**I . PENGERTIAN DAN TUJUAN INTERPOLASI**

**A. Pengertian**

Interpolasi adalah proses pencarian dan penghitungan nilai suatu fungsi yang grafiknya melewati sekumpulan titk yang diberikan. Titik-titik tersebut mungkin merupakan hasil eksperimen dalam sebuah percobaan, atau diperoleh dari suatu fungsi yang diketahui.

**B. Tujuan**

adapun kegunaan lain dari interpolasi adalah untuk menaksir harga-harga tengah antara titik data yang sudah tepat. Interpolasi mempunyai orde atau derajat.

**II. MACAM-MACAM INTERPOLASI**

**PEMBAHASAN**

**A. Interpolasi Linier**

Interpolasi linear atau interpolasi lanjar adalah interpolasi dua buah titik dengan sebuah garis lurus. Misal diberikan dua buah titik, (*x0,y0*) dan (*x1,y1*). Polinom yang menginterpolasi kedua titik itu adalah persamaan garis lurus yang berbentuk:

Gambar dibawah ini memperlihatkan garis lurus yang menginterpolasi titik-titik (*x0,y0*) dan (*x1,y1*).

*Y*

*X*

(*x0,y0*)

(*x1,y1*)

*Gambar 1.1 Interpolasi Linier*

*Y*

*X*

(*x0,y0*)

(*x1,y1*)

*Gambar 1.2 Interpolasi Linier*

Koefisien dan dicari dengan proses substitusi dan eliminasi. Dengan mensubstitusikan dan ke dalam persamaan diperoleh dua persamaan linear:

. . . . . . . (1)

. . . . . . . (2)

Dari dua persamaan diatas, dengan eliminasi diperoleh:

Substitusikan nilai ke dalam persamaan (1), diperoleh:

Dengan melakukan manipulasi aljabar untuk menentukan nilai dapat dilakukan sebagai berikut:

Dalam menentukan persamaan dari interpolasi linear juga dapat dilakukan melalui cara berikut:

Menentukan titik-titik antara dari 2 buah titik dengan menggunakan garis lurus.

*Y*

*X*

P1(*x0,y0*)

P2 (*x1,y1*)

(*x,y*)

*Gambar 1.3 Interpolasi Linier*

Persamaan garis lurus yang melalui 2 titik P1 (*x*0,*y*0) dan P2 (*x*1,*y*1) dapat dituliskan dengan:

Sehingga diperoleh persamaan dari interpolasi linear sebagai berikut:

**Algoritma Interpolasi Linear**

* 1. Tentukan nilai
  2. Periksa apakah . Jika ya, maka kembali ke langkah 1 sebab nilai fungsinya tidak terdefinisi dalam kondisi ini. Jika tidak, maka dilanjutkan ke langkah 3.
  3. Masukkan nilai .
  4. Periksa apakah . Jika tidak, maka masukkan nilai yang lain. Jika ya, maka dilanjutkan langkah 5.
  5. Hitung .
  6. Periksa apakah . Karena jika sama, maka akan diperoleh .
  7. Tulis hasil .

**Contoh**

1. Perkirakan atau prediksi jumlah penduduk Purworejo pada tahun 2005 berdasarkan data tabulasi berikut:

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| Tahun | 1990 | 2000 |
| Jumlah Penduduk | 187.900 | 205.700 |

Penyelesaian:

Dipunyai: *x0* = 1990, *x1* = 2000, *y0* = 187.900, *y1* = 205.700.

Ditanya: Prediksi jumlah penduduk Gunungpati pada tahun 1995.

Ingat :

Misalkan

Jadi, diperkirakan jumlah penduduk Purworejo pada tahun 1995 adalah 196.800 orang.

1. Dari data ln(9.0) = 2.1972, ln(9.5) = 2.2513, tentukan ln(9.2) dengan interpolasi linier sampai 4 desimal. Bandingkan hasil yang diperoleh dengan nilai sejati ln(9.2)=2.2192.

Penyelesaian:

Dipunyai:

.

Ditanya : tentukan nilai ln(9.2) sampai 5 angka bena kemudian dibandingkan dengan nilai sejati ln(9.2) = 2.2192.

Ingat:

Galat = nilai sejati ln(9.2) – nilai ln(9.2) hasil perhitungan dengan metode interpolasi linear

Galat = 2.2192 – 2.21884 = 3,6 x 10-4 .

**B. Interpolasi Kuadratik**

Misal diberi tiga buah titik data, . Polinom yang menginterpolasi ketiga buah titik itu adalah polinom kuadrat yang berbentuk:

Bila digambar, kurva polinom kuadrat berbentu parabola, seperti ditunjukkan dalam Gambar 2.4 dan Gambar 2.5

*Y*

*X*

*x0,y0*

*x1,y1*

*x2,y2*

*x2*

*x1*

*x0*

*y0*

*y1*

*y2*

*Gambar 2.1 Interpolasi Kuadratik*

Masih terdapat grafik berbentuk parabola yang lain, selain yang ditunjukkan pada Gambar 2.1 diatas, namun harus diperhatikan bahwa untuk setiap nilai akan diperoleh hanya sebuah nilai . Sehingga tidak mungkin kondisi grafiknya seperti Gambar 2.2 di bawah ini atau semacamnya.

*Y*

*X*

*x0,y0*

*x1,y1*

*x2,y2*

*x2*

*x1*

*x0*

*y0*

*y1*

*y2*

*Gambar 2.1 Bukan Interpolasai Kuadratik*

Menyelesaikan Polinom ditentukan dengan cara berikut:

1. Substitusikan ke dalam persamaan dengan *i* = 0, 1, 2. Diperoleh tiga persamaan dengan tiga buah parameter yang tidak diketahui yaitu: dan
2. Hitung dan dari sistem persamaan tersebut dengan metode eliminasi Gauss.

Selain menggunakan metode eliminasi Gauss, menentukan dan dapat ditentukan dengan cara sebagai berikut:

1. Hitung dan
2. Hitung

**Algoritma Interpolasi Kuadratik**

Untuk interpolasi kuadratik digunakan algoritma sebagai berikut :

1. Tentukan nilai
2. Periksa apakah . Jika tidak, maka kembali ke langkah 1 sebab nilai fungsinya tidak terdefinisi dalam kondisi ini. Jika tidak, maka dilanjutkan ke langkah 3.
3. Masukkan nilai .
4. Periksa apakah . Jika tidak, maka masukkan nilai yang lain. Jika ya, maka dilanjutkan langkah 5.
5. Hitung
6. Hitung
7. Periksa apakah Jika ya, maka persamaan yang dihasilkan linear. Jika tidak maka persamaan yang dihasilkan merupakan persamaan kuadrat.
8. Tulis hasil .

**Contoh :**

1. Diberikan titik ln(8.0) = 2.0794, ln(9.0) = 2.1972, dan ln(9.5) = 2.2513. Tentukan nilai ln(9.2) dengan interpolasi kuadratik.

Penyelesaian:

Diketahui:

Ditanya : Tentukan nilai ln (9.2).

Sistem persamaan yang terbentuk adalah:

Untuk perhitungan secara manual, sistem persamaan diselesaikan dengan metode eliminasi Gauss dengan langkah sebagai berikut:

Matriks yang terbentuk dari persamaan

adalah:

Menggunakan metode Eliminasi gauss menghasilkan

.

Polinom kuadratnya adalah:

1. Dalam suatu eksperimen fisika pergerakan sebuah benda pedat berbentuk parabola. Dengan data sebagai berikut :

|  |  |
| --- | --- |
| t (detik) | Y (m) |
| 5 | 2,01 |
| 6,5 | 2,443 |
| 8 | 2,897 |

Dengan menggunakan interpolasi kuadratik perkirakan ketinggian bola pada saat detik.

Penyelesaian:

Dipunyai data pergerakan suatu benda padat:

|  |  |
| --- | --- |
| t (detik) | Y (m) |
| 5 | 2,01 |
| 6,5 | 2,443 |
| 8 | 2,897 |

Dengan menggunakan interpolasi kuadratik akan diprediksi ketinggian bola saat detik.

Sistem persamaan lanjar yang terbentuk adalah:

Penyelesaian sistem persamaan dengan menggunakan metode eliminasi Gauss

Diperoleh :

Sehingga Polinom Kuadratnya adalah:

Sehingga = 2,588

Jadi,diprediksi, pada t = 7 detik tinggi bola 2,588 m.

**C. Interpolasi Spline**

***Definisi :*** *Suatu fungsi f (x) dinamakan suatu spline berderajat k jika*

1. *Domain dari S adalah suatu interval [a; b].*
2. *S; S0; :::; S(k􀀀1) kontinu pada [a; b].*
3. *Terdapat titik-titik xi sedemikian sehingga a = x0 < x1 < ::: < xn = b dan juga S adalah suatu polinomial berderajat k pada setiap [xi; xi+1].*

Dengan kata lain, spline adalah potongan-potongan fungsi polinomial dengan turunan-turunan memenuhi kendala-kendala kekontinuan tertentu. Ketika spline dina-

makan spline linear. Ketika , spline dinamakan spline kuadratik. Ketika

spline dinamakan spline kubik.

**C.1 Spline Linear**

akan dicari suatu fungsi spline linear sedemikian sehingga

untuk . Diambil

Dengan setiap adalah linier

Diperhatikan fungsi linear . Garis ini melalui titik dan , se-

hingga kemiringan dari yaitu

Kita dapat juga mengatakan bahwa garis tersebut melalui titik dan

untuk sembarang , sehingga

yang memberikan

**Contoh C.2**

Buatlah interpolasi spline linier untuk data berikut:

|  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| x | 0,0 | 0,1 | 0,4 | 0,5 | 0,75 | 1,0 |
| y | 1,3 | 4,5 | 2,0 | 2,1 | 5,0 | 3,0 |

Penyelesaian :

Jadi spline adalah potongan linear, yaitu linear di antara setiap titik data.

Persamaan (C.1.1) dapat dituliskan kembali sebagai

dengan

kekurangan utama spline linear adalah pada titik-titik data di mana dua spline bertemu,

kemiringannya berubah secara mendadak. Secara formal ini berarti bahwa turunan

pertama dari fungsi tidak kontinyu pada titik-titik tersebut. Kelemahan ini diatasi oleh

penggunaan polinomial spline orde yang lebih tinggi.

**C.2 Spline Kuadratik**

Tidak seperti spline linear, spline kuadratik tidak dide.nisikan sepenuhnya oleh nilai-

nilai di . Berikut ini kita perhatikan alasannya. Spline kuadratik didefnisikan oleh

Jadi terdapat parameter untuk mende.nisikan .

Diperhatikan titik-titik data:

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
|  |  |  |  |  |
|  |  |  |  |  |

Syarat-syarat untuk menentukan parameter dijelaskan seperti berikut ini.

1. Setiap subinterval memberikan dua persmaan berkaitan dengan , yaitu :

jadi, disini didapatkan persamaan

1. Syarat pada kontinuitas dari memberikan suatu persamaan tunggal untuk setiap titik dalam yaitu:

Jadi dari sini dipunyai persamaan. Sekarang totalnya terdapat persamaan, tetapi karena terdapat parameter yang tidak diketahui maka sistem

mempunyai kekurangan ketentuan.

1. Pilihan-pilihan yang mungkin untuk melengkapi kekurangan ketentuan yaitu

Sekarang dimisalkan karena , , dan

, maka kita dapat mendefinisikan :

Selanjutnya, dengan pengambilan diperoleh

Jadi, kita dapat menentukan :

**Contoh C.2**

Buatlah interpolasi spline kuadratik untuk data berikut ini

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
| x | 0,0 | 0,1 | 0,4 | 0,5 |
| y | 1,3 | 4,5 | 2,0 | 2,1 |

dengan ketetapan

Penyelesaian :

pertama-tama hitung nilai

jadi, fungsi spline kuadratik :

persamaan C.2.1 dapat ditulis kembali sebagai

dengan

**C.3 Spline Kubik**

Diketahui suatu fungsi yang dibatasi oleh interval a dan b, dan memiliki sejumlah titik data . Interpolasi spline kubik adalah

suatu potongan fungsi polinomial berderajat tiga (kubik) yang menghubungkan dua titik yang bersebelahan, dengan ketentuan, untuk

(S0) Potongan fungsi pada subinterval

(S1) Pada setiap titik data

(S2) Nilai-nilai fungsi harus sama pada titik-titik dalam:

(S3) Turunan-turunan pertama pada titik dalam harus sama:

(S4) Turunan-turunan kedua pada titik dalam harus sama:

(S5) Salah satu syarat batas di antara dua syarat batas dan berikut ini harus

dipenuhi:

* (disebut batas alamiah/ *natural boundary*)
* dan (disebut batas apitan/ *clamped boundary*)

**Contoh C.3**

Buatlah interpolasi spline kubik untuk data berikut ini

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
| x | 0 | 1 | 2 | 3 |
| y | 0 | 1 | 4 | 5 |

terhadap syarat batas :

Penyelesaian:

Lebar subinterval pada sumbu x:

dan beda terbagi pertama, dengan mengingat bahwa , yaitu :

Persamaan matriks dapat dituliskan sebagai

yang mempunyai penyelesaian

Disubstitusikan penyelesaian tersebut ke persamaan C.3.1 untuk memperoleh koefisien-koefisien lain dari spline kubik:

Terakhir, kita dapat menuliskan persamaan spline kubik seperti:

**D. Interpolasi Newton**

* Persamaan Polinom Linier
* Bentuk pers ini dapat ditulis :
* Yang dalam hal ini
* Persamaan ini merupakan bentuk selish terbagi (divided-difference)
* Polinom kuadratik

atau

Dari persamaan ini menunjukkan bahwa dapat dibentuk dari persamaan sebelumnya . Nilai dapat ditemukan dengan mengganti untuk mendapatkan

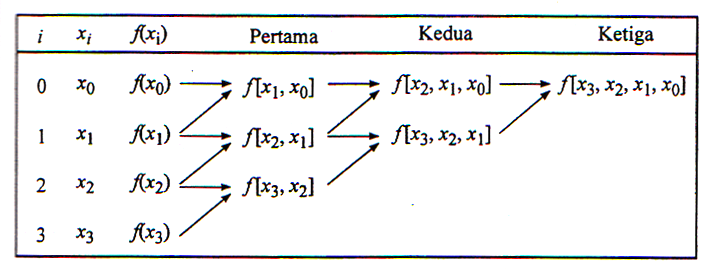
jika nilai dan pada persamaan D.1.1 dan D.1.2 dimasukkan ke persamaan D.1.3 maka akan didapatkan:

jadi, tahapan pembentukan polinom newton:

* Nilai konstanta, merupakan nilai selisih terbagi , dengan nilai

yang dalam hal ini

Karena , merupakan nilai selisih terbagi, maka polinom Newton dinamakan polinom interpolasi selisih terbagi Newton. Nilai selisih terbagi dapat dihitung dengan menggunakan tabel yng disebut tabel selisih terbagi.



Dengan demikian polinom Newton dapat ditulis dalam hub rekursif sebagai :

* Rekurens
* Basis

**Contoh :**

Bentuklah polinom Newton derajat satu, dua, tiga dan empat yang menghampiri dalam range [0.0, 4] dan jarak antar titik adalah 1.0. Lalu taksirlah dengan dengan Polinom Newton derajat 3

|  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- |
|  |  | ST-1 | ST-2 | ST-3 | ST-4 |
| 0 | 1 | -0.4597 | -0.2484 | 0.1466 | -0.147 |
| 1 | 0.5403 | -0.9654 | 0.1913 | 0.088 |  |
| 2 | -0.4161 | -0.5739 | 0.4551 |  |  |
| 3 | -0.99 | 0.3363 |  |  |  |
| 4 | -0.6536 |  |  |  |  |

Penyelesaian

**E. Interpolasi Kubik**

Misal diberikan empat buah titik data ,)(,,),,), dan (,).Polinom yang mengiterpolasi keempat buah titik itu ialah polinom kubik yang berbentuk :

=+x++

Polinom ditentukan dengan cara berikut:

1.Sulihkan ( ,) kedalam persamaan (p.5.9), i=0,1,2,3. Sehingga diperoleh empat buah persamaan dengan empat buah parameter yang tidak diketahui yaitu

* Jarak yang dibutuhkan sebuah kendaraan untuk berhenti adalah fungsi kecepatan. data percobaan berikut ini menunjukkan hubungan antara kecepatan dan jarak yang dibutuhkan untuk menghentikan kecepatan.
* Perkiraan jarak henti yang dibutuhkan bagi sebuah kendaraan yang melaju dengan kecepatan 45 mil/jam