



## **INTRODUZIONE AI METODI MULTICRITERI DI SURCLASSAMENTO**

**Maria Franca Norese**

Tra i metodi multicriteri di Aiuto alla Decisione (detti anche metodi dell'Analisi Multicriteri) la classe dei metodi di Surclassamento è stata sviluppata per affrontare problemi di scelta (azione migliore tra più alternative), di cernita (attribuzione delle azioni considerate a più classi di cui si conoscono le caratteristiche) e di ordinamento (costruzione di un ordine di preferenza sull'insieme di possibili azioni da intraprendere). L'obiettivo è quello di fornire ai decisori strumenti che li aiutino ad affrontare problemi decisionali caratterizzati da una molteplicità di punti di vista significativi e spesso da un limitato livello di strutturazione, in processi di decisione che si sviluppano in ambito organizzativo o multiorganizzativo.

Due sono le famiglie principali: i metodi *ELECTRE* (acronimo che significa *ELimination Et Choix TRaduisant la REalité* – Eliminazione e scelta traducendo la realtà), orientati alla scelta o all'ordinamento, ed i metodi di *selezione/segmentazione*, che affrontano la problematica della cernita. Rimandando per maggiori dettagli a Ostanello (1992), Vincke (1992), Roy e Bouyssou (1993) e Roy (1996), si forniranno qui alcune definizioni, per poi introdurre i concetti e alcune procedure che caratterizzano i metodi ELECTRE ed i metodi di selezione/segmentazione.

### **1. Azioni e criteri**

Lo sviluppo di un modello multicriteri è finalizzato alla definizione di un insieme *A* di *azioni* possibili e di una famiglia *F* coerente di *criteri*, che permetta di valutare le azioni per poi affrontare il problema decisionale riconosciuto significativo e formulato attraverso una problematica di scelta, di cernita o di classificazione.

Un'*azione* è "una rappresentazione di un possibile contributo alla decisione globale" (Roy, 1996). L'insieme *A* delle azioni *potenziali* (scelte strategiche di innovazione o possibili siti per una localizzazione, progetti alternativi o candidati ad un posto di lavoro, ...) può essere *finito e stabile*, cioè definito a priori, ad esempio mediante una procedura, dei test o l'esplicitazione di frontiere rigide. Può invece essere *evolutivo*, poiché nuove azioni vengono identificate e sviluppate nel tempo, ed in certi casi può essere inizialmente un insieme vuoto.

Una possibile definizione di criterio (cf Roy e Bouyssou, 1993) è la seguente : "un criterio è uno strumento che permette di confrontare due azioni potenziali qualsiasi secondo un certo punto di vista o dimensione del problema". I criteri

**Dispense Integrative**

devono essere: *significativi*, rispetto al contesto del problema ed agli obiettivi espressi dal decisore; *comuni a tutte le azioni alternative* e sufficienti a caratterizzarle rispetto alla situazione considerata; *adatti* a rappresentare le preferenze. Perché la famiglia di criteri sia coerente è necessario verificare alcune condizioni, tra cui principalmente quelle di esaustività, coesione e non ridondanza.

Un criterio 'g' è una funzione dall'insieme 'A' delle azioni potenziali ad un insieme totalmente ordinato 'E' detto scala di valutazione tale che:

$$\forall a \in A \Rightarrow g(a) \in E,$$

per cui si ammette che sia fondato confrontare due azioni qualsiasi *a* ed *a'*, secondo una certa dimensione, basandosi sulle valutazioni *g(a)* e *g(a')*.

Se il modello di valutazione è costituito da un criterio unico, i confronti che ne derivano si interpretano in termini di preferenza globale su A. Se i criteri sono molteplici i confronti che derivano da ciascun criterio si interpretano in termini di *preferenza parziale*, nel senso che essi sono limitati ai soli aspetti presi in considerazione del punto di vista che sottende la definizione del criterio. Si può affermare, quindi, che un criterio *g* è un *modello* che permette di stabilire relazioni di preferenza tra azioni, coerenti con le preferenze dei decisori.

Ad ogni criterio si associa una scala di valutazione, che può essere ordinale (sia quantitativa che qualitativa o relazionale) se conta soltanto la posizione ai fini della relazione tra le alternative, oppure cardinale, cioè quantitativa con attribuzione di rilevanza allo scarto numerico. La qualità dei dati utilizzati per valutare le azioni sul criterio (e quindi il loro diverso livello di incertezza, imprecisione o cattiva determinazione) deve essere analizzata per scegliere il tipo di criterio da usare. Si parla di *vero criterio* se un qualsiasi scarto tra due valutazioni su di esso implica una *preferenza in senso stretto* (o *stretta*). Viceversa si possono introdurre delle soglie definendo altri tipi di criteri, per sfumare l'indicazione quando è ragionevole ammettere che piccoli scarti tra le valutazioni non esprimono preferenza ma ancora una situazione di sostanziale *indifferenza* tra le valutazioni (in relazione al livello di incertezza dei dati utilizzati). La soglia *q*, detta di indifferenza, è introdotta per indicare il massimo scarto tra valutazioni ancora compatibile con una situazione di indifferenza. Uno scarto superiore a *q* può indicare una situazione di netta preferenza tra una valutazione e l'altra oppure, in condizioni di incertezza preferenziale, una zona di *preferenza debole*, che traduce un'esitazione tra l'indifferenza e la preferenza stretta. In questo caso si può introdurre una nuova soglia *s*, detta di presunzione di preferenza, ed il valore di *s* è maggiore o uguale rispetto a quello di *q*.

Se esiste solo *s* che discrimina una zona di preferenza debole da quella di preferenza stretta, si è in presenza di un *pre-criterio*. Se si hanno entrambe le soglie, ma esse sono coincidenti, non viene percepita una preferenza debole ma solo una stretta ed un intervallo di indifferenza, in questo caso si è in presenza di un *quasi-criterio*. Infine, in presenza di due soglie distinte, e quindi di tre intervalli

(indifferenza e preferenza debole, che costituiscono insieme la “presunzione di preferenza”, oltre alla preferenza stretta) si parla di *pseudo-criterio*.

Ad ogni criterio è associabile un *coefficiente di importanza relativa* (detto *peso*) che costituisce una delle parti più “delicate” del modello, perché è l'espressione più diretta ed esplicita delle preferenze decisionali e può influenzare i risultati dell'applicazione di un metodo di Analisi Multicriteri in modo significativo. La cura nella scelta dei criteri, l'espressione esplicita di coefficienti che indicano la diversa importanza dei criteri (con la possibilità di rappresentare scenari diversi di importanza dei criteri) e la definizione operativa di differenti regole di decisione (sia per classificare le azioni alternative che per attribuirle a classi di qualificazione) permettono di riprodurre con l'attenzione necessaria le diverse esigenze di una specifica situazione decisionale e quindi di fornire supporto in maniera più adeguata.

## 1.1 Metodi multicriteri di Surclassamento

Nei metodi multicriteri qui proposti le azioni vengono confrontate a coppie su ogni singolo criterio per stabilire se una delle due è preferibile all'altra o se sono indifferenti. Il problema dell'aggregazione dei risultati dei confronti è affrontato mediante la costruzione di una relazione binaria mista  $S$ , detta di *Surclassamento*, esprimibile come l'unione di tre relazioni elementari, indifferenza ( $I$ ), preferenza debole ( $Q$ ) e preferenza stretta ( $P$ ):  $S = I \cup Q \cup P$ . In questo ambito è considerata anche l'eventualità dell'*incomparabilità* tra azioni ( $N$ ), diversa dall'indifferenza poiché causata dall'esistenza di preferenze contrastanti sui diversi criteri, che rendono impossibile stabilire quale delle due azioni sia migliore pur sapendo che non sono uguali.

Si può dire che l'azione  $a$  *surclassa* l'azione  $a'$  ( $aSa'$ ) se “esistono ragioni sufficienti per ritenere che  $a$  sia almeno altrettanto buona di  $a'$  e non esistono buone ragioni per rifiutare tale affermazione”. Operativamente questa definizione si traduce nella verifica di condizioni di *concordanza* (di ragioni sufficienti per ritenere che  $a$  sia almeno altrettanto buona di  $a'$ ) e di *non discordanza* (cioè di buone ragioni per rifiutare l'affermazione). Per come è definita questa relazione, unione di tre relazioni elementari caratterizzate da proprietà differenti, non è possibile inferire alcunché sul surclassamento tra  $a'$  ed  $a$ , noto quello tra  $a$  ed  $a'$ . Qualora tra due azioni non esistano relazioni di surclassamento, né in un senso né nell'altro, esse si dicono *incomparabili*.

Il surclassamento può essere *definito*, ed in questo caso affermare che  $a$  surclassa  $a'$  corrisponde ad indicare un surclassamento certo mentre l'affermazione ' $a$  non surclassa  $a'$ ' implica un non-surclassamento certo. In questo caso si può indicare con sicurezza la preferenza di un'azione sull'altra (una delle due surclassa l'altra e non viceversa) o la loro indifferenza (si surclassano a vicenda) o l'incomparabilità (nessuna delle due surclassa l'altra).



## Dispense Integrative

Si parla invece di surclassamento *sfumato*, (o *fuzzy* in inglese o *flou* in francese), quando si associa al surclassamento un *grado di credibilità*, indicato con  $\delta(a, a')$  e compreso tra 0 e 1, con cui esprimere una differente credibilità nell'affermare che esiste una relazione di surclassamento tra due specifiche azioni.

## 2. I metodi ELECTRE

Sono metodi multicriteri di aggregazione delle preferenze mediante surclassamento, sviluppati da Bernard Roy il primo nel 1968, il secondo nel 1972 (insieme a P. Bertier), il terzo nel 1979 ed il quarto nel 1982. I metodi si differenziano per le problematiche affrontate (scelta per il primo, ordinamento per gli altri), la natura dei dati trattati e quindi il tipo di criteri (veri per il primo ed il secondo, con scale cardinali il primo e cardinali o ordinali il secondo ; pseudo-criteri invece per gli ultimi due, che utilizzano scale cardinali con soglie) e per la procedura di modellizzazione del surclassamento, definito o sfumato (fuzzy).

Tutti i metodi ELECTRE sono strutturati in due fasi: nella prima (di modellizzazione della relazione di surclassamento) si confrontano a coppie le azioni su ogni criterio e si aggregano i risultati ottenuti, mediante la costruzione di indici o l'applicazione di test che verificano la presenza di condizioni di concordanza e di non discordanza, alla base del concetto di surclassamento; nella seconda si attiva la procedura di classificazione delle azioni relativa alla problematica in esame ed alla 'regola' decisionale modellizzata. La scelta fra i differenti metodi è motivata da indicazioni connesse sia alla natura dei dati a disposizione, quindi dei criteri che si possono utilizzare, sia alla precisa regola di decisione che si vuole rendere operativa.

Del metodo ELECTRE II (Roy e Bertier, 1972) è fornita nel seguito una sintetica descrizione ed alcuni esempi di applicazione, mentre del metodo ELECTRE III (Roy, 1979) sono presentati solo alcuni degli elementi caratterizzanti. Per una descrizione più completa di questi e degli altri metodi ELECTRE si rimanda a (Vincke, 1992; Roy e Bouyssou, 1993).

### 2.1 ELECTRE II

ELECTRE II utilizza *veri-criteri*, quelli, cioè, in cui qualunque scarto di valutazione indica una preferenza in senso stretto. Le scale possono essere cardinali od ordinali.

Il surclassamento impiegato in questo metodo è *definito (certo)*; ciò implica che la funzione caratteristica associata  $\delta(a, a')$ , definita su  $A \times A$ , assuma valori nell'insieme  $\{0, 1\}$ :

$$\begin{array}{ll} a \text{ S } a' & \Leftrightarrow \delta(a, a') = 1 \text{ (Surclassamento certo)} \\ a & \text{S} \\ a' & \Leftrightarrow \delta(a, a') = 0 \text{ (Non-surclassamento certo).} \end{array}$$

Il risultato della modellizzazione del surclassamento viene rappresentato mediante un grafo in cui i nodi sono le azioni confrontate e gli archi orientati esprimono le relazioni tra le coppie di nodi. Nel grafo di surclassamento compaiono gli archi da **a** ad **a'** per cui  $\delta(a, a')=1$ .

**Fase I**

Il surclassamento viene modellizzato nella prima fase del metodo mediante i test di *concordanza* e di *non discordanza* (figura 1).

Per effettuare il *test di concordanza* è necessario confrontare a coppie tutte le azioni, criterio per criterio, e suddividere, per ciascuna coppia di azioni, i criteri  $g_j$  in tre sottoinsiemi: criteri in accordo con l'affermazione "la valutazione di  $a$  è migliore di quella di  $a'$ " ( $J_+$ ), criteri per cui "la valutazione di  $a$  è uguale a quella di  $a'$ " ( $J_+$ ) e criteri in accordo con l'affermazione "la valutazione di  $a$  è peggiore di quella di  $a'$ " ( $J_-$ ). Sono cioè definiti:

$$\begin{aligned} J_+(a, a') &= \{ j \in J : g_j(a) \succ g_j(a') \} \\ J_=(a, a') &= \{ j \in J : g_j(a) = g_j(a') \} \\ J_-(a, a') &= \{ j \in J : g_j(a) \prec g_j(a') \}. \end{aligned}$$

Noti i pesi ( $p_j$ ) associati a ciascun criterio è possibile calcolare l'importanza relativa di ogni sottoinsieme sommando i pesi dei singoli criteri che appartengono al sottoinsieme.

Da cui :

$$\begin{aligned} P^+(a, a') &= \sum_{j \in J_+} p_j \\ P^=(a, a') &= \sum_{j \in J_+} p_j \\ P^-(a, a') &= \sum_{j \in J_-} p_j. \end{aligned}$$

Per superare il test di concordanza è necessario che :

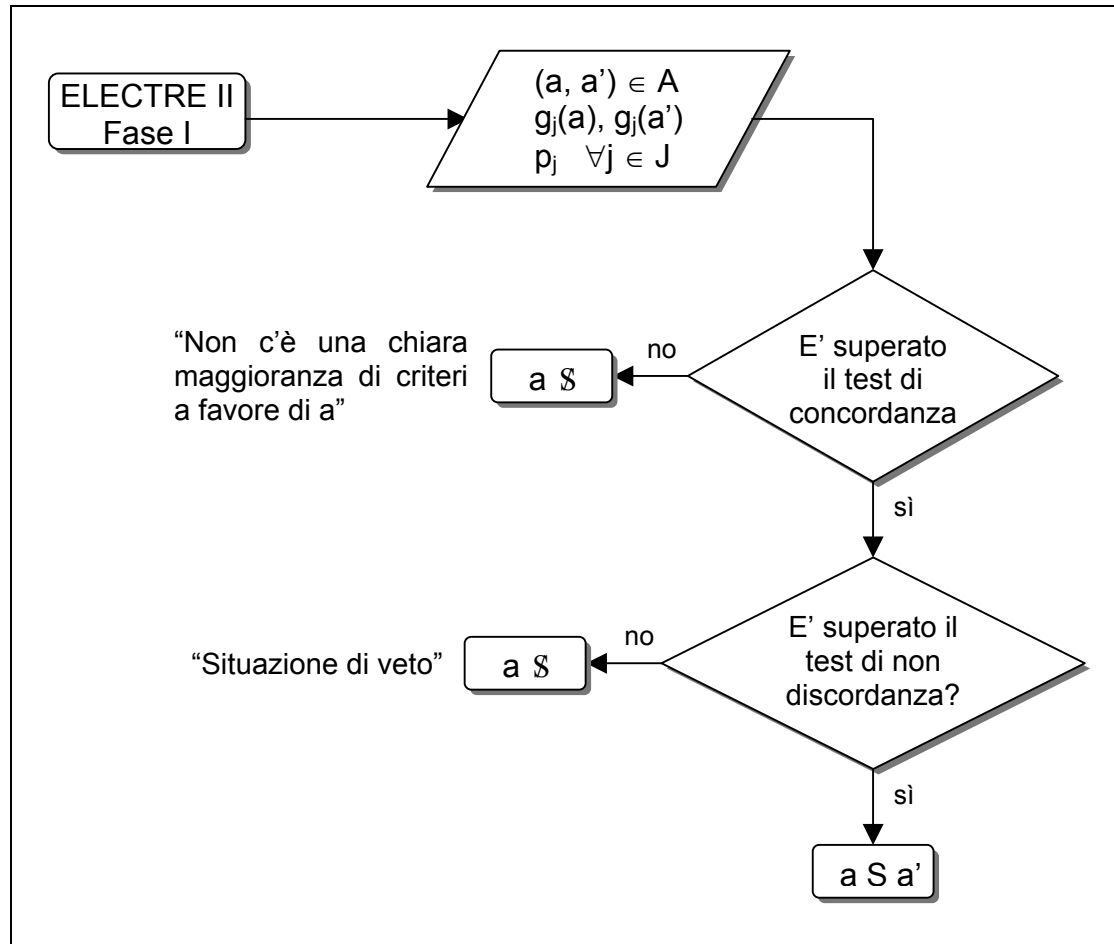
$$\begin{aligned} \text{i)} \quad c(a, a') &= \frac{P^+(a, a') + P^=}{P^+(a, a') + P^= + P^-(a, a')} \geq c \\ \text{ii)} \quad \frac{P^+(a, a')}{P^-(a, a')} &\geq 1 \end{aligned}$$

dove  $c(a, a')$  è l'*indice di concordanza* e  $c$  è un parametro che rappresenta la *soglia di concordanza* o *maggioranza*. Si possono scegliere le *soglie*, dette *naturali* ( $c_f = 3/4$  detta *soglia forte* e  $c_d = 2/3$  detta *soglia debole*) o comunque valori di soglia prossimi a questi.

Col *test di non discordanza* si verifica che, sui criteri appartenenti a  $J^-(a, a')$ , non sia attivo un *veto* al surclassamento di  $a'$  da parte di  $a$ , veto che scatta in corrispondenza di valori in discordanza espressi (per ciascun criterio  $j^* \in J^*$ )<sup>1</sup> da *insiemi di discordanza* ( $D_{j^*}$ ), cioè insiemi di coppie di valori ( $e, e'$ ) della scala del

<sup>1</sup> Dove  $J^* \subseteq J$  è il sottoinsieme dei criteri, individuati del decisore, su cui esistono veti.

criterio  $j^*$  con  $e$  'molto peggiore' di  $e'$  ( $e \prec \prec e'$ ), che indicano i limiti oltre i quali il veto diventa operativo.



**Figura 1: Modellizzazione del surclassamento in ELECTRE II**

Il test di non discordanza non è superato, e quindi  $a \S a'$ , se per almeno un criterio  $j^* \in J^*$  si verifica che:

$$g_{j^*}(a) = e \quad e \quad g_{j^*}(a') = e' \quad \text{con } (e, e') \in D_{j^*}$$

Il risultato della Fase I del metodo è rappresentato sul *grafo di surclassamento*  $G(A, S^f)$ , a cui è associabile una *matrice di incidenza* i cui elementi  $m_{ij}$  sono dati dalla funzione  $\delta(a_i, a_j)$ , su cui si applicherà la procedura di classificazione della Fase II. Un esempio di applicazione della Fase I di ELECTRE II è presentato in relazione ad un problema di insediamento industriale. Il numero di azioni insediative esaminate e di criteri utilizzati per valutarle è stato ridotto velocizzare al massimo i calcoli.



***Problema di insediamento industriale: applicazione della Fase I di ELECTRE II***

Cinque zone in ambiti territoriali differenti ( $a_1, a_2, a_3, a_4, a_5$ ) sono state valutate per poterne riconoscere la diversa adeguatezza ad un possibile insediamento industriale. I sei criteri permettono di valutare le dotazioni di servizi e di manodopera delle varie zone (tabella 1). Applicando la Fase I di ELECTRE II, si arriva ad ottenere un grafo di surclassamento.

**Tabella 1: Valutazioni e parametri**

Criteri	Strade	Infrastrutture ferroviarie	Energia elettrica	Dotazioni e idrica	Offerta manodopera	Servizi bancari
<b>Pesi</b>	<b>0,26</b>	<b>0,14</b>	<b>0,20</b>	<b>0,12</b>	<b>0,21</b>	<b>0,07</b>
<b>Zone</b>						
$a_1$	0	10,3	3	5	2,1	0,35
$a_2$	0,4	52,5	3	5	1,5	0,30
$a_3$	0,3	1,4	0	3	0	1
$a_4$	0,7	28,1	3	7	3,2	0,39
$a_5$	0,7	12,2	4	10	2,8	1,6
<b>Ins. Disc.</b>	<b>(0, 0,7)</b>					

**Osservazioni**

- L'esempio è ripreso da un caso reale del 1978 ( 'Analisi multicriteri di un problema di localizzazione industriale: sperimentazione sul comprensorio di Torino' di Ostanello, Simoni e Vernoni) in cui sia il numero delle zone che dei criteri è molto superiore a quello del modello riportato in tabella 1. Ogni criterio ha richiesto modalità di misurazione differenti che dovrebbero essere descritte, così come le fonti informative utilizzate. Il caso potrà essere analizzato nei dettagli riprendendo il modello fornito tra gli esempi di applicazioni reali.
- Analizzando i criteri è possibile riconoscere il verso di preferenza e sviluppare i calcoli relativi alla prima fase del metodo.
- I coefficienti di importanza relativa dei criteri, detti pesi, sono già normalizzati a uno; se non lo fossero, sarebbe necessario normalizzarli.
- Su un solo criterio è definito l'insieme di discordanza.
- Le soglie naturali sono  $c_f = 3/4$  e  $c_d = 2/3$ . E' possibile scegliere queste soglie o altre che non si discostino molto dalle soglie naturali.



## Dispense Integrative

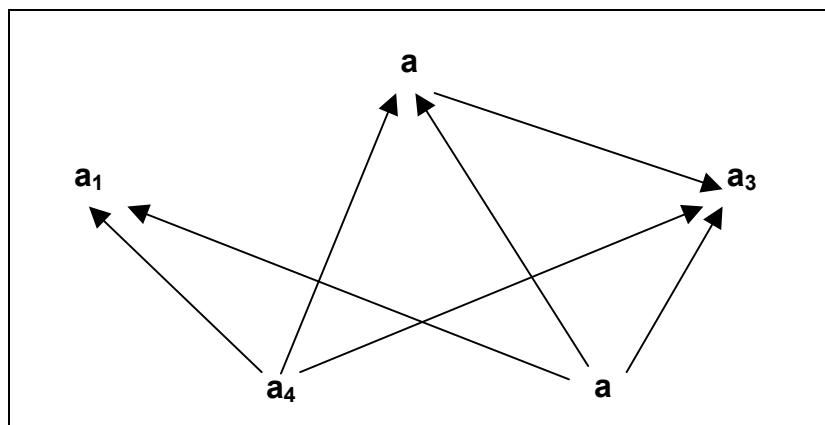
### Fase I

Verificando che per ogni criterio proposto nella tabella il verso di preferenza è crescente al crescere dei valori numerici, è possibile passare al confronto tra coppie di zone di possibile insediamento ed ai test di concordanza e non discordanza.

**Tabella 2: Fase I di ELECTRE II**

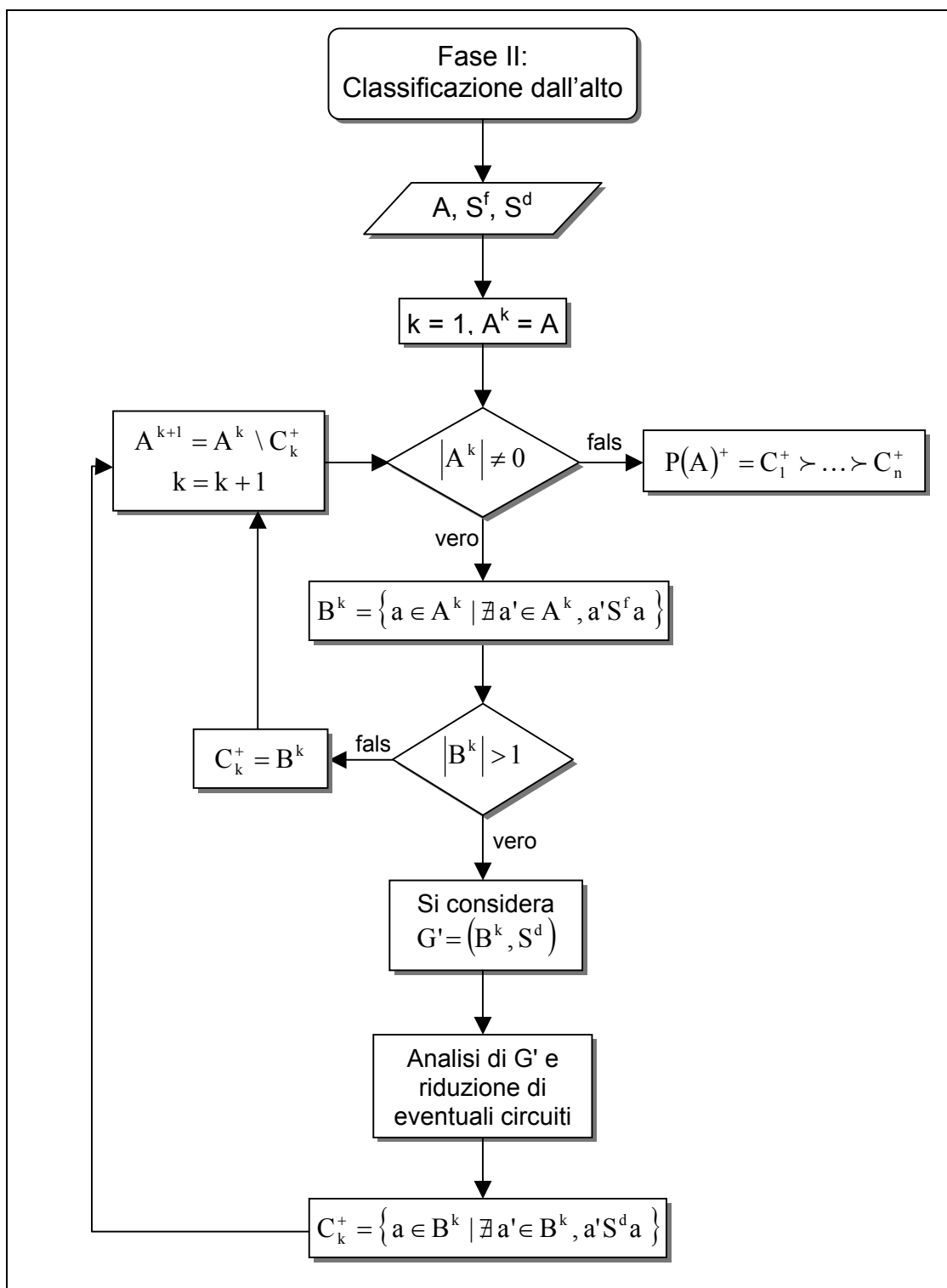
	$J_+$	$J_0$	$J_-$	$P^+ \geq P^-$	$P^+ + P^-$	VETO	S
$a_1 a_2$	5, 6	3, 4	1, 2	no			
$a_1 a_3$	2, 3, 4, 5	/	1, 6	sì	0,67		
$a_1 a_4$	/	3	1, 2, 4, 5, 6	no		sì	
$a_1 a_5$	/	/	1, 2, 3, 4, 5, 6	no		sì	
$a_2 a_1$	1, 2	3, 4	5, 6	sì	0,72		
$a_2 a_3$	1, 2, 3, 4, 5	/	6	sì	0,93		$a_2 S a_3$
$a_2 a_4$	2	3	1, 4, 5, 6	no			
$a_2 a_5$	2	/	1, 3, 4, 5, 6	no			
$a_3 a_1$	1, 6	/	2, 3, 4, 5	no			
$a_3 a_2$	6	/	1, 2, 3, 4, 5	no			
$a_3 a_4$	6	/	1, 2, 3, 4, 5	no			
$a_3 a_5$	/	/	1, 2, 3, 4, 5, 6	no			
$a_4 a_1$	1, 2, 4, 5, 6	3	/	sì	1		$a_4 S a_1$
$a_4 a_2$	1, 4, 5, 6	3	2	sì	0,86		$a_4 S a_2$
$a_4 a_3$	1, 2, 3, 4, 5	/	6	sì	0,93		$a_4 S a_3$
$a_4 a_5$	2, 5	1	3, 4, 6	no			
$a_5 a_1$	1, 2, 3, 4, 5, 6	/		sì	1		$a_5 S a_1$
$a_5 a_2$	1, 3, 4, 5, 6	/	2	sì	0,86		$a_5 S a_2$
$a_5 a_3$	1, 2, 3, 4, 5, 6	/	/	sì	1		$a_5 S a_3$
$a_5 a_4$	3, 4, 6	1	2, 5	sì	0,65		

La scelta della soglia naturale come soglia forte è praticamente obbligatoria. Si ottengono molti surclassamenti (sette) e niente autorizza a proporre una scelta differente. Per la soglia debole è possibile sia scegliere ancora la soglia naturale (pari a 2/3) che adottare  $c_d = 0,65$ , valore molto prossimo che permette di considerare anche il surclassamento debole tra  $a_5$  ed  $a_4$ . In questo caso si è preferita la scelta di quest'ultimo valore. Dalla Fase I si ricava il grafo di surclassamento di figura 2.

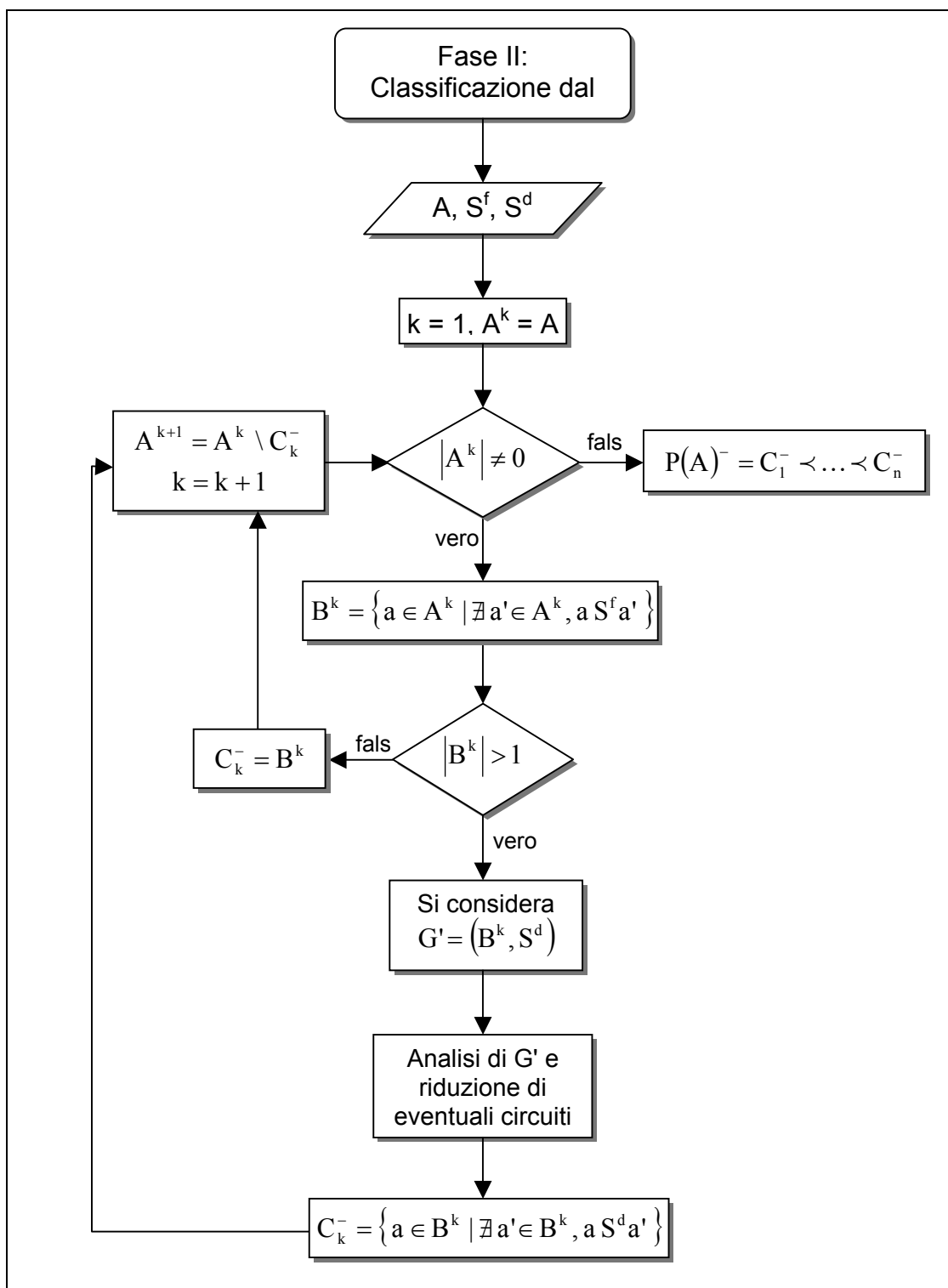


**Figura 2: Grafo di surclassamento dell'esempio**

**Dispense Integrative**



**Figura 3: Costruzione del preordine dall'alto  $P(A)^+$  in ELECTRE II**



**Figura 4: Costruzione del preordine dal basso  $P(A)^-$  in ELECTRE II**

***Fase II di ELECTRE II***

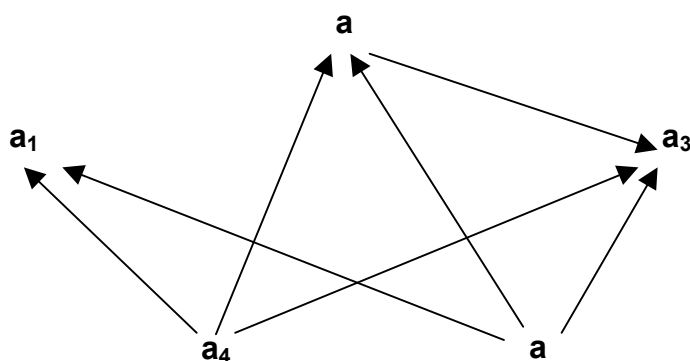
Per poter applicare le ‘regole’ di identificazione delle azioni migliori o peggiori, utilizzata iterativamente da ELECTRE II nella seconda fase del metodo, è necessario verificare che non esistano circuiti<sup>2</sup> sul grafo. Se esistono è necessario eliminarli contraendo il grafo stesso, se non è possibile rivedere il modello<sup>3</sup> e tornare ad applicare la Fase I.

Per ordinare le azioni in classi di preferenza decrescente si considera il surclassamento ‘forte’  $S^f$ , ottenuto con la soglia di concordanza ‘forte’ ( $c^f$ ), e poi, eventualmente e localmente, quello ‘debole’  $S^d$ , ottenuto con una soglia ‘debole’ ( $c^d$ ).

Il metodo prevede la costruzione di una classificazione dall’alto,  $P^+(A)$ , ed una dal basso,  $P^-(A)$ , mediante le procedure schematizzate nelle figure 3 e 4. I due risultati, espressi nella forma del preordine completo (struttura che corrisponde alla nozione intuitiva della classificazione con possibilità di ex æquo) o dell’ordine completo (che corrisponde alla nozione intuitiva della classificazione senza possibilità di ex æquo), possono coincidere e così forniscono direttamente la graduatoria finale delle azioni. Se i preordini o gli ordini completi delle azioni non coincidono ma sono “sufficientemente prossimi”, si costruisce il preordine parziale finale come intersezione dei due preordini completi ottenuti con le due procedure di classificazione dall’alto e dal basso.

***Esempio di applicazione della Fase II***

Riprendendo l’esempio introdotto per la Fase I, si parte dal grafo di surclassamento precedentemente ottenuto, grafo che non presenta circuiti. La soglia debole adottata è pari a 0,65.



<sup>2</sup> Un circuito è un cammino, cioè una sequenza di archi orientati nello stesso verso il cui nodo iniziale coincide con il nodo finale.

<sup>3</sup> La presenza di un circuito può essere un’indicazione della scarsa capacità del modello a distinguere chiaramente le azioni.



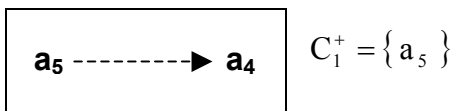
## Classificazione dall'alto $P(A)^+$

### Iterazione 1

$$A^1 = A$$

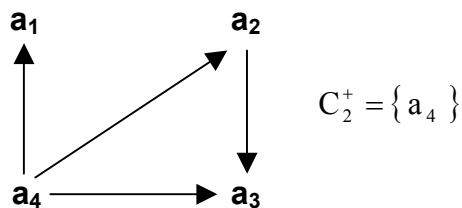
Due sono gli elementi di  $A$  non surclassati:  $D_1^+ = \{a_4, a_5\}$ .

Per cercare di distinguerli ed assegnarne uno solo alla prima classe dall'alto, si passa al surclassamento debole.  $a_5$ , che surclassa debolmente  $a_4$ , è l'unico elemento non surclassato, perciò è attribuibile alla prima classe dall'alto.



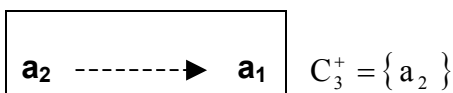
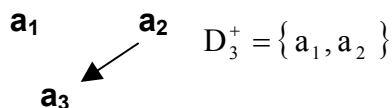
### Iterazione 2

$$A^2 = A^1 \setminus C_1^+ = \{a_1, a_2, a_3, a_4\}$$



### Iterazione 3

$$A^3 = A^2 \setminus C_2^+ = \{a_1, a_2, a_3\}$$





*Iterazione 4*

$$A^4 = A^3 \setminus C_3^+ = \{a_1, a_3\}$$

$$a_1 \quad a_3 \quad D_4^+ = \{a_1, a_3\}$$

$a_1 \text{ -----} \blacktriangleright a_3$

 $C_4^+ = \{a_1\}$

$$A^5 = A^4 \setminus C_4^+ = \{a_3\} \Rightarrow |A^5| = 1 \Rightarrow \text{STOP}$$

Al termine della procedura, il risultato è il seguente:

$$P(A)^+ = \{a_5\} \succ \{a_4\} \succ \{a_2\} \succ \{a_1\} \succ \{a_3\}.$$



## Classificazione dal basso $P(A)^-$

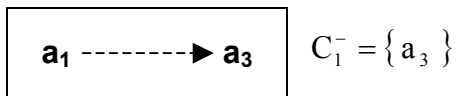
### Iterazione 1

Si riparte dal grafo di surclassamento iniziale.

$$A^1 = A$$

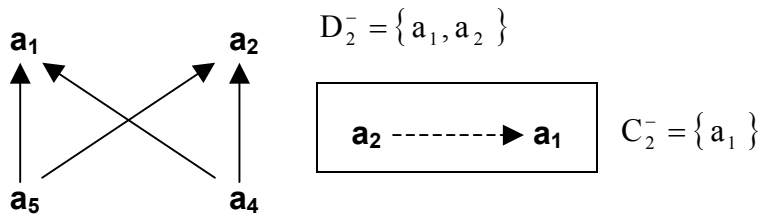
$$D_1^- = \{a_1, a_3\}$$

C'è un surclassamento debole da  $a_1$  verso  $a_3$ , quindi solo  $a_3$  non è in grado di surclassare altri elementi; viene perciò attribuita alla prima classe dal basso.



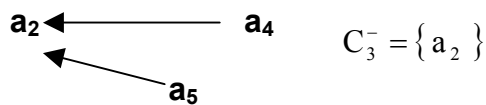
### Iterazione 2

$$A^2 = A^1 \setminus C_1^- = \{a_1, a_2, a_4, a_5\}$$



### Iterazione 3

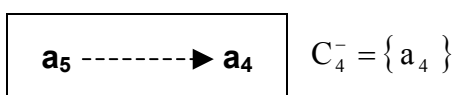
$$A^3 = A^2 \setminus C_2^- = \{a_2, a_4, a_5\}$$



### Iterazione 4

$$A^4 = A^3 \setminus C_3^- = \{a_4, a_5\}$$

$$D_4^- = \{a_4, a_5\}$$



$$A^5 = A^4 \setminus C_4^- = \{a_5\} \Rightarrow |A^5| = 1 \Rightarrow \text{STOP}$$

Alla fine della procedura, il risultato ottenuto è qui rappresentato nell'ordine dall'azione migliore alla peggiore:

$$P(A)^- = \{a_5\} \succ \{a_4\} \succ \{a_2\} \succ \{a_1\} \succ \{a_3\}.$$

Una graduatoria finale  $P(A)$  è facilmente ottenibile, poiché i due risultati  $P(A)^+$  e  $P(A)^-$  coincidono.

## 2.2 Costruzione del preordine parziale finale

Se  $P(A)^+$  e  $P(A)^-$  coincidano, definire l'ordinamento finale è immediato. Il problema sorge quando è necessario definire un preordine parziale finale a partire da due preordini  $P(A)^+$  e  $P(A)^-$  differenti che, nella più favorevole delle ipotesi, possono presentare due azioni, poste in classi consecutive l'una all'altra, che si scambiano di posizione, o tali per cui diverse azioni sono "ballerine", cioè compaiono in classi distanti nei due preordini. In questa situazione è necessario un procedimento che permetta di ottenere un risultato finale senza perdere le informazioni derivanti da queste differenti posizioni, espressione di incomparabilità tra le azioni stesse.

Il procedimento proposto in (Schärlig, 1996) per definire un *preordine parziale finale* è una *intersezione*, secondo il significato della teoria degli insiemi, che si basa sulle seguenti regole:

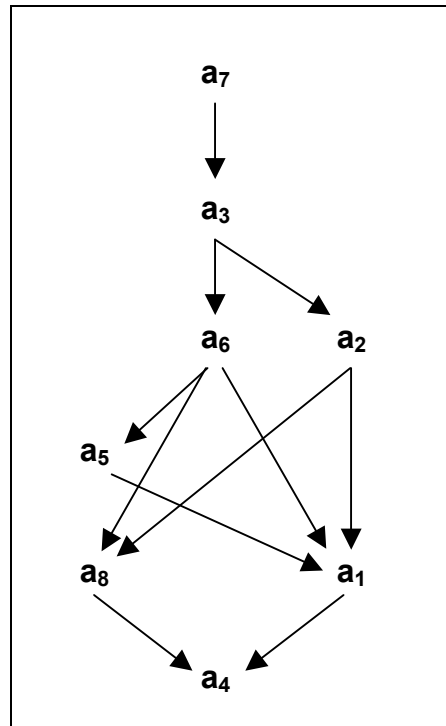
- una azione del preordine finale non può essere posta prima di un'altra se non nel caso in cui essa è prima di quest'ultima in uno dei due ordini-preordini completi ( $P(A)^+$  o  $P(A)^-$ ) e prima di questa oppure ex æquo nell'altro;
- due azioni non possono essere ex æquo nel preordine finale se non nel caso in cui appartengono alla stessa classe in entrambe le classificazioni dall'alto e dal basso;
- due azioni sono incomparabili nel preordine finale se l'una è prima dell'altra in una classificazione (o dall'alto o dal basso) e la segue nell'altra.

Il risultato non può essere rappresentato che sotto la forma di un grafo. Esaminando i due preordini seguenti è possibile esemplificare il procedimento proposto:

$$P(A)^+ = \{a_3, a_7\} \succ \{a_2\} \succ \{a_6, a_8\} \succ \{a_5\} \succ \{a_1\} \succ \{a_4\}$$

$$P(A)^- = \{a_7\} \succ \{a_3, a_6\} \succ \{a_5\} \succ \{a_1, a_2\} \succ \{a_4, a_8\}.$$

Con il primo passo, l'applicazione delle regole conduce al grafo rappresentato in figura 5.

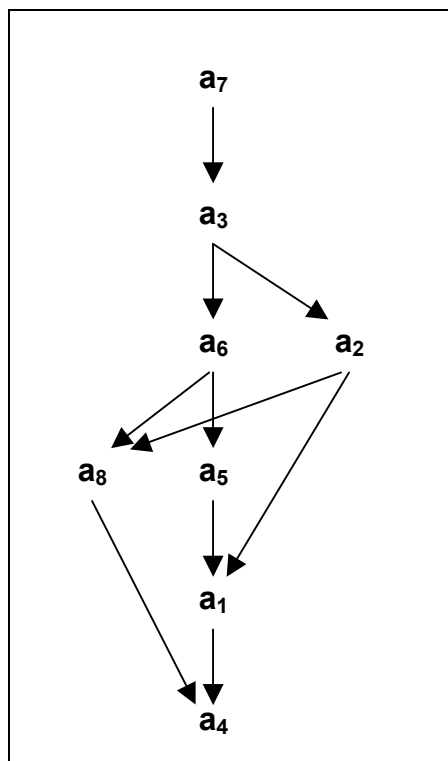


**Figura 5: Una prima rappresentazione del preordine parziale finale**

Questo grafo si costruisce osservando per ogni azione come essa è posta in relazione alle altre. Ad esempio,  $a_7$  è in prima classe in entrambi i preordini ed in  $P(A)^+$  è ex æquo con  $a_3$ , di conseguenza la si può porre in testa al preordine parziale. Dopo  $a_7$  viene posta  $a_3$  poiché una volta è ex æquo con  $a_7$  e l'altra è in seconda classe. Poi in  $P(A)^+$  compare  $a_2$  e poi  $a_6$ , insieme ad  $a_8$ , mentre in  $P(A)^-$  compare  $a_6$ , che è con  $a_3$  in seconda classe,  $a_2$  e  $a_8$  compaiono in classi successive ( $a_2$  nella quarta e  $a_8$  addirittura nell'ultima). I due preordini sono quindi piuttosto differenti. Volendo comunque costruire il preordine parziale finale, da  $a_3$  si diramano due cammini distinti, uno verso  $a_2$  ed uno verso  $a_6$ , indicando con ciò una incomparabilità tra i due elementi.

Invece, dopo aver constatato che  $a_6$  viene dopo  $a_7$  in ambedue i preordini, non si traccia più la freccia diretta da  $a_7$  ad  $a_6$ , perché esiste già un cammino, dall'una all'altra di queste due azioni, che passa per  $a_3$ . La procedura va avanti, per le altre azioni, analogamente.

Il primo risultato talora non è molto leggibile, soprattutto a causa dell'incrociarsi delle frecce. Allora ci si può organizzare secondo un semplice principio: si cerca il cammino più lungo, quello cioè che passa per il più grande numero di azioni, tra la prima e l'ultima azione. Questo cammino viene allora tracciato verticalmente, come mostrato nella figura 6, per poi aggiungere gli altri cammini.



**Figura 6: La rappresentazione definitiva dell'ordinamento finale**

Questa operazione non è sempre immediata, poiché le coppie incomparabili talvolta creano difficoltà notevoli e può essere anche necessario ricorrere ad alcune convenzioni. Per esempio si vede, nel grafo della figura 5, che  $a_2$  è incomparabile con  $a_6$  e con  $a_5$ . Il dubbio è se bisogna disegnare  $a_2$  all'altezza di  $a_5$  oppure all'altezza di  $a_6$ . Quando si "salta" soltanto una azione il problema non si pone, qui invece interviene la convenzione che stabilisce: 'si sceglie il livello più alto'. Si pone quindi  $a_2$  all'altezza di  $a_6$  e, per la stessa convenzione,  $a_8$  al livello di  $a_5$ . Il preordine parziale finale evidenzia che due delle otto azioni presentano numerose incomparabilità con le altre; è un'indicazione utile perché segnala la presenza di possibili anomalie legate o all'inadeguatezza del modello o alla carenza di informazioni o al fatto che le azioni sono per loro natura incomparabili e ciò può essere informativamente molto importante, in relazione al tipo di decisione da prendere.

## 2.3 Variante della Fase II

Nelle applicazioni più recenti di ELECTRE II, si è diffuso l'uso di una variante della seconda fase. Questa variante parte dall'osservazione che, se nel grafo di surclassamento non esistono circuiti (o comunque se i circuiti esistenti sono stati eliminati), è possibile estrarre da  $A$  tutti gli elementi di un sottoinsieme  $B^1$  di



## Dispense Integrative

elementi caratterizzati dal fatto di “*non essere surclassati da nessun altro elemento di  $A$* ”, utilizzando il surclassamento forte. Si può poi procedere a definire il sottoinsieme  $B^2$  degli elementi restanti, tali da “*non essere surclassati da nessun altro elemento*”. Ripetendo questa procedura, risulta agevole costruire la partizione di  $A$ :  $\{B^1, B^2, \dots\}$ .

Si definisce su queste basi ciò che si può chiamare una *versione grossolana* del preordine completo (Roy e Bouyssou, 1993), ponendo in testa ed in posizione di ex æquo tutti gli elementi di  $B^1$ , di seguito (cioè in seconda posizione) quelli di  $B^2$  e così via. Si passa poi ad esaminare se è possibile affinare questo preordine, utilizzando il surclassamento debole. Questo affinamento consiste nell'utilizzare l'informazione che questo surclassamento meno credibile apporta, per distinguere i diversi elementi di un sottoinsieme  $B^j$  ogni volta che questo ne contenga parecchi. In primo luogo si tratta di mettere in evidenza gli eventuali circuiti di  $B^j$ , secondo  $S_D$  (surclassamento debole), e poi di determinare il preordine completo su  $B^j$ . Per il preordine dal basso il discorso è analogo, sostituendo a “*non essere surclassati da nessun altro elemento*” la condizione “*non surclassare nessun altro elemento*”.

Altre varianti sono utilizzate, una in particolare nelle numerose applicazioni sviluppate in Svizzera in problemi prevalentemente di Gestione ambientale (Maystre et al., 1994), e descritte dettagliatamente in (Schärlig, 1996). Una particolare segnalazione va fatta al Regolamento di attuazione della Legge quadro sui lavori pubblici (Legge Merloni ter), il cui testo completo è su [http://www.llpp.it/NuovoSito/legislativo/merloni\\_ter/](http://www.llpp.it/NuovoSito/legislativo/merloni_ter/), dove si suggerisce l'uso del metodo ELECTRE per il calcolo dell'offerta economicamente più vantaggiosa e viene proposto uno schema di applicazione (Allegato B).



**Dispense Integrative**

**Esercizio 2.4.1 – Campagna Pubblicitaria**

Per il lancio di un prodotto, una ditta ha deciso di effettuare una campagna pubblicitaria e, a tal fine, ha individuato cinque riviste di settore ( $a_1, a_2, a_3, a_4, a_5$ ), che sono state valutate rispetto a quattro criteri (le valutazioni sono riportate nella tabella E2.4.1). Indicare quale o quali riviste si dovrebbero scegliere per la campagna pubblicitaria. Ad ogni criterio è associato un coefficiente di importanza relativa (pesi); si è definita una coppia di valori in discordanza (5,10) su “Contesto redazionale” ed una (3, 9) sul criterio “Prestigio”.

**Tabella E2.4.1: Valutazioni e parametri**

Criteri	Contesto redazionale	Costo	Regolarità	Prestigio
Pesi	7	5	4	2
Riviste				
$a_1$	5	84	6	9
$a_2$	8	51	4	9
$a_3$	5	74	8	3
$a_4$	10	60	4	9
$a_5$	5	90	7	3
Ins. Disc.	(5,10)		(3, 9)	

## Osservazioni e suggerimenti per la risoluzione

Riflettere sul verso di preferenza dei criteri e sulla natura dei pesi. Sviluppare i calcoli della prima fase, scegliendo una coppia di soglie. Passare alla seconda fase del metodo, analizzare i risultati e fornire una risposta finale.

## Fase I

**Tabella E2.4.2: Fase I di ELECTRE II**

	$J_+$	$J_0$	$J_-$	$P^+ \geq P^-$	$P^+ + P^-$	VETO	S
$a_1 a_2$							
$a_1 a_3$							
$a_1 a_4$							
$a_1 a_5$							
$a_2 a_1$							
$a_2 a_3$							
$a_2 a_4$							
$a_2 a_5$							
$a_3 a_1$							
$a_3 a_2$							
$a_3 a_4$							
$a_3 a_5$							
$a_4 a_1$							
$a_4 a_2$							
$a_4 a_3$							
$a_4 a_5$							
$a_5 a_1$							
$a_5 a_2$							
$a_5 a_3$							
$a_5 a_4$							

## Risultato

Al termine della procedura, il risultato è il seguente:

$$P(A)^+ = \{a_4\} \succ \{a_2\} \succ \{a_1, a_3\} \succ \{a_5\}$$

$$P(A)^- = \{a_4\} \succ \{a_2\} \succ \{a_1, a_3\} \succ \{a_5\}.$$

Siccome  $P(A)^+ \equiv P(A)^-$ , il risultato finale coincide con i due precedenti. Ciò significa che il giornale, cui affidare preferibilmente la campagna pubblicitaria, è  $a_4$ . In caso sorgessero non previste difficoltà, può risultare utile rivolgersi ad  $a_2$ . Il giornale  $a_5$  è sicuramente il meno affidabile, mentre risulta difficile distinguere  $a_1$  da  $a_3$ .



### Esempio 2.4.2 – Strategie di Trattamento dei Rifiuti

Dovendo adottare una strategia complessiva di trattamento dei rifiuti urbani in grado di risolvere nel medio-lungo termine i problemi dell'intera area, sono stati individuati cinque criteri e su di essi sono state valutate le cinque diverse strategie  $a_1$ ,  $a_2$ ,  $a_3$ ,  $a_4$ ,  $a_5$  (tabella E2.4.3). Considerando un insieme di discordanza sul criterio "Impatto ambientale" costituito dalle coppie di livelli con uno scarto pari o superiore a 0,3, formulare indicazioni che aiutino a prendere decisioni in merito al problema.

Tabella E2.4.3: Valutazioni e parametri

Criteri	Costi per anno	Recupero energetico	Impatto ambientale	Flessibilità del sistema	Affidabilità del sistema
Unità di misura	milioni di FS	GWh	livello	grado	grado
Pesi	0,25	0,20	0,15	0,20	0,20
Strategie					
$a_1$	45	122	0,5	10	9
$a_2$	18	-75	0,7	5	6
$a_3$	35	95	0,3	6	5
$a_4$	32	88	0,5	5	7
$a_5$	35	95	0,6	7	5

### Osservazione

L'enunciato del veto è formulato in maniera differente rispetto all'esempio proposto nel testo. In corrispondenza dello scarto è necessario definire le coppie di valori che costituiscono l'insieme di discordanza.

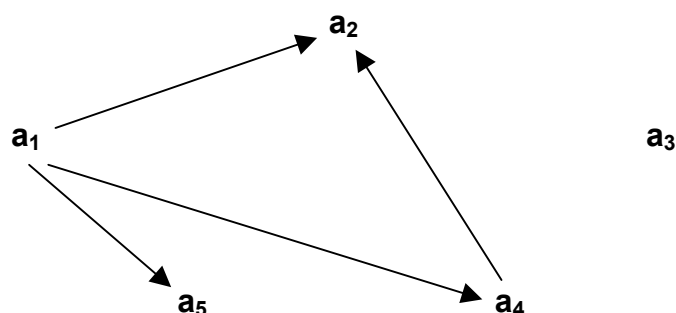
Questo esempio è riferito ad un caso reale sviluppato in Svizzera (Simos, 1990) con più criteri e strategie. L'aver ridotto il numero dei criteri può portare a risultati più incerti, perché mancano elementi di confronto tra le azioni.

## Fase I

Tabella E2.4.4: Fase I di ELECTRE II

	$J_+$	$J_+$	$J_-$	$P^+ \geq P^-$	$P^+ + P^-$	VETO	S
$a_1, a_2$	2, 3, 4, 5	/	1	sì	0,75		$a_1 S a_2$
$a_1, a_3$	2, 4, 5	/	1, 3	sì	0,60		
$a_1, a_4$	2, 4, 5	3	1	sì	0,75		$a_1 S a_4$
$a_1, a_5$	2, 3, 4, 5	/	1	sì	0,75		$a_1 S a_5$
$a_2, a_1$	1	/	2, 3, 4, 5	no			
$a_2, a_3$	1, 5	/	2, 3, 4	no		sì	
$a_2, a_4$	1	4	2, 3, 5	no			
$a_2, a_5$	1, 5	/	2, 3, 4	no			
$a_3, a_1$	1, 3	/	2, 4, 5	no			
$a_3, a_2$	2, 3, 4	/	1, 5	sì	0,55		
$a_3, a_4$	2, 3, 4	/	1, 5	sì	0,55		
$a_3, a_5$	3	1, 2, 5	4	no			
$a_4, a_1$	1	3	2, 4, 5	no			
$a_4, a_2$	2, 3, 5	4	1	sì	0,75		$a_4 S a_2$
$a_4, a_3$	1, 5	/	2, 3, 4	no			
$a_4, a_5$	1, 3, 5	/	2, 4	sì	0,60		
$a_5, a_1$	1	/	2, 3, 4, 5	no			
$a_5, a_2$	2, 3, 4	/	1, 5	sì	0,55		
$a_5, a_3$	4	1, 2, 5	3	sì	0,85	sì	
$a_5, a_4$	2, 4	/	1, 3, 5	no			

Si adotta una soglia forte  $c_f = 0,75$  e la soglia debole da adottare è 0,60, in assenza di valori maggiori prossimi alla soglia naturale di  $2/3$ .



## Fase II

Il grafo di surclassamento non presenta circuiti. La presenza di un nodo isolato rende più lenta la procedura di classificazione.

### Classificazione dall'alto $P(A)^+$

#### Iterazione 1

$$A^1 = A$$

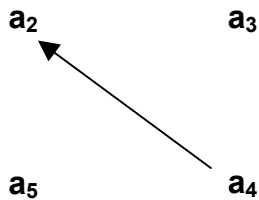
$$D_1^+ = \{a_1, a_3\}$$

Con il surclassamento debole si ottiene:  $C_1^+ = \{a_1\}$ .

#### Iterazione 2

$$A^2 = A^1 \setminus C_1^+ = \{a_2, a_3, a_4, a_5\}$$

$$D_2^+ = \{a_3, a_4, a_5\}$$



Con il surclassamento debole si ottiene:  $C_2^+ = \{a_3, a_4\}$ .

#### Iterazione 3

$$A^3 = A^2 \setminus C_2^+ = \{a_2, a_5\}$$

$$D_3^+ = \{a_2, a_5\}$$

$a_2$        $a_5$

Anche attivando il surclassamento debole, non si riescono a distinguere le due azioni:  $C_3^+ = \{a_2, a_5\}$ .

$$A^4 = A^3 \setminus C_3^+ = \emptyset \Rightarrow \text{STOP}$$

Alla fine della procedura, il risultato è:

$$P(A)^+ = \{a_1\} \succ \{a_3, a_4\} \succ \{a_2, a_5\}.$$

## Classificazione dal basso $P(A)^-$

### Iterazione 1

$$A^1 = A$$

$$D_1^- = \{a_2, a_3, a_5\}$$

Anche attivando il surclassamento debole, non si riescono a distinguere le due azioni:  $C_1^- = \{a_2, a_3, a_5\}$ .

### Iterazione 2

$$A^2 = A^1 \setminus C_1^- = \{a_1, a_4\}$$

$$a_1 \longrightarrow a_4 \quad C_2^- = \{a_4\}$$

$$A^3 = A^2 \setminus C_2^- = \{a_1\} \Rightarrow |A^3| = 1 \Rightarrow \text{STOP}$$

Il preordine dal basso  $P(A)^-$  risulta pertanto essere:

$$P(A)^- = \{a_1\} \succ \{a_4\} \succ \{a_2, a_3, a_5\}.$$

## Risultato

a

↓

▼

a

↓

▼

a

↓

▼

a<sub>2</sub>,

$$P(A)^+ = \{a_1\} \succ \{a_3, a_4\} \succ \{a_2, a_5\}$$

$$P(A)^- = \{a_1\} \succ \{a_4\} \succ \{a_2, a_3, a_5\}$$

Essendo i preordini dall'alto e dal basso simili (l'unica differenza è che uno presenta  $a_3$  ed  $a_4$  nella stessa posizione, mentre l'altro le pone in due classi successive), possiamo definire il preordine finale (rappresentato qui a lato) senza particolari difficoltà.

Nell'applicazione è stata adottata come soglia debole  $c_d = 0,60$ , valore minimo accettabile considerando i dati in tabella. Comparando pochi valori corrispondenti a 0,60 e molti pari a 0,55, si può provare ad utilizzare quest'ultimo valore come soglia debole, per effettuare un'analisi di robustezza del risultato appena ottenuto. A tal fine diventa necessario verificare anche quale risultato si otterrebbe per 0,67; lo si propone come esercizio.

### Esercizio 2.4.3 – Localizzazione di un impianto per smaltire rifiuti

Possibili sedi di impianti di smaltimento rifiuti sono state valutate in relazione a cinque criteri, come mostrato nella tabella E2.4.5. Sono definite discordanze sul criterio  $g_1$ , corrispondenti alle coppie di valori estremi sulla scala, e sul criterio  $g_3$ , per scarti pari o superiori a 100. Si chiede di applicare il metodo ELECTRE II e di proporre una classificazione delle possibili sedi dalla migliore alla peggiore, a partire dai risultati ottenuti.

Tabella E2.4.5: Valutazioni e parametri

Criteri	$g_1$ (-)	$g_2$ (+)	$g_3$ (+)	$g_4$ (+)	$g_5$ (-)
<b>Pesi</b>	<b>0,21</b>	<b>0,18</b>	<b>0,20</b>	<b>0,16</b>	<b>0,25</b>
<b>Sedi</b>					
$a_1$	Medio	2	100	Buono	3
$a_2$	Medio-alto	5	55	Sufficiente	2,6
$a_3$	Limitato	1	55	Scarso	4,2
$a_4$	Alto	5	180	Scarso	5
$a_5$	Limitato	4	50	Sufficiente	4,7
<b>Ins. Disc.</b>	(A, L) $\geq 100$				



## Fase I

Tabella E2.4.6: Fase I di ELECTRE II

	$J_+$	$J_+$	$J_-$	$P^+ \geq P^-$	$P^+ + P^-$	VETO	S
$a_1 a_2$	1, 3, 4	/	2, 5				
$a_1 a_3$	2, 3, 4, 5	/	1				
$a_1 a_4$	1, 4, 5	/	2, 3				
$a_1 a_5$							
$a_2 a_1$	2, 5	/	1, 3, 4				
$a_2 a_3$	2, 4, 5	3	1				
$a_2 a_4$	1, 4, 5	2	3				
$a_2 a_5$							
$a_3 a_1$	1	/	2, 3, 4, 5				
$a_3 a_2$	1	3	2, 4, 5				
$a_3 a_4$	1, 5	4	2, 3				
$a_3 a_5$							
$a_4 a_1$	2, 3	/	1, 4, 5				
$a_4 a_2$	3	2	1, 4, 5				
$a_4 a_3$	2, 3	4	1, 5				
$a_4 a_5$							
$a_5 a_1$							
$a_5 a_2$							
$a_5 a_3$							
$a_5 a_4$							

## Risultato

$a_1,$



$a$



$a$



$a$

$$P(A)^+ = \{a_1, a_2\} \succ \{a_3, a_4\} \succ \{a_5\}$$

$$P(A)^- = \{a_1, a_2\} \succ \{a_3\} \succ \{a_4, a_5\}$$



**Esercizio 2.4.4 – Domanda di approfondimento sull'esempio svolto nel testo**

Per rendere più robusta l'indicazione fornita dal risultato ottenuto, si potrebbe passare all'analisi di sensitività del risultato, in cui conviene verificare se variando la soglia debole i risultati non cambiano e poi, simulando un'analisi effettuata in interazione con il decisore, definire possibili intervalli di variabilità dei pesi e poi farli variare in maniera combinata ed analizzare comparativamente i risultati.



## 2.5 Metodo ELECTRE III

Questo metodo si distingue da ELECTRE II principalmente perché utilizza gli pseudo-criteri, cioè criteri a cui sono associabili elementi di incertezza informativa e preferenziale, e perché quindi modella, nella prima fase del metodo, un surclassamento *sfumato* (o fuzzy, o flou), che associa a ciascuna relazione tra coppie ordinate di azioni una funzione caratteristica  $\delta(a, a')$ , che esprime il *grado di credibilità* della relazione di surclassamento e che può variare nell'intervallo  $[0,1]$ . Il grafo di surclassamento risultante dalla Fase I del metodo avrà quindi tutti i nodi collegati da archi valutati, a cui cioè è associato un grado di credibilità di surclassamento; la matrice di incidenza associata al grafo avrà come elemento  $m_{ij}$  il valore assunto da  $\delta(a_i, a_j)$ . La procedura per definire  $\delta(a, a')$  è riportata nella figura 7 e prevede che si calcolino più indici e che da questi si ottenga  $\delta(a, a')$ .

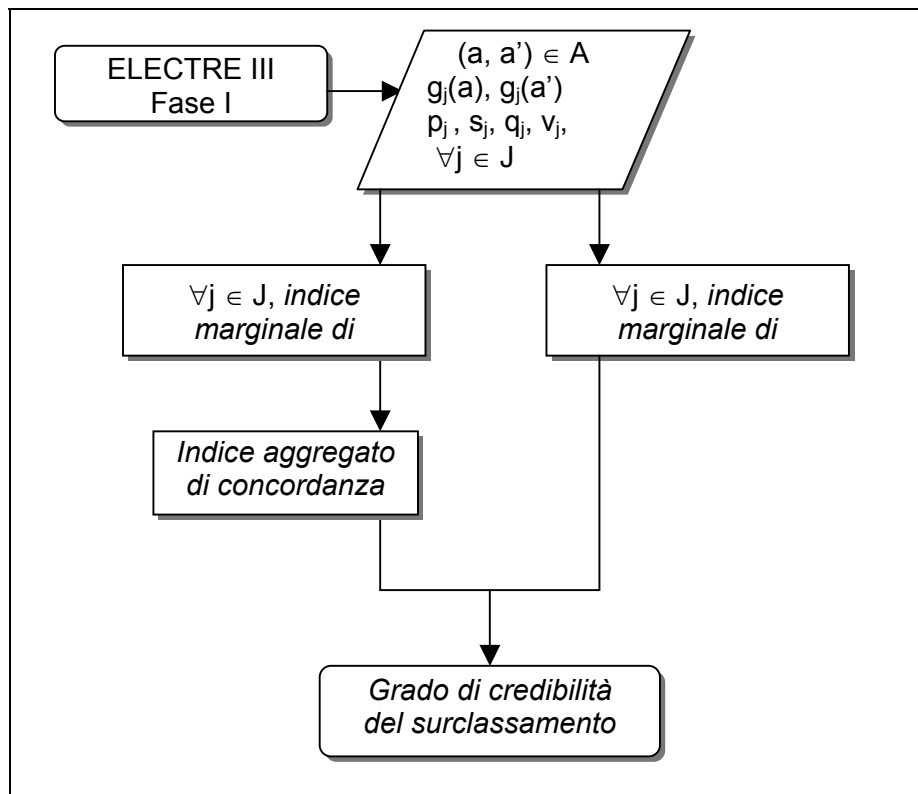


Figura 7: Procedura per la definizione del grado di credibilità del surclassamento

In relazione ad uno pseudo-criterio sono definite una soglia di *preferenza* ( $s_j$ ), che serve a distinguere tra una situazione di preferenza in senso stretto ed una di presunzione di preferenza, relazione mista che include le relazioni elementari di Indifferenza e di preferenza debole ( $Q$ ) senza distinguerle, ed una soglia di *indifferenza* ( $q_j$ ), che caratterizza situazioni di incertezza informativa in cui è impossibile distinguere (Indifferenza) tra coppie di valori possibili.

## Dispense Integrative

Per calcolare l'indice marginale di concordanza  $c_j(a, a')$ , data la coppia di azioni  $(a, a')$ , si potranno verificare le seguenti situazioni :

- $\forall j \in J$ , se  $g_j(a) \geq g_j(a')$ ,  $a$  surclassa marginalmente  $a'$ ,  $a S^j a' \Rightarrow c_j(a, a') = 1$ ;
- se  $g_j(a) < g_j(a')$ , si può ancora fare un'affermazione di surclassamento marginale di  $a$  su  $a'$ , e precisamente, posto  $u = g_j(a') - g_j(a) > 0$ ,
  - se  $u \leq q_j [g_j(a')]$   $\Rightarrow c_j(a, a') = 1$ ,
  - se  $u \geq s_j [g_j(a')]$   $\Rightarrow c_j(a, a') = 0$ ,
  - se  $q_j [g_j(a')] < u < s_j [g_j(a')]$   $\Rightarrow c_j(a, a')$  decresce da 1 a 0

(ad esempio linearmente) al crescere di  $g_j(a')$  da  $[g_j(a') + q^j]$  a  $[g_j(a') + s^j]$ , come in figura 8.



Figura 8: Indice marginale di concordanza

L'indice di concordanza aggregata  $c(a, a')$  è dato dalla seguente somma pesata:

$$c(a, a') = \sum_{j \in J} p_j \cdot c_j(a, a').$$

L'indice marginale di discordanza  $D_j(a, a')$  è una funzione di  $g_j(a')$ , monotona non decrescente, che può assumere valori compresi nell'intervallo  $[0, 1]$  e, in particolare, diversi da zero solo quando  $c_j(a, a')$  è nullo.

Definita sul criterio una soglia di veto ( $v_j$ ),

$$v_j[g_j(a)] \geq s_j [g_j(a)] ,$$

- se  $g_j(a') \geq g_j(a) + v_j [g_j(a)] \Leftrightarrow D_j(a, a') = 1$  ;
- se  $v_j[g_j(a)] > s_j [g_j(a)]$  e  $s_j [g_j(a')] < g_j(a') - g_j(a) < v_j [g_j(a')]$   
 $\Rightarrow D_j(a, a')$  cresce da 0 a 1 (ad esempio linearmente) al crescere di  $g_j(a')$  da  $[g_j(a') + s_j]$  a  $[g_j(a') + v_j]$ , come illustrato in figura 9.

## Dispense Integrative

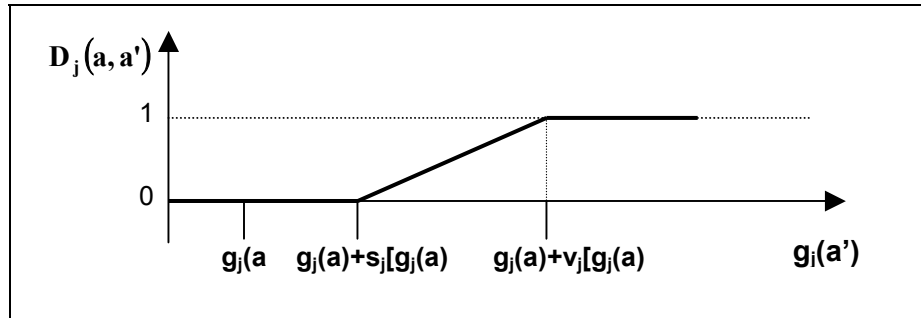


Figura 9: Indice marginale di discordanza

Il **grado di credibilità**  $\delta(a, a')$ , noti questi indici, viene calcolato come illustrato qui di seguito.

Se  $\forall j \in J \quad D_j(a, a') = 0$  si assume  $\delta(a, a') = c(a, a')$  ;

se  $\exists j \in J : D_j(a, a') > 0$  allora:

- se  $D_j(a, a') < c(a, a')$  si assume  $\delta(a, a') = c(a, a')$ ,
- se  $\exists j^* \in J^* \subseteq J : D_{j^*}(a, a') \geq c(a, a')$  si assume

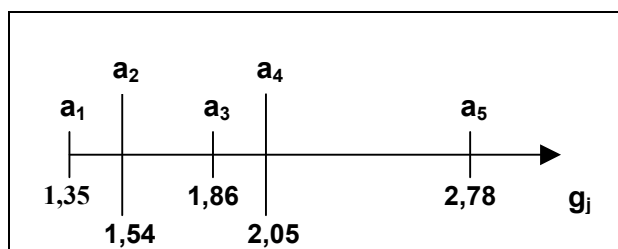
$$\delta(a, a') = c(a, a') \cdot \prod_{j^* \in J^*} \frac{1 - D_{j^*}(a, a')}{1 - c(a, a')}.$$

### Esempio

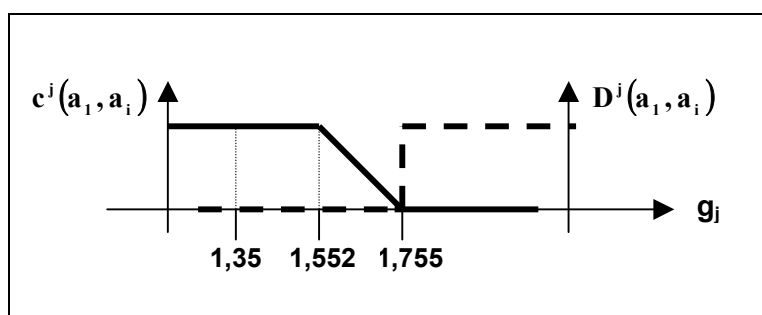
Cinque alternative di un insieme  $A$  sono state valutate, come riportato nella tabella 3, su uno pseudocriterio  $g_j$ , con scala  $E_j = [1, 4]$ . Per sviluppare un esempio di calcolo si esaminano gli indici di concordanza e di discordanza del surclassamento di  $a_1$  e di  $a_3$  rispetto ad  $a_i$  e di  $a_i$  rispetto ad  $a_1$  e ad  $a_3$ , sul criterio  $g_j$ , su cui sono definite come soglie  $q(a) = 15\% g_j(a)$  e  $s(a) = v(a) = 30\% g_j(a)$ .

Tabella 3: Valutazioni delle alternative sul criterio  $g_j$

Azioni	$a_1$	$a_2$	$a_3$	$a_4$	$a_5$
$g_j(a)$	1,35	1,54	1,86	2,05	2,78



**Figura 10: Posizione delle azioni secondo il criterio  $g_j$**



**Figura 11: Posizione delle soglie rispetto a  $g_j(a_1)$**

Nella figura 11 i valori mostrati corrispondono alle seguenti soglie:

$$1,35 = g_j(a_1)$$

$$1,5525 = g_j(a_1) + q(a_1) = g_j(a_1) + 0,15 \cdot g_j(a_1) = 1,35 + 0,15 \cdot 1,35$$

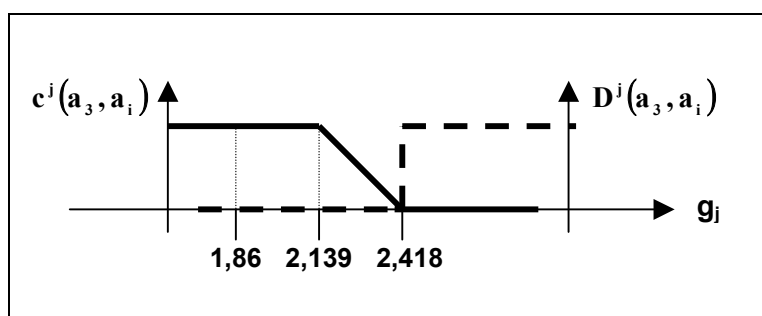
$$1,755 = g_j(a_1) + s(a_1) = g_j(a_1) + v(a_1) = g_j(a_1) + 0,3 \cdot g_j(a_1) = 1,35 + 0,3 \cdot 1,35.$$

**Tabella 4: Soglie ed indici per le coppie  $(a_1, a_i)$**

	$c^j(a_1, a_i)$	$D^j(a_1, a_i)$
$a_2$	1	0
$a_3$	0	1
$a_4$	0	1
$a_5$	0	1

**Tabella 5: Soglie ed indici per le coppie  $(a_i, a_1)$**

	$g_j(a_i) + 0,15 \cdot g_j(a_i)$	$g_j(a_i) + 0,3 \cdot g_j(a_i)$	$c^j(a_i, a_1)$	$D^j(a_i, a_1)$
$a_2$	1,771	2,002	1	0
$a_3$	2,139	2,418	1	0
$a_4$	2,3575	2,665	1	0
$a_5$	3,197	3,614	1	0



**Figura 12: Posizione delle soglie rispetto a  $g_j(a_3)$**

Nella figura 12 i valori mostrati corrispondono alle seguenti soglie:

$$1,86 = g_j(a_3)$$

$$2,139 = g_j(a_3) + q(a_3) = g_j(a_3) + 0,15 \cdot g_j(a_3) = 1,86 + 0,15 \cdot 1,86$$

$$2,418 = g_j(a_3) + s(a_3) = g_j(a_3) + v(a_3) = g_j(a_3) + 0,3 \cdot g_j(a_3) = 1,86 + 0,3 \cdot 1,86$$

**Tabella 6: Soglie ed indici per le coppie  $(a_3, a_i)$**

	$c^j(a_3, a_i)$	$D^j(a_3, a_i)$
$a_1$	1	0
$a_2$	1	0
$a_4$	1	0
$a_5$	0	1

**Tabella 7: Soglie ed indici per le coppie  $(a_i, a_3)$**

	$g_j(a_i) + 0,15 \cdot g_j(a_i)$	$g_j(a_i) + 0,3 \cdot g_j(a_i)$	$c^j(a_i, a_3)$	$D^j(a_i, a_3)$
$a_1$	1,5525	1,755	0	1
$a_2$	1,771	2,002	0,615	0
$a_4$	2,3575	2,665	1	0
$a_5$	3,197	3,614	1	0

L'indice  $c^j(a_2, a_3)$  è stato ottenuto dalla proporzione  $x:1 = 0,142:0,231$ , in base a due triangoli rettangoli simili, come si vede nella figura 12.

### ***Fase II di ELECTRE III***

Anche ELECTRE III prevede, per ottenere l'ordinamento globale delle azioni, la costruzione di classificazioni sia dall'alto che dal basso. E' a tal fine impiegato un *algoritmo di distillazione* che costruisce classi di preferenza attivando in successione livelli di credibilità di surclassamento sempre più bassi, detti *di separazione*, che permettono di considerare, ad ogni livello, solo le relazioni significative per il livello esaminato. Tali livelli dipendono dalla *soglia di discriminazione*  $s(\delta)$ , cioè dalla distanza massima tra due credibilità che permette loro di essere considerate ancora dello stesso ordine di grandezza.

L'algoritmo di distillazione distingue le azioni in base alla loro *qualificazione*, che è maggiore 'se l'azione ha la capacità di surclassarne molte altre e di non essere surclassata o di esserlo da poche'.  $\delta$ -*qualificazione*, definita come segue per ogni iterazione della procedura sia nell'ordinamento dall'alto che in quello dal basso, che termina quando non c'è più alcun elemento nell'insieme A delle azioni oppure si è raggiunto un livello di separazione pari a zero ( $\delta_1=0$ ).

Nella distillazione, sia dall'alto che dal basso, il primo valore da individuare è il *grado di credibilità massima*  $\delta_0$ , identificabile nella matrice

$$\delta_0 = \max_{(a, a') \in A^k} \delta(a, a').$$

A questo si sottrae la soglia di discriminazione  $s(\delta)$  e così si calcola  $\delta'_0$ :

$$\delta'_0 = \delta_0 - s(\delta).$$

$\delta'_0$  permette di identificare il primo *livello di separazione*  $\delta_1$ , cioè il più alto grado di credibilità, presente nella matrice, inferiore a  $\delta'_0$ ; se non esiste più alcun valore in matrice, si pone il livello di separazione uguale a zero.

$$\delta_1 = \begin{cases} \max_{(a, a') \in \Omega} \delta(a, a') & , \text{ con } \Omega = \{(a, a') \mid \delta(a, a') < \delta'_0\} \neq \emptyset \\ 0 & , \text{ se } \Omega = \emptyset \end{cases}$$

dove  $\Omega$  è il sottoinsieme di tutte le coppie di azioni con grado di credibilità inferiore a  $\delta'_0$ .

Rispetto a  $\delta_1$ , si può calcolare la  $\delta_1$ -qualificazione di ogni azione.

Per  $\delta$ -*qualificazione*  $q_B^\delta(a)$  di una azione "a", appartenente ad un insieme B generico, si intende il valore

$$q_B^\delta(a) = p_B^\delta(a) - d_B^\delta(a),$$

dove  $p_B^\delta(a)$  è la  $\delta$ -*potenza* dell'azione "a", cioè il numero di azioni in B surclassate da "a" con grado di credibilità superiore a  $\delta$  (il livello di separazione corrente) e con uno scarto, tra i relativi gradi di credibilità, superiore alla soglia di discriminazione:

$$p_B^\delta(a) = \left| \left\{ a' \in B : \delta(a, a') > \delta \text{ e } \delta(a, a') - \delta(a', a) > s(\delta) \right\} \right|,$$

## Dispense Integrative

e dove  $d_B^\delta(a)$  è la  $\delta$ -debolezza dell'azione "a", cioè il numero di azioni in B che surclassano "a", con grado di credibilità superiore a  $\delta$  (il livello di separazione corrente) e con uno scarto, tra i relativi gradi di credibilità, superiore alla soglia di discriminazione:

$$d_B^\delta(a) = \left| \left\{ a' \in B : \delta(a', a) > \delta \text{ e } \delta(a', a) - \delta(a, a') > s(\delta) \right\} \right|.$$

L'algoritmo di distillazione dall'alto classifica le azioni in base alla qualificazione massima, secondo la regola:

$$q^+ = \max_{a \in A^k} q^{\delta_1}(a), \quad D_1^+ = \left\{ a \in A : q^{\delta_1}(a) = q^+ \right\}$$

dove  $D_1^+$  sarà il *primo distillato dall'alto* ed ogni classe  $C_k^+$  sarà costruita partendo dall'alto su questo distillato; qualora  $D_1^+$  contenga soltanto una azione, allora si pone  $C_k^+ = D_1^+$ , altrimenti si ripete la procedura finora descritta, però applicata alle azioni comprese in  $D_1^+$ , finché esso non conterrà che un'azione oppure si giunge al livello di separazione nullo. L'insieme delle azioni per l'iterazione successiva è

$$A^{k+1} = A^k \setminus C_k^+.$$

Per la distillazione dal basso, il procedimento è simile al precedente; la selezione, però, è effettuata in base alla qualificazione minima secondo la regola:

$$q^- = \min_{a \in A^k} q^{\delta_1}(a), \quad D_1^- = \left\{ a \in A : q^{\delta_1}(a) = q^- \right\}.$$

In questo caso  $D_1^-$  sarà il *primo distillato dal basso*, e ciascuna classe  $C_k^-$  sarà costruita partendo dal basso. L'insieme delle azioni per l'iterazione successiva è

$$A^{k+1} = A^k \setminus C_k^-.$$

Ottenuti i due preordini  $P(A)^+$  e  $P(A)^-$  dagli algoritmi di distillazione, si procederà come in ELECTRE II per individuare il preordine finale  $P(A)$ .

### Esempio

In tabella 8 è proposta la matrice di incidenza associata al grafo di surclassamento ottenuto con la prima fase del metodo ELECTRE III. I gradi di credibilità del surclassamento  $\delta(a, a')$  della matrice sono da usare come input per la Fase II di ELECTRE III, in cui l'algoritmo di distillazione permette di ottenere una graduatoria (cioè un ordinamento delle azioni in posizioni o classi distinte; si parlerà di preordine se alcune azioni compaiono a pari merito nella stessa posizione o classe) sia dall'alto (dalla migliore alla peggiore) sia dal basso (dalla peggiore alla migliore). La distillazione viene perciò attivata due volte, la prima – dall'alto – alla ricerca delle azioni migliori, la seconda – dal basso – alla ricerca delle peggiori.



## Dispense Integrative

**Tabella 8: Gradi di credibilità di surclassamento**

$\delta(a, a')$	$a_1$	$a_2$	$a_3$	$a_4$	$a_5$	$a_6$
$a_1$	-	1	0,60	0,75	0,30	0
$a_2$	0,50	-	0,90	0,65	0,90	0,65
$a_3$	0	0,30	-	0,65	0,75	0,15
$a_4$	0,50	0,85	0,75	-	1	0,75
$a_5$	0	0	0,75	0,10	-	0,30
$a_6$	0,15	0,80	0,10	0,30	0,80	-

Sviluppo con la soglia  $s(\delta) = 0,15$

### Distillazione dall'alto

Si parte dall'insieme  $A = \{a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6\}$ .

Iterazione 1

$$A^1 = A$$

Il grado di credibilità massima  $\delta_0$  individuabile nella tabella 4:

$$\delta_0 = \max_{(a, a') \in A^1} \delta(a, a') = 1.$$

Si sottrae la soglia di discriminazione  $s(\delta)$  e così si calcola  $\delta'_0$ :

$$\delta'_0 = \delta_0 - s(\delta) = 1 - 0,15 = 0,85.$$

$\delta'_0$  permette di calcolare il primo livello di separazione  $\delta_1$  per questa iterazione:

$$\delta_1 = \begin{cases} \max_{(a, a') \in \Omega} \delta(a, a'), & \text{con } \Omega = \{(a, a') \mid \delta(a, a') < \delta'_0\} \neq \emptyset \\ 0, & \text{se } \Omega = \emptyset \end{cases}.$$

$\Omega$  è il sottoinsieme di tutte le coppie di valori tali che il loro grado di credibilità sia inferiore a  $\delta'_0$ .

Dalla matrice, proposta nella tabella 8, risulta che

$$\delta_1 = 0,80.$$

Rispetto a questo primo livello di separazione, si realizza il grafo di surclassamento per le azioni appartenenti ad  $A^1$ , inserendo un arco orientato da "a", verso "a'", tra le coppie (a, a') per cui

$$\delta(a, a') > \delta_1 \text{ e } \delta(a, a') - \delta(a', a) > s(\delta).$$

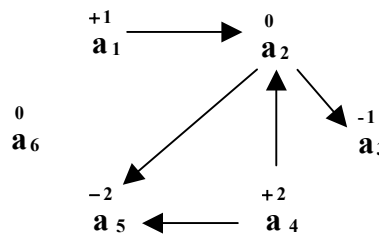
Questo arco orientato rappresenta il surclassamento tra le due azioni al livello di separazione convenuto.

La qualificazione "q" d'una azione è espressa come

$$q = (\text{numero degli archi uscenti}) - (\text{numero degli archi entranti})$$

ed indicata dal grado associato ad ogni nodo-azione del grafo.

## Dispense Integrative



L'azione dalla massima qualificazione è  $a_4$ , che viene posta nella prima classe dall'alto.

$$C_1^+ = \{a_4\}$$

### Iterazione 2

L'insieme di azioni per questa iterazione viene ottenuto da quello di partenza, avendo escluso l'azione, o le azioni, appena attribuita alla prima classe dall'alto.

$$A^2 = A^1 \setminus C_1^+ = \{a_1, a_2, a_3, a_5, a_6\}$$

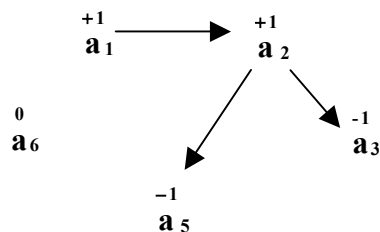
$\delta(a, a')$	$a_1$	$a_2$	$a_3$	$a_5$	$a_6$
$a_1$	-	1	0,60	0,30	0
$a_2$	0,50	-	0,90	0,90	0,65
$a_3$	0	0,30	-	0,75	0,15
$a_5$	0	0	0,75	-	0,30
$a_6$	0,15	0,80	0,10	0,80	-

$$\delta_0 = \max_{(a, a') \in A^2} \delta(a, a') = 1$$

$$\delta'_0 = \delta_0 - s(\delta) = 1 - 0,15 = 0,85$$

$$\delta_1 = 0,80$$

In base a questo livello di separazione, si costruisce il seguente grafo di surclassamento.



Ci sono due azioni dalla qualificazione più alta,  $a_1$  ed  $a_2$ .

$$D_2^+ = \{a_1, a_2\}$$

$$|D_2^+| \neq 1$$

E' necessario effettuare una sottodistillazione tra queste due azioni. Si parte da  $\delta_1$  e gli viene sottratta

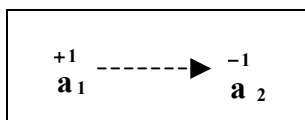
la soglia di discriminazione.

$$\delta_1 = 0,80$$

$$\delta'_1 = \delta_1 - s(\delta) = 0,80 - 0,15 = 0,65$$

In base a questo valore, il livello di separazione per la sottodistillazione tra  $a_1$  e  $a_2$  è  $\delta_2 = 0,50$ .

Rispetto a questo livello, si traccia il grafo di surclassamento tra  $a_1$  e  $a_2$ .



L'azione dalla qualificazione più alta è  $a_1$ .

$$C_2^+ = \{a_1\}$$

### Iterazione 3

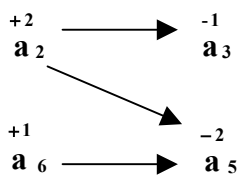
$$A^3 = A^2 \setminus C_2^+ = \{a_2, a_3, a_5, a_6\}$$

$\delta(a, a')$	$a_2$	$a_3$	$a_5$	$a_6$
$a_2$	-	0,90	0,90	0,65
$a_3$	0,30	-	0,75	0,15
$a_5$	0	0,75	-	0,30
$a_6$	0,80	0,10	0,80	-

$$\delta_0 = \max_{(a, a') \in A^3} \delta(a, a') = 0,90$$

$$\delta'_0 = \delta_0 - s(\delta) = 0,90 - 0,15 = 0,75$$

$$\delta_1 = 0,65$$



Occorre notare che lo scarto tra i gradi relativi alla coppia  $(a_3, a_5)$  e quello della coppia  $(a_5, a_3)$  è nullo, mentre quello tra i gradi relativi alla coppia  $(a_6, a_2)$  è pari alla soglia di discriminazione.

$$C_3^+ = \{a_2\}$$

### Iterazione 4

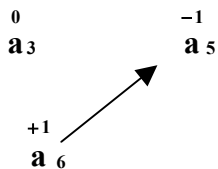
$$A^4 = A^3 \setminus C_3^+ = \{a_3, a_5, a_6\}$$

$\delta(a, a')$	$a_3$	$a_5$	$a_6$
$a_3$	-	0,75	0,15
$a_5$	0,75	-	0,30
$a_6$	0,10	0,80	-

$$\delta_0 = \max_{(a, a') \in A^4} \delta(a, a') = 0,80$$

$$\delta'_0 = \delta_0 - s(\delta) = 0,80 - 0,15 = 0,65$$

$$\delta_1 = 0,30$$



$$C_4^+ = \{a_6\}$$

### Iterazione 5

$$A^5 = A^4 \setminus C_4^+ = \{a_3, a_5\}$$

$\delta(a, a')$	$a_3$	$a_5$
$a_3$	-	0,75
$a_5$	0,75	-

$$\delta_0 = \max_{(a, a') \in A^5} \delta(a, a') = 0,75$$

$$\delta'_0 = \delta_0 - s(\delta) = 0,75 - 0,15 = 0,60$$

$$\delta_1 = 0$$



Siccome i due gradi di credibilità presentano uno scarto nullo, le due azioni finiscono nella stessa classe.

$$C_5^+ = \{a_3, a_5\}$$

## Iterazione 6

$$A^6 = A^5 \setminus C_5^+ = \emptyset \Rightarrow \text{STOP}$$

Al termine della procedura, è possibile scrivere il risultato  $P(A)^+$  della distillazione dall'alto, che ordina le azioni dalla migliore alla peggiore:

$$P(A)^+ = \{a_4\} \succ \{a_1\} \succ \{a_2\} \succ \{a_6\} \succ \{a_3, a_5\}.$$

## Distillazione dal basso

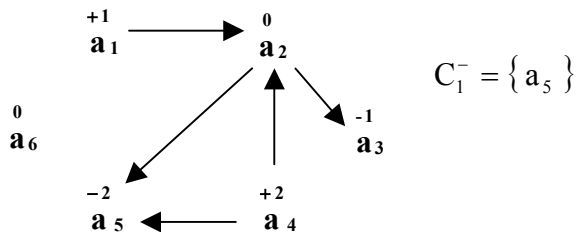
Adesso, seguendo la procedura di distillazione dal basso, ad ogni iterazione si cerca l'azione dalla qualificazione minima. Si inizia nuovamente da  $A = \{a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6\}$  e la prima iterazione coincide con quella della distillazione dall'alto.

### Iterazione 1

$$\delta_0 = \max_{(a, a') \in A^1} \delta(a, a') = 1$$

$$\delta'_0 = \delta_0 - s(\delta) = 1 - 0,15 = 0,85$$

$$\delta_1 = 0,80$$



### Iterazione 2

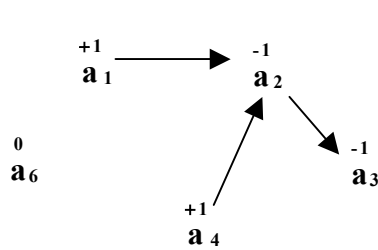
$$A^2 = A^1 \setminus C_1^- = \{a_1, a_2, a_3, a_4, a_6\}$$

$\delta(a, a')$	$a_1$	$a_2$	$a_3$	$a_4$	$a_6$
$a_1$	-	1	0,60	0,75	0
$a_2$	0,50	-	0,90	0,65	0,65
$a_3$	0	0,30	-	0,65	0,15
$a_4$	0,50	0,85	0,75	-	0,75
$a_6$	0,15	0,80	0,10	0,30	-

$$\delta_0 = \max_{(a, a') \in A^1} \delta(a, a') = 1$$

$$\delta'_0 = \delta_0 - s(\delta) = 1 - 0,15 = 0,85$$

$$\delta_1 = 0,80$$



$$D_2^- = \{a_2, a_3\}$$

$$|D_2^-| \neq 1$$

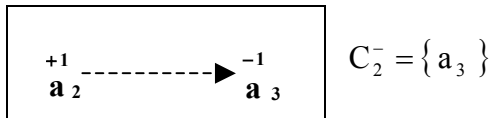
Occorre una sottodistillazione tra queste azioni.

$$\delta_1 = 0,80$$

$$\delta'_1 = \delta_1 - s(\delta) = 0,80 - 0,15 = 0,65$$

$$\delta_2 = 0,30$$

Rispetto a questo secondo livello di distillazione, si traccia il seguente grafo di surclassamento.



Iterazione 3

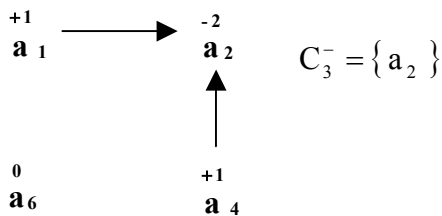
$$A^3 = A^2 \setminus C_2^- = \{a_1, a_2, a_4, a_6\}$$

$\delta(a, a')$	$a_1$	$a_2$	$a_4$	$a_6$
$a_1$	-	1	0,75	0
$a_2$	0,50	-	0,65	0,65
$a_4$	0,50	0,85	-	0,75
$a_6$	0,15	0,80	0,30	-

$$\delta_0 = \max_{(a, a') \in A^3} \delta(a, a') = 1$$

$$\delta'_0 = \delta_0 - s(\delta) = 1 - 0,15 = 0,85$$

$$\delta_1 = 0,80$$



$$C_3^- = \{a_2\}$$

Iterazione 4

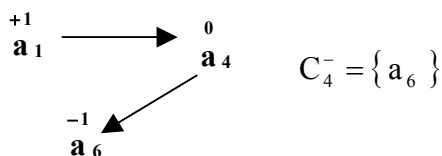
$$A^4 = A^3 \setminus C_3^- = \{a_1, a_4, a_6\}$$

$\delta(a, a')$	$a_1$	$a_4$	$a_6$
$a_1$	-	0,75	0
$a_4$	0,50	-	0,75
$a_6$	0,15	0,30	-

$$\delta_0 = \max_{(a, a') \in A^4} \delta(a, a') = 0,75$$

$$\delta'_0 = \delta_0 - s(\delta) = 0,75 - 0,15 = 0,60$$

$$\delta_1 = 0,50$$



$$C_4^- = \{a_6\}$$



Iterazione 5

$$A^5 = A^4 \setminus C_4^- = \{a_1, a_4\}$$

$\delta(a, a')$	$a_1$	$a_4$
$a_1$	-	0,75
$a_4$	0,50	-

$$\delta_0 = \max_{(a, a') \in A^4} \delta(a, a') = 0,75$$

$$\delta'_0 = \delta_0 - s(\delta) = 0,75 - 0,15 = 0,60$$

$$\delta_1 = 0,50$$

$$\begin{matrix} +1 \\ a_1 \end{matrix} \longrightarrow \begin{matrix} -1 \\ a_4 \end{matrix} \quad C_5^- = \{a_4\}$$

Iterazione 6

$$A^6 = A^5 \setminus C_5^- = \{a_1\} \Rightarrow |A^6| = 1 \Rightarrow C_6^- = \{a_1\} \Rightarrow \text{STOP}$$

Alla fine della procedura, il risultato è

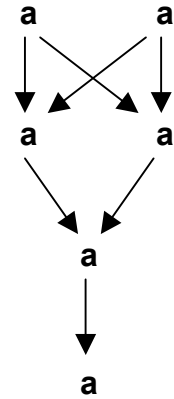
$$P(A)^- = \{a_1\} \succ \{a_4\} \succ \{a_6\} \succ \{a_2\} \succ \{a_3\} \succ \{a_5\}.$$

## Risultato

$$P(A)^+ = \{a_4\} \succ \{a_1\} \succ \{a_2\} \succ \{a_6\} \succ \{a_3, a_5\}$$

$$P(A)^- = \{a_1\} \succ \{a_4\} \succ \{a_6\} \succ \{a_2\} \succ \{a_3\} \succ \{a_5\}$$

Gli ordinamenti sono diversi in testa, mentre in coda uno presenta due azioni ex æquo e l'altro le classifica. Questo comporta che il preordine finale, il cui risultato è riportato qui a lato, presenta una incomparabilità in testa tra  $a_1$  ed  $a_4$ ; una altra incomparabilità si ottiene nella parte centrale tra le azioni  $a_2$  ed  $a_6$ , che si scambiano di posto nei due ordinamenti.



Svolgimento con soglia  $s(\delta) = 0,10$

**Tabella 9: Gradi di credibilità di surclassamento**

$\delta(a, a')$	$a_1$	$a_2$	$a_3$	$a_4$	$a_5$	$a_6$
$a_1$	-	1	0,60	0,75	0,30	0
$a_2$	0,50	-	0,90	0,65	0,90	0,65
$a_3$	0	0,30	-	0,65	0,75	0,15
$a_4$	0,50	0,85	0,75	-	1	0,75
$a_5$	0	0	0,75	0,10	-	0,30
$a_6$	0,15	0,80	0,10	0,30	0,80	-

## Distillazione dall'alto

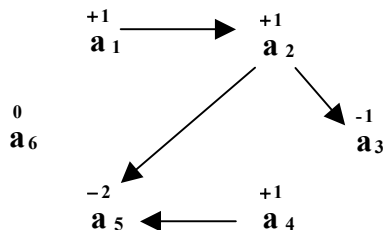
### Iterazione 1

$$A^1 = A$$

$$\delta_0 = \max_{(a, a') \in A^1} \delta(a, a') = 1$$

$$\delta'_0 = \delta_0 - s(\delta) = 1 - 0,10 = 0,90$$

$$\delta_1 = 0,85$$



Risultano tre azioni dalla massima qualificazione:  $a_1$ ,  $a_2$  ed  $a_4$ .

$$D_1^+ = \{a_1, a_2, a_4\}$$

$|D_1^+| \neq 1 \Rightarrow$  Occorre effettuare una sottodistillazione tra queste azioni.

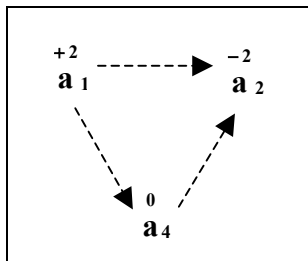
$$\delta_1 = 0,85$$

$$\delta'_1 = \delta_1 - s(\delta) = 0,85 - 0,10 = 0,75$$

$$\delta_2 = 0,65$$

## Dispense Integrative

$\delta_2$  è il secondo livello di separazione, che viene ora utilizzato per il grafo di surclassamento nella sottodistillazione.



$$C_1^+ = \{a_1\}$$

Iterazione 2

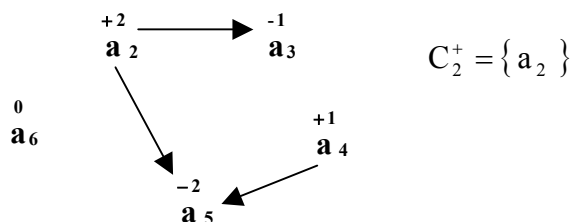
$$A^2 = A^1 \setminus C_1^+ = \{a_2, a_3, a_4, a_5, a_6\}$$

$\delta(a, a')$	$a_2$	$a_3$	$a_4$	$a_5$	$a_6$
$a_2$	-	0,90	0,65	0,90	0,65
$a_3$	0,30	-	0,65	0,75	0,15
$a_4$	0,85	0,75	-	1	0,75
$a_5$	0	0,75	0,10	-	0,30
$a_6$	0,80	0,10	0,30	0,80	-

$$\delta_0 = \max_{(a, a') \in A^2} \delta(a, a') = 1$$

$$\delta'_0 = \delta_0 - s(\delta) = 1 - 0,10 = 0,90$$

$$\delta_1 = 0,85$$



$$C_2^+ = \{a_2\}$$

Iterazione 3

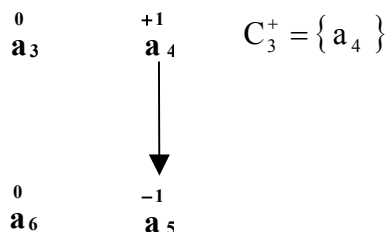
$$A^3 = A^2 \setminus C_2^+ = \{a_3, a_4, a_5, a_6\}$$

$\delta(a, a')$	$a_3$	$a_4$	$a_5$	$a_6$
$a_3$	-	0,65	0,75	0,15
$a_4$	0,75	-	1	0,75
$a_5$	0,75	0,10	-	0,30
$a_6$	0,10	0,30	0,80	-

$$\delta_0 = \max_{(a, a') \in A^3} \delta(a, a') = 1$$

$$\delta'_0 = \delta_0 - s(\delta) = 1 - 0,10 = 0,90$$

$$\delta_1 = 0,80$$



$$C_3^+ = \{a_4\}$$



### Iterazione 4

$$A^4 = A^3 \setminus C_3^+ = \{a_3, a_5, a_6\}$$

$\delta(a, a')$	$a_3$	$a_5$	$a_6$
$a_3$	-	0,75	0,15
$a_5$	0,75	-	0,30
$a_6$	0,10	0,80	-

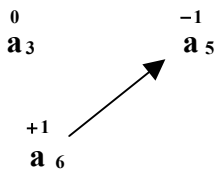
$$\delta_0 = \max_{(a, a') \in A^4} \delta(a, a') = 0,80$$

$$\delta'_0 = \delta_0 - s(\delta) = 0,80 - 0,10 = 0,70$$

$$\delta_1 = 0,30$$

Tra le azioni  $a_3$  ed  $a_5$  non è possibile distinguere un surclassamento, siccome i gradi di credibilità relativi ai loro reciproci surclassamenti possiedono lo stesso valore.

$$C_4^+ = \{a_6\}$$



### Iterazione 5

$$A^5 = A^4 \setminus C_4^+ = \{a_3, a_5\}$$

$\delta(a, a')$	$a_3$	$a_5$
$a_3$	-	0,75
$a_5$	0,75	-

$$\delta_0 = \max_{(a, a') \in A^5} \delta(a, a') = 0,75$$

$$\delta'_0 = \delta_0 - s(\delta) = 0,75 - 0,15 = 0,60$$

$$\delta_1 = 0$$

Siccome i due gradi di credibilità presentano uno scarto nullo, le due azioni finiscono nella stessa classe.

$$C_5^+ = \{a_3, a_5\}$$

### Iterazione 6

$$A^6 = A^5 \setminus C_5^+ = \emptyset \Rightarrow \text{STOP}$$

Al termine della procedura, si scrive il risultato della distillazione, ordinando le azioni dalla migliore alla peggiore:

$$P(A)^+ = \{a_1\} \succ \{a_2\} \succ \{a_4\} \succ \{a_6\} \succ \{a_3, a_5\}.$$

### Distillazione dal basso

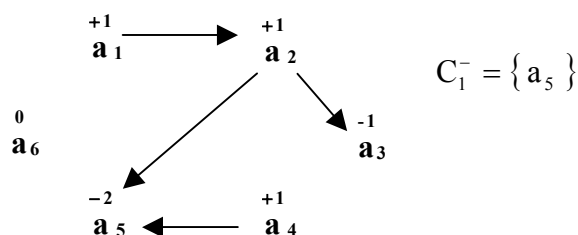
#### Iterazione 1

$$A^1 = A$$

$$\delta_0 = \max_{(a, a') \in A^1} \delta(a, a') = 1$$

$$\delta'_0 = \delta_0 - s(\delta) = 1 - 0,10 = 0,90$$

$$\delta_1 = 0,85$$



## Iterazione 2

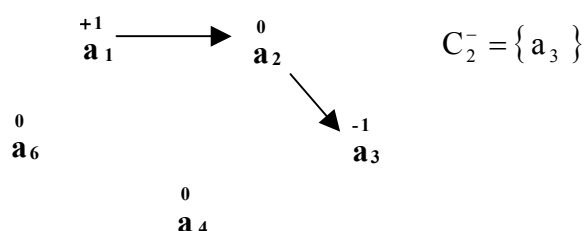
$$A^2 = A^1 \setminus C_1^- = \{a_1, a_2, a_3, a_4, a_6\}$$

$\delta(a, a')$	$a_1$	$a_2$	$a_3$	$a_4$	$a_6$
$a_1$	-	1	0,60	0,75	0
$a_2$	0,50	-	0,90	0,65	0,65
$a_3$	0	0,30	-	0,65	0,15
$a_4$	0,50	0,85	0,75	-	0,75
$a_6$	0,15	0,80	0,10	0,30	-

$$\delta_0 = \max_{(a, a') \in A^2} \delta(a, a') = 1$$

$$\delta'_0 = \delta_0 - s(\delta) = 1 - 0,10 = 0,90$$

$$\delta_1 = 0,85$$



## Iterazione 3

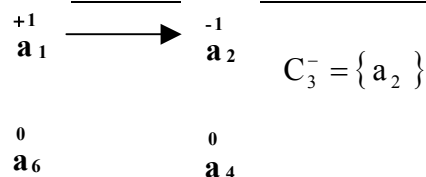
$$A^3 = A^2 \setminus C_2^- = \{a_1, a_2, a_4, a_6\}$$

$\delta(a, a')$	$a_1$	$a_2$	$a_4$	$a_6$
$a_1$	-	1	0,75	0
$a_2$	0,50	-	0,65	0,65
$a_4$	0,50	0,85	-	0,75
$a_6$	0,15	0,80	0,30	-

$$\delta_0 = \max_{(a, a') \in A^3} \delta(a, a') = 1$$

$$\delta'_0 = \delta_0 - s(\delta) = 1 - 0,10 = 0,90$$

$$\delta_1 = 0,85$$



#### Iterazione 4

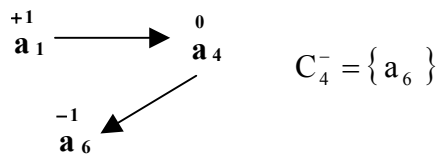
$$A^4 = A^3 \setminus C_3^- = \{a_1, a_4, a_6\}$$

$\delta(a, a')$	$a_1$	$a_4$	$a_6$
$a_1$	-	0,75	0
$a_4$	0,50	-	0,75
$a_6$	0,15	0,30	-

$$\delta_0 = \max_{(a, a') \in A^4} \delta(a, a') = 0,75$$

$$\delta'_0 = \delta_0 - s(\delta) = 0,75 - 0,10 = 0,65$$

$$\delta_1 = 0,50$$



#### Iterazione 5

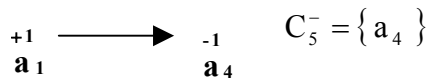
$$A^5 = A^4 \setminus C_4^- = \{a_1, a_4\}$$

$\delta(a, a')$	$a_1$	$a_4$
$a_1$	-	0,75
$a_4$	0,50	-

$$\delta_0 = \max_{(a, a') \in A^5} \delta(a, a') = 0,75$$

$$\delta'_0 = \delta_0 - s(\delta) = 0,75 - 0,10 = 0,65$$

$$\delta_1 = 0,50$$



#### Iterazione 6

$$A^6 = A^5 \setminus C_5^- = \{a_1\} \Rightarrow \text{STOP}$$

Alla fine della procedura, si determina il risultato della distillazione, ordinando le azioni dalla peggiore alla migliore:

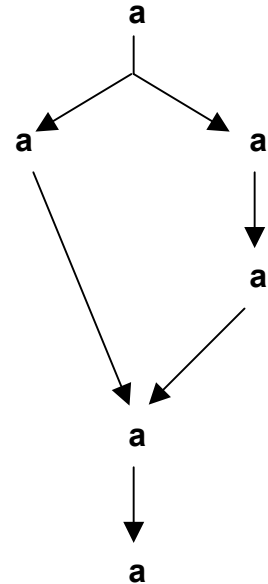
$$P(A)^- = \{a_1\} \succ \{a_4\} \succ \{a_6\} \succ \{a_2\} \succ \{a_3\} \succ \{a_5\}.$$

## Risultato

$$P(A)^+ = \{a_1\} \succ \{a_2\} \succ \{a_4\} \succ \{a_6\} \succ \{a_3, a_5\}$$

$$P(A)^- = \{a_1\} \succ \{a_4\} \succ \{a_6\} \succ \{a_2\} \succ \{a_3\} \succ \{a_5\}$$

Gli ordinamenti ottenuti differiscono per la posizione di  $a_2$ , che nella distillazione dall'alto surclassa  $a_4$  ed  $a_6$ , mentre in quella dal basso ne viene surclassata. Il risultato finale, che ne scaturisce, è qui a fianco tracciato e mostra l'incomparabilità dell'azione  $a_2$  con  $a_4$  ed  $a_6$ .



*Commento agli ordinamenti finali ottenuti con le due soglie*

Come si può notare, la riduzione della soglia di discriminazione comporta un affinamento della distillazione, che qui si dimostra con una migliore percezione delle incomparabilità tra le azioni candidate: difatti, con  $s(\delta) = 0,15$ ,  $a_2$  è incomparabile soltanto con  $a_6$ , mentre con  $s(\delta) = 0,10$  si aggiunge l'incomparabilità con  $a_4$ . Inoltre la riduzione della soglia ha eliminato l'incomparabilità tra  $a_1$  ed  $a_4$ .

In altri casi (non in questo), l'affinamento conduce ad una classificazione degli ex æquo, che compaiono con una soglia  $s(\delta) = 0,15$ .

## 2.6 Esercizi proposti di ELECTRE III – Fase II

### Esercizio 2.6.1

Nella tabella E2.6.1, sono riportati i risultati di una modellizzazione di surclassamento su un insieme di cinque progetti,  $A = \{a_1, a_2, a_3, a_4, a_5\}$ . Si chiede di costruire su  $A$  una graduatoria degli elementi di  $A$ , servendosi d'una soglia costante  $s(\delta) = 0,10$ .

**Tabella E2.6.1: Gradi di credibilità del surclassamento**

$\delta(a, a')$	$a_1$	$a_2$	$a_3$	$a_4$	$a_5$
$a_1$	-	0,76	0,85	0,41	0,27
$a_2$	0,61	-	0,35	0,50	0,61
$a_3$	0,50	0,37	-	0,81	0,90
$a_4$	0,27	0,42	0,31	-	0,52
$a_5$	0,69	0,60	0,32	0,45	-

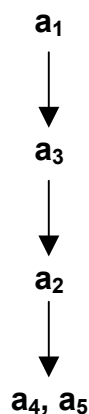
#### Preordine dall'alto $P(A)^+$

$$P(A)^+ = \{a_1\} \succ \{a_3\} \succ \{a_2, a_4, a_5\}$$

#### Preordine dal basso $P(A)^-$

$$P(A)^- = \{a_4, a_5\} \prec \{a_2, a_3\} \prec \{a_1\}$$

#### Risultato



Essendo i due distillati simili, possiamo definire il preordine raffigurato senza particolari problemi di incomparabilità;  $a_4$  ed  $a_5$  sono nella medesima classe sia nel preordine dall'alto sia in quello dal basso.

## Esercizio 2.6.2

Nella tabella E2.6.2 sono riportati i risultati della modellizzazione del surclassamento fuzzy su un insieme di sette progetti,  $A = \{a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6, a_7\}$ . Si chiede di costruire il preordine parziale finale su  $A$ , usando una soglia costante di discriminazione  $s(\delta) = 0,10$ .

**Tabella E2.6.2: Gradi di credibilità di surclassamento**

$\delta(a, a')$	$a_1$	$a_2$	$a_3$	$a_4$	$a_5$	$a_6$	$a_7$
$a_1$	-	0,30	0,27	0,52	0,41	0,30	0,20
$a_2$	0,41	-	0,15	0,20	0,25	0,30	0,50
$a_3$	0,15	0,20	-	0,78	0,60	0,10	0,10
$a_4$	0,37	0,80	0,70	-	0,90	0,88	0,50
$a_5$	0,56	0,45	0,25	0,15	-	0,60	0,50
$a_6$	0,35	0,40	0,37	0,20	0,40	-	0,80
$a_7$	0,83	0,90	0,60	0,10	0,76	0,20	-

## Risultato

$$P(A)^+ = \{a_4\} \succ \{a_6\} \succ \{a_7\} \succ \{a_3\} \succ \{a_5\} \succ \{a_2\} \succ \{a_1\}$$

$$P(A)^- = \{a_3, a_4\} \succ \{a_6\} \succ \{a_7\} \succ \{a_5\} \succ \{a_1\} \succ \{a_2\}$$

$P(A)^+$  e  $P(A)^-$  sono diversi e danno origine ad un preordine parziale finale che presenta alcune incomparabilità.

