Variable Compleja

Definición de números complejos 1

definición, campo

Definición 1. En $\mathbb{R}^2$ se definen las siguientes operaciones de suma y multiplicación

(i) $(a, b) + (c, d) = (a + c, b + d)$,

(ii) $(a, b)(c, d) = (ac - bd, ad + bc)$.

Estas operaciones hacen a $\mathbb{R}^2$ un campo, donde

$$-(a, b) = (-a, -b) \qquad \text{y} \qquad (a, b)^{-1} = \left(\frac{a}{a^2 + b^2}, \frac{-b}{a^2 + b^2} \right),$$

la última igualdad definida siempre que $(a, b) \neq (0, 0)$. A este campo se le denotará como $\mathbb{C}$ y a sus elementos se les llamará **números complejos** o **número imaginarios**.

Forma binómica de un complejo

DEFINICIÓN 2. Obsérvese que si $(a, b) \in \mathbb{C}$, entonces $(a, b) = (a, 0) + (0, 1)(b, 0) = (a, 0) + i(b, 0)$, donde $i = (0, 1)$. De ahora en adelante, se hará la convención de escribir x en lugar de $(x, 0)$, $x \in \mathbb{R}$, de tal manera que $(a, b) = a + ib$. Esta forma de escribir números complejos se llamará **forma binómica**. Se escribirá ia en vez de $0 + ia$, a en vez de $a + i0$ y $a \pm i$ en vez de $a \pm i1$.

definición,
forma binómica

Potencias de la unidad imaginaria

Proposición 1. *Se pueden efectuar las operaciones con números complejos de forma binómica como si fueran binomios algebráicos, reemplazando i^2 por -1, i^3 por $-i$, i^4 por 1, i^5 por i, etc. Específicamente, si $n \in \mathbb{N}$, entonces*

$$i^n = \begin{cases} 1 & si\, n \equiv 0 \pmod 4 \\ i & si\, n \equiv 1 \pmod 4 \\ -1 & si\, n \equiv 2 \pmod 4 \\ -i & si\, n \equiv 3 \pmod 4. \end{cases}$$

Demostración. Nótese que $i^2 = -1$, $i^3 = -i$ y $i^4 = 1$. Si $n \in \mathbb{N}$, entonces por el algoritmo de la división, existen $k, r \in \mathbb{Z}$ tal que $n = 4k + r$, $0 \leq r \leq 3$. Si $r = 0$, entonces $i^n = i^{4n} = (i^4)^n = 1^n = 1$. Si $r = 1$ se tiene que $i^n = i^{4k+1} = (i^4)^k i^1 = 1^k i^1 = i$. Si $r = 2$ se puede escribir $i^n = i^{4k+2} = (i^4)^k i^2 = 1^k - 1 = -1$ y finalmente, si $r = 3$, se tiene $i^n = i^{4k+3} = (i^4)^k i^3 = 1^k i^3 = -i$.

Más aún, dado que $(a, 0)(b, 0) = (ab, 0)$ para cualesquiera $a, b \in \mathbb{R}$, se pueden utilizar las propiedades de conmutatividad, asociatividad y distributividad del campo $\mathbb{C}$ para operar sus elementos como si fueran binomios algebraicos cuando están en su forma binómica. □

Propiedades de campo

campo, propiedades

TEOREMA 1. *Si $z, w \in \mathbb{C}$ y $n \in \mathbb{N}$, se verifican las siguientes propiedades*

(I) *(Binomio de Newton)*

$$(z+w)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} z^k w^{n-k}, \ \text{donde} \ \binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!},$$

(II) *(Factorización de diferencia de potencias)*

$$\begin{aligned} z^n - w^n &= (z-w) \sum_{k=0}^{n-1} z^k w^{n-1-k} \\ &= (z-w)(z^{n-1} + z^{n-2}w + \cdots + zw^{n-2} + w^{n-1}). \end{aligned}$$

(III) *(Suma de cuadrados)* $z^2 + w^2 = (z+iw)(z-iw)$.

Demostración. (I) Se verifica en cualquier anillo siempre que $zw = wz$. (II) Se verifica en cualquier anillo. (III) $(z+iw)(z-iw) = z^2 - ziw + iwz - i^2w = z^2 + w^2$, pues $ziw = iwz$ y $i^2 = -1$. □

Norma, conjugado y partes de un complejo

1c

definición, norma, conjugado, parte real, parte imaginaria

DEFINICIÓN 3. Dado un número complejo $z = a + ib \in \mathbb{C}$, se define

(I) La **norma** o **valor absoluto** de z como el número real $|z| = (a^2 + b^2)^{1/2}$,

(II) El **conjugado** de z como el número complejo $\overline{z} = a - ib$,

(III) La **parte real** de z como $\mathrm{Re}(z) = a$ y la **parte imaginaria** de z como $\mathrm{Im}(z) = b$.

Propiedades de normas, conjugados y partes

propiedades, normas, conjugados, partes

TEOREMA 2. *Si $z, w \in \mathbb{C}$, se verifica lo siguiente*

(i) $z\overline{z} = |z|^2$,

(ii) $z^{-1} = \overline{z}/|z|^2$, *si* $z \neq 0$,

(iii) $\mathrm{Re}(z) = (z + \overline{z})/2$ *y* $\mathrm{Im}(z) = (z - \overline{z})/2i$,

(iv) $\overline{z + w} = \overline{z} + \overline{w}$ *y* $|zw| = |z||w|$,

(v) $|z/w| = |z|/|w|$ *si* $w \neq 0$,

(vi) $|\overline{z}| = |z|$,

(vii) $|z + w|^2 = |z|^2 + 2\mathrm{Re}(z\overline{w}) + |w|^2$,

(viii) $|z - w|^2 = |z|^2 - 2\mathrm{Re}(z\overline{w}) + |w|^2$,

(ix) $|z + w|^2 + |z - w|^2 = 2(|z|^2 + |w|^2)$,

(x) $\mathrm{Im}(z) = 0$ *si y sólo si* $z = \overline{z}$,

(xi) $\overline{\overline{z}} = z$,

(xii) $|z + w| \leq |z| + |w|$,

(xiii) $\big||z| - |w|\big| \leq |z - w|$,

(xiv) $|z + w| = [(z + w)(\overline{z} + \overline{w})]^{1/2}$.

Demostración. Pendiente. □

Forma polar de un complejo

1d

definición, argumento, forma polar

Definición 4. Sea $z = x + iy \in \mathbb{C}$ y considere el vector $\overrightarrow{OP}$ que une al punto $O = (0,0)$ con el punto $P = (x,y)$ en el plano cartesiano. La longitud del vector $\overrightarrow{OP}$ es igual a $|z|$ y se suele denotar también como r. Un ángulo entre el eje horizontal positivo y el vector $\overrightarrow{OP}$, considerado positivo en el sentido de las manecillas del reloj y negativo en otro caso, se llamará un **argumento** de z y está definido solo para $z \neq 0$. Es claro que no existe un sólo único argumento de $|z|$, pues si Φ es un argumento de $|z|$, también lo son cualesquiera de los números $\Phi + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}$. Se suelen usar dos convenciones para determinar un único argumento, como

(i) aquel ángulo φ tal que $-\pi < \varphi \leq \pi$,

(ii) o aquel ángulo φ tal que $0 \leq \varphi < 2\pi$.

En cualquiera de estas convenciones, a φ se le llamará **argumento principal** de z, también denotado $\arg(z)$. Al par (r, Φ), donde Φ es cualquier argumento de z, se les llamará **coordenadas polares** del número complejo z.

Proyección estereográfica

proyección estereográfica, esfera de Riemann

Definición 5. Sea $S = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 \mid x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 1\}$ y sea $N = (0, 0, 1)$. La función

$$\begin{aligned} Z : \mathbb{C} &\longrightarrow S - \{N\} \\ z &\longmapsto \left(\frac{2\mathrm{Re}(z)}{|z|^2 + 1}, \frac{2\mathrm{Im}(z)}{|z|^2 + 1}, \frac{|z|^2 - 1}{|z|^2 + 1} \right) \end{aligned}$$

es una biyección y se le llamará **proyección esteteográfica**. A S en este contexto se le suele llamar **esfera de Riemann**. La inversa de Z está dada por

$$\begin{aligned} z : S - \{N\} &\longrightarrow \mathbb{C} \\ (x_1, x_2, x_3) &\longmapsto \frac{x_1 + ix_2}{1 - x_3}. \end{aligned}$$

Determinación del argumento principal

argumento principal

Se tiene, de la definición anterior, que

$$\sin\Phi = \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}, \quad \cos\Phi = \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} \quad \text{y} \quad \tan\Phi = \frac{y}{x}.$$

Para obtener el argumento principal de z a partir de la tangente, se debe considerar la convención acordada. Si existe el valor y/x, se considerará siempre $-\pi/2 < \arctan(y/x) < \pi/2$. Sea $\omega = \arctan(y/x)$.

(i) Para la primera convención, se tiene

$$\arg(z) = \begin{cases} \omega & \text{si } x > 0, \\ \omega + \pi & \text{si } x < 0, y \geq 0, \\ \omega - \pi & \text{si } x < 0, y < 0, \\ \pi/2 & \text{si } x = 0, y > 0, \\ -\pi/2 & \text{si } x = 0, y < 0. \end{cases}$$

(ii) Para la segunda, se tiene

$$\arg(z) = \begin{cases} \omega + \pi & \text{si } x > 0, \\ \omega + 2\pi & \text{si } x < 0, y \geq 0, \\ \omega + \pi & \text{si } x < 0, y < 0, \\ \pi/2 & \text{si } x = 0, y > 0, \\ 3\pi/2 & \text{si } x = 0, y < 0. \end{cases}$$

Relación entre argumentos de conjugados

1d2

argumento, conjugados

PROPOSICIÓN 2. *Si* $z = a + ib \in \mathbb{C}$ *es un número real negativo, entonces* $\arg(\overline{z}) = \arg(z) = \pi$*, y en caso contrario,* $\arg(\overline{z}) = -\arg(z)$.

Demostración. Pendiente. $\square$