1. Предложить пример функции, не имеющей предела в нуле и в бесконечностях.

Ответ: sin

2. Привести пример функции, не имеющей предела в точке, но определенной в ней.

Не понимаю, что требуется. По идее у любой функции можно найти точки, не являющиеся пределом, но функция может быть определена в них.

3. Исследовать функцию $f(x) = x^3 - x^2$ по плану:

    a. Область задания и область значений.

    Область задания x ∈ R

    Область значений x ∈ R

    b. Нули функции и их кратность.

    Преобразуем функцию в $f(x) = x^2(x-1)$

    Получаем:

    x1 = 0,

    x2 = 0,

    x3 = 1

    c. Отрезки знакопостоянства.

    Функция положительна при x ∈ (0; 1) и x ∈ (1; +∞)

    Отрицательна при x ∈ (-∞; 0)

    d. Интервалы монотонности.

    Функция на разных отрезках разная:

    - при x ∈ (0; 1) стационарная

    - при x ∈ (1; +∞) возрастающая

    - при x ∈ (-∞; 0) убывающая

    e. Четность функции.

    Функция общего вида, т.к. например при x=0,5 y=-0.125

    f. Ограниченность.

    Функция неограниченная

    g. Периодичность.

    Функция апериодична

4. Найти предел:

a. $\lim\limits_{x\to 0} \frac{3x^2+2x^2}{4x^2} = \lim\limits_{x\to 0} \frac{x^2(3x+2)}{4x^2} =$

$= \lim\limits_{x\to 0} \frac{3x+2}{4}$

подставим $x=0 \Rightarrow \lim\limits_{x\to 0} \frac{3x+2}{4} = \frac{1}{2}$

b. $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sqrt{1+x}-1}{\sqrt[3]{1+x}-1} = \frac{\lim\limits_{x\to 0} \sqrt{1+x}-1}{\lim\limits_{x\to 0} \sqrt[3]{1+x}-1}$

предела не существует, т.к в знаменателе бесконечно малая функция

c. $\lim\limits_{x\to\infty} \left(\frac{x+3}{x}\right)^{4x+1} = \lim\limits_{x\to\infty} \left(1+\frac{3}{x}\right)^{4x+1} =$

$= \lim\limits_{x\to\infty} \left(1+\frac{12}{4x}\right)^{4x} \cdot \left(1+\frac{3}{x}\right) = e^{12} \cdot \lim\limits_{x\to\infty} \left(1+\frac{3}{x}\right) =$

$= e^{12} \cdot 1 = e^{12}$

5. Найти предел:

a. $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sin(2x)}{4x} = \frac{1}{2} \lim\limits_{x\to 0} \frac{\sin(2x)}{2x} = \frac{1}{2}$

b. $\lim\limits_{x\to 0} \frac{x}{\sin x} = 1$

c. $\lim\limits_{x\to 0} \frac{x}{\arcsin x} = 1$

d. $\lim\limits_{x\to\infty} \left(\frac{4x+3}{4x-3}\right)^{6x} = \lim\limits_{x\to\infty} \left(\frac{4x-3+3+3}{4x-3}\right)^{6x} =$

$= \lim\limits_{x\to\infty} \left(1+\frac{6}{4x-3}\right)^{6x} = \lim\limits_{x\to\infty} \left(1+\frac{36}{24x-18}\right)^{\frac{24x-18+18}{4}} =$

$= \lim\limits_{x\to\infty} \left(\left(1+\frac{36}{24x-18}\right)^{24x-18+18}\right)^{\frac{1}{4}} =$

$= \lim\limits_{x\to\infty} \left(e^{36} \cdot \left(1+\frac{36}{24x-18}\right)^{18}\right)^{\frac{1}{4}} =$

$= e^{9} \cdot \lim\limits_{x\to\infty} \left(1+\frac{36}{24x-18}\right)^{\frac{9}{2}} = e^{9} \cdot 1 = e^{9}$

e, $\lim\limits_{x \to \infty} \frac{\sin x + \ln x}{x} = \lim\limits_{x \to \infty} \left(\frac{\sin x}{x} + \frac{\ln x}{x} \right) =$

$= \lim\limits_{x \to \infty} \left(0 + \frac{\ln x}{x} \right) = \lim\limits_{x \to \infty} \left(\frac{(\ln x)'}{x'} \right) =$

$= \lim\limits_{x \to \infty} \left(\frac{\frac{1}{x}}{1} \right) = \lim\limits_{x \to \infty} \frac{1}{x} = 0$