Analiza 2a

Ruslan Urazbakhtin

21. julij 2025

[verzija 21. julij 2025]

Kazalo

1 Hilbertovi prostori

1.1 Vektorski prostori s skalarnim produktom

Naj bo X vektorski prostor nad $\mathbb{R}$ (ali nad $\mathbb{C}$).

Definicija 1.1. **Skalarni produkt** je preslikava $\langle\ ,\ \rangle : X \times X \to \mathbb{R}$ (oz. $\mathbb{C}$) za katero velja:

1. $\forall x \in X \,.\, \langle x,\, x\rangle \geq 0$;
2. $\forall x \in X \,.\, \langle x,\, x\rangle = 0 \iff x = 0$;
3. $\forall x, y \in X \,.\, \langle x,\, y\rangle = \overline{\langle y,\, x\rangle}$;
4. $\forall x, y, z \in X \,.\, \forall \lambda, \mu \in \mathbb{R}$ (oz. $\mathbb{C}$) $.\, \langle \lambda x + \mu y,\, z\rangle = \lambda \langle x,\, z\rangle + \mu \langle y,\, z\rangle$.

Opomba 1.2. 1. - 2. je **pozitivna definitnost** skalarnega produkta, 3. je **poševna simetričnost** (**simetričnost** nad $\mathbb{R}$), 4. je linearnost v prvem faktorju.

Trditev 1.3 (Cauchy-Schwartzova neenakost)**.** *Naj bo $\langle\ ,\ \rangle$ skalarni produkt na X. Velja:*

$$\forall x, y \in X \,.\, |\langle x,\, y\rangle| \leq \sqrt{\langle x,\, x\rangle} \cdot \sqrt{\langle y,\, y\rangle} = ||x|| \cdot ||y||.$$

Dokaz. Nad $\mathbb{R}$: Definiramo $t \to \langle x + ty,\, x + ty\rangle = f(t) \geq 0$.
Nad $\mathbb{C}$: Naj bo $x, y \in X$. Obstaja $\alpha \in \mathbb{C},\ |\alpha| = 1$, da $\langle x,\, y\rangle = \alpha \cdot |\langle x,\, y\rangle|$. □

Definicija 1.4. **Norma** na vektorskem prostoru X je preslikava $||\ || : X \to \mathbb{R}$ za katero velja:

1. $\forall x \in X \,.\, ||x|| \geq 0$;
2. $\forall x \in X \,.\, ||x|| = 0 \iff x = 0$;
3. $\forall \lambda \in \mathbb{R}$ (oz. $\mathbb{C}$) $.\, ||\lambda x|| = |\lambda| \cdot ||x||$;
4. Trikotniška neenakost: $\forall x, y \in X \,.\, ||x + y|| \leq ||x|| + ||y||$.

Trditev 1.5. *Naj bo $(X, \langle\ ,\ \rangle)$ vektorski prostor s skalarnim produktom. Potem je $(X, ||\ ||)$, kjer je $\forall x \in X \,.\, ||x|| = \sqrt{\langle x,\, x\rangle}$, vektorski prostor z normo.*

Dokaz. Preverimo lastnosti. Za trikotniško neenakost uporabimo CS neenakost. □

Trditev 1.6. *Naj bo $(X, ||\ ||)$ vektorski prostor s normo. Potem je (X, d), kjer je metrika definirana s predpisom $\forall x, y \in X \,.\, d(x, y) = ||x - y||$, metrični prostor.*

Dokaz. Preverimo lastnosti. □

1.2 Hilbertovi prostori

Definicija 1.7. **Hilbertov prostor** je vektorski prostor X s skalarnim produktom $\langle\ ,\ \rangle$, ki je v metriki, porojeni iz skalarnega produkta, poln metrični prostor.

Opomba 1.8. $(X, \langle\ ,\ \rangle) \rightsquigarrow (X, ||\ ||) \rightsquigarrow (X, d)$, kjer je $\forall x, y \in X \,.\, d(x, y) = ||x - y||$.

Opomba 1.9. **Banachov prostor** je vektorski prostor X z normo $||\ ||$, ki je v metriki, porojeni iz norme, poln metrični prostor.

Zgled 1.10.

1. Naj bo $X = \mathbb{R}^n$. Definiramo skalarni produkt. Naj bo $x, y \in \mathbb{R}^n$, $x = (x_1 \ldots, x_n)$ in $y = (y_1, \ldots, y_n)$. **Standardni skalarni produkt** je
$$x \cdot y = \sum_{k=1}^{n} x_k y_k.$$
Ta skalarni produkt nam da normo
$$||x|| = \sqrt{\sum_{k=1}^{n} x_k^2},$$
ki porodi metriko
$$d_2(x, y) = \sqrt{\sum_{k=1}^{n} (x_k - y_k)^2}.$$
Vemo, da je $(\mathbb{R}^n, d_2)$ poln metrični prostor. Torej $(\mathbb{R}^n, \cdot)$ Hilbertov prostor.
2. Na $\mathbb{R}^n$ lahko definiramo tudi druge norme, npr.
   - $||x||_\infty = \max\{|x_1|, \ldots, |x_n|\}$;
   - $||x||_1 = |x_1| + \ldots + |x_n|$.

   Te dve normi ne prideta iz skalarnega produkta, ker za njih ne velja paralelogramsko pravilo. $(\mathbb{R}^n, ||x||_\infty)$ in $(\mathbb{R}^n, ||x||_1)$ sta Banachova prostora.
3. Naj bo $X = \mathbb{C}^n$. Definiramo skalarni produkt. Naj bo $z, w \in \mathbb{C}^n$, $z = (z_1 \ldots, z_n)$ in $w = (w_1, \ldots, w_n)$. **Standardni skalarni produkt** je
$$z \cdot w = \sum_{k=1}^{n} z_k \overline{w_k}.$$
Ta skalarni produkt nam da normo
$$||z|| = \sqrt{\sum_{k=1}^{n} |z_k|^2},$$
ki porodi metriko
$$d_2(z, w) = \sqrt{\sum_{k=1}^{n} |z_k - w_k|^2}.$$
Vemo, da je $(\mathbb{C}^n, d_2)$ poln metrični prostor. Torej $(\mathbb{C}^n, \cdot)$ Hilbertov prostor.

1.3 Prostor $L^2([a,b])$

Trditev 1.11. *Naj bo $C([a,b])$ vektorski prostor nad $\mathbb{R}$. Potem je s predpisom*
$$\forall f, g \in C([a,b])\,.\ \langle f,\ g\rangle = \int_a^b f(x)g(x)\,dx$$
definiran skalarni produkt na $C([a,b])$.

Dokaz. Preverimo lastnosti. □

Trditev 1.12. $(C([a,b]), \langle\ ,\ \rangle)$ *ni Hilbertov prostor.*

Dokaz. Definiramo $f_n(x) = \begin{cases} 1; & \frac{1}{n} \leq x \leq 1 \\ nx; & -\frac{1}{n} < x < \frac{1}{n} \\ -1; & -1 \leq x \leq -\frac{1}{n} \end{cases}$. Pokažemo, da je $(f_n)_n$ Cauchyjevo zaporedje v $C([a,b])$, ki nima limite. □

Definicija 1.13. Naj bo (M,d) metrični prostor. Pravimo, da lahko **napolnimo** prostor M, če obstaja prostor $(\overline{M}, \overline{d})$, za kateri velja:

1. $(\overline{M}, \overline{d})$ je poln metrični prostor;
2. $M \subseteq \overline{M}$;
3. $\overline{d}|_{M\times M} = d$;
4. M je gost v $\overline{M}$, tj. $\operatorname{Cl} M = \overline{M}$.

Prostoru $\overline{M}$ rečemo **napolnitev** prostora M.

Opomba 1.14. Ideja: $\overline{M}$ je prostor vseh limit Cauchyjevih zaporedij v M (+ kvocient).

Primer 1.15. Naj bo $M = (0,1)$, $d_2(x,y) = |x-y|$. Potem napolnitev $\overline{M}$ prostora M je $\overline{M} = [0,1]$.

Opomba 1.16. Označili smo z $L^1(A) = \{f : A \to \mathbb{R} \mid \int_A |f|\,dx \text{ obstaja}\}/_\sim$ prostor vseh absolutno integrabilnih funkcij, kjer je $\forall f,g \in L^1\,.\, f \sim g \iff f = g$ s.p.

Vpeljemo zdaj s kvadratom integrabilne funkcije:

$$L^2([a,b]) = \left\{ f : [a,b] \to \mathbb{R} \mid \int_a^b f^2(x)\,dx \text{ obstaja} \right\} /_\sim,$$

kjer je $\forall f,g \in L^2\,.\, f \sim g \iff f = g$ s.p.
V tem prostoru gotovo so

- Zvezne funkcije: $C([a,b]) \subseteq L^2([a,b])$;
- Odsekoma zvezni funkciji;
- $f(x) = \frac{1}{\sqrt[4]{x-a}}$ itd.

Cilj Želimo posplošiti prostor $(\mathbb{R}, \cdot)$.
Naj bo $f, g \in L^2$, potem $|f \cdot g| \leq \frac{|f|^2+|g|^2}{2} \implies f \cdot g \in L^1([a, b])$. Torej lahko definiramo

$$\langle f,\, g\rangle = \int_a^b f(x)g(x)\, dx.$$

Trditev 1.17. *$L^2([a, b])$ je vektorski prostor.*

Dokaz. Preverimo lastnosti. □

Torej $L^2([a, b])$ je vektorski prostor nad $\mathbb{R}$ s skalarnim produktom

$$\langle f,\, g\rangle = \int_a^b f(x)g(x)\, dx.$$

Očitno, da je $C([a, b]) \leq L^2([a, b])$.

Izrek 1.18. *$L^2([a, b])$ je Hilbertov in $L^2([a, b])$ je napolnitev $C([a, b])$.*

Opomba 1.19.

$$\forall f \in L^2([a, b])\,.\, \exists f_n \in C([a, b])\,.\, \lim_{n\to\infty} f_n = f \iff \lim_{n\to\infty} ||f_n - f|| = 0 \iff \lim_{n\to\infty} \sqrt{\int_a^b (f_n(x) - f(x))^2\, dx} =$$

Opomba 1.20. Nad $\mathbb{C}$: $f = u + iv,\ u, v : [a, b] \to \mathbb{R}$. Potem

$$\int_a^b f(x)\, dx = \int_a^b u(x)\, dx + i \int_a^b v(x)\, dx$$

in

$$\langle f,\, g\rangle = \int_a^b f(x)\overline{g(x)}\, dx.$$

Zgled 1.21. Vzemimo $[0, 1]$. Definiramo $f_n(x) = \begin{cases} \sqrt{n}; & 0 < x \leq \frac{1}{n} \\ 0; & \text{sicer} \end{cases}$.
Velja: $\lim_{n\to\infty} f_n(x) = 0$ za $x \in [0, 1]$. Ali je $\lim_{n\to\infty} f_n(x) = 0$ v $L^2([0, 1])$?

Zgled 1.22. TODO:

1.4 Ortogonalnost

Definicija 1.23. Naj bo $(X, \langle\ ,\ \rangle)$ vektorski prostor s skalarnim produktom, $A \subseteq X$, $A \neq \emptyset$. Naj bosta $x, y \in X$.

- x je **pravokoten** na y, če $\langle x,\, y\rangle = 0$, tj. $x \perp y \iff \langle x,\, y\rangle = 0$.
- **Ortogonalni komplement** množice A je $A^\perp = \{x \in X \,|\, \forall a \in A\,.\, x \perp a\}$.

Trditev 1.24. *$A^\perp$ je vektorski podprostor v X.*

Dokaz. Preverimo homogenost in linearnost. □

Opomba 1.25. $A \subseteq (A^\perp)^\perp$.

Trditev 1.26. *Naj bo $(X, \langle\ ,\ \rangle)$ vektorski prostor s skalarnim produktom, $v \in X$. Definiramo $f : X \to \mathbb{R},\ f(x) = \langle x, v\rangle$. Potem f je zvezna na X.*

Dokaz. Pokažemo, da je f Lipshitzeva. $\square$

Posledica 1.27. *$A^\perp$ je zaprt vektorski podprostor.*

Dokaz. Pokažemo, da je limita vsakega zaporedja v $A^\perp$ tudi leži v $A^\perp$. $\square$

Opomba 1.28. $C([a, b]) \subseteq L^2([a, b])$ ni zaprt podprostor.

Opomba 1.29. Če je $(X, \langle\ ,\ \rangle)$ Hilbertov in $A \subseteq X$ zaprt podprostor, potem

$$(A^\perp)^\perp = A.$$

Trditev 1.30 (Pitagorjev izrek)**.** *Naj bo $(X, \langle\ ,\ \rangle)$ vektorski prostor s skalarnim produktom. Naj bodo $x_1, \ldots, x_n \in X$ taki, da $\forall i, j \in [n] \,.\, i \neq j \implies x_j \perp x_j$. Tedaj*

$$||x_1 + \ldots + x_n||^2 = ||x_1||^2 + \ldots + ||x_n||^2.$$

Dokaz. Izračunamo normo po definiciji. $\square$

Definicija 1.31. Naj bo $(X, \langle\ ,\ \rangle)$ vektorski prostor s skalarnim produktom in $Y \leq X$ podprostor X. Naj bo $x \in X$. **Pravokotna projekcija** vektorja x na podprostor Y (če obstaja) je tak vektor $P_Y(x) \in Y$, da je

$$x - P_Y(x) \in Y^{\perp}.$$

Trditev 1.32. *Če je pravokotna projekcija x na Y obstaja, je enolično določena. Če obstaja, je to najboljša aproksimacija vektorja x z vektorji iz Y, tj.*

$$||x - P_y(x)|| = \min_{w \in Y} ||x - w||.$$

Dokaz. Enoličnost: Običajen način.
Aproksimacija: Pitagorjev izrek. □

Zgled 1.33. Naj bosta $Y = C([a, b])$ in $X = L^2([a, b])$. Če si izberimo $f \in X \setminus Y$, potem f nima najboljše aproksimacije z zveznimi funkcijami.

Opomba 1.34.

1. $P_Y^2 = P_Y$.
2. $x = \underbrace{x - P_Y(x)}_{Y^{\perp}} + \underbrace{P_Y(x)}_{Y} \implies ||x||^2 = ||x - P_Y(x)||^2 + ||P_Y(x)||^2 \implies ||x|| \geq ||P_Y(x)||$.
3. Če je P_Y definiran na X, potem je linearen in zvezen.

   Dokaz. TODO: □

4. Če je P_Y definiran na X, je Y zaprt podprostor.

   Dokaz. TODO: □

5. Če ima x pravokotno projekcijo na Y, ima tudi pravokotno projekcijo na $Y^{\perp}$.

   Dokaz. TODO: □

Trditev 1.35. *Naj bo $Y \leq X$ končno dimenzionalen podprostor z ON bazo $\{e_1, \ldots, e_n\}$, tj. $\langle e_i, e_j\rangle = \delta_{ij}$. Naj bo $x \in X$. Tedaj je*

$$P_Y(x) = \sum_{j=1}^{n} \langle x, e_j\rangle\, e_j.$$

Dokaz. Definicija. □

Opomba 1.36. Vsak končno dimenzionalni podprostor ima pravokotno projekcijo definirano na X in tudi vsi tisti podprostori končne kodimenzije.

1.5 Ortogonalni sistem

Definicija 1.37. Naj bo $(X, \langle\ ,\ \rangle)$ vektorski prostor s skalarnim produktom.

- Sistem vektorjev $(e_j)_{j=1}^{\infty}$ je **ortogonalen sistem (ON)**, če

$$\forall i, j \in \mathbb{N} \,.\, i \neq j \implies \langle e_i, e_j\rangle = 0.$$

- Tak sistem je **ortonormiran (ONS)**, če

$$\forall i, j \in \mathbb{N} \,.\, \langle e_i, e_j \rangle = \delta_{ij}.$$

Trditev 1.38 (Besselova neenakost)**.** *Naj bo $(X, \langle\ ,\ \rangle)$ vektorski prostor s skalarnim produktom. Naj bo $(e_j)_{j=1}^{\infty}$ ONS. Naj bo $x \in X$. Tedaj*

$$\sum_{j=1}^{\infty} |\langle x, e_j \rangle|^2 \leq ||x||^2.$$

Dokaz. Definiramo $Y_n = L(\{e_1, \ldots, e_n\})$. Uporabimo formulo za pravokotno projekcijo na končnorazsežen prostor. □

Posledica 1.39. $\lim_{j\to\infty} \langle x, e_j \rangle = 0$.

Opomba 1.40.

- Absolutno vrednost potrebujemo, če gledamo prostor nad $\mathbb{C}$.
- $(\langle x, e_j \rangle)_{j=1}^{\infty}$ so **Fourierjevi koeficienti** x po ONS $(e_j)_{j=1}^{\infty}$.

Trditev 1.41. *Naj bo $(c_j)_{j=1}^{\infty}$ zaporedje števil (ali $\mathbb{R}$, ali $\mathbb{C}$) za katero velja $\sum_{j=1}^{\infty} |c_j|^2 < \infty$. Naj bo $(X, \langle\ ,\ \rangle)$ Hilbertov prostor in $(e_j)_{j=1}^{\infty}$ ONS. Tedaj obstaja $x \in X$, za katerega velja*

$$\forall j \in \mathbb{N} \,.\, c_j = \langle x, e_j \rangle \,.$$

Velja tudi:

$$x = \sum_{j=1}^{\infty} c_j e_j = \lim_{N\to\infty} \sum_{j=1}^{N} c_j e_j.$$