Analiza 2b

15. julij 2025

Kazalo

1 Hilbertovi prostori

1.1 Vektorski prostori s skalarnim produktom

Naj bo X vektorski prostor nad $\mathbb{R}$ (ali nad $\mathbb{C}$).

Definicija 1.1. **Skalarni produkt** $\langle\ ,\ \rangle$ je preslikava $\langle\ ,\ \rangle : X \times X \to \mathbb{R}$ (oz. $\mathbb{C}$) za katero velja:

1. $\forall x \in X \,.\, \langle x,\, x\rangle \geq 0$;
2. $\forall x \in X \,.\, \langle x,\, x\rangle = 0 \iff x = 0$;
3. $\forall x, y \in X \,.\, \langle x,\, y\rangle = \overline{\langle y,\, x\rangle}$;
4. $\forall x, y, z \in X \,.\, \forall \lambda, \mu \in \mathbb{R}$ (oz. $\mathbb{C}$) . $\langle \lambda x + \mu y,\, z\rangle = \lambda \langle x,\, z\rangle + \mu \langle y,\, z\rangle$.

Opomba 1. 1. – 2. je **pozitivna definitnost** skalarnega produkta, 3. je **poševna simetričnost** (**simetričnost** nad $\mathbb{R}$), 4. je linearnost v prvem faktorju.

Trditev 1.2 (Cauchy-Schwartzova neenakost)**.** Naj bo $\langle\ ,\ \rangle$ skalarni produkt na X. Velja:

$$\forall x, y \in X \,.\, |\langle x,\, y\rangle| \leq \sqrt{\langle x,\, x\rangle} \cdot \sqrt{\langle y,\, y\rangle} = ||x|| \cdot ||y||.$$

Dokaz. Nad $\mathbb{R}$: Definiramo $t \to \langle x + ty,\, x + ty\rangle = f(t) \geq 0$.
Nad $\mathbb{C}$: Naj bo $x, y \in X$. Obstaja $\alpha \in \mathbb{C}$, $|\alpha| = 1$, da $\langle x,\, y\rangle = \alpha \cdot |\langle x,\, y\rangle|$. □

Definicija 1.3. Norma na vektorskem prostoru X je preslikava $||\ || : X \to \mathbb{R}$ za katero velja:

1. $\forall x \in X \,.\, ||x|| \geq 0$;
2. $\forall x \in X \,.\, ||x|| = 0 \iff x = 0$;
3. $\forall \lambda \in \mathbb{R}$ (oz. $\mathbb{C}$) . $||\lambda x|| = |\lambda| \cdot ||x||$;
4. Trikotniška neenakost: $\forall x, y \in X \,.\, ||x + y|| \leq ||x|| + ||y||$.

Trditev 1.4. Naj bo $(X, \langle\ ,\ \rangle)$ vektorski prostor s skalarnim produktom. Potem je $(X, ||\ ||)$, kjer je $\forall x \in X \,.\, ||x|| = \sqrt{\langle x,\, x\rangle}$, vektorski prostor z normo.

Dokaz. Preverimo lastnosti. Za trikotniško neenakost uporabimo CS neenakost. □

Trditev 1.5. Naj bo $(X, ||\ ||)$ vektorski prostor s normo. Potem je (X, d), kjer je $\forall x, y \in X \,.\, d(x, y) = ||x - y||$, metrični prostor.

Dokaz. Preverimo lastnosti. □

1.2 Hilbertovi prostori

Definicija 1.6. **Hilbertov prostor** je vektorski prostor X s skalarnim produktom $\langle\ ,\ \rangle$, ki je v metriki, porojeni iz skalarnega produkta, poln metrični prostor.

Opomba 2. $(X, \langle\ ,\ \rangle) \rightsquigarrow (X, ||\ ||) \rightsquigarrow (X, d)$, kjer je $\forall x, y \in X \,.\, d(x, y) = ||x - y||$.

Opomba 3. **Banachov prostor** je vektorski prostor X z normo $||\ ||$, ki je v metriki, porojeni iz norme, poln metrični prostor.

Zgled 1.

1. Naj bo $X = \mathbb{R}^n$. Definiramo skalarni produkt. Naj bo $x, y \in \mathbb{R}^n$, $x = (x_1 \ldots, x_n)$, $y = (y_1, \ldots, y_n)$. **Standardni skalarni produkt** je

$$x \cdot y = \sum_{k=1}^{n} x_k y_k.$$

Ta skalarni produkt nam da normo

$$||x|| = \sqrt{\sum_{k=1}^{n} x_k^2},$$

ki porodi metriko

$$d_2(x, y) = \sqrt{\sum_{k=1}^{n} (x_k - y_k)^2}.$$

Vemo, da je $(\mathbb{R}^n, d_2)$ poln metrični prostor. Torej $(\mathbb{R}^n, \cdot)$ Hilbertov prostor.

2. Na $\mathbb{R}^n$ lahko definiramo tudi druge norme, npr.
   - $||x||_\infty = \max\{|x_1|, \dots, |x_n|\}$;
   - $||x||_1 = |x_1| + \dots + |x_n|$.

   Te dve normi ne prideta iz skalarnega produkta, ker za njih ne velja paralelogramsko pravilo. $(\mathbb{R}^n, ||x||_\infty)$ in $(\mathbb{R}^n, ||x||_1)$ sta Banachova prostora.
3. Naj bo $X = \mathbb{C}^n$. Definiramo skalarni produkt. Naj bo $z, w \in \mathbb{C}^n$, $z = (z_1 \dots, z_n)$, $w = (w_1, \dots, w_n)$. **Standardni skalarni produkt** je
$$z \cdot w = \sum_{k=1}^{n} z_k \overline{w_k}.$$
   Ta skalarni produkt nam da normo
$$||z|| = \sqrt{\sum_{k=1}^{n} |z_k|^2},$$
   ki porodi metriko
$$d_2(z, w) = \sqrt{\sum_{k=1}^{n} |z_k - w_k|^2}.$$
   Vemo, da je $(\mathbb{C}^n, d_2)$ poln metrični prostor. Torej $(\mathbb{C}^n, \cdot)$ Hilbertov prostor.

1.3 Prostor $L^2([a, b])$

Trditev 1.7. Naj bo $C([a, b])$ vektorski prostor nad $\mathbb{R}$. Potem je s predpisom
$$\forall f, g \in C([a, b])\,.\, \langle f,\, g\rangle = \int_a^b f(x)g(x)\,dx$$
definiran skalarni produkt na $C([a, b])$.

Dokaz. Preverimo lastnosti. □

Trditev 1.8. $(C([a, b]), \langle\ ,\ \rangle)$ ni Hilbertov prostor.

Dokaz. Definiramo $f_n(x) = \begin{cases} 1; & \frac{1}{n} \leq x \leq 1 \\ nx; & -\frac{1}{n} < x < \frac{1}{n} \\ -1; & -1 \leq x \leq -\frac{1}{n} \end{cases}$. Pokažemo, da je $(f_n)_n$ Cauchyjevo zaporedje v $C([a, b])$, ki nima limite. □

Definicija 1.9. Naj bo (M, d) metrični prostor. Pravimo, da lahko **napolnimo** prostor M, če obstaja prostor $(\overline{M}, \overline{d})$, za kateri velja:
1. $(\overline{M}, \overline{d})$ je poln metrični prostor;
2. $M \subseteq \overline{M}$;
3. $\overline{d}|_{M\times M} = d$;
4. M je gost v $\overline{M}$, tj. $\operatorname{Cl} M = \overline{M}$.

Prostoru $\overline{M}$ rečemo **napolnitev** prostora M.

Opomba 4. Ideja: $\overline{M}$ je prostor vseh limit Cauchyjevih zaporedij v M (+ kvocient).

Primer 1. Naj bo $M = (0, 1)$, $d_2(x, y) = |x - y|$. Potem napolnitev $\overline{M}$ prostora M je $\overline{M} = [0, 1]$.

Opomba 5. Označili smo z $L^1(A) = \{f : A \to \mathbb{R} \mid \int_A |f|\,dx \text{ obstaja}\}/_\sim$ prostor vseh absolutno integrabilnih funkcij, kjer je $\forall f, g \in L^1 \,.\, f \sim g \iff f = g$ s.p.

Vpeljemo zdaj s kvadratom integrabilne funkcije:
$$L^2([a, b]) = \left\{f : [a, b] \to \mathbb{R} \mid \int_a^b f^2(x)\,dx \text{ obstaja}\right\}/_\sim,$$
kjer je $\forall f, g \in L^2 \,.\, f \sim g \iff f = g$ s.p.
V tem prostoru gotovo so
- Zvezne funkcije: $C([a, b]) \subseteq L^2([a, b])$;
- Odsekoma zvezni funkciji;
- $f(x) = \frac{1}{\sqrt[4]{x-a}}$ itd.

Cilj Želimo posplošiti prostor $(\mathbb{R}, \cdot)$.
Naj bo $f, g \in L^2$, potem $|f \cdot g| \leq \frac{|f|^2+|g|^2}{2} \implies f \cdot g \in L^1([a,b])$. Torej lahko definiramo

$$\langle f,\, g\rangle = \int_a^b f(x)g(x)\,dx.$$

Trditev 1.10. $L^2([a,b])$ je vektorski prostor.

Dokaz. Preverimo lastnosti. □

Torej $L^2([a,b])$ je vektorski prostor nad $\mathbb{R}$ s skalarnim produktom

$$\langle f,\, g\rangle = \int_a^b f(x)g(x)\,dx.$$

Očitno, da je $C([a,b]) \leq L^2([a,b])$.

Izrek 1.11. $L^2([a,b])$ je Hilbertov in $L^2([a,b])$ je napolnitev $C([a,b])$.

Opomba 6.

$$\forall f \in L^2([a,b])\,.\,\exists f_n \in C([a,b])\,.\,\lim_{n\to\infty} f_n = f \iff \lim_{n\to\infty} ||f_n - f|| = 0 \iff \lim_{n\to\infty} \sqrt{\int_a^b (f_n(x) - f(x))^2\,dx} = 0$$

Opomba 7. Nad $\mathbb{C}$: $f = u + iv,\ u, v : [a,b] \to \mathbb{R}$. Potem

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^b u(x)\,dx + i\int_a^b v(x)\,dx$$

in

$$\langle f,\, g\rangle = \int_a^b f(x)\overline{g(x)}\,dx.$$

Zgled 2. Vzemimo $[0,1]$. Definiramo $f_n(x) = \begin{cases} \sqrt{n}; & 0 < x \leq \frac{1}{n} \\ 0; & \text{sicer} \end{cases}$.
Velja: $\lim_{n\to\infty} f_n(x) = 0$ za $x \in [0,1]$. Ali je $\lim_{n\to\infty} f_n(x) = 0$ v $L^2([0,1])$?

Zgled 3. TODO:
zgled

1.4 Ortogonalnost

Definicija 1.12. Naj bo $(X, \langle\ ,\ \rangle)$ vektorski prostor s skalarnim produktom, $A \subseteq X,\ A \neq \emptyset$. Naj bosta $x, y \in X$.

- x je **pravokoten** na y, če $\langle x,\, y\rangle = 0$, tj. $x \perp y \iff \langle x,\, y\rangle = 0$.
- **Ortogonalni komplement** množice A je $A^\perp = \{x \in X \mid \forall a \in A\,.\, x \perp a\}$.

Trditev 1.13. $A^\perp$ je vektorski podprostor v X.

Dokaz. Preverimo homogenost in linearnost. □

Opomba 8. $A \subseteq (A^\perp)^\perp$.

Trditev 1.14. Naj bo $(X, \langle\ ,\ \rangle)$ vektorski prostor s skalarnim produktom, $v \in X$. Definiramo $f : X \to \mathbb{R},\ f(x) = \langle x,\, v\rangle$. Potem f je zvezna na X.

Dokaz. Pokažemo, da je f Lipshitzeva. □

Posledica 1.15. $A^\perp$ je zaprt vektorski podprostor.

Dokaz. Pokažemo, da je limita vsakega zaporedja v $A^\perp$ tudi leži v $A^\perp$. □

Opomba 9. $C([a,b]) \subseteq L^2([a,b])$ ni zaprt podprostor.

Opomba 10. Če je $(X, \langle\ ,\ \rangle)$ Hilbertov in $A \subseteq X$ zaprt podprostor, potem

$$(A^\perp)^\perp = A.$$

Trditev 1.16 (Pitagorjev izrek). Naj bo $(X, \langle\ ,\ \rangle)$ vektorski prostor s skalarnim produktom. Naj bodo $x_1, \ldots, x_n \in X$ taki, da $\forall i, j \in [n]\,.\, i \neq j \implies x_j \perp x_j$. Tedaj

$$||x_1 + \ldots + x_n||^2 = ||x_1||^2 + \ldots + ||x_n||^2.$$

Dokaz. Izračunamo normo po definiciji. □

Definicija 1.17. Naj bo $(X, \langle\ ,\ \rangle)$ vektorski prostor s skalarnim produktom in $Y \leq X$ podprostor X. Naj bo $x \in X$. **Pravokotna projekcija** vektorja x na podprostor Y (če obstaja) je tak vektor $P_Y(x) \in Y$, da je

$$x - P_Y(x) \in Y^{\perp}.$$

Trditev 1.18. Če je pravokotna projekcija x na Y obstaja, je enolično določena. Če obstaja, je to najboljša aproksimacija vektorja x z vektorji iz Y, tj.

$$||x - P_y(x)|| = \min_{w \in Y} ||x - w||.$$

Dokaz. Enoličnost: Običajen način.
Aproksimacija: Pitagorjev izrek. □

Zgled 4. Naj bosta $Y = C([a, b])$ in $X = L^2([a, b])$. Če si izberimo $f \in X \setminus Y$, potem f nima najboljše aproksimacije z zveznimi funkcijami.

Opomba 11.

1. $P_Y^2 = P_Y$.
2. $x = \underbrace{x - P_Y(x)}_{Y^{\perp}} + \underbrace{P_Y(x)}_{Y} \implies ||x||^2 = ||x - P_Y(x)||^2 + ||P_Y(x)||^2 \implies ||x|| \geq ||P_Y(x)||$.
3. Če je P_Y definiran na X, potem je linearen in zvezen.

   Dokaz. TODO:
   proof

   Če je P_Y definiran na X, je Y zaprt podprostor.

   Dokaz. TODO:
   proof

   Če ima x pravokotno projekcijo na Y, ima tudi pravokotno projekcijo na $Y^{\perp}$.

   Dokaz. TODO:
   proof

Trditev 1.19. Naj bo $Y \leq X$ končno dimenzionalen podprostor z ON bazo $\{e_1, \ldots, e_n\}$, tj. $\langle e_i, e_j \rangle = \delta_{ij}$. Naj bo $x \in X$. Tedaj je

$$P_Y(x) = \sum_{j=1}^{n} \langle x, e_j \rangle e_j.$$

Dokaz. Definicija. □

Opomba 12. Vsak končno dimenzionalni podprostor ima pravokotno projekcijo definirano na X in tudi vsi tisti podprostori končne kodimenzije.

1.5 Ortogonalni sistem

Definicija 1.20. Naj bo $(X, \langle\ ,\ \rangle)$ vektorski prostor s skalarnim produktom.

- Sistem vektorjev $(e_j)_{j=1}^{\infty}$ je **ortogonalen sistem (ON)**, če

$$\forall i, j \in \mathbb{N} \,.\, i \neq j \implies \langle e_i, e_j \rangle = 0.$$

- Tak sistem je **ortonormiran (ONS)**, če

$$\forall i, j \in \mathbb{N} \,.\, \langle e_i, e_j \rangle = \delta_{ij}.$$

Trditev 1.21 (Besselova neenakost). Naj bo $(X, \langle\ ,\ \rangle)$ vektorski prostor s skalarnim produktom. Naj bo $(e_j)_{j=1}^{\infty}$ ONS. Naj bo $x \in X$. Tedaj

$$\sum_{j=1}^{\infty} |\langle x, e_j \rangle|^2 \leq ||x||^2.$$

Dokaz. Definiramo $Y_n = L(\{e_1, \ldots, e_n\})$. Uporabimo formulo za pravokotno projekcijo na končnorazsežen prostor. □

Posledica 1.22. $\lim_{j \to \infty} \langle x, e_j \rangle = 0$.

Opomba 13.

- Absolutno vrednost potrebujemo, če gledamo prostor nad $\mathbb{C}$.
- $(\langle x, e_j\rangle)_{j=1}^{\infty}$ so **Fourierjevi koeficienti** x po ONS $(e_j)_{j=1}^{\infty}$.

Trditev 1.23. Naj bo $(c_j)_{j=1}^{\infty}$ zaporedje števil (ali $\mathbb{R}$, ali $\mathbb{C}$) za katero velja $\sum_{j=1}^{\infty} |c_j|^2 < \infty$. Naj bo $(X, \langle\ ,\ \rangle)$ Hilbertov prostor in $(e_j)_{j=1}^{\infty}$ ONS. Tedaj obstaja $x \in X$, za katerega velja

$$\forall j \in \mathbb{N} \,.\, c_j = \langle x, e_j\rangle \,.$$

Velja tudi:

$$x = \sum_{j=1}^{\infty} c_j e_j = \lim_{N\to\infty} \sum_{j=1}^{N} c_j e_j.$$

2 Vektorska analiza

2.1 Integralski izreki

Motivacija TODO: (zvezek)

Izrek 2.1 (Gauss-Ostrogradsky)*.* Recimo, da

- $\Omega \subseteq \mathbb{R}^3$ omejena odprta množica z robom, sestavljenum iz končnega števila odsekoma gladkih sklenjenih ploskev, orijentiranih z zunanjo normalo glede na Ω,
- $\vec{R} : \overline{\Omega} \to \mathbb{R}^3$ vektorsko polje, $\vec{R} \in C^1(\overline{\Omega})$.

Tedaj

$$\iint_{\partial\Omega} \vec{R}\, d\vec{S} = \iiint_{\Omega} \operatorname{div} \vec{R}\, dV.$$

Opomba 14. $\iint_{\partial\Omega} \vec{R}\, d\vec{S} = \iint_{\partial D} \vec{R} \cdot \vec{N} dS$, kjer je $\vec{N}$ zunanja enotska normala.

Opomba 15 ($n = 2$)*.* Naj bo $D \subseteq \mathbb{R}^2$ omejena odprta množica z robom, sestavljenum iz končnega števila odsekoma gladkih sklenjenih krivulj, orijentiranih pozitivno glede na D. Naj bo $\vec{R} : \overline{D} \to \mathbb{R}^2$ vektorsko polje, $\vec{R} \in C^1(\overline{D})$. Tedaj je

$$\iint_D \operatorname{div} \vec{R}\, d\vec{S} = \int_{\partial D} \vec{R} \cdot \vec{n}\, dS,$$

kjer je $\vec{n}$ zunanja enotska normala.

Izrek 2.2 (Green, Greenova formula)*.* Recimo, da

- $D \subseteq \mathbb{R}^2$ omejena odprta množica z odsekoma gladkim robom, sestavljenim iz končnega števila odsekoma gladkih sklenjenih krivulj, orientiranih pozitivno glede na D,
- $X, Y \in C^1(\overline{D})$, kjer $\vec{R} = (X, Y)$ vektorsko polje.

Tedaj

$$\int_{\partial D} X\, dx + Y\, dy = \iint_D (Y_x - X_y)\, dxdy = \int_{\partial D} \vec{R}\, d\vec{r}$$

Izrek 2.3 (Stokes)*.* Recimo, da

- $\Sigma \subseteq \mathbb{R}^3$ omejena, orientirana, odsekoma gladka ploskev z odsekoma gladkim robom, sestavljenim iz končnega števila odsekoma gladkih sklenjenih krivulj, orientiranih skaldno z orientacijo Σ,
- $\vec{R} : \overline{\Sigma} \to \mathbb{R}^3$ vektorsko polje, $\vec{R} \in C^1(\overline{\Sigma})$.

Tedaj

$$\int_{\partial\Sigma} \vec{R}\, d\vec{r} = \iint_{\Sigma} \operatorname{rot} \vec{R}\, d\vec{S}.$$

Zgled 5. TODO: (album 03.17.25)