线性代数复习大纲

1. 矩阵及应用

1.1 矩阵种类

行矩阵、零矩阵、n阶方阵、三角矩阵、对角矩阵、单位矩阵、分块矩阵

伴随矩阵:

$$A_n = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}, A^* = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{21} & \cdots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \cdots & A_{n2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{1n} & A_{2n} & \cdots & A_{nn} \end{bmatrix}$$

1.2 矩阵运算

矩阵的加法和数乘统称线性运算

运算规律

1. 空间位置不变，时间顺序可变
2. 上标运算（转置，伴随，求逆，幂）：脱括号换位置；任意上标可交换
3. 若$AB = BA$,则$(A+B)^k = C_k^0 A^k + C_k^1 A^{k-1} B^+ \cdots + C_k^k B^k$.
4. 伴随运算

   $AA^* = A^*A = |A|E$

   $|A^*| = |A|^{n-1}$

   $(A^*)^* = |A|^{n-2} A$

   $A^* = |A| A^{-1}$
5. 转置运算

   $(A+B)^T = A^T + B^T$

相关公式

1. 对角矩阵
   - 两对角矩阵乘法满足交换律
   - 幂运算 为主对角线上元素n次幂
   - 求逆运算 为主对角线上元素求倒数
2. 副对角矩阵

- 求逆运算：副对角线上元素求倒数后转置

3. 分块对角矩阵$C=\begin{pmatrix}A & O\\ O & B\end{pmatrix}$
    - 幂运算：$C^n=\begin{pmatrix}A^n & O\\ O & B^n\end{pmatrix}$
    - 求逆运算：$C^{-1}=\begin{pmatrix}A^{-1} & O\\ O & B^{-1}\end{pmatrix}$
4. 分块副对角矩阵$C=\begin{pmatrix}O & A\\ B & O\end{pmatrix}$
    - 求逆运算：$C^{-1}=\begin{pmatrix}O & B^{-1}\\ A^{-1} & O\end{pmatrix}$（换位）
    - 行列式：$\begin{vmatrix}O & A_m\\ B_n & O\end{vmatrix}=(-1)^{mn}|A||B|$

初等变换与初等矩阵

初等变换

1. 初等行、列变换
2. 矩阵的**等价**（反身性，对称性，传递性）
3. 行阶梯形，行最简形，规范形

初等矩阵

由单位阵经过有限次初等变换所得的矩阵。初等变换方式：

1. 交换E的i,j两行：$E(i,j)$
2. 用一个非零数k乘E的第i行（第j列）：$E(i(k))$
3. 将E的第j行的k倍加到第i行上（或将E的第i列的k倍加到第j列上）：$E(i,j(k))$

定理　　对A初等行（列）变换相当于在其左（右）边乘以相应的初等矩阵

A为n阶方阵时的 **等价命题** （下列命题两两等价）

1. A是可逆矩阵$(|A|\neq 0)$
2. 线性方程组$Ax=0$只有零解$(|A|\neq 0)$
3. A可以经过有限次初等行变换化为单位矩阵（即A与E等价）
    - 即同阶可逆矩阵相互等价
4. A可以表示为有限个初等矩阵的乘积

2. 行列式与线性方程组

2.1 逆序数与行列式

在一个排列的一对数中前面的数大于后面的数则称其为一个逆序。一个排列中逆序的总数称为该排列的逆序数。

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{vmatrix} = \sum_{(p_1 p_2 \cdots p_n)} (-1)^{\tau(p_1 p_2 \cdots p_n)} a_{1p_1} a_{2p_2} \cdots a_{np_n}$$

2.2 余子式M_{ij}、代数余子式A_{ij}

$A_{ij} = (-1)^{i+j} M_{ij}$

引理

一个n阶行列式，若第i行（或第j列）除a_{ij}外所有元素为0，则该行列式值等于a_{ij}与其代数余子式乘积，即$D = a_{ij} A_{ij}$

推论

行列式任一行（列）的元与另一行（列）对应元的代数余子式乘积之和为0，即

$$\sum_{m=1}^{n} a_{im} A_{jm} = 0$$

n阶行列式按第m行展开：

$$|A| = \sum_{j=1}^{n} a_{mj} A_{mj}$$

2.3 行列式的性质

计算性质

1. 行列式与其转置行列式相等
2. 行列式某行或某列因子可以提到行列式之外
3. 交换行列式两行或两列，行列式变号；若行列式两行（列）相等或成比例，该行列式为0
4. 行列式可以按行或列分解为两行列式之和
5. 将某一行（列）的任意k倍加到另一行（列）上，行列式值不变（倍加变换）
6. $|AB| = |A||B|$

   $|kA_n| = k^n |A|$

   $|A| = |A^T|$

应用性质

若行列式**不等于0**，则：

- **矩阵可逆**
- 矩阵各列**线性无关**
- 矩阵的秩等于矩阵行数（行满秩）
- 矩阵特征值**全不为0**
- $Ax=0$只有零解，$Ax=b$只有唯一解（都是只有唯一解）

2.4 行列式的计算

1. 上下三角矩阵等于其主对角线元素乘积

   (如果是副对角线乘积前面需要乘上$(-1)^{n(n-1)/2}$)
2. “一杠一星”“两杠一星”
3. 箭头形，弓形
4. 同行（列）同数行列式$\begin{vmatrix} a_1+1 & a_2 & \dots & a_n \\ a_1 & a_2+1 & \dots & a_n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_1 & a_2 & \dots & a_n+1 \end{vmatrix}$
5. “X”形行列式
6. “ab矩阵”行列式$\begin{vmatrix} a & b & \dots & b \\ b & a & \dots & b \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b & b & \dots & a \end{vmatrix}$
7. 范德蒙行列式
8. 爪形行列式
9. 两种特殊拉普拉斯展开式：设A为m阶矩阵，B为n阶矩阵，则（X为任一矩阵）

$$\begin{vmatrix} A & O \\ X & B \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} A & X \\ O & B \end{vmatrix} = |A||B|$$

$$\begin{vmatrix} O & A \\ B & X \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} X & A \\ B & O \end{vmatrix} = (-1)^{mn}|A||B|$$

2.5 行列式的应用

1. 逆矩阵的计算

$$A^{-1} = \frac{A^*}{|A|}$$

2. 克莱默法则
    - 线性方程组解的性质（可参阅行列式的性质->应用性质）

3. n维向量与向量空间

> 要尝试用矩阵等式描述向量等式。

3.1 n维向量与其相关运算律

线性运算：加法$(\alpha+\beta)$与数乘$(\lambda\alpha)$

运算律（教材P81）

3.2 向量组的线性相关性

向量组线性表示

向量组的维数等于其中的向量的维数

设n维向量组$\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_s$，

- 称$k_1\alpha_1+k_2\alpha_2+\cdots+k_s\alpha_s$为该向量组的一个**线性组合**
- 若存在一组 不全为0 的数$\lambda_i(i=1,2,\ldots,s)$使$b=\sum_{i=1}^{s}\lambda_i\alpha_i$，则称向量$b$可由该向量组**线性表示**

    （$Ax=b$有解的充要条件：b可以由向量组$\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_s$线性表示）

向量组线性相关性定义与性质

定义　设n维向量组$\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_s$，**存在**一组 不全为0 的数$k_i(i=1,2,\ldots,s)$，使得$\sum_{i=1}^{s}k_i\alpha_i=\vec{0}$，则称该向量组线性相关，否则线性无关

一些结论

1. 包含零向量的向量组必定线性相关
2. 向量组只含一个向量α时，$\alpha=0$时线性相关，$\alpha\neq0$时线性无关
3. α_1,α_2线性相关$\Leftrightarrow\alpha_1=k\alpha_2$
4. 若向量组$\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_s$线性相关，则向该组添加若干同维数向量，新向量组仍然线性相关
5. **向量组向量个数大于维数时该组一定线性相关**
6. 向量组$\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_s$**线性相关等价于**（令$A=(\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_s)$）
    - $Ax=0$有非零解$(x=(x_1,x_2,\ldots,x_s)^T)$

- 至少存在一个向量可由其他$s-1$个向量线性表示
- $R(A)<s$
- $|A|=0$

7. 向量组$\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_s$**线性无关等价于**（令$A=(\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_s)$）
   - $Ax=0$只有零解
   - 任何向量不能被其他$s-1$个向量线性表示
   - $R(A)=s$（列满秩）
   - $|A|\neq 0$
8. $\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_s$线性无关而$\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_s,b$线性相关，则$b$可由$\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_s$**唯一线性表示**
9. $\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_s$线性无关，则其任一部分组、延伸组仍线性无关
10. 几何角度解释：
    - α,β线性相关 $\Leftrightarrow$ α,β共线
    - α,β,γ线性无关 $\Leftrightarrow$ α,β,γ不共面
11. 阶梯形向量组一定线性无关
12. 两两正交的非零向量组一定线性无关
13. 向量组I：$\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_r$可由向量组II：$\beta_1,\beta_2,\ldots,\beta_s$线性表示，则：
    - 若$r>s$，向量组I必线性相关
    - $A=[\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_r],B=[\beta_1,\beta_2,\ldots,\beta_s],R(A)<R(B)$

3.3 向量组的秩与极大无关组

等价向量组

定义　　设向量组I：$\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_s$，向量组II：$\beta_1,\beta_2,\ldots,\beta_t$，若向量组I中每个向量都可以由向量组II线性表示，则称**向量组I可以由向量组II线性表示。**若向量组I与向量组II可以互相线性表示，则称**向量组I与向量组II等价。**

性质　　反身性，对称性，传递性

注意　　等价向量组包含的向量个数不一定相等；等价的**线性无关**的向量组所含向量个数相等

推论

- $\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_s$可由$\beta_1,\beta_2,\ldots,\beta_t$线性表示，且$s>t\Rightarrow\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_s$线性相关
- $\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_s$可由$\beta_1,\beta_2,\ldots,\beta_t$线性表示，且$\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_s$线性无关$\Rightarrow s\leq t$

极大无关组

定义　　设向量组$\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_s$，而$\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_r$是该向量组的一部分组$(r\leq s)$。若有

- 向量组$\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_r$线性无关；

- 向量组$\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m$中任意$r+1$个向量线性相关（若向量组中有$r+1$个向量），

则称向量组$\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_r$是向量组$\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_s$的**极大无关组。**$r$称为向量组的秩，记作$R(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_s) = r$。

说明

1. 只含一个零向量的向量组无极大无关组
2. 无关向量组的极大无关组为其本身
3. 极大无关组可能不唯一（无关组的极大无关组唯一）
4. 任一向量组与其极大无关组等价
5. 向量组任意两极大无关组等价，且所含向量个数相等
6. **等价向量组有相同的秩**，但等秩的向量组不一定等价
7. 经初等变换的向量组的秩不变

向量组的秩

秩的定义

1. 向量组的**极大无关组中向量个数**
2. 矩阵A中非零子式最高阶数
3. 经初等变换将矩阵A化为阶梯形，其中的非零行个数

秩的相关定理

1. 矩阵的初等行（列）变换不改变矩阵列（行）向量组的线性相关性，从而不改变矩阵的列（行）秩

   故：等价的矩阵等秩
2. 矩阵的行秩与列秩相等
3. 设A是$m \times n$矩阵，则
   - A的列向量组线性相关(无关) $\Leftrightarrow R(A) < n(R(A) = n)$
   - A的行向量组线性相关(无关) $\Leftrightarrow R(A) < m(R(A) = m)$

秩的相关结论

1. 秩是非负的，即$R(A) \geq 0$.
2. 矩阵的秩为0等价于该矩阵为零矩阵
3. $R(A_{m\times n}) \leq \min\{m, n\}$
4. $R(A) = R(A^T) = R(kA)(k \neq 0)$
5. 初等变换不改变矩阵的秩。

   若P, Q可逆，则$R(A) = R(PA) = R(AQ) = R(PAQ)$
6. $R(A+B) \leq R(A) + R(B)$
7. $\max\{R(A), R(B)\} \leq R([A, B]) \leq R(A) + R(B)$

8. $R(A)+R(B)-n \le R(AB) \le \min\{R(A),R(B)\}$

9. $|A| \ne 0 \Leftrightarrow n$阶方阵$A$可逆 $\Leftrightarrow R(A)=n$

10. $R(A^*) = \begin{cases} n, R(A)=n \\ 1, R(A)=n-1 \\ 0, R(A)<n-1 \end{cases}$

11. 若B可以由A线性表示，则$R(B) \le R(A)$（A“能力强”）

12. 若A可逆，则$R(AB)=R(B)$

(相当于B左乘若干初等矩阵的乘积，即对B进行若干次初等行变换，不改变B的秩)

3.4 向量空间

定义　　非空n维向量集合V对向量的加法与数乘封闭，则称V为一个向量空间

内积

定义　　设n维向量$x=[x_1,x_2,\dots,x_n]^T, y=[y_1,y_2,\dots,y_n]^T$, 称

$$<x,y>=x_1y_1+x_2y_2+\cdots+x_ny_n=x^Ty$$

为向量x,y的**内积**

夹角

n维非零向量x,y的夹角

$$\theta=\frac{<x,y>}{\| x \| \| y \|},$$

当$\theta=\pi/2$时，称x,y正交

正交向量组

两两正交的向量组称为正交向量组，由**单位向量**构成的正交向量组为**标准（规范）正交向量组**

定理　　不含零向量的正交向量组必线性无关

施密特正交化方法

设向量组$\alpha_1,\dots,\alpha_m$**线性无关**，令

$$\begin{aligned}
\beta_1 &= \alpha_1 \\
\beta_2 &= \alpha_2-\frac{\beta_1^T\alpha_2}{\beta_1^T\beta_1}\beta_1 \\
\beta_3 &= \alpha_3-\frac{\beta_1^T\alpha_3}{\beta_1^T\beta_1}\beta_1-\frac{\beta_2^T\alpha_3}{\beta_2^T\beta_2}\beta_2 \\
&\cdots \\
\beta_m &= \alpha_m-\sum_{j=1}^{m-1}\frac{\beta_j^T\alpha_m}{\beta_j^T\beta_j}\beta_j
\end{aligned}$$

则$\beta_1,...,\beta_m$是与$\alpha_1,...,\alpha_m$等价的正交向量组。

正交矩阵

定义　　若n阶方阵A满足$A^TA=E$, 则称A为**正交矩阵**

性质　　若A,B为正交矩阵，则

1. $A^{-1}=A^T$
2. A^T,A^{-1}均为正交矩阵
3. AB也为正交矩阵
4. $|A|=\pm1$

判定　　n阶矩阵A为正交矩阵的充要条件是A的列（行）向量组是标准正交组

3.5 基，维数与坐标

向量空间的基与维数

向量空间V的任一向量均可由空间内一无关向量组$\alpha_1,\alpha_2,...,\alpha_r$线性表示，则该向量组为空间的一组基，$r$称作该空间的维数，即

$$\dim V=r$$

规定零向量构成的向量空间维数为0.

向量空间的维数与其基中的向量的维数无关。

若基内向量两两正交，则称其为**正交基**；当其向量是单位向量时，称该组基为**规范正交基**

向量的坐标

向量空间V中任一向量x可由基$\alpha_1,\alpha_2,...,\alpha_r$线性表示为$x=x_1\alpha_1+x_2\alpha_2+\cdots+x_r\alpha_r$，则该向量的坐标为$[x_1,x_2,...,x_r]^T$.

过渡矩阵

设$\alpha_1,\alpha_2,...,\alpha_r$与$\beta_1,\beta_2,...,\beta_r$为$r$维向量空间$V$的两组基，则 该两向量组等价 。设$A=(\alpha_1,\alpha_2,...,\alpha_r),B=(\beta_1,\beta_2,...,\beta_r)$，则有由$\alpha_1,\alpha_2,...,\alpha_r$到$\beta_1,\beta_2,...,\beta_r$的过渡矩阵

$$K=A^{-1}B$$

3.6 线性方程组解的结构

齐次线性方程组

n元齐次线性方程组$A_{m\times n}x=0$有非零解（无穷多解）$\Leftrightarrow R(A)<n$，此时无穷多个解的通解含有$n-R(A)$个自由未知量。

这些自由未知量组成的向量组为$Ax=0$的解空间的一组基，被称为**基础解系**。

解空间的维数即为基础解系中的向量个数。

非齐次线性方程组

设方程组$Ax=b$，将A按列分块，记$A=[\alpha_1,\alpha_2,...,\alpha_n]$，$\widetilde{A}=[A,b]$。

该方程组**有解**当且仅当$R(A)=R(\widetilde{A})=r$。方程组有**唯一解**时，当且仅当$r=n$。

非齐次线性方程组$Ax=b$中，若ξ为$Ax=0$的通解，η为$Ax=b$的一个特解，则$Ax=b$的通解为$\xi+\eta$.

求解步骤：

1. 判断$Ax=b,R(A)=r$是否有解
2. 求$Ax=b$的一个特解η
3. 求$Ax=0$的基础解系$\xi_i(i=1,2,...,n-r)$
4. 写出方程组$Ax=b$的通解$x=k_1\xi_1+k_2\xi_2+\cdots+k_{n-r}\xi_{n-r}+\eta$

注重熟练解法

4. 相似矩阵与二次型

4.1 特征值与特征向量

对于n阶方阵A有数λ和非零列向量α满足$A\alpha_{n\times 1}=\lambda\alpha(\alpha\neq 0)$，则$\lambda$为$A$的**特征值**，$\alpha$为$A$的**特征向量**。

故有n元齐次线性方程组$(\lambda E-A)x=\overrightarrow{0}$，$\alpha$为该方程组的非零解，所以必有$|\lambda E-A|=0$。该等式被称为**特征方程**。该式等号左边可展开成关于λ的多项式：$f(\lambda)=|\lambda E-A|$，该多项式被称为**特征多项式**。

特征值与特征向量求法

1. 求特征值就是求解$|\lambda E-A|=0$，是**1元n次方程**。n阶矩阵一定有n个特征值（可能有重根或虚根）

   对于三角矩阵，特征值为其主对角线上的各元。

2. 求特征向量就是求解$(\lambda E-A)x=0$，是**n元1次方程组**。一个特征值对应的特征向量一定有无穷多个

特征值的性质和定理

1. 所有特征值的和等于矩阵主对角线的和，即为矩阵的迹$\operatorname{tr}(A)$。
2. 所有特征值的积等于该矩阵的行列式。
3. 特征值个数等于方阵阶数。
4. $|A|=0 \Leftrightarrow 0是矩阵A的特征值$

   $|A|\neq 0 \Leftrightarrow 矩阵A所有特征值非0$
5. 若λ是矩阵A的特征值，α是A属于特征值λ的特征向量，则：$f(\lambda)$是矩阵$f(A)$的特征值，α是矩阵$f(A)$属于特征值$f(\lambda)$的特征向量

矩阵	特征值	特征向量
A	λ	α
kA	$k\lambda$	α
A^m	λ^m	α
A^{-1}	λ^{-1}	α
A^*	$\|A\|/\lambda$	α

6. 若$f(A)=0$，则A的特征值一定是$f(\lambda)=0$的根。
7. 若$\lambda_1,\lambda_2,\ldots,\lambda_m$是$A$互不相等的特征值，$\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_m$分别为与之对应的特征向量，则这些向量**线性无关**。
8. 特征值的**几何重数**不会超过其**代数重数**
   - 代数重数：根的重数
   - 几何重数：该根对应的线性无关的特征向量的数量

   对称矩阵的几何重数与代数重数相等。
9. n阶矩阵A与其 转置矩阵 有相同特征值
10. 若n阶矩阵A满足$g(A)=0$，则A所有特征值都满足$g(\lambda)=0$

实对称矩阵

性质

1. 其特征值均为实数，对应特征向量都是实向量
2. 若$\lambda_1,\lambda_2,\ldots,\lambda_m$是$A$互不相等的特征值，$\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_m$分别为与之对应的特征向量，则$\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_m$两两正交
3. 若A为实对称矩阵，则其所有特征值的几何重数与代数重数相等

4.2 相似矩阵

定义　存在矩阵A, B，若存在可逆矩阵P，有$B = P^{-1}AP$，则称A与B相似

性质　矩阵A, B相似有以下必要条件（即A, B相似 $\Rightarrow$）：

1. A, B等价
2. $R(A) = R(B)$
3. A, B有相同特征值
4. $|A| = |B|$
5. $\mathrm{tr}(A) = \mathrm{tr}(B)$
6. $f(A), f(B)$相似（数乘、非负指数幂、求逆）

> “五等”：等价、等秩、等特征值、等行列式、等迹

4.3 矩阵相似对角化

定义　若n阶矩阵A可与对角矩阵Λ相似，则称A可对角化

定理　n阶矩阵A可对角化等价于：

1. A有n个线性无关的特征向量
2. A的每个特征值的几何重数均等于其代数重数

注意

1. n阶矩阵A有n个互不相等特征值$\Rightarrow$ A可对角化
2. n阶**实对称矩阵**A必可对角化，且一定存在**正交矩阵**Q，使得

$$Q^{-1}AQ = Q^TAQ = \begin{bmatrix} \lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n \end{bmatrix}$$

其中$\lambda_i(i = 1, 2, \ldots, n)$为$A$的特征值，矩阵$Q$的列向量分别为属于特征值$\lambda_i(i = 1, 2, \ldots, n)$的 两两正交 的**单位**特征向量

矩阵A相似对角化过程

1. 求出n个特征值$\lambda_i(i = 1, 2, \ldots, n)$
2. 求出这些特征值对应的n个*线性无关*的特征向量$\alpha_i(i = 1, 2, \ldots, n)$
3. 令$P = (\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)$，则可得与$A$相似的对角矩阵

$$\Lambda = P^{-1}AP = \begin{bmatrix} \lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n \end{bmatrix}$$

用正交矩阵Q把实对称矩阵 A对角化的过程

步骤基本同上，第2步改为"求出这些特征值对应的n个**两两正交**的**单位**特征向量 $\alpha_i(i = 1, 2, \dots, n)$"

4.4 二次型

n个变量$x_i(i = 1, 2, \dots, n)$的**二次齐次多项式**称为n元二次型。

$$f(x_1, x_2, \dots, x_n) = (x_1, x_2, \dots, x_n) \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = x^T Ax$$

其中A称为二次型f的矩阵，A的秩称为二次型f的秩。

一个实二次型和一个实对称矩阵**一一对应**，研究一个实二次型，就是研究其对应的实对称矩阵。

矩阵的合同

设A, B为n阶矩阵，若存在可逆矩阵C，使得$B = C^T AC$，则称矩阵A, B**合同**。

1. 若A, B合同，则A, B必等价，具有**传递性**，且$r(A) = r(B)$。
2. 若A, B合同，且A为对称矩阵，则B也为对称矩阵。

辨析　　矩阵的等价、相似与合同（以下P, Q, C均为可逆矩阵）

- 等价：$PAQ = B$

  $A, B\text{等价} \Leftrightarrow A, B\text{同型且}R(A) = R(B)$
- 相似：$P^{-1}AP = B$

  $A, B\text{有相同特征值且均可对角化} \Rightarrow A, B\text{相似}$
- 合同：$C^T AC = B$

  $$\begin{aligned} A, B\text{合同} &\Leftrightarrow A\text{的二次型和}B\text{的二次型有相同正、负惯性指数} \\ &\Leftrightarrow A, B\text{的正、负特征值个数对应相等} \end{aligned}$$
- $$\text{等价} \Leftarrow \text{合同} \Leftarrow \begin{cases} \text{相似} \\ A, B\text{均为实对称阵} \end{cases}$$

二次型的标准形和规范形

只含有平方项的二次型称为二次型的***标准形***。故 二次型的标准形的矩阵是对角矩阵 。

在二次型的标准形中 ，若平方项系数为-1，0或1，则称该标准型为***规范形***。

化二次型为标准形

对于任意给定二次型$f(x_1,...,x_n)=x^TAx$，都可以确定一个**可逆**的线性变换$x=Cy$，将可逆线性变换代入二次型有

$$f(x_1,x_2,...,x_n)=x^TAx=(Cy)^TA(Cy)=y^T(C^TAC)y$$

若C^TAC为**对角矩阵**，则二次型f就化为了关于变量$y_i(i=1,2,...,n)$的标准形。

方法：正交变换法；配方法。

正交变换法

设Q为n阶正交矩阵，称线性变换$x=Qy$为正交变换。

对于任意实二次型$f(x_1,...,x_n)=x^TAx$，总可以找到正交变换$x=Qy$，使得

$$f(x_1,x_2,...,x_n)=x^TAx=(Qy)^TA(Qy)=y^T(Q^TAQ)y=y^T\Lambda y=\sum_{i=1}^{n}\lambda_iy_i^2$$

其中$Q^TAQ=\Lambda=\begin{bmatrix}\lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n\end{bmatrix}$, $\lambda_i(i=1,2,...,n)$为矩阵A的特征值。**正交矩阵Q的列向量分别为A的属于特征值$\lambda_i(i=1,2,...,n)$的两两正交的单位特征向量。**

配方法

化二次型：

$$f(x_1,x_2,...,x_n)=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}a_{ij}x_ix_j$$

先把所有含x_1项合并在一起配方，“扫除x_1”，再依次“扫除x_2”……，用$y_i(i=1,...,n)$对合并之后的所有项换元，再用变量y表示x，即可得到一个**可逆**系数矩阵Q，有$x=Qy$。则换元之后的f即为标准形。

惯性定理

实二次型的标准形中正平方项的项数为**正惯性指数**；负平方项的项数为**负惯性指数**。

定理 对一个二次型f，无论用何种可逆线性变换将其化为标准形，正、负惯性指数都是**唯一确定**的。

正定、负定矩阵

n元实二次型$f(x_1,x_2,\ldots,x_n)=x^TAx$对任意非零n维列向量$x$若都有

$f(x_1,\ldots,x_n)$	**则称f为**	**称A为**
>0	正定二次型	正定矩阵
<0	负定二次型	负定矩阵
≥ 0	半正定二次型	半正定矩阵
≤ 0	半负定二次型	半负定矩阵
不满足以上各条件	不定二次型	不定矩阵

正定矩阵性质

A_n正定 $\Leftrightarrow$

1. 对任意n维 非零 列向量x有$x^TAx>0$
2. A的二次型的标准形的系数全为正（正惯性指数$p=n$）
3. A各阶顺序主子式全大于0
   - 顺序主子式：

$$D_i=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1i} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2i} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{ii} \end{vmatrix} \quad (i=1,2,\ldots,n)$$

4. **A所有特征值>0**
5. A与E合同（存在可逆矩阵P使$A=P^TP$）

A_n正定 $\Rightarrow$

1. $R(A)=n$（即**正定矩阵必可逆**）
2. A主对角线元素全为正，且$|A|>0$
3. $A^{-1},A^*,A^m(m\in N^+)$都正定

负定矩阵性质

A_n负定 $\Leftrightarrow$

1. 对任意n维非零列向量x有$x^TAx<0$
2. A的二次型的标准形的系数全为负（负惯性指数$q=n$）
3. A各奇数阶顺序主子式全小于0，各偶数阶顺序主子式全大于0
4. A所有特征值<0

5. A与$-E$合同（存在可逆矩阵P使$A=-PP^T$）

A_n负定 $\Rightarrow$

1. $R(A)=n$（即**负定矩阵必可逆**）
2. A主对角线元素全为负