odvod potenčne funkciji z realnim eksponentom.
     - **Dokaz.** Kompozitum eksponente in logaritma.
   - Odvod kotnih funkcij.
     - **Dokaz.** Sinus: Definicija + razlika sinusov. Cosinus: $\cos x = \sin(\frac{\pi}{2} - x)$.
       Tangens: $\tan x = \frac{\sin x}{\cos x}$
   - Odvod ciklometričnih funkcij.
     - **Dokaz.** Izrek o odvode inverza.
5. Odvodi višjega reda
   - **Definicija.** Drugi odvod funkciji f na intervalu I. n-ti odvod funkciji f.
   - *Primer.* Določi vsi odvodi funkcij: $f(x) = e^x$ in $g(x) = x^k$, $k \in \mathbb{N}$.
   - Oznake: $C(I)$, $C^1(I)$, $C^r(I)$, $r \in \mathbb{N}$, $C^\infty(I) = \cap_{r \in \mathbb{N}} C^r(I)$. Lastnosti teh množic (vsobavonost, vektorski prostor).
   - **Trditev** o preslikave, ki funkcije priredi njen odvod.
   - *Primer.* Naj bo $g(x) = \begin{cases} x^2 \sin\frac{1}{x}; & x \neq 0 \\ 0; & x = 0 \end{cases}$. Določi vse r, da $g \in C^r(\mathbb{R})$.
6. Rollov in Lagrangeev izrek
   - **Definicija.** Lokalni maksimum, lokalni minimum. Lokalni ekstrem.
   - **Izrek** o odvodu funkcije $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ v točki lokalnega ekstrema.
     - **Dokaz.** Ocenimo limito diferenčnega kvocienta z leve in desne z uporabo definicije ekstrema.
   - **Definicija.** Stacionarna ali kritična točka funkcije f.
   - **Izrek.** Rollov izrek.
     - **Dokaz.** Uporabimo lastnost zvezne funkcije na zaprtem intervalu ter prejšnjo trditev.
   - **Izrek.** Lagrangeev izrek.
     - **Dokaz.** Definiramo funkcijo $F(x) = f(x) - f(a) + A \cdot (x - a)$. Določimo konstanto A tako, da bo $F(b) = 0$ in uporabimo Rollov izrek.
   - *Opomba.* Kaj se zgodi, če zapišemo $a = x$ in $b = x + h$ v Lagrangeevem izreku?
   - **Posledica.** Opis monotonosti funkciji f, ki je odvedljiva na odprtem intervalu I z odvodom.
     - **Dokaz.** ($\Rightarrow$) Lagrangeev izrek.
       ($\Leftarrow$) Definicija odvoda.
   - *Opomba.* Ali pri stroge monotonosti velja obrat?
   - **Posledica.** Kakšna je funkcija, ki je odvedljiva na I, če za vse $x \in I$ velja $f'(x) = 0$?
     - **Dokaz.** (1) in (2) iz prejšnje posledice.
   - **Posledica.** Naj bo $f : (a, b) \to \mathbb{R}$ zvezna na (a, b), $c \in (a, b)$ in f je odvedljiva na (a, c) in (c, b). Kadar ima funkcija f v točki c ekstrem?
     - **Dokaz.** Min: Izberimo $x \in (a, c)$ in z ustreznim zaporedjem (f je zvezna) pokažemo, da $f(c) \leq f(x)$.
   - *Opomba.* Ali velja obratno?
   - **Posledica.** Zadosten pogoj za lokalni ekstrem odvedljive funkcije $f : (a, b) \to \mathbb{R}$. Kadar funkcija nima ekstrema v stacionarni točki?
   - Kako poiščemo globalni ekstremi zvezne na $[a, b]$ funkciji f?
   - **Trditev.** Kaj lahko sklepamo iz tega, da $f''(x) \geq 0$ (ali $f''(x) \leq 0$) za $\forall\, x$ v neki okolici stacionarne točke c?
     - **Dokaz.** Uporabimo opis monotonosti.
   - **Posledica.** Opis stacionarne točke z drugim odvodom.
     - **Dokaz.** Zveznost + prejšnja trditev.
   - **Trditev.** Naj bo funkcija f definirana na $[a, b]$. Kdaj bo v točkah a, b lokalni minimum/maksimum?
     - **Dokaz.** Po definiciji levega oziroma desnega odvoda.

7. Konveksnost in konkavnost
   - **Definicija.** Konveksna funkcija.
   - Geometrijski pomen konveksnosti.
   - *Opomba.* Konveksna kombinacija. Pogoj za konveksnost z uporabo konveksne kombinacije.
   - **Definicija.** Konkavna funkcija.
   - *Opomba.* Karakterizacija konveksnosti s konkavnostju.
   - **Izrek.** Karakterizacija konveksnosti z tangentami.
     - **Dokaz.** ($\Rightarrow$) Izberimo poljubne točke $a, x \in I$. Vzemimo y, ki leži strogo med x in a. Uporabimo definicijo konveksnosti in izračunamo odnostranski odvod v točke a.
       ($\Leftarrow$) Izberimo poljubni točki $a, b \in I$, $a < b$ in $x \in (a, b)$. Vzemimo tangento v točke x in uporabimo oceno v točkah a in b, nato seštejemo neeančbe tako, da izognemo odvoda.
   - **Izrek.** Karakterizacija konveksnosti odvedljive na odprtem intervalu I funkcije z odvodom.
     - **Dokaz.** ($\Rightarrow$) Naj bo $a, b \in I$, $a < b$ in $k = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$. Z pomočjo definiciji konveksnosti in odnostranskega odvoda ocenimo $f'(a)$ in $f'(b)$ s k.
       ($\Leftarrow$) Uporabimo prejšni izrek + Lagrangeev izrek.
   - **Posledica.** Karakterizacija konveksnosti dvakrat odvedljive na odprtem intervalu I funkcije z drugim odvodom.
   - **Definicija.** Prevoj (sedlo) funkcije f v točki a
   - *Primer.* Kako natančno narišemo graf poljubne funkcije?
8. L'Hospitalovi izreki
   - **Lema (Cauchyjev izrek).** Posplošen Lagrangeev izrek.
     - **Dokaz.** Najprej dokažemo, da $g(b) - g(a) \neq 0$.
       Definiramo $F(x) = (f(x) - f(a)) - \frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}(g(x) - g(a))$ in uporabimo Rollov izrek.
   - *Opomba.* Zakaj to je posplošen Lagrangeev izrek?
   - **Izrek 1 (L'Hospitalovo pravilo)** Računanje limite oblike $\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{0}{0}$.
     - **Dokaz.** Zvezno razširimo funkciji f in g na interval $[a, b)$. Izberimo točko $x \in (a, b)$ in uporabimo lemo. Dobimo izraz za $\frac{f(x)}{g(x)}$. Po definiciji limite pokažemo, da izrek sledi.
   - **Izrek 2 (L'Hospitalovo pravilo)** Računanje limite oblike $\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\infty}{\infty}$.
     - **Dokaz.** Denimo, da $\lim_{x\downarrow a} \frac{f'(x)}{g'(x)} = B$. Naj bo $\epsilon > 0$. Po definiciji limite obstaja $b' \in (a, b)$, da velja $B - \epsilon < \frac{f'(c)}{g'(c)} < B + \epsilon$. Izberimo nek $x \in (a, b')$ in uporabimo lemo na intervale $[x, b']$. Dobimo oceno za izraz $\frac{f(x)-f(b')}{g(x)-g(b')}$. Pomnožimo neenakost z $\frac{g(x)-g(b')}{g(x)}$ na intervalu, kjer $g(x) > g(b')$ in $g(x) > 0$.
   - **Posledica 1.** Računanje limite oblike $\lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{0}{0}$.
     - **Dokaz.** Lahko predpostavimo, da je $A > 0$. Definiramo $F(t) = f(\frac{1}{t})$ in $G(t) = g(\frac{1}{t})$ za $t \in (0, \frac{1}{A})$. Preverimo predpostavki izreka 1. Posledica sledi.
   - **Posledica 2.** Računanje limite oblike $\lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\infty}{\infty}$.
     - **Dokaz.** Podobno.
   - *Opomba.* Kdaj lahko uporabimo L'Hospitalovi pravili?

9. Uporaba odvoda v geometriji
   - **Definicija.** Eksplicitno/implicitno/parametrično podana krivulja v kartezičnih koordinatah.
   - *Opomba.* Kateri izmed zgornjih zapisov je splošnejši?
   - *Primer.*
     - Krožnica. Implicitna in parametrična oblika.
     - Elipsa. Implicitna in parametrična oblika.
     - Hiperbola. Implicitna in parametrična oblika.
     - Kriveulja K je podana z enačbo $y^2 = x^3$. Določi parametrično obliko.
     - **Cikloida.** Parametrična oblika.
     - Nariši krivuljo, ki je parametrično podana: $x(t) = t^2 - 1$, $y(t) = t^3 - t,\ t \in \mathbb{R}$.
   - **Definicija.** Krivulja K podana kot množica točk s polarnima koordinatama.
     - Krožnica v polarnih koordinatah.
     - Premica v polarnih koordinatah.
     - Arhimedska spirala v polarnih koordinatah.
   - **Definicija.** Pot v ravnini. Tir poti. Paramtetrizacija od tira poti.
   - *Opomba.* Koliko parametrizacij ima tir poti (če ima vsaj eno)?
   - **Definicija.** Zvezna preslikava $F : I \to \mathbb{R}^2$. Odvedljiva pot. Zvezno odvedljiva pot.
   - *Opomba.* Geometrijski pomen odvoda poti.
   - **Izrek.** Naj bo $F : I \to \mathbb{R}^2$ zvezno odvedljiva pot, $t_0 \in I$ in denimo, da je $\dot{F}(t_0) \neq 0$. Kaj če je $\dot{\alpha}(t_0) \neq 0$?
   - - **Dokaz.** Iz zveznosti $\dot{\alpha}$ dobimo $\delta > 0$. Predpostavimo, da $\dot{\alpha} > 0$, torej $\alpha(t)$ je strogo naraščajoča na $(t_0 - \delta, t_0 + \delta)$. Zdaj lahko definiramo interval U. Pokažemo, da obstaja $\alpha^{-1} : U \to \mathbb{R}$, ki je zvezno odvedljiva, in da $(x, f(x)) = (\alpha(t), \beta(t))$ za ustrezen t.
       Odvod $(f(\alpha(t)))'$ izračunamo z odvajanjem obeh stran enačbe $f(\alpha(t)) = \beta(t)$.
   - **Posledica.** Kaj lahko povemo o funkciji f iz prejšnjega izreka, če je α in β dvakrat zvezno odvedljivi na (t_0, t_1) in $\dot{\alpha}(t) \neq 0$ za vse $t \in (t_0, t_1)$?
   - - **Dokaz.** Izračunamo $(f'(\alpha(t)))'$ kot odvod kompozicije.
   - **Definicija.** Kritična točka poti. Regularna točka poti. Regularna parametrizacija. Gladka krivulja. Gladek lok.
   - *Primer.* Določji kritični točki poti in nariši njen tir poti.
     - $\alpha(t) = \begin{cases} 0, & t \leq 0 \\ t^2, & t > 0 \end{cases}$, $\beta(t) = \begin{cases} t^2, & t \leq 0 \\ 0, & t > 0 \end{cases}$
     - $\alpha(t) = t^3,\ \beta(t) = t^2$.
     - $\alpha(t) = t^3,\ \beta(t) = t^3$.
     - $\alpha(t) = t^2,\ \beta(t) = t^2$.
   - Od česa je odvisna tangenta na tir poti? Enačba tangente na tir poti. Enačba normale.

4.4 NEDOLOČENI INTEGRAL

Vsaka odvedljiva funkcija f na intervalu I določa funkcijo f' na I. Denimo, da je poznamo predpis za funkcijo f'. Kako dobimo predpis za f? Ali je vsaka funkcija g na I odvod kakšne funkcije f na I?

1. Primitivna funkcija in nedoločeni integral
   - **Definicija.** Primitivna funkcija.
   - *Opomba.* (1) Recimo, da je F primitivna funkcija od f na množici I. Kako dobimo novo primitivno funkcijo? (2) Recimo, da sta F in G primitivni funkciji na intervalu I. Kaj lahko povemo o teh funkcijiah?
   - **Definicija.** Nedoločeni integral funkcije f. Integrand. Oznaka.
   - **Trditev.** Recimo, da je F primitivna funkcija od f na intervalu I. Kaj je njen nedoločeni integral?
   - *Opomba.* (1) Kako razumemo zapis nedoločenega integrala? (2) Kakšna je nasprotna operacija integriranja?
   - *Primer.* Funkcija, ki nima primitivne funkcije.
     - **Dokaz.** Z protislovjem.
2. Pravila za integriranje
   - **Trditev.** Osnovne računske operaciji z integrali.
     - **Dokaz.** Enostavno.
   - **Trditev.** Uvedba nove spremenljivke v nedoločeni integral.
     - **Dokaz.** Odvod kompozicije.
   - **Trditev.** Integracija po delih.
     - **Dokaz.** Odvod produkta.

4.5 DOLOČENI INTEGRAL

Naj bo $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ nenagitivna funkcija. Potem graf funkcije f omejuje območje A nad intervalom $[a, b]$. Če je f konstanta znamo izračunati ploščino A. Kaj če je f ni konstanta?

1. Riemannova vsota in Riemannov integral
   - Kako v splošnem izračanumo ploščino lika A?
   - *Primer.* Izračunaj ploščino pod grafom $f(x) = x^2$ na $[0, 1]$.
   - **Definicija.** Delitev D intervala $[a, b]$. Oznaka za dolžino i-tega podintervala. Velikost delitve. Testna točka. Usklajena izbira testnih točk T_D.
   - **Definicija.** Riemannova vsota funkcije f na $[a, b]$ pridružena delitvi D in usklajeni izbiri testnih točk T_D.
   - **Definicija.** Riemannov integral funkcije f na $[a, b]$. Določeni integral funkcije f na $[a, b]$. Kako pravimo funkcije, če integral obstaja? Oznaka.
   - *Primer.* Integrabilnost konstante.
     - **Dokaz.** Izračunamo $R(f, D, T_D)$.
   - **Trditev.** Potreben pogoj za integrabilnost.
     - **Dokaz.** Recimo, da f ni omejena. Potem vsaj na enem izmed podintervalov delitve neomejena. Na tem intervalu lahko za vsak $n \in \mathbb{N}$ najdemo testno točko t_j^m, da $f(t_j^m) \geq n$. Izračunamo $R(f, D, T_D^m)$ in upoštevamo definicijo Riemannova integrala.
   - *Opomba.* Ali v prejšni trditvi velja implikacija v obratno smer?
   - *Primer.* Omejena funkcija, ki ni Riemannovo integrabilna.
2. Darbouxove vsote in Darbouxov integral.
   - Predpostavka o funkcije, ki jo potrebujem. Oznake, ki jih potrebujemo (infumumi in supremumi). Kaj velja za te oznake?
   - **Definicija.** Spodnja Darbouxova vsota prirejena delitvi D. Zgornja Darbouxova vsota prirejena delitvi D.
   - *Opomba.* Kakšna zveza med $s(D)$, $S(D)$ in $R(f, D, T_D)$? Ali velja še več?
   - **Definicija.** Finejša delitev od delitve D.
   - **Trditev.** Kako so povezane Darbouxove vsote od delitve D in od finejše delitve D' od delitve D?
     - **Dokaz.** Dovolj je dokazati za primer $D' = D \cup \{y\}$. Recimo, da je $y \in [x_j - x_{j-1}]$. Definiramo m_j' in m_j''. V kakšni zvezi m_j', m_j'' in m_j? Izračunamo $s(D)$. Za $S(D)$ podobno.
   - **Trditev.** Kako sta povezana spodnja in zgornja Darbouxove vsote od poljubnih delitev D_1, D_2?
     - **Dokaz.** Delitev $D_1 \cup D_2$ je finejša od obeh. Uporabimo prejšnjo trditev.
   - *Opomba.* Ali obstajata sup množice spodnjih Darbouxovih vsot in inf množice zgornjih Darbouxovih vsot?
   - **Posledica.** Kaj pove prejšnja trditev o številah iz prejšnje opombe?
   - **Definicija.** Darbouxovo integrabilna funkcija f na $[a, b]$. Darbouxov integral funkcije f na $[a, b]$.

- **Trditev.** Karakterizacija Darbouxove integrabilnosti.
  - **Dokaz.** ($\Rightarrow$) Izberimo $\epsilon > 0$ in uporabimo lastnosti števil s in S. Dobimo delitve D_1 in D_2. Delitev $D_1 \cup D_2$ je finejša od obeh. Pokažemo, da $S(D_1 \cup D_2) - s(D_1 \cup D_2) < \epsilon$.
    ($\Leftarrow$) Uporabimo predpostavke in definiciji števil s in S za oceno izraza $S - s$.
- **Izrek.** Ali je vsaka zvezna funkcija f na $[a, b]$ Darbouxovo integrabilna?
  - **Dokaz.** Karakterizacija. Delitev dobimo iz dejstva, da f enakomerno zvezna na $[a, b]$.
- *Opomba.* Recimo, da je $f : [a, b] \to R$ omejena funkcija, ki je zvezna samo na intervalu (a, b). Ali je Darbouxovo integrabilna?
- **Izrek.** Ali je vsaka monotona funkcija f na $[a, b]$ Darbouxovo integrabilna?
  - **Dokaz.** Karakterizacija. Vzemimo ekvidistančno delitev (vsi intervali so enako dolgi).
- **Izrek.** Aditivnost domene.
  - **Dokaz.** ($\Rightarrow$) Karakterizacija. Vzemimo $\overline{D} = D \cup \{c\}$. Izračunamo $S(\overline{D}) - s(\overline{D})$.
    ($\Leftarrow$) Karakterizacija. $D = D_1 \cup D_2$ je delitev $[a, b]$.
- **Posledica.** Naj bo f omejena na $[a, b]$ in denimo, da za $r \in \mathbb{N}$ obstajajo $c_0, c_1, c_2, \dots, c_r$, da je $a = c_0 < c_1 < c_2 < \dots < c_r = b$, da je funkcija f na (c_{i-1}, c_i) zvezna za vse $i = 1, \dots, r$. Ali je f Darbouxovo integrabilna?
- **Posledica.** Ali je vsaka odsekoma zvezna funkcija na $[a, b]$ je Darbouxovo integrabilna?
- **Trditev.** Naj bo funkcija f Darbouxovo integrabilna na $[a, b]$. Kaj lahko povemo o dovolj majhnih delitvah?
  - **Dokaz!** Predpostavimo $M - m \neq 0$. Naj bo $\epsilon > 0$. Obstaja delitev $D_0 = \{x_0, x_1, \dots, x_r\}$: $S(D_0) - s(D_0) < \frac{\epsilon}{2}$. Definiramo $\delta = \frac{\epsilon}{2r(M-m)}$. Vzemimo delitev D, za katero velja $\delta(D) < \delta$ in razbijemo vsoto $S(D) - s(D)$ na vsoto po členih delitve D, ki ne vsebujejo nobene od točk delitve D_0 v svoji notranosti (ocenimo jo z finejšo delitvo $D_0 \cup D$) in vsote vseh ostalih členov. Ocenimo vsako vsoto po sebej.
- **Izrek.** Riemannova in Darbouxova integrabilnost. Zveza.
  - **Dokaz.** ($\Rightarrow$) Karakterizacija. Za vsak $i = 1, \dots, n$ obstaja $t_i, s_i :\ 0 \leq M_i - f(t_i) < \frac{\epsilon}{b-a}$ in $0 \leq f(s_i) - m_i < \frac{\epsilon}{b-a}$. Ocenimo $|S(D) - I|$ in $|s(D) - I|$ (prištejemo in odštejemo ustrezno $R(f, D, T_d)$).
    ($\Leftarrow$) Delto dobimo iz prejšnje trditve. Uporabimo oceno za $R(f, D, T_d)$ z Darbouxovami vsoti.
- **Izrek.** Kadar je kompozitum $F = g \circ f$ integrabilen?
  - **Dokaz.** Naj bo $\epsilon > 0$. Iz enakomerne zveznosti g dobimo $\delta > 0$. Iz integrabilnosti f dobimo tako delitev D, da $S_f(D) - s_d(d) < \epsilon\delta$. Razbijemo vsoto $S_f(D) - s_f(d)$ na Σ', kjer $M_i - m_i < \delta$ in Σ'', kjer $M_i - m_i \geq \delta$. Isto naredimo z vsoto $S_{g \circ f}(D) - s_{g \circ f}(D)$ in jo ocenimo.
- **Posledica.** Naj bo f integrabilna na $[a, b]$. Integrabilnost $|f|$ in f^n, $n \in \mathbb{N}$ na $[a, b]$

◦ Lastnosti določenega integrala

- **Trditev.** 6 lastnosti določenega integrala. Dogovora.
  - **Dokaz.** Vsota, razlika, množenje s skalarji: Riemannov integral (vsota).
    Produkt: f^2, g^2, $(f + g)^2$ so integrabilni.
    Monotonost: Riemannove vsote (podobno kot za limite).
    Trikotniška neenakost: $-|f(x)| \leq f(x) \leq |f(x)|$ za vse $x \in [a, b]$.

3. Osnovni izrek analize

- **Definicija.** Integral kot funkcija zgornje meje.
- **Osnovni izrek analize.**
  - **Dokaz!** (1) Naj bo $x, x' \in [a, b]$. Z oceno za $|F(x) - F(x')|$ pokažemo, da je F enakomerno zvezna na $[a, b]$ (Lipschitzeva).
    (2) Po definicije limite z upoštevanjem zveznosti f v točki x pokažemo, da $\lim\limits_{h \to 0} \dfrac{F(x+h) - F(x)}{h} = f(x)$.
- **Posledica.** Ali vsaka zvezna funkcija na $[a, b]$ ima primitivno funkcijo?
- *Opomba.* Ali vsaka integabilna funkcija ima primitivno funkcio?
- **Osnovni izrek integralnega računa. Leibnizova formula.**
  - **Dokaz!** f je zvezna, potem integral kot funkcija zgornje meje je primitivna funkcija od f. Izrek sledi. V spološnem: Izberimo poljubno delitev D in uporabimo Lagrangeev izrek na intervalu $[x_{i-1}, x_i]$ za izračun $F(x_i) - F(x_{i-1})$ ter seštejemo.
- *Opomba.* Ali zgornji izrek velja za vse zvezne funkcije?
- *Primer.* Nezvezna integrabilna funkcija, ki ima primitivno funkcijo: $F(x) = x^2 \sin \frac{1}{x}$, $F(0) = 0$.

4. Uvedba nove spremenljivke in integracija po delih v določenem integralu
   - **Izrek.** Naj bo ϕ zvezno odvedljiva funkcija na $[a, b]$ in f zvezna funkcija na Z_ϕ. Uvedba nove spremenljivke v določenem integralu.
     - **Dokaz.** Osnovni izrek analize, odvod komozicije in Leibnizova formula.
   - **Izrek.** Integracija po delih v določenem integralu.
     - **Dokaz.** Odvod produkta.
   - **Izrek.** Naj bo ϕ zvezno odvedljiva, naraščajoča funkcija na $[a, b]$ in f integrabilna funkcija na $[\phi(a), \phi(b)]$. Uvedba nove spremenljivke v določenem integralu.
     - **Dokaz!** Oglejmo Riemannovo vsoto $R((f \circ \phi)\phi',\ \overline{D},\ T_{\overline{D}})$. Kako ta Riemannova vsota povezana z Riemannovo vsoto $R(f,\ D,\ T_D)$? Enakost integralov pokažemo po definiciji Riemannova integrala z upoštavnjem lastnosti zveznih funkcij na zaprtem intervalu ter z uporabo Lagrangeeva izreka.
5. Povprečna vrednost
   Naj bo $x_1, x_2, \ldots, x_n \in \mathbb{R}$. Potem povprečna vrednost je $\frac{1}{n}(x_1 + x_2 + \ldots + x_n)$. Kaj če je teh x-ov neskončno? Kako lahko izračunamo povprečno temperaturo?
   - **Definicija.** Povprečna vrednost funkcije f.
   - *Opomba.* Kaj je geometrijski pomen povprečne vrednosti, če je f nenegativna funkcija?
   - **Izrek.** Ocena za povprečno vrednost μ. Kaj lahko povemo, če je f zvezna?
     - **Dokaz.** (1) Monotonost integrala.
       (2) Lastnost zvezne funkcije na zaprtem intervalu.
   - **Izrek.** Kaj velja za integral $\displaystyle\int_a^b f(x)g(x)\,dx$, če sta f in g integrabilni na $[a, b]$ in g povsod istega znaka? Kaj lahko povemo, če je f zvezna?
     - **Dokaz.** (1) Monotonost integrala.
       (2) Lastnost zvezne funkcije na zaprtem intervalu.
   - **Izrek.** Kaj velja za integral $\displaystyle\int_a^b f(x)g(x)\,dx$, če je f zvezna funkcija na $[a, b]$ in g nenegativna, padajoča in zvezno odvedljiva funkcija na $[a, b]$?
     - **Dokaz!** Osnovni izrek analize. Integracija po delih. Naredimo oceno za $\int_a^b f(x)g(x)\,dx$.
   - *Primer.* Oceni integral $\displaystyle\int_a^b \frac{\sin x}{x}\,dx$.

4.6 POSPLOŠENI INTEGRAL

Recimo, da je funkcija f na intervalu $[a, b]$ neomejena ali sam interval $[a, \infty)$ neomejen. Potem funkcija f ni integrabilna po Riemannu. Ali sploh lahko definiramo $\int_a^b f(x)\,dx$ ali $\int_a^\infty f(x)\,dx$?

1. Posplošeni integral na omejenem intervalu
   - **Definicija.** Posplošeni integral funkcije f na intervalu $[a, b]$. Posplošeno integrabilna funkcija f na $[a, b]$. Konvergenten/divergenten integral.
   - *Opomba.* (1) Ali je integrabilna funkcija tudi posplošena integrabilna? Ali integrala sta enaka? Kaj je pogoj iz definicije?
   - *Primer.* Konvergenca $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{x^p}\,dx$ in $\displaystyle\int_0^1 \ln x\,dx$.
   - **Izrek.** Kaj če je funkcija f absolutno integrabilna?
     - **Dokaz.** Pišemo $F(x) = \displaystyle\int_a^x f(t)\,dt,\ G(x) = \int_a^x |g(t)|\,dt$. Po predpostavki obstaja $\lim_{x\uparrow b} G(x) \Rightarrow G(x)$ izpolnjuje Cauchyjev pogoj pri b. Pokažemo, da je $F(x)$ tudi izpolnjuje Cauchyjev pogoj pri b.
   - **Izrek.** Kriterij za konvergenco posplošenega integrala (konvergenca v polu).
     - **Dokaz.** Konvergenca: Dovolj pokazati, da konvergira $\int_a^b |\frac{f(x)}{(x-a)^s}|$. Naj bo $t \in (a, b]$. Pokažemo, da je limita $\lim_{t\downarrow a} \int_t^b |\frac{f(x)}{(x-a)^s}|$ obstaja (limita naraščajoče funkcije).
       Divergenca: Navzdol ocenimo $(f(x) \geq m > 0)$ integral $\int_t^b \frac{f(x)}{(x-a)^s}$.
   - *Opomba.* Kaj če je $\lim\limits_{x\searrow a} f(x) \neq 0$?
   - *Primer.* Obravnavaj konvergenco integala $\int_0^1 \frac{e^x}{x}\,dx$
   - **Definicija.** Posplešena integrabilnost funkcije f na $[a, b]$, ki ima končno mnogo „slabih“ točk.
   - *Primer.* Konvergenca $\displaystyle\int_{-1}^1 \ln|x|\,dx$ in $\displaystyle\int_{-1}^1 \frac{1}{x}\,dx$.

2. Posplošeni integral na neomejenem intervalu
   - **Definicija.** Posplošeni integral funkcije f na $[a, \infty]$. Posplošeno integrabilna funkcija f na $[a, \infty]$. Konvergenten, divergenten integral. Posplošeno integrabilna funkcija f na $[-\infty, \infty]$.
   - *Primer.* Konvergenca $\int_1^\infty \frac{1}{x^p}\,dx$.
   - *Opomba.* Ali konvergira integral $\int_0^\infty \frac{1}{x^p}\,dx$?
   - *Primer.* Naj bo r racionalna funkcija. Ali obstaja $\int_a^\infty r(x)\,dx$?
   - **Izrek.** Cauchyjev pogoj za konvegenco integrala na neomejenem intervalu.
     - **Dokaz.** Osnovni izrek analize in Cauchyjev pogoj v neskončnosti.
   - *Primer.* Konvergenca $\int_1^\infty \frac{\sin x}{x}\,dx$.
   - **Izrek.** Kaj če je funkcija f absolutno integrabilna?
     - **Dokaz.** Podobno kot prej
   - *Primer.* Ali integral $\int_1^\infty \frac{\sin x}{x}\,dx$ absolutno konvergira?
   - **Izrek.** Kriterij za konvergenco posplošenega integrala (konvergenca v neskončnosti).
     - **Dokaz.** Naj bo $M \in [a, \infty)$. V integral $\int_a^M \frac{g(x)}{x^p}\,dx$ uvedemo novo spremenljivko $t = \frac{1}{x}$ in prevedemo izrek na izrek o konvergence v polu.
   - *Primer.* (1) Funkcija iz trikotnikov. Ali kriterij deluje?
     (2) Eulerjeva funkcija $\Gamma(s) = \int_0^\infty x^{s-1}e^{-x}\,dx$. Določi definicijsko območje. Dokaži, da $\Gamma(n+1) = n!$ za vse $n \in \mathbb{N}$.
   - **Izrek.** Integralski kriterij za konvergenco vrst.
     - **Dokaz.** Najprej ocenimo integral z delnimi vsotami vrste, nato dokažemo ekvivalenco.
   - *Zgled.* Konvergenca $\int_1^\infty \frac{1}{x^p}\,dx$ in $\sum_{n=1}^\infty \frac{1}{n^p}$.

4.7 UPORABA INTEGRALA V GEOMETRIJI

1. Dolžina loka
   - **Definicija.** Dolžina poti F. Izmerljiva pot F.
   - **Izrek.** Naj bo $F = (\alpha, \beta)$ zvezno odvedljiva pot. Dolžina poti F.
     - **Dokaz.** Izberimo delitev D intervala $[a, b]$. 1. S pomočjo Lagrangeeva izreka izračunamo $l(D)$. 2. Ocenimo razliko $|R(\sqrt{\dot\alpha^2 + \dot\beta^2}, D, T_D) - l(D)|$. 3. Z upoštevanjem enakomerne zveznosti $\dot\alpha^2$ in $\dot\beta^2$ ter integrabilnosti $\sqrt{\dot\alpha^2 + \dot\beta^2}$ ocenimo $|l(D) - \int_a^b \sqrt{(\dot\alpha(x))^2 + (\dot\beta(x))^2}\,dx|$. 4. S pomočjo finejše delitve naredimo oceno za $\sup\{l(D);\ D \text{ je delitev}\}$.
   - **Posledica.** Ali je zvezno odvedljiva pot izmerljiva?
   - *Primer.* Izračunaj dolžin enega loka cikloide $x(t) = at - \sin t,\ y(t) = a - \cos t,\ a > 0$.
   - **Trditev.** Dolžina grafa. Dolžina krivulje podane polarno.
     - **Dokaz.** Parametriziramo in poračunamo.
   - *Primer.* Obseg kroga s polmerom a.
   - **Trditev.** Naj bo $F : [a, b] \to \mathbb{R}^2$ in $G : [c, d] \to \mathbb{R}^2$ injektivni regularni parametrizaciji istega gladkega loka. Ali potem $l(F) = l(G)$?
     - **Dokaz.** Obstaja zvezno odvedljiva funkcija $\phi : [a, b] \to [c, d]$, da velja $G \circ \phi = F$ (zakaj?). Izračunamo dolžino poti F z uvedbo nove spremenljivke.
   - **Definicija.** Dolžina gladkega loka.
   - **Definicija.** Naravni parameter. Naravna parametrizacija.
   - **Izpeljava.** Ali ima vsak gladek lok z regularno parametrizacijo $F = (\alpha, \beta)$ naravno parametrizacijo?
     - **Dokaz.** Pišemo $\phi(t) = \int_a^t \sqrt{(\dot\alpha(s))^2 + (\dot\beta(s))^2}\,ds$. Pokažemo, da je ϕ bijektivna zvezno odvedljiva funkcija in definiramo $G = F \circ \phi^{-1}$. Pokažemo, da je G iskana parametrizacija.
   - **Definicija.** Ločna dolžina.
   - *Opomba.* Pitagorjev izrek in ločna dolžina.

2. Ploščine
   2.1 Ploščine likov med grafoma
      - **Trditev 1.** Naj bosta $f, g : [a, b] \to \mathbb{R}$ zvezni funkciji in denimo, da je $f(x) \geq g(x)$ za vse $x \in [a, b]$. Kaj je ploščina lika med grafoma nad intervalom $[a, b]$?
      - **Trditev 2.** Naj bosta $f, g : [a, b] \to \mathbb{R}$ zvezni funkciji (lahko imata presečišča). Kaj je ploščina lika med grafoma nad intervalom $[a, b]$?
      - **Trditev 3.** Naj bosta $g : [c, d] \to \mathbb{R}$ zvezna funkcija nad y-osjo. Kaj je ploščina lika nad intervalom $[c, d]$ na ordinatni osi?
      - **Trditev 4.** Ploščine med grafoma funkcij nad intervalom $[c, d]$ na ordinatni osi.
         - **Dokaz 1-4.** Poračunamo.
   2.2 Ploščina območja, ki je dano s krivuljo
      - **Trditev 5.** Naj bo $F : [a, b] \to \mathbb{R}^2$ zvezno odvedljiva pot. Kaj je ploščina lika, ki ga določa tir poti $F([a, b])$ nad intervalom $[x(a), x(b)]$?
      - **Trditev 6.** Naj bo $F : [a, b] \to \mathbb{R}^2$ zvezno odvedljiva pot. Kaj je ploščina lika, ki ga določa tir poti $F([a, b])$ nad intervalom $[y(a), y(b)]$ na ordinatni osi?
         - **Skica dokaza 5-6.** Naj bo $D : \ a = t_0 < t_1 < \ldots < t_n = b$ poljubna delitev intervala $[a, b]$ in S_D usklajen izbor testnih točk. Prevedemo z pomočjo Lagrangeeva izreka približek ploščine $pl(D, S_D) = \sum_{i=1}^{n} y(s_i)(x(t_i) - x(t_{i-1}))$ na neko Riemannovo vsoto. Zakaj $pl(D, S_D)$ približek?
      - **Definicija.** Usmerjenost (orijentacija) loka K.
      - **Definicija.** Gladka enostavna sklenjena krivulja.
      - **Definicija.** Kadar je regularna parametrizacija F krivulje K določa pozitivno usmerjenost (orijentacijo)?
      - **Trditev.** Naj bo $F : [a, b] \to \mathbb{R}^2$ regularna parametrizacija gladke enostavne sklenjene krivulje K, ki določa pozitivno usmerjenost K. Kaj je potem ploščina območja D znotraj K?
         - **Dokaz.** Uporabimo 5-6. trditve.
      - *Primer.* Izračunaj ploščinao astroide $x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{2}{3}}, \ a > 0$.
      - **Trditev.** Naj bo $r = r(\phi), \phi \in [\alpha, \beta]$ zvezno odvedljiva polarno podana krivulja. Kaj je potem ploščina območja D, ka ga določa krivulja skupaj z daljicama $\phi = \alpha, \ 0 \leq r \leq r(\alpha)$ in $\phi = \beta, \ 0 \leq r \leq r(\beta)$?
         - **Dokaz.** Krivuljo parametriziramo in uporabimo prejšnjo trditev.
3. Prostornina in površina rotacijskega telesa
   - **Definicija.** Rotacijska ploskev. Vrtenina.
   - **Trditev.** Kako izračunamo prostornino vrtenine?
      - **Dokaz.** Aproksimacija z valjem in Riemannova vsota.
   - **Trditev.** Kako izračunamo površino rotacijske ploskve?
      - **Dokaz.** Aproksimacija z prisekanem stožcem, Lagrangeev izrek in Riemannova vsota.

4.8 FUNKCIJSKA ZAPOREDJA IN VRSTE

1. Funkcijska zaporedja
   - **Definicija.** Funkcijsko zaporedje. Konvergenca po točkah. Limitna funkcija.
   - *Zgled.* Določi limitno funkcijo.
     - $f_n(x) = x^n,\ n \in \mathbb{N}$ na $[0,1]$. Ali je limitna funkcija zvezna?
     - Naj bo g zvezna funkcija na $\mathbb{R}$, $g \equiv 0$ na $\mathbb{R} \setminus (0,1)$ in $\displaystyle\int_0^1 g(x)\,dx \neq 0$: $g_n(x) = ng(nx),\ n \in \mathbb{N}$.

       Ali je $\lim_{n\to\infty} \int_0^1 g_n(x)\,dx = \int_0^1 \lim_{n\to\infty} g_n(x)\,dx$?
   - **Definicija.** Enakomerna konvergenca.
   - *Opomba.* Ali je vsako enakomerno konvergentno funkcijsko zaporedje tudi konvergira po točkah?
   - *Primer.* $f_n(x) = \frac{x}{n},\ n \in \mathbb{N}$ na $\mathbb{R}$. Ali je konvergenca enakomerna? Kaj če gledamo f_n na omejeni podmnožici $D \subset \mathbb{R}$?
   - **Trditev.** Ekvivalentni pogoj za enakomerno konvergenco (zapordje $(d_\infty(f_n, f))_n$).
   - *Primer.* $f_n(x) = x^n,\ n \in \mathbb{N}$ na $[0,1]$. Ali je konvergenca enakomerna?
   - **Definicija.** Enakomerno Cauchyjevo funkcijsko zaporedje.
   - **Izrek.** Karakterizacija enakomerne konvergence.
     - **Ideja dokaza.** Kot za zaporedja.
   - **Izrek.** Zadosten pogoj za zveznost limitne funkcije.
     - **Dokaz.** Definicija zveznosti v točki.
   - *Opomba.* Ali je dovolj konvergence po točkah?
2. Funkcijske vrste
   - **Definicija.** Funkcijska vrsta. Konvergenca po točkah. Vsota funkcijske vrste. Enakomerna konvergenca.
   - **Posledica.** Zadosten pogoj za zveznost vsote funkcijske vrste.
   - *Primer.* Dana vrsta: $f(x) = \sum_{n=1}^\infty x^n(1-x^n)$.
     - Dokaži, da vrsta konvergira po točkah na $[0,1]$.
     - Določi predpis za f.
     - Ali vrsta enakomerno konvergira na D_f? (Pomagaj si z zveznostjo).
   - **Izrek.** Weierstrassov kriterij. M-test za enakomerno konvergenco vrst.
     - **Dokaz.** Pokažemo, da je vrsta enakomerno Cauchyjeva.
   - **Posledica.** Zadosten pogoj za enakomerno konvergenco vrst $\sum_{n=1}^\infty a_n \sin(nx)$ in $\sum_{n=1}^\infty a_n \cos(nx)$.
3. Integriranje in odvajanje funkcijskih zaporedij in vrst
   - **Izrek.** Zadosten pogoj za zamenjavo vrstnega reda integriranja in limite pri integriranju funkcijskih zaporedij.
     - **Dokaz.** Po definiciji pokažemo, da je integral na desni res limita številskega zaporedja.
   - *Opomba.* Ali je dovolj konvergence po točkah?
   - **Posledica.** Zadosten pogoj za zamenjavo vrstnega reda integriranja in vsote pri integriranju funkcijskih vrst.
   - **Izrek.** Zadosten pogoj za odvedljivost limitne funkcije funkcijskega zaporedja. Kaj velja za njen odvod?
     - **Dokaz.** Osnovni izrek analize + Newton-Leibnizova formula.
   - **Posledica.** Zadosten pogoj za odvedljivost vsote funkcijske vrste. Kaj velja za njen odvod?
4. Potenčne vrste
   - **Definicija.** Potenčna vrsta s središčem v c.
   - *Primer.* Geometrijska vrsta $\sum_{n=0}^\infty x^n$. Kje konvergira?
   - **Izrek.** Obstoj konvergenčnega polmera. **Konvergenčni polmer.**
     - **Dokaz.** Naj bo $c = 0$. Recimo, da potenčna vrsta konvergira v $x = x_0 \neq 0$. Naj bo $r \in (0, |x_0|)$. Pokažemo, da je vrsta absolutno in enakomerno konvergira na $[-r, r]$.

       Definiramo $R = \sup\{|x_0|;\ \text{vrsta konvergira v } x_0\}$.
   - **Posledica.** Kaj lahko povemo o vsote potenčne vrste s konvergenčnim polmerom $R > 0$?
   - **Izrek.** Formuli za izračun konvergenčnega polmera.
     - **Dokaz.** Absolutna konvergenca in kvocientni kriterij.
   - *Primer.* Določi konvergenčno območje!
     - $\sum_{n=1}^\infty \frac{x^n}{n}$.
     - $\sum_{n=1}^\infty n^n x^n$.

- **Izrek.** Cauchy-Hadamardov izrek o konvergenčnem polmeru.
  - **Dokaz.** Naj bo $c = 0$ in $a = \limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|}$. Ločimo primeri:
    1) $a = 0$. Pokažemo, da je $R = 0$ (izberimo $x \neq 0$ in pokažemo, da vrsta divergira, ker členi ne grejo proti 0).
    2) $a \in [0, \infty)$. Pokažemo, da vrsta konvergira za vse $|x| < \frac{1}{a}$ (absolutna konvergenca) in divergira za vse $|x| > \frac{1}{a}$ (členi ne grejo prito 0).
- *Primer.* Določi konvergenčno območje vrste $\sum_{n=1}^{\infty} n!\, x^{n!}$.
- **Abelov izrek.** Zadosten pogoj za zveznost potenčne vrste v krajišču definicijskega območja. [brez dokaza]
- **Izrek.** Odvajanje in integriranje potenčnih vrst.
  - **Dokaz.** Dovolj, da pokažemo, da konvergenčni polmer pri odvajanju in integriranju ne spremeni.
- **Posledica.** Kaj lahko povemo o odvedljivosti vsote potenčne vrste?
- *Primer.* Seštej!
  - $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n}$.
  - $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} n(x-1)^n$.

5. Taylorjeva formula in Taylorjeva vrsta
- Naj bo $p \in \mathbb{R}_n[x]$ in naj bosta $a, h \in \mathbb{R}$. Izračunaj $p(a+h)$. Kaj če v ta enakost vstavimo $x = a + h$?
- **Definicija.** n-ti Taylorjev polinom funkcije f pri točke a. Oznaka.
- *Opomba.* Naj bo f polinom stopnje n. Ali je $T_{n,a}(x) = f(x)$? Ali enakost velja v splošnem (če f ni polinom)? **Ostanek** pri aproksimaciji f s Taylorjevim polinomom. Zapis.
- **Taylorjev izrek.** Velikost ostanka.
  - **Dokaz.** Najprej pokažemo, da $R_{n,a}^{(k)}(a) = 0$ za $0 \leq k \leq n$. Fiksiramo $x \in I$ in pišemo: $R_{n,a}(x) = s(x-a)^{n+1}$ za nek $s \in \mathbb{R}$. Za funkcijo $g(y) = R_{n,a}(y) - s(y-a)^{n+1}$ n-krat uporabimo Rollov izrek na intervalu med x in a in dobimo izraz za s.
- *Primer.* Približno izračunaj $\sqrt{1.1}$ in oceni napako s T_1.
- **Definicija.** Taylorjeva vrsta.
- *Opomba.* Kaj se lahko zgodi s prirejeno Taylorjevo vrsto funkcije f?
- **Izrek.** Denimo, da je funkcija f vsota konvergenčne potenčne vrste z konvergenčnim polmerom $R > 0$. Ali je potem funkcija f enaka svoje prirejene Taylorjeve vrste v točke a, $|a| < R$?
  - **Dokaz.** Vrsto $\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$ radi bi s pomočjo binomske formule uredili po potencah $x - a$ in s pomočjo odvodov izračunali koeficienti.
- *Primer.* $f(x) = \begin{cases} \exp(-\frac{1}{x}), & x > 0; \\ 0, & x \leq 0. \end{cases}$. Ali je f enaka vsoti prirejene Taylorjeve vrste na kakšnem intervalu, ki vsebuje 0?
- **Definicija.** Realno analitična funkcija f na odprtem intervalu I. Oznaka.
- *Opomba.* Ali je f vsota prirejene Taylorjeve vrste? Kakšna zveza med množico realno analitičnih funkcij na I in $C^{\infty}(I)$?
- **Taylorjev izrek.** Splošna oblika ostanka.
  - **Dokaz.** Naj bo $b, x \in I$ in $p \in \mathbb{N}$. Definiramo $F(x) = T_{n,x}(b) + (\frac{b-x}{b-a})^p R_{n,a}(b)$. Uporabimo Rollov izrek na intervalu med a in b.

6. Taylorjeve vrste osnovnih funkcij
- Eksponentna funkcija (središče v 0).
  - **Izpeljava.** Izračunamo odvodi in ocenimo ostanek.
- Sinus (središče v 0). Cosinus (središče v 0).
  - **Izpeljava.** Sinus: Izračunamo odvodi in ocenimo ostanek. Cosinus: $\cos x = (\sin x)'$.
- Logaritem $\ln(x+1)$ (središče v 0).
  - **Izpeljava.** Enkrat odvajamo in zapišemo rezultat kot vsoto geometrijske vrste, nato integriramo po členih.
- **Posplošeni binomski koeficient.** Binomska vrsta (središče v 0).
  - **Izpeljava.** Izračunamo odvodi in ocenimo ostanek.
    Za $x \in (0, 1)$ uporabimo običajno formulo za ostanek.
    Za $x \in (-1, 0)$ uporabimo pošplošeno formulo z $p = 1$: ocenimo vsak člen posebej, to, da zaporedje $(a_k(x))_k$ konvergira proti 0 pokažemo s tem, da vrsta $\sum_{k=1}^{\infty} a_k(x)$ konvergira.
- Koren $\sqrt{1+x}$ (središče v 0).

5 METRIČNI PROSTORI

1. Metrični prostori
   - **Definicija.** Metrični prostor. Metrika.
   - *Primer.* Pokaži, da so metrični prostori:
     - Realna števila z običajno metriko: $(\mathbb{R}, \; |\cdot|)$. **Diskretna metrika**.
     - Kompleksna števila z običajno metriko: $(\mathbb{C}, \; |\cdot|)$.
     - $\mathbb{R}^n$ z evklidsko metriko $d_2(x,y) = \sqrt{(x_1-y_1)^2 + \ldots + (x_n-y_n)^2}$.
     - Naj bo (M,d) metrični prostor in $N \subset M$. Ali je $(N, d_{|N\times N})$ metrični prostor?
     - Naj bo $M = C[a,b]$ in $d_\infty(f,g) = \max\{|f(x)-g(x)|;\, x \in [a,b]\}$. Ali je metrični prostor?
   - **Definicija.** Odprta krogla. Zaprta krogla. Okolica točke.
   - *Primer.* Določi odprto in zaprto enotsko kroglo s središčem v 0:
     - $(\mathbb{R}^2, d_2)$.
     - Pokaži, da je metrični prostor: $(\mathbb{R}^2, d_\infty)$, $d_\infty((x_1,x_2),(y_1,y_2)) = \max\{|x_1-y_1|, |x_2-y_2|\}$.
   - **Definicija.** Notranja točka. Zunanja točka. Robna točka. Notranjost. Rob. Oznake.
   - *Opomba.*
     - Karakterizacija notranji točke z okolicami.
     - Karakterizacija zunanji točki z okolicami.
     - Kako sta povezani zunanji in notranji točki?
     - Naj bo (M,d) metrični prostor. Kako lahko zapišemo množico M kot unijo?
   - *Primer.* Določi notranji, zunanji in robne točke:
     - $A = [a,b] \subset \mathbb{R}$, $B = (a,b) \subset \mathbb{R}, (\mathbb{R}, |\cdot|)$.
     - $A = [a,b] \times \{0\} \subset \mathbb{R}^2, (\mathbb{R}^2, d_2)$.
   - *Opomba.*
     - Ali je vsaka notranja točka množice A leži v A?
     - Ali lahko kakšna zunanja točka množice A leži v A?
     - Kje lahko leži robna točka množice A? Ali je robna točka množice A tut robna točka množice A^c?
   - **Definicija.** Odprta podmnožica. Zaprta podmnožica.
   - **Trditev.** Karakterizacija odprtosti s komplementom.
     - **Dokaz.** Enostavno.
   - *Primer.* Obravnavaj odprtost oz. zaprtost podmnožic:
     - Naj bo (M,d) metrični prostor: $M \subset M$, $\emptyset \subset M$.
     - Naj bo (M,d) metrični prostor, $x \in M$: $A = \{x\}$.
     - $A = (1,3) \times \{0\} \subset \mathbb{R}^2$, $B = [1,3] \times \{0\} \subset \mathbb{R}^2$, $\mathbb{R}^2$ z običajno metriko.
   - **Izrek.** Naj bo O družina vseh odprtih množic metričnega prostora (M,d). Naštej 3 lastnosti.
     - **Dokaz.** Definicija preseka, unije in odprte množice.

     Opomba. Zakaj dovoljujemo le presek končne družine odprtih množic?
   - *Primer.* Števna družina odprtih množic, katere presek ni odprt.
   - **Izrek.** Naj bo Z družina vseh zaprtih množic metričnega prostora (M,d). Naštej 3 lastnosti.
     - **Dokaz.** Prehod na komplement + prejšnji izrek.
   - **Posledica.** Ali je vsaka končna podmnožica metričnega prostora zaprta?
   - **Trditev.** Odprtost/zaprtost odprte in zaprte krogle.
     - **Dokaz.** Odprtost pokaemo po definciji ($r_1 = r - d(a,x)$). Zaprtost s prehodom na komplement.
   - **Definicija.** Zaprtje.
   - *Opomba.* Ali je zaprtje zaprta množica? Čemu je enako zaprtje od zaprtja?
   - *Primer.* Ali je zaprta krogla vedno enaka zaprtju odprte krogle? $M = \{a,b,c\}$, kjer a,b,c oglišča enakostraničnega trikotnika s stranico 1.
   - **Definicija.** Omejena podmnožica. Stekališče množice.
   - *Opomba.* Ali sta stekališče zaporedja in stekališče množice različna pojma? Ali končne množice lahko ima stekališča?
   - **Izrek.** Karakterizacija stekališča z okolicami.
     - **Dokaz.** $(\Rightarrow)$ Definicija stekališča množice.

       $(\Leftarrow)$ Induktivno najdemo neskončno členov.
   - **Posledica.** Karakterizacija zaprtosti z stekališči.
     - **Dokaz.** $(\Rightarrow)$ Kakšne so točke lahko stekališča množice A?

       $(\Leftarrow)$ Dokažemo kontro pozitivno obliko.

- **Posledica.** Ali je množica stekališč množice A zaprta množica?
  - **Dokaz.** Naj bo S množica stekališč množice A. Pokažemo, da je S^c odprt. Vzemimo $x \in S^c$. Lahko najdemo tak r_0, da $K(x, r_0) \cap A \subset \{x\}$. Pokažemo, da ta krogla vsebovana v S^c.

2. Zaporedja v metričnih prostorih
   - **Definicija.** Zaporedje v metričnem prostoru. n-ti člen zaporedja. Oznake.
   - **Definicija.** Stekališče zaporedja.
   - **Definicija.** Konvergentno zaporedje. Limita zaporedja.
   - **Trditev.** (1) Ali je limita zaporedja tut stekališče zaporedja? Ali velja obrat?
     (2) Ali lahko ima zaporedje več stekališč?
     (3) Ali je limita ena sama? Ali je edino stekališče?
     - **Dokaz.** Kot za zaporedja.
   - *Primer.* Naj bo $(\mathbb{R}^n, d_2)$ m. p. Kako je s konvergenco zaporedja $(x^{(m)})_m$, $x^{(m)} = (x_1^{(m)}, x_2^{(m)}, \ldots, x_n^{(m)})$?
   - **Definicija.** Cauchyjev pogoj.
   - **Izrek.** Ali je vsako konvergentno zaporedje v metričnem prostoru izpolnjuje Cauchyjev pogoj?
     - **Dokaz.** Kot za zaporedja.
   - *Opomba.* Ali je vsako Cauchyjevo zaporedje v metrčnem prostoru konvergentno?
   - **Definicija.** Poln metrični prostor.
   - *Primer.* Polni in nepolni metrični prostori.
   - **Izrek.** Ali je konvergenca v $C[a, b]$ z običajno metriko d_∞ enakomerna konvergenca?
     - **Dokaz.** Definicija konvergence v metričnem prostoru in definicija enakomerne konvergence.
   - **Izrek.** Ali je metrični prostor $(C[a, b], d_\infty)$ poln?
     - **Dokaz.** Najprej s pomočjo Cauchyjeva pogoja pokažemo, da Cauchyjevo zaporedje v $C[a, b]$ konvergira po točkah proti f. Nato pokažemo, da konvergenca enakomerna in uporabi prejšnji izrek.
   - *Primer.* Množico $C[a, b]$ opremimo z metriko: $d_1(f, g) = \int_a^b |f(x) - g(x)|\, dx$. Ali je $(C[a, b], d_1)$ poln?

3. Kompaktnost
   - **Definicija.** Pokritje. Odprto pokritje. Zaprto pokritje. Končno pokritje. Podpokritje.
   - **Definicija.** Kompaktna podmnožica.
   - *Primer.* Ali je zaprt/odprt interval kompakten? Ali je $\mathbb{R}$ z običajno metriko kompakten?
   - **Izrek.** Kaj lahko povemo o vsake kompaktne podmnožice K metričnega prostora (M, d)?
     - **Dokaz.** Omejenost: Naj bo $a \in M$. Izberimo odprto pokritje $O_r = K(a, r)$, $r > 0$.
       Zaprtost: Pokažemo, da komplement odprt. Ustrezno pokritje: $O_r = \{x \in M; d(x, c) > r\} = (\overline{K}(c, r))^c$.
   - **Izrek.** Kaj lahko povemo o vsake zaprte podmnožice Z v kompaktni množici K?
     - **Dokaz.** Izberimo poljubno odprto pokritje $\{O_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$ in dodamo mu še Z^c. To je odprto porkitje od K.
   - **Izrek.** Heine-Borel. Kompaktnost v $\mathbb{R}$.
     - **Dokaz.** Enostavno.
   - **Lema 1.** Ali je presek zaporedja vloženih zaprtih intervalov prazen.
     - **Dokaz.** Vemo, da obstaja natanko ena točka v preseku.
   - **Lema 2.** Ali je presek zaporedja padajočih kvadrov v $\mathbb{R}^n$.
   - **Lema 3.** Ali je zaprt kvader $P = [a_1, b_1] \times \ldots \times [a_k, b_k]$ kompaktna podmnožica v $\mathbb{R}^k$?
     - **Dokaz.** Konstruiramo zaporedje padajočih kvadrov, ki jih ne moremo pokriti z končno mnogo članicami pokritja $\{O_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$. Pokažemo, da vsaj enega kvadra iz tega zaporedja lahko pokrijemo.
   - **Izrek.** Splošen Heine-Borel. Kompaktnost v $\mathbb{R}^n$.
     - **Dokaz.** Kot pri $n = 1$ z uporabo kompaktnosti zaprtega kvadra.
   - **Izrek.** (1) Kaj ima vsaka neskončna podmnožica točk, ki leži v kompaktni podmnožici?
     (2) Kaj ima vsako zaporedje $(a_n)_n$ v kompaktni podmnožici?
     - **Dokaz.** (1) Z protislovjem pokrijemo množico A kroglami s končnim številom elementov iz A.
   - *Opomba.* Kje ležita stekališči iz prejšnjega izreka?
   - **Posledica.** Ali ima vsako zaporedje v kompaktni množici K konvergentno podzapoedje z limito v K?
   - **Lema.** Kaj velja, če ima Cauchyjevo zaporedje $(a_n)_n$ v metričnem prostoru stekališče?
     - **Dokaz.** Enostavno.
   - **Izrek.** Ali je vsak kompakten metrični prostor poln?
     - **Dokaz.** Sledi iz prejšnjega izreka in prejšnji lemi.
   - **Izrek.** Kaj lahko povemo o preseku padajočega zaporedja nepreacnih zaprtih množic v kompaktni množici?
     - **Dokaz.** Definiramo $V_j = M \setminus K_j$. Recimo,da $\bigcap_{j=1}^{\infty} = \emptyset$ in uporabimo komplement.

4. Podprostori metričnega prostora
   Naj bo (M, d) metrični prostor in $A \subset M$ podmnožica.
   - Metrični podprostor.
   - Oznaka za kroglo s središčem v $a \in A$ in polmerom r v metričnem prostoru $(A, d_{|A \times A})$.
   - **Izrek.** Karakterizacija odprtih množic v metričnem prostoru $(A, d_{|A \times A})$.
     – **Dokaz.** Za odprte množice $O \subset M$ velja: $\bigcup_{a \in O} K(a, r_a) = O$, kjer $K(a, r_a) \subset O$.
   - **Izrek.** Karakterizacija zaprtih množic v metričnem prostoru $(A, d_{|A \times A})$.
     – **Dokaz.** S prehodom na komplemente.
   - **Izrek.** Karakterizacija kompaktnih množic v metričnem prostoru $(A, d_{|A \times A})$.
     – **Dokaz.** Enostavno po definiciji kompaktnosti.
5. Preslikave med metričnimi prostori
   Naj bosta (M, d) in (M', d') metrična prostora. Naj bo $D \subset M,\ D \neq \emptyset$. Obravnamo preslikave $f : D \to M'$.
   - **Definicija.** Kadar je preslikava zvezna v točki $a \in D$?
   - *Opomba.* Ekvivalente definicije.
   - **Izrek.** Karakterizacija zveznosti v točki z zaporedji.
     – **Dokaz.** Enako kot v $\mathbb{R}$.
   - **Definicija.** Zvezna preslikava na množici $A \subset D$. Zvezna preslikava.
   - **Izrek.** Karakterizacija zveznosti z odprtimi množicami.
     – **Dokaz.** Karakterizacija zveznosti z okolicami.
   - **Posledica.** Ali je kompozitum zveznih preslikav zvezna preslikava?
   - **Izrek.** Karakterizacija zveznosti z zaprtimi množicami.
     – **Dokaz.** S prehodom na komplemente.
   - *Primer.* Ali je zvezna preslikava slika odprte množice v odprte (konstantna preslikava)?
   - **Definicija.** Kadar je preslikava f enakomerno zvezna?
   - *Opomba.* Ali je enakomerno zvezna preslikava zvezna? Ali velja obratno?
   - **Izrek.** Ali je zvezna preslikava na kompaktni množici enakomerno zvezna?
     – **Dokaz.** Kot v $\mathbb{R}$.
   - **Izrek.** Ali je slika zvezne preslikave na kompaktni množici kompaktna množica?
     – **Dokaz.** Definicija kompaktnosti + karakterizacija zveznosti z praslikami.
   - **Izrek.** Naj bo $f : K \to \mathbb{R}$ zvezna preslikava na kompaktni množici $K \subset M$, $\mathbb{R}$ z običajno metriko. Kaj lahko povemo o f?
     – **Dokaz.** Omejenost sledi iz prejšnjega izreka.
       To, da maksimum dosežen sledi iz dejstva, da je $\sup f(K)$ stekališče množice $f(K)$ in zaprtosti $f(K)$.
6. Banachovo skrčitveno načelo
   - **Definicija.** Skrčitev.
   - *Opomba.* Ali je vsaka skrčitev enakomerno zvezna preslikava?
   - **Izrek.** Banachovo skrčitveno načelo.
   - *Opomba.* Oceni $d(a, x_m)$.
7. Nadaljni primeri metričnih prostorov
   Naj bo X realen ali kompleksen vektorski prostor in naj bo $||\cdot|| : X \to \mathbb{R}$ norma na X. Potem je $d(x, y) = ||x - y||$ za vse $x, y \in X$ metrika na X. Pravimo ji **inducirana metrika.**
   - *Primer.*
     – $(\mathbb{R}^n,\ ||\cdot||_p)$ inducira metriko d_p na $\mathbb{R}^n$. $||x||_p = \sqrt[p]{|x_1|^p + |x_2|^p + \ldots + |x_n|^p}$.
     – $(\mathbb{R}^n,\ ||\cdot||_\infty)$ inducira metriko d_∞. $||x||_\infty = \max\{|x_i|;\ i = 1, \ldots, n\}$.
     – Naj bo $f \in C[a, b]$: $||f|| = \max\{|f(x)|;\ x \in [a, b]\}$. $(C[a, b], ||\cdot||)$ je normiran vektorski prostor. Inducira običajno (supremum) metriko na $C[a, b]$.
   - **Definicija.** Banachov prostor.
   - *Opomba.* Ali je končnorazsežen vektorski prostor poln? Ali je $(C[a, b],\ ||\cdot||_\infty)$ Banachov prostor?
   - Naj bo X realen vektorski prostor s skalarnim produktom. Potem $||x|| = \sqrt{\langle x, x \rangle}$ definira normo na X. Ali je $(\mathbb{R}^n,\ \langle , \rangle)$, $\langle x, y \rangle = \sum_{i=1}^n x_i y_i$ poln?
   - **Definicija.** Hilbertov prostor.
   - *Primer.*
     – $(\mathbb{R}^n,\ \langle , \rangle)$ je Hilbertov prostor.
     – Izkaže se: $(C[a, b],\ \langle , \rangle)$ ni poln metrični prostor.