

# Topología

1 Propiedades de conjuntos y funciones @propiedades, imagen, imagen inversa	4
1a Definición de unión disjunta @definición, unión disjunta, inclusión	5
1a1 Propiedad universal de la unión disjunta @propiedad universal, unión disjunta, unión ajena	6
1b Definición de relación de equivalencia @definición, relación binaria, relación de equivalencia	7
1b1 Partición por clases de equivalencia @partición, clase de equivalencia	8
1b2 Relación generada por una partición @relación de equivalencia, generación, partición	9
2 Definición de espacio topológico @definición, espacio topológico	10
2a Definición de continuidad @definición, continuidad	11
2a1 Caracterización de continuidad @caracterización, continuidad	12
2a2 Definición de homeomorfismo @definición, homeomorfismo	13
2a2a Proyección estereográfica @homeomorfismo explícito, proyección estereográfica	14
2a2b Restricción continua e inyectiva @contraejemplo, restricción, homeomorfismo	15
2a3 Lema del pegado @cerrados, continuidad, lema del pegado	16
2b Definición de función abierta y cerrada @definición, abierta, cerrada	17
2b1 Criterio para homeomorfismos @criterio, abierta, cerrada	18

2c Definición de suma topológica @definición, suma topológica, unión disjunta	19
2c1 Más fina para continuidad de las inclusiones @comparación, suma topológica	20
2c2 Propiedades de las inclusiones @propiedades, inclusiones, suma topológica	21
2c3 Caracterización de abiertos y cerrados @caracterización, abiertos, suma topológica	23
2c4 Propiedades de abiertos y cerrados @propiedades, abiertos, suma topológica	24
2d Definición de topología de identificación @generación, definición	26
2d1 Más fina para continuidad @comparación	27
2d2 Caracterización de identificaciones @caracterización, identificación	28
2d3 Propiedades de las identificaciones @propiedades, composición, identificación	30
2d4 Criterio para identificaciones @criterio, sección	31
2d4a Propiedades de una sección @propiedades, sección	32
2d5 Criterio para identificaciones @criterio, abierta, identificación	33
2d6 Producto de identificaciones @producto, abierta, identificación	34
2d7 Identificación es casi homeomorfismo @homeomorfismo, identificación	35
2d8 Restricción de identificaciones @restricción, identificación, criterio	36
2d9 Propiedad universal de las identificaciones @propiedad universal, identificación	37
2d10 Definición de espacio cociente @cociente, topología	39

2d10a Propiedades de saturación @definición, saturación, identificación	40
2d10b Espacios cocientes T1 @espacio cociente, T1	41
2d11 Homeomorfismo inducido por una identificación	42
2d12 Caracterización de identificaciones @caracterización, compatibilidad, identificación	43
2d12a Homeomorfismo inducido por funciones compatibles @compatibilidad, homeomorfismo	45
2d12b Funciones que preservan relación @preserva relación, continuidad	46
2d13 Criterio para identificaciones @compacto, Hausdorff, identificación	47

# Propiedades de conjuntos y funciones

1

TEOREMA 1. Sean  $f : X \longrightarrow Y$  una función,  $A, A_1, A_2, \{A_\alpha\}_{\alpha \in I}$  subconjuntos de  $X$  y  $B, B_1, B_2, \{B_\beta\}_{\beta \in J}$  subconjuntos de  $Y$ , se tiene que

propiedades,  
imagen,  
imagen inversa

(I)  $f(X - A) \subset Y - f(A)$  si  $f$  es inyectiva,

(VIII)  $f(\bigcup_{\alpha \in I} A_\alpha) = \bigcup_{\alpha \in I} f(A_\alpha),$

(II)  $Y - f(A) \subset f(X - A)$  si  $f$  es suprayectiva,

(IX)  $f(\bigcap_{\alpha \in I} A_\alpha) \subset \bigcap_{\alpha \in I} f(A_\alpha),$

(III)  $f^{-1}(Y - B) = X - f^{-1}(B),$

(X)  $\bigcap_{\alpha \in I} f(A_\alpha) \subset f(\bigcap_{\alpha \in I} A_\alpha)$  si  $f$  es inyectiva,

(IV)  $f(f^{-1}(B)) \subset B,$

(XI)  $f^{-1}\left(\bigcup_{\beta \in J} B_\beta\right) = \bigcup_{\alpha \in J} f^{-1}(B_\beta),$

(V)  $B \subset f(f^{-1}(B))$  si  $f$  es suprayectiva,

(XII)  $f^{-1}\left(\bigcap_{\beta \in J} B_\beta\right) = \bigcap_{\alpha \in J} f^{-1}(B_\beta),$

(VI)  $A \subset f^{-1}(f(A)),$

(XIII)  $A_1 \subset A_2$  implica  $f(A_1) \subset f(A_2),$

(VII)  $f^{-1}(f(A)) \subset A$  si  $f$  es inyectiva,

(XIV)  $B_1 \subset B_2$  implica  $f^{-1}(B_1) \subset f^{-1}(B_2).$

Demostración. Pendiente.

□

## Definición de unión disjunta

1a

DEFINICIÓN 1. Dada una familia de conjuntos  $\{X_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$ , se define su **unión ajena** como el conjunto

$$\coprod_{\lambda \in \Lambda} X_\lambda = \bigcup_{\lambda \in \Lambda} X_\lambda \times \{\lambda\}.$$

definición,  
unión disjunta,  
inclusión

Dada  $\mu \in \Lambda$ , la **inclusión**  $i_\mu : X_\mu \longrightarrow \coprod_{\lambda \in \Lambda} X_\lambda$  es la función definida como  $i_\mu(x) = (x, \mu)$ ,  $\forall x \in X_\mu$ .

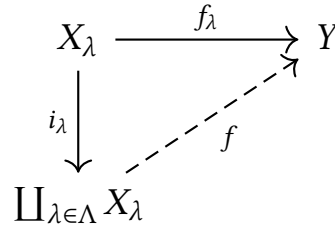
## Propiedad universal de la unión disjunta

1a1

TEOREMA 2. Dada una familia  $\{X_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$  de conjuntos, la unión ajena  $\coprod_{\lambda \in \Lambda} X_\lambda$  junto con las inclusiones  $i_\mu : X_\mu \longrightarrow \coprod_{\lambda \in \Lambda} X_\lambda$ ,  $\mu \in \Lambda$ , está caracterizada por la siguiente propiedad universal

propiedad  
universal,  
unión disjunta,  
unión ajena

- (i) Dada una familia de funciones  $f_\lambda : X_\lambda \longrightarrow Y$ ,  $\lambda \in \Lambda$ , existe una única función  $f : \coprod_{\lambda \in \Lambda} X_\lambda \longrightarrow Y$  tal que  $f \circ i_\lambda = f_\lambda$ ,  $\forall \lambda$ .



Demostración. Pendiente.

□

## Definición de relación de equivalencia

1b

DEFINICIÓN 2. Una **relación binaria**  $R$  en un conjunto  $X$  es cualquier subconjunto  $R \subset X \times X$ . Si  $(x, y) \in R$ , se escribirá  $x R y$ .

definición,  
relación  
binaria,  
relación de  
equivalencia

DEFINICIÓN 3. Una relación binaria  $R$  en un conjunto  $X$  se dice **relación de equivalencia** si

$$(I) \quad \forall x \in X, x R x,$$

$$(II) \quad x R y \implies y R x,$$

$$(III) \quad x R y \wedge y R z \implies x R z.$$

Si  $x R y$  se dice que  $x$  y  $y$  son **equivalentes**. Las relaciones de equivalencia se usan generalmente para considerar a todos los elementos de un conjunto con alguna propiedad como una sola entidad.

## Partición por clases de equivalencia

1b1

DEFINICIÓN 4. Si  $R$  es una relación de equivalencia en  $X$  y  $x \in X$ , el conjunto  $Rx = \{y \in X \mid y R x\}$  se llama la **clase de equivalencia** de  $x$ . También se le suele denotar  $[x]$  si no hay riesgo de confusión. A la familia  $\{Rx \mid x \in X\}$  se le llamará **conjunto cociente** de  $X$  por  $R$  y se denotará  $X/R$ .

partición, clase  
de equivalencia

TEOREMA 3. Si  $R$  es una clase de equivalencia en un conjunto  $X$ , entonces:

(I)  $\bigcup \{Rx \mid x \in X\} = X$ ,

(II)  $x R y$  si y sólo si  $Rx = Ry$ ,

(III) dos clases de equivalencia son iguales o son disjuntas.

*Demostración.* (I) Como  $Rx \subset X$ ,  $\forall x \in X$ , entonces  $\bigcup \{Rx \mid x \in X\} \subset X$ . Recíprocamente, si  $x \in X$ , entonces  $x R x$ , luego  $x \in Rx \subset \bigcup \{Rx \mid x \in X\}$ . Esto prueba la afirmación.

(II) Supóngase que  $x R y$ . Si  $z \in Rx$ , entonces  $z R x$ , luego  $z R y$  y por tanto  $z \in Ry$ , luego  $Rx \subset Ry$ . Similarmente se tiene que  $Rx \subset Ry$  y por tanto  $Rx = Ry$ . Recíprocamente, si  $Rx = Ry$ , dado que  $x R x$ , entonces  $x \in Rx = Ry$ , por tanto,  $x R y$ .

(III) Sean  $Rx$  y  $Ry$  dos clases de equivalencia. Si  $Rx \cap Ry = \emptyset$  no hay nada que probar. Suponga existe  $z \in Rx \cap Ry$ . Entonces  $z R x$  y  $z R y$  y en consecuencia  $x R y$  por transitividad, así que  $Rx = Ry$  por (II).  $\square$

COROLARIO 1. Si  $R$  es una relación de equivalencia en un conjunto  $X$ , entonces la familia  $\{Rx \mid x \in X\}$  es una *partición del conjunto  $X$*



## Relación generada por una partición

1b2

TEOREMA 4. Si  $\{A_\alpha\}_{\alpha \in I}$  es una partición de un conjunto  $X$ , entonces la relación  $R = \bigcup \{A_\alpha \times A_\alpha \mid \alpha \in I\}$ , es una relación de equivalencia. Además,  $x R y$  si y sólo si  $x, y \in A_\alpha$ , para algún  $\alpha \in I$ . Más aún,  $X/R = \{A_\alpha \mid \alpha \in I\}$ .

*Demostración.* Pendiente.

□

relación de  
equivalencia,  
generación,  
partición

## Definición de espacio topológico

2

DEFINICIÓN 5. Sea  $X$  un conjunto. Una **topología** sobre  $X$  es una familia  $\mathcal{T}$  de subconjuntos de  $X$  con las siguientes propiedades:

definición,  
espacio  
topológico

(I)  $\emptyset, X \in \mathcal{T}$ .

(II) Si  $\{U_i\}_{i \in I} \subset \mathcal{T}$  entonces  $\bigcup_{i \in I} U_i \in \mathcal{T}$ .

(III) Si  $\{U_i\}_{i \in I} \subset \mathcal{T}$  y  $I$  es finito, entonces  $\bigcap_{i \in I} U_i \in \mathcal{T}$ .

A la pareja  $(X, \mathcal{T})$  se le llama **espacio topológico**.

## Definición de continuidad

2a

DEFINICIÓN 6. Dados espacios topológicos  $X$  y  $Y$ , una función  $f : X \longrightarrow Y$  se dice **continua** en  $X$ , si  $U$  abierto en  $Y$  implica que  $f^{-1}(U)$  es abierto en  $X$ .

definición,  
continuidad

## Caracterización de continuidad

2a1

TEOREMA 5. Sean  $X$  y  $Y$  espacios topológicos y sea  $f : X \longrightarrow Y$  una función. Son equivalentes

caracterización,  
continuidad

- (I)  $f$  es continua,
- (II)  $U$  abierto en  $Y$  implica  $f^{-1}(U)$  abierto en  $X$ ,
- (III)  $f^{-1}(B^\circ) \subset f^{-1}(B)^\circ$ ,  $\forall B \subset Y$ ,
- (IV)  $f(\overline{A}) \subset \overline{f(A)}$ ,  $\forall A \subset X$ ,
- (V)  $F$  cerrado en  $Y$  implica  $f^{-1}(F)$  cerrado en  $X$ .

*Demostración.* Pendiente.

□

## Definición de homeomorfismo

2a2

DEFINICIÓN 7. Un **homeomorfismo** es una función  $f : X \longrightarrow Y$  continua y biyectiva, cuya inversa también es continua. En este caso, se dice que los espacios  $X$  y  $Y$  son **homeomorfos**.

definición, homeomorfismo

## Proyección estereográfica

2a2a

TEOREMA 6. *La función*

$$p : S^n - \{N\} \longrightarrow \mathbb{R}^n$$
$$(x_1, \dots, x_{n+1}) \longmapsto \left( \frac{x_1}{1 - x_{n+1}}, \dots, \frac{x_n}{1 - x_{n+1}} \right),$$

donde  $N = (0, \dots, 0, 1)$ , es un homeomorfismo con las topologías usuales y su inversa está dada por

$$p^{-1} : \mathbb{R}^n \longrightarrow S^n - \{N\}$$
$$y = (y_1, \dots, y_n) \longmapsto \left( \frac{2y_1}{|y|^2 + 1}, \dots, \frac{2y_n}{|y|^2 + 1}, \frac{|y|^2 - 1}{|y|^2 + 1} \right).$$

A este homeomorfismo se le llama **proyección estereográfica**.

*Demostración.* Es rutinario verificar que  $p \circ p^{-1} = \text{id}_{\mathbb{R}^n}$  y que  $p^{-1} \circ p = \text{id}_{S^n - \{N\}}$ . Además,  $p$  es continua por ser sus componentes funciones racionales en las variables  $x_1, \dots, x_{n+1}$  tales que su denominador no se anula. De forma similar,  $p^{-1}$  es continua por ser sus funciones componentes productos de las variables  $y_1, \dots, y_n$ , con la función  $1/(|y|^2 + 1)$ , la cuál es continua pues el denominador no se anula y la función norma  $|y|$  es continua.  $\square$

homeomor-  
fismo explícito,  
proyección  
estereográfica

## Restricción continua e inyectiva

2a2b

*Observación.* En general, si  $f : X \longrightarrow Y$  es continua e inyectiva, su restricción  $g : X \longrightarrow f(X)$ , dada por  $g(x) = f(x)$ ,  $\forall x \in X$ , no es necesariamente un homeomorfismo, aún cuando se tiene que  $g$  es biyectiva y continua. Considere los espacios  $X = \{0, 1\}$  con la topología  $\mathcal{T}_X = \{\emptyset, \{0\}, X\}$  y  $Y = \{a, b, c\}$  con la topología  $\mathcal{T}_Y = \{\emptyset, \{b\}, Y\}$ . La función  $f$  definida como  $f(0) = c, f(1) = a$ , es inyectiva y continua. Sin embargo, su restricción  $g$ , dada como  $g(0) = a, g(1) = c$ , es biyectiva y continua, pero su inversa  $h$  dada por  $h(a) = 0, h(c) = 1$  no es continua, pues  $h^{-1}(\{0\}) = \{a\}$  no es abierto en  $f(X)$  con la topología inducida por  $Y$ .

contraejemplo,  
restricción, ho-  
meomorfismo

## Lema del pegado

2a3

TEOREMA 7. Sea  $X = F_1 \cup \dots \cup F_k$ , con  $F_i$  cerrado en  $X$ , para todo  $i \in \{1, \dots, k\}$ . Si  $f_i : F_i \longrightarrow Y$  son funciones continuas, para todo  $i \in \{1, \dots, k\}$  y tales que

$$f_i|_{F_i \cap F_j} = f_j|_{F_i \cap F_j},$$

cerrados,  
continuidad,  
lema del  
pegado

para todos  $i, j \in \{1, \dots, k\}$ , entonces la función  $f : X \longrightarrow Y$  definida como  $f|_{F_i} = f_i$  es continua.

*Demostración.* Dicha función está bien definida, pues si  $x_1, x_2 \in X$  son tales que  $x_1 = x_2$ , entonces  $x_1 \in F_i$  y  $x_2 \in F_j$  para algunos  $i, j \in \{1, \dots, k\}$  y  $x_1 \in F_i \cap F_j$ ,  $x_2 \in F_i \cap F_j$ . Luego  $f(x_1) = f_i(x_1)$  y  $f(x_2) = f_j(x_2)$ , por tanto,  $f(x_1) = f_i(x_1) = f_i|_{F_i \cap F_j}(x_1) = f_i|_{F_i \cap F_j}(x_2) = f_j|_{F_i \cap F_j}(x_2) = f_j(x_2) = f(x_2)$ .

Sea  $C$  un cerrado en  $Y$ . Se tiene que  $f^{-1}(C) = f_1^{-1}(C) \cup \dots \cup f_k^{-1}(C)$ . En efecto, si  $x \in f^{-1}(C)$ , entonces  $f(x) \in C$ , con  $x \in X$ . Luego, dado que  $X = \bigcup_{n=1}^k F_n$ , existe  $i \in \{1, \dots, k\}$  tal que  $x \in F_i$  y por tanto  $f(x) = f_i(x) \in C$ . En consecuencia,  $x \in f_i^{-1}(C)$  para algún  $i \in \{1, \dots, k\}$ , es decir,  $x \in \bigcup_{n=1}^k f_n^{-1}(C)$ . Recíprocamente, si  $x \in \bigcup_{n=1}^k f_n^{-1}(C)$ , entonces existe  $i \in \{1, \dots, k\}$  tal que  $x \in f_i^{-1}(C)$ , por tanto,  $f_i(x) \in C$ . Necesariamente  $x \in F_i$  por elección de  $x$ , así que  $f_i(x) = f(x) \in C$ , o bien,  $x \in f^{-1}(C)$ . Esto prueba la afirmación.

Finalmente, como  $f_i$  es continua, para cada  $i \in \{1, \dots, k\}$ , entonces  $f_i^{-1}(C)$  es cerrado en  $F_i$ , para cada  $i \in \{1, \dots, k\}$ , pero cada  $F_i$  es cerrado en  $X$ , así que de hecho  $f_i^{-1}(C)$  es cerrado en  $X$ , para cada  $i \in \{1, \dots, k\}$ . Luego  $f^{-1}(C)$  es cerrado en  $X$  por ser unión finita de cerrados en  $X$ . Como  $C$  fue arbitrario, entonces  $f$  debe ser continua.  $\square$



## Definición de función abierta y cerrada

2b

DEFINICIÓN 8. Una función  $f : X \longrightarrow Y$  se dice **abierto** si  $U$  abierto en  $X$  implica que  $f(U)$  es abierto en  $Y$ .

definición,  
abierto, cerrado

DEFINICIÓN 9. Similarmente, una función  $f : X \longrightarrow Y$  se dice **cerrada** si  $F$  cerrado en  $X$  implica que  $f(F)$  es cerrado en  $Y$ .

## Criterio para homeomorfismos

2b1

TEOREMA 8. Si una función  $f : X \longrightarrow Y$  es biyectiva, continua y abierta o cerrada, entonces  $f$  es un homeomorfismo.

criterio, abierta,  
cerrada

*Demostración.* Como  $f$  es biyectiva, existe su inversa  $g : Y \longrightarrow X$  tal que  $g \circ f = \text{id}_X$ . Sea  $U$  un abierto en  $X$  y notemos que  $f^{-1}(g^{-1}(U)) = (g \circ f)^{-1}(U) = \text{id}_X^{-1}(U) = U$  y aplicando  $f$  a ambos lados obtenemos  $g^{-1}(U) = f(U)$  por suprayectividad de  $f$ . Como  $f(U)$  es abierto por ser  $f$  una función abierta, entonces  $g^{-1}(U)$  es abierto. Dado que  $U$  fue un abierto arbitrario, entonces  $g$  es continua y en consecuencia  $f$  es un homeomorfismo. Si  $f$  es cerrada la demostración es similar.  $\square$

TEOREMA 9. Si  $f$  es un homeomorfismo, entonces  $f$  es abierta y cerrada.

*Demostración.* Sea  $g$  la inversa de  $f$ . Si  $U$  es abierto en  $X$ , entonces  $g^{-1}(U)$  es abierto en  $X$  por ser  $g$  continua, pero, de manera similar al teorema anterior, se tiene que  $g^{-1}(U) = f(U)$ , luego  $f(U)$  es abierto y se sigue que  $f$  es una función abierta. Similarmente se prueba que  $f$  es cerrada.  $\square$

## Definición de suma topológica

2c

DEFINICIÓN 10. Dada una familia de espacios topológicos  $\{X_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$ , se puede generar un nuevo espacio topológico a partir de su unión ajena  $X = \coprod_{\lambda \in \Lambda} X_\lambda$  definida en 1a. Consideréanse las inclusiones  $i_\mu : X_\mu \longrightarrow X, \mu \in \Lambda$  y sea  $\mathcal{T}_\mu$  la topología coinducida en  $X$  por  $X_\mu$  a través de  $i_\mu$ . Se tiene que  $\mathcal{S} = \bigcap_{\lambda \in \Lambda} \mathcal{T}_\lambda$  también es una topología sobre  $X$ . Esta topología se llamará **topología de la suma** en  $X$ . Al espacio  $X$  con esta topología se le llamará **suma topológica** de los espacios  $X_\lambda$ .

definición,  
suma  
topológica,  
unión disjunta

## Más fina para continuidad de las inclusiones

2c1

PROPOSICIÓN 1. Sea  $\{X_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$  una familia de espacios topológicos y sea  $\mathcal{S}$  la topología de la suma en  $X = \coprod_{\lambda \in \Lambda} X_\lambda$ . Se tiene que

comparación,  
suma  
topológica

(i)  $\mathcal{S}$  hace continuas a todas las inclusiones  $i_\lambda : X_\lambda \longrightarrow X$ ,

(ii)  $\mathcal{S}$  es la topología más fina con esta propiedad.

*Demostración.* (i) Sea  $\mu \in \Lambda$  arbitrario pero fijo. Si  $U$  es abierto en  $X$ , entonces  $U \in \mathcal{S} = \bigcap_{\lambda \in \Lambda} \mathcal{T}_\lambda$ , donde  $\mathcal{T}_\lambda$  es la topología coinducida en  $X$  por  $X_\lambda$  a través de  $i_\lambda$ . En particular,  $U \in \mathcal{T}_\mu$ , luego, por definición,  $i_\mu^{-1}(U)$  es abierto en  $X_\mu$ . Por tanto,  $i_\mu$  es continua y como  $\mu$  fue arbitrario se tiene el resultado.

(ii) Supóngase que  $\mathcal{T}$  es una topología que hace continuas a todas las inclusiones. Si  $U \in \mathcal{T}$ , entonces  $i_\lambda^{-1}(U)$  es abierto en  $X_\lambda$ , para cada  $\lambda \in \Lambda$ , luego  $U \in \mathcal{T}_\lambda$  para cada  $\lambda$ , por definición de  $\mathcal{T}_\lambda$ . En consecuencia,  $U \in \bigcap_{\lambda \in \Lambda} \mathcal{T}_\lambda = \mathcal{S}$ . Como  $U$  fue arbitrario, entonces  $\mathcal{T} \subset \mathcal{S}$  y se sigue que  $\mathcal{S}$  es la topología más fina que hace continua a todas las inclusiones.  $\square$

## Propiedades de las inclusiones

2c2

PROPOSICIÓN 2. Sea  $\{X_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$  una familia de espacios topológicos y sea  $X = \coprod_{\lambda \in \Lambda} X_\lambda$  su suma topológica. Si  $\mu \in \Lambda$ , se tiene que

propiedades,  
inclusiones,  
suma  
topológica

- (I) Si  $A \subset X_\mu$ , entonces  $i_\mu^{-1}(A \times \{\mu\}) = A$ ,
- (II) Si  $A \subset X_\mu$ , entonces  $i_\lambda^{-1}(A \times \{\mu\}) = \emptyset$ ,  $\forall \lambda \in \Lambda, \lambda \neq \mu$ ,
- (III) Si  $A \subset X_\mu$ , entonces  $i_\mu(A) = A \times \{\mu\}$ ,
- (IV) Si  $B \subset X$ , entonces  $i_\mu^{-1}(B) \times \{\mu\} = B \cap X_\mu \times \{\mu\}$ ,  $\forall \mu \in \Lambda$ ,

*Demostración.* (I) Si  $\mu \in \Lambda$  y  $A \subset X_\mu$ , entonces

$$\begin{aligned} x \in i_\mu^{-1}(A \times \{\mu\}) &\iff i_\mu(x) \in A \times \{\mu\} \\ &\iff (x, \mu) \in A \times \{\mu\} \\ &\iff x \in A. \end{aligned}$$

Esto prueba la afirmación.

(II) Si  $\lambda \neq \mu$ ,  $A \subset X_\mu$  y existiera  $x \in i_\lambda^{-1}(A \times \{\mu\})$ , entonces  $(x, \lambda) \in A \times \{\mu\}$  y por tanto  $\lambda = \mu$ , contradiciendo la hipótesis.

(III) Por (I), se tiene que  $i_\mu^{-1}(A \times \{\mu\}) = A$  y tomando la imagen bajo  $i_\mu$  en ambos lados, al ser las inclusiones suprayectivas, se tiene que  $A \times \{\mu\} = i_\mu(A)$ .

(IV) Sea  $\mu \in \Lambda$  y  $B \subset X$ , entonces

$$\begin{aligned}(x, \lambda) \in i_\mu^{-1}(B) \times \{\mu\} &\iff x \in i_\mu^{-1}(B) \wedge \lambda \in \{\mu\} \wedge x \in X_\mu \\ &\iff i_\mu(x) \in B \wedge \lambda = \mu \wedge x \in X_\mu \\ &\iff (x, \mu) \in B \wedge \lambda = \mu \wedge (x, \lambda) \in X_\mu \times \{\lambda\} \\ &\iff (x, \lambda) \in B \wedge \lambda = \mu \wedge (x, \lambda) \in X_\mu \times \{\mu\} \\ &\iff (x, \lambda) \in B \cap X_\mu \times \{\mu\}.\end{aligned}$$

Como  $\mu$  fue arbitrario, se tiene el resultado.

□

## Caracterización de abiertos y cerrados

2c3

TEOREMA 10. Sea  $\{X_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$  una familia de espacios topológicos y sea  $X = \coprod_{\lambda \in \Lambda} X_\lambda$  su suma topológica. Entonces

caracterización,  
abiertos, suma  
topológica

(I)  $U$  es abierto en  $X$  si y solo si  $U \cap X_\lambda \times \{\lambda\}$  es abierto en  $X_\lambda \times \{\lambda\}$ ,  $\forall \lambda \in \Lambda$ ,

(II)  $F$  es cerrado en  $X$  si y solo si  $F \cap X_\lambda \times \{\lambda\}$  es cerrado en  $X_\lambda \times \{\lambda\}$ ,  $\forall \lambda \in \Lambda$ .

*Demostración.* (I) Si  $U \subset X$  es abierto, por definición  $U \cap X_\lambda \times \{\lambda\}$  es abierto en  $X_\lambda \times \{\lambda\}$ , para cada  $\lambda \in \Lambda$ . Supóngase que se cumple la condición. Nótese que para cada  $\lambda \in \Lambda$ , la inclusión  $i_\lambda : X_\lambda \longrightarrow X_\lambda \times \{\lambda\}$  es continua, además,  $U \cap X_\lambda \times \{\lambda\} = i_\lambda^{-1}(U) \times \{\lambda\}$  y en consecuencia  $i_\lambda^{-1}(U \cap X_\lambda \times \{\lambda\}) = i_\lambda^{-1}(i_\lambda^{-1}(U) \times \{\lambda\}) = i_\lambda^{-1}(U)$  es abierto en  $X_\lambda$ . Luego  $U \in \mathcal{T}_\lambda$  para cada  $\lambda \in \Lambda$  y por tanto  $U \in \bigcap_{\lambda \in \Lambda} \mathcal{T}_\lambda = \mathcal{S}$ , es decir,  $U$  es abierto en  $X$ .

(II) Se tiene que

$$F \subset X \text{ es cerrado en } X \iff X - F \text{ es abierto en } X$$

$$\iff (X - F) \cap X_\lambda \times \{\lambda\} = X_\lambda \times \{\lambda\} - F \text{ es abierto en } X_\lambda \times \{\lambda\}, \forall \lambda \in \Lambda$$

$$\iff F \text{ es cerrado en } X_\lambda \times \{\lambda\}, \forall \lambda \in \Lambda,$$

por el punto anterior. □

COROLARIO 2. Sea  $\{X_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$  una familia de espacios topológicos y sea  $X = \coprod_{\lambda \in \Lambda} X_\lambda$  su suma topológica. Entonces

(I)  $U$  es abierto en  $X$  si y sólo si  $i_\lambda^{-1}(U)$  es abierto en  $X_\lambda$ ,  $\forall \lambda \in \Lambda$ ,

(II)  $F$  es cerrado en  $X$  si y sólo si  $i_\lambda^{-1}(F)$  es cerrado en  $X_\lambda$ ,  $\forall \lambda \in \Lambda$ .

## Propiedades de abiertos y cerrados

2c4

TEOREMA 11. Si  $\{X_\lambda\}_\lambda$  es una familia de espacios topológicos y  $X = \coprod_{\lambda \in \Lambda} X_\lambda$  es su suma topológica, entonces

propiedades,  
abiertos, suma  
topológica

- (I) Si  $\mu \in \Lambda$ , entonces  $U$  es abierto en  $X_\mu$  si y solo si  $U \times \{\mu\}$  es abierto en  $X_\mu \times \{\mu\}$ .
- (II) Cada subespacio  $X_\lambda \times \{\lambda\}$  de  $X$  es abierto y cerrado en  $X$ ,
- (III) Si  $\mu \in \Lambda$  y  $\subset X_\mu$ , entonces  $U$  es abierto en  $X_\mu$  si y solo si  $U \times \{\mu\}$  es abierto en  $X$ ,
- (IV)  $i_\lambda : X_\lambda \longrightarrow X$  es una función abierta,  $\forall \lambda \in \Lambda$ .
- (V)  $i_\lambda : X_\lambda \longrightarrow X_\lambda \times \{\lambda\}$  es una función abierta,  $\forall \lambda \in \Lambda$ .
- (VI)  $i_\lambda : X_\lambda \longrightarrow X_\lambda \times \{\lambda\}$  es un homeomorfismo.

*Demostración.* (I) Si  $\mu \in \Lambda$  y  $U$  es abierto en  $X_\mu$ , entonces  $U \subset X_\mu$  y por (I) se tiene que  $i_\mu^{-1}(U \times \{\mu\}) = U$ . Luego  $U \times \{\mu\}$  debe ser abierto en la topología coinducida en  $X$  por  $X_\mu$  a través de  $i_\mu$ , es decir,  $U \times \{\mu\} \in \mathcal{T}_\mu$ . Más aún, si  $\lambda \neq \mu$ , por (II) se tiene que  $i_\lambda^{-1}(U \times \{\mu\}) = \emptyset$ , el cual también es abierto en  $X_\lambda$ . En consecuencia,  $U \times \{\mu\} \in \mathcal{T}_\lambda$ , para cada  $\lambda \in \Lambda$ . Luego  $U \times \{\mu\} \in \bigcap_{\lambda \in \Lambda} \mathcal{T}_\lambda = \mathcal{S}$ , es decir,  $U \times \{\mu\}$  es abierto en  $X$ .

Supóngase ahora que  $U \times \{\mu\}$  es abierto en  $X_\mu \times \{\mu\}$ . Como la inclusión  $i_\mu : X_\mu \longrightarrow X$  es continua y  $i_\mu(X_\mu) = X_\mu \times \{\mu\}$ , entonces  $i_\mu : X_\mu \longrightarrow X_\mu \times \{\mu\}$  también es continua. Como  $U \subset X_\mu$ , entonces  $i_\mu^{-1}(U \times \{\mu\}) = U$  por (I) y se sigue que  $U$  es abierto en  $X_\mu$ .



(II) Corolario de 2d3. (III) Se sigue de (I) y (II). (IV) Se sigue de 2d2 (III) y del punto anterior. (V). Se sigue del punto anterior. (VI) Es fácil ver que  $i_\lambda : X_\lambda \longrightarrow X_\lambda \times \{\lambda\}$  es biyectiva. Es además continua y abierta, luego un homeomorfismo.

□

## Definición de topología de identificación

2d

DEFINICIÓN 11. Dados un espacio topológico  $X$ , un conjunto  $Y$  y una función  $f : X \longrightarrow Y$ , se puede dotar a  $Y$  con una topología, a saber,  $\{U \subset Y \mid f^{-1}(U) \text{ es abierto en } X\}$ . A esta topología se le llamará **topología de identificación** o **topología coinducida** en  $Y$  por  $X$  a través de  $f$ .

generación,  
definición

DEFINICIÓN 12. Si  $X$  y  $Y$  son espacios topológicos y  $f : X \longrightarrow Y$  es una función, se dice que  $f$  es una **identificación** si la topología de  $Y$  es la topología coinducida por  $f$ .

## Más fina para continuidad

2d1

PROPOSICIÓN 3. *Sea  $X$  un espacio topológico y  $f : X \longrightarrow Y$  una función. La topología de identificación en  $Y$  coinducida por  $f$  hace continua a  $f$ . Más aún, de entre todas las topologías que hacen continua a  $f$ , esta es la más fina.*

comparación

*Demostración.* Sea  $\mathcal{T}_f$  la topología de identificación en  $Y$ . Si  $U \in \mathcal{T}$ , entonces  $f^{-1}(U)$  es abierto en  $X$ , por definición. Como  $U$  fue arbitrario, entonces  $f$  debe ser continua, por definición de continuidad.

Sea  $\mathcal{T}$  una topología que hace continua a  $f$ . Si  $U \in \mathcal{T}$ , entonces  $U \subset Y$  y  $f^{-1}(U)$  es abierto en  $X$  por definición de continuidad, pero esto implica que  $U \in \mathcal{T}_f$  por definición de  $\mathcal{T}_f$ . Como  $U$  fue arbitrario, entonces  $\mathcal{T} \subset \mathcal{T}_f$ , y a su vez como  $\mathcal{T}$  fue una topología arbitraria que hace continua a  $f$ , entonces  $\mathcal{T}_f$  debe ser la más fina entre ellas.  $\square$

## Caracterización de identificaciones

2d2

TEOREMA 12. Si  $f : X \longrightarrow Y$  es una función, son equivalentes

caracterización,  
identificación

(I)  $f$  es identificación.

(II)  $U$  es abierto en  $Y$  si y sólo si  $f^{-1}(U)$  es abierto en  $X$ .

(III)  $F$  es cerrado en  $Y$  si y sólo si  $f^{-1}(F)$  es cerrado en  $X$ .

*Demostración.* (I)  $\implies$  (II). Si  $f$  es identificación entonces  $f$  es, en particular, continua, y por tanto  $U$  abierto en  $Y$  implica  $f^{-1}(U)$  abierto en  $X$ . Supogase ahora que  $f^{-1}(U)$  es abierto en  $X$  con  $U \subset Y$ . Entonces  $U$  es abierto en  $X$  por definición de topología de identificación. Como  $U$  fue arbitrario se tiene el resultado.

(II)  $\implies$  (III). Se tiene que

$$\begin{aligned} F \text{ es cerrado en } Y &\iff X - F \text{ es abierto en } Y \\ &\iff f^{-1}(X - F) = Y - f^{-1}(F) \text{ es abierto en } X, \text{ por hipótesis} \\ &\iff f^{-1}(F) \text{ es cerrado en } X. \end{aligned}$$

(III)  $\implies$  (II). Es similar al punto anterior.

(II)  $\implies$  (I). Sea  $\mathcal{T}$  la topología de  $Y$ . Si se verifica (II), entonces la  $\mathcal{T}$  hace continua a  $f$ . Más aún, si hay otra topología  $\mathcal{T}'$  que hace continua a  $f$ , entonces  $U \in \mathcal{T}'$  implica que  $f^{-1}(U)$  es abierto en  $X$ , y por tanto  $U \in \mathcal{T}$  por

hipótesis. Luego  $\mathcal{T}' \subset \mathcal{T}$  y como  $\mathcal{T}'$  fue arbitraria, entonces  $\mathcal{T}$  es de hecho más fina en  $Y$  que cualquier otra que haga continua a  $f$ . Es fácil verificar que sólo existe una topología sobre  $Y$  con esta propiedad y es la topología de identificación. Luego,  $\mathcal{T}$  es la topología de identificación coinducida por  $f$ , es decir,  $f$  es una identificación.  $\square$

## Propiedades de las identificaciones

2d3

PROPOSICIÓN 4. Sean  $f : X \longrightarrow Y$  y  $g : Y \longrightarrow Z$  funciones. Se verifican las siguientes afirmaciones

propiedades,  
composición,  
identificación

(I)  $\text{id}_X : X \longrightarrow X$  es identificación.

(II) Si  $f$  y  $g$  son identificaciones, entonces  $g \circ f$  es identificación.

(III) Si  $f$  y  $g \circ f$  son identificaciones, necesariamente  $g$  es identificación.

*Demostración.* (I) Se sigue de que  $U$  es abierto en  $X$  si y sólo si  $\text{id}_X(U) = U$  es abierto en  $X$ .

(II) Como  $f$  y  $g$  son identificaciones, entonces, por 2d2,

$$\begin{aligned} U \text{ es abierto en } Z &\iff g^{-1}(U) \text{ es abierto en } Y \\ &\iff f^{-1}(g^{-1}(U)) = (g \circ f)^{-1}(U) \text{ es abierto en } X. \end{aligned}$$

Luego  $g \circ f$  es identificación.

(III) Se tiene que

$$\begin{aligned} U \text{ es abierto en } Z &\iff (g \circ f)^{-1}(U) = f^{-1}(g^{-1}(U)) \text{ es abierto en } X \\ &\iff g^{-1}(U) \text{ es abierto en } Y, \end{aligned}$$

luego  $g$  es identificación.

□

## Criterio para identificaciones

2d4

TEOREMA 13. Sea  $p : X \longrightarrow Y$  continua. Si existe una función continua  $s : Y \longrightarrow X$  tal que  $p \circ s = \text{id}_Y$ , entonces  $p$  es una identificación.

criterio, sección

*Demostración.* Si  $U \subset Y$  es tal que  $p^{-1}(U)$  es abierto en  $X$ , entonces  $s^{-1}(p^{-1}(U)) = (p \circ s)^{-1}(U) = \text{id}_Y^{-1}(U) = U$  es abierto, por ser  $s$  continua. Como  $p$  es también continua por hipótesis, se tiene que  $U$  es abierto en  $Y$  si y sólo si  $p^{-1}(U)$  es abierto en  $X$ , luego  $p$  es identificación.  $\square$

DEFINICIÓN 13. A  $s : Y \longrightarrow X$  en el teorema anterior se le llama **sección** de  $p$ .

## Propiedades de una sección

TEOREMA 14. Si  $s : Y \longrightarrow X$  es una sección de  $p : X \longrightarrow Y$ , entonces

(I)  $s$  es inyectiva,

(II)  $s$  es un encaje, es decir,  $Y \cong s(Y)$ .

*Demostración.* (I) Si  $y_1, y_2 \in Y$  son tales que  $s(y_1) = s(y_2)$ , entonces  $p(s(y_1)) = p(s(y_2))$ , pero  $p \circ s = \text{id}_Y$ , en consecuencia  $y_1 = y_2$ . Luego  $s$  es inyectiva.

(II) Sea  $r : Y \longrightarrow s(Y)$  la restricción de  $s$  al contradominio  $s(Y)$ . Claro que  $r$  es biyectiva, pues es suprayectiva por construcción e inyectiva por ser  $s$  inyectiva. Más aún,  $r$  es continua, pues  $s$  es continua y  $s(Y) \subset X$ . Sea  $U$  un abierto en  $Y$ . Como  $p$  es continua, entonces  $p^{-1}(U)$  debe ser abierto en  $X$ , además

$$\begin{aligned} r^{-1}(p^{-1}(U) \cap s(Y)) &= s^{-1}(p^{-1}(U) \cap s(Y)) = s^{-1}(p^{-1}(U)) \cap s^{-1}(s(Y)) \\ &= (p \circ s)^{-1}(U) \cap Y, \text{ por inyectividad de } s \\ &= \text{id}_Y^{-1}(U) \cap Y \\ &= U \cap Y = U. \end{aligned}$$

Tomando la imagen bajo  $r$  a ambos lados, se tiene que  $p^{-1}(U) \cap s(Y) = r(U)$ , por ser  $r$  suprayectiva. Se sigue que  $r(U)$  es un abierto en  $s(Y)$ . Como  $U$  fue un abierto arbitrario de  $Y$ , entonces  $r$  es una función abierta. Luego, como  $r$  es biyectiva, continua y abierta, entonces  $r$  es un homeomorfismo por 2b1 y por tanto  $s$  es un encaje.  $\square$



## Criterio para identificaciones

2d5

PROPOSICIÓN 5. Si  $f : X \longrightarrow Y$  es continua, suprayectiva y abierta o cerrada, entonces  $f$  es identificación.

criterio, abierta,  
identificación

*Demostración.* Si  $U \subset Y$  es tal que  $f^{-1}(U)$  es abierto en  $X$ , entonces  $U = f(f^{-1}(U))$  debe ser abierto en  $Y$  por ser  $f$  suprayectiva y abierta. Como  $f$  también es continua, entonces  $f$  debe ser identificación por 2d2. Si  $f$  es cerrada, la demostración es similar usando nuevamente 2d2.

□

## Producto de identificaciones

2d6

PROPOSICIÓN 6. Si  $f_1 : X_1 \longrightarrow Y_1$  y  $f_2 : X_2 \longrightarrow Y_2$  son continuas, suprayectivas y abiertas, entonces  $f : X_1 \times X_2 \longrightarrow Y_1 \times Y_2$  definida como  $f(x_1, x_2) = (f_1(x_1), f_2(x_2))$  es identificación.

producto,  
abierto,  
identificación

*Demostración.* Se tiene que  $f$  es continua (munkres1975, p. 112, pendiente de agregar topología producto aquí con etiqueta generación) y también suprayectiva. Más aún,  $f$  es abierta. Se sigue de 2d5 que  $f$  es identificación.  $\square$

## Identificación es casi homeomorfismo

2d7

PROPOSICIÓN 7. Sea  $f : X \longrightarrow Y$  una función biyectiva. Entonces  $f$  es identificación si y sólo si  $f$  es homeomorfismo.

homeomor-  
fismo,  
identificación

*Demostración.* Supongamos que  $f$  es identificación. Si  $U$  es abierto en  $X$ , entonces  $f^{-1}(f(U)) = U$  es abierto en  $X$ , luego  $f(U)$  debe de ser abierto en  $Y$  por ser  $f$  identificación. Luego  $f$  es una función abierta y como es continua y biyectiva, por 2b1  $f$  debe ser homeomorfismo. Recíprocamente, si  $f$  es homeomorfismo, entonces  $f$  es abierta nuevamente por 2b1 y como  $f$  es continua y suprayectiva, entonces  $f$  es identificación por 2d5.  $\square$

## Restricción de identificaciones

2d8

TEOREMA 15. Si  $f : X \longrightarrow Y$  es identificación,  $B$  es abierto o cerrado en  $Y$  y  $A = f^{-1}(B)$ , entonces  $f|_A : A \longrightarrow B$  es identificación.

restricción,  
identificación,  
criterio

*Demostración.* Como  $f$  es continua, entonces  $f|_A : A \longrightarrow Y$  es continua. Más aún, como  $B \subset Y$  y  $f(A) = f(f^{-1}(B)) \subset B$ , entonces  $f|_A : A \longrightarrow B$  es continua. Sea  $U \subset B$  tal que  $f|_A^{-1}(U)$  es abierto en  $A$ . Como  $B$  es abierto en  $Y$ , entonces  $f^{-1}(B) = A$  es abierto en  $X$ , por ser  $f$  continua y por tanto  $f|_A^{-1}(U)$  es abierto en  $X$ . Pero

$$f|_A^{-1}(U) = f^{-1}(U) \cap A = f^{-1}(U) \cap f^{-1}(B) = f^{-1}(U \cap B) = f^{-1}(U),$$

por ser  $U \subset B$ , así que  $f^{-1}(U)$  es abierto en  $X$ . Como  $f$  es identificación, esto implica que  $U$  es abierto en  $Y$  y por tanto  $U$  es también abierto en  $B$ , pues  $U = U \cap B$ . Como  $U$  fue arbitrario, entonces  $f|_A$  es identificación. Si  $B$  es cerrado la demostración es similar.  $\square$

## Propiedad universal de las identificaciones

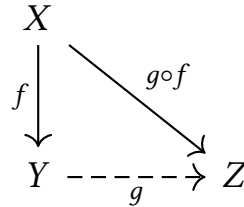
2d9

TEOREMA 16. Sea  $f : X \longrightarrow Y$  una función. Entonces  $f$  es identificación si y sólo si se cumplen las siguientes condiciones:

propiedad  
universal,  
identificación

(I)  $f$  es continua.

(II) Una función  $g : Y \longrightarrow Z$  es continua si y sólo si  $g \circ f$  es continua.



*Demostración.* Supóngase primero que  $f$  es identificación. Entonces  $f$  es continua y se tiene (I). Sea  $g : Y \longrightarrow Z$  una función. Si  $g$  es continua, entonces  $g \circ f$  es continua por ser composición de funciones continuas. Si  $g \circ f$  es continua y  $U$  es un abierto en  $Z$ , se tiene que  $(g \circ f)^{-1}(U) = f^{-1}(g^{-1}(U))$  es abierto en  $X$  y por tanto  $g^{-1}(U)$  es abierto en  $Y$  por ser  $f$  identificación. Como  $U$  fue arbitrario, entonces  $g$  es continua y hemos probado (II).

Suponga ahora que se verifican las condiciones y sean  $\mathcal{T}$  la topología en  $Y$  y  $\mathcal{T}_f$  la topología coinducida por  $f$  en  $Y$ . Definase  $f' : X \longrightarrow (Y, \mathcal{T}_f)$  como  $f'(x) = f(x)$ ,  $\forall x \in X$ . Se tiene que  $f'$  es continua, pues si  $U$  es abierto en  $(Y, \mathcal{T}_f)$ ,

entonces  $f'^{-1}(U) = f^{-1}(U)$ , el cual es abierto en  $X$ , pues  $\mathcal{T}_f$  hace continua a  $f$ . Más aún, se tiene que  $f' = \text{id}_Y \circ f$ , donde  $\text{id}_Y : (Y, \mathcal{T}) \longrightarrow (Y, \mathcal{T}_f)$ , luego la condición (II) implica que  $\text{id}_Y$  es continua, así que  $\mathcal{T}_f \subset \mathcal{T}$ . Además, por la condición (I), la topología  $\mathcal{T}$  hace continua a  $f$  y en consecuencia  $\mathcal{T} \subset \mathcal{T}_f$ . Se sigue que  $\mathcal{T} = \mathcal{T}_f$ , es decir,  $f$  es una identificación.  $\square$

## Definición de espacio cociente

2d10

DEFINICIÓN 14. Si  $X$  es un espacio topológico y  $\sim$  es una relación de equivalencia en  $X$ , se le llamará **espacio cociente** a  $X/\sim$  con la topología de identificación coinducida por la proyección canónica  $p : X \longrightarrow X/\sim$ . Se dirá que  $X/\sim$  tiene la **topología cociente**.

cociente,  
topología

DEFINICIÓN 15. A la proyección canónica  $p : X \longrightarrow X/\sim$  vista como identificación se le llamará **aplicación cociente**.

*Observación.* Si  $x \in X$ , entonces  $p^{-1}(\{[x]\}) = [x]$ .

## Propiedades de saturación

2d10a

DEFINICIÓN 16. Si  $p : X \longrightarrow X/\sim$  es una aplicación cociente y  $A \subset X$ , se define la **saturación** de  $A$  como el conjunto  $p^{-1}(p(A))$ , que contiene a todos los puntos de  $A$  y a todos los puntos en  $X$  equivalentes a algún punto de  $A$ . Se dice que  $A$  es **saturado** si  $A = p^{-1}(p(A))$ .

definición,  
saturación,  
identificación

PROPOSICIÓN 8. Sea  $A \subset X$  un conjunto saturado respecto a una relación de equivalencia  $\sim$  y sea  $p$  la respectiva aplicación cociente. Se tiene que

(I) Si  $A \subset X$  es abierto o cerrado, entonces  $p|_A : A \longrightarrow p(A)$  es una identificación.

(II) Si  $p$  es abierta o cerrada, entonces  $p|_A : A \longrightarrow p(A)$  es una identificación.

*Demostración.* (I) Como  $A$  es saturado, entonces  $A = p^{-1}(p(A))$  y dado que  $p$  es identificación y  $A$  es abierto,  $p(A)$  debe ser abierto en  $X/\sim$ . Y nuevamente, como  $A = p^{-1}(p(A))$ , entonces  $p|_A : A \longrightarrow p(A)$  es una identificación por 2d8.

(II) Sea  $U$  un abierto en  $A$ . Entonces  $U = V \cap A$ , para algún abierto  $V$  de  $X$ . Se tiene que  $p(V \cap A) = p(V) \cap p(A)$ . En efecto, en general se sabe que  $p(V \cap A) \subset p(V) \cap p(A)$ . Si  $y \in p(V) \cap p(A)$ , entonces existen  $v \in V$  y  $a \in A$  tales que  $p(v) = y = p(a)$ , luego  $p(a) \in p(A)$  y por tanto  $p(v) \in p(A)$ , luego  $v \in p^{-1}(p(A)) = A$ , por ser  $A$  saturado. En consecuencia,  $v \in V \cap A$  y por tanto  $y = p(v) \in p(V \cap A)$ . Esto prueba la afirmación. Luego,  $p|_A(U) = p|_A(V \cap A) = p(V \cap A) = p(V) \cap p(A)$ , donde  $p(V)$  es abierto por ser  $p$  una función abierta, así que  $p|_A(U)$  es abierto en  $p(A)$ . Se sigue que  $p|_A$  es también una función abierta y además es continua y suprayectiva. En consecuencia,  $p|_A$  es una identificación.  $\square$



## Espacios cocientes $T_1$

2d10b

TEOREMA 17. Si  $p : X \longrightarrow X/\sim$  es una aplicación cociente y cada elemento de  $X/\sim$  es cerrado en  $X$ , entonces  $X/\sim$  es un espacio  $T_1$ .

espacio  
cociente,  $T_1$

*Demostración.* Sea  $[x] \in X/\sim$ . Por hipótesis  $[x] \subset X$  es cerrado en  $X$ , pero  $[x] = p^{-1}(\{[x]\})$  y como  $p$  es identificación, entonces  $\{[x]\}$  debe ser cerrado en  $X/\sim$ . Se sigue que  $X/\sim$  es un espacio  $T_1$ .  $\square$

## Homeomorfismo inducido por una identificación

2d11

PROPOSICIÓN 9. Sea  $f : X \longrightarrow Y$  una identificación y suprayectiva. Si se define en  $X$  la relación de equivalencia  $x_1 \sim x_2$  si y sólo si  $f(x_1) = f(x_2)$ , entonces  $X/\sim$  es homeomorfo a  $Y$ .

*Demostración.* La relación definida es una relación de equivalencia, para cualquier función  $f$ . Definase  $\tilde{f} : X/\sim \longrightarrow Y$  como  $\tilde{f}([x]) = f(x)$ . Se tiene que  $f$  está bien definida, pues si  $[x_1] = [x_2]$  entonces  $x_1 \sim x_2$ , luego  $f(x_1) = f(x_2)$  por definición de  $\sim$ , es decir,  $\tilde{f}([x_1]) = \tilde{f}([x_2])$ . Nótese que  $\tilde{f} \circ p = f$ , donde  $p : X \longrightarrow X/\sim$  es la aplicación cociente. Se tiene que

- (i)  $\tilde{f}$  es suprayectiva, pues dado  $y \in Y$ , existe  $x \in X$  tal que  $y = f(x)$  por suprayectividad de  $x$ , luego  $[x] \in X/\sim$  es tal que  $\tilde{f}([x]) = f(x) = y$ ,
- (ii)  $\tilde{f}$  es inyectiva, pues si  $[x_1], [x_2] \in X/\sim$  son tales que  $\tilde{f}([x_1]) = \tilde{f}([x_2])$ , entonces  $f(x_1) = f(x_2)$ , luego  $x_1 \sim x_2$  y por tanto  $[x_1] = [x_2]$ .

Existe pues la función inversa  $\tilde{f}^{-1}$ . Como  $f = \tilde{f} \circ p$  es continua y  $p$  es identificación, la propiedad universal de las identificaciones implica que  $\tilde{f}$  es continua. Además, dado que  $p = \tilde{f}^{-1} \circ f$  es continua y  $f$  es identificación, entonces  $\tilde{f}^{-1}$  también debe ser continua. Luego  $\tilde{f}$  es un homeomorfismo.  $\square$

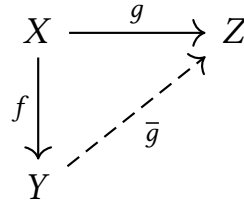
## Caracterización de identificaciones

2d12

DEFINICIÓN 17. Dada una función  $f : X \longrightarrow Y$ , se dice que  $g : X \longrightarrow Z$  es compatible con  $f$  si  $f(x_1) = f(x_2)$  implica que  $g(x_1) = g(x_2)$ , para cada  $x, x' \in X$ .

caracterización,  
compatibilidad,  
identificación

TEOREMA 18. Sea  $f : X \longrightarrow Y$  continua y suprayectiva. Entonces  $f$  es identificación si y sólo si para cada función continua  $g : X \longrightarrow Z$  compatible con  $f$ , existe una única función continua  $\bar{g} : Y \longrightarrow Z$  tal que  $\bar{g} \circ f = g$ .



*Se dice que  $\bar{g}$  es el resultado de pasar  $g$  al cociente.*

*Demostración.* Supóngase que  $f$  es identificación y sea  $g : X \longrightarrow Z$  una función continua compatible con  $f$ . Defínase  $\bar{g} : Y \longrightarrow Z$  como  $\bar{g}(y) = g(x)$ , donde  $x \in X$  es tal que  $y = f(x)$ . Se tiene que  $\bar{g}$  está bien definida, pues si  $y_1, y_2 \in Y$  son tales que  $y_1 = y_2$ , entonces existen  $x_1, x_2 \in X$  tales que  $y_1 = f(x_1)$  y  $y_2 = f(x_2)$ , luego  $f(x_1) = f(x_2)$  y por tanto  $g(x_1) = g(x_2)$  por la compatibilidad de  $g$  con  $f$ , es decir,  $\bar{g}(y_1) = \bar{g}(y_2)$ . Nótese que  $\bar{g} \circ f = g$ .

Si  $\bar{g}' : Y \longrightarrow Z$  es una función tal que  $\bar{g}' \circ f = g$ . Si  $y_1 = y_2$ , entonces existen  $x_1, x_2 \in X$  tales que  $y_1 = f(x_1)$  y  $y_2 = f(x_2)$ , luego  $f(x_1) = f(x_2)$  y por tanto  $g(x_1) = g(x_2)$ , luego  $\bar{g}'(y_1) = \bar{g}'(f(x_1)) = g(x_1) = g(x_2) = \bar{g}(f(x_2)) = \bar{g}(y_2)$ .

En consecuencia,  $\bar{g}' = \bar{g}$  y por lo tanto  $g$  es la única función bajo las hipótesis con esta propiedad. Además, por hipótesis  $g$  es continua y  $f$  es identificación, luego la propiedad universal de las identificaciones implica que  $\bar{g}$  debe ser continua. Más aún, si  $g$  es identificación, como  $f$  es identificación, 2d3 implica que  $\bar{g}$  también es identificación.

Supóngase ahora que se verifica la condición. Defínase en  $X$  la relación de equivalencia  $x_1 \sim x_2$  si y sólo si  $f(x_1) \sim f(x_2)$  y sea  $p : X \longrightarrow X/\sim$  la aplicación cociente. Si  $f(x_1) = f(x_2)$  entonces  $x_1 \sim x_2$  y por tanto  $p(x_1) = p(x_2)$ , en consecuencia  $p$  es compatible con  $f$  y como también  $p$  es continua, por hipótesis debe existir una función continua  $\bar{p} : Y \longrightarrow X/\sim$  tal que  $p = \bar{p} \circ f$ . Por otro lado, nótese que si  $p(x_1) = p(x_2)$ , entonces  $x_1 \sim x_2$  y por tanto  $f(x_1) = f(x_2)$ , es decir,  $f$  es compatible con  $p$ . Como  $p$  es identificación, entonces la primera parte de la demostración implica que existe una función continua  $\bar{f} : X/\sim \longrightarrow Y$  tal que  $f = \bar{f} \circ p$ .

Se tiene entonces que  $p = \bar{p} \circ \bar{f} \circ p$  y  $f = \bar{f} \circ \bar{p} \circ f$ . Afirmamos que  $\bar{f} \circ \bar{p} = \text{id}_Y$ . En efecto, si  $y \in Y$ , entonces existe  $x \in X$  tal que  $y = f(x)$ , luego  $y = f(x) = \bar{f}(\bar{p}(f(x))) = \bar{f}(\bar{p}(y))$ . Como  $y$  es arbitrario esto prueba la afirmación. Similarmente se prueba que  $\bar{p} \circ \bar{f} = \text{id}_{X/\sim}$ . Se tiene pues que  $\bar{f}$  es un homeomorfismo y por tanto identificación, y dado que  $p$  también es identificación y  $f = \bar{f} \circ p$ , entonces  $f$  es identificación.  $\square$

## Homeomorfismo inducido por funciones compatibles

2d12a

COROLARIO 3. Si  $f : X \longrightarrow Y$ ,  $g : X \longrightarrow Z$  son identificaciones, suprayectivas y compatibles entre sí, es decir,  $f(x_1) = f(x_2)$  si y solo si  $g(x_1) = g(x_2)$ ,  $\forall x_1, x_2 \in X$ , entonces  $Y$  y  $Z$  son homeomorfos.

compatibilidad,  
homeomorfis-  
mo

*Demostración.* Por 2d12, como  $f$  es identificación,  $g$  es continua y  $g$  es compatible con  $f$ , entonces existe una función continua  $\bar{g} : Y \longrightarrow Z$  tal que  $\bar{g} \circ f = g$ . Similarmente, como  $g$  es identificación,  $f$  es continua y  $f$  es compatible con  $g$ , entonces existe una función continua  $\bar{f} : Z \longrightarrow Y$  tal que  $\bar{f} \circ g = f$ . Luego  $\bar{g} \circ \bar{f} \circ g = g$  y  $\bar{f} \circ \bar{g} \circ f = f$  y como  $f$  y  $g$  son suprayectivas, entonces  $\bar{g} \circ \bar{f} = \text{id}_Z$  y  $\bar{f} \circ \bar{g} = \text{id}_Y$ . Luego  $\bar{f}$  y  $\bar{g}$  son homeomorfismos.  $\square$

## Funciones que preservan relación

2d12b

DEFINICIÓN 18. Si  $R$  y  $S$  son relaciones en dos conjuntos  $X$  y  $Y$ , respectivamente, se dice que  $f$  **preserva relaciones** si  $x R x'$  implica que  $f(x) S f(x')$ ,  $\forall x \in X$ .

preserva  
relación,  
continuidad

COROLARIO 4. Sean  $R$  y  $S$  relaciones en dos espacios  $X$  y  $Y$ , respectivamente y sean  $p_X, p_Y$  las respectivas aplicaciones cociente. Si  $f : X \longrightarrow Y$  es continua y preserva relaciones, entonces existe una única función continua  $f_* : X/R \longrightarrow Y/S$  tal que  $f_* \circ p_X = p_Y \circ f$ . Es decir, tal que el siguiente diagrama conmuta

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{f} & Y \\ p_X \downarrow & & \downarrow p_Y \\ X/R & \xrightarrow{f_*} & Y/S. \end{array}$$

*Demostración.* Se sigue de 2d12 tomando  $g = p_Y \circ f$ .

□

## Criterio para identificaciones

2d13

TEOREMA 19. Si  $X$  es un espacio compacto,  $Y$  es un espacio de Hausdorff y  $f : X \longrightarrow Y$  es continua y suprayectiva, entonces  $f$  es identificación.

compacto,  
Hausdorff,  
identificación

*Demostración.* Si  $F \subset X$  es cerrado, entonces  $F$  es compacto, luego  $f(F)$  es compacto en  $Y$  por ser  $f$  continua. En consecuencia,  $f(F)$  es cerrado en  $Y$  por ser  $Y$  un espacio de Hausdorff. Luego  $f$  es una función cerrada y al ser continua y suprayectiva, 2d5 implica que  $f$  es identificación.  $\square$