Cap 31. Inductancia.

Prof. Isabel Orozco C.
Grupo 001.
Sede
Atlántico.

Autoinducción e Inductancia

Baterías (fuente física) → Proporcionan fem y corriente

Campos magnéticos variables → Proporcionan fem y corriente "inducida"

Consideremos un circuito sencillo con batería y resistencia.

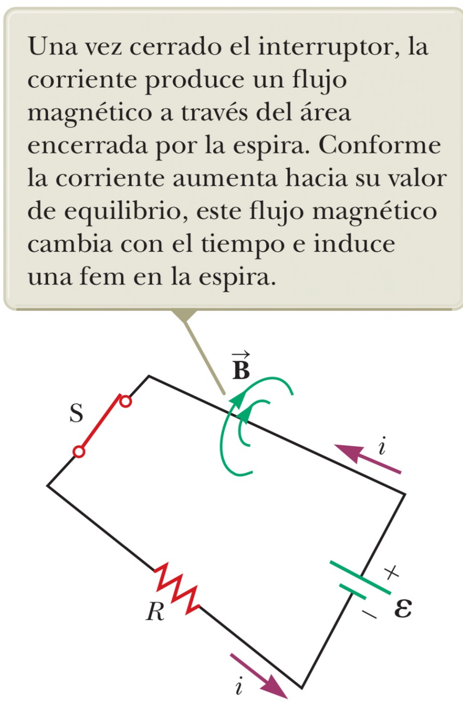


Figura 31.1 Autoinducción en un circuito sencillo.

Al aumentar I, aumenta B, aumenta Φ_B, $\frac{d\Phi_B}{dt} \rightarrow +$

se forma una fem inducida que contrarresta la de la batería.

Por esto se le llama fuerza contraelectromotriz.

El efecto anterior se llama autoinducción debido a que el flujo variable a través del circuito y la fem inducida resultante surge del circuito mismo. La fem inducida se denota $\mathcal{E}_L$.

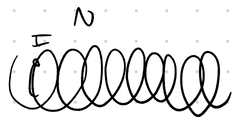
$$\mathcal{E}_L = -L \cdot \frac{di}{dt}$$

Inductancia de la espira

L depende de la geometría de la espira y otras características físicas.

Si consideramos una bobina o solenoide de N vueltas, por Ley de Faraday

$$\mathcal{E}_L = -N \frac{d\Phi_B}{dt}$$



$$\hookrightarrow L \frac{di}{dt} = N \frac{d\Phi_B}{dt}$$

$$L = N \frac{d\Phi_B/dt}{di/dt} = N \frac{d\Phi_B}{di}$$

$$\frac{d\Phi_B}{di} = \frac{\Phi_B}{i}$$

si pasa el mismo flujo magnético a través de cada vuelta.

$$\boxed{L = N \cdot \frac{\Phi_B}{i}}$$

Las unidades de L son henry (H) $1H = \frac{1V \cdot s}{A}$

Ejemplo 31.1 Inductancia de un solenoide

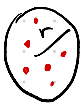
Considere un solenoide con N vueltas y longitud ℓ devanado uniformemente. Suponga que ℓ es mucho mayor que el radio de los devanados y que el núcleo del solenoide es aire.

(A) Encuentre la inductancia del solenoide.

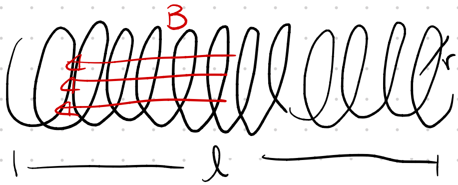
N vueltas

$\ell >> r$

Es ideal



$A = \pi r^2$



El campo magnético dentro del solenoide es

$$B = \mu_0 \cdot n \cdot i = \frac{\mu_0 N i}{\ell}$$

$$\Phi_B = B \cdot A = \frac{\mu_0 N i}{\ell} \cdot A$$

$$L = \frac{N \Phi_B}{i} = \frac{N}{\cancel{i}} \cdot \frac{\mu_0 N \cancel{i} A}{\ell} = \frac{\mu_0 N^2 A}{\ell}$$

con $A = \pi r^2$

6. **S** Un toroide tiene un radio mayor R y un radio menor r, y está estrechamente enrollado con N vueltas de alambre en un toro de cartón hueco. La figura P31.6 muestra la mitad de este toroide, permitiendo la vista de su sección transversal. Si $R >> r$, el campo magnético en la región encerrada por el alambre del toroide es esencialmente el mismo que el campo magnético de un solenoide que ha sido doblado en un gran círculo de radio R. Modele con un campo uniforme de un solenoide largo y demuestre que la inductancia de dicho toroide es aproximadamente igual a

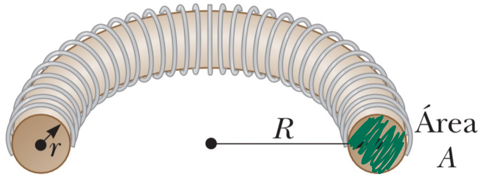
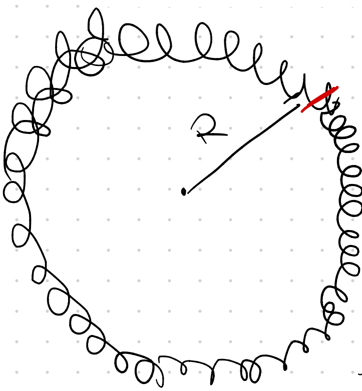


Figura P31.6

$$L \approx \tfrac{1}{2}\mu_0 N^2 \frac{r^2}{R}$$



$R >> r$

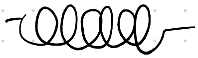
Para solenoide $L = \frac{\mu_0 N^2 A}{l}$

$l = 2\pi R$ $A = \pi r^2$

Toroide:

$$L = \frac{\mu_0 N^2 \cancel{\pi} r^2}{2\cancel{\pi} R} = \frac{\mu_0 N^2 r^2}{2R}$$

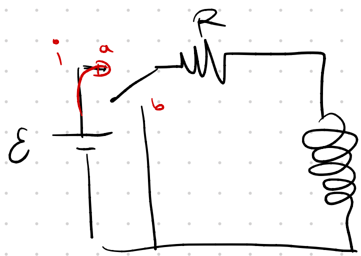
Circuitos RL

El elemento de un circuito con alta inductancia se llama un inductor. Su símbolo es .
La función del inductor es, por ley de Lenz, oponerse a los cambios en un circuito.

Cuando $\frac{di}{dt} \to \oplus$ (Corriente aumenta) Inductor produce $\mathcal{E}_L$ que se opone a $\mathcal{E}$ para tratar de que la corriente aumente más lento (disminuida)

Cuando $\frac{di}{dt} \to \ominus$ (Corriente disminuye) Inductor produce $\mathcal{E}_L$ que trata de reforzar a $\mathcal{E}$ para tratar de que la corriente no disminuya tanto

Al cerrar el interruptor, la corriente aumenta desde 0.



Al cerrar el interruptor en a

$$\mathcal{E} - iR + \mathcal{E}_L = 0$$

$$\mathcal{E} - iR - L\frac{di}{dt} = 0$$

Dividiendo entre R:

$$\frac{\mathcal{E}}{R} - i - \frac{L}{R}\frac{di}{dt} = 0$$

Sea $\quad x = \frac{\mathcal{E}}{R} - i \quad \to dx = -di \qquad \frac{di}{dt} = -\frac{dx}{dt}$

Queda

$$x + \frac{L}{R}\frac{dx}{dt} = 0$$

$$x = -\frac{L}{R}\frac{dx}{dt}$$

$$\int_{x_0}^{x} \frac{dx'}{x'} = \int_{0}^{t} -\frac{R}{L}\,dt'$$

$$\ln\left(\frac{x}{x_0}\right) = -\frac{R}{L}\cdot t$$

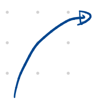
$$x = x_0 e^{-Rt/L} \leftarrow$$

En $t=0$, $i=0$ $\Rightarrow$ $x_0 = \frac{\varepsilon}{R} - \cancel{i}^{\,0} = \frac{\varepsilon}{R}$

$$\left(\frac{\varepsilon}{R} - i\right) = \frac{\varepsilon}{R} e^{-Rt/L}$$

$$\hookrightarrow \boxed{i(t) = \frac{\varepsilon}{R}\left(1 - e^{-Rt/L}\right)}$$

Cuando $t=0$
$i(t)=0$



$t>0$ i aumenta

$t\to\infty$ $i(t)\to \varepsilon/R$

Sea $\tau = \frac{R}{L}$ la constante de tiempo

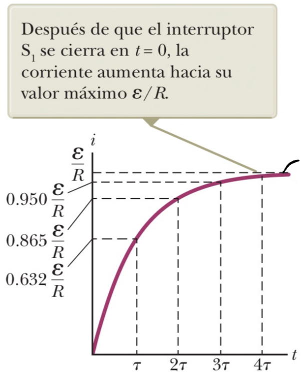
La rapidez a la que cambia la corriente con el tiempo es

$$\frac{di}{dt} = \frac{\varepsilon}{R}\cdot -\frac{R}{L} - e^{-Rt/L} = \frac{\varepsilon}{L} e^{-t/\tau}$$

Cuando $t=0 \to \frac{di}{dt} = \frac{\varepsilon}{L}$

Cuando $t\to\infty$ $\frac{di}{dt}\to 0$

$\sim 5\tau$
el circuito ha alcanzado su corriente máxima.



$i_{max} = \varepsilon/R$

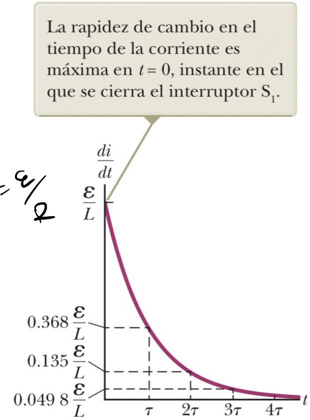
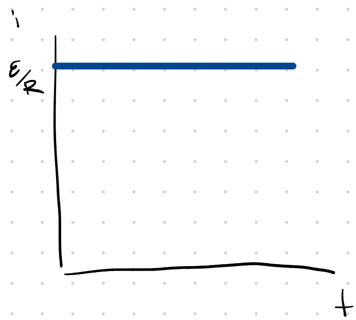
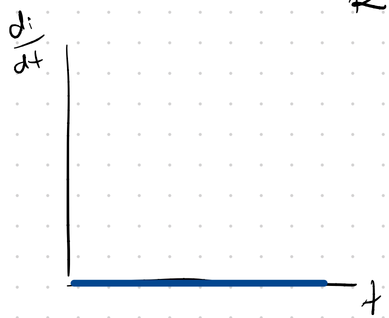


Figura 31.3 Gráfica de la corriente en función del tiempo para el circuito *RL* que se muestra en la figura 31.2b. La constante de tiempo τ es el intervalo de tiempo necesario para que i alcance 63.2% de su valor máximo.

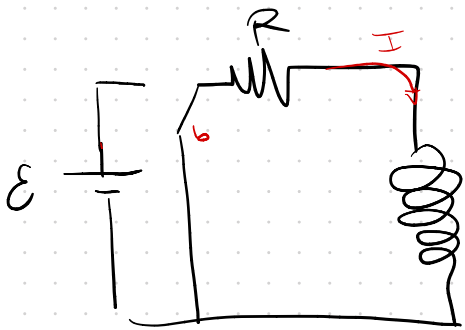
Figura 31.4 Gráfica de di/dt en función del tiempo para el circuito *RL* que se muestra en la figura 31.2b. La razón de cambio disminuye de manera exponencial con el tiempo conforme i aumenta hacia su valor máximo.

Nota: Si la inducción L es igual a cero, y el circuito solo tiene resistencia, la corriente aumentaría instantáneamente a su valor de $i = \frac{\varepsilon}{R}$





Supongamos que ahora, luego de que la corriente se estabilizó a $\mathcal{E}/R$, movemos el interruptor al punto b



En este caso, ya no hay bateria,

$$iR + \mathcal{L}\frac{di}{dt} = 0$$

$$iR = -\mathcal{L}\frac{di}{dt}$$

$$\int_{i_0}^{i} \frac{di'}{i} = \int_{0}^{t} -\frac{R}{\mathcal{L}}\, dt'$$

En $t=0$ $i = i_0 = \mathcal{E}/R$

$$\ln\left(\frac{i}{i_0}\right) = -\frac{R}{\mathcal{L}} t$$

$$i(t) = i_0 e^{-Rt/\mathcal{L}}$$

$\frac{R}{\mathcal{L}} = \tau$

$$\boxed{i(t) = i_0 e^{-t/\tau}}$$

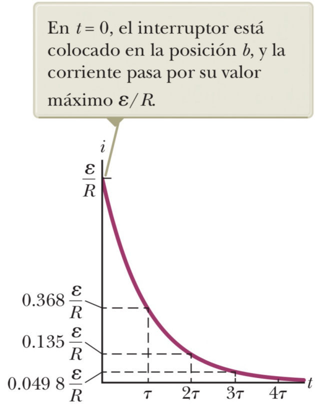
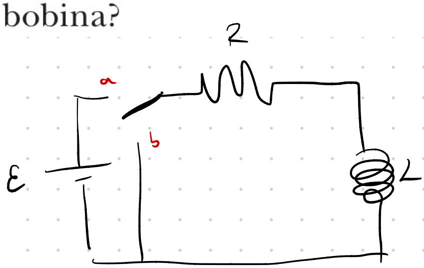


Figura 31.6 Corriente en función del tiempo para la espira del lado derecho del circuito que aparece en la figura 31.5b. Para $t < 0$, el interruptor S_2 está en la posición a.

¡La corriente disminuye paulatinamente aunque no hay batería, por la presencia del inductor!

13. Un circuito consta de una bobina, un interruptor y una batería, todos conectados en serie. La resistencia interna de la batería es insignificante en comparación con la de la bobina. El interruptor está originalmente abierto. Éste se cierra y después de un intervalo de tiempo Δt, la corriente en el circuito llega a 80.0% de su valor final. El interruptor permanece entonces cerrado por un intervalo de tiempo mucho más largo que Δt. Los cables conectados a las terminales de la batería están a continuación en corto circuito con otro alambre y se eliminan de la batería, de modo que la corriente es ininterrumpida. (a) En un instante que es un intervalo de tiempo Δt después del cortocircuito, ¿en qué porcentaje de su valor máximo está la corriente? (b) En el momento $2\Delta t$ después de que la bobina tiene un cortocircuito, ¿qué porcentaje de su valor máximo tiene la corriente en la bobina?



Si cierra en $t=0$ en a

$$i(t) = \frac{\mathcal{E}}{R}\left(1 - e^{-t/\tau}\right) \qquad i_{max} = \mathcal{E}/R$$

En $t = \Delta t$, $i = 0{,}8\,\mathcal{E}/R$ → alcanzó el 80% de valor final.

$$0{,}8\,\frac{\cancel{\mathcal{E}}}{\cancel{R}} = \frac{\cancel{\mathcal{E}}}{\cancel{R}}\left(1 - e^{-\Delta t/\tau}\right)$$

$$e^{-\Delta t/\tau} = 1 - 0{,}8 = 0{,}2$$

$$-\Delta t/\tau = \ln(0{,}2)$$

$$\Delta t = \tau \cdot \underbrace{-\ln(0{,}2)}_{\ln 5} = \tau \cdot \ln 5$$

El problema dice que el interruptor permanece cerrado por un intervalo de tiempo mucho mayor a Δt, esto se interpreta como que la corriente se permite llegar a su valor máximo $\mathcal{E}/R$.

Posteriormente, el interruptor se pasa a b, eliminando la batería. Acá, la corriente disminuirá como

$$i(t) = \underbrace{\mathcal{E}/R}_{i_0}\, e^{-t/\tau}$$

Un intervalo Δt luego del cortocircuito

$$i(\Delta t) = i_0 \cdot e^{-\Delta t/\tau} = i_0\, e^{-\frac{\cancel{\tau} \ln 5}{\cancel{\tau}}}$$

$$i(\Delta t) = i_0\, e^{-\ln 5} = i_0 \cdot 0{,}2$$

$$\Rightarrow \frac{i(t)}{i_0} = 0{,}2 \rightarrow 20\%$$

La corriente es un 20% de su valor máximo

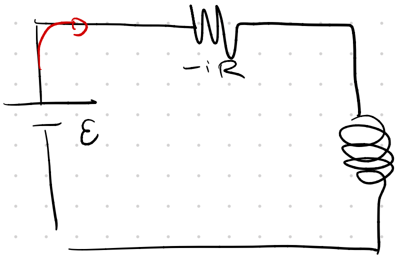
b) En $t = 2\Delta t = 2 \cdot \tau \ln(5)$

$$i(t) = i_0 e^{-\frac{2\cancel{\tau}\ln 5}{\cancel{\tau}}} = i_0 e^{-2\ln 5} = i_0 \cdot 0{,}04$$

$$\frac{i(t)}{i_0} = 0{,}04 \rightarrow 4\%$$

4% de la corriente máxima (inicial)

Energía en campo magnético



$$\mathcal{E} - iR - L\frac{di}{dt} = 0$$

Multiplicando por i:

$$\underbrace{i\mathcal{E}}_{\text{Rapidez a la que la batería suministra energía}} = \underbrace{i^2R}_{\text{Rapidez a la que se entrega energía al resistor}} + \underbrace{Li\frac{di}{dt}}_{\text{Rapidez a la que se almacena energía en el inductor.}}$$

Todas están en Watts (W)

Sea $$\frac{dU_B}{dt} = Li\frac{di}{dt}$$

$$\int dU_B = \int_0^i Li\,di'$$

$$\boxed{U_B = \frac{1}{2}Li^2}$$

U_B: Energía magnética almacenada en el inductor

Podemos también calcular la densidad de energía magnética por unidad de volumen

$$u_B = \frac{U_B}{V} = \frac{B^2}{2\mu_0}$$

En cualquier región del espacio

21. Un solenoide de 68 vueltas con núcleo de aire tiene 8.00 cm de largo y un diámetro de 1.20 cm. ¿Cuánta energía se almacena en su campo magnético cuando conduce una corriente de 0.770 A?

T

$N = 68$
$l = 8cm$
$D = 1{,}2cm$

$$U_B = \frac{1}{2} L i^2$$

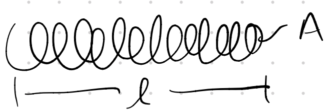
$$L_{sol} = \frac{\mu_0 N^2 A}{l} = \frac{4\pi \times 10^{-7} \cdot 68^2 \cdot 1{,}131 \times 10^{-4}}{0{,}08}$$

$$A = \frac{\pi D^2}{4} = \frac{\pi \cdot (1{,}2 \times 10^{-2})^2}{4} = 1{,}131 \times 10^{-4} m^2$$

$$L = 8{,}215 \times 10^{-6} H$$

$$U_B = \frac{1}{2} \cdot 8{,}215 \times 10^{-6} \cdot 0{,}77^2 = 2{,}44 \times 10^{-6} J$$

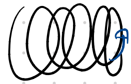
— o —



$$V = Al = 1{,}131 \times 10^{-4} \cdot 0{,}08$$
$$= 9{,}048 \times 10^{-6} m^3$$

$$u_B = \frac{U_B}{V} = \frac{2{,}44 \times 10^{-6}}{9{,}048 \times 10^{-6}} = 0{,}27 \, J/m^3$$

Inductancia Mutua



$$\mathcal{E}_L = -L\frac{di}{dt}$$

La corriente i_1, en bobina 1 produce un campo magnético (mostrado en verde)

Parte de las líneas de este campo pasa por la bobina 2, produciendo un flujo magnético. A este le llamamos Φ_{12}

$\Phi_{12} \to$ Flujo magnético en bobina 2 debido a la bobina 1.

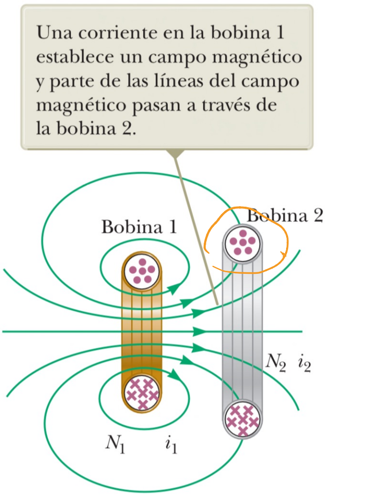


Figura 31.9 Vista de la sección transversal de dos bobinas adyacentes.

Definimos la inductancia mutua M_{12} de la bobina 2 respecto a la 1 como

$$\boxed{M_{12} = \frac{N_2 \cdot \Phi_{12}}{i_1}}$$

Esta depende de geometría de ambos circuitos y su orientación

Este flujo magnético, si cambia con el tiempo, produce una fem en la bobina 2

$$\mathcal{E}_2 = -N_2 \cdot \frac{d\Phi_{12}}{dt} = -N_2 \frac{d}{dt}\left(\frac{M_{12} i_1}{N_2}\right) = -M_{12}\frac{di_1}{dt}$$

Análogamente, si una corriente i_2 pasa por la bobina 2, podrá inducir un flujo magnético Φ_{21} en la bobina 1, y si este cambia, podrá inducir una fem $\mathcal{E}_1$ en la bobina 1.

$$\mathcal{E}_1 = -N_1 \frac{d\Phi_{21}}{dt} = -M_{21} \cdot \frac{di_2}{dt}$$

donde

$$\boxed{M_{21} = \frac{N_1 \Phi_{21}}{i_2}}$$

$$\frac{N_2 \Phi_{12}}{i_1} = \frac{N_1 \Phi_{21}}{i_2}$$

Las inductancias mutuas son iguales, es decir,

$$M_{12} = M_{21} = M$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{\mathcal{E}_2 = -M \cdot \frac{di_1}{dt}} \qquad \boxed{\mathcal{E}_1 = -M \frac{di_2}{dt}}$$

(fem mutuas inducidas)

Recuerde que en adición a esto, las autoinducciones son

$$\mathcal{E}_{L,2} = -L \frac{di_2}{dt} \qquad \mathcal{E}_{L,1} = -L \frac{di_1}{dt}$$

L: Autoinductancia

26. **T** Dos solenoides A y B, colocados uno cerca del otro y compartiendo el mismo eje cilíndrico, tienen 400 y 700 vueltas, respectivamente. En el solenoide A una corriente de 3.50 A produce un flujo promedio de 300 μWb por cada vuelta de A y un flujo de 90.0 μWb por cada vuelta de B. (a) Calcule la inductancia mutua de los dos solenoides. (b) ¿Cuál es la inductancia de A? (c) ¿Cuál es la fem inducida en B cuando la corriente en A aumenta con una rapidez de 0.500 A/s?

auto

$N_A = 400$

$N_B = 700$

$i_A = 3{,}5 A$

$Wb = T \cdot m^2$

$\Phi_A = 300 \mu Wb = 300 \times 10^{-6} Wb = 3 \times 10^{-4} Wb$

$\Phi_{AB} = 90 \mu Wb = 90 \times 10^{-6} Wb = 9 \times 10^{-5} Wb$

a)

$$\boxed{M_{12} = \frac{N_2 \cdot \Phi_{12}}{i_1}}$$

$$M_{AB} = \frac{N_B \, \Phi_{AB}}{i_A} = \frac{700 \cdot 9 \times 10^{-5}}{3{,}5} = 18 \times 10^{-3} H = 18 mH.$$

b) $$L_A = \frac{N_A \cdot \Phi_A}{i_A} = \frac{400 \cdot 3 \times 10^{-4}}{3{,}5} = 34{,}3 \times 10^{-3} H = 34{,}3 mH$$

c) $$\frac{di_A}{dt} = 0{,}5 A/s$$

$$|\mathcal{E}_B| = \left| -M \frac{di_A}{dt} \right| = 18 \times 10^{-3} \cdot 0{,}5 = 9 \times 10^{-3} V = 9 mV$$

Circuitos LC

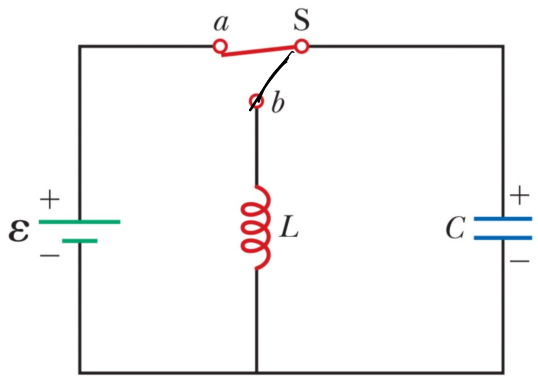


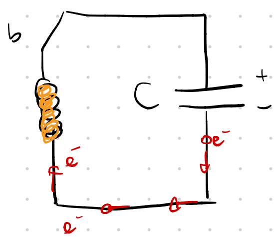
Figura 31.11 Circuito LC simple. El capacitor tiene una carga inicial $Q_{máx}$, y el interruptor en posición a se abre en $t < 0$ y después en posición b se cierra en $t = 0$.

Si el interruptor se cierra en a, el circuito, no hay resistencia ni inductor, la carga es casi instantánea

Con el capacitor totalmente cargado almacenando una carga Q_{max}, su energía es

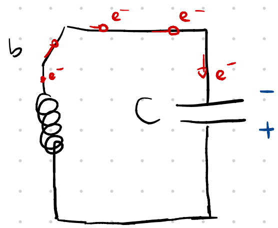
$$U_E = \frac{Q_{max}^2}{2C}$$

Ahora supongamos que, cuando el capacitor está cargado movemos el interruptor al punto b.



Las cargas empezarán a fluir desde el capacitor hacia el inductor, parte de la energía se almacena como energía magnética en este.

Cuando el inductor se cargó, la corriente sigue su camino hacia el capacitor, hasta que al final este tiene la polaridad opuesta



Al cargarse completamente el capacitor, las cargas se devuelven al inductor, y el proceso se repite oscilatoriamente.

La energía total almacenada en el circuito LC es

$$\Delta U_E + \Delta U_B = 0$$

$$U_E = \frac{q^2}{2C} \qquad U_B = \frac{1}{2}Li^2$$

Veamos el cambio respecto al tiempo

(La energía se conserva)

$$\frac{d}{dt}\left(U_E + U_B\right) = \frac{d}{dt}\left(\frac{q^2}{2C} + \frac{1}{2}Li^2\right) = 0$$

$$\frac{1}{\cancel{2}C}\cdot\cancel{2}q\cdot\frac{dq}{dt} + \frac{1}{\cancel{2}}L\cdot\cancel{2}i\,\frac{di}{dt} = 0$$

$$\underbrace{\frac{q}{C}\frac{dq}{dt}}_{\frac{dU_E}{dt}} + \underbrace{Li\frac{di}{dt}}_{\to\,\frac{dU_B}{dt}} = 0$$

Pero $i = \frac{dq}{dt} \rightarrow \frac{di}{dt} = \frac{d}{dt}\left(\frac{dq}{dt}\right) = \frac{d^2q}{dt^2}$

$$\Rightarrow \frac{q}{C}\cdot\cancel{\frac{dq}{dt}} + L\cdot\cancel{\frac{dq}{dt}}\cdot\frac{d^2q}{dt^2} = 0$$

$$\longrightarrow \frac{q}{C} + L\frac{d^2q}{dt^2} = 0$$

$$\boxed{\frac{d^2q}{dt^2} = -\frac{1}{LC}\,q}$$

Es similar a partícula en MAS: $\frac{d^2x}{dt^2} = -\omega^2\cdot x \rightarrow x(t) = A\cos(\omega t + \phi)$

La solución es $\rightarrow$ $q(t) = Q_{max}\cdot\cos(\omega t + \phi)$ $\rightarrow$ Carga en el capacitor oscila en el tiempo

$\omega = \frac{1}{\sqrt{LC}}$ $\rightarrow$ Frecuencia angular de oscilación en circuito LC.

ϕ depende de condiciones iniciales.

$$q(t=0) = q_0 = Q_{max}\cos\phi$$

$q_0 \rightarrow$ Carga inicial

$$\rightarrow \phi = \cos^{-1}\left(\frac{q_0}{Q_{max}}\right)$$

Si $q_0 = Q_{max}$

$\Downarrow$

$\phi = \cos^{-1}(1) = 0$

$$i(t) = \frac{dq}{dt} = -\underbrace{\omega Q_{max}}_{I_{max}} \cdot \operatorname{sen}(\omega t + \phi)$$

El sen y cos están desfasados 90°, cuando uno aumenta, el otro disminuye y viceversa.

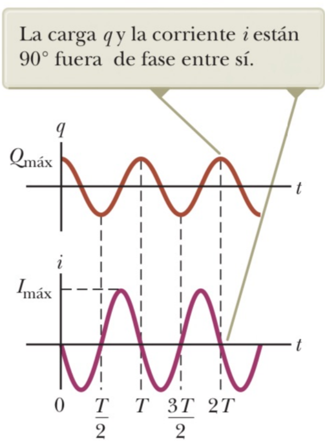


Figura 31.13 Gráficas de la carga con el tiempo y de la corriente en función del tiempo para un circuito *LC* sin resistencia y sin radiación.

$$U_E = \frac{q^2}{2C}$$

$$U_B = \frac{1}{2} L i^2$$

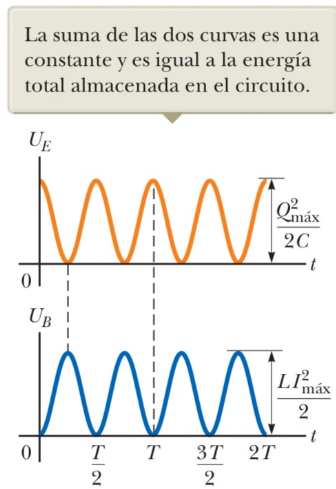
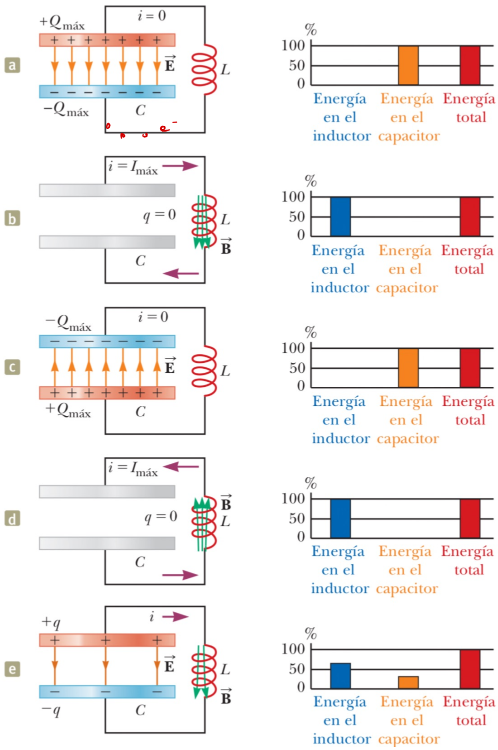


Figura 31.14 Gráficas de U_E y de U_B en función de t para un circuito *LC* sin resistencia y sin radiación.



$i = 0 \rightarrow$ La carga en capacitor es máxima.

$i \rightarrow I_{max} \rightarrow$ La carga en el capacitor es cero.

$0 < i < i_{max}$, hay carga en el capacitor y corriente en el inductor

La energía máxima en el capacitor es

$$U_{E,max} = \frac{q_{max}^2}{2C}$$

y la energía máxima en el inductor

$$U_{B,max} = \frac{L I_{max}^2}{2}$$

Por conservación de la energía $\frac{q_{max}^2}{2C} = \frac{L I_{max}^2}{2}$

32. **T** Un circuito *LC* como el de la figura PC31.30 está constituido por un inductor de 3.30 H y un capacitor de 840 pF, inicialmente con una carga de 105 μC. El interruptor se abre en $t < 0$ y después se cierra en $t = 0$. Calcule las siguientes cantidades en $t = 2.00$ ms: (a) la energía almacenada en el capacitor, (b) la energía almacenada en el inductor y (c) la energía total del circuito.

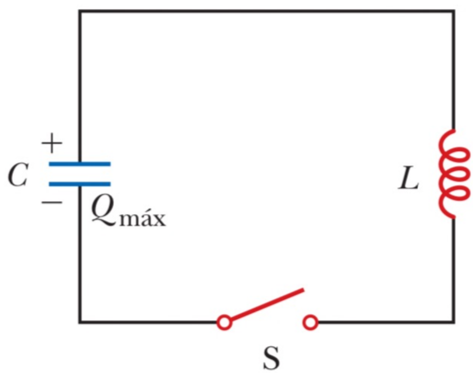


Figura P31.30 Problemas 30 y 32.

$L = 3{,}30\,H$

$C = 840\,pF = 840\times10^{-12}\,F$

$Q_{max} = 105\,\mu C = 105\times10^{-6}\,C$

$\omega = \frac{1}{\sqrt{LC}} = \frac{1}{\sqrt{3{,}3\cdot 840\times10^{-12}}}$

$\omega = 1{,}899\times10^{4}\ rad/s$

$q(t) = Q_{max}\cos(\omega t + \phi)$

En $t=0$ $\quad q_0 = Q_{max}$ $\qquad Q_{max} = Q_{max}\cos\phi$

$\qquad\qquad$ Lo $\phi = 0$

$q(t) = 105\times10^{-6}\cos(1{,}899\times10^{4}t)$

En $t = 2ms = 2\times10^{-3}s$

$q(2\times10^{-3}) = 105\times10^{-6}\cos(1{,}899\times10^{4}\cdot 2\times10^{-3})$

$= 1{,}01\times10^{-4}\,C$

a) $U_E = \frac{q^2}{2C} = \frac{(1{,}01 \times 10^{-4})^2}{2 \cdot 840 \times 10^{-12}} = \boxed{6{,}03\ J}$

c) $U_{total} = \frac{Q_{max}^2}{2C} = \frac{(105 \times 10^{-6})^2}{2 \cdot 840 \times 10^{-12}} = \boxed{6{,}56 J}$

E total
en el circuito

b) $U_B = U_{total} - U_E = 6{,}56 - 6{,}03$

$= \boxed{0{,}53\ J}$

Circuitos RLC

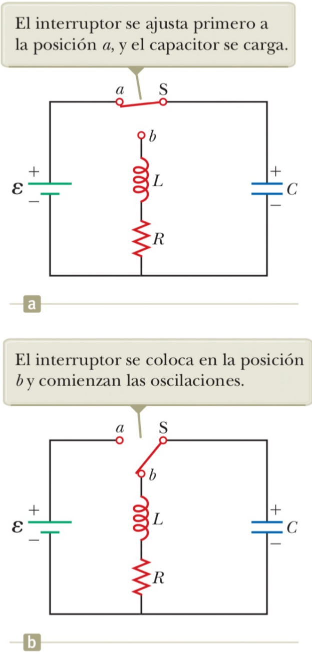


Figura 31.15 Un circuito *RLC* en serie. (a) Con el interruptor en la posición *a*, la batería carga el capacitor. (b) Cuando el interruptor se coloca en la posición *b*, la batería se retira del circuito y la corriente en el circuito *RLC* oscila.

Supongamos inicialmente, el interruptor está en a, de manera que el capacitor está cargado con una carga Q_{max}.

Ahora, colocamos el interruptor en b.

L $\quad$ C $\quad$ R están en serie

$\downarrow$ $\quad$ $\downarrow$ $\quad$ $\downarrow$

U_B $\quad$ U_E $\quad$ E_{int}

$$\Delta U_B + \Delta U_E + \Delta E_{int} = 0$$

→ Conservación de energía

Derivemos respecto a t:

$$\frac{dU_B}{dt} + \frac{dU_E}{dt} + \frac{dE_{int}}{dt} = 0$$

→ Rapidez a la que se entrega energía al resistor.

$$Li\frac{di}{dt} + \frac{q}{C}\frac{dq}{dt} + i^2R = 0$$

pero $i = \dfrac{dq}{dt}$ $\qquad$ $\dfrac{di}{dt} = \dfrac{d^2q}{dt^2}$ →

$$L\frac{dq^2}{dt^2} + R\frac{dq}{dt} + \frac{q}{C} = 0$$

Es similar a partícula en mov. oscilatorio amortiguado

$$m\frac{d^2x}{dt^2} + b\frac{dx}{dt} + kx = 0$$

Coef. de amortiguamiento

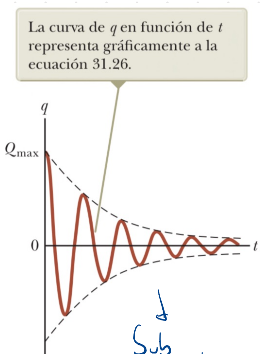
Constante de resorte.

La solución es:

$$\rightarrow \quad q(t) = Q_{max}\, e^{-\frac{Rt}{2L}} \cos(\omega_d t)$$

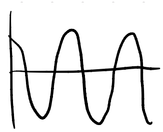
donde ω_d es la frecuencia angular del circuito!

$$\omega_d = \left[\frac{1}{LC} - \left(\frac{R}{2L}\right)^2\right]^{1/2} \quad \text{rad/s}$$



Sub amortiguado

a



b

Definimos la resistencia crítica

$$\boxed{R_c = \sqrt{\frac{4L}{C}}}$$

Casos

- Si $R < R_c$ $\Rightarrow$ Sistema está sub amortiguado
- Si $R = R_c$

$$\omega_d = \left[\frac{1}{LC} - \left(\frac{R}{2L}\right)^2\right]^{1/2}$$

$$= \left[\frac{1}{LC} - \frac{\cancel{4}L}{C \cdot \cancel{4}L}\right]^{1/2} = 0$$

$\Rightarrow$ El sistema está críticamente amortiguado.

- Si $R > R_c$ $\Rightarrow$ Sistema sobreamortiguado.

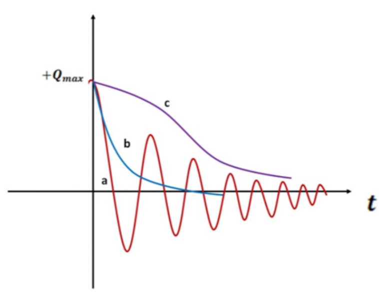


Figura 4. Representación grafica de las oscilaciones en función del tiempo para a) una oscilación sub –amortiguada, b) criticamente-amortiguada, c) sobre-amortiguada
(Elaborado por @lorenzor en Microsoft Powerpoint)