

Topología

1 Propiedades de conjuntos y funciones @propiedades, imagen, imagen inversa	5
1a Definición de unión disjunta @definición, unión disjunta, inclusión	6
1a1 Propiedad universal de la unión disjunta @propiedad universal, unión disjunta, unión ajena	7
1b Definición de relación de equivalencia @definición, relación binaria, relación de equivalencia	8
1b1 Partición por clases de equivalencia @partición, clase de equivalencia	9
1b2 Relación generada por una partición @relación de equivalencia, generación, partición	11
2 Definición de espacio topológico @definición, espacio topológico	12
2a Definición de continuidad @definición, continuidad	13
2a1 Caracterización de continuidad @caracterización, continuidad	14
2a2 Definición de homeomorfismo @definición, homeomorfismo	15
2a2a Proyección estereográfica @homeomorfismo explícito, proyección estereográfica	16
2a2b Restricción continua e inyectiva @contraejemplo, restricción, homeomorfismo	17
2a3 Lema del pegado @cerrados, continuidad, lema del pegado	18
2b Definición de función abierta y cerrada @definición, abierta, cerrada	20
2b1 Criterio para homeomorfismos @criterio, abierta, cerrada	21
2c Definición de suma topológica @definición, suma topológica, unión disjunta	22

2c1 Más fina para continuidad de las inclusiones @comparación, suma topológica	23
2c2 Propiedades de las inclusiones @propiedades, inclusiones, suma topológica	24
2c3 Caracterización de abiertos y cerrados @caracterización, abiertos, suma topológica	26
2c4 Propiedades de abiertos y cerrados @propiedades, abiertos, suma topológica	28
2c4a Propiedades de una sección @propiedades, sección	30
2c5 Criterio para identificaciones @criterio, abierta, identificación	31
2c6 Producto de identificaciones @producto, abierta, identificación	32
2c7 Identificación es casi homeomorfismo @homeomorfismo, identificación	33
2c8 Restricción de identificaciones @restricción, identificación, criterio	34
2c9 Propiedad universal de las identificaciones @propiedad universal, identificación	35
2c10 Definición de espacio cociente @cociente, topología	37
2c10a Propiedades de saturación @definición, saturación, identificación	38
2c10b Espacios cocientes T1 @espacio cociente, T1	40
2c11 Homeomorfismo inducido por una identificación @homeomorfismo, identificación	41
2c12 Caracterización de identificaciones @caracterización, compatibilidad, identificación	42
2c12a Homeomorfismo inducido por funciones compatibles @compatibilidad, homeomorfismo	44
2c13 Criterio para identificaciones @compacto, Hausdorff, identificación	45
2d Definición de topología de identificación @generación, definición	46

2d1 Más fina para continuidad @comparación	47
2d2 Caracterización de identificaciones @caracterización, identificación	48
2d3 Propiedades de las identificaciones @propiedades, composición, identificación	50
2d4 Criterio para identificaciones @criterio, sección	51
2d4a Propiedades de una sección @propiedades, sección	52
2d5 Criterio para identificaciones @criterio, abierta, identificación	53
2d6 Producto de identificaciones @producto, abierta, identificación	54
2d7 Identificación es casi homeomorfismo @homeomorfismo, identificación	55
2d8 Restricción de identificaciones @restricción, identificación, criterio	56
2d9 Propiedad universal de las identificaciones @propiedad universal, identificación	57
2d10 Definición de espacio cociente @cociente, topología	59
2d10a Propiedades de saturación @definición, saturación, identificación	60
2d10b Espacios cocientes T1 @espacio cociente, T1	62
2d11 Homeomorfismo inducido por una identificación @suprayectiva, identificación, homeomorfismo	63
2d12 Caracterización de identificaciones @caracterización, compatibilidad, identificación	64
2d12a Homeomorfismo inducido por funciones compatibles @compatibilidad, homeomorfismo	66
2d12b Funciones que preservan relación @preserva relación, continuidad	67

Teorema 1. Sean $f : X \rightarrow Y$ una función, $A, A_1, A_2, \{A_\alpha\}_{\alpha \in I}$ subconjuntos de X y $B, B_1, B_2, \{B_\beta\}_{\beta \in J}$ subconjuntos de Y , se tiene que

- | | |
|--|--|
| (i) $f(X - A) \subset Y - f(A)$ si f es inyectiva, | (viii) $f(\bigcup_{\alpha \in I} A_\alpha) = \bigcup_{\alpha \in I} f(A_\alpha)$, |
| (ii) $Y - f(A) \subset f(X - A)$ si f es suprayectiva, | (ix) $f(\bigcap_{\alpha \in I} A_\alpha) \subset \bigcap_{\alpha \in I} f(A_\alpha)$, |
| (iii) $f^{-1}(Y - B) = X - f^{-1}(B)$, | (x) $\bigcap_{\alpha \in I} f(A_\alpha) \subset f(\bigcap_{\alpha \in I} A_\alpha)$ si f es inyectiva, |
| (iv) $f(f^{-1}(B)) \subset B$, | (xi) $f^{-1}(\bigcup_{\beta \in J} B_\beta) = \bigcup_{\alpha \in J} f^{-1}(B_\beta)$, |
| (v) $B \subset f(f^{-1}(B))$ si f es suprayectiva, | (xii) $f^{-1}(\bigcap_{\beta \in J} B_\beta) = \bigcap_{\alpha \in J} f^{-1}(B_\beta)$, |
| (vi) $A \subset f^{-1}(f(A))$, | (xiii) $A_1 \subset A_2$ implica $f(A_1) \subset f(A_2)$. |
| (vii) $f^{-1}(f(A)) \subset A$ si f es inyectiva, | (xiv) $B_1 \subset B_2$ implica $f^{-1}(B_1) \subset f^{-1}(B_2)$. |

propiedades,
imagen, imagen
inversa

Demostración. Pendiente. □

Definición de unión disjunta

1a

Definición 1. Dada una familia de conjuntos $\{X_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$, se define su *unión ajena como el conjunto*

$$\coprod_{\lambda \in \Lambda} X_\lambda = \bigcup_{\lambda \in \Lambda} X_\lambda \times \{\lambda\}.$$

Dada $\mu \in \Lambda$, la inclusión $i_\mu : X_\mu \longrightarrow \coprod_{\lambda \in \Lambda} X_\lambda$ es la función definida como $i_\mu(x) = (x, \mu)$, $\forall x \in X_\mu$.

definición, unión
disjunta, inclusión

Propiedad universal de la unión disjunta

1a1

Teorema 2. Dada una familia $\{X_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$ de conjuntos, la unión ajena $\coprod_{\lambda \in \Lambda} X_\lambda$ junto con las inclusiones $i_\mu : X_\mu \rightarrow \coprod_{\lambda \in \Lambda} X_\lambda, \mu \in \Lambda$, está caracterizada por la siguiente propiedad universal

- (i) Dada una familia de funciones $f_\lambda : X_\lambda \rightarrow Y, \lambda \in \Lambda$, existe una única función $f : \coprod_{\lambda \in \Lambda} X_\lambda \rightarrow Y$ tal que $f \circ i_\lambda = f_\lambda, \forall \lambda$.

$$\begin{array}{ccc} X_\lambda & \xrightarrow{f_\lambda} & Y \\ i_\lambda \downarrow & \nearrow f & \\ \coprod_{\lambda \in \Lambda} X_\lambda & & \end{array}$$

Demostración. Pendiente. □

propiedad
universal, unión
disjunta, unión
ajena

Definición de relación de equivalencia

1b

Definición 2. Una relación binaria R en un conjunto X es cualquier subconjunto $R \subset X \times X$. Si $(x, y) \in R$, se escribirá $x R y$.

Definición 3. Una relación binaria R en un conjunto X se dice *relación de equivalencia* si

- (i) $\forall x \in X, x R x,$
- (ii) $x R y \implies y R x,$
- (iii) $x R y \wedge y R z \implies x R z.$

Si $x R y$ se dice que x y y son equivalentes. Las relaciones de equivalencia se usan generalmente para considerar a todos los elementos de un conjunto con alguna propiedad como una sola entidad.

definición,
relación binaria,
relación de
equivalencia

Partición por clases de equivalencia

1b1

Definición 4. Si R es una relación de equivalencia en X y $x \in X$, el conjunto $Rx = \{y \in X \mid y R x\}$ se llama la *clase de equivalencia de x* . También se le suele denotar $[x]$ si no hay riesgo de confusión. A la familia $\{Rx \mid x \in X\}$ se le llamará *conjunto cociente de X por R* y se denominará X/R .

partición, clase de equivalencia

Teorema 3. Si R es una clase de equivalencia en un conjunto X , entonces:

- (i) $\bigcup\{Rx \mid x \in X\} = X$,
- (ii) $x R y$ si y sólo si $Rx = Ry$,
- (iii) dos clases de equivalencia son iguales o son disjuntas.

Demostración. (i) Como $Rx \subset X$, $\forall x \in X$, entonces $\bigcup\{Rx \mid x \in X\} \subset X$. Recíprocamente, si $x \in X$, entonces $x R x$, luego $x \in Rx \subset \bigcup\{Rx \mid x \in X\}$. Esto prueba la afirmación.

(ii) Supóngase que $x R y$. Si $z \in Rx$, entonces $z R x$, luego $z R y$ y por tanto $z \in Ry$, luego $Rx \subset Ry$. Similarmente se tiene que $Rx \subset Ry$ y por tanto $Rx = Ry$. Recíprocamente, si $Rx = Ry$, dado que $x R x$, entonces $x \in Rx = Ry$, por tanto, $x R y$.

(iii) Sean Rx y Ry dos clases de equivalencia. Si $Rx \cap Ry = \emptyset$ no hay nada que probar. Suponga existe $z \in Rx \cap Ry$. Entonces $z R x$ y $z R y$ y en consecuencia $x R y$ por transitividad, así que $Rx = Ry$ por (ii). \square

Corolario 1. Si R es una relación de equivalencia en un conjunto X , entonces la familia $\{Rx \mid x \in X\}$ es una partición del conjunto X

Relación generada por una partición

1b2

Teorema 4. Si $\{A_\alpha\}_{\alpha \in I}$ es una partición de un conjunto X , entonces la relación $R = \bigcup\{A_\alpha \times A_\alpha \mid \alpha \in I\}$, es una relación de equivalencia. Además, $x R y$ si y sólo si $x, y \in A_\alpha$, para algún $\alpha \in I$. Más aún, $X/R = \{A_\alpha \mid \alpha \in I\}$.

Demostración. Pendiente. □

relación de
equivalencia,
generación,
partición

Definición de espacio topológico

2

Definición 5. Sea X un conjunto. Una **topología** sobre X es una familia \mathcal{T} de subconjuntos de X con las siguientes propiedades:

definición,
espacio
topológico

(i) $\emptyset, X \in \mathcal{T}$.

(ii) Si $\{U_i\}_{i \in \mathcal{I}} \subset \mathcal{T}$ entonces $\bigcup_{i \in \mathcal{I}} U_i \in \mathcal{T}$.

(iii) Si $\{U_i\}_{i \in \mathcal{I}} \subset \mathcal{T}$ y \mathcal{I} es finito, entonces $\bigcap_{i \in \mathcal{I}} U_i \in \mathcal{T}$.

A la pareja (X, \mathcal{T}) se le llama **espacio topológico**.

Definición de continuidad

2a

Definición 6. Dados espacios topológicos X y Y , una función $f : X \rightarrow Y$ se dice *continua en X , si U abierto en Y implica que $f^{-1}(U)$ es abierto en X .*

definición,
continuidad

Caracterización de continuidad

2a1

Teorema 5. Sean X y Y espacios topológicos y sea $f : X \rightarrow Y$ una función.
Son equivalentes

caracterización,
continuidad

- (i) f es continua,
- (ii) U abierto en Y implica $f^{-1}(B)$ abierto en X ,
- (iii) $f^{-1}(B^\circ) \subset f^{-1}(B)^\circ$, $\forall B \subset Y$,
- (iv) $f(\overline{A}) \subset \overline{f(A)}$, $\forall A \subset X$,
- (v) F cerrado en Y implica $f^{-1}(F)$ cerrado en X .

Demostración. Pendiente. □

Definición de homeomorfismo

2a2

Definición 7. Un homeomorfismo es una función $f : X \rightarrow Y$ continua y biyectiva, cuya inversa también es continua. En este caso, se dice que los espacios X y Y son homeomorfos.

definición,
homeomorfismo

Proyección estereográfica

2a2a

Teorema 6. La función

$$p : S^n - \{N\} \longrightarrow \mathbb{R}^n$$
$$(x_1, \dots, x_{n+1}) \longmapsto \left(\frac{x_1}{1-x_{n+1}}, \dots, \frac{x_n}{1-x_{n+1}} \right),$$

homeomorfismo
explícito,
proyección
estereográfica

donde $N = (0, \dots, 0, 1)$, es un homeomorfismo con las topologías usuales y su inversa está dada por

$$p^{-1} : \mathbb{R}^n \longrightarrow S^n - \{N\}$$
$$y = (y_1, \dots, y_n) \longmapsto \left(\frac{2y_1}{|y|^2 + 1}, \dots, \frac{2y_n}{|y|^2 + 1}, \frac{|y|^2 - 1}{|y|^2 + 1} \right).$$

A este homeomorfismo se le llama *proyección estereográfica*.

Demostración. Es rutinario verificar que $p \circ p^{-1} = \text{id}_{\mathbb{R}^n}$ y que $p^{-1} \circ p = \text{id}_{S^n - \{N\}}$. Además, p es continua por ser sus componentes funciones racionales en las variables x_1, \dots, x_{n+1} tales que su denominador no se anula. De forma similar, p^{-1} es continua por ser sus funciones componentes productos de las variables y_1, \dots, y_n , con la función $1/(|y|^2 + 1)$, la cuál es continua pues el denominador no se anula y la función norma $|y|$ es continua. \square

Restricción continua e inyectiva

2a2b

Observación. En general, si $f : X \rightarrow Y$ es continua e inyectiva, su restricción $g : X \rightarrow f(X)$, dada por $g(x) = f(x)$, $\forall x \in X$, no es necesariamente un homeomorfismo, aún cuando se tiene que g es biyectiva y continua. Considere los espacios $X = \{0, 1\}$ con la topología $\mathcal{T}_X = \{\emptyset, \{0\}, X\}$ y $Y = \{a, b, c\}$ con la topología $\mathcal{T}_Y = \{\emptyset, \{b\}, Y\}$. La función f definida como $f(0) = c, f(1) = a$, es inyectiva y continua. Sin embargo, su restricción g , dada como $g(0) = a, g(1) = c$, es biyectiva y continua, pero su inversa h dada por $h(a) = 0, h(c) = 1$ no es continua, pues $h^{-1}(\{0\}) = \{a\}$ no es abierto en $f(X)$ con la topología inducida por Y .

contraejemplo,
restricción,
homeomorfismo

Lema del pegado

2a3

Teorema 7. Sea $X = F_1 \cup \dots \cup F_k$, con F_i cerrado en X , para todo $i \in \{1, \dots, k\}$. Si $f_i : F_i \rightarrow Y$ son funciones continuas, para todo $i \in \{1, \dots, k\}$ y tales que

$$f_i|_{F_i \cap F_j} = f_j|_{F_i \cap F_j},$$

para todos $i, j \in \{1, \dots, k\}$, entonces la función $f : X \rightarrow Y$ definida como $f|_{F_i} = f_i$ es continua.

Demostración. Dicha función está bien definida, pues si $x_1, x_2 \in X$ son tales que $x_1 = x_2$, entonces $x_1 \in F_i$ y $x_2 \in F_j$ para algunos $i, j \in \{1, \dots, k\}$ y $x_1 \in F_i \cap F_j$, $x_2 \in F_i \cap F_j$. Luego $f(x_1) = f_i(x_1)$ y $f(x_2) = f_j(x_2)$, por tanto, $f(x_1) = f_i(x_1) = f_i|_{F_i \cap F_j}(x_1) = f_i|_{F_i \cap F_j}(x_2) = f_j|_{F_i \cap F_j}(x_2) = f_j(x_2) = f(x_2)$.

Sea C un cerrado en Y . Se tiene que $f^{-1}(X) = f_1^{-1}(C) \cup \dots \cup f_k^{-1}(C)$. En efecto, si $x \in f^{-1}(C)$, entonces $f(x) \in C$, con $x \in X$. Luego, dado que $X = \bigcup_{n=1}^k F_n$, existe $i \in \{1, \dots, k\}$ tal que $x \in F_i$ y por tanto $f(x) = f_i(x) \in C$. En consecuencia, $x \in f_i^{-1}(C)$ para algún $i \in \{1, \dots, k\}$, es decir, $x \in \bigcup_{n=1}^k f_n^{-1}(C)$. Recíprocamente, si $x \in \bigcup_{n=1}^k f_n^{-1}(C)$, entonces existe $i \in \{1, \dots, k\}$ tal que $x \in f_i^{-1}(C)$, por tanto, $f_i(x) \in C$. Necesariamente $x \in F_i$ por elección de x , así que $f_i(x) = f(x) \in C$, o bien, $x \in f^{-1}(C)$. Esto prueba la afirmación.

Finalmente, como f_i es continua, para cada $i \in \{1, \dots, k\}$, entonces $f_i^{-1}(C)$ es cerrado en F_i , para cada $i \in \{1, \dots, k\}$, pero cada F_i es cerrado en X , así que de hecho $f_i^{-1}(C)$ es cerrado en X , para cada $i \in \{1, \dots, k\}$. Luego $f^{-1}(C)$

cerrados,
continuidad, lema
del pegado

es cerrado en X por ser unión finita de cerrados en X . Como C fue arbitrario,
entonces f debe ser continua. \square

Definición de función abierta y cerrada

2b

Definición 8. Una función $f : X \rightarrow Y$ se dice *abierta* si U abierto en X implica que $f(U)$ es abierto en Y .

definición,
abierta, cerrada

Definición 9. Similarmente, una función $f : X \rightarrow Y$ se dice *cerrada* si F cerrado en X implica que $f(F)$ es cerrado en Y .

Criterio para homeomorfismos

2b1

Teorema 8. Si una función $f : X \rightarrow Y$ es biyectiva, continua y abierta o cerrada, entonces f es un homeomorfismo.

criterio, abierta,
cerrada

Demostración. Como f es biyectiva, existe su inversa $g : Y \rightarrow X$ tal que $g \circ f = \text{id}_X$. Sea U un abierto en X y notemos que $f^{-1}(g^{-1}(U)) = (g \circ f)^{-1}(U) = \text{id}_X^{-1}(U) = U$ y aplicando f a ambos lados obtenemos $g^{-1}(U) = f(U)$ por suprayectividad de f . Como $f(U)$ es abierto por ser f una función abierta, entonces $g^{-1}(U)$ es abierto. Dado que U fue un abierto arbitrario, entonces g es continua y en consecuencia f es un homeomorfismo. Si f es cerrada la demostración es similar. \square

Teorema 9. Si f es un homeomorfismo, entonces f es abierta y cerrada.

Demostración. Sea g la inversa de f . Si U es abierto en X , entonces $g^{-1}(U)$ es abierto en X por ser g continua, pero, de manera similar al teorema anterior, se tiene que $g^{-1}(U) = f(U)$, luego $f(U)$ es abierto y se sigue que f es una función abierta. Similarmente se prueba que f es cerrada. \square

Definición de suma topológica

2c

Definición 10. Dada una familia de espacios topológicos $\{X_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$, se puede generar un nuevo espacio topológico a partir de su unión ajena $X = \coprod_{\lambda \in \Lambda} X_\lambda$ definida en 1a. Consideréñse las inclusiones $i_\mu : X_\mu \longrightarrow X, \mu \in \Lambda$ y sea \mathcal{T}_μ la topología coinducida en X por X_μ a través de i_μ . Se tiene que $\mathcal{S} = \bigcap_{\lambda \in \Lambda} \mathcal{T}_\lambda$ también es una topología sobre X . Esta topología se llamará *topología de la suma en X* . Al espacio X con esta topología se le llamará *suma topológica de los espacios X_λ* .

definición, suma
topológica, unión
disjunta

Más fina para continuidad de las inclusiones

2c1

Proposición 1. Sea $\{X_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$ una familia de espacios topológicos y sea \mathcal{S} la topología de la suma en $X = \coprod_{\lambda \in \Lambda} X_\lambda$. Se tiene que

- (i) \mathcal{S} hace continuas a todas las inclusiones $i_\lambda : X_\mu \longrightarrow X$,
- (ii) \mathcal{S} es la topología más fina con esta propiedad.

*Demuestra*ción. (i) Sea $\mu \in \Lambda$ arbitrario pero fijo. Si U es abierto en X , entonces $U \in \mathcal{S} = \bigcap_{\lambda \in \Lambda} \mathcal{T}_\lambda$, donde \mathcal{T}_λ es la topología coinducida en X por X_λ a través de i_λ . En particular, $U \in \mathcal{T}_\mu$, luego, por definición, $i_\mu^{-1}(U)$ es abierto en X_μ . Por tanto, i_μ es continua y como μ fue arbitrario se tiene el resultado.

(ii) Supóngase que \mathcal{T} es una topología que hace continuas a todas las inclusiones. Si $U \in \mathcal{T}$, entonces $i_\lambda^{-1}(U)$ es abierto en X_λ , para cada $\lambda \in \Lambda$, luego $U \in \mathcal{T}_\lambda$ para cada λ , por definición de \mathcal{T}_λ . En consecuencia, $U \in \bigcap_{\lambda \in \Lambda} \mathcal{T}_\lambda = \mathcal{S}$. Como U fue arbitrario, entonces $\mathcal{T} \subset \mathcal{S}$ y se sigue que \mathcal{S} es la topología más fina que hace continua a todas las inclusiones. \square

comparación,
suma topológica

Propiedades de las inclusiones

2c2

Proposición 2. Sea $\{X_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$ una familia de espacios topológicos y sea $X = \coprod_{\lambda \in \Lambda} X_\lambda$ su suma topológica. Si $\mu \in \Lambda$, se tiene que

propiedades,
inclusiones, suma
topológica

- (i) Si $A \subset X_\mu$, entonces $i_\mu^{-1}(A \times \{\mu\}) = A$,
- (ii) Si $A \subset X_\mu$, entonces $i_\lambda^{-1}(A \times \{\mu\}) = \emptyset$, $\forall \lambda \in \Lambda, \lambda \neq \mu$,
- (iii) Si $A \subset X_\mu$, entonces $i_\mu(A) = A \times \{\mu\}$,
- (iv) Si $B \subset X$, entonces $i_\mu^{-1}(B) \times \{\mu\} = B \cap X_\mu \times \{\mu\}$, $\forall \mu \in \Lambda$,

Demostración. (i) Si $\mu \in \Lambda$ y $A \subset X_\mu$, entonces

$$\begin{aligned} x \in i_\mu^{-1}(A \times \{\mu\}) &\iff i_\mu(x) \in A \times \{\mu\} \\ &\iff (x, \mu) \in A \times \{\mu\} \\ &\iff x \in A. \end{aligned}$$

Esto prueba la afirmación.

(ii) Si $\lambda \neq \mu$, $A \subset X_\mu$ y existiera $x \in i_\lambda^{-1}(A \times \{\mu\})$, entonces $(x, \lambda) \in A \times \{\mu\}$ y por tanto $\lambda = \mu$, contradiciendo la hipótesis.

(iii) Por (i), se tiene que $i_\mu^{-1}(A \times \{\mu\}) = A$ y tomando la imagen bajo i_μ en ambos lados, al ser las inclusiones suprayectivas, se tiene que $A \times \{\mu\} = i_\mu(A)$.

(iv) Sea $\mu \in \Lambda$ y $B \subset X$, entonces

$$\begin{aligned}(x, \lambda) \in i_\mu^{-1}(B) \times \{\mu\} &\iff x \in i_\mu^{-1}(B) \wedge \lambda \in \{\mu\} \wedge x \in X_\mu \\&\iff i_\mu(x) \in B \wedge \lambda = \mu \wedge x \in X_\mu \\&\iff (x, \mu) \in B \wedge \lambda = \mu \wedge (x, \lambda) \in X_\mu \times \{\lambda\} \\&\iff (x, \lambda) \in B \wedge \lambda = \mu \wedge (x, \lambda) \in X_\mu \times \{\mu\} \\&\iff (x, \lambda) \in B \cap X_\mu \times \{\mu\}.\end{aligned}$$

Como μ fue arbitrario, se tiene el resultado. □

Caracterización de abiertos y cerrados

2c3

Teorema 10. Sea $\{X_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$ una familia de espacios topológicos y sea $X = \coprod_{\lambda \in \Lambda} X_\lambda$ su suma topológica. Entonces

- (i) U es abierto en X si y solo si $U \cap X_\lambda \times \{\lambda\}$ es abierto en $X_\lambda \times \{\lambda\}$, $\forall \lambda \in \Lambda$,
- (ii) F es cerrado en X si y solo si $F \cap X_\lambda \times \{\lambda\}$ es cerrado en $X_\lambda \times \{\lambda\}$, $\forall \lambda \in \Lambda$.

Demostración. (i) Si $U \subset X$ es abierto, por definición $U \cap X_\lambda \times \{\lambda\}$ es abierto en $X_\lambda \times \{\lambda\}$, para cada $\lambda \in \Lambda$. Supóngase que se cumple la condición. Nótese que para cada $\lambda \in \Lambda$, la inclusión $i_\lambda : X_\lambda \longrightarrow X_\lambda \times \{\lambda\}$ es continua, además, $U \cap X_\lambda \times \{\lambda\} = i_\lambda^{-1}(U) \times \{\lambda\}$ y en consecuencia $i_\lambda^{-1}(U \cap X_\lambda \times \{\lambda\}) = i_\lambda^{-1}(i_\lambda^{-1}(U) \times \{\lambda\}) = i_\lambda^{-1}(U)$ es abierto en X_λ . Luego $U \in \mathcal{T}_\lambda$ para cada $\lambda \in \Lambda$ y por tanto $U \in \bigcap_{\lambda \in \Lambda} \mathcal{T}_\lambda = \mathcal{S}$, es decir, U es abierto en X .

(ii) Se tiene que

$$\begin{aligned} F \subset X \text{ es cerrado en } X &\iff X - F \text{ es abierto en } X \\ &\iff (X - F) \cap X_\lambda \times \{\lambda\} = X_\lambda \times \{\lambda\} - F \\ &\text{es abierto en } X_\lambda \times \{\lambda\}, \forall \lambda \in \Lambda \\ &\iff F \text{ es cerrado en } X_\lambda \times \{\lambda\}, \forall \lambda \in \Lambda, \end{aligned}$$

por el punto anterior. □

Corolario 2. Sea $\{X_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$ una familia de espacios topológicos y $X = \coprod_{\lambda \in \Lambda} X_\lambda$ su suma topológica. Entonces

caracterización,
abiertos, suma
topológica

(i) U es abierto en X si y sólo si $i_\lambda^{-1}(U)$ es abierto en X_λ , $\forall \lambda \in \Lambda$,

(ii) F es cerrado en X si y sólo si $i_\lambda^{-1}(F)$ es cerrado en X_λ , $\forall \lambda \in \Lambda$.

Propiedades de abiertos y cerrados

2c4

Teorema 11. Si $\{X_\lambda\}_\lambda$ es una familia de espacios topológicos y $X = \coprod_{\lambda \in \Lambda} X_\lambda$ es su suma topológica, entonces

- (i) Si $\mu \in \Lambda$, entonces U es abierto en X_μ si y solo si $U \times \{\mu\}$ es abierto en $X_\mu \times \{\mu\}$.
- (ii) Cada subespacio $X_\lambda \times \{\lambda\}$ de X es abierto y cerrado en X ,
- (iii) Si $\mu \in \Lambda$ y $U \subset X_\mu$, entonces U es abierto en X_μ si y solo si $U \times \{\mu\}$ es abierto en X ,
- (iv) $i_\lambda : X_\lambda \longrightarrow X$ es una función abierta, $\forall \lambda \in \Lambda$.
- (v) $i_\lambda : X_\lambda \longrightarrow X_\lambda \times \{\lambda\}$ es una función abierta, $\forall \lambda \in \Lambda$.
- (vi) $i_\lambda : X_\lambda \longrightarrow X_\lambda \times \{\lambda\}$ es un homeomorfismo.

Demostación. (i) Si $\mu \in \Lambda$ y U es abierto en X_μ , entonces $U \subset X_\mu$ y por (i) se tiene que $i_\mu^{-1}(U \times \{\mu\}) = U$. Luego $U \times \{\mu\}$ debe ser abierto en la topología coinducida en X por X_μ a través de i_μ , es decir, $U \times \{\mu\} \in \mathcal{T}_\mu$. Más aún, si $\lambda \neq \mu$, por (ii) se tiene que $i_\lambda^{-1}(U \times \{\mu\}) = \emptyset$, el cual también es abierto en X_λ . En consecuencia, $U \times \{\mu\} \in \mathcal{T}_\lambda$, para cada $\lambda \in \Lambda$. Luego $U \times \{\mu\} \in \bigcap_{\lambda \in \Lambda} \mathcal{T}_\lambda = \mathcal{S}$, es decir, $U \times \{\mu\}$ es abierto en X .

Supóngase ahora que $U \times \{\mu\}$ es abierto en $X_\mu \times \{\mu\}$. Como la inclusión $i_\mu : X_\mu \longrightarrow X$ es continua y $i_\mu(X_\mu) = X_\mu \times \{\mu\}$, entonces $i_\mu : X_\mu \longrightarrow X_\mu \times \{\mu\}$

propiedades,
abiertos, suma
topológica

también es continua. Como $U \subset X_\mu$, entonces $i_\mu^{-1}(U \times \{\mu\}) = U$ por (i) y se sigue que U es abierto en X_μ .

(ii) Corolario de 2c3. (iii) Se sigue de (i) y (ii). (iv) Se sigue de 2c2 (iii) y del punto anterior. (v). Se sigue del punto anterior. (vi) Es fácil ver que $i_\lambda : X_\lambda \longrightarrow X_\lambda \times \{\lambda\}$ es biyectiva. Es además continua y abierta, luego un homeomorfismo.

□

Propiedades de una sección

2c4a

Teorema 12. Si $s : Y \rightarrow X$ es una sección de $p : X \rightarrow Y$, entonces

- (i) s es inyectiva,
- (ii) s es un encaje, es decir, $Y \cong s(Y)$.

propiedades,
sección

Demostración. (i) Si $y_1, y_2 \in Y$ son tales que $s(y_1) = s(y_2)$, entonces $p(s(y_1)) = p(s(y_2))$, pero $p \circ s = \text{id}_Y$, en consecuencia $y_1 = y_2$. Luego s es inyectiva.

(ii) Sea $r : Y \rightarrow s(Y)$ la restricción de s al contradominio $s(Y)$. Claro que r es biyectiva, pues es suprayectiva por construcción e inyectiva por ser s inyectiva. Más aún, r es continua, pues s es continua y $s(Y) \subset X$. Sea U un abierto en Y . Como p es continua, entonces $p^{-1}(U)$ debe ser abierto en X , además

$$\begin{aligned} r^{-1}(p^{-1}(U) \cap s(Y)) &= s^{-1}(p^{-1}(U) \cap s(Y)) = s^{-1}(p^{-1}(U)) \cap s^{-1}(s(Y)) \\ &= (p \circ s)^{-1}(U) \cap Y, \text{ por inyectividad de } s \\ &= \text{id}_Y^{-1}(U) \cap Y \\ &= U \cap Y = U. \end{aligned}$$

Tomando la imagen bajo r a ambos lados, se tiene que $p^{-1}(U) \cap s(Y) = r(U)$, por ser r suprayectiva. Se sigue que $r(U)$ es un abierto en $s(Y)$. Como U fue un abierto arbitrario de Y , entonces r es una función abierta. Luego, como r es biyectiva, continua y abierta, entonces r es un homeomorfismo por 2b1 y por tanto s es un encaje. \square

Criterio para identificaciones

2c5

Proposición 3. Si $f : X \rightarrow Y$ es continua, suprayectiva y abierta o cerrada, entonces f es identificación.

Demostración. Si $U \subset Y$ es tal que $f^{-1}(U)$ es abierto en X , entonces $U = f(f^{-1}(U))$ debe ser abierto en Y por ser f suprayectiva y abierta. Como f también es continua, entonces f debe ser identificación por 2c2. Si f es cerrada, la demostración es similar usando nuevamente 2c2.

criterio, abierta,
identificación

□

Producto de identificaciones

2c6

Proposición 4. Si $f_1 : X_1 \rightarrow Y_1$ y $f_2 : X_2 \rightarrow Y_2$ son continuas, suprayectivas y abiertas, entonces $f : X_1 \times X_2 \rightarrow Y_1 \times Y_2$ definida como $f(x_1, x_2) = (f_1(x_1), f_2(x_2))$ es identificación.

producto, abierta,
identificación

Demostración. Se tiene que f es continua (munkres1975, p. 112, pendiente de agregar topología producto aquí con etiqueta generación) y también suprayectiva. Más aún, f es abierta. Se sigue de 2c5 que f es identificación. \square

Identificación es casi homeomorfismo

2c7

Proposición 5. Sea $f : X \rightarrow Y$ una función biyectiva. Entonces f es identificación si y sólo si f es homeomorfismo.

Demostración. Supongamos que f es identificación. Si U es abierto en X , entonces $f^{-1}(f(U)) = U$ es abierto en X , luego $f(U)$ debe de ser abierto en Y por ser f identificación. Luego f es una función abierta y como es continua y biyectiva, por 2b1 f debe ser homeomorfismo. Recíprocamente, si f es homeomorfismo, entonces f es abierta nuevamente por 2b1 y como f es continua y suprayectiva, entonces f es identificación por 2c5. \square

homeomorfismo,
identificación

Teorema 13. Si $f : X \rightarrow Y$ es identificación, B es abierto o cerrado en Y y $A = f^{-1}(B)$, entonces $f|_A : A \rightarrow B$ es identificación.

Demostración. Como f es continua, entonces $f|_A : A \rightarrow Y$ es continua. Más aún, como $B \subset Y$ y $f(A) = f(f^{-1}(B)) \subset B$, entonces $f|_A : A \rightarrow B$ es continua. Sea $U \subset B$ tal que $f|_A^{-1}(U)$ es abierto en A . Como B es abierto en Y , entonces $f^{-1}(B) = A$ es abierto en X , por ser f continua y por tanto $f|_A^{-1}(U)$ es abierto en X . Pero

$$f|_A^{-1}(U) = f^{-1}(U) \cap A = f^{-1}(U) \cap f^{-1}(B) = f^{-1}(U \cap B) = f^{-1}(U),$$

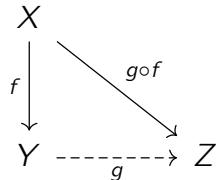
por ser $U \subset B$, así que $f^{-1}(U)$ es abierto en X . Como f es identificación, esto implica que U es abierto en Y y por tanto U es también abierto en B , pues $U = U \cap B$. Como U fue arbitrario, entonces $f|_A$ es identificación. Si B es cerrado la demostración es similar. \square

restricción,
identificación,
criterio

Teorema 14. Sea $f : X \rightarrow Y$ una función. Entonces f es identificación si y sólo si se cumplen las siguientes condiciones:

propiedad
universal,
identificación

- (i) f es continua.
- (ii) Una función $g : Y \rightarrow Z$ es continua si y sólo si $g \circ f$ es continua.



Demostración. Supóngase primero que f es identificación. Entonces f es continua y se tiene (i). Sea $g : Y \rightarrow Z$ una función. Si g es continua, entonces $g \circ f$ es continua por ser composición de funciones continuas. Si $g \circ f$ es continua y U es un abierto en Z , se tiene que $(g \circ f)^{-1}(U) = f^{-1}(g^{-1}(U))$ es abierto en X y por tanto $g^{-1}(U)$ es abierto en Y por ser f identificación. Como U fue arbitrario, entonces g es continua y hemos probado (ii).

Suponga ahora que se verifican las condiciones y sean \mathcal{T} la topología en Y y \mathcal{T}_f la topología coinducida por f en Y . Defínase $f' : X \rightarrow (Y, \mathcal{T}_f)$ como $f'(x) = f(x)$, $\forall x \in X$. Se tiene que f' es continua, pues si U es abierto en (Y, \mathcal{T}_f) ,

entonces $f'^{-1}(U) = f^{-1}(U)$, el cual es abierto en X , pues \mathcal{T}_f hace continua a f . Más aún, se tiene que $f' = \text{id}_Y \circ f$, donde $\text{id}_Y : (Y, \mathcal{T}) \longrightarrow (Y, \mathcal{T}_f)$, luego la condición (ii) implica que id_Y es continua, así que $\mathcal{T}_f \subset \mathcal{T}$. Además, por la condición (i), la topología \mathcal{T} hace continua a f y en consecuencia $\mathcal{T} \subset \mathcal{T}_f$. Se sigue que $\mathcal{T} = \mathcal{T}_f$, es decir, f es una identificación. \square

Definición de espacio cociente

2c10

cociente,
topología

Definición 11. Si X es un espacio topológico y \sim es una relación de equivalencia en X , se le llamará *espacio cociente* a X/\sim con la topología de identificación coinducida por la proyección canónica $p : X \rightarrow X/\sim$. Se dirá que X/\sim tiene la topología cociente.

Definición 12. A la proyección canónica $p : X \rightarrow X/\sim$ vista como identificación se le llamará *aplicación cociente*.

Observación. Si $x \in X$, entonces $p^{-1}(\{[x]\}) = [x]$.

Propiedades de saturación

2c10a

definición,
saturación,
identificación

Definición 13. Si $p : X \rightarrow X/\sim$ es una aplicación cociente y $A \subset X$, se define la *saturación de A como el conjunto $p^{-1}(p(A))$, que contiene a todos los puntos de A y a todos los puntos en X equivalentes a algún punto de A. Se dice que A es saturado si $A = p^{-1}(p(A))$.*

Proposición 6. Sea $A \subset X$ un conjunto saturado respecto a una relación de equivalencia \sim y sea p la respectiva aplicación cociente. Se tiene que

- (i) Si $A \subset X$ es abierto o cerrado, entonces $p|_A : A \rightarrow p(A)$ es una identificación.
- (ii) Si p es abierta o cerrada, entonces $p|_A : A \rightarrow p(A)$ es una identificación.

Demostración. (i) Como A es saturado, entonces $A = p^{-1}(p(A))$ y dado que p es identificación y A es abierto, $p(A)$ debe ser abierto en X/\sim . Y nuevamente, como $A = p^{-1}(p(A))$, entonces $p|_A : A \rightarrow p(A)$ es una identificación por 2c8.

(ii) Sea U un abierto en A . Entonces $U = V \cap A$, para algún abierto V de X . Se tiene que $p(V \cap A) = p(V) \cap p(A)$. En efecto, en general se sabe que $p(V \cap A) \subset p(V) \cap p(A)$. Si $y \in p(V) \cap p(A)$, entonces existen $v \in V$ y $a \in A$ tales que $p(v) = y = p(a)$, luego $p(a) \in p(A)$ y por tanto $p(v) \in p(A)$, luego $v \in p^{-1}(p(A)) = A$, por ser A saturado. En consecuencia, $v \in V \cap A$ y por tanto $y = p(v) \in p(V \cap A)$. Esto prueba la afirmación. Luego, $p|_A(U) = p|_A(V \cap A) = p(V \cap A) = p(V) \cap p(A)$, donde $p(V)$ es abierto por ser p una función abierta, así que $p|_A(U)$ es abierto en $p(A)$. Se sigue que $p|_A$ es también

una función abierta y además es continua y suprayectiva. En consecuencia, $p|_A$ es una identificación. \square

Espacios cocientes T1

2c10b

Teorema 15. Si $p : X \longrightarrow X/\sim$ es una aplicación cociente y cada elemento de X/\sim es cerrado en X , entonces X/\sim es un espacio T_1 .

Demostración. Sea $[x] \in X/\sim$. Por hipótesis $[x] \subset X$ es cerrado en X , pero $[x] = p^{-1}(\{[x]\})$ y como p es identificación, entonces $\{[x]\}$ debe ser cerrado en X/\sim . Se sigue que X/\sim es un espacio T_1 . \square

espacio cociente,
 T_1

Proposición 7. Sea $f : X \rightarrow Y$ una identificación y suprayectiva. Si se define en X la relación de equivalencia $x_1 \sim x_2$ si y sólo si $f(x_1) = f(x_2)$, entonces X/\sim es homeomorfo a Y .

*Demuestra*cción. La relación definida es una relación de equivalencia, para cualquier función f . Defínase $\tilde{f} : X/\sim \rightarrow Y$ como $\tilde{f}([x]) = f(x)$. Se tiene que \tilde{f} está bien definida, pues si $[x_1] = [x_2]$ entonces $x_1 \sim x_2$, luego $f(x_1) = f(x_2)$ por definición de \sim , es decir, $\tilde{f}([x_1]) = \tilde{f}([x_2])$. Nótese que $\tilde{f} \circ p = f$, donde $p : X \rightarrow X/\sim$ es la aplicación cociente. Se tiene que

- (i) \tilde{f} es suprayectiva, pues dado $y \in Y$, existe $x \in X$ tal que $y = f(x)$ por suprayectividad de f , luego $[x] \in X/\sim$ es tal que $\tilde{f}([x]) = f(x) = y$,
- (ii) \tilde{f} es inyectiva, pues si $[x_1], [x_2] \in X/\sim$ son tales que $\tilde{f}([x_1]) = \tilde{f}([x_2])$, entonces $f(x_1) = f(x_2)$, luego $x_1 \sim x_2$ y por tanto $[x_1] = [x_2]$.

Existe pues la función inversa \tilde{f}^{-1} . Como $f = \tilde{f} \circ p$ es continua y p es identificación, la propiedad universal de las identificaciones implica que \tilde{f} es continua. Además, dado que $p = \tilde{f}^{-1} \circ f$ es continua y f es identificación, entonces \tilde{f}^{-1} también debe ser continua. Luego \tilde{f} es un homeomorfismo. \square

Caracterización de identificaciones

2c12

Definición 14. Dada una función $f : X \rightarrow Y$, se dice que $g : X \rightarrow Z$ es compatible con f si $f(x_1) = f(x_2)$ implica que $g(x_1) = g(x_2)$, para cada $x, x' \in X$.

caracterización,
compatibilidad,
identificación

Teorema 16. Sea $f : X \rightarrow Y$ continua y suprayectiva. Entonces f es identificación si y sólo si para cada función continua $g : X \rightarrow Z$ compatible con f , existe una única función continua $\bar{g} : Y \rightarrow Z$ tal que $\bar{g} \circ f = g$.

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{g} & Z \\ f \downarrow & \nearrow \bar{g} & \\ Y & & \end{array}$$

Se dice que \bar{g} es el resultado de pasar g al cociente.

Demuestra. Supóngase que f es identificación y sea $g : X \rightarrow Z$ una función continua compatible con f . Defínase $\bar{g} : Y \rightarrow Z$ como $\bar{g}(y) = g(x)$, donde $x \in X$ es tal que $y = f(x)$. Se tiene que \bar{g} está bien definida, pues si $y_1, y_2 \in Y$ son tales que $y_1 = y_2$, entonces existen $x_1, x_2 \in X$ tales que $y_1 = f(x_1)$ y $y_2 = f(x_2)$, luego $f(x_1) = f(x_2)$ y por tanto $g(x_1) = g(x_2)$ por la compatibilidad de g con f , es decir, $\bar{g}(y_1) = \bar{g}(y_2)$. Nótese que $\bar{g} \circ f = g$.

Si $\bar{g}' : Y \rightarrow Z$ es una función tal que $\bar{g}' \circ f = g$. Si $y_1 = y_2$, entonces existen $x_1, x_2 \in X$ tales que $y_1 = f(x_1)$ y $y_2 = f(x_2)$, luego $f(x_1) = f(x_2)$ y por tanto $g(x_1) = g(x_2)$, luego $\bar{g}'(y_1) = \bar{g}'(f(x_1)) = g(x_1) = g(x_2) = \bar{g}(f(x_2)) = \bar{g}(y_2)$. En consecuencia, $\bar{g}' = \bar{g}$ y por lo tanto g es la única función bajo las hipótesis con esta propiedad. Además, por hipótesis g es continua y f es identificación, luego la propiedad universal de las identificaciones implica que \bar{g} debe ser continua. Más aún, si g es identificación, como f es identificación, 2c3 implica que \bar{g} también es identificación.

Supóngase ahora que se verifica la condición. Defínase en X la relación de equivalencia $x_1 \sim x_2$ si y sólo si $f(x_1) \sim f(x_2)$ y sea $p : X \rightarrow X/\sim$ la aplicación cociente. Si $f(x_1) = f(x_2)$ entonces $x_1 \sim x_2$ y por tanto $p(x_1) = p(x_2)$, en consecuencia p es compatible con f y como también p es continua, por hipótesis debe existir una función continua $\bar{p} : Y \rightarrow X/\sim$ tal que $p = \bar{p} \circ f$. Por otro lado, nótese que si $p(x_1) = p(x_2)$, entonces $x_1 \sim x_2$ y por tanto $f(x_1) = f(x_2)$, es decir, f es compatible con p . Como p es identificación, entonces la primera parte de la demostración implica que existe una función continua $\bar{f} : X/\sim \rightarrow Y$ tal que $f = \bar{f} \circ p$.

Se tiene entonces que $p = \bar{p} \circ \bar{f} \circ p$ y $f = \bar{f} \circ \bar{p} \circ f$. Afirmamos que $\bar{f} \circ \bar{p} = \text{id}_Y$. En efecto, si $y \in Y$, entonces existe $x \in X$ tal que $y = f(x)$, luego $y = f(x) = \bar{f}(\bar{p}(f(x))) = \bar{f}(\bar{p}(y))$. Como y es arbitrario esto prueba la afirmación. Similamente se prueba que $\bar{p} \circ \bar{f} = \text{id}_{X/\sim}$. Se tiene pues que \bar{f} es un homeomorfismo y por tanto identificación, y dado que p también es identificación y $f = \bar{f} \circ p$, entonces f es identificación. \square

Homeomorfismo inducido por funciones compatibles

2c12a

Corolario 3. Si $f : X \rightarrow Y$, $g : X \rightarrow Z$ son identificaciones, suprayectivas y compatibles entre sí, es decir, $f(x_1) = f(x_2)$ si y solo si $g(x_1) = g(x_2)$, $\forall x_1, x_2 \in X$, entonces Y y Z son homeomorfos.

compatibilidad,
homeomorfismo

Demostración. Por 2c12, como f es identificación, g es continua y g es compatible con f , entonces existe una función continua $\bar{g} : Y \rightarrow Z$ tal que $\bar{g} \circ f = g$. Similamente, como g es identificación, f es continua y f es compatible con g , entonces existe una función continua $\bar{f} : Z \rightarrow Y$ tal que $\bar{f} \circ g = f$. Luego $\bar{g} \circ \bar{f} \circ g = g$ y $\bar{f} \circ \bar{g} \circ f = f$ y como f y g son suprayectivas, entonces $\bar{g} \circ \bar{f} = \text{id}_Z$ y $\bar{f} \circ \bar{g} = \text{id}_Y$. Luego \bar{f} y \bar{g} son homeomorfismos. \square

Criterio para identificaciones

2c13

Teorema 17. Si X es un espacio compacto, Y es un espacio de Hausdorff y $f : X \rightarrow Y$ es continua y suprayectiva, entonces f es identificación.

Demostración. Si $F \subset X$ es cerrado, entonces F es compacto, luego $f(F)$ es compacto en Y por ser f continua. En consecuencia, $f(F)$ es cerrado en Y por ser Y un espacio de Hausdorff. Luego f es una función cerrada y al ser continua y suprayectiva, 2c5 implica que f es identificación. \square

compacto,
Hausdorff,
identificación

Definición de topología de identificación

2d

Definición 15. Dados un espacio topológico X , un conjunto Y y una función $f : X \rightarrow Y$, se puede dotar a Y con una topología, a saber, $\{U \subset Y \mid f^{-1}(U) \text{ es abierto en } X\}$. A esta topología se le llamará *topología de identificación o topología coinducida en }Y por X a través de f*.

generación,
definición

Definición 16. Si X y Y son espacios topológicos y $f : X \rightarrow Y$ es una función, se dice que f es una *identificación si la topología de Y es la topología coinducida por f*.

Más fina para continuidad

2d1

comparación

Proposición 8. Sea X un espacio topológico y $f : X \rightarrow Y$ una función. La topología de identificación en Y coinducida por f hace continua a f . Más aún, de entre todas las topologías que hacen continua a f , esta es la más fina.

*Demuestra*ción. Sea \mathcal{T}_f la topología de identificación en Y . Si $U \in \mathcal{T}$, entonces $f^{-1}(U)$ es abierto en X , por definición. Como U fue arbitrario, entonces f debe ser continua, por definición de continuidad.

Sea \mathcal{T} una topología que hace continua a f . Si $U \in \mathcal{T}$, entonces $U \subset Y$ y $f^{-1}(U)$ es abierto en X por definición de continuidad, pero esto implica que $U \in \mathcal{T}_f$ por definición de \mathcal{T}_f . Como U fue arbitrario, entonces $\mathcal{T} \subset \mathcal{T}_f$, y a su vez como \mathcal{T} fue una topología arbitraria que hace continua a f , entonces \mathcal{T}_f debe ser la más fina entre ellas. \square

Caracterización de identificaciones

2d2

Teorema 18. Si $f : X \rightarrow Y$ es una función, son equivalentes

- (i) f es identificación.
- (ii) U es abierto en Y si y sólo si $f^{-1}(U)$ es abierto en X .
- (iii) F es cerrado en Y si y sólo si $f^{-1}(F)$ es cerrado en X .

caracterización,
identificación

Demostración. (i) \Rightarrow (ii). Si f es identificación entonces f es, en particular, continua, y por tanto U abierto en Y implica $f^{-1}(U)$ abierto en X . Supongase ahora que $f^{-1}(U)$ es abierto en X con $U \subset Y$. Entonces U es abierto en X por definición de topología de identificación. Como U fue arbitrario se tiene el resultado.

(ii) \Rightarrow (iii). Se tiene que

$$\begin{aligned} F \text{ es cerrado en } Y &\iff X - F \text{ es abierto en } Y \\ &\iff f^{-1}(X - F) = Y - f^{-1}(F) \quad \text{es abierto en } X, \\ &\qquad\qquad\qquad \text{por hipótesis} \\ &\iff f^{-1}(F) \text{ es cerrado en } X. \end{aligned}$$

(iii) \Rightarrow (ii). Es similar al punto anterior.

(ii) \Rightarrow (i). Sea \mathcal{T} la topología de Y . Si se verifica (ii), entonces la \mathcal{T} hace continua a f . Más aún, si hay otra topología \mathcal{T}' que hace continua a f , entonces

$U \in \mathcal{T}$ implica que $f^{-1}(U)$ es abierto en X , y por tanto $U \in \mathcal{T}$ por hipótesis. Luego $\mathcal{T}' \subset \mathcal{T}$ y como \mathcal{T}' fue arbitraria, entonces \mathcal{T} es de hecho más fina en Y que cualquier otra que haga continua a f . Es fácil verificar que sólo existe una topología sobre Y con esta propiedad y es la topología de identificación. Luego, \mathcal{T} es la topología de identificación coinducida por f , es decir, f es una identificación. \square

Propiedades de las identificaciones

2d3

Proposición 9. Sean $f : X \rightarrow Y$ y $g : Y \rightarrow Z$ funciones. Se verifican las siguientes afirmaciones

propiedades,
composición,
identificación

- (i) $\text{id}_X : X \rightarrow X$ es identificación.
- (ii) Si f y g son identificaciones, entonces $g \circ f$ es identificación.
- (iii) Si f y $g \circ f$ son identificaciones, necesariamente g es identificación.

Demostración. (i) Se sigue de que U es abierto en X si y sólo si $\text{id}_X(U) = U$ es abierto en X .

(ii) Como f y g son identificaciones, entonces, por 2d2,

$$\begin{aligned} U \text{ es abierto en } Z &\iff g^{-1}(U) \text{ es abierto en } Y \\ &\iff f^{-1}(g^{-1}(U)) = (g \circ f)^{-1}(U) \text{ es abierto en } X. \end{aligned}$$

Luego $g \circ f$ es identificación.

(iii) Se tiene que

$$\begin{aligned} U \text{ es abierto en } Z &\iff (g \circ f)^{-1}(U) = f^{-1}(g^{-1}(U)) \text{ es abierto en } X \\ &\iff g^{-1}(U) \text{ es abierto en } Y, \end{aligned}$$

Luego g es identificación. □

Criterio para identificaciones

2d4

Teorema 19. Sea $p : X \rightarrow Y$ continua. Si existe una función continua $s : Y \rightarrow X$ tal que $p \circ s = \text{id}_Y$, entonces p es una identificación.

criterio, sección

Demostración. Si $U \subset Y$ es tal que $p^{-1}(U)$ es abierto en X , entonces

$$s^{-1}(p^{-1}(U)) = (p \circ s)^{-1}(U) = \text{id}_Y(U) = U$$

es abierto, por ser s continua. Como p es también continua por hipótesis, se tiene que U es abierto en Y si y sólo si $p^{-1}(U)$ es abierto en X , luego p es identificación. \square

Definición 17. A $s : Y \rightarrow X$ en el teorema anterior se le llama *sección de p* .

Propiedades de una sección

2d4a

Teorema 20. Si $s : Y \rightarrow X$ es una sección de $p : X \rightarrow Y$, entonces

- (i) s es inyectiva,
- (ii) s es un encaje, es decir, $Y \cong s(Y)$.

propiedades,
sección

Demostración. (i) Si $y_1, y_2 \in Y$ son tales que $s(y_1) = s(y_2)$, entonces $p(s(y_1)) = p(s(y_2))$, pero $p \circ s = \text{id}_Y$, en consecuencia $y_1 = y_2$. Luego s es inyectiva.

(ii) Sea $r : Y \rightarrow s(Y)$ la restricción de s al contradominio $s(Y)$. Claro que r es biyectiva, pues es suprayectiva por construcción e inyectiva por ser s inyectiva. Más aún, r es continua, pues s es continua y $s(Y) \subset X$. Sea U un abierto en Y . Como p es continua, entonces $p^{-1}(U)$ debe ser abierto en X , además

$$\begin{aligned} r^{-1}(p^{-1}(U) \cap s(Y)) &= s^{-1}(p^{-1}(U) \cap s(Y)) = s^{-1}(p^{-1}(U)) \cap s^{-1}(s(Y)) \\ &= (p \circ s)^{-1}(U) \cap Y, \text{ por inyectividad de } s \\ &= \text{id}_Y^{-1}(U) \cap Y \\ &= U \cap Y = U. \end{aligned}$$

Tomando la imagen bajo r a ambos lados, se tiene que $p^{-1}(U) \cap s(Y) = r(U)$, por ser r suprayectiva. Se sigue que $r(U)$ es un abierto en $s(Y)$. Como U fue un abierto arbitrario de Y , entonces r es una función abierta. Luego, como r es biyectiva, continua y abierta, entonces r es un homeomorfismo por 2b1 y por tanto s es un encaje. \square

Criterio para identificaciones

2d5

Proposición 10. Si $f : X \rightarrow Y$ es continua, suprayectiva y abierta o cerrada, entonces f es identificación.

Demostración. Si $U \subset Y$ es tal que $f^{-1}(U)$ es abierto en X , entonces $U = f(f^{-1}(U))$ debe ser abierto en Y por ser f suprayectiva y abierta. Como f también es continua, entonces f debe ser identificación por 2d2. Si f es cerrada, la demostración es similar usando nuevamente 2d2.

criterio, abierta,
identificación

□

Producto de identificaciones

2d6

Proposición 11. Si $f_1 : X_1 \rightarrow Y_1$ y $f_2 : X_2 \rightarrow Y_2$ son continuas, suprayectivas y abiertas, entonces $f : X_1 \times X_2 \rightarrow Y_1 \times Y_2$ definida como $f(x_1, x_2) = (f_1(x_1), f_2(x_2))$ es identificación.

producto, abierta,
identificación

Demostración. Se tiene que f es continua (munkres1975, p. 112, pendiente de agregar topología producto aquí con etiqueta generación) y también suprayectiva. Más aún, f es abierta. Se sigue de 2d5 que f es identificación. \square

Identificación es casi homeomorfismo

2d7

Proposición 12. Sea $f : X \rightarrow Y$ una función biyectiva. Entonces f es identificación si y sólo si f es homeomorfismo.

Demostración. Supongamos que f es identificación. Si U es abierto en X , entonces $f^{-1}(f(U)) = U$ es abierto en X , luego $f(U)$ debe de ser abierto en Y por ser f identificación. Luego f es una función abierta y como es continua y biyectiva, por 2b1 f debe ser homeomorfismo. Recíprocamente, si f es homeomorfismo, entonces f es abierta nuevamente por 2b1 y como f es continua y suprayectiva, entonces f es identificación por 2d5. \square

homeomorfismo,
identificación

Restricción de identificaciones

2d8

Teorema 21. Si $f : X \rightarrow Y$ es identificación, B es abierto o cerrado en Y y $A = f^{-1}(B)$, entonces $f|_A : A \rightarrow B$ es identificación.

Demostración. Como f es continua, entonces $f|_A : A \rightarrow Y$ es continua. Más aún, como $B \subset Y$ y $f(A) = f(f^{-1}(B)) \subset B$, entonces $f|_A : A \rightarrow B$ es continua. Sea $U \subset B$ tal que $f|_A^{-1}(U)$ es abierto en A . Como B es abierto en Y , entonces $f^{-1}(B) = A$ es abierto en X , por ser f continua y por tanto $f|_A^{-1}(U)$ es abierto en X . Pero

$$f|_A^{-1}(U) = f^{-1}(U) \cap A = f^{-1}(U) \cap f^{-1}(B) = f^{-1}(U \cap B) = f^{-1}(U),$$

por ser $U \subset B$, así que $f^{-1}(U)$ es abierto en X . Como f es identificación, esto implica que U es abierto en Y y por tanto U es también abierto en B , pues $U = U \cap B$. Como U fue arbitrario, entonces $f|_A$ es identificación. Si B es cerrado la demostración es similar. \square

restricción,
identificación,
criterio

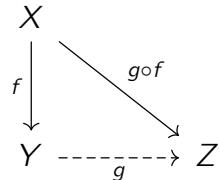
Propiedad universal de las identificaciones

2d9

Teorema 22. Sea $f : X \rightarrow Y$ una función. Entonces f es identificación si y sólo si se cumplen las siguientes condiciones:

propiedad
universal,
identificación

- (i) f es continua.
- (ii) Una función $g : Y \rightarrow Z$ es continua si y sólo si $g \circ f$ es continua.



Demostración. Supóngase primero que f es identificación. Entonces f es continua y se tiene (i). Sea $g : Y \rightarrow Z$ una función. Si g es continua, entonces $g \circ f$ es continua por ser composición de funciones continuas. Si $g \circ f$ es continua y U es un abierto en Z , se tiene que $(g \circ f)^{-1}(U) = f^{-1}(g^{-1}(U))$ es abierto en X y por tanto $g^{-1}(U)$ es abierto en Y por ser f identificación. Como U fue arbitrario, entonces g es continua y hemos probado (ii).

Suponga ahora que se verifican las condiciones y sean \mathcal{T} la topología en Y y \mathcal{T}_f la topología coinducida por f en Y . Defínase $f' : X \rightarrow (Y, \mathcal{T}_f)$ como $f'(x) = f(x)$, $\forall x \in X$. Se tiene que f' es continua, pues si U es abierto en (Y, \mathcal{T}_f) ,

entonces $f'^{-1}(U) = f^{-1}(U)$, el cual es abierto en X , pues \mathcal{T}_f hace continua a f . Más aún, se tiene que $f' = \text{id}_Y \circ f$, donde $\text{id}_Y : (Y, \mathcal{T}) \longrightarrow (Y, \mathcal{T}_f)$, luego la condición (ii) implica que id_Y es continua, así que $\mathcal{T}_f \subset \mathcal{T}$. Además, por la condición (i), la topología \mathcal{T} hace continua a f y en consecuencia $\mathcal{T} \subset \mathcal{T}_f$. Se sigue que $\mathcal{T} = \mathcal{T}_f$, es decir, f es una identificación. \square

Definición de espacio cociente

2d10

cociente,
topología

Definición 18. Si X es un espacio topológico y \sim es una relación de equivalencia en X , se le llamará *espacio cociente* a X/\sim con la topología de identificación coinducida por la proyección canónica $p : X \rightarrow X/\sim$. Se dirá que X/\sim tiene la topología cociente.

Definición 19. A la proyección canónica $p : X \rightarrow X/\sim$ vista como identificación se le llamará *aplicación cociente*.

Observación. Si $x \in X$, entonces $p^{-1}(\{[x]\}) = [x]$.

Propiedades de saturación

2d10a

Definición 20. Si $p : X \rightarrow X/\sim$ es una aplicación cociente y $A \subset X$, se define la *saturación de A como el conjunto $p^{-1}(p(A))$, que contiene a todos los puntos de A y a todos los puntos en X equivalentes a algún punto de A. Se dice que A es saturado si $A = p^{-1}(p(A))$.*

Proposición 13. Sea $A \subset X$ un conjunto saturado respecto a una relación de equivalencia \sim y sea p la respectiva aplicación cociente. Se tiene que

- (i) Si $A \subset X$ es abierto o cerrado, entonces $p|_A : A \rightarrow p(A)$ es una identificación.
- (ii) Si p es abierta o cerrada, entonces $p|_A : A \rightarrow p(A)$ es una identificación.

Demostración. (i) Como A es saturado, entonces $A = p^{-1}(p(A))$ y dado que p es identificación y A es abierto, $p(A)$ debe ser abierto en X/\sim . Y nuevamente, como $A = p^{-1}(p(A))$, entonces $p|_A : A \rightarrow p(A)$ es una identificación por 2d8.

(ii) Sea U un abierto en A . Entonces $U = V \cap A$, para algún abierto V de X . Se tiene que $p(V \cap A) = p(V) \cap p(A)$. En efecto, en general se sabe que $p(V \cap A) \subset p(V) \cap p(A)$. Si $y \in p(V) \cap p(A)$, entonces existen $v \in V$ y $a \in A$ tales que $p(v) = y = p(a)$, luego $p(a) \in p(A)$ y por tanto $p(v) \in p(A)$, luego $v \in p^{-1}(p(A)) = A$, por ser A saturado. En consecuencia, $v \in V \cap A$ y por tanto $y = p(v) \in p(V \cap A)$. Esto prueba la afirmación. Luego, $p|_A(U) = p|_A(V \cap A) = p(V \cap A) = p(V) \cap p(A)$, donde $p(V)$ es abierto por ser p una función abierta, así que $p|_A(U)$ es abierto en $p(A)$. Se sigue que $p|_A$ es también

definición,
saturación,
identificación

una función abierta y además es continua y suprayectiva. En consecuencia, $p|_A$ es una identificación. \square

Espacios cocientes T1

2d10b

Teorema 23. Si $p : X \longrightarrow X/\sim$ es una aplicación cociente y cada elemento de X/\sim es cerrado en X , entonces X/\sim es un espacio T_1 .

Demostración. Sea $[x] \in X/\sim$. Por hipótesis $[x] \subset X$ es cerrado en X , pero $[x] = p^{-1}(\{[x]\})$ y como p es identificación, entonces $\{[x]\}$ debe ser cerrado en X/\sim . Se sigue que X/\sim es un espacio T_1 . \square

espacio cociente,
 T_1

Proposición 14. Sea $f : X \rightarrow Y$ una identificación y suprayectiva. Si se define en X la relación de equivalencia $x_1 \sim x_2$ si y sólo si $f(x_1) = f(x_2)$, entonces X/\sim es homeomorfo a Y .

*Demuestra*cción. La relación definida es una relación de equivalencia, para cualquier función f . Defínase $\tilde{f} : X/\sim \rightarrow Y$ como $\tilde{f}([x]) = f(x)$. Se tiene que \tilde{f} está bien definida, pues si $[x_1] = [x_2]$ entonces $x_1 \sim x_2$, luego $f(x_1) = f(x_2)$ por definición de \sim , es decir, $\tilde{f}([x_1]) = \tilde{f}([x_2])$. Nótese que $\tilde{f} \circ p = f$, donde $p : X \rightarrow X/\sim$ es la aplicación cociente. Se tiene que

- (i) \tilde{f} es suprayectiva, pues dado $y \in Y$, existe $x \in X$ tal que $y = f(x)$ por suprayectividad de f , luego $[x] \in X/\sim$ es tal que $\tilde{f}([x]) = f(x) = y$,
- (ii) \tilde{f} es inyectiva, pues si $[x_1], [x_2] \in X/\sim$ son tales que $\tilde{f}([x_1]) = \tilde{f}([x_2])$, entonces $f(x_1) = f(x_2)$, luego $x_1 \sim x_2$ y por tanto $[x_1] = [x_2]$.

Existe pues la función inversa \tilde{f}^{-1} . Como $f = \tilde{f} \circ p$ es continua y p es identificación, la propiedad universal de las identificaciones implica que \tilde{f} es continua. Además, dado que $p = \tilde{f}^{-1} \circ f$ es continua y f es identificación, entonces \tilde{f}^{-1} también debe ser continua. Luego \tilde{f} es un homeomorfismo. \square

suprayectiva,
identificación,
homeomorfismo

Caracterización de identificaciones

2d12

Definición 21. Dada una función $f : X \rightarrow Y$, se dice que $g : X \rightarrow Z$ es compatible con f si $f(x_1) = f(x_2)$ implica que $g(x_1) = g(x_2)$, para cada $x, x' \in X$.

caracterización,
compatibilidad,
identificación

Teorema 24. Sea $f : X \rightarrow Y$ continua y suprayectiva. Entonces f es identificación si y sólo si para cada función continua $g : X \rightarrow Z$ compatible con f , existe una única función continua $\bar{g} : Y \rightarrow Z$ tal que $\bar{g} \circ f = g$.

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{g} & Z \\ f \downarrow & \nearrow \bar{g} & \\ Y & & \end{array}$$

Se dice que \bar{g} es el resultado de pasar g al cociente.

Demuestra. Supóngase que f es identificación y sea $g : X \rightarrow Z$ una función continua compatible con f . Defínase $\bar{g} : Y \rightarrow Z$ como $\bar{g}(y) = g(x)$, donde $x \in X$ es tal que $y = f(x)$. Se tiene que \bar{g} está bien definida, pues si $y_1, y_2 \in Y$ son tales que $y_1 = y_2$, entonces existen $x_1, x_2 \in X$ tales que $y_1 = f(x_1)$ y $y_2 = f(x_2)$, luego $f(x_1) = f(x_2)$ y por tanto $g(x_1) = g(x_2)$ por la compatibilidad de g con f , es decir, $\bar{g}(y_1) = \bar{g}(y_2)$. Nótese que $\bar{g} \circ f = g$.

Si $\bar{g}' : Y \rightarrow Z$ es una función tal que $\bar{g}' \circ f = g$. Si $y_1 = y_2$, entonces existen $x_1, x_2 \in X$ tales que $y_1 = f(x_1)$ y $y_2 = f(x_2)$, luego $f(x_1) = f(x_2)$ y por tanto $g(x_1) = g(x_2)$, luego $\bar{g}'(y_1) = \bar{g}'(f(x_1)) = g(x_1) = g(x_2) = \bar{g}(f(x_2)) = \bar{g}(y_2)$. En consecuencia, $\bar{g}' = \bar{g}$ y por lo tanto g es la única función bajo las hipótesis con esta propiedad. Además, por hipótesis g es continua y f es identificación, luego la propiedad universal de las identificaciones implica que \bar{g} debe ser continua. Más aún, si g es identificación, como f es identificación, 2d3 implica que \bar{g} también es identificación.

Supóngase ahora que se verifica la condición. Defínase en X la relación de equivalencia $x_1 \sim x_2$ si y sólo si $f(x_1) \sim f(x_2)$ y sea $p : X \rightarrow X/\sim$ la aplicación cociente. Si $f(x_1) = f(x_2)$ entonces $x_1 \sim x_2$ y por tanto $p(x_1) = p(x_2)$, en consecuencia p es compatible con f y como también p es continua, por hipótesis debe existir una función continua $\bar{p} : Y \rightarrow X/\sim$ tal que $p = \bar{p} \circ f$. Por otro lado, nótese que si $p(x_1) = p(x_2)$, entonces $x_1 \sim x_2$ y por tanto $f(x_1) = f(x_2)$, es decir, f es compatible con p . Como p es identificación, entonces la primera parte de la demostración implica que existe una función continua $\bar{f} : X/\sim \rightarrow Y$ tal que $f = \bar{f} \circ p$.

Se tiene entonces que $p = \bar{p} \circ \bar{f} \circ p$ y $f = \bar{f} \circ \bar{p} \circ f$. Afirmamos que $\bar{f} \circ \bar{p} = \text{id}_Y$. En efecto, si $y \in Y$, entonces existe $x \in X$ tal que $y = f(x)$, luego $y = f(x) = \bar{f}(\bar{p}(f(x))) = \bar{f}(\bar{p}(y))$. Como y es arbitrario esto prueba la afirmación. Similamente se prueba que $\bar{p} \circ \bar{f} = \text{id}_{X/\sim}$. Se tiene pues que \bar{f} es un homeomorfismo y por tanto identificación, y dado que p también es identificación y $f = \bar{f} \circ p$, entonces f es identificación. \square

Homeomorfismo inducido por funciones compatibles

2d12a

Corolario 4. Si $f : X \rightarrow Y$, $g : X \rightarrow Z$ son identificaciones, suprayectivas y compatibles entre sí, es decir, $f(x_1) = f(x_2)$ si y solo si $g(x_1) = g(x_2)$, $\forall x_1, x_2 \in X$, entonces Y y Z son homeomorfos.

compatibilidad,
homeomorfismo

Demostración. Por 2d12, como f es identificación, g es continua y g es compatible con f , entonces existe una función continua $\bar{g} : Y \rightarrow Z$ tal que $\bar{g} \circ f = g$. Similamente, como g es identificación, f es continua y f es compatible con g , entonces existe una función continua $\bar{f} : Z \rightarrow Y$ tal que $\bar{f} \circ g = f$. Luego $\bar{g} \circ \bar{f} \circ g = g$ y $\bar{f} \circ \bar{g} \circ f = f$ y como f y g son suprayectivas, entonces $\bar{g} \circ \bar{f} = \text{id}_Z$ y $\bar{f} \circ \bar{g} = \text{id}_Y$. Luego \bar{f} y \bar{g} son homeomorfismos. \square

Funciones que preservan relación

2d12b

Definición 22. Si R y S son relaciones en dos conjuntos X y Y , respectivamente, se dice que f *preserva relaciones* si $x R x'$ implica que $f(x) S f(x')$, $\forall x \in X$.

preserva relación,
continuidad

Corolario 5. Sean R y S relaciones en dos espacios X y Y , respectivamente y sean p_X , p_Y las respectivas aplicaciones cociente. Si $f : X \rightarrow Y$ es continua y preserva relaciones, entonces existe una única función continua $f_* : X/R \rightarrow Y/S$ tal que $f_* \circ p_X = p_Y \circ f$. Es decir, tal que el siguiente diagrama comuta

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{f} & Y \\ p_X \downarrow & & \downarrow p_Y \\ X/R & \xrightarrow{f_*} & Y/S. \end{array}$$

Demostración. Se sigue de 2d12 tomando $g = p_Y \circ f$. □

Criterio para identificaciones

2d13

Teorema 25. Si X es un espacio compacto, Y es un espacio de Hausdorff y $f : X \rightarrow Y$ es continua y suprayectiva, entonces f es identificación.

Demostración. Si $F \subset X$ es cerrado, entonces F es compacto, luego $f(F)$ es compacto en Y por ser f continua. En consecuencia, $f(F)$ es cerrado en Y por ser Y un espacio de Hausdorff. Luego f es una función cerrada y al ser continua y suprayectiva, 2d5 implica que f es identificación. \square

compacto,
Hausdorff,
identificación