Topología

Definición de espacio topológico

DEFINICIÓN 1. Sea X un conjunto. Una **topología** sobre Xes una familia $\mathcal{T}$ de subconjuntos de X con las siguientes propiedades: definición

(i) $\varnothing, X \in \mathcal{T}$.

(ii) Si $\{U_i\}_{i\in\mathcal{I}} \subset \mathcal{T}$ entonces $\bigcup_{i\in\mathcal{I}} U_i \in \mathcal{T}$.

(iii) Si $\{U_i\}_{i\in\mathcal{I}} \subset \mathcal{T}$ y $\mathcal{I}$ es finito, entonces $\bigcap_{i\in\mathcal{I}} U_i \in \mathcal{T}$.

A la pareja $(X, \mathcal{T})$ se le llama **espacio topológico**.

Definición de continuidad

1a

Definición 2. Dados espacios topológicos X y Y, una función $f : X \longrightarrow Y$ se dice **continua** en X, si U abierto en Y implica que $f^{-1}(U)$ es abierto en X.

definición, continuidad

Definición de homeomorfismo

Definición 3. Un **homeomorfismo** es una función $f : X \longrightarrow Y$ continua y biyectiva, cuya inversa también es continua. En este caso, se dice que los espacios X y Y son **homeomorfos**.

definición, homeomorfismo

Proyección estereográfica

homeomorfismo explícito, proyección estereográfica

Teorema 1. *La función*

$$p : S^n - \{N\} \longrightarrow \mathbb{R}^n$$
$$(x_1, \dots, x_{n+1}) \longmapsto \left(\frac{x_1}{1 - x_{n+1}}, \dots, \frac{x_n}{1 - x_{n+1}} \right),$$

donde $N = (0, \dots, 0, 1)$, es un homeomorfismo con las topologías usuales y su inversa está dada por

$$p^{-1} : \mathbb{R}^n \longrightarrow S^n - \{N\}$$
$$y = (y_1, \dots, y_n) \longmapsto \left(\frac{2y_1}{|y|^2 + 1}, \dots, \frac{2y_n}{|y|^2 + 1}, \frac{|y|^2 - 1}{|y|^2 + 1} \right).$$

*A este homeomorfismo se le llama **proyección estereográfica**.*

Demostración. Es rutinario verificar que $p \circ p^{-1} = \mathrm{id}_{\mathbb{R}^n}$ y que $p^{-1} \circ p = \mathrm{id}_{S^n - \{N\}}$. Además, p es continua por ser sus componentes funciones racionales en las variables $x_1, \dots, x_{n+1}$ tales que su denominador no se anula. De forma similar, p^{-1} es continua por ser sus funciones componentes productos de las variables $y_1, \dots, y_n$, con la función $1/(|y|^2 + 1)$, la cuál es continua pues el denominador no se anula y la función norma $|y|$ es continua. □

Definición de función abierta y cerrada

definición, abierta, cerrada

Definición 4. Una función $f : X \longrightarrow Y$ se dice **abierta** si U abierto en X implica que $f(U)$ es abierto en Y.

Definición 5. Similarmente, una función $f : X \longrightarrow Y$ se dice **cerrada** si F cerrado en X implica que $f(F)$ es cerrado en Y.

Criterio para homeomorfismos

1b1

criterio, abierta, cerrada

Teorema 2. *Si una función $f : X \longrightarrow Y$ es biyectiva, continua y abierta o cerrada, entonces f es un homeomorfismo.*

Demostración. Como f es biyectiva, existe su inversa $g : Y \longrightarrow X$ tal que $g \circ f = \mathrm{id}_X$. Sea U un abierto en X y notemos que $f^{-1}(g^{-1}(U)) = (g \circ f)^{-1}(U) = \mathrm{id}_X^{-1}(U) = U$ y aplicando f a ambos lados obtenemos $g^{-1}(U) = f(U)$ por suprayectividad de f. Como $f(U)$ es abierto por ser f una funcion abierta, entonces $g^{-1}(U)$ es abierto. Dado que U fue un abierto arbitrario, entones g es continua y en consecuencia f es un homeomorfismo. Si f es cerrada la demostración es similar. □

Teorema 3. *Si f es un homeomorfismo, entonces f es abierta y cerrada.*

Demostración. Sea g la inversa de f. Si U es abierto en X, entonces $g^{-1}(U)$ es abierto en X por ser g continua, pero, de manera similar al teorema anterior, se tiene que $g^{-1}(U) = f(U)$, luego $f(U)$ es abierto y se sigue que f es una función abierta. Similarmente se prueba que f es cerrada. □

Definición de topología de identificación

1c

generación, definición

Definición 6. Dados un espacio topológico X, un conjunto Y y una función $f : X \longrightarrow Y$, se puede dotar a Y con una topología, a saber, $\{U \subset Y \mid f^{-1}(U) \text{ es abierto en } X\}$. A esta topología se le llamará **topología de identificación** o **topología coinducida** en Y por X a través de f.

Definición 7. Si X y Y son espacios topológicos y $f : X \longrightarrow Y$ es una función, se dice que f es una **identificación** si la topología de Y es la topología coinducida por f.

Más fina para continuidad

comparación

Proposición 1. *Sea X un espacio topológico y $f : X \longrightarrow Y$ una función. La topología de identificación en Y coinducida por f hace continua a f. Más aún, de entre todas las topologías que hacen continua a f, esta es la más fina.*

Demostración. Sea $\mathcal{T}_f$ la topología de identificación en Y. Si $U \in \mathcal{T}$, entonces $f^{-1}(U)$ es abierto en X, por definición. Como U fue arbitrario, entonces f debe ser continua, por definición de continuidad.

Sea $\mathcal{T}$ una topología que hace continua a f. Si $U \in \mathcal{T}$, entonces $U \subset Y$ y $f^{-1}(U)$ es abierto en X por definición de continuidad, pero esto implica que $U \in \mathcal{T}_f$ por definición de $\mathcal{T}_f$. Como U fue arbitrario, entonces $\mathcal{T} \subset \mathcal{T}_f$, y a su vez como $\mathcal{T}$ fue una topología arbitraria que hace continua a f, entonces $\mathcal{T}_f$ debe ser la más fina entre ellas. □

Caracterización de identificaciones

caracterización, identificación

Teorema 4. *Si $f : X \longrightarrow Y$ es una función, son equivalentes*

(i) *f es identificación.*

(ii) *U es abierto en Y si y sólo si $f^{-1}(U)$ es abierto en X.*

(iii) *F es cerrado en Y si y sólo si $f^{-1}(F)$ es cerrado en X.*

Demostración. (i) $\implies$ (ii). Si f es identificación entonces f es, en particular, continua, y por tanto U abierto en Y implica $f^{-1}(U)$ abierto en X. Supogase ahora que $f^{-1}(U)$ es abierto en X con $U \subset Y$. Entonces U es abierto en X por definición de topología de identificación. Como U fue arbitrario se tiene el resultado.

(ii) $\implies$ (iii). Se tiene que

$$\begin{aligned} F \text{ es cerrado en } Y &\iff X - F \text{ es abierto en } Y \\ &\iff f^{-1}(X - F) = Y - f^{-1}(F) \text{ es abierto en } X, \text{ por hipótesis} \\ &\iff f^{-1}(F) \text{ es cerrado en } X. \end{aligned}$$

(iii) $\implies$ (ii). Es similar al punto anterior.

(ii) $\implies$ (i). Sea $\mathcal{T}$ la topología de Y. Si se verifica (ii), entonces la $\mathcal{T}$ hace continua a f. Más aún, si hay otra topología $\mathcal{T}'$ que hace continua a f, entonces $U \in \mathcal{T}$ implica que $f^{-1}(U)$ es abierto en X, y por tanto $U \in \mathcal{T}$ por hipótesis. Luego $\mathcal{T}' \subset \mathcal{T}$ y como $\mathcal{T}'$ fue arbitraria, entonces $\mathcal{T}$ es de hecho más fina en Y que cualquier otra que haga continua a f. Es fácil verificar que sólo existe una topología sobre Y con esta propiedad y es la topología de identificación. Luego, $\mathcal{T}$ es la topología de identificación coinducida por f, es decir, f es una identificación. $\square$

propiedades, composición, identificación

Proposición 2. *Sean $f : X \longrightarrow Y$ y $g : Y \longrightarrow Z$ funciones. Se verifican las siguientes afirmaciones*

(i) $\mathrm{id}_X : X \longrightarrow X$ *es identificación.*

(ii) *Si f y g son identificaciones, entonces $g \circ f$ es identificación.*

(iii) *Si f y $g \circ f$ son identificaciones, necesariamente g es identificación.*

Demostración. (i) Se sigue de que U es abierto en X si y sólo si $\mathrm{id}_X(U) = U$ es abierto en X.

(ii) Como f y g son identificaciones, entonces, por 1c2,

$$\begin{aligned} U \text{ es abierto en } Z &\iff g^{-1}(U) \text{ es abierto en } Y \\ &\iff f^{-1}(g^{-1}(U)) = (g \circ f)^{-1}(U) \text{ es abierto en } X. \end{aligned}$$

Luego $g \circ f$ es identificación.

(iii) Se tiene que

$$\begin{aligned} U \text{ es abierto en } Z &\iff (g \circ f)^{-1}(U) = f^{-1}(g^{-1}(U)) \text{ es abierto en } X \\ &\iff g^{-1}(U) \text{ es abierto en } Y, \end{aligned}$$

luego g es identificación. □

Criterio para identificaciones

criterio, sección

TEOREMA 5. *Sea* $p : X \longrightarrow Y$ *continua. Si existe una función continua* $s : Y \longrightarrow X$ *tal que* $p \circ s = \mathrm{id}_Y$*, entonces* p *es una identificación.*

Demostración. Si $U \subset Y$ es tal que $p^{-1}(U)$ es abierto en X, entonces $s^{-1}(p^{-1}(U)) = (p \circ s)^{-1}(U) = \mathrm{id}_Y(U) = U$ es abierto, por ser s continua. Como p es también continua por hipótesis, se tiene que U es abierto en Y si y sólo si $p^{-1}(U)$ es abierto en X, luego p es identificación. □

DEFINICIÓN 8. A $s : Y \longrightarrow X$ en el teorema anterior se le llama **sección** de p.

Propiedades de una sección

1c4a

propiedades, sección

Teorema 6. *Si $s : Y \longrightarrow X$ es una sección de $p : X \longrightarrow Y$, entonces*

(i) *s es inyectiva,*

(ii) *s es un encaje, es decir, $Y \cong s(Y)$.*

Demostración. (i) Si $y_1, y_2 \in Y$ son tales que $s(y_1) = s(y_2)$, entonces $p(s(y_1)) = p(s(y_2))$, pero $p \circ s = \mathrm{id}_Y$, en consecuencia $y_1 = y_2$. Luego s es inyectiva.

(ii) Sea $r : Y \longrightarrow s(Y)$ la restricción de s al contradominio $s(Y)$. Claro que r es biyectiva, pues es suprayectiva por construcción e inyectiva por ser s inyectiva. Más aún, r es continua, pues s es continua y $s(Y) \subset X$. Sea U un abierto en Y. Como p es continua, entonces $p^{-1}(U)$ debe ser abierto en X, además

$$\begin{aligned} r^{-1}(p^{-1}(U) \cap s(Y)) &= s^{-1}(p^{-1}(U) \cap s(Y)) = s^{-1}(p^{-1}(U)) \cap s^{-1}(s(Y)) \\ &= (p \circ s)^{-1}(U) \cap Y, \text{ por inyectividad de } s \\ &= \mathrm{id}_Y^{-1}(U) \cap Y \\ &= U \cap Y = U. \end{aligned}$$

Tomando la imagen bajo r a ambos lados, se tiene que $p^{-1}(U) \cap s(Y) = r(U)$, por ser r suprayectiva. Se sigue que $r(U)$ es un abierto en $s(Y)$. Como U fue un abierto arbitrario de Y, entonces r es una función abierta. Luego, como r es biyectiva, continua y abierta, entonces r es un homeomorfismo por 1b1 y por tanto s es un encaje. □

Criterio para identificaciones

1c5

criterio, abierta, identificación

Proposición 3. *Si $f : X \longrightarrow Y$ es continua, suprayectiva y abierta o cerrada, entonces f es identificación.*

Demostración. Si $U \subset Y$ es tal que $f^{-1}(U)$ es abierto en X, entonces $U = f(f^{-1}(U))$ debe ser abierto en Y por ser f suprayectiva y abierta. Como f también es continua, entonces f debe ser identificación por 1c2. Si f es cerrada, la demostración es similar usando nuevamente 1c2.

□

Producto de identificaciones 1c6

producto, abierta, identificación

Proposición 4. *Si $f_1 : X_1 \longrightarrow Y_1$ y $f_2 : X_2 \longrightarrow Y_2$ son continuas, suprayectivas y abiertas, entonces $f : X_1 \times X_2 \longrightarrow Y_1 \times Y_2$ definida como $f(x_1, x_2) = (f_1(x_1), f_2(x_2))$ es identificación.*

Demostración. Se tiene que f es continua (`munkres1975, p. 112`, pendiente de agregar topología producto aquí con etiqueta `generación`) y también suprayectiva. Más aún, f es abierta. Se sigue de 1c5 que f es identificación. □

Identificación es casi homeomorfismo

homeomorfismo, identificación

Proposición 5. *Sea $f : X \longrightarrow Y$ una función biyectiva. Entonces f es identificación si y sólo si f es homeomorfismo.*

Demostración. Supongamos que f es identificación. Si U es abierto en X, entonces $f^{-1}(f(U)) = U$ es abierto en X, luego $f(U)$ debe de ser abierto en Y por ser f identificación. Luego f es una función abierta y como es continua y biyectiva, por 1b1 f debe ser homeomorfismo. Recíprocamente, si f es homeomorfismo, entonces f es abierta nuevamente por 1b1 y como f es continua y suprayectiva, entonces f es identificación por 1c5. □

Restricción de identificaciones

restricción, identificación, criterio

TEOREMA 7. *Si $f : X \longrightarrow Y$ es identificación, B es abierto o cerrado en Y y $A = f^{-1}(B)$, entonces $f|_A : A \longrightarrow B$ es identificación.*

Demostración. Como f es continua, entonces $f|_A : A \longrightarrow Y$ es continua. Más aún, como $B \subset Y$ y $f(A) = f(f^{-1}(B)) \subset B$, entonces $f|_A : A \longrightarrow B$ es continua. Sea $U \subset B$ tal que $f|_A^{-1}(U)$ es abierto en A. Como B es abierto en Y, entonces $f^{-1}(B) = A$ es abierto en X, por ser f continua y por tanto $f|_A^{-1}(U)$ es abierto en X. Pero

$$f|_A^{-1}(U) = f^{-1}(U) \cap A = f^{-1}(U) \cap f^{-1}(B) = f^{-1}(U \cap B) = f^{-1}(U),$$

por ser $U \subset B$, así que $f^{-1}(U)$ es abierto en X. Como f es identificación, esto implica que U es abierto en Y y por tanto U es también abierto en B, pues $U = U \cap B$. Como U fue arbitrario, entonces $f|_A$ es identificación. Si B es cerrado la demostración es similar. □

Propiedad universal de las identificaciones 1c9

propiedad universal, identificación

Teorema 8. *Sea $f : X \longrightarrow Y$ una función. Entonces f es identificación si y sólo si se cumplen las siguientes condiciones:*

(i) *f es continua.*

(ii) *Una función $g : Y \longrightarrow Z$ es continua si y sólo si $g \circ f$ es continua.*

$$\begin{tikzcd} X \arrow[d, "f"'] \arrow[dr, "g \circ f"] & \\ Y \arrow[r, dashed, "g"'] & Z \end{tikzcd}$$

Demostración. Supóngase primero que f es identificación. Entonces f es continua y se tiene (i). Sea $g : Y \longrightarrow Z$ una función. Si g es continua, entonces $g \circ f$ es continua por ser composición de funciones continuas. Si $g \circ f$ es continua y U es un abierto en Z, se tiene que $(g \circ f)^{-1}(U) = f^{-1}(g^{-1}(U))$ es abierto en X y por tanto $g^{-1}(U)$ es abierto en Y por ser f identificación. Como U fue arbitrario, entonces g es continua y hemos probado (ii).

Suponga ahora que se verifican las condiciones y sean $\mathcal{T}$ la topología en Y y $\mathcal{T}_f$ la topología coinducida por f en Y. Defínase $f' : X \longrightarrow (Y, \mathcal{T}_f)$ como $f'(x) = f(x)$, $\forall\, x \in X$. Se tiene que f' es continua, pues si U es abierto en $(Y, \mathcal{T}_f)$, entonces $f'^{-1}(U) = f^{-1}(U)$, el cual es abierto en X, pues $\mathcal{T}_f$ hace continua a f. Más aún, se tiene que $f' = \mathrm{id}_Y \circ f$, donde $\mathrm{id}_Y : (Y, \mathcal{T}) \longrightarrow (Y, \mathcal{T}_f)$, luego la condición (II) implica que id_Y es continua, así que $\mathcal{T}_f \subset \mathcal{T}$. Además, por la condición (I), la topología $\mathcal{T}$ hace continua a f y en consecuencia $\mathcal{T} \subset \mathcal{T}_f$. Se sigue que $\mathcal{T} = \mathcal{T}_f$, es decir, f es una identificación. $\square$

Definición de espacio cociente 1c10

cociente, topología

Definición 9. Si X es un espacio topológico y $\sim$ es una relación de equivalencia en X, se le llamará **espacio cociente** a $X/\sim$ con la topología de identificación coinducida por la proyección canónica $p : X \longrightarrow X/\sim$. Se dirá que $X/\sim$ tiene la **topología cociente**.

Definición 10. A la proyección canónica $p : X \longrightarrow X/\sim$ vista como identificación se le llamará **aplicación cociente**.

Propiedades de saturación

definición, saturación, identificación

Definición 11. Si $p : X \longrightarrow X/\sim$ es una aplicación cociente y $A \subset X$, se define la **saturación** de A como el conjunto $p^{-1}(p(A))$, que contiene a todos los puntos de A y a todos los puntos en X equivalentes a algún punto de A. Se dice que A es **saturado** si $A = p^{-1}(p(A))$.

Proposición 6. *Sea $A \subset X$ un conjunto saturado respecto a una relaión de equivalencia $\sim$ y sea p la respectiva aplicación cociente. Se tiene que*

(i) *Si $A \subset X$ es abierto o cerrado, entonces $p|_A : A \longrightarrow p(A)$ es una identificación.*

(ii) *Si p es una función abierta o cerrada, entonces $p|_A : A \longrightarrow p(A)$ es una identificación.*

Demostración. (i) Como A es saturado, entonces $A = p^{-1}(p(A))$ y dado que p es identificación y A es abierto, $p(A)$ debe ser abierto en $X/\sim$. Y nuevamente, como $A = p^{-1}(p(A))$, entonces $p|_A : A \longrightarrow p(A)$ es una identificación por 1c8.

(ii) Pendiente. $\square$

Espacios cocientes Hausdorff

1c10b

espacio cociente, Hausdorff, T2

Teorema 9. *Si X es un espacio de Hausdorff, $p : X \longrightarrow X/\sim$ es una aplicación cociente y cada elemento de $X/\sim$ es cerrado en X, entonces $X/\sim$ es un espacio de Hausdorff.*

Demostración. Pendiente. $\square$

Homeomorfismo inducido por una identificación

PROPOSICIÓN 7. *Sea $f : X \longrightarrow Y$ una identificación y suprayectiva. Si se define en X la relación de equivalencia $x_1 \sim x_2$ si y sólo si $f(x_1) = f(x_2)$, entonces $X/\sim$ es homeomorfo a Y.*

Demostración. Pendiente. $\square$

Observación. Si $x \in X$, entonces $p^{-1}(\{x\}) = [x]$.

Caracterización de identificaciones

caracterización, compatibilidad, identificación

Definición 12. Dada una función $p : X \longrightarrow \overline{X}$, se dice que otra función $f : X \longrightarrow Y$ es compatible con p si $p(x) = p(x')$ implica que $f(x) = f(x')$, para cada $x, x' \in X$.

Teorema 10. *Sea $p : X \longrightarrow \overline{X}$ continua y suprayectiva. Entonces p es identificación si y sólo si para cada función continua $f : X \longrightarrow Y$ compatible con p, existe una única función continua $\overline{f} : \overline{X} \longrightarrow Y$ tal que $\overline{f} \circ p = f$.*

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "f"] \arrow[d, "p"'] & Y \\ \overline{X} \arrow[ur, dashed, "\overline{f}"'] & \end{tikzcd}$$

Definición 13. En la definición anterior, se dice que $\overline{f}$ es el resultado de pasar f al cociente.

Criterio para identificaciones

compacto, Hausdorff, identificación

Teorema 11. *Si X es un espacio compacto, Y es un espacio de Hausdorff y $f : X \longrightarrow Y$ es continua y suprayectiva, entonces f es identificación.*

Demostración. Pendiente. $\square$