

**UNIVERZITET U TUZLI**  
**FAKULTET ELEKTROTEHNIKE**



# **SEMINARSKI RAD**

## Nelinearni sistemi upravljanja

*Student: Irvana Hrustić*

Tuzla, juni 2023. godine

*Profesor: dr.sc. Jakub Osmić, red. prof.*  
*Asistent: Anel Hasić*

## Sadržaj

ZADATAK1.....	2
Slučaj1.....	5
Slučaj2.....	5
Slučaj3.....	6
Slučaj4.....	6
ZADATAK2.....	8
Primjer1.....	8
Primjer2.....	10
Primjer3.....	13
Primjer4.....	16
ZADATAK3.....	17
Primjer1.....	17
Primjer2.....	19
ZADATAK4.....	20
Primjer1.....	20
Primjer2.....	23
ZADATAK5.....	29
Literatura.....	37

### **ZADATAK1**

*Pronađi nelinearni model, opisati ga, izvesti matematički model, linearizovati ga u okolini neke radne tačke(radnih tačaka), odrediti prenosnu funkciju sistema i model sistema u prostoru stanja.*

Magnetna levitacija koristi magnetno polje za održavanje objekta u lebdećem stanju. Ovdje ćemo predstaviti jednostavan model koji opisuje silu i dinamiku levitirajućeg objekta.

Pretpostavimo da imamo objekt koji je magnetiziran i sposoban stvarati magnetsko polje, i imamo magnetski sistem koji generira magnetno polje za levitaciju objekta. Sila koja djeluje na objekt dolazi od interakcije između magnetnih polja objekta i magnetnog sistema.

Evo jednog mogućeg primjera nelinearnog modela magnetne levitacije:

Pretpostavimo da imamo magnetnu kuglu koja se levitira iznad elektromagneta. Model možemo opisati sljedećim diferencijalnim jednačinama:

$$m \ddot{x} = -k(x - x_0) - c \dot{x} - mg \quad (1.1)$$

$$F_m = B \cdot i \quad (1.2)$$

gdje:

- $m$  je masa kugle
- $x$  je položaj kugle
- $x_0$  je ravnotežni položaj kugle
- $k$  je koeficijent opruge koji opisuje silu povratka kugle prema ravnotežnom položaju
- $c$  je koeficijent prigušenja koji opisuje otpor koji koči kretanje kugle
- $g$  je ubrzanje gravitacije
- $\ddot{x}$  je druga derivacija položaja  $x$  po vremenu
- $F_m$  je sila magnetskog polja koja djeluje na kuglu
- $B$  je konstanta proporcionalnosti koja povezuje struju elektromagneta i silu magnetnog polja
- $i$  je struja koja prolazi kroz elektromagnetnu zavojnicu

Kako bismo linearizirali ovaj nelinearni model, možemo linearno aproksimirati silu povratka i silu magnetnog polja oko ravnotežnog položaja  $x_0$ . Tada možemo dobiti linearni model i izraziti matrice  $A$ ,  $B$ ,  $C$  i  $D$ . Za ovu linearnu aproksimaciju, možemo koristiti Taylorovu ekspanziju prvog reda. Matrice  $A$ ,  $B$ ,  $C$  i  $D$  se mogu izraziti na sljedeći način:

Pretpostavit ćemo da imamo jednodimenzionalni sistem.

Model se može zapisati u obliku prostornog vektora stanja  $x$  i vektora ulaza upravljanja  $u$ :

$$\dot{x} = Ax + Bu \quad (1.3)$$

gdje je:

- $\dot{x}$  je vektor derivacija stanja  $x$
- $A$  je matrica koeficijenata stanja
- $B$  je matrica koeficijenata ulaza upravljanja
- $x$  je vektor stanja
- $u$  je vektor ulaza upravljanja

U našem slučaju, model se može zapisati kao:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{k}{m} & -\frac{c}{m} \end{bmatrix} \quad (1.4)$$

$$B = \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{B}{m} \end{bmatrix} \quad (1.5)$$

$$C = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \quad (1.6)$$

$$D = \begin{bmatrix} 0 \end{bmatrix} \quad (1.7)$$

Ove matrice opisuju linearni model koji aproksimira nelinearni model magnetne levitacije oko ravnotežnog položaja  $x_0$ . Matrica A opisuje dinamiku sistema i definira kako se stanje mijenja tokom vremena, matrica B povezuje ulaz (struju elektromagneta) s promjenama stanja, definira kako ulaz upravljanja utječe na promjene stanja, matrica C određuje koje elemente stanja mjerimo kao izlaz sistema, a matrica D predstavlja direktni utjecaj ulaza na izlaz (koji u ovom slučaju nije prisutan).

Važno je napomenuti da ova linearna aproksimacija može biti samo validna za male odstupanja od ravnotežnog položaja  $x_0$ . Za veće odstupanja i složenije sisteme, može biti potrebno koristiti naprednije tehnike linearizacije ili metode analize stabiliteta.

Da bismo odredili matricu prelaza stanja i kretanja sistema u prostoru stanja na step ulaz i funkciju prenosa sistema uradit ćemo sljedeće:

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= -\frac{k}{m} x_1 + \frac{1}{m} x_2 + \frac{1}{m} u(t) \quad (1.8) \\ \dot{x}_2 &= \frac{1}{m} x_1 + \frac{0}{m} x_2 + \frac{0}{m} u(t) \quad (1.9) \end{aligned} \quad y = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \quad D=0 \quad (1.10)$$

$$\Phi(t) = L^{-1} \Phi(s) = L^{-1} (sI - A)^{-1} \quad (1.11)$$

$$\text{Izračunat ćemo inverznu matricu } (sI - A)^{-1} \quad (1.12)$$

$$(sI - A)^{-1} = \frac{1}{\det(sI - A)} * (\text{cof}(sI - A))^T \quad (1.13)$$

$$(\text{cof}(sI - A))^T = \begin{bmatrix} s + \frac{c}{m} & 1 \\ -\frac{k}{m} & s \end{bmatrix} \quad (1.14) \quad \det(sI - A) = s^2 + s \frac{c}{m} + \frac{k}{m} \quad (1.15)$$

$$\text{Odakle slijedi: } \Phi(s) = \frac{1}{(sI - A)} (\text{cof}(sI - A))^T = \frac{1}{s^2 + s \frac{c}{m} + \frac{k}{m}} * \begin{bmatrix} s + \frac{c}{m} & 1 \\ -\frac{k}{m} & s \end{bmatrix} \quad (1.16)$$

Svojstvene vrijednosti karakterističnog polinoma su :

$$s_{1,2} = \frac{-\frac{c}{m} \pm \sqrt{\frac{c^2}{m^2} - 4 \frac{k}{m}}}{2} = \frac{-c \pm \sqrt{c^2 - 4km}}{2m} \quad (1.17)$$

$$s_1 = \frac{-c + \sqrt{c^2 - 4km}}{2m} = -\left( \frac{c - \sqrt{c^2 - 4km}}{2m} \right) \quad (1.18)$$

$$s_2 = \frac{-c - \sqrt{c^2 - 4km}}{2m} = -\left( \frac{c + \sqrt{c^2 - 4km}}{2m} \right) \quad (1.19)$$

Uvest ćemo varijable a i b radi lakšeg proračuna.

$$a = s - s_1 = s - \left[ - \left( \frac{c - \sqrt{c^2 - 4km}}{2m} \right) \right] = s + \frac{c - \sqrt{c^2 - 4km}}{2m} \quad (1.20)$$

$$b = s - s_2 = s - \left[ - \left( \frac{c + \sqrt{c^2 - 4km}}{2m} \right) \right] = s + \frac{c + \sqrt{c^2 - 4km}}{2m} \quad (1.21)$$

Slijedi da je karakteristični polinom jednak:

$$s^2 + s \frac{c}{m} + \frac{k}{m} = a * b = \left[ s + \frac{c - \sqrt{c^2 - 4km}}{2m} \right] * \left[ s + \frac{c + \sqrt{c^2 - 4km}}{2m} \right] \quad (1.22)$$

Svaki element matrice ćemo podijeliti karakterističnim polinomom. Imat ćemo 4 različita slučaja.

### Slučaj1

$$\frac{s + \frac{c}{m}}{ab} = \frac{e_{11}}{a} + \frac{\dot{e}_{11}}{b} \quad (1.23)$$

Izračunat ćemo  $e_{11}$  i  $\dot{e}_{11}$

$$e_{11} = \frac{s + \frac{c}{m}}{ab} a = \frac{s + \frac{c}{m}}{b} \quad (1.24) \text{ gdje umjesto } s \text{ uvrstavamo } s_1$$

$$e_{11} = \frac{c}{2\sqrt{c^2 - 4km}} + \frac{1}{2} \quad (1.25)$$

$$\dot{e}_{11} = \frac{s + \frac{c}{m}}{ab} b = \frac{s + \frac{c}{m}}{a} \quad (1.26) \text{ gdje umjesto } s \text{ uvrstavamo } s_2$$

$$\dot{e}_{11} = \frac{-c}{2\sqrt{c^2 - 4km}} + \frac{1}{2} \quad (1.27)$$

### Slučaj2

$$\frac{1}{ab} = \frac{e_{12}}{a} + \frac{\dot{e}_{12}}{b} \quad (1.28)$$

Izračunat ćemo  $e_{12}$  i  $\dot{e}_{12}$

$$e_{12} = \frac{1}{ab} a = \frac{1}{b} \quad (1.29) \text{ gdje umjesto } s \text{ uvrstavamo } s_1$$

$$e_{12} = \frac{m}{\sqrt{c^2 - 4km}} \quad (1.30)$$

$$\dot{e}_{12} = \frac{1}{ab} b = \frac{1}{a} \quad (1.31) \text{ gdje umjesto } s \text{ uvrstavamo } s_2$$

$$\dot{e}_{12} = \frac{-m}{\sqrt{c^2 - 4km}} \quad (1.32)$$

### Slučaj3

$$\frac{-k}{\frac{m}{ab}} = \frac{e_{21}}{a} + \frac{\dot{e}_{21}}{b} \quad (1.33)$$

Izračunat ćemo  $e_{21}$  i  $\dot{e}_{21}$

$$e_{11} = \frac{-k}{\frac{m}{ab}} a = \frac{-k}{b} \quad (1.34) \text{ gdje umjesto } s \text{ uvrstavamo } s_1$$

$$e_{21} = \frac{-k}{\sqrt{c^2 - 4km}} \quad (1.35)$$

$$\dot{e}_{21} = \frac{-k}{\frac{m}{ab}} b = \frac{-k}{a} \quad (1.36) \text{ gdje umjesto } s \text{ uvrstavamo } s_2$$

$$\dot{e}_{21} = \frac{k}{\sqrt{c^2 - 4km}} \quad (1.37)$$

### Slučaj4

$$\frac{s}{ab} = \frac{e_{22}}{a} + \frac{\dot{e}_{22}}{b} \quad (1.38)$$

Izračunat ćemo  $e_{22}$  i  $\dot{e}_{22}$

$$e_{22} = \frac{s}{ab} a = \frac{s}{b} \quad (1.39) \text{ gdje umjesto } s \text{ uvrstavamo } s_1$$

$$e_{22} = \frac{-c + \sqrt{c^2 - 4km}}{2\sqrt{c^2 - 4km}} \quad (1.40)$$

$$\dot{e}_{22} = \frac{s}{ab} b = \frac{s}{a} \quad (1.41) \text{ gdje umjesto } s \text{ uvrstavamo } s_2$$

$$\dot{e}_{22} = \frac{c + \sqrt{c^2 - 4km}}{2\sqrt{c^2 - 4km}} \quad (1.42)$$

Sada to uvrstimo:

$$\Phi(s) = \begin{bmatrix} \frac{e_{11} + \dot{e}_{11}}{a} & \frac{e_{12} + \dot{e}_{12}}{a} \\ \frac{e_{21} + \dot{e}_{21}}{a} & \frac{e_{22} + \dot{e}_{22}}{a} \end{bmatrix} \quad (1.43)$$

$$X(t) = \Phi(t) X(0) + \int_0^t \Phi(t-T) B U(T) dT \quad (1.44)$$

$$X(t) = \int_0^t \Phi(s) ds \quad (1.45) \text{ matrica prelaza stanja i kretanja sistema u prostoru stanja na step ulaz.}$$

Funkciju prenosa sistema određujemo sa:

$$G(s) = C(sI - A)^{-1} B + D \quad (1.46)$$

$$G(s) = [1 \ 0] * \begin{bmatrix} s + \frac{c}{m} & 1 \\ -\frac{k}{m} & s \end{bmatrix} * \frac{B}{m} = [1 \ 0] * \begin{bmatrix} \frac{B}{m} \\ s \frac{B}{m} \end{bmatrix} = \left[ \frac{B}{m} \right] \quad (1.47)$$

$$G(s) = \frac{\frac{B}{m}}{ab} = \frac{\frac{B}{m}}{\left[ s + \frac{c - \sqrt{c^2 - 4km}}{2m} \right] * \left[ s + \frac{c + \sqrt{c^2 - 4km}}{2m} \right]} \quad (1.48) \text{ prenosna funkcija sistema.}$$

Možemo uvrstiti vrijednosti za parametre k, m, c i B koji su dati:

- k = 10 N/m (koeficijent opruge)
- m = 0.5 kg (masa kugle)
- c = 2 Ns/m (koeficijent prigušenja)
- B = 0.8 N/A (konstanta proporcionalnosti)

i na taj način izračunati funkciju prenosa sistema i funkciju prelaza stanja sistema.

U sklopu seminarskog rada je zadatak obrađen tako da u gotove formule treba samo ubaciti željene parametre i dobit ćete tražene funkcije unutar zadatka.

## ZADATAK2

Napisati proizvoljan sistem u prostoru stanja. Odrediti tačke ekvilibrijuma i tipove tačaka ekvilibrijuma. Komentarisati stabilnost tačaka ekvilibrijuma primjenom prvog Ljapunovog metoda. Nacrtati dijagram vektorskog polja i fazni dijagram. Komentarisati dobijene rezultate.

### Primjer1

Sistem u prostoru stanja je dat sa sljedećim jednačinama:

$$\dot{x}_1 = 3x_2 + 2 \quad (2.1)$$

$$\dot{x}_2 = x_1^2 + 6x_2 - 3 \quad (2.2)$$

Stavljajući da je:

$$\dot{x}_1 = 0 \quad (2.3)$$

$$\dot{x}_2 = 0 \quad (2.4)$$

$$0 = 3x_2 + 2 \quad (2.5) \text{ slijedi da je } x_2 = -\frac{2}{3} \quad (2.6)$$

$$0 = x_1^2 + 6x_2 + 3 \quad (2.7)$$

Kada uvrstimo jednačinu (2.6) u jednačinu (2.7) dobijamo:

$$x_1^2 + 6 \cdot -\frac{2}{3} + 3 = 0 \Rightarrow x_1^2 - 4 + 3 = 0 \Rightarrow x_1^2 = 1 \quad (2.8)$$

Rješenje ove jednačine je  $x_1 = 1$  i  $x_1 = -1$

Tačke ekvilibrijuma za naš sistem su  $x_{1e} = (x_{11}, x_{21}) = (1, -\frac{2}{3})$  i  $x_{2e} = (x_{12}, x_{22}) = (-1, -\frac{2}{3})$ .

$$A = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2}{\partial x_2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 3 \\ 2x_1 & 6 \end{bmatrix} \quad (2.9)$$

Za prvu tačku ekvilibrijuma  $x_{1e}$  imamo matricu svojstvenih vrijednosti:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 3 \\ 2 & 6 \end{bmatrix} \quad (2.10)$$

$$\det(\lambda I - A) = \det \left( \begin{bmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & 3 \\ 2 & 6 \end{bmatrix} \right) = \det \begin{bmatrix} \lambda & -3 \\ -2 & \lambda - 6 \end{bmatrix} \quad (2.11)$$

Dobijamo karakteristični polinom  $\lambda(\lambda - 6) - 6 = \lambda^2 - 6\lambda - 6 \quad (2.12)$

Svojstvene vrijednosti sistema su :  $\lambda_1 = 3 + \sqrt{15} = 6.873$  i  $\lambda_2 = 3 - \sqrt{15} = -0.873 = -0.87$

Svojstvene vrijednosti su realne, jednostruke, nenulte i različitog predznaka stoga je tačka ekvilibrijuma  $x_{1e}$  nestabilna i tipa je sedlo po prvom kriteriju Lyapunova.

Za drugu tačku ekvilibrijuma  $x_{2e}$  imamo matricu svojstvenih vrijednosti:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 3 \\ -2 & 6 \end{bmatrix} \quad (2.13)$$

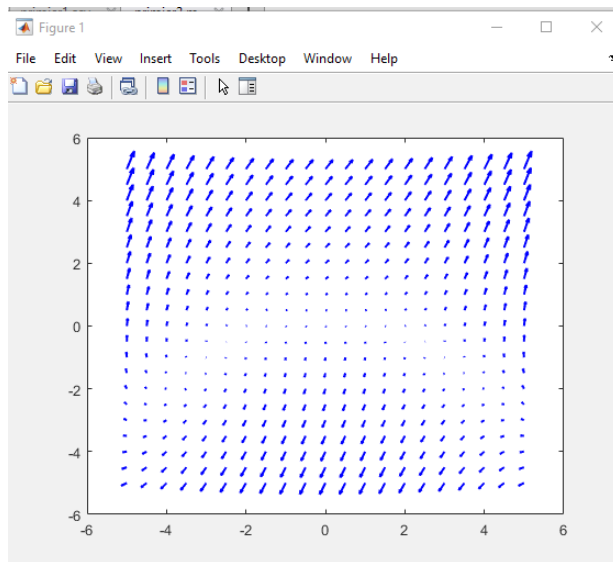
$$\det(\lambda I - A) = \det \left( \begin{bmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & 3 \\ -2 & 6 \end{bmatrix} \right) = \det \begin{bmatrix} \lambda & -3 \\ 2 & \lambda - 6 \end{bmatrix} \quad (2.14)$$

Dobijamo karakteristični polinom  $\lambda(\lambda - 6) + 6 = \lambda^2 - 6\lambda + 6 \quad (2.15)$

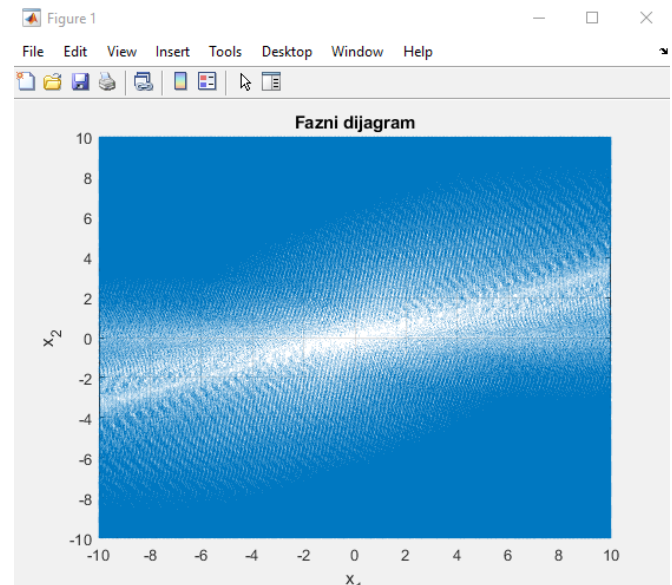


Svojstvene vrijednosti sistema su :  $\lambda_3 = 3 + \sqrt{12} = 6.46$  i  $\lambda_4 = 3 - \sqrt{12} = -0.46$

Svojstvene vrijednosti su realne, jednostruke, nenulte i različitog predznaka stoga je tačka ekvilibrjuma  $x_{2e}$  nestabilna i tipa je sedlo po prvom kriteriju Lyapunova.



Slika 2.1: Dijagram vektorskog polja



Slika 2.2: Fazni dijagram

Ispod se nalazi kod napisan u matlabu za dijagram vektorskog polja i faznog dijagrama za primjer 1.

```

primjer1.m  primjer2.m  primjer3.m  fazni1.m  fazni2.m  fazni3.m  fazni4.m
-   clc
-   clear all
-
-   dx = @(x, y) 3*y + 2;
-   dy = @(x, y) x.^2 + 6*y - 3;
-
-   [x, y] = meshgrid(-5:0.5:5, -5:0.5:5);
-
-   dx_dt = dx(x, y);
-   dy_dt = dy(x, y);
-
-   %vektorski dijagram
-   quiver(x, y, dx_dt, dy_dt, 'LineWidth', 1.5, 'Color', 'b');
-   hold on
-   %pronalazenje tacaka ekvilibrjuma
-   equilibria = solve(dx(x, y) == 0, dy(x, y) == 0, 'Real', true);
-   %ortanje tacaka ekvilibrjuma
-   for i = 1:numel(equilibria.x)
-       equilibrium_x = double(equilibria.x(i));
-       equilibrium_y = double(equilibria.y(i));
-       plot(equilibrium_x, equilibrium_y, 'ro', 'MarkSize', 8, 'MarkerFaceColor');
-   end
-
-   xlim([-5, 5]);
-   ylim([-5, 5]);
-   xlabel('x');
-   ylabel('y');
-
-   title('Vektorski dijagram i fazni portret');
-   grid on
-   hold off;

```

Slika 2.3: Kod za dijagram vektorskog polja

```

1      % Definiranje matrice A (koeficijenti sistema)
2 -    A = [0, 3; -2, 6];
3
4      % Izračunate svojstvene vrijednosti
5 -    lambda = eig(A);
6
7      % Broj tačaka za crtanje faznog dijagrama
8 -    num_points = 1000;
9
10     % Raspon za crtanje faznog dijagrama
11 -    x_range = linspace(-10, 10, num_points);
12 -    y_range = linspace(-10, 10, num_points);
13
14     % Inicijalizacija mreže faznog dijagrama
15 -    [X, Y] = meshgrid(x_range, y_range);
16
17     % Izračunavanje brzina promjene stanja
18 -    dX = A(1,1) * X + A(1,2) * Y;
19 -    dY = A(2,1) * X + A(2,2) * Y;
20
21     % Crtanje faznog dijagrama
22 -    figure;
23 -    quiver(X, Y, dX, dY);
24 -    xlabel('x_1');
25 -    ylabel('x_2');
26 -    title('Fazni dijagram');
27 -    axis tight;
28 -    grid on;

```

Slika 2.4: Kod za fazni dijagram

## Primjer2

Sistem u prostoru stanja je dat sa:

$$\dot{x}_1 = -2x_1 + x_1x_2 \quad (2.16)$$

$$\dot{x}_2 = x_1^2 - 3x_2 \quad (2.17)$$

Stavljajući da je:

$$\dot{x}_1 = 0 \quad (2.18)$$

$$\dot{x}_2 = 0 \quad (2.19)$$

$$0 = x_1^2 - 3x_2 \quad \text{slijedi da je} \quad x_2 = -\frac{2}{3} \quad (2.20)$$

$$0 = -2x_1 + x_1x_2 \quad (2.21)$$

Kada uvrstimo jednačinu (2.20) u jednačinu (2.21) dobijamo:

$$-2x_1 + x_1 \frac{x_1^2}{3} = 0 \quad (2.22)$$

$$x_1(-6 + x_1^2) = 0 \quad (2.23)$$

Rješenje ove jednačine je  $x_{11}=0$  ,  $x_{12}=\sqrt{6}$  i  $x_{13}=-\sqrt{6}$  , te  $x_2=\frac{x_1^2}{3}=\frac{6}{3}=2$

Tačke ekvilibrijuma za naš sistem su  $x_{1e}=(x_{11},x_2)=(0,2)$  ,  $x_{2e}(x_{12},x_2)=(\sqrt{6},2)$  i  $x_{3e}(x_{13},x_2)=(-\sqrt{6},2)$  .

$$A=\begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2}{\partial x_2} \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} -2+x_2 & x_1 \\ 2x_1 & -3 \end{bmatrix} \quad (2.24)$$

Za prvu tačku ekvilibrijuma  $x_{1e}$  imamo matricu svojstvenih vrijednosti:

$$A=\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -3 \end{bmatrix}$$

$$\det(\lambda I - A) = \det\left(\begin{bmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -3 \end{bmatrix}\right) = \det\begin{bmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda+3 \end{bmatrix} \quad (2.25)$$

Dobijamo karakteristični polinom  $\lambda(\lambda+3)-0=\lambda^2+3\lambda$  (2.26)

Svojstvene vrijednosti sistema su :  $\lambda_1=0$  i  $\lambda_2=-3$

Ima se kontinuum tačaka ekvilibrijuma. Jedna svojstvena vrijednost je u lijevoj poluravni, a druga je jednaka nuli, pa se ne može ništa sa sigurnošću reći o stabilnosti.

Za drugu tačku ekvilibrijuma  $x_{2e}$  imamo matricu svojstvenih vrijednosti:

$$A=\begin{bmatrix} 0 & \sqrt{6} \\ 2\sqrt{6} & -3 \end{bmatrix}$$

$$\det(\lambda I - A) = \det\left(\begin{bmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & \sqrt{6} \\ 2\sqrt{6} & -3 \end{bmatrix}\right) = \det\begin{bmatrix} \lambda & -\sqrt{6} \\ -2\sqrt{6} & \lambda+3 \end{bmatrix} \quad (2.27)$$

Dobijamo karakteristični polinom  $\lambda(\lambda+3)-2\sqrt{6}\sqrt{6}=\lambda^2+3\lambda-12$  (2.28)

Svojstvene vrijednosti sistema su :  $\lambda_3=\frac{-3+\sqrt{57}}{2}=2.2749$  i  $\lambda_4=\frac{-3-\sqrt{57}}{2}=-5.2749$

Svojstvene vrijednosti su realne, jednostruke, nenulte i različitog predznaka stoga je tačka ekvilibrijuma  $x_{2e}$  nestabilna i tipa je sedlo po prvom kriteriju Lyapunova.

Za treću tačku ekvilibrijuma  $x_{3e}$  imamo matricu svojstvenih vrijednosti:

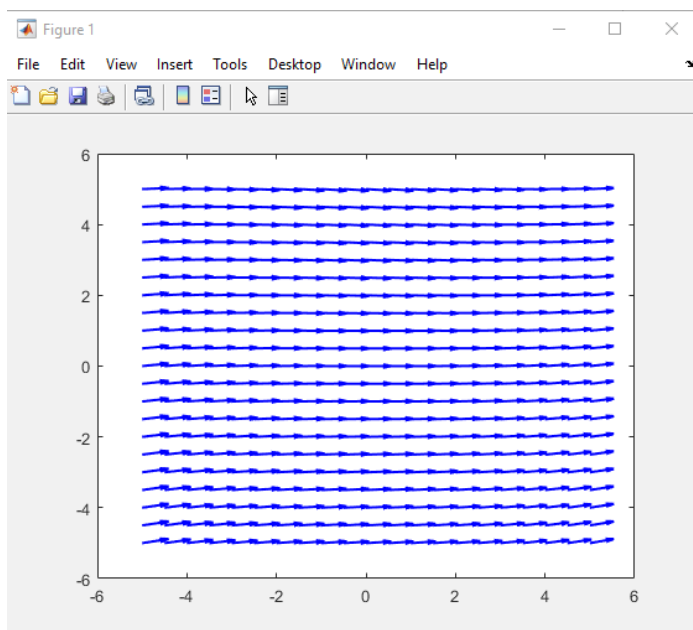
$$A=\begin{bmatrix} 0 & -\sqrt{6} \\ -2\sqrt{6} & -3 \end{bmatrix} \quad (2.29)$$

$$\det(\lambda I - A) = \det\left(\begin{bmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & -\sqrt{6} \\ -2\sqrt{6} & -3 \end{bmatrix}\right) = \det\begin{bmatrix} \lambda & \sqrt{6} \\ 2\sqrt{6} & \lambda+3 \end{bmatrix} \quad (2.30)$$

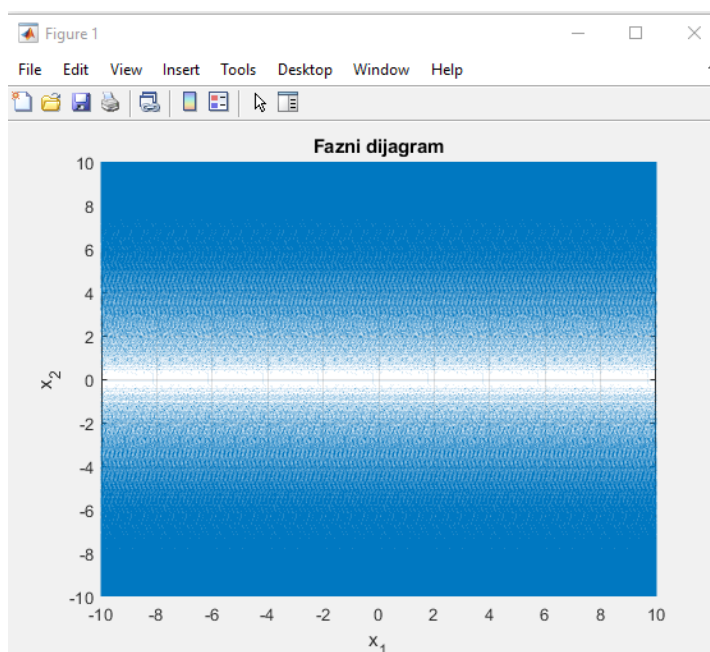
Dobijamo karakteristični polinom  $\lambda(\lambda+3)-2\sqrt{6}\sqrt{6}=\lambda^2+3\lambda-12$  (2.31)

Svojstvene vrijednosti sistema su :  $\lambda_5=\frac{-3+\sqrt{57}}{2}=2.2749$  i  $\lambda_6=\frac{-3-\sqrt{57}}{2}=-5.2749$

Svojstvene vrijednosti su realne, jednostruke, nenulte i različitog predznaka stoga je tačka ekvilibrijuma  $x_{3e}$  nestabilna i tipa je sedlo po prvom kriteriju Lyapunova.



Slika 2.5: Dijagram vektorskog polja



Slika 2.6: Fazni dijagram

Ispod se nalazi kod napisan u matlabu za dijagram vektorskog polja i faznog dijagrama za primjer 1.

```

-   clc
-   clear all

-   dx = @(x, y) -2*x + x*y;
-   dy = @(x, y) x.^2 - 3*y;

-   [x, y] = meshgrid(-5:0.5:5, -5:0.5:5);

-   dx_dt = dx(x, y);
-   dy_dt = dy(x, y);

-   %vektorski dijagram
-   quiver(x, y, dx_dt, dy_dt, 'LineWidth', 1.5, 'Color', 'b');
-   hold on
-   %pronalazenje tacaka ekvilibrijuma
-   equilibria = solve(dx(x, y) == 0, dy(x, y) == 0, 'Real', true);
-   %crtanje tacaka ekvilibrijuma
-   for i = 1:numel(equilibria.x)
-       equilibrium_x = double(equilibria.x(i));
-       equilibrium_y = double(equilibria.y(i));
-       plot(equilibrium_x, equilibrium_y, 'ro', 'MarkerSize', 8, 'MarkerFaceColor');
-   end

-   xlim([-5, 5]);
-   ylim([-5, 5]);
-   xlabel('x');
-   ylabel('y');

-   title('Vektorski dijagram i fazni portret');
-   grid on
-   hold off;

```

Slika 2.7: Kod za dijagram vektorskog polja

```

1 % Definiranje matrice A (koeficijenti sistema)
2 - A = [0, 0; 0, -3];
3
4 % Izračunate svojstvene vrijednosti
5 - lambda = eig(A);
6
7 % Broj tačaka za crtanje faznog dijagrama
8 - num_points = 1000;
9
10 % Raspon za crtanje faznog dijagrama
11 - x_range = linspace(-10, 10, num_points);
12 - y_range = linspace(-10, 10, num_points);
13
14 % Inicijalizacija mreže faznog dijagrama
15 - [X, Y] = meshgrid(x_range, y_range);
16
17 % Izračunavanje brzina promjene stanja
18 - dX = A(1,1) * X + A(1,2) * Y;
19 - dY = A(2,1) * X + A(2,2) * Y;
20
21 % Crtanje faznog dijagrama
22 - figure;
23 - quiver(X, Y, dX, dY);
24 - xlabel('x_1');
25 - ylabel('x_2');
26 - title('Fazni dijagram');
27 - axis tight;
28 - grid on;

```

Slika 2.8: Kod za fazni dijagram

### Primjer3

Sistem u prostoru stanja je dat:

$$\dot{x}_1 = -x_1 + x_2 \quad (2.32)$$

$$\dot{x}_2 = -x_1 - x_1 x_2 \quad (2.33)$$

Stavljajući da je:

$$\dot{x}_1 = 0 \quad (2.34)$$

$$\dot{x}_2 = 0 \quad (2.35)$$

$$0 = -x_1 + x_2 \quad \text{slijedi da je} \quad x_2 = x_1 \quad (2.36)$$

$$0 = -x_1 - x_1 x_2 \quad (2.37)$$

Kada uvrstimo jednačinu (2.36) u jednačinu (2.37) dobijamo:

$$-x_1 - x_1 x_1 = -x_1 - x_1^2 = -x_1(x_1 + 1) = 0 \quad (2.38)$$

Rješenje ove jednačine je  $x_{11} = 0$  i  $x_{12} = -1$

Tačke ekvilibrijuma za naš sistem su  $x_{1e} = (x_{11}, x_{21}) = (0, 0)$  i  $x_{2e} = (x_{12}, x_{22}) = (-1, -1)$ .

$$A = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2}{\partial x_2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ -1-x_2 & -x_1 \end{bmatrix} \quad (2.39)$$

Za prvu tačku ekvilibrijuma  $x_{1e}$  imamo matricu svojstvenih vrijednosti:

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \quad (2.40)$$

$$\det(\lambda I - A) = \det\left(\begin{bmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}\right) = \det\begin{bmatrix} \lambda+1 & -1 \\ 1 & \lambda \end{bmatrix} \quad (2.41)$$

Dobijamo karakteristični polinom  $\lambda(\lambda+1)+1=\lambda^2+\lambda+1$  (2.42)

Svojstvene vrijednosti sistema su :  $\lambda_1 = 0.5 + \frac{\sqrt{3}}{2}j$  i  $\lambda_2 = 0.5 - \frac{\sqrt{3}}{2}j$

Svojstvene vrijednosti su konjugativno-kompleksne. Realni dio je pozitivan stoga je tačka ekvilibrijuma  $x_{1e}$  nestabilan fokus prema prvom kriteriju Lyapunova.

Za drugu tačku ekvilibrijuma  $x_{2e}$  imamo matricu svojstvenih vrijednosti:

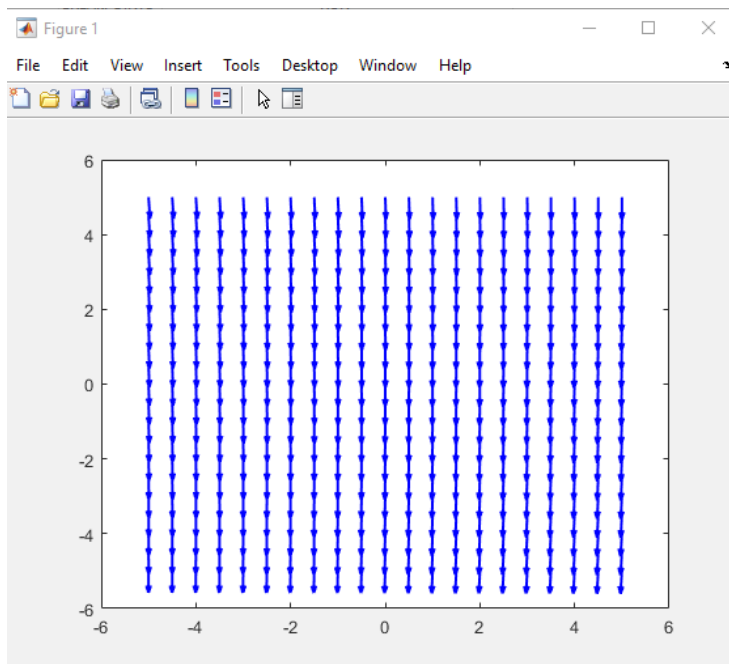
$$A = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (2.43)$$

$$\det(\lambda I - A) = \det\left(\begin{bmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\right) = \det\begin{bmatrix} \lambda+1 & -1 \\ 0 & \lambda-1 \end{bmatrix} \quad (2.44)$$

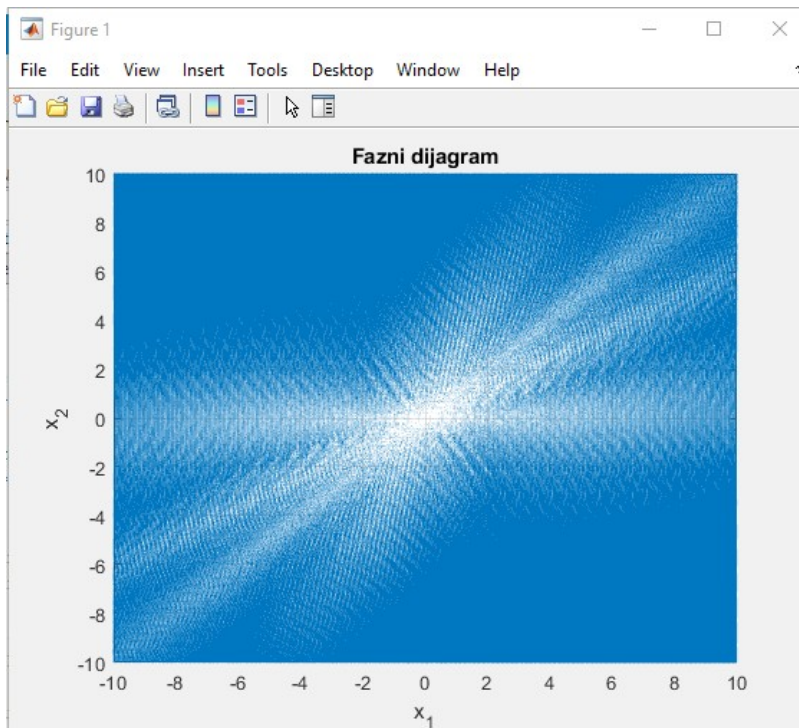
Dobijamo karakteristični polinom  $(\lambda-1)(\lambda+1)=0$  (2.45)

Svojstvene vrijednosti sistema su :  $\lambda_3 = 1$  i  $\lambda_4 = -1$

Svojstvene vrijednosti su realne, jednostruke, nenulte i različitog predznaka stoga je tačka ekvilibrijuma  $x_{2e}$  nestabilna i tipa je sedlo po prvom kriteriju Lyapunova.



Slika 2.9: Dijagram vektorskog polja



Slika 2.10: Fazni dijagram

Ispod se nalazi kod napisan u matlabu za dijagram vektorskog polja i faznog dijagrama za primjer 1.

```
clc
clear all

dx = @(x, y) -x + y;
dy = @(x, y) -x - x*y;

[x, y] = meshgrid(-5:0.5:5, -5:0.5:5);

dx_dt = dx(x, y);
dy_dt = dy(x, y);

%vektorski dijagram
quiver(x, y, dx_dt, dy_dt, 'LineWidth', 1.5, 'Color', 'b');
hold on
%pronalazenje tacaka ekvilibrijuma
equilibria = solve(dx(x, y) == 0, dy(x, y) == 0, 'Real', true);
%ortanje tacaka ekvilibrijuma
for i = 1:numel(equilibria.x)
    equilibrium_x = double(equilibria.x(i));
    equilibrium_y = double(equilibria.y(i));
    plot(equilibrium_x, equilibrium_y, 'ro', 'MarkSize', 8, 'MarkerFaceColor');
end

xlim([-5, 5]);
ylim([-5, 5]);
xlabel('x');
ylabel('y');

title('Vektorski dijagram i fazni portret');
grid on
hold off;
```

Slika 2.11: Kod za dijagram vektorskog polja

```

1      % Definiranje matrice A (koeficijenti sistema)
2 -    A = [-1, 1; 0, 1];
3
4      % Izračunate svojstvene vrijednosti
5 -    lambda = eig(A);
6
7      % Broj tačaka za crtanje faznog dijagrama
8 -    num_points = 1000;
9
10     % Raspon za crtanje faznog dijagrama
11 -    x_range = linspace(-10, 10, num_points);
12 -    y_range = linspace(-10, 10, num_points);
13
14     % Inicijalizacija mreže faznog dijagrama
15 -    [X, Y] = meshgrid(x_range, y_range);
16
17     % Izračunavanje brzina promjene stanja
18 -    dX = A(1,1) * X + A(1,2) * Y;
19 -    dY = A(2,1) * X + A(2,2) * Y;
20
21     % Crtanje faznog dijagrama
22 -    figure;
23 -    quiver(X, Y, dX, dY);
24 -    xlabel('x_1');
25 -    ylabel('x_2');
26 -    title('Fazni dijagram');
27 -    axis tight;
28 -    grid on;

```

Slika 2.12: Kod za fazni dijagram

#### Primjer4

Sistem u prostoru stanja je dat:

$$\dot{x} = -4x + x^3 \quad (2.46)$$

Stavljajući da je:

$$\dot{x} = 0 \quad (2.47)$$

$$0 = -4x + x^3 \quad (2.48)$$

$$x(x^2 - 4) = 0 \quad (2.49)$$

$$x(x-2)(x+2) = 0 \quad (2.50)$$

Rješenje ove jednačine i tačke ekvilibrijuma za naš sistem su  $x_{11} = 0$  ,  $x_{2e} = -2$  i  $x_{3e} = 2$  .

$$A = \frac{\partial f}{\partial x} \quad (2.51)$$

Za prvu tačku ekvilibrijuma  $x_{1e}$  imamo matricu svojstvenih vrijednosti:

$$A = -4 + 3x^2 = -4 \quad (2.52)$$

$$\det(\lambda I - A) = \lambda - (-4) = \lambda + 4 = 0 \rightarrow \lambda = -4 \quad (2.53)$$



Tačka ekvilibrijuma  $x_{1e}$  je asimptotski stabilna prema prvom kriteriju Lyapunova.

Za drugu tačku ekvilibrijuma  $x_{2e}$  imamo matricu svojstvenih vrijednosti:

$$A = -4 + 3(-2)^2 = -4 + 12 = 8 \quad (2.54)$$

$$\det(\lambda I - A) = \lambda - 8 = 0 \rightarrow \lambda = 8 \quad (2.55)$$

Tačka ekvilibrijuma  $x_{2e}$  je nestabilna po prvom kriteriju Lyapunova.

Za treću tačku ekvilibrijuma  $x_{3e}$  imamo matricu svojstvenih vrijednosti:

$$A = -4 + 3 \cdot 2^2 = -4 + 12 = 8 \quad (2.56)$$

$$\det(\lambda I - A) = \lambda - 8 = 0 \rightarrow \lambda = 8 \quad (2.57)$$

Tačka ekvilibrijuma  $x_{3e}$  je nestabilna po prvom kriteriju Lyapunova.

Za sistem prvog reda ne crtamo vektorsko polje niti fazni portret.

### ZADATAK3

#### Primjer1

Napisati proizvoljan sistem u prostoru stanja. Primjenom direktnog metoda Lyapunova ispitati stabilnost (asimptotsku i globalnu) ishodišta prostora stanja.

Da bismo napisali sistem u prostoru stanja za nelinearni sistem stiskanja pedale gasa i brzine automobila. Prvo ćemo definisati varijable stanja sistema. Neka je:

- $x_1$  : Brzina automobila
- $x_2$  : Položaj pedale gasa

Dalje definisat ćemo parametre sistema:

- $u$  : Ulazni signal koji predstavlja stiskanje pedale gasa
- $m$  : Masa automobila
- $F$

Nastavljamo sa definisanjem sistema u prostoru stanja. Kako bismo dobili izraze za promjene stanja u vremenu, koristimo Newtonov zakon za kretanje:

1. Brzina automobila:  $\dot{x}_1 = m_1(u - F_d) \quad (3.1)$

2. Položaj pedale gasa:  $\dot{x}_2 = 0 \quad (3.2)$

Tačke ekvilibrijuma sistema su one tačke u prostoru stanja u kojima su promjene stanja u vremenu nula, tj.

$\dot{x}_1 = 0$  i  $\dot{x}_2 = 0$ . Substituišemo ove vrijednosti u gornje izraze:

1. Brzina automobila:  $m_1(u - F_d) = 0$ . Iz ovog izraza dobijamo:  $u = F_d \quad (3.3)$

2. Položaj pedale gasa:  $\dot{x}_2 = 0$ . Nema dodatnih ograničenja za ovu promjenljivu.

Dakle tačka ekvilibrijuma je kada je ulazni signal  $u$  jednak sili otpora vazduha  $F_d$ , dok nema dodatnih ograničenja za položaj pedale gasa.

Sada ćemo analizirati stabilnost tačaka ekvilibrijuma primjenom prvog Lyapunovog metoda. Prvi Lyapunov metod se zasniva na analizi znaka parcijalnih derivacija promjena stanja u odnosu na stanja. Ako su sve parcijalne derivacije negativne (ili sve pozitivne), tačka ekvilibrijuma je stabilna.

$$\partial x_1 \partial \dot{x}_1 = 0$$

Parcijalne derivacije su:  $\partial x_2 \partial \dot{x}_1 = \partial x_2 \partial (m_1(u - F_d)) = 0$

$$\partial x_1 \partial \dot{x}_2 = 0$$

$$\partial x_2 \partial \dot{x}_2 = 0$$

Sve ove parcijalne derivacije su nule, što znači da ne možemo donijeti zaključak o stabilnosti tačke ekvilibrijuma primjenom prvog Lyapunova metoda. Potrebno je koristiti drugačije metode za analizu stabilnosti. Nakon određivanja tačaka ekvilibrijuma i analize stabilnosti, možemo nacrtati dijagram vektorskog polja i fazni dijagram. Dijagram vektorskog polja prikazuje smjernice i intenzitete vektora brzina u prostoru stanja, dok fazni dijagram prikazuje promjene stanja sistema tokom vremena.

Možemo analizirati stabilnost sistema koristeći Lyapunovu kandidat funkciju i metodu drugog Lyapunovog metoda. Prvo, trebamo odabrati Lyapunovu funkciju koja mora biti pozitivno definitna, kontinuirano diferencijabilna i imati negativno definitan gradijent u okolini tačke ekvilibrijuma.

Neka je  $V(x_1, x_2)$  (3.4) Lyapunov kandidat funkcija za sistem stiskanja pedale gasa i brzine automobila.

Jedan moguć izbor za Lyapunovu funkciju je:  $V(x_1, x_2) = 21x_{12} + 21x_{22}$  (3.5)

Sada ćemo izračunati gradijent funkcije  $V(x_1, x_2)$  :

$$\nabla V(x_1, x_2) = [\partial x_1 \partial V \partial x_2 \partial V] = [x_1 \ x_2] \quad (3.6)$$

Gradijent je definitno nula samo u tački (0,0), koja nije tačka ekvilibrijuma sistema. Sada, trebamo analizirati promjenu funkcije  $V(x_1, x_2)$  tokom vremena. Izračunajmo derivaciju  $V(x_1, x_2)$  po vremenu:

$$\dot{V}(x_1, x_2) = [\partial x_1 \partial V \dot{x}_1 + \partial x_2 \partial V \dot{x}_2] \quad (3.7)$$

Substituišemo izraze za  $\dot{x}_1$  i  $\dot{x}_2$  koje smo dobili ranije:

$$\dot{V}(x_1, x_2) = x_1(m_1(u - F_d)) + x_2 \cdot 0 = m_1 x_1(u - F_d) \quad (3.8)$$

Sada možemo analizirati znak izraza  $\dot{V}(x_1, x_2)$  u okolini tačke ekvilibrijuma. Za stabilnost sistema, želimo da  $\dot{V}(x_1, x_2)$  bude negativan u toj okolini.

Ako pretpostavimo da je  $u$  veće od  $F_d$  (pedala gasa je stisnuta više od sile otpora vazduha), tada je

$\dot{V}(x_1, x_2)$  pozitivan kada je  $x_1$  pozitivan (brzina automobila je pozitivna). Ako je  $u$  manje od  $F_d$ , tada je  $\dot{V}(x_1, x_2)$  negativan kada je  $x_1$  pozitivan.

Ovaj rezultat sugerise da sistem nema globalnu stabilnost, već zavisi od vrijednosti ulaznog signala  $u$  u odnosu na silu otpora vazduha  $F_d$ . Ako je ulaz  $u$  veći od sile otpora vazduha  $F_d$ , sistem će imati tendenciju da se približi tački ekvilibrijuma sa  $x_1 = 0$  (brzina automobila se smanjuje). Međutim, ako je ulaz  $u$  manji od sile otpora vazduha  $F_d$ , sistem će imati tendenciju da se približi tački ekvilibrijuma sa  $x_1 > 0$  (brzina automobila se povećava).

Ovo ukazuje na to da sistem može biti asimptotski stabilan u odnosu na  $x_1 = 0$  kada je  $u > F_d$ , dok može biti nestabilan kada je  $u < F_d$ . Međutim, tačka ekvilibrijuma sa  $x_1 > 0$  nije stabilna, jer funkcija  $V(x_1, x_2)$  raste dok se udaljavamo od tačke ekvilibrijuma.

Važno je napomenuti da smo u ovom analitičkom pristupu pretpostavili da je sila otpora vazduha  $F_d$  konstantna. U stvarnosti, sila otpora vazduha može se mijenjati ovisno o brzini automobila i drugim faktorima, što može utjecati na stabilnost sistema.

## Primjer2

Da bismo ispitivali asimptotsku i globalnu stabilnost nelinearnog sistema širenja zarazne bolesti poput modela SIR (Susceptibilni - Infektivni - Izlečeni), možemo koristiti direktnu metodu Lyapunova i Lyapunovu kandidat funkciju.

Prvo ćemo definisati model SIR sistema sa konkretnim vrijednostima parametara. Uzmimo sljedeće jednačine:

$$\begin{aligned}\dot{S} &= -\beta SI \\ \dot{I} &= \beta SI - \gamma I \\ \dot{R} &= \gamma I\end{aligned}$$

Gdje su:

- $S$  – broj suspetibilnih jedinki
- $I$  – broj infektivnih jedinki
- $R$  – broj izliječenih jedinki
- $\beta$  – koeficijent prenosa zaraze
- $\gamma$  – koeficijent oporavka

Lyapunov kandidat funkciju možemo definisati kao  $V(S, I, R) = aS + bI + cR$  gdje su  $a, b, c$  konstante koje biramo.

Zatim ćemo izračunati parcijalne izvode  $V$  po  $S, I, R$  kako bismo dobili izraze za  $\dot{V}$ , tj.

$$\dot{V} = \frac{\partial V}{\partial S} \dot{S} + \frac{\partial V}{\partial I} \dot{I} + \frac{\partial V}{\partial R} \dot{R}.$$

Nakon toga analiziramo predznake izraza  $\dot{V}$  u tačkama ekvilibrijuma sistema (kada su  $\dot{S}, \dot{I}, \dot{R}$  jednake nuli) kako bismo odredili stabilnost sistema.

Ako je  $\dot{V} < 0$  za sve vrijednosti  $(S, I, R)$  koje nisu tačka ekvilibrijuma, onda je tačka ekvilibrijuma asimptotski stabilna. Ako je  $\dot{V} \leq 0$  za sve vrijednosti  $(S, I, R)$  onda je tačka ekvilibrijuma globalno stabilna.

Sada ćemo to pokazati na konkretnom primjeru. Uzmimo sljedeći model SIR sistema sa sljedećim jednačinama:

$$\begin{aligned}\dot{S} &= -0.5 SI \\ \dot{I} &= 0.5 SI - 0.1 I \\ \dot{R} &= 0.1 I\end{aligned}$$

Kao Lyapunovu funkciju možemo odabrati  $V(S, I, R) = aS + bI + cR$ , te  $a = 1, b = 2, c = 3$ .

Prvo izračunajmo parcijalne izvode  $V$  po  $S, I, R$ :

$$\frac{\partial V}{\partial S} = a = \frac{1 \partial V}{\partial I} = b = \frac{2 \partial V}{\partial R} = c = 3$$

Sada izračunajmo  $\dot{V}$ :

$$\dot{V} = \frac{\partial V}{\partial S} \dot{S} + \frac{\partial V}{\partial I} \dot{I} + \frac{\partial V}{\partial R} \dot{R} = \frac{\partial V}{\partial S} (-0.5 SI) + \frac{\partial V}{\partial I} (0.5 SI - 0.1 I) + \frac{\partial V}{\partial R} (0.1 I) = -0.5 SI + 0.5 SI^2 - 0.2 I^2 + 0.3 RI$$

Sada analizirajmo predznake izraza  $\dot{V}$  za različite vrijednosti  $(S, I, R)$ :

1. Tačka ekvilibrijuma  $(S, I, R) = (10, 5, 0)$ :

$$\dot{V} = -0.5 * 10 * 5 + 0.5 * 10 * 5^2 - 0.2 * 5^2 + 0.3 * 10 * 5 = -25 + 125 - 25 + 15 = 90$$

Kada je  $\dot{V} > 0$  za tačku ekvilibrijuma (10, 5, 0) zaključujemo da tačka ekvilibrijuma nije asimptotski stabilna.

2. Arbitarna vrijednost van tačke ekvilibrijuma na primjer  $(S, I, R) = (20, 3, 2)$ :

$$\dot{V} = -0.5 \cdot 20 \cdot 3 + 0.5 \cdot 20 \cdot 3^2 - 0.2 \cdot 3^2 + 0.3 \cdot 2 \cdot 3 = -30 + 90 - 1.8 + 1.8 = 60$$

Kako je  $\dot{V} > 0$  za ovu arbitarnu vrijednost van tačke ekvilibrijuma zaključujemo da sistem nije globalno stabilan.

Na osnovu ovog izračunavanja možemo zaključiti da sistem SIR sa datim parametrima nije asimptotski stabilan, niti globalno stabilan.

#### ZADATAK4

Napisati proizvoljan sistem u prostoru stanja, i uvrstiti u upravljanje i projektovati kontroler za upravljanje u kliznom režimu. Nacrtati fazne portrete sistema bez upravljanja kao i sa upravljanjem. Na faznom dijagramu sa upravljanjem nacrtati i liniju komutacije.

#### Primjer1

Za sistem čiji je model u prostoru stanja dat kao

$$\dot{x}_1 = x_2 \quad (4.1)$$

$$\dot{x}_2 = -x_1 + \varepsilon(1 - x_1^2)x_2 + u \quad (4.2)$$

gdje je u upravljanje i  $\varepsilon = 1$ . Projektovati kontroler za upravljanje u kliznom režimu. Nacrtati fazne portrete sistema bez upravljanja kao i sa upravljanjem. Na faznom dijagramu sa upravljanjem nacrtati i liniju komutacije.

#### RJEŠENJE:

Razmatrat ćemo kontrolnu Van der Polovu jednačinu

$$\dot{x}_1 = x_2 \quad (4.3)$$

$$\dot{x}_2 = -x_1 + \varepsilon(1 - x_1^2)x_2 + u \quad (4.4)$$

Sa izlazom  $y = x_2$ . Računajući izvode izlaza dobijamo

$$\dot{y} = \dot{x}_1 = x_2 \quad (4.5)$$

$$\dot{y} = \dot{x}_2 = -x_1 + \varepsilon(1 - x_1^2)x_2 + u \quad (4.6)$$

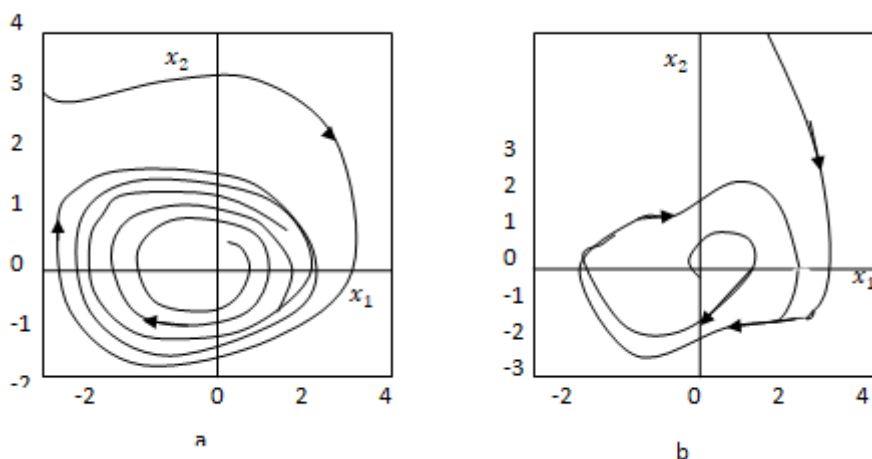
Dakle sistem ima relativni stepen dva u  $R^2$ . Za izlaz  $y = x_2$ ,

$$\dot{y} = -x_1 + \varepsilon(1 - x_1^2)x_2 + u \quad (4.7)$$

I sistem ima relativni stepen jedan u  $R^2$ . Za izlaz  $y = x_1 + x_2^2$ ,

$$\dot{y} = x_2 + 2x_2 \left[ -x_1 + \varepsilon(1 - x_1^2)x_2 + u \right] \quad (4.8)$$

I sistem ima relativni stepen jedan u  $D_0 = \{x \in \mathbb{R}^2 \vee x_2 \neq 0\}$

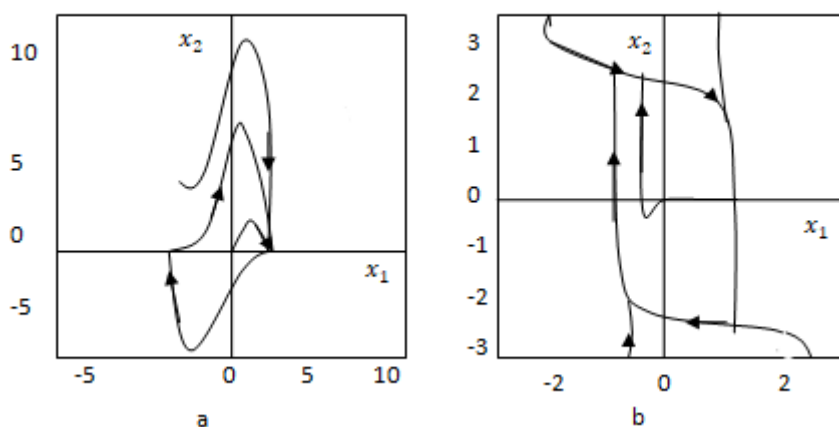


Slika 4.1: Fazni portreti oscilatora Van der Pol

Na slici 4.1 su prikazani fazni portreti oscilatora Van der Pol a)  $\varepsilon = 0.2$ ; b)  $\varepsilon = 1.0$

Jedan ciklus je nula. Takva putanja će biti zatvorena orbita. Ispada da oscilator negativnog otpora ima izoliranu zatvorenu orbitu, što je ilustrovano u primjeru Van der Pol oscilatora. Slike 4.1 i 4.2 pokazuju fazne portrete Van der Pol jednačine.

Za tri različite vrijednosti parametra  $\varepsilon$  malu vrijednost 0,2; srednju vrijednost 1.0; i veliku vrijednost 5.0; postoji jedinstvena zatvorena orbita koja privlači sve putanje koje počinju iz orbite. Za  $\varepsilon = 0.2$  zatvorena orbita je glatka orbita koja je blizu kruga radijusa 2



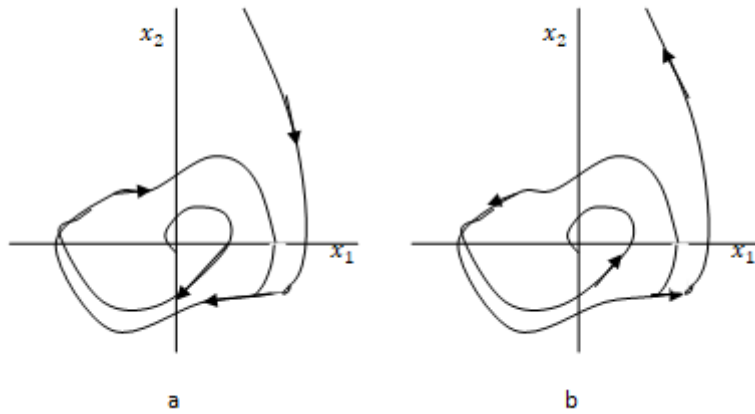
Slika 4.2: Fazni portreti oscilatora Van der Pol

Na slici 4.2 su prikazani fazni portreti oscilatora Van der Pol sa  $\varepsilon = 5.0$ ; a) u  $x_1 = x_2$  planu; b) u  $z_1 = z_2$  planu; Ovo je tipično za malo  $\varepsilon$  tj.  $\varepsilon < 0.3$ . Za srednju vrijednost  $\varepsilon = 1.0$  kružni oblik zatvorene orbitre je izobličen kao što je prikazano na slici 5.1b. za velike vrijednosti  $\varepsilon = 5.0$  zatvorena orbita je jeko izobličena kao što je prikazano na slici 4.2a. otkrivajući fazni portret u ovom slučaju se može dobiti kada su varijable stanja odabrane kao  $z_1 = i_L$  i  $z_2 = v_C$  što rezultira jednačinama stanja

$$\dot{z}_1 = \frac{1}{\varepsilon} z_2 \quad (4.9)$$

$$\dot{z}_2 = -\varepsilon \left( z_1 - z_2 + \frac{1}{3} z_2^3 \right) \quad (4.10)$$

Fazni portret u ravnini  $z_1 = z_2$  za 5.0 prikazan na slici 4.2b. zatvorena orbita je vrlo blizu krivulje  $z_1 = z_2 - \frac{1}{3} z_2^3$  osim na uglovima, gdje postaje gotovo okomita. Okomiti dio zatvorenog ili bitnog dijela može se posmatrati kao da se zatvorena orbita preskače od jedna grane krivulje do druge dok doseže ugao. Oscilacije u kojima se odvija pojava ump-a obično se nazivaju oscilacijama relacija. U slučaju harmoničkog oscilatora postoji kontinuitet zatvorenih orbita, dok je u primjeru Van der Pol samo jedna izolirana periodična orbita. Izolirana periodična orbita naziva se ograničen ciklus. Ograničen ciklus oscilatora Van der Pol ima svojstvo koje se sve trajektorije u blizini trbušnog ograničenog ciklusa ultimativno teže prema graničnom ciklusu kao  $t \rightarrow \infty$ .



Slika 4.3: a) stabilni granični ciklus, b) nestabilni granični ciklus

Da bi se pokazao pretjerani krug nastabilnog ograničenog ciklusa treba razmotriti Van der Polovu jednačinu u obrnutom vremenu to jeste

$$\dot{x}_1 = x_2 \quad (4.11)$$

$$\dot{x}_2 = x_1 + \varepsilon (1 - x_1^2) x_2 \quad (4.12)$$

Fazni portret ovog sustava je identičan onome kao oscilator Van der Pol, osim što granični Van der Polovog oscilatora iz našeg primjera ima posebne oblike u ograničenim slučajevima, jer je vrlo mali i vrlo velik.

$$\text{Pretpostavimo } \dot{x}_1 = x_2, x_1(0) = 1 \quad (4.13)$$

$$\dot{x}_2 = -x_1 + \varepsilon (1 - x_1^2) x_2, x_2(0) = 0 \quad (4.14)$$

Vremenski interval  $[0, \pi]$ . Možemo početi postavljanjem  $\varepsilon = 1$

$$\dot{x}_{10} = x_{20}, x_{10}(0) = 1 \quad (4.15)$$

$$\dot{x}_{20} = -x_{10}, x_{20}(0) = 0 \quad (4.16)$$

Čije je rješenje  $x_{10}(t) = \cos \cos t$   $x_{10}(t) = -\sin \sin t$  (4.17)

Teorema 1. Pretpostavimo da

- $F$  i njegovi parcijalni derivati u odnosu na  $(x, \varepsilon)$  do reda  $N$  su kontinuirani u  $(t, x, \varepsilon)$  za  $(t, x, \varepsilon) \in [t_0, t_1] \times D \times [-\varepsilon_0, \varepsilon_0]$ ;
- $\eta$  i njegovi derivati do reda  $N$  su kontinuirani za  $\varepsilon \in [-\varepsilon_0, \varepsilon_0]$ ;
- Nominalni problem dat u primjeru ima jedinstveno rješenje  $x_0(t)$  definisano na  $[t_0, t_1]$  i  $x_0(t) \in D$  za svako  $t \in [t_0, t_1]$

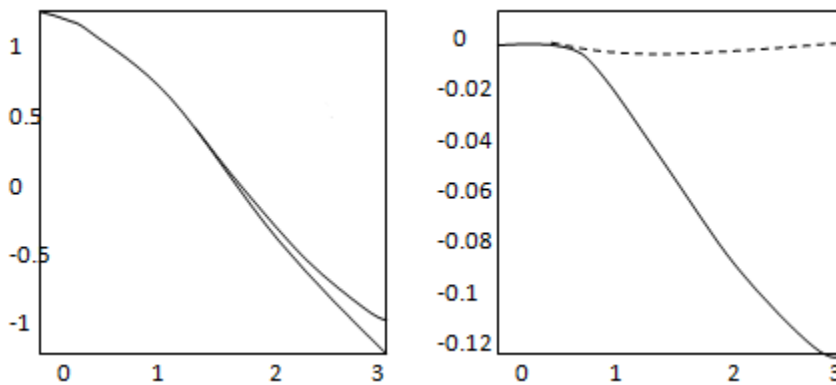
Onda postoji  $\varepsilon^i > 0$  tako da je  $\forall |\varepsilon| < \varepsilon^i$ , problem ima jedinstveno rješenje  $x(t, \varepsilon)$  definisano na  $[t_0, t_1]$  koji zadovoljava

$$x(t, \varepsilon) = \sum_{k=0}^{N-1} x_k(t) \varepsilon^k = O(\varepsilon^N) \quad (4.18)$$

Rješenjem 4.17 jasno je da sve pretpostavke iz teorema 1. zadovoljene i zaključujemo da je pogreška aproksimacije  $x(t, \varepsilon) - x_0(t)$  je  $O(\varepsilon)$ . Računajući  $x(t, \varepsilon)$  numerički na tri različite vrijednosti  $\varepsilon$  i uzimajući

$$E_0 = \|x(t, \varepsilon) - x_0(t)\|_2 = \|x(t, 0.1) - x_0(t) - 0.1 x_1(t)\|_2 = 0.0057 \quad (4.19)$$

Kao mjere pogreške aproksimacije  $E_0 = 0.0112, 0.0589$  i  $0.119$  za  $\varepsilon = 0.01, 0.05$  i  $0.1$ , respektivno. Ovi brojevi pokazuju da je pogreška ograničena s  $1.2\varepsilon$  za  $\varepsilon \leq 0.1$  slika 4.4 pokazuje tačne i približne putanje



Slika 4.4: Tačne i približne putanje prve komponente vektora stanja

## Primjer2

Za sistem čiji je model u prostoru stanja dat kao;

$$\dot{x}_1 = x_2 \quad (4.20)$$

$$\dot{x}_2 = -10x_1 - 2x_1^2 - 3x_2 + u \quad (4.21)$$

gdje je u upravljanje, projektovati kontroler za upravljanje u kliznom režimu. Nacrtati fazne portrete sistema bez upravljanja kao i sa upravljanjem. Na faznom dijagramu sa upravljanjem nacrtati i liniju komutacije.

Neka je zakon upravljanja dat kao:

$$u = -\beta(x) \operatorname{sgn}(x) = -\beta(x) \operatorname{sgn}(\mu_1 x_1 + x_2) \quad (4.22)$$

Uzimamo da je  $\mu_1 = 3$ .

Dat je sistem drugog reda:

$$\dot{x}_1 = x_2 \quad (4.23)$$

$$\dot{x}_2 = h(x) + g(x) \quad (4.24)$$

gdje su  $h(x)$  i  $g(x)$  nelinearne funkcije.

Za naš sistem vrijedi:

$$h(x) = -10x_1 - 2x_1^2 - 3x_2 \quad (4.25)$$

$$g(x) = 1 \quad (4.26)$$

Provjera uslova:

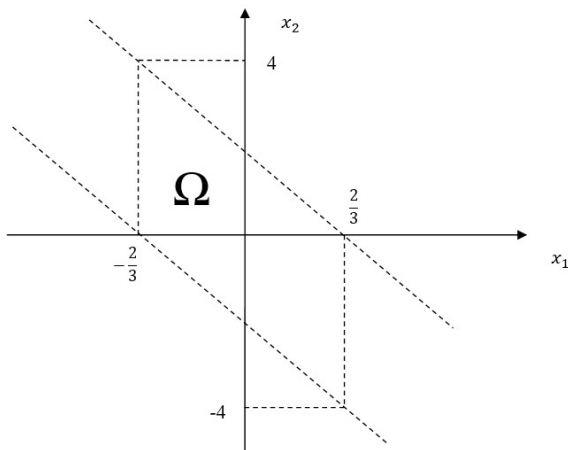
$$\left| \frac{\mu_1 x_2 + h(x)}{g(x)} \right| \leq k_1 \quad (4.27)$$

$$\left| \frac{\mu_1 x_2 + h(x)}{g(x)} \right| = \left| \frac{3x_2 - 10x_1 - 2x_1^2 - 3x_2}{1} \right| = |-10x_1 - 2x_1^2| \quad (4.28)$$

Ako se ograničimo na region fazne ravnine

$$\left\{ |x_1| \leq \frac{2}{\mu_1} = \frac{2}{3}, |\mu_1 x_1 + x_2| \leq 2 \right\} \quad (4.29)$$

tj.  $c = 2$ .



Slika 4.5: Region fazne ravnine.

Sljedeći korak jeste da pronađemo vrijednost izraza (4.27), u nekoj od tačaka  $\left(-\frac{c}{\mu_1}, 0\right), \left(\frac{c}{\mu_1}, 0\right), \left(-\frac{c}{\mu_1}, 2c\right)$  ili  $\left(\frac{c}{\mu_1}, -2c\right)$ . (4.30)



Tj. u tačkama:  $\left(-\frac{2}{3}, 0\right), \left(\frac{2}{3}, 0\right), \left(-\frac{2}{3}, 4\right)$  ili  $\left(\frac{2}{3}, -4\right)$ . (4.31)

Maximum apsolutne vrijednosti (4.27) dobijamo za  $x_1 = \frac{2}{3}$  ( $x_2$  se pokratilo).

Stoga, dalje imamo:

$$|-10x_1 - 2x_1^2| \leq 10x_1 + 2x_1^2 = 10 \cdot \frac{2}{3} + 2 \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^2 = \frac{20}{3} + 2 \cdot \frac{4}{9} = \frac{20}{3} + \frac{8}{9} = \frac{68}{9} = 7.556 = k_1 \quad (4.32)$$

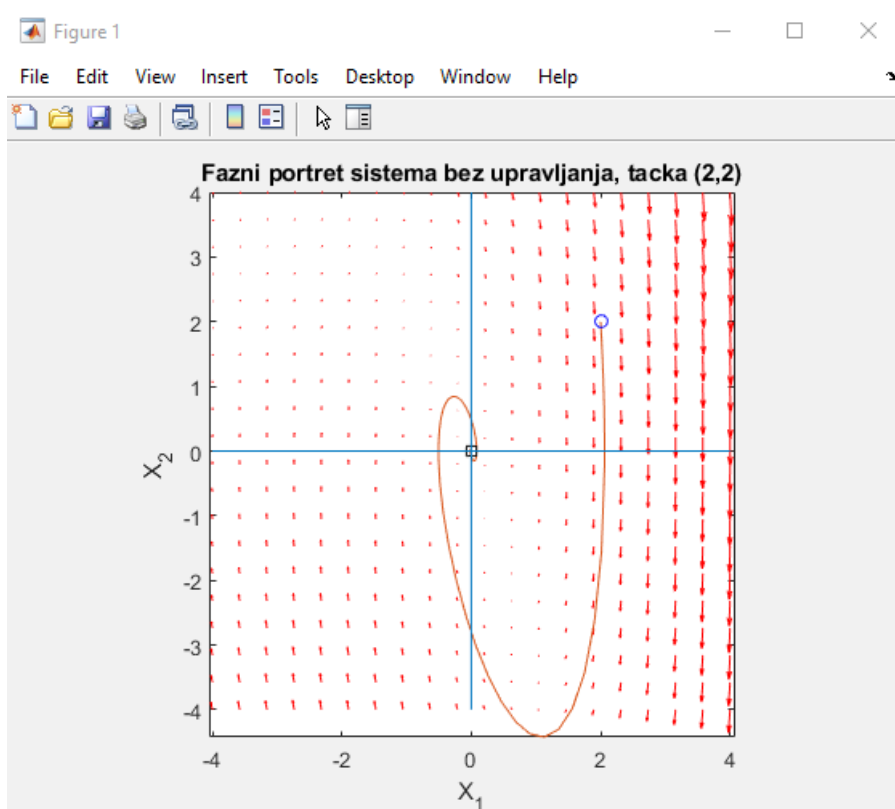
Prema tome, odabrat ćemo da je  $\beta(x) = k = 8 > k_1$

Zakon upravljanja dobijamo kao:

$$u = -8 \operatorname{sgn}(3x_1 + x_2) \quad (4.33)$$

MATLAB kod za fazni portret sistema BEZ upravljanja:

```
1 - f = @(t, X) [X(2); -10*X(1) - 2*X(1).^2 - 3*X(2)];
2
3 - x1 = linspace(-4, 4, 20);
4 - x2 = linspace(-4, 4, 20);
5
6 - [x,y] = meshgrid(x1, x2);
7 - size(x)
8 - size(y)
9
10 - u = zeros(size(x));
11 - v = zeros(size(x));
12
13 - t = 0;
14 - for i = 1:numel(x)
15 -     Yprime = f(t, [x(i); y(i)]);
16 -     u(i) = Yprime(1);
17 -     v(i) = Yprime(2);
18 - end
19
20 - quiver (x,y,u,v, 'r'); figure(gcf)
21 - xlabel('X_1')
22 - ylabel('X_2')
23 - axis tight equal;
24
25 - hold on
26
27 - [ts, ys] = ode45(f, [0, 5], [2; 2]);
28 - plot(ys(:,1), ys(:,2))
29 - plot(ys(1,1), ys(1,2), 'bo')
30 - plot(ys(end,1), ys(end,2), 'ks')
31 - line([-4, 4], [0, 0]), line([0,0], [-4,4])
32 - title('Fazni portret sistema bez upravljanja, tacka (2,2)');
```



Slika 4.6: Fazni portret sistema bez upravljanja

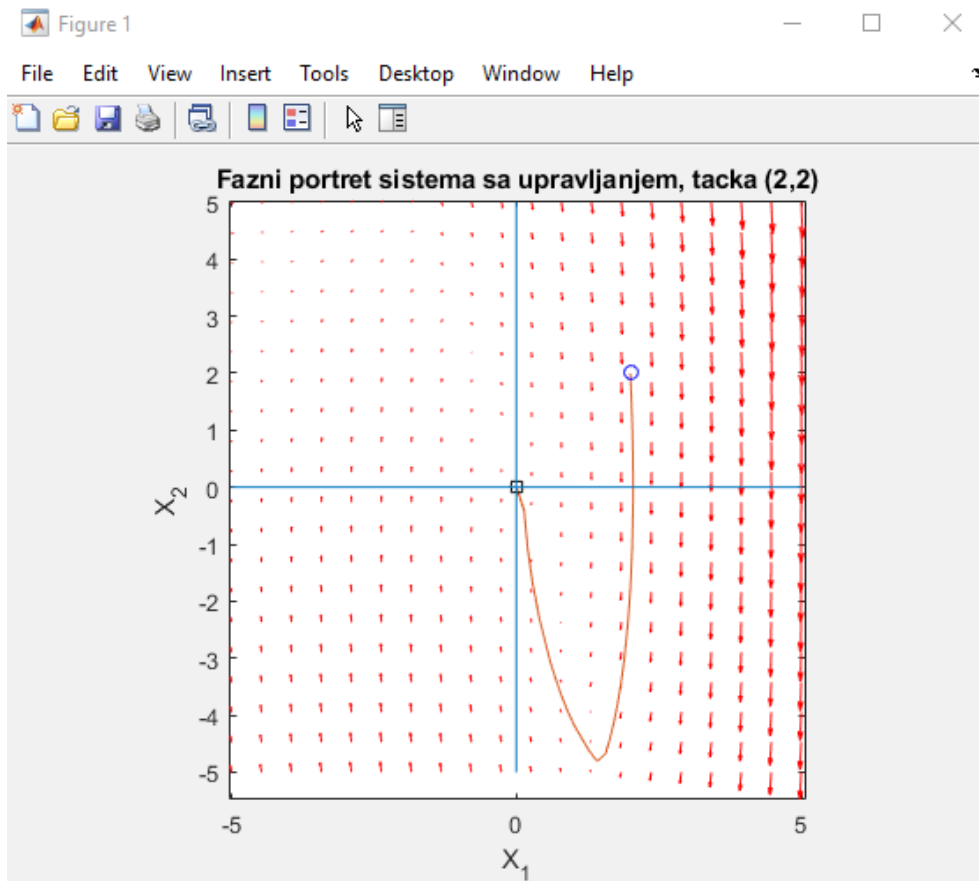
Slika 4.6: Fazni portret sistema bez upravljanja, tačka (2,2).

MATLAB kod za fazni portret sistema SA upravljanjem:

```

1 - f = @(t, X) [X(2); -10*X(1)- 2*X(1).^2 - 3*X(2)- 8*sign(3*X(1)+ X(2))];
2
3 - x1 = linspace(-5, 5, 20);
4 - x2 = linspace(-5, 5, 20);
5
6 - [x,y] = meshgrid(x1, x2);
7 - size(x)
8 - size(y)
9
10 - u = zeros(size(x));
11 - v = zeros(size(x));
12
13 - t = 0;
14 - for i = 1:numel(x)
15 -     Yprime = f(t, [x(i); y(i)]);
16 -     u(i)= Yprime(1);
17 -     v(i)= Yprime(2);
18 - end
19
20 - quiver (x,y,u,v, 'r'); figure(gcf)
21 - xlabel('X_1')
22 - ylabel('X_2')
23 - axis tight equal;
24 - hold on
25
26 - [ts, ys] = ode45(f, [0, 5], [2; 2]);
27 - plot(ys(:,1), ys(:,2))
28 - plot(ys(1,1), ys(1,2), 'bo')
29 - plot(ys(end,1), ys(end, 2), 'ks')
30 - line([-5, 5], [0, 0]), line([0,0], [-5,5])
31 -

```

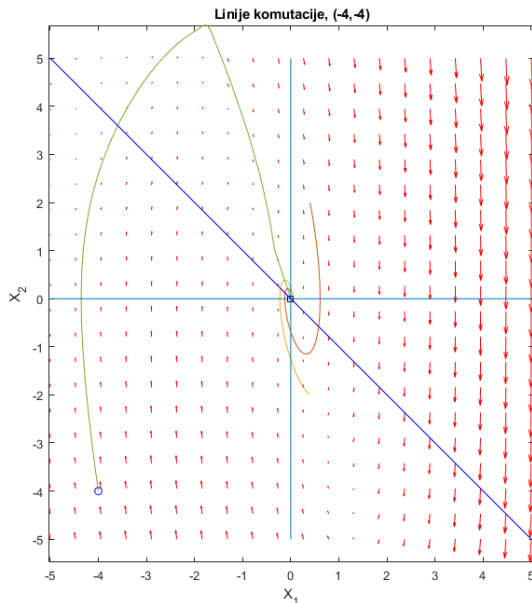


Slika 4.7: Fazni portret sistema sa upravljanjem

MATLAB kod za linije komutacije:

```
1 - figure(1)
2 - for theta = [2:2]*pi/5
3 -     x0 = 1e - 5*[cos(theta); sin(theta)];
4 -     [t,x] = ode45(@dxdt1, [0,8], x0);
5 -     plot(x(:,1), x(:,2))
6 - end
7 - hold on
8
9 - for theta = [2:2]/5
10 -     x0 = [theta 2];
11 -     [t, x] = ode45(@dxdt2, [0,2], x0);
12 -     plot(x(:,1), x(:,2))
13 -     x0 = [theta -2]
14 -     [t,x] = ode45(@dxdt2, [0 2], x0);
15 -     plot(x(:,1), x(:,2))
16 - end
17
18 - axis([-3 3 -3 3])
19
20 - f = @(t, X) [X(2); -10*X(1)- 2*X(1).^2 - 3*X(2)- 8*sign(3*X(1)+ X(2))];
21
22 - x1 = linspace(-5, 5, 20);
23 - x2 = linspace(-5, 5, 20);
24
25 - [x,y] = meshgrid(x1, x2);
26 - size(x)
27 - size(y)
28
29 - u = zeros(size(x));
30 - v = zeros(size(x));
31
32 - t = 0;
```

```
21
22 - x1 = linspace(-5, 5, 20);
23 - x2 = linspace(-5, 5, 20);
24
25 - [x,y] = meshgrid(x1, x2);
26 - size(x)
27 - size(y)
28
29 - u = zeros(size(x));
30 - v = zeros(size(x));
31
32 - t = 0;
33 - for i = 1:numel(x)
34 -     Yprime = f(t, [x(i); y(i)]);
35 -     u(i)= Yprime(1);
36 -     v(i)= Yprime(2);
37 - end
38
39 - quiver (x,y,u,v, 'r'); figure(gcf)
40 - xlabel('X_1')
41 - ylabel('X_2')
42 - axis tight equal;
43 - hold on
44
45 - [ts, ys] = ode45(f, [0, 5], [-4, -4]);
46 - plot(ys(:,1), ys(:,2))
47 - plot(ys(1,1), ys(1,2), 'bo')
48 - plot(ys(end,1), ys(end, 2), 'ks')
49
50 - line([-5, 5], [0, 0]), line([0,0], [-5,5])
51 - line([-5 5], [5 -5], 'Color', 'b')
52 - title('Linije komutacije, (-4,-4)')
```



Slika 4.8: Linije komutacije

### ZADATAK5

Pokazati da je opisna funkcija nelinearnosti tipa mrtve zone na slici 1 data kao:

$$N(a, \omega) = N(a) = \begin{cases} 0; 0 < \theta < \theta_1 \\ k(x \sin \omega t - \delta); \theta_1 < \theta < \pi - \theta_1 \end{cases}$$

$$\text{gdje je } N_s(x) = \frac{2}{\pi} \left[ \arcsin\left(\frac{1}{x}\right) + \frac{1}{x} \cos\left(\arcsin\left(\frac{1}{x}\right)\right) \right]$$

,  $k$  je nagib karakteristike,  $A$  je amplituda ulaznog harmonijskog signala  $x$ ,  $A = 1$ .

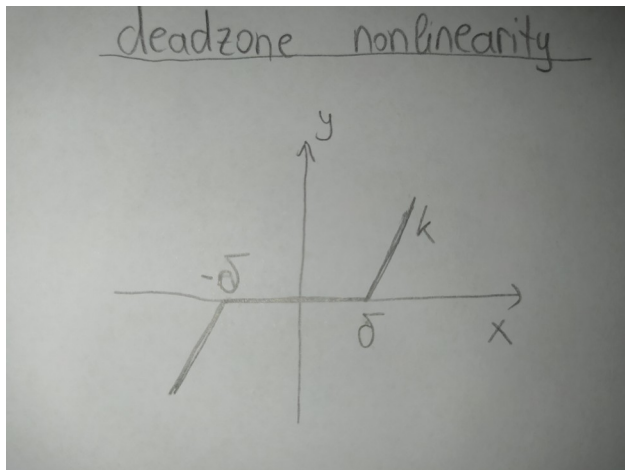
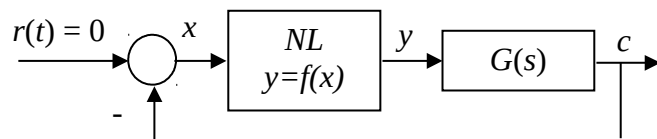
b) Ispitati mogućnost postojanja samooscilacija za sistem na slici. Nelinearnost je tipa

mrtve zone iz a) a funkcija prenosa procesa je  $G(s) = \frac{1}{s(s+2)(s+3)}$

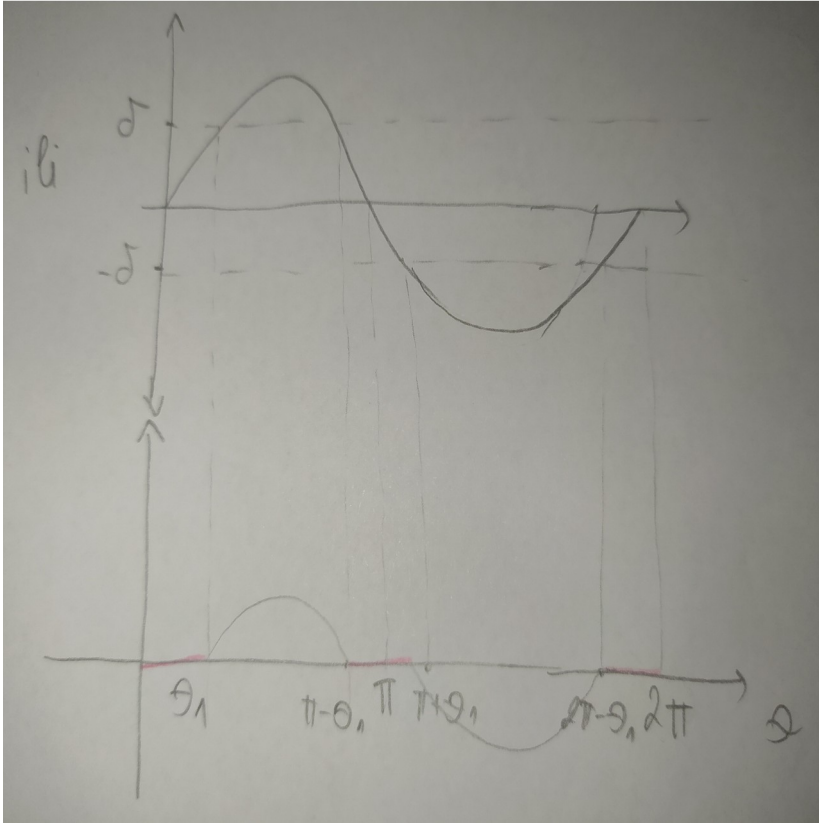
$$G(s) = \frac{1}{(s+2)(s+3)}$$

c) Osim ručnog izračunavanja demonstrirati dobijene rezultate koristeći Matlab/Simulink slika

Slika 2



Slika 5.1: Mrtva zona



Slika 5.2: Mrtva zona

Sa slike možemo da uočimo sljedeće:

$y = mx + c$ , gdje je  $y = k\delta + c$  za  $y = 0$  slijedi:  $c = -k\delta$ , za sinusoidalni ulaz  $x = A\sin\omega t$  dobijamo da je:  $y = kA\sin\omega t - k\delta$

$\phi_1$  je pomak faze amplitude fundamentalne harmonijske komponente izlaza u odnosu na ulaz.

$$\phi_1 = \tan^{-1}\left(\frac{a_1}{b_1}\right) \quad (5.1)$$

$Y_1$  je amplituda fundamentalne harmonijske komponente ulaza.  $Y_1 = \sqrt{(a_1^2 + b_1^2)}$  (5.2)

Da bismo pokazali da je opisna funkcija za datu nelinearnost koristit ćemo formulu  $N(A, \omega) = \frac{Y_1}{A} < \phi_1$  (5.3)

Sa slike možemo zaključiti da je  $b_1 = 0$ . Sada ćemo izračunati  $a_1$

$$a_1 = \frac{2}{\pi} \int_0^\pi y(\theta) \sin\theta d\theta = \frac{2}{\pi} \left[ \int_{\theta_1}^{\pi-\theta_1} k(A\sin\omega t - \delta) \sin\omega t d\omega t \right] \quad (5.4)$$

$$a_1 = \frac{2}{\pi} \left[ \int_{\theta_1}^{\pi-\theta_1} k(A\sin\theta - \delta) \sin\theta d\theta \right] = \frac{2k}{\pi} \left[ \int_{\theta_1}^{\pi-\theta_1} \frac{A}{2} (1 - \cos 2\theta) d\theta - \int_{\theta_1}^{\pi-\theta_1} \delta \sin\theta d\theta \right] \quad (5.5)$$

$$a_1 = \frac{2k}{\pi} \left[ \frac{A}{2} \left( \theta - \frac{\sin 2\theta}{2} \right) + \delta \cos \theta \right] = \frac{2k}{\pi} * i \quad (5.6)$$

$$a_1 = \frac{2k}{\pi} \left[ \frac{A}{2} (\pi - 2\theta_1 + \sin 2\theta_1) - 2\delta \cos \theta_1 \right] \quad (5.7)$$

Za  $\omega t = \theta_1$  i  $y = 0$  slijedi da je:  $y = kA \sin \theta_1 - k\delta = 0$ , tj.  $\delta = A \sin \theta_1$

Odakle slijedi da je:  $\sin \theta_1 = \frac{\delta}{A}$ , tj.  $\theta_1 = \sin^{-1} \left( \frac{\delta}{A} \right)$ , te  $\cos \theta_1 = \sqrt{1 - \sin^2(\theta_1)} = \sqrt{1 - \left( \frac{\delta}{A} \right)^2}$

Potrebno je znati i da je  $\sin 2\theta_1 = \sin(\theta_1 + \theta_1) = \sin \theta_1 * \cos \theta_1 + \cos \theta_1 * \sin \theta_1 = 2 \sin \theta_1 * \cos \theta_1$

Sada ćemo to da uvrstimo u  $a_1$

$$a_1 = \frac{2k}{\pi} \left[ \frac{A}{2} (\pi - 2\theta_1 + \sin 2\theta_1) - 2\delta \cos \theta_1 \right] = \frac{2kA}{\pi} \left[ \frac{\pi}{2} - \theta_1 + \frac{1}{2} \sin 2\theta_1 - \frac{2}{A} \delta \cos \theta_1 \right] \quad (5.8)$$

$$a_1 = \frac{2kA}{\pi} \left[ \frac{\pi}{2} - \theta_1 + \frac{1}{2} * 2 \sin \theta_1 * \cos \theta_1 - \frac{2}{A} \delta \cos \theta_1 \right] = \frac{2kA}{\pi} \left[ \frac{\pi}{2} - \theta_1 + \frac{\delta}{A} \cos \theta_1 - 2 \frac{\delta}{A} \cos \theta_1 \right] \quad (5.9)$$

$$a_1 = \frac{2kA}{\pi} \left[ \frac{\pi}{2} - \theta_1 - \frac{\delta}{A} \cos \theta_1 \right] \quad (5.10), \text{ gdje slijedi da je: } a_1 = \frac{2kA}{\pi} \left[ \frac{\pi}{2} - \theta_1 - \frac{\delta}{A} \sqrt{1 - \left( \frac{\delta}{A} \right)^2} \right] \quad (5.11)$$

Sada ćemo uvrstiti formule za  $a_1$  i  $b_1$  u  $Y_1$ :

$$Y_1 = \sqrt{a_1^2 + b_1^2} = \sqrt{a_1^2} = a_1 \quad (5.12)$$

Također ćemo uvrstiti i  $a_1$  i  $b_1$  u  $\phi_1$ :

$$\phi_1 = \tan^{-1} \left( \frac{a_1}{b_1} \right) = 0 \quad (5.13)$$

Na osnovu dobijenih izraza u izraz za opisnu funkciju uvrštavamo:

$$N(A, \omega) = \frac{Y_1}{A} < \phi_1 \quad (5.14)$$

$$N(A, \omega) = \frac{a_1}{A} < 0 \quad (5.15)$$

$$N(A, \omega) = \frac{\frac{2kA}{\pi} \left[ \frac{\pi}{2} - \theta_1 - \frac{\delta}{A} \sqrt{1 - \left( \frac{\delta}{A} \right)^2} \right]}{A} < 0 \quad (5.16)$$

$$N(A, \omega) = \frac{2kA}{\pi} \left[ \frac{\pi}{2} - \theta_1 - \frac{\delta}{A} \sqrt{1 - \left( \frac{\delta}{A} \right)^2} \right] < 0 \quad (5.17)$$

$$N(A, \omega) = \frac{2kA}{\pi} \left[ \frac{\pi}{2} - \sin^{-1} \frac{\delta}{A} - \frac{\delta}{A} \sqrt{1 - \left( \frac{\delta}{A} \right)^2} \right] < 0 \quad (5.18)$$



$$N(A, \omega) = k \left[ 1 - \frac{2}{\pi} \left( \sin^{-1} \frac{\delta}{A} + \frac{\delta}{A} \sqrt{1 - \left( \frac{\delta}{A} \right)^2} \right) \right] < 0 \quad (5.19)$$

gdje je za  $A=1$  :  $N(A, \omega) = k \left[ 1 - \frac{2}{\pi} \left( \sin^{-1} \delta + \delta \sqrt{1 - \delta^2} \right) \right] < 0 \quad (5.20)$

jednako  $N_s(x) = \frac{2}{\pi} \left[ \arcsin\left(\frac{1}{x}\right) + \frac{1}{x} \cos\left(\arcsin\left(\frac{1}{x}\right)\right) \right]$  što je i trebalo dokazati.

b)  $G(s) = \frac{1}{s(s+2)(s+3)}$

Za polove imamo da su:  $s=0$  ,  $s=-1$  ,  $s=-2$  . Svi polovi su u lijevoj poluravni, što znači da je  $P=0$  ,  $N=0$

$$G(j\omega) = \frac{1}{j\omega(j\omega+2)(j\omega+3)} * \frac{j}{j} \quad (5.21)$$

$$G(j\omega) = \Re G(j\omega) + \Im G(j\omega) \quad (5.22)$$

$$G(j\omega) = \frac{-5}{\omega((6-\omega^2)^2 + 25\omega^2)} - \frac{(6-\omega^2)}{\omega((6-\omega^2)^2 + 25\omega^2)} * j \quad (5.23)$$

Presjek sa realnom osom:

$$\Im G(j\omega) = 0 \quad (5.24)$$

$$\Im G(j\omega) = \frac{-(6-\omega^2)}{\omega((6-\omega^2)^2 + 25\omega^2)} = 0 \quad (5.25)$$

$$(6-\omega^2) = 0 \quad (5.27)$$

$$\omega^2 = 6$$

$$\omega = \pm \sqrt{6} \quad (5.28)$$

$$\Re G(j\omega) = \frac{-5}{(6-\omega^2)^2 + 25\omega^2} = \frac{-5}{(6-\sqrt{6}^2) + 25 * \sqrt{6}^2} = \frac{-5}{0 + 150} = -0.033 \quad (5.29)$$

Presjek sa imaginarnom osom:

$$\Re G(j\omega) = 0 \quad (5.30)$$

$$\frac{-5}{(6-\omega^2)^2 + 25\omega^2} = 0 \quad (5.31)$$

Presjek sa imaginarnom osom ne postoji, zato što je  $\Re G(j\omega) \neq 0$  za svako  $\omega$  .  
Fazni stav prenosne funkcije (faza sistema):

$$\varphi(\omega) = \arctg\left(\frac{\Im G(j\omega)}{\Re G(j\omega)}\right) \quad (5.32)$$

$$\varphi(\omega) = \arctg\left(\frac{\frac{-(6-\omega^2)}{\omega((6-\omega^2)^2+25\omega^2)}}{\frac{-5}{(6-\omega^2)^2+25\omega^2}}\right) \quad (5.33)$$

$$\varphi(\omega) = \arctg\left(\frac{(6-\omega^2)}{5\omega}\right) \quad (5.34)$$

Frekventna karakteristika u graničnim vrijednostima:

$$\lim_{\omega \rightarrow 0} G(j\omega) = \lim_{\omega \rightarrow 0} \frac{-5}{(6-\omega^2)^2+25\omega^2} - \frac{-(6-\omega^2)}{\omega((6-\omega^2)^2+25\omega^2)} * j \quad (5.35)$$

$$\lim_{\omega \rightarrow 0} G(j\omega) = \frac{-5}{(6-0)^2+25*0} - \frac{-(6-0)}{0((6-0)^2+25*0)} * j \quad (5.36)$$

$$\lim_{\omega \rightarrow 0} G(j\omega) = \frac{-5}{36} - \frac{6}{0} * j \quad (5.37)$$

$$\lim_{\omega \rightarrow 0} G(j\omega) = -0.138 - j * \infty \quad (5.38)$$

$$\lim_{\omega \rightarrow \infty} G(j\omega) = \lim_{\omega \rightarrow \infty} \frac{-5}{(6-\omega^2)^2+25\omega^2} - \frac{-(6-\omega^2)}{\omega((6-\omega^2)^2+25\omega^2)} * j \quad (5.39)$$

$$\lim_{\omega \rightarrow \infty} G(j\omega) = 0 - j * 0 \quad (5.40)$$

Fazni stav u graničnim vrijednostima:

$$\lim_{\omega \rightarrow 0} \varphi(\omega) = \lim_{\omega \rightarrow 0} \arctg\left(\frac{(6-\omega^2)}{5\omega}\right) = \lim_{\omega \rightarrow 0} \arctg(\infty) = \pi/2 \quad (5.41)$$

$$\lim_{\omega \rightarrow 0} \varphi(\omega) = \lim_{\omega \rightarrow 0} \arctg\left(\frac{(6-\omega^2)}{5\omega}\right) = \lim_{\omega \rightarrow 0} \arctg(-\infty) = -\pi/2 \quad (5.42)$$

Preslikavanje za  $r \rightarrow 0$  ( $s = r * e^{j\varphi}$ ) :

$$\lim_{r \rightarrow 0} G(s) = \lim_{r \rightarrow 0} \frac{1}{r * e^{j\varphi} (r * e^{j\varphi} + 2)(r * e^{j\varphi} + 3)} = \frac{1}{0} = \infty \quad (5.43)$$

Preslikavanje za  $R \rightarrow \infty$  ( $s = R * e^{j\varphi}$ ) :

$$\lim_{R \rightarrow \infty} G(s) = \lim_{R \rightarrow \infty} \frac{1}{R * e^{j\varphi} (R * e^{j\varphi} + 2)(R * e^{j\varphi} + 3)} = \frac{1}{\infty} = 0 \quad (5.44)$$

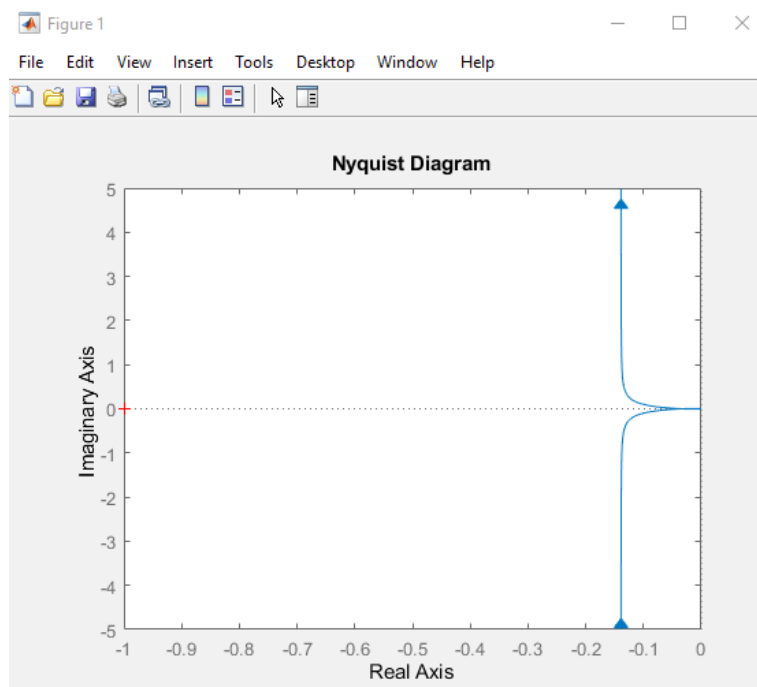
c) Matlab kod za crtanje Nyquistovog i Bodeovog dijagrama za našu prenosnu funkciju za koju smo izvršili proračun u dijelu istog zadatka pod b).

```

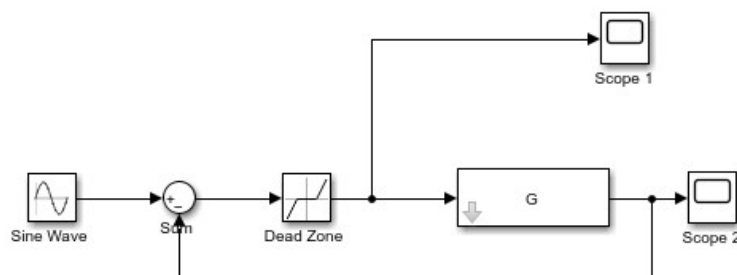
1 - s = tf('s')
2 - G = 1/(s*(s+2)*(s+3))
3 - delta = 1
4 - [Gm, Pm, Wcg, Wcp] = margin(G)
5 - ReG = real(evalfr(G,Wcg*j))
6 - kkr = -1/ReG;
7 - k = kkr + 5;
8 - K = 1;
9 - figure(1)
10 - nyquist(G)
11 - figure(2)
12 - bode(G)

```

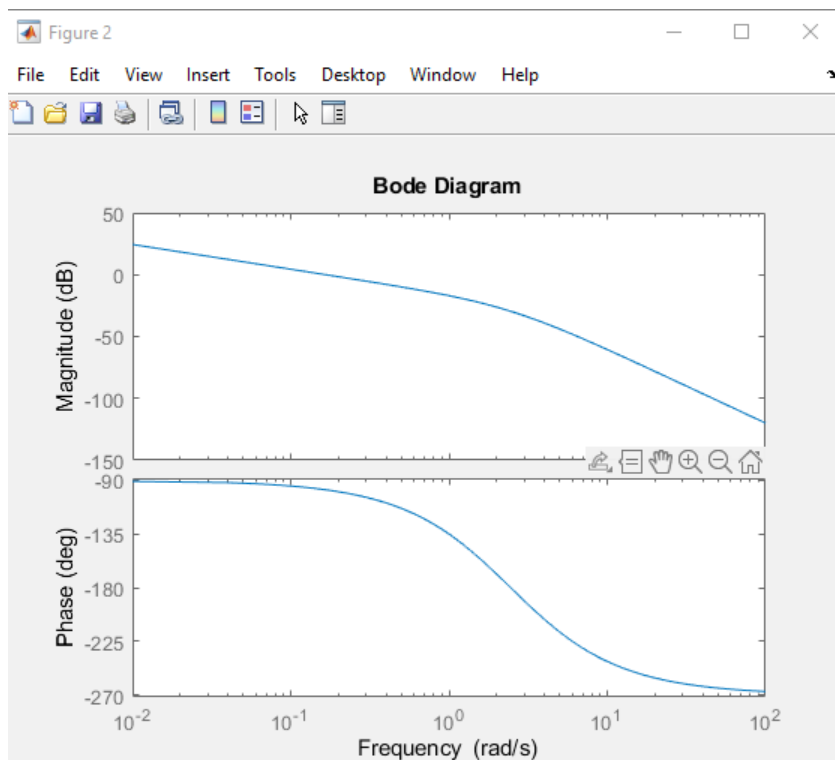
Slika 5.3: Kod za nyquistov i bodeov dijagram



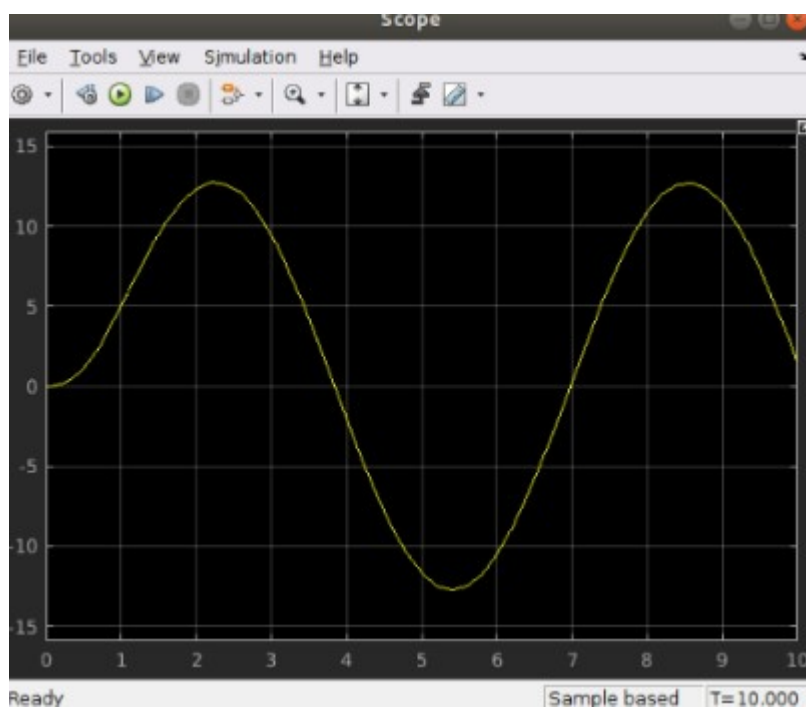
Slika 5.4: Nyquistov dijagram za  $G(s)$



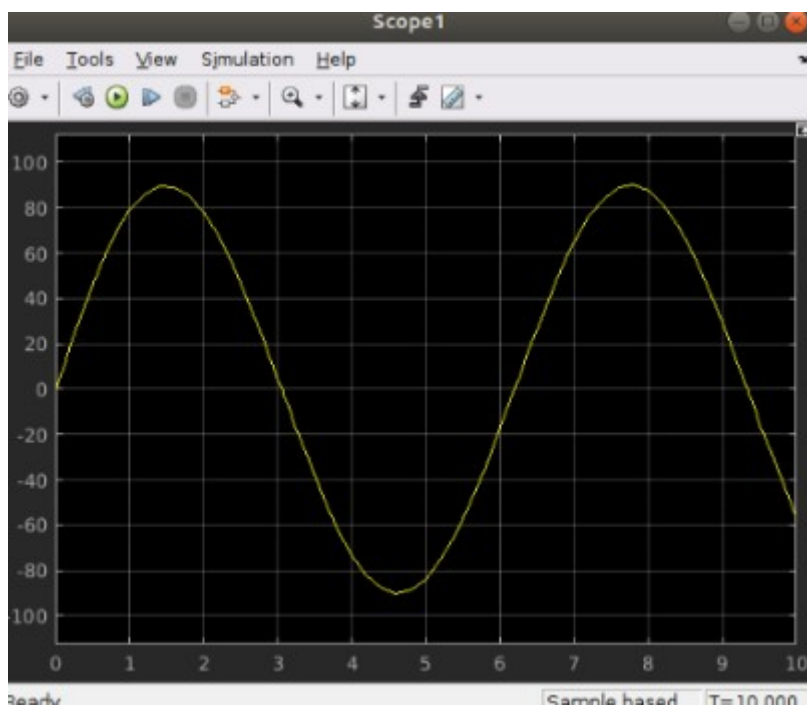
Slika 5.5: Šema u simulinku za dati sistem



Slika 5.6: Bodeov dijagram za  $G(s)$



Slika 5.7: Rezultat simulacije za drugi scope



Slika 5.8: Rezultat simulacije za prvi scope

Zaključujemo da postoje oscilacije prije i poslije  $G(s)$ .

## Literatura

- 1) *NONLINEAR SYSTEMS, Second Edition* - Hassan K. Khalil, Michigan State University
- 2) *Prezentacije i ostali materijal sa predmeta "Nelinearni sistemi upravljanja"* – dr.sci. Jakub Osmić, red. prof., Fakultet elektrotehnike, Univerzitet u Tuzli
- 3) Materijali sa auditornih vježbi, asistent Anel Hasić
- 4) <https://www.mathworks.com/products/simulink.html>
- 5) <https://www.youtube.com/@MAFarooqi>