Topología

Propiedades de conjuntos y funciones 1

propiedades, imagen, imagen inversa

Teorema 1. Sean $f : X \longrightarrow Y$ una función, $A, A_1, A_2, \{A_\alpha\}_{\alpha \in I}$ subconjuntos de X y $B, B_1, B_2, \{B_\beta\}_{\beta \in J}$ subconjuntos de Y, se tiene que

(i) $f(X - A) \subset Y - f(A)$ si f es inyectiva,

(ii) $Y - f(A) \subset f(X - A)$ si f es suprayectiva,

(iii) $f^{-1}(Y - B) = X - f^{-1}(B)$,

(iv) $f(f^{-1}(B)) \subset B$,

(v) $B \subset f(f^{-1}(B))$ si f es suprayectiva,

(vi) $A \subset f^{-1}(f(A))$,

(vii) $f^{-1}(f(A)) \subset A$ si f es inyectiva,

(viii) $f\left(\bigcup_{\alpha \in I} A_\alpha\right) = \bigcup_{\alpha \in I} f(A_\alpha)$,

(ix) $f\left(\bigcap_{\alpha \in I} A_\alpha\right) \subset \bigcap_{\alpha \in I} f(A_\alpha)$,

(x) $\bigcap_{\alpha \in I} f(A_\alpha) \subset f\left(\bigcap_{\alpha \in I} A_\alpha\right)$ si f es inyectiva,

(xi) $f^{-1}\left(\bigcup_{\beta \in J} B_\alpha\right) = \bigcup_{\alpha \in J} f^{-1}(B_\beta)$,

(xii) $f^{-1}\left(\bigcap_{\beta \in J} B_\beta\right) = \bigcap_{\alpha \in J} f^{-1}(B_\beta)$,

(xiii) $A_1 \subset A_2$ implica $f(A_1) \subset f(A_2)$,

(xiv) $B_1 \subset B_2$ implica $f^{-1}(B_1) \subset f^{-1}(B_2)$.

Demostración. Pendiente. $\square$

Definición de unión disjunta

1a

definición, unión disjunta, inclusión

Definición 1. Dada una famillia de conjuntos $\{X_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$, se define su *unión ajena como el conjunto*

$$\coprod_{\lambda\in\Lambda} X_\lambda = \bigcup_{\lambda\in\Lambda} X_\lambda \times \{\lambda\}.$$

Dada $\mu \in \Lambda$, *la inclusión* $i_\mu : X_\mu \longrightarrow \coprod_{\lambda\in\Lambda} X_\lambda$ *es la función definida como* $i_\mu(x) = (x, \mu)$, $\forall\, x \in X_\mu$.

Propiedad universal de la unión disjunta

1a1

propiedad universal, unión disjunta, unión ajena

Teorema 2. Dada una familia $\{X_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ de conjuntos, la unión ajena $\coprod_{\lambda\in\Lambda} X_\lambda$ junto con las inclusiones $i_\mu : X_\mu \longrightarrow \coprod_{\lambda\in\Lambda} X_\lambda, \mu \in \Lambda$, está caracterizada por la siguiente propiedad universal

(i) Dada una familia de funciones $f_\lambda : X_\lambda \longrightarrow Y, \lambda \in \Lambda$, existe una única función $f : \coprod_{\lambda\in\Lambda} X_\lambda \longrightarrow Y$ tal que $f \circ i_\lambda = f_\lambda$, $\forall\,\lambda$.

$$\begin{tikzcd} X_\lambda \arrow[r, "f_\lambda"] \arrow[d, "i_\lambda"'] & Y \\ \coprod_{\lambda\in\Lambda} X_\lambda \arrow[ur, dashed, "f"'] & \end{tikzcd}$$

Demostración. Pendiente. $\square$

Definición de relación de equivalencia

1b

definición, relación binaria, relación de equivalencia

Definición 2. Una *relación binaria* R *en un conjunto* X *es cualquier subconjunto* $R \subset X \times X$. *Si* $(x, y) \in R$, *se escribirá* $x \, R \, y$.

Definición 3. Una relación binaria R en un conjunto X se dice *relación de equivalencia si*

(i) $\forall x \in X$, $x \, R \, x$,

(ii) $x \, R \, y \implies y \, R \, x$,

(iii) $x \, R \, y \wedge y \, R \, z \implies x \, R \, z$.

Si $x \, R \, y$ *se dice que* x *y* y *son equivalentes. Las relaciones de equivalencia se usan generalmente para considerar a todos los elementos de un conjunto con alguna propiedad como una sola entidad.*

Partición por clases de equivalencia

partición, clase de equivalencia

Definición 4. Si R es una relación de equivalencia en X y $x \in X$, el conjunto $Rx = \{y \in X \mid y\, R\, x\}$ se llama la clase de equivalencia de x. También se le suele denotar $[x]$ si no hay riesgo de confusión. A la familia $\{Rx \mid x \in X\}$ se le llamará conjunto cociente de X por R y se denotará X/R.

Teorema 3. Si R es una clase de equivalencia en un conjunto X, entonces:

(i) $\bigcup\{Rx \mid x \in X\} = X$,

(ii) $x\, R\, y$ si y sólo si $Rx = Ry$,

(iii) dos clases de equivalencia son iguales o son disjuntas.

Demostración. (i) Como $Rx \subset X$, $\forall x \in X$, entonces $\bigcup\{Rx \mid x \in X\} \subset X$. Recíprocamente, si $x \in X$, entonces $x\, R\, x$, luego $x \in Rx \subset \bigcup\{Rx \mid x \in X\}$. Esto prueba la afirmación.

(ii) Supóngase que $x\, R\, y$. Si $z \in Rx$, entones $z\, R\, x$, luego $z\, R\, y$ y por tanto $z \in Ry$, luego $Rx \subset Ry$. Similarmente se tiene que $Rx \subset Ry$ y por tanto $Rx = Ry$. Recíprocamente, si $Rx = Ry$, dado que $x\, R\, x$, entonces $x \in Rx = Ry$, por tanto, $x\, R\, y$.

(iii) Sean Rx y Ry dos clases de equivalencia. Si $Rx \cap Ry = \emptyset$ no hay nada que probar. Suponga existe $z \in Rx \cap Ry$. Entonces $z\, R\, x$ y $z\, R\, y$ y en consecuencia $x\, R\, y$ por transitividad, así que $Rx = Ry$ por (ii). $\square$

Corolario 1. Si R es una relación de equivalencia en un conjunto X, entonces la familia $\{Rx \mid x \in X\}$ es una partición del conjunto X

Relación generada por una partición

1b2

relación de equivalencia, generación, partición

Teorema 4. Si $\{A_\alpha\}_{\alpha\in I}$ es una partición de un conjunto X, entonces la relación $R = \bigcup\{A_\alpha \times A_\alpha \mid \alpha \in I\}$, es una relación de equivalencia. Además, $x\,R\,y$ si y sólo si $x, y \in A_\alpha$, para algún $\alpha \in I$. Más aún, $X/R = \{A_\alpha \mid \alpha \in I\}$.

Demostración. Pendiente. $\square$

Definición de espacio topológico

definición, espacio topológico

Definición 5. Sea X un conjunto. Una **topología** sobre Xes una familia $\mathcal{T}$ de subconjuntos de X con las siguientes propiedades:

(i) $\varnothing, X \in \mathcal{T}$.

(ii) Si $\{U_i\}_{i\in\mathcal{I}} \subset \mathcal{T}$ entonces $\bigcup_{i\in\mathcal{I}} U_i \in \mathcal{T}$.

(iii) Si $\{U_i\}_{i\in\mathcal{I}} \subset \mathcal{T}$ y $\mathcal{I}$ es finito, entonces $\bigcap_{i\in\mathcal{I}} U_i \in \mathcal{T}$.

A la pareja $(X, \mathcal{T})$ se le llama **espacio topológico**.

Definición de continuidad

2a

Definición 6. Dados espacios topológicos X y Y, una función $f : X \longrightarrow Y$ se dice *continua en* X*, si* U *abierto en* Y *implica que* $f^{-1}(U)$ *es abierto en* X*.*

definición, continuidad

Caracterización de continuidad

caracterización, continuidad

Teorema 5. Sean X y Y espacios topológicos y sea $f : X \longrightarrow Y$ una función. Son equivalentes

(i) f es continua,

(ii) U abierto en Y implica $f^{-1}(B)$ abierto en X,

(iii) $f^{-1}(B^\circ) \subset f^{-1}(B)^\circ$, $\forall\, B \subset Y$,

(iv) $f(\overline{A}) \subset \overline{f(A)}$, $\forall\, A \subset X$,

(v) F cerrado en Y implica $f^{-1}(F)$ cerrado en X.

Demostración. Pendiente. $\square$

Definición de homeomorfismo

2a2

Definición 7. Un *homeomorfismo es una función $f : X \longrightarrow Y$ continua y biyectiva, cuya inversa también es continua. En este caso, se dice que los espacios X y Y son homeomorfos.*

definición, homeomorfismo

Proyección estereográfica

2a2a

homeomorfismo explícito, proyección estereográfica

Teorema 6. La función

$$\begin{aligned} p : S^n - \{N\} &\longrightarrow \mathbb{R}^n \\ (x_1, \ldots, x_{n+1}) &\longmapsto \left(\frac{x_1}{1 - x_{n+1}}, \ldots, \frac{x_n}{1 - x_{n+1}} \right), \end{aligned}$$

donde $N = (0, \ldots, 0, 1)$, es un homeomorfismo con las topologías usuales y su inversa está dada por

$$\begin{aligned} p^{-1} : \mathbb{R}^n &\longrightarrow S^n - \{N\} \\ y = (y_1, \ldots, y_n) &\longmapsto \left(\frac{2y_1}{|y|^2 + 1}, \ldots, \frac{2y_n}{|y|^2 + 1}, \frac{|y|^2 - 1}{|y|^2 + 1} \right). \end{aligned}$$

A este homeomorfismo se le llama *proyección estereográfica.*

Demostración. Es rutinario verificar que $p \circ p^{-1} = \mathrm{id}_{\mathbb{R}^n}$ y que $p^{-1} \circ p = \mathrm{id}_{S^n - \{N\}}$. Además, p es continua por ser sus componentes funciones racionales en las variables $x_1, \ldots, x_{n+1}$ tales que su denominador no se anula. De forma similar, p^{-1} es continua por ser sus funciones componentes productos de las variables $y_1, \ldots, y_n$, con la función $1/(|y|^2 + 1)$, la cuál es continua pues el denominador no se anula y la función norma $|y|$ es continua. $\square$

Restricción continua e inyectiva

2a2b

contraejemplo,
restricción,
homeomorfismo

Observación. En general, si $f : X \longrightarrow Y$ es continua e inyectiva, su restricción $g : X \longrightarrow f(X)$, dada por $g(x) = f(x)$, $\forall x \in X$, no es necesariamente un homeomorfismo, aún cuando se tiene que g es biyectiva y continua. Considere los espacios $X = \{0, 1\}$ con la topología $\mathcal{T}_X = \{\emptyset, \{0\}, X\}$ y $Y = \{a, b, c\}$ con la topología $\mathcal{T}_Y = \{\emptyset, \{b\}, Y\}$. La función f definida como $f(0) = c$,$f(1) = a$, es inyectiva y continua. Sin embargo, su restricción g, dada como $g(0) = a$, $g(1) = c$, es biyectiva y continua, pero su inversa h dada por $h(a) = 0$, $h(c) = 1$ no es continua, pues $h^{-1}(\{0\}) = \{a\}$ no es abierto en $f(X)$ con la topología inducida por Y.

Lema del pegado

2a3

cerrados, continuidad, lema del pegado

Teorema 7. Sea $X = F_1 \cup \cdots \cup F_k$, con F_i cerrado en X, para todo $i \in \{1, \ldots, k\}$. Si $f_i : F_i \longrightarrow Y$ son funciones continuas, para todo $i \in \{1, \ldots, k\}$ y tales que

$$f_i|_{F_i \cap F_j} = f_j|_{F_i \cap F_j},$$

para todos $i, j \in \{1, \ldots, k\}$, entonces la función $f : X \longrightarrow Y$ definida como $f|_{F_i} = f_i$ es continua.

Demostración. Dicha función está bien definida, pues si $x_1, x_2 \in X$ son tales que $x_1 = x_2$, entonces $x_1 \in F_i$ y $x_2 \in F_j$ para algunos $i, j \in \{1, \ldots, k\}$ y $x_1 \in F_i \cap F_j$, $x_2 \in F_i \cap F_j$. Luego $f(x_1) = f_i(x_1)$ y $f(x_2) = f_j(x_2)$, por tanto, $f(x_1) = f_i(x_1) = f_i|_{F_i \cap F_j}(x_1) = f_i|_{F_i \cap F_j}(x_2) = f_j|_{F_i \cap F_j}(x_2) = f_j(x_2) = f(x_2)$.

Sea C un cerrado en Y. Se tiene que $f^{-1}(X) = f_1^{-1}(C) \cup \cdots \cup f_k^{-1}(C)$. En efecto, si $x \in f^{-1}(C)$, entonces $f(x) \in C$, con $x \in X$. Luego, dado que $X = \bigcup_{n=1}^{k} F_n$, existe $i \in \{1, \ldots, k\}$ tal que $x \in F_i$ y por tanto $f(x) = f_i(x) \in C$. En consecuencia, $x \in f_i^{-1}(C)$ para algún $i \in \{1, \ldots, k\}$, es decir, $x \in \bigcup_{n=1}^{k} f_n^{-1}(C)$. Recíprocamente, si $x \in \bigcup_{n=1}^{k} f_n^{-1}(C)$, entonces existe $i \in \{1, \ldots, k\}$ tal que $x \in f_i^{-1}(C)$, por tanto, $f_i(x) \in C$. Necesariamente $x \in F_i$ por elección de x, así que $f_i(x) = f(x) \in C$, o bien, $x \in f^{-1}(C)$. Esto prueba la afirmación.

Finalmente, como f_i es continua, para cada $i \in \{1, \ldots, k\}$, entonces $f_i^{-1}(C)$ es cerrado en F_i, para cada $i \in \{1, \ldots, k\}$, pero cada F_i es cerrado en X, así que de hecho $f_i^{-1}(C)$ es cerrado en X, para cada $i \in \{1, \ldots, k\}$. Luego $f^{-1}(C)$

es cerrado en X por ser unión finita de cerrados en X. Como C fue arbitrario, entonces f debe ser continua. $\square$

Definición de función abierta y cerrada

definición, abierta, cerrada

Definición 8. Una función $f : X \longrightarrow Y$ se dice *abierta si U abierto en X implica que $f(U)$ es abierto en Y.*

Definición 9. Similarmente, una función $f : X \longrightarrow Y$ se dice *cerrada si F cerrado en X implica que $f(F)$ es cerrado en Y.*

Criterio para homeomorfismos

criterio, abierta, cerrada

Teorema 8. Si una función $f : X \longrightarrow Y$ es biyectiva, continua y abierta o cerrada, entonces f es un homeomorfismo.

Demostración. Como f es biyectiva, existe su inversa $g : Y \longrightarrow X$ tal que $g \circ f = \mathrm{id}_X$. Sea U un abierto en X y notemos que $f^{-1}(g^{-1}(U)) = (g \circ f)^{-1}(U) = \mathrm{id}_X^{-1}(U) = U$ y aplicando f a ambos lados obtenemos $g^{-1}(U) = f(U)$ por suprayectividad de f. Como $f(U)$ es abierto por ser f una funcion abierta, entonces $g^{-1}(U)$ es abierto. Dado que U fue un abierto arbitrario, entones g es continua y en consecuencia f es un homeomorfismo. Si f es cerrada la demostración es similar. □

Teorema 9. Si f es un homeomorfismo, entonces f es abierta y cerrada.

Demostración. Sea g la inversa de f. Si U es abierto en X, entonces $g^{-1}(U)$ es abierto en X por ser g continua, pero, de manera similar al teorema anterior, se tiene que $g^{-1}(U) = f(U)$, luego $f(U)$ es abierto y se sigue que f es una función abierta. Similarmente se prueba que f es cerrada. □

Definición de suma topológica

2c

Definición 10. Dada una familia de espacios topológicos $\{X_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$, se puede generar un nuevo espacio topológico a partir de su unión ajena $X = \coprod_{\lambda\in\Lambda} X_\lambda$ definida en 1a. Considerénse las inclusiones $i_\mu : X_\mu \longrightarrow X, \mu \in \Lambda$ y sea $\mathcal{T}_\mu$ la topología coinducida en X por X_μ a través de i_μ. Se tiene que $\mathcal{S} = \bigcap_{\lambda\in\Lambda} \mathcal{T}_\lambda$ también es una topología sobre X. Esta topología se llamará *topología de la suma en X. Al espacio X con esta topología se le llamará suma topológica de los espacios X_λ.*

definición, suma topológica, unión disjunta

Más fina para continuidad de las inclusiones

2c1

comparación, suma topológica

Proposición 1. Sea $\{X_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ una familia de espacios topológicos y sea $\mathcal{S}$ la topología de la suma en $X = \coprod_{\lambda\in\Lambda} X_\lambda$. Se tiene que

(i) $\mathcal{S}$ hace continuas a todas las inclusiones $i_\lambda : X_\mu \longrightarrow X$,

(ii) $\mathcal{S}$ es la topología más fina con esta propiedad.

Demostración. (i) Sea $\mu \in \Lambda$ arbitrario pero fijo. Si U es abierto en X, entonces $U \in \mathcal{S} = \bigcap_{\lambda\in\Lambda} \mathcal{T}_\lambda$, donde $\mathcal{T}_\lambda$ es la topología coinducida en X por X_λ a través de i_λ. En particular, $U \in \mathcal{T}_\mu$, luego, por definición, $i_\mu^{-1}(U)$ es abierto en X_μ. Por tanto, i_μ es continua y como μ fue arbitrario se tiene el resultado.

(ii) Supóngase que $\mathcal{T}$ es una topología que hace continuas a todas las inclusiones. Si $U \in \mathcal{T}$, entonces $i_\lambda^{-1}(U)$ es abierto en X_λ, para cada $\lambda \in \Lambda$, luego $U \in \mathcal{T}_\lambda$ para cada λ, por definición de $\mathcal{T}_\lambda$. En consecuencia, $U \in \bigcap_{\lambda\in\Lambda} \mathcal{T}_\lambda = \mathcal{S}$. Como U fue arbitrario, entonces $\mathcal{T} \subset \mathcal{S}$ y se sigue que $\mathcal{S}$ es la topología más fina que hace continua a todas las inclusiones. $\square$

propiedades, inclusiones, suma topológica

Proposición 2. Sea $\{X_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ una familia de espacios topológicos y sea $X = \coprod_{\lambda\in\Lambda} X_\lambda$ su suma topológica. Si $\mu \in \Lambda$, se tiene que

(i) Si $A \subset X_\mu$, entonces $i_\mu^{-1}(A \times \{\mu\}) = A$,

(ii) Si $A \subset X_\mu$, entonces $i_\lambda^{-1}(A \times \{\mu\}) = \emptyset$, $\forall\, \lambda \in \Lambda, \lambda \neq \mu$,

(iii) Si $A \subset X_\mu$, entonces $i_\mu(A) = A \times \{\mu\}$,

(iv) Si $B \subset X$, entonces $i_\mu^{-1}(B) \times \{\mu\} = B \cap X_\mu \times \{\mu\}$, $\forall\, \mu \in \Lambda$,

Demostración. (i) Si $\mu \in \Lambda$ y $A \subset X_\mu$, entonces

$$\begin{aligned} x \in i_\mu^{-1}(A \times \{\mu\}) &\iff i_\mu(x) \in A \times \{\mu\} \\ &\iff (x, \mu) \in A \times \{\mu\} \\ &\iff x \in A. \end{aligned}$$

Esto prueba la afirmación.

(ii) Si $\lambda \neq \mu$, $A \subset X_\mu$ y existiera $x \in i_\lambda^{-1}(A \times \{\mu\})$, entonces $(x, \lambda) \in A \times \{\mu\}$ y por tanto $\lambda = \mu$, contradiciendo la hipótesis.

(iii) Por (i), se tiene que $i_\mu^{-1}(A \times \{\mu\}) = A$ y tomando la imagen bajo i_μ en ambos lados, al ser las inclusiones suprayectivas, se tiene que $A \times \{\mu\} = i_\mu(A)$.

(iv) Sea $\mu \in \Lambda$ y $B \subset X$, entonces

$$\begin{aligned}
(x, \lambda) \in i_\mu^{-1}(B) \times \{\mu\} &\iff x \in i_\mu^{-1}(B) \wedge \lambda \in \{\mu\} \wedge x \in X_\mu \\
&\iff i_\mu(x) \in B \wedge \lambda = \mu \wedge x \in X_\mu \\
&\iff (x, \mu) \in B \wedge \lambda = \mu \wedge (x, \lambda) \in X_\mu \times \{\lambda\} \\
&\iff (x, \lambda) \in B \wedge \lambda = \mu \wedge (x, \lambda) \in X_\mu \times \{\mu\} \\
&\iff (x, \lambda) \in B \cap X_\mu \times \{\mu\}.
\end{aligned}$$

Como μ fue arbitrario, se tiene el resultado. $\square$

caracterización, abiertos, suma topológica

Teorema 10. Sea $\{X_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ una familia de espacios topológicos y sea $X = \coprod_{\lambda\in\Lambda} X_\lambda$ su suma topológica. Entonces

(i) U es abierto en X si y solo si $U \cap X_\lambda \times \{\lambda\}$ es abierto en $X_\lambda \times \{\lambda\}$, $\forall\, \lambda \in \Lambda$,

(ii) F es cerrado en X si y solo si $F \cap X_\lambda \times \{\lambda\}$ es cerrado en $X_\lambda \times \{\lambda\}$, $\forall\, \lambda \in \Lambda$.

Demostración. (i) Si $U \subset X$ es abierto, por definición $U \cap X_\lambda \times \{\lambda\}$ es abierto en $X_\lambda \times \{\lambda\}$, para cada $\lambda \in \Lambda$. Supóngase que se cumple la condición. Nótese que para cada $\lambda \in \Lambda$, la inclusión $i_\lambda : X_\lambda \longrightarrow X_\lambda \times \{\lambda\}$ es continua, además, $U \cap X_\lambda \times \{\lambda\} = i_\lambda^{-1}(U) \times \{\lambda\}$ y en consecuencia $i_\lambda^{-1}(U \cap X_\lambda \times \{\lambda\}) = i_\lambda^{-1}(i_\lambda^{-1}(U) \times \{\lambda\}) = i_\lambda^{-1}(U)$ es abierto en X_λ. Luego $U \in \mathcal{T}_\lambda$ para cada $\lambda \in \Lambda$ y por tanto $U \in \bigcap_{\lambda\in\Lambda} \mathcal{T}_\lambda = \mathcal{S}$, es decir, U es abierto en X.

(ii) Se tiene que

$$
\begin{aligned}
F \subset X \text{ es cerrado en } X &\iff X - F \text{ es abierto en } X \\
&\iff (X - F) \cap X_\lambda \times \{\lambda\} = X_\lambda \times \{\lambda\} - F \\
&\text{es abierto en } X_\lambda \times \{\lambda\},\ \forall\, \lambda \in \Lambda \\
&\iff F \text{ es cerrado en } X_\lambda \times \{\lambda\},\ \forall\, \lambda \in \Lambda,
\end{aligned}
$$

por el punto anterior. □

Corolario 2. Sea $\{X_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ una familia de espacios topológicos y $X = \coprod_{\lambda\in\Lambda} X_\lambda$ su suma topológica. Entonces

(i) U es abierto en X si y sólo si $i_\lambda^{-1}(U)$ es abierto en X_λ, $\forall\, \lambda \in \Lambda$,

(ii) F es cerrado en X si y sólo si $i_\lambda^{-1}(F)$ es cerrado en X_λ, $\forall\, \lambda \in \Lambda$.

propiedades, abiertos, suma topológica

Teorema 11. Si $\{X_\lambda\}_\lambda$ es una familia de espacios topológicos y $X = \coprod_{\lambda\in\Lambda} X_\lambda$ es su suma topológica, entonces

(i) Si $\mu \in \Lambda$, entonces U es abierto en X_μ si y solo si $U \times \{\mu\}$ es abierto en $X_\mu \times \{\mu\}$.

(ii) Cada subespacio $X_\lambda \times \{\lambda\}$ de X es abierto y cerrado en X,

(iii) Si $\mu \in \Lambda$ y $U \subset X_\mu$, entonces U es abierto en X_μ si y solo si $U \times \{\mu\}$ es abierto en X,

(iv) $i_\lambda : X_\lambda \longrightarrow X$ es una función abierta, $\forall\, \lambda \in \Lambda$.

(v) $i_\lambda : X_\lambda \longrightarrow X_\lambda \times \{\lambda\}$ es una función abierta, $\forall\, \lambda \in \Lambda$.

(vi) $i_\lambda : X_\lambda \longrightarrow X_\lambda \times \{\lambda\}$ es un homeomorfismo.

Demostración. (i) Si $\mu \in \Lambda$ y U es abierto en X_μ, entonces $U \subset X_\mu$ y por (i) se tiene que $i_\mu^{-1}(U \times \{\mu\}) = U$. Luego $U \times \{\mu\}$ debe ser abierto en la topología coinducida en X por X_μ a través de i_μ, es decir, $U \times \{\mu\} \in \mathcal{T}_\mu$. Más aún, si $\lambda \neq \mu$, por (ii) se tiene que $i_\lambda^{-1}(U \times \{\mu\}) = \emptyset$, el cual también es abierto en X_λ. En consecuencia, $U \times \{\mu\} \in \mathcal{T}_\lambda$, para cada $\lambda \in \Lambda$. Luego $U \times \{\mu\} \in \bigcap_{\lambda\in\Lambda} \mathcal{T}_\lambda = \mathcal{S}$, es decir, $U \times \{\mu\}$ es abierto en X.

Supóngase ahora que $U \times \{\mu\}$ es abierto en $X_\mu \times \{\mu\}$. Como la inclusión $i_\mu : X_\mu \longrightarrow X$ es continua y $i_\mu(X_\mu) = X_\mu \times \{\mu\}$, entonces $i_\mu : X_\mu \longrightarrow X_\mu \times \{\mu\}$

también es continua. Como $U \subset X_\mu$, entonces $i_\mu^{-1}(U \times \{\mu\}) = U$ por (i) y se sigue que U es abierto en X_μ.

(ii) Corolario de 2c3. (iii) Se sigue de (i) y (ii). (iv) Se sigue de 2c2 (iii) y del punto anterior. (v). Se sigue del punto anterior. (vi) Es fácil ver que $i_\lambda : X_\lambda \longrightarrow X_\lambda \times \{\lambda\}$ es biyectiva. Es además continua y abierta, luego un homeomorfismo.

$\square$

Propiedades de una sección

2c4a

propiedades, sección

Teorema 12. Si $s : Y \longrightarrow X$ es una sección de $p : X \longrightarrow Y$, entonces

(i) s es inyectiva,

(ii) s es un encaje, es decir, $Y \cong s(Y)$.

Demostración. (i) Si $y_1, y_2 \in Y$ son tales que $s(y_1) = s(y_2)$, entonces $p(s(y_1)) = p(s(y_2))$, pero $p \circ s = \mathrm{id}_Y$, en consecuencia $y_1 = y_2$. Luego s es inyectiva.

(ii) Sea $r : Y \longrightarrow s(Y)$ la restricción de s al contradominio $s(Y)$. Claro que r es biyectiva, pues es suprayectiva por construcción e inyectiva por ser s inyectiva. Más aún, r es continua, pues s es continua y $s(Y) \subset X$. Sea U un abierto en Y. Como p es continua, entonces $p^{-1}(U)$ debe ser abierto en X, además

$$\begin{aligned} r^{-1}(p^{-1}(U) \cap s(Y)) &= s^{-1}(p^{-1}(U) \cap s(Y)) = s^{-1}(p^{-1}(U)) \cap s^{-1}(s(Y)) \\ &= (p \circ s)^{-1}(U) \cap Y, \text{ por inyectividad de } s \\ &= \mathrm{id}_Y^{-1}(U) \cap Y \\ &= U \cap Y = U. \end{aligned}$$

Tomando la imagen bajo r a ambos lados, se tiene que $p^{-1}(U) \cap s(Y) = r(U)$, por ser r suprayectiva. Se sigue que $r(U)$ es un abierto en $s(Y)$. Como U fue un abierto arbitrario de Y, entonces r es una función abierta. Luego, como r es biyectiva, continua y abierta, entonces r es un homeomorfismo por 2b1 y por tanto s es un encaje. $\square$

Criterio para identificaciones

2c5

criterio, abierta, identificación

Proposición 3. Si $f : X \longrightarrow Y$ es continua, suprayectiva y abierta o cerrada, entonces f es identificación.

Demostración. Si $U \subset Y$ es tal que $f^{-1}(U)$ es abierto en X, entonces $U = f(f^{-1}(U))$ debe ser abierto en Y por ser f suprayectiva y abierta. Como f también es continua, entonces f debe ser identificación por 2c2. Si f es cerrada, la demostración es similar usando nuevamente 2c2.

$\square$

Producto de identificaciones

producto, abierta, identificación

Proposición 4. Si $f_1 : X_1 \longrightarrow Y_1$ y $f_2 : X_2 \longrightarrow Y_2$ son continuas, suprayectivas y abiertas, entonces $f : X_1 \times X_2 \longrightarrow Y_1 \times Y_2$ definida como $f(x_1, x_2) = (f_1(x_1), f_2(x_2))$ es identificación.

Demostración. Se tiene que f es continua (`munkres1975, p. 112`, pendiente de agregar topología producto aquí con etiqueta `generación`) y también suprayectiva. Más aún, f es abierta. Se sigue de 2c5 que f es identificación. □

Identificación es casi homeomorfismo

homeomorfismo, identificación

Proposición 5. Sea $f : X \longrightarrow Y$ una función biyectiva. Entonces f es identificación si y sólo si f es homeomorfismo.

Demostración. Supongamos que f es identificación. Si U es abierto en X, entonces $f^{-1}(f(U)) = U$ es abierto en X, luego $f(U)$ debe de ser abierto en Y por ser f identificación. Luego f es una función abierta y como es continua y biyectiva, por 2b1 f debe ser homeomorfismo. Recíprocamente, si f es homeomorfismo, entonces f es abierta nuevamente por 2b1 y como f es continua y suprayectiva, entonces f es identificación por 2c5. $\square$

restricción, identificación, criterio

Teorema 13. Si $f : X \longrightarrow Y$ es identificación, B es abierto o cerrado en Y y $A = f^{-1}(B)$, entonces $f|_A : A \longrightarrow B$ es identificación.

Demostración. Como f es continua, entonces $f|_A : A \longrightarrow Y$ es continua. Más aún, como $B \subset Y$ y $f(A) = f(f^{-1}(B)) \subset B$, entonces $f|_A : A \longrightarrow B$ es continua. Sea $U \subset B$ tal que $f|_A^{-1}(U)$ es abierto en A. Como B es abierto en Y, entonces $f^{-1}(B) = A$ es abierto en X, por ser f continua y por tanto $f|_A^{-1}(U)$ es abierto en X. Pero

$$f|_A^{-1}(U) = f^{-1}(U) \cap A = f^{-1}(U) \cap f^{-1}(B) = f^{-1}(U \cap B) = f^{-1}(U),$$

por ser $U \subset B$, así que $f^{-1}(U)$ es abierto en X. Como f es identificación, esto implica que U es abierto en Y y por tanto U es también abierto en B, pues $U = U \cap B$. Como U fue arbitrario, entonces $f|_A$ es identificación. Si B es cerrado la demostración es similar. $\square$

Propiedad universal de las identificaciones 2c9

propiedad universal, identificación

Teorema 14. Sea $f : X \longrightarrow Y$ una función. Entonces f es identificación si y sólo si se cumplen las siguientes condiciones:

(i) f es continua.

(ii) Una función $g : Y \longrightarrow Z$ es continua si y sólo si $g \circ f$ es continua.

$$\begin{tikzcd} X \arrow[d, "f"'] \arrow[dr, "g \circ f"] & \\ Y \arrow[r, dashed, "g"'] & Z \end{tikzcd}$$

Demostración. Supóngase primero que f es identificación. Entonces f es continua y se tiene (i). Sea $g : Y \longrightarrow Z$ una función. Si g es continua, entonces $g \circ f$ es continua por ser composición de funciones continuas. Si $g \circ f$ es continua y U es un abierto en Z, se tiene que $(g \circ f)^{-1}(U) = f^{-1}(g^{-1}(U))$ es abierto en X y por tanto $g^{-1}(U)$ es abierto en Y por ser f identificación. Como U fue arbitrario, entonces g es continua y hemos probado (ii).

Suponga ahora que se verifican las condiciones y sean $\mathcal{T}$ la topología en Y y $\mathcal{T}_f$ la topología coinducida por f en Y. Defínase $f' : X \longrightarrow (Y, \mathcal{T}_f)$ como $f'(x) = f(x)$, $\forall x \in X$. Se tiene que f' es continua, pues si U es abierto en $(Y, \mathcal{T}_f)$, entonces $f'^{-1}(U) = f^{-1}(U)$, el cual es abierto en X, pues $\mathcal{T}_f$ hace continua a f. Más aún, se tiene que $f' = \mathrm{id}_Y \circ f$, donde $\mathrm{id}_Y : (Y, \mathcal{T}) \longrightarrow (Y, \mathcal{T}_f)$, luego la condición (ii) implica que id_Y es continua, así que $\mathcal{T}_f \subset \mathcal{T}$. Además, por la condición (i), la topología $\mathcal{T}$ hace continua a f y en consecuencia $\mathcal{T} \subset \mathcal{T}_f$. Se sigue que $\mathcal{T} = \mathcal{T}_f$, es decir, f es una identificación. $\square$

Definición de espacio cociente

cociente, topología

Definición 11. Si X es un espacio topológico y $\sim$ es una relación de equivalencia en X, se le llamará *espacio cociente a $X/\sim$ con la topología de identificación coinducida por la proyección canónica $p : X \longrightarrow X/\sim$. Se dirá que $X/\sim$ tiene la topología cociente.*

Definición 12. A la proyección canónica $p : X \longrightarrow X/\sim$ vista como identificación se le llamará *aplicación cociente.*

Observación. Si $x \in X$, entonces $p^{-1}(\{[x]\}) = [x]$.

Definición 13. Si $p : X \longrightarrow X/\sim$ es una aplicación cociente y $A \subset X$, se define la *saturación de A como el conjunto $p^{-1}(p(A))$, que contiene a todos los puntos de A y a todos los puntos en X equivalentes a algún punto de A. Se dice que A es saturado si $A = p^{-1}(p(A))$.*

definición, saturación, identificación

Proposición 6. Sea $A \subset X$ un conjunto saturado respecto a una relaión de equivalencia $\sim$ y sea p la respectiva aplicación cociente. Se tiene que

(i) Si $A \subset X$ es abierto o cerrado, entonces $p|_A : A \longrightarrow p(A)$ es una identificación.

(ii) Si p es abierta o cerrada, entonces $p|_A : A \longrightarrow p(A)$ es una identificación.

Demostración. (i) Como A es saturado, entonces $A = p^{-1}(p(A))$ y dado que p es identificación y A es abierto, $p(A)$ debe ser abierto en $X/\sim$. Y nuevamente, como $A = p^{-1}(p(A))$, entonces $p|_A : A \longrightarrow p(A)$ es una identificación por 2c8.

(ii) Sea U un abierto en A. Entonces $U = V \cap A$, para algún abierto V de X. Se tiene que $p(V \cap A) = p(V) \cap p(A)$. En efecto, en general se sabe que $p(V \cap A) \subset p(V) \cap p(A)$. Si $y \in p(V) \cap p(A)$, entonces existen $v \in V$ y $a \in A$ tales que $p(v) = y = p(a)$, luego $p(a) \in p(A)$ y por tanto $p(v) \in p(A)$, luego $v \in p^{-1}(p(A)) = A$, por ser A saturado. En consecuencia, $v \in V \cap A$ y por tanto $y = p(v) \in p(V \cap A)$. Esto prueba la afirmación. Luego, $p|_A(U) = p|_A(V \cap A) = p(V \cap A) = p(V) \cap p(A)$, donde $p(V)$ es abierto por ser p una función abierta, así que $p|_A(U)$ es abierto en $p(A)$. Se sigue que $p|_A$ es también una función abierta y además es continua y suprayectiva. En consecuencia, $p|_A$ es una identificación. $\square$

Espacios cocientes T1

2c10b

espacio cociente, T1

Teorema 15. Si $p : X \longrightarrow X/\sim$ es una aplicación cociente y cada elemento de $X/\sim$ es cerrado en X, entonces $X/\sim$ es un espacio T_1.

Demostración. Sea $[x] \in X/\sim$. Por hipótesis $[x] \subset X$ es cerrado en X, pero $[x] = p^{-1}(\{[x]\})$ y como p es identificación, entonces $\{[x]\}$ debe ser cerrado en $X/\sim$. Se sigue que $X/\sim$ es un espacio T_1. $\square$

Homeomorfismo inducido por una identificación

homeomorfismo, identificación

Proposición 7. Sea $f : X \longrightarrow Y$ una identificación y suprayectiva. Si se define en X la relación de equivalencia $x_1 \sim x_2$ si y sólo si $f(x_1) = f(x_2)$, entonces $X/\sim$ es homeomorfo a Y.

Demostración. La relación definida es una relación de equivalencia, para cualquier función f. Defínase $\widetilde{f} : X/\sim \longrightarrow Y$ como $\widetilde{f}([x]) = f(x)$. Se tiene que f está bien definida, pues si $[x_1] = [x_2]$ entonces $x_1 \sim x_2$, luego $f(x_1) = f(x_2)$ por definición de $\sim$, es decir, $\widetilde{f}([x_1]) = \widetilde{f}([x_2])$. Nótese que $\widetilde{f} \circ p = f$, donde $p : X \longrightarrow X/\sim$ es la aplicación cociente. Se tiene que

(i) $\widetilde{f}$ es suprayectiva, pues dado $y \in Y$, existe $x \in X$ tal que $y = f(x)$ por suprayectividad de x, luego $[x] \in X/\sim$ es tal que $\widetilde{f}([x]) = f(x) = y$,

(ii) $\widetilde{f}$ es inyectiva, pues si $[x_1], [x_2] \in X/\sim$ son tales que $\widetilde{f}([x_1]) = \widetilde{f}([x_2])$, entonces $f(x_1) = f(x_2)$, luego $x_1 \sim x_2$ y por tanto $[x_1] = [x_2]$.

Existe pues la función inversa $\widetilde{f}^{-1}$. Como $f = \widetilde{f} \circ p$ es continua y p es identificación, la propiedad universal de las identificaciones implica que $\widetilde{f}$ es continua. Además, dado que $p = \widetilde{f}^{-1} \circ f$ es continua y f es identificación, entonces $\widetilde{f}^{-1}$ también debe ser continua. Luego $\widetilde{f}$ es un homeomorfismo. $\square$

caracterización, compatibilidad, identificación

Definición 14. Dada una función $f : X \longrightarrow Y$, se dice que $g : X \longrightarrow Z$ es compatible con f si $f(x_1) = f(x_2)$ implica que $g(x_1) = g(x_2)$, para cada $x, x' \in X$.

Teorema 16. Sea $f : X \longrightarrow Y$ continua y suprayectiva. Entonces f es identificación si y sólo si para cada función continua $g : X \longrightarrow Z$ compatible con f, existe una única función continua $\overline{g} : Y \longrightarrow Z$ tal que $\overline{g} \circ f = g$.

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "g"] \arrow[d, "f"'] & Z \\ Y \arrow[ur, dashed, "\overline{g}"'] & \end{tikzcd}$$

Se dice que $\overline{g}$ *es el resultado de pasar* g *al cociente.*

Demostración. Supóngase que f es identificación y sea $g : X \longrightarrow Z$ una función continua compatible con f. Defínase $\overline{g} : Y \longrightarrow Z$ como $\overline{g}(y) = g(x)$, donde $x \in X$ es tal que $y = f(x)$. Se tiene que $\overline{g}$ está bien definida, pues si $y_1, y_2 \in Y$ son tales que $y_1 = y_2$, entonces existen $x_1, x_2 \in X$ tales que $y_1 = f(x_1)$ y $y_2 = f(x_2)$, luego $f(x_1) = f(x_2)$ y por tanto $g(x_1) = g(x_2)$ por la compatibilidad de g con f, es decir, $\overline{g}(y_1) = \overline{g}(y_2)$. Nótese que $\overline{g} \circ f = g$.

Si $\overline{g}' : Y \longrightarrow Z$ es una función tal que $\overline{g}' \circ f = g$. Si $y_1 = y_2$, entonces existen $x_1, x_2 \in X$ tales que $y_1 = f(x_1)$ y $y_2 = f(x_2)$, luego $f(x_1) = f(x_2)$ y por tanto $g(x_1) = g(x_2)$, luego $\overline{g}'(y_1) = \overline{g}'(f(x_1)) = g(x_1) = g(x_2) = \overline{g}(f(x_2)) = \overline{g}(y_2)$. En consecuencia, $\overline{g}' = \overline{g}$ y por lo tanto g es la única función bajo las hipótesis con esta propiedad. Además, por hipótesis g es continua y f es identificación, luego la propiedad universal de las identificaciones implica que $\overline{g}$ debe ser continua. Más aún, si g es identificación, como f es identificación, 2c3 implica que $\overline{g}$ también es identificación.

Supóngase ahora que se verifica la condición. Defínase en X la relación de equivalencia $x_1 \sim x_2$ si y sólo si $f(x_1) \sim f(x_2)$ y sea $p : X \longrightarrow X/\sim$ la aplicación cociente. Si $f(x_1) = f(x_2)$ entonces $x_1 \sim x_2$ y por tanto $p(x_1) = p(x_2)$, en consecuencia p es compatible con f y como también p es continua, por hipótesis debe existir una función continua $\overline{p} : Y \longrightarrow X/\sim$ tal que $p = \overline{p} \circ f$. Por otro lado, nótese que si $p(x_1) = p(x_2)$, entonces $x_1 \sim x_2$ y por tanto $f(x_1) = f(x_2)$, es decir, f es compatible con p. Como p es identificación, entonces la primera parte de la demostración implica que existe una función continua $\overline{f} : X/\sim \longrightarrow Y$ tal que $f = \overline{f} \circ p$.

Se tiene entonces que $p = \overline{p} \circ \overline{f} \circ p$ y $f = \overline{f} \circ \overline{p} \circ f$. Afirmamos que $\overline{f} \circ \overline{p} = \mathrm{id}_Y$. En efecto, si $y \in Y$, entonces existe $x \in X$ tal que $y = f(x)$, luego $y = f(x) = \overline{f}(\overline{p}(f(x))) = \overline{f}(\overline{p}(y))$. Como y es arbitrario esto prueba la afirmación. Similarmente se prueba que $\overline{p} \circ \overline{f} = \mathrm{id}_{X/\sim}$. Se tiene pues que $\overline{f}$ es un homeomorfismo y por tanto identificación, y dado que p también es identificación y $f = \overline{f} \circ p$, entonces f es identificación. $\square$

Homeomorfismo inducido por funciones compatibles

2c12a

compatibilidad, homeomorfismo

Corolario 3. Si $f : X \longrightarrow Y$, $g : X \longrightarrow Z$ son identificaciones, suprayectivas y compatibles entre sí, es decir, $f(x_1) = f(x_2)$ si y solo si $g(x_1) = g(x_2)$, $\forall\, x_1, x_2 \in X$, entonces Y y Z son homeomorfos.

Demostración. Por 2c12, como f es identificación, g es continua y g es compatible con f, entonces existe una función continua $\overline{g} : Y \longrightarrow Z$ tal que $\overline{g} \circ f = g$. Similarmente, como g es identificación, f es continua y f es compatible con g, entonces existe una función continua $\overline{f} : Z \longrightarrow Y$ tal que $\overline{f} \circ g = f$. Luego $\overline{g} \circ \overline{f} \circ g = g$ y $\overline{f} \circ \overline{g} \circ f = f$ y como f y g son suprayectivas, entonces $\overline{g} \circ \overline{f} = \mathrm{id}_Z$ y $\overline{f} \circ \overline{g} = \mathrm{id}_Y$. Luego $\overline{f}$ y $\overline{g}$ son homeomorfismos. □

Criterio para identificaciones

compacto, Hausdorff, identificación

Teorema 17. Si X es un espacio compacto, Y es un espacio de Hausdorff y $f : X \longrightarrow Y$ es continua y suprayectiva, entonces f es identificación.

Demostración. Si $F \subset X$ es cerrado, entonces F es compacto, luego $f(F)$ es compacto en Y por ser f continua. En consecuencia, $f(F)$ es cerrado en Y por ser Y un espacio de Hausdorff. Luego f es una función cerrada y al ser continua y suprayectiva, 2c5 implica que f es identificación. $\square$

Definición de topología de identificación

generación, definición

Definición 15. Dados un espacio topológico X, un conjunto Y y una función $f : X \longrightarrow Y$, se puede dotar a Y con una topología, a saber, $\{U \subset Y \mid f^{-1}(U) \text{ es abierto en } X\}$. A esta topología se le llamará *topología de identificación o topología coinducida en Y por X a través de f.*

Definición 16. Si X y Y son espacios topológicos y $f : X \longrightarrow Y$ es una función, se dice que f es una *identificación si la topología de Y es la topología coinducida por f.*

Más fina para continuidad

comparación

Proposición 8. Sea X un espacio topológico y $f : X \longrightarrow Y$ una función. La topología de identificación en Y coinducida por f hace continua a f. Más aún, de entre todas las topologías que hacen continua a f, esta es la más fina.

Demostración. Sea $\mathcal{T}_f$ la topología de identificación en Y. Si $U \in \mathcal{T}$, entonces $f^{-1}(U)$ es abierto en X, por definición. Como U fue arbitrario, entonces f debe ser continua, por definición de continuidad.

Sea $\mathcal{T}$ una topología que hace continua a f. Si $U \in \mathcal{T}$, entonces $U \subset Y$ y $f^{-1}(U)$ es abierto en X por definición de continuidad, pero esto implica que $U \in \mathcal{T}_f$ por definición de $\mathcal{T}_f$. Como U fue arbitrario, entonces $\mathcal{T} \subset \mathcal{T}_f$, y a su vez como $\mathcal{T}$ fue una topología arbitraria que hace continua a f, entonces $\mathcal{T}_f$ debe ser la más fina entre ellas. $\square$

Caracterización de identificaciones

caracterización, identificación

Teorema 18. Si $f : X \longrightarrow Y$ es una función, son equivalentes

(i) f es identificación.

(ii) U es abierto en Y si y sólo si $f^{-1}(U)$ es abierto en X.

(iii) F es cerrado en Y si y sólo si $f^{-1}(F)$ es cerrado en X.

Demostración. (i) $\implies$ (ii). Si f es identificación entonces f es, en particular, continua, y por tanto U abierto en Y implica $f^{-1}(U)$ abierto en X. Supogase ahora que $f^{-1}(U)$ es abierto en X con $U \subset Y$. Entonces U es abierto en X por definición de topología de identificación. Como U fue arbitrario se tiene el resultado.

(ii) $\implies$ (iii). Se tiene que

$$\begin{aligned} F \text{ es cerrado en } Y &\iff X - F \text{ es abierto en } Y \\ &\iff f^{-1}(X - F) = Y - f^{-1}(F) \qquad \text{es abierto en } X, \\ &\qquad \qquad \text{por hipótesis} \\ &\iff f^{-1}(F) \text{ es cerrado en } X. \end{aligned}$$

(iii) $\implies$ (ii). Es similar al punto anterior.

(ii) $\implies$ (i). Sea $\mathcal{T}$ la topología de Y. Si se verifica (ii), entonces la $\mathcal{T}$ hace continua a f. Más aún, si hay otra topología $\mathcal{T}'$ que hace continua a f, entonces

$U \in \mathcal{T}$ implica que $f^{-1}(U)$ es abierto en X, y por tanto $U \in \mathcal{T}$ por hipótesis. Luego $\mathcal{T}' \subset \mathcal{T}$ y como $\mathcal{T}'$ fue arbitraria, entonces $\mathcal{T}$ es de hecho más fina en Y que cualquier otra que haga continua a f. Es fácil verificar que sólo existe una topología sobre Y con esta propiedad y es la topología de identificación. Luego, $\mathcal{T}$ es la topología de identificación coinducida por f, es decir, f es una identificación. $\square$

Propiedades de las identificaciones

propiedades, composición, identificación

Proposición 9. Sean $f : X \longrightarrow Y$ y $g : Y \longrightarrow Z$ funciones. Se verifican las siguientes afirmaciones

(i) $\mathrm{id}_X : X \longrightarrow X$ es identificación.

(ii) Si f y g son identificaciones, entonces $g \circ f$ es identificación.

(iii) Si f y $g \circ f$ son identificaciones, necesariamente g es identificación.

Demostración. (i) Se sigue de que U es abierto en X si y sólo si $\mathrm{id}_X(U) = U$ es abierto en X.

(ii) Como f y g son identificaciones, entonces, por 2d2,

$$\begin{aligned} U \text{ es abierto en } Z &\iff g^{-1}(U) \text{ es abierto en } Y \\ &\iff f^{-1}(g^{-1}(U)) = (g \circ f)^{-1}(U) \text{ es abierto en } X. \end{aligned}$$

Luego $g \circ f$ es identificación.

(iii) Se tiene que

$$\begin{aligned} U \text{ es abierto en } Z &\iff (g \circ f)^{-1}(U) = f^{-1}(g^{-1}(U)) \text{ es abierto en } X \\ &\iff g^{-1}(U) \text{ es abierto en } Y, \end{aligned}$$

luego g es identificación. $\square$

Criterio para identificaciones

criterio, sección

Teorema 19. Sea $p : X \longrightarrow Y$ continua. Si existe una función continua $s : Y \longrightarrow X$ tal que $p \circ s = \mathrm{id}_Y$, entonces p es una identificación.

Demostración. Si $U \subset Y$ es tal que $p^{-1}(U)$ es abierto en X, entonces

$$s^{-1}(p^{-1}(U)) = (p \circ s)^{-1}(U) = \mathrm{id}_Y(U) = U$$

es abierto, por ser s continua. Como p es también continua por hipótesis, se tiene que U es abierto en Y si y sólo si $p^{-1}(U)$ es abierto en X, luego p es identificación. $\square$

Definición 17. A $s : Y \longrightarrow X$ en el teorema anterior se le llama *sección de p*.

Propiedades de una sección

2d4a

propiedades, sección

Teorema 20. Si $s : Y \longrightarrow X$ es una sección de $p : X \longrightarrow Y$, entonces

(i) s es inyectiva,

(ii) s es un encaje, es decir, $Y \cong s(Y)$.

Demostración. (i) Si $y_1, y_2 \in Y$ son tales que $s(y_1) = s(y_2)$, entonces $p(s(y_1)) = p(s(y_2))$, pero $p \circ s = \mathrm{id}_Y$, en consecuencia $y_1 = y_2$. Luego s es inyectiva.

(ii) Sea $r : Y \longrightarrow s(Y)$ la restricción de s al contradominio $s(Y)$. Claro que r es biyectiva, pues es suprayectiva por construcción e inyectiva por ser s inyectiva. Más aún, r es continua, pues s es continua y $s(Y) \subset X$. Sea U un abierto en Y. Como p es continua, entonces $p^{-1}(U)$ debe ser abierto en X, además

$$\begin{aligned} r^{-1}(p^{-1}(U) \cap s(Y)) &= s^{-1}(p^{-1}(U) \cap s(Y)) = s^{-1}(p^{-1}(U)) \cap s^{-1}(s(Y)) \\ &= (p \circ s)^{-1}(U) \cap Y, \text{ por inyectividad de } s \\ &= \mathrm{id}_Y^{-1}(U) \cap Y \\ &= U \cap Y = U. \end{aligned}$$

Tomando la imagen bajo r a ambos lados, se tiene que $p^{-1}(U) \cap s(Y) = r(U)$, por ser r suprayectiva. Se sigue que $r(U)$ es un abierto en $s(Y)$. Como U fue un abierto arbitrario de Y, entonces r es una función abierta. Luego, como r es biyectiva, continua y abierta, entonces r es un homeomorfismo por 2b1 y por tanto s es un encaje. $\square$

Criterio para identificaciones

2d5

criterio, abierta, identificación

Proposición 10. Si $f : X \longrightarrow Y$ es continua, suprayectiva y abierta o cerrada, entonces f es identificación.

Demostración. Si $U \subset Y$ es tal que $f^{-1}(U)$ es abierto en X, entonces $U = f(f^{-1}(U))$ debe ser abierto en Y por ser f suprayectiva y abierta. Como f también es continua, entonces f debe ser identificación por 2d2. Si f es cerrada, la demostración es similar usando nuevamente 2d2.

$\square$

Producto de identificaciones

2d6

producto, abierta, identificación

Proposición 11. Si $f_1 : X_1 \longrightarrow Y_1$ y $f_2 : X_2 \longrightarrow Y_2$ son continuas, suprayectivas y abiertas, entonces $f : X_1 \times X_2 \longrightarrow Y_1 \times Y_2$ definida como $f(x_1, x_2) = (f_1(x_1), f_2(x_2))$ es identificación.

Demostración. Se tiene que f es continua (`munkres1975, p. 112`, pendiente de agregar topología producto aquí con etiqueta `generación`) y también suprayectiva. Más aún, f es abierta. Se sigue de 2d5 que f es identificación. □

Identificación es casi homeomorfismo

homeomorfismo, identificación

Proposición 12. Sea $f : X \longrightarrow Y$ una función biyectiva. Entonces f es identificación si y sólo si f es homeomorfismo.

Demostración. Supongamos que f es identificación. Si U es abierto en X, entonces $f^{-1}(f(U)) = U$ es abierto en X, luego $f(U)$ debe de ser abierto en Y por ser f identificación. Luego f es una función abierta y como es continua y biyectiva, por 2b1 f debe ser homeomorfismo. Recíprocamente, si f es homeomorfismo, entonces f es abierta nuevamente por 2b1 y como f es continua y suprayectiva, entonces f es identificación por 2d5. $\square$

Restricción de identificaciones

2d8

restricción, identificación, criterio

Teorema 21. Si $f : X \longrightarrow Y$ es identificación, B es abierto o cerrado en Y y $A = f^{-1}(B)$, entonces $f|_A : A \longrightarrow B$ es identificación.

Demostración. Como f es continua, entonces $f|_A : A \longrightarrow Y$ es continua. Más aún, como $B \subset Y$ y $f(A) = f(f^{-1}(B)) \subset B$, entonces $f|_A : A \longrightarrow B$ es continua. Sea $U \subset B$ tal que $f|_A^{-1}(U)$ es abierto en A. Como B es abierto en Y, entonces $f^{-1}(B) = A$ es abierto en X, por ser f continua y por tanto $f|_A^{-1}(U)$ es abierto en X. Pero

$$f|_A^{-1}(U) = f^{-1}(U) \cap A = f^{-1}(U) \cap f^{-1}(B) = f^{-1}(U \cap B) = f^{-1}(U),$$

por ser $U \subset B$, así que $f^{-1}(U)$ es abierto en X. Como f es identificación, esto implica que U es abierto en Y y por tanto U es también abierto en B, pues $U = U \cap B$. Como U fue arbitrario, entonces $f|_A$ es identificación. Si B es cerrado la demostración es similar. $\square$

Propiedad universal de las identificaciones

2d9

propiedad universal, identificación

Teorema 22. Sea $f : X \longrightarrow Y$ una función. Entonces f es identificación si y sólo si se cumplen las siguientes condiciones:

(i) f es continua.

(ii) Una función $g : Y \longrightarrow Z$ es continua si y sólo si $g \circ f$ es continua.

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[d, "f"'] \arrow[dr, "g\circ f"] & \\
Y \arrow[r, dashed, "g"'] & Z
\end{tikzcd}$$

Demostración. Supóngase primero que f es identificación. Entonces f es continua y se tiene (i). Sea $g : Y \longrightarrow Z$ una función. Si g es continua, entonces $g \circ f$ es continua por ser composición de funciones continuas. Si $g \circ f$ es continua y U es un abierto en Z, se tiene que $(g \circ f)^{-1}(U) = f^{-1}(g^{-1}(U))$ es abierto en X y por tanto $g^{-1}(U)$ es abierto en Y por ser f identificación. Como U fue arbitrario, entonces g es continua y hemos probado (ii).

Suponga ahora que se verifican las condiciones y sean $\mathcal{T}$ la topología en Y y $\mathcal{T}_f$ la topología coinducida por f en Y. Defínase $f' : X \longrightarrow (Y, \mathcal{T}_f)$ como $f'(x) = f(x)$, $\forall x \in X$. Se tiene que f' es continua, pues si U es abierto en $(Y, \mathcal{T}_f)$, entonces $f'^{-1}(U) = f^{-1}(U)$, el cual es abierto en X, pues $\mathcal{T}_f$ hace continua a f. Más aún, se tiene que $f' = \mathrm{id}_Y \circ f$, donde $\mathrm{id}_Y : (Y, \mathcal{T}) \longrightarrow (Y, \mathcal{T}_f)$, luego la condición (ii) implica que id_Y es continua, así que $\mathcal{T}_f \subset \mathcal{T}$. Además, por la condición (i), la topología $\mathcal{T}$ hace continua a f y en consecuencia $\mathcal{T} \subset \mathcal{T}_f$. Se sigue que $\mathcal{T} = \mathcal{T}_f$, es decir, f es una identificación. $\square$

Definición de espacio cociente

cociente, topología

Definición 18. Si X es un espacio topológico y $\sim$ es una relación de equivalencia en X, se le llamará *espacio cociente a $X/\sim$ con la topología de identificación coinducida por la proyección canónica $p : X \longrightarrow X/\sim$. Se dirá que $X/\sim$ tiene la topología cociente.*

Definición 19. A la proyección canónica $p : X \longrightarrow X/\sim$ vista como identificación se le llamará *aplicación cociente.*

Observación. Si $x \in X$, entonces $p^{-1}(\{[x]\}) = [x]$.

definición,
saturación,
identificación

Definición 20. Si $p : X \longrightarrow X/\sim$ es una aplicación cociente y $A \subset X$, se define la *saturación de A como el conjunto* $p^{-1}(p(A))$*, que contiene a todos los puntos de A y a todos los puntos en X equivalentes a algún punto de A. Se dice que A es saturado si* $A = p^{-1}(p(A))$.

Proposición 13. Sea $A \subset X$ un conjunto saturado respecto a una relaión de equivalencia $\sim$ y sea p la respectiva aplicación cociente. Se tiene que

(i) Si $A \subset X$ es abierto o cerrado, entonces $p|_A : A \longrightarrow p(A)$ es una identificación.

(ii) Si p es abierta o cerrada, entonces $p|_A : A \longrightarrow p(A)$ es una identificación.

Demostración. (i) Como A es saturado, entonces $A = p^{-1}(p(A))$ y dado que p es identificación y A es abierto, $p(A)$ debe ser abierto en $X/\sim$. Y nuevamente, como $A = p^{-1}(p(A))$, entonces $p|_A : A \longrightarrow p(A)$ es una identificación por 2d8.

(ii) Sea U un abierto en A. Entonces $U = V \cap A$, para algún abierto V de X. Se tiene que $p(V \cap A) = p(V) \cap p(A)$. En efecto, en general se sabe que $p(V \cap A) \subset p(V) \cap p(A)$. Si $y \in p(V) \cap p(A)$, entonces existen $v \in V$ y $a \in A$ tales que $p(v) = y = p(a)$, luego $p(a) \in p(A)$ y por tanto $p(v) \in p(A)$, luego $v \in p^{-1}(p(A)) = A$, por ser A saturado. En consecuencia, $v \in V \cap A$ y por tanto $y = p(v) \in p(V \cap A)$. Esto prueba la afirmación. Luego, $p|_A(U) = p|_A(V \cap A) = p(V \cap A) = p(V) \cap p(A)$, donde $p(V)$ es abierto por ser p una función abierta, así que $p|_A(U)$ es abierto en $p(A)$. Se sigue que $p|_A$ es también una función abierta y además es continua y suprayectiva. En consecuencia, $p|_A$ es una identificación. $\square$

Espacios cocientes T1

2d10b

espacio cociente, T1

Teorema 23. Si $p : X \longrightarrow X/\sim$ es una aplicación cociente y cada elemento de $X/\sim$ es cerrado en X, entonces $X/\sim$ es un espacio T_1.

Demostración. Sea $[x] \in X/\sim$. Por hipótesis $[x] \subset X$ es cerrado en X, pero $[x] = p^{-1}(\{[x]\})$ y como p es identificación, entonces $\{[x]\}$ debe ser cerrado en $X/\sim$. Se sigue que $X/\sim$ es un espacio T_1. $\square$

Homeomorfismo inducido por una identificación

2d11

suprayectiva, identificación, homeomorfismo

Proposición 14. Sea $f : X \longrightarrow Y$ una identificación y suprayectiva. Si se define en X la relación de equivalencia $x_1 \sim x_2$ si y sólo si $f(x_1) = f(x_2)$, entonces $X/\sim$ es homeomorfo a Y.

Demostración. La relación definida es una relación de equivalencia, para cualquier función f. Defínase $\widetilde{f} : X/\sim \longrightarrow Y$ como $\widetilde{f}([x]) = f(x)$. Se tiene que f está bien definida, pues si $[x_1] = [x_2]$ entonces $x_1 \sim x_2$, luego $f(x_1) = f(x_2)$ por definición de $\sim$, es decir, $\widetilde{f}([x_1]) = \widetilde{f}([x_2])$. Nótese que $\widetilde{f} \circ p = f$, donde $p : X \longrightarrow X/\sim$ es la aplicación cociente. Se tiene que

(i) $\widetilde{f}$ es suprayectiva, pues dado $y \in Y$, existe $x \in X$ tal que $y = f(x)$ por suprayectividad de x, luego $[x] \in X/\sim$ es tal que $\widetilde{f}([x]) = f(x) = y$,

(ii) $\widetilde{f}$ es inyectiva, pues si $[x_1], [x_2] \in X/\sim$ son tales que $\widetilde{f}([x_1]) = \widetilde{f}([x_2])$, entonces $f(x_1) = f(x_2)$, luego $x_1 \sim x_2$ y por tanto $[x_1] = [x_2]$.

Existe pues la función inversa $\widetilde{f}^{-1}$. Como $f = \widetilde{f} \circ p$ es continua y p es identificación, la propiedad universal de las identificaciones implica que $\widetilde{f}$ es continua. Además, dado que $p = \widetilde{f}^{-1} \circ f$ es continua y f es identificación, entonces $\widetilde{f}^{-1}$ también debe ser continua. Luego $\widetilde{f}$ es un homeomorfismo. $\square$

Caracterización de identificaciones

2d12

caracterización, compatibilidad, identificación

Definición 21. Dada una función $f : X \longrightarrow Y$, se dice que $g : X \longrightarrow Z$ es compatible con f si $f(x_1) = f(x_2)$ implica que $g(x_1) = g(x_2)$, para cada $x, x' \in X$.

Teorema 24. Sea $f : X \longrightarrow Y$ continua y suprayectiva. Entonces f es identificación si y sólo si para cada función continua $g : X \longrightarrow Z$ compatible con f, existe una única función continua $\overline{g} : Y \longrightarrow Z$ tal que $\overline{g} \circ f = g$.

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "g"] \arrow[d, "f"'] & Z \\ Y \arrow[ur, dashed, "\overline{g}"'] & \end{tikzcd}$$

Se dice que $\overline{g}$ *es el resultado de pasar* g *al cociente.*

Demostración. Supóngase que f es identificación y sea $g : X \longrightarrow Z$ una función continua compatible con f. Defínase $\overline{g} : Y \longrightarrow Z$ como $\overline{g}(y) = g(x)$, donde $x \in X$ es tal que $y = f(x)$. Se tiene que $\overline{g}$ está bien definida, pues si $y_1, y_2 \in Y$ son tales que $y_1 = y_2$, entonces existen $x_1, x_2 \in X$ tales que $y_1 = f(x_1)$ y $y_2 = f(x_2)$, luego $f(x_1) = f(x_2)$ y por tanto $g(x_1) = g(x_2)$ por la compatibilidad de g con f, es decir, $\overline{g}(y_1) = \overline{g}(y_2)$. Nótese que $\overline{g} \circ f = g$.

Si $\overline{g}' : Y \longrightarrow Z$ es una función tal que $\overline{g}' \circ f = g$. Si $y_1 = y_2$, entonces existen $x_1, x_2 \in X$ tales que $y_1 = f(x_1)$ y $y_2 = f(x_2)$, luego $f(x_1) = f(x_2)$ y por tanto $g(x_1) = g(x_2)$, luego $\overline{g}'(y_1) = \overline{g}'(f(x_1)) = g(x_1) = g(x_2) = \overline{g}(f(x_2)) = \overline{g}(y_2)$. En consecuencia, $\overline{g}' = \overline{g}$ y por lo tanto g es la única función bajo las hipótesis con esta propiedad. Además, por hipótesis g es continua y f es identificación, luego la propiedad universal de las identificaciones implica que $\overline{g}$ debe ser continua. Más aún, si g es identificación, como f es identificación, 2d3 implica que $\overline{g}$ también es identificación.

Supóngase ahora que se verifica la condición. Defínase en X la relación de equivalencia $x_1 \sim x_2$ si y sólo si $f(x_1) \sim f(x_2)$ y sea $p : X \longrightarrow X/\sim$ la aplicación cociente. Si $f(x_1) = f(x_2)$ entonces $x_1 \sim x_2$ y por tanto $p(x_1) = p(x_2)$, en consecuencia p es compatible con f y como también p es continua, por hipótesis debe existir una función continua $\overline{p} : Y \longrightarrow X/\sim$ tal que $p = \overline{p} \circ f$. Por otro lado, nótese que si $p(x_1) = p(x_2)$, entonces $x_1 \sim x_2$ y por tanto $f(x_1) = f(x_2)$, es decir, f es compatible con p. Como p es identificación, entonces la primera parte de la demostración implica que existe una función continua $\overline{f} : X/\sim \longrightarrow Y$ tal que $f = \overline{f} \circ p$.

Se tiene entonces que $p = \overline{p} \circ \overline{f} \circ p$ y $f = \overline{f} \circ \overline{p} \circ f$. Afirmamos que $\overline{f} \circ \overline{p} = \mathrm{id}_Y$. En efecto, si $y \in Y$, entonces existe $x \in X$ tal que $y = f(x)$, luego $y = f(x) = \overline{f}(\overline{p}(f(x))) = \overline{f}(\overline{p}(y))$. Como y es arbitrario esto prueba la afirmación. Similarmente se prueba que $\overline{p} \circ \overline{f} = \mathrm{id}_{X/\sim}$. Se tiene pues que $\overline{f}$ es un homeomorfismo y por tanto identificación, y dado que p también es identificación y $f = \overline{f} \circ p$, entonces f es identificación. $\square$

Homeomorfismo inducido por funciones compatibles

2d12a

compatibilidad, homeomorfismo

Corolario 4. Si $f : X \longrightarrow Y$, $g : X \longrightarrow Z$ son identificaciones, suprayectivas y compatibles entre sí, es decir, $f(x_1) = f(x_2)$ si y solo si $g(x_1) = g(x_2)$, $\forall\, x_1, x_2 \in X$, entonces Y y Z son homeomorfos.

Demostración. Por 2d12, como f es identificación, g es continua y g es compatible con f, entonces existe una función continua $\overline{g} : Y \longrightarrow Z$ tal que $\overline{g} \circ f = g$. Similarmente, como g es identificación, f es continua y f es compatible con g, entonces existe una función continua $\overline{f} : Z \longrightarrow Y$ tal que $\overline{f} \circ g = f$. Luego $\overline{g} \circ \overline{f} \circ g = g$ y $\overline{f} \circ \overline{g} \circ f = f$ y como f y g son suprayectivas, entonces $\overline{g} \circ \overline{f} = \mathrm{id}_Z$ y $\overline{f} \circ \overline{g} = \mathrm{id}_Y$. Luego $\overline{f}$ y $\overline{g}$ son homeomorfismos. $\square$

Funciones que preservan relación

2d12b

preserva relación,
continuidad

Definición 22. Si R y S son relaciones en dos conjuntos X y Y, respectivamente, se dice que f *preserva relaciones si* $x\,R\,x'$ *implica que* $f(x)\,S\,f(x')$, $\forall\, x \in X$.

Corolario 5. Sean R y S relaciones en dos espacios X y Y, respectivamente y sean p_X, p_Y las respectivas aplicaciones cociente. Si $f : X \longrightarrow Y$ es continua y preserva relaciones, entonces existe una única función continua $f_* : X/R \longrightarrow Y/S$ tal que $f_* \circ p_X = p_Y \circ f$. Es decir, tal que el siguiente diagrama conmuta

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[r, "f"] \arrow[d, "p_X"'] & Y \arrow[d, "p_Y"] \\
X/R \arrow[r, "f_*"'] & Y/S.
\end{tikzcd}$$

Demostración. Se sigue de 2d12 tomando $g = p_Y \circ f$. $\square$

Criterio para identificaciones

compacto,
Hausdorff,
identificación

Teorema 25. Si X es un espacio compacto, Y es un espacio de Hausdorff y $f : X \longrightarrow Y$ es continua y suprayectiva, entonces f es identificación.

Demostración. Si $F \subset X$ es cerrado, entonces F es compacto, luego $f(F)$ es compacto en Y por ser f continua. En consecuencia, $f(F)$ es cerrado en Y por ser Y un espacio de Hausdorff. Luego f es una función cerrada y al ser continua y suprayectiva, 2d5 implica que f es identificación. $\square$