Модель гармонических колебаний

Постановка задачи

Построить фазовый портрет гармонического осциллятора и решение уравнения гармонического осциллятора для следующих случаев.

Цель

Цель - Проверить, как работает модель в различных ситуациях.

Теоретическая часть:

1. Теоретическая часть.

Уравнение свободных колебаний гармонического осциллятора имеет следующий вид:

$\ddot{x} + 2\gamma\dot{x} + \omega_0^2 x = 0$ { #fig:001 width=70% }

Уравнение второго порядка можно представить в виде системы двух уравнений первого порядка:

$$\begin{cases} \dot{x} = y \\ \dot{y} = -\omega_0^2 x \end{cases}$$ { #fig:001 width=70% }

Независимые переменные x, y определяют пространство, в котором «движется» решение. Это фазовое пространство системы, поскольку оно двумерно будем называть его фазовой плоскостью. Значение фазовых координат x, y в любой момент времени полностью определяет состояние системы. Решению уравнения движения как функции времени отвечает гладкая кривая в фазовой плоскости. Она называется фазовой траекторией. Если множество различных решений (соответствующих различным начальным условиям) изобразить на одной фазовой плоскости, возникает общая картина поведения системы. Такую картину, образованную набором фазовых траекторий, называют фазовым портретом.

Ход решения

Вариант № 11

Постройте фазовый портрет гармонического осциллятора и решение уравнения гармонического осциллятора для следующих случаев

1. **Колебания гармонического осциллятора без затуханий и без действий внешней силы** $\ddot{x} + 12x = 0$
2. **Колебания гармонического осциллятора с затуханием и без действий внешней силы** $\ddot{x} + 10\dot{x} + 5x = 0$
3. **Колебания гармонического осциллятора с затуханием и под действием внешней силы** $\ddot{x} + 7\dot{x} + 7x = 7\sin(3t)$

На интервале $t \in [0;\ 60]$ **(шаг 0.05) с начальными условиями** $x_0 = 1, y_0 = 2$

Мои значения: { #fig:001

В [52]:
```python
import numpy as np
from scipy.integrate import odeint
import matplotlib.pyplot as plt
```

В [53]:
```python
g = 12
w = 1 # w^2
```

В [54]:
```python
def f(t):
    return 0
```

В [55]:
```python
def dx(x, t):
    return np.array([x[1], -w*x[0]-g*x[1]-f(t)])
```

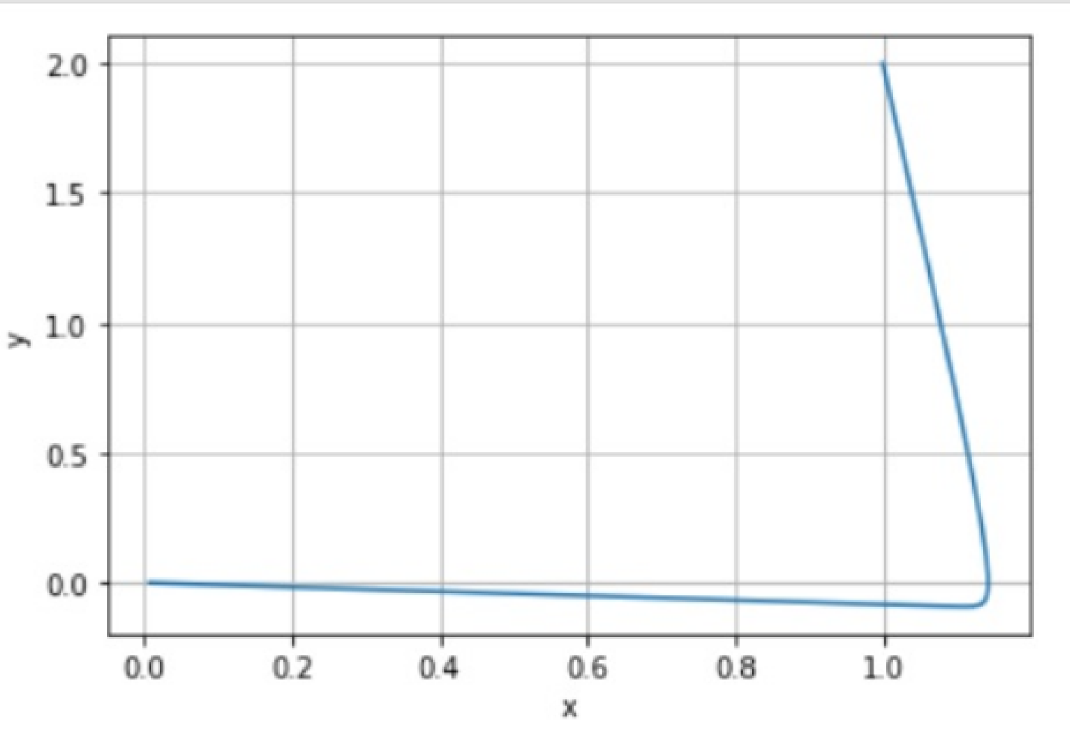
В [58]:
```python
t = np.linspace(0, 60, 600)
x0 = np.array([1, 2])

x = odeint(dx, x0, t)
```

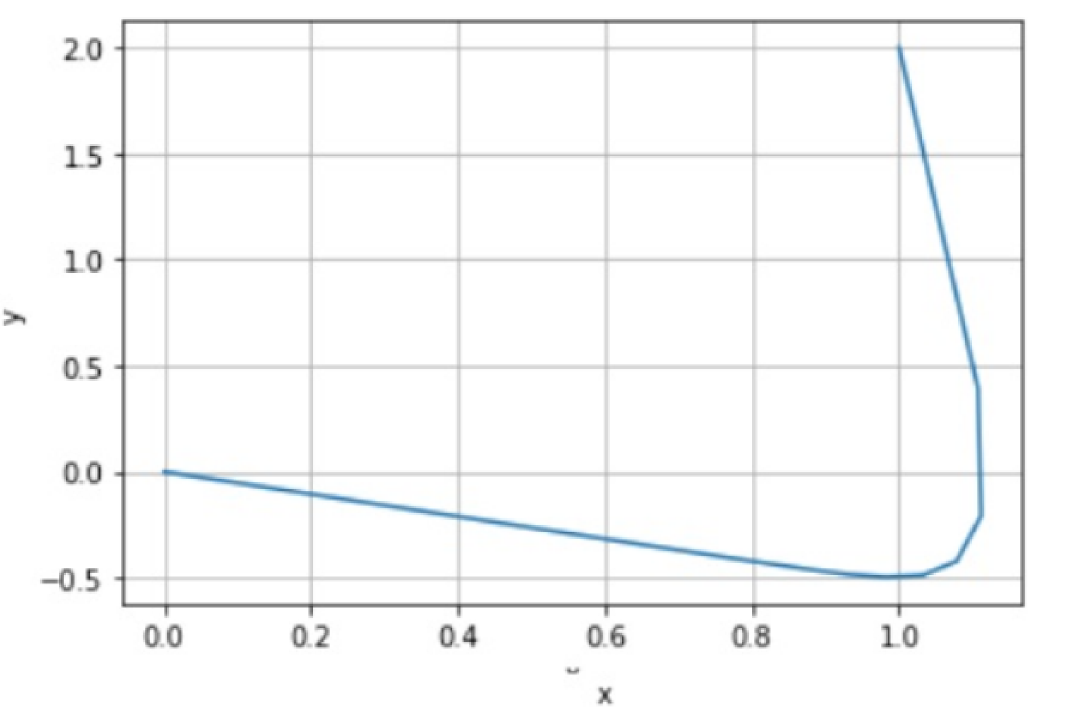
В [59]:
```python
plt.plot(x[:, 0], x[:, 1])
plt.xlabel("x")
plt.ylabel("y")
plt.grid()
plt.show()
```

Код: { #fig:001 width=70% }

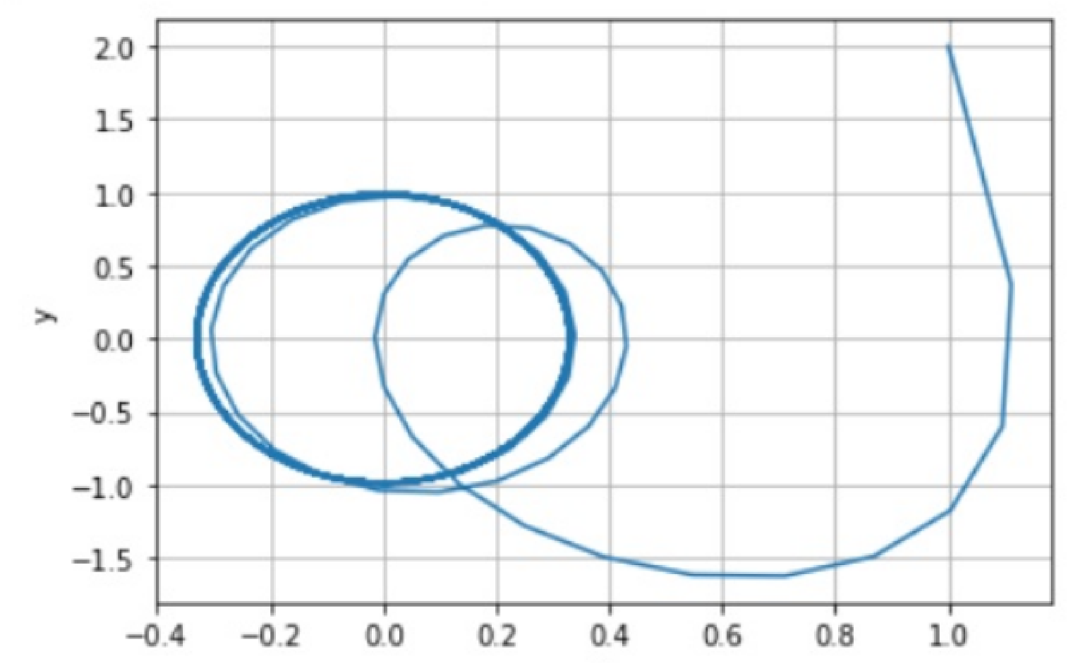
Построение графиков: Графики:



Первый случай: { #fig:001 width=70% }



Второй случай: { #fig:001 width=70% }



nage/2nd_graph.jpg

Ответы на вопросы

1. Запишите простейшую модель гармонических колебаний

Уравнение свободных колебаний гармонического осциллятора имеет следующий вид:

$\ddot{x} + 2\gamma\dot{x} + \omega_0^2 x = 0$ { #fig:001 width=70% }

2. Дайте определение осциллятора

Движение грузика на пружинке, маятника, заряда в электрическом контуре, а также эволюция во времени многих систем в физике, химии, биологии и других науках при определенных предположениях можно описать одним и тем же дифференциальным уравнением, которое в теории колебаний выступает в качестве основной модели. Эта модель называется линейным гармоническим осциллятором.

3. Запишите модель математического маятника

$\ddot{x} + \omega_0^2 x = 0$ { #fig:001 width=70% }

4. Запишите алгоритм перехода от дифференциального уравнения второго порядка к двум дифференциальным уравнениям первого порядка

Уравнение (1) есть линейное однородное дифференциальное уравнение второго порядка и оно является примером линейной динамической системы.

При отсутствии потерь в системе ($\gamma = 0$) вместо уравнения (1.1) получаем уравнение консервативного осциллятора энергия колебания которого сохраняется во времени.

$$\ddot{x} + \omega_0^2 x = 0 \tag{2}$$

Для однозначной разрешимости уравнения второго порядка (2) необходимо задать два начальных условия вида

$$\begin{cases} x(t_0) = x_0 \\ \dot{x}(t_0) = y_0 \end{cases} \tag{3}$$

Уравнение второго порядка (2) можно представить в виде системы двух уравнений первого порядка:

$$\begin{cases} \dot{x} = y \\ \dot{y} = -\omega_0^2 x \end{cases} \tag{4}$$

Начальные условия (3) для системы (4) примут вид:

$$\begin{cases} x(t_0) = x_0 \\ y(t_0) = y_0 \end{cases} \tag{5}$$

{ #fig:001 width=70% }

5. Что такое фазовый портрет и фазовая траектория?

Значение фазовых координат x, y в любой момент времени полностью определяет состояние системы. Решению уравнения движения как функции времени отвечает гладкая кривая в фазовой плоскости. Она называется фазовой траекторией. Если множество различных решений (соответствующих различным начальным условиям) изобразить на одной фазовой плоскости, возникает общая картина поведения системы. Такую картину, образованную набором фазовых траекторий, называют фазовым портретом.

Выводы

Результат: Построили графики и увидели различия при разных коэфицентах.

Вывод: Построили математическую модель, использовали python, выявили результаты для трех случаев, научились строить математическую модель для нахождения исхода и результатов.