# Topología

1 Definición de espacio topológico @definición	3
la Definición de homeomorfismo @definición, homeomorfismo	4
la 1 Proyección estereográfica @homeomorfismo explícito, proyección estereográfica	5
1b Definición de topología de identificación @generación, definición	$\epsilon$
1b1 Más fina para continuidad @comparación	7
1b2 Caracterización de identificaciones @caracterización, identificación	8
1b3 Propiedades de las identificaciones @propiedades, composición, identificación	ç
1b4 Criterio para identificaciones @criterio, sección	10
1b5 Producto de identificaciones @producto, abierta, identificación	11
1b6 Criterio para identificaciones @criterio, abierta, identificación	12
1b7 Identificación es casi homeomorfismo @homeomorfismo, identificación	13
1b8 Restricción de identificaciones @restricción, identificación, criterio	14
1b9 Propiedad universal de las identificaciones @propiedad universal, identificación	15
1b10 Definición de espacio cociente @cociente, topología	16
1b10a Propiedades de saturación @definición, saturación, identificación	17

18
19
20
21

## Definición de espacio topológico

l

DEFINICIÓN 1. Sea X un conjunto. Una **topología** sobre X es una familia  $\mathcal{T}$  de subconjuntos de X con las siguientes propiedades:

definición

- (I)  $\emptyset, X \in \mathcal{T}$ .
- (II) Si  $\{U_i\}_{i\in I} \subset \mathcal{T}$  entonces  $\bigcup_{i\in I} U_i \in \mathcal{T}$ .

(III) Si  $\{U_i\}_{i\in I} \subset \mathcal{T}$  y I es finito, entonces  $\bigcap_{i\in I} U_i \in \mathcal{T}$ .

A la pareja  $(X, \mathcal{T})$  se le llama *espacio topológico*.

#### Definición de homeomorfismo

1a

DEFINICIÓN 2. Un *homeomorfismo* es una función  $f: X \longrightarrow Y$  continua y biyectiva, cuya inversa también es continua. En este caso, se dice que los espacios X y Y son *homeomorfos*.

definición, homeomorfismo

# Proyección estereográfica

TEOREMA 1. La función

$$p: S^{n} - \{N\} \longrightarrow \mathbb{R}^{n}$$

$$(x_{1}, \dots, x_{n+1}) \longmapsto \left(\frac{x_{1}}{1 - x_{n+1}}, \dots, \frac{x_{n}}{1 - x_{n+1}}\right),$$

donde N = (0, ..., 0, 1), es un homeomorfismo con las topologías usuales y su inversa está dada por

$$p^{-1}: \mathbb{R}^n \longrightarrow S^n - \{N\}$$

$$y = (y_1, \dots, y_n) \longmapsto \left(\frac{2y_1}{|y|^2 + 1}, \dots, \frac{2y_n}{|y|^2 + 1}, \frac{|y|^2 - 1}{|y|^2 + 1}\right).$$

A este homeomorfismo se le llama proyección estereográfica.

Demostración. Es rutinario verificar que  $p \circ p^{-1} = \mathrm{id}_{\mathbb{R}^n}$  y que  $p^{-1} \circ p = \mathrm{id}_{S^n - \{N\}}$ . Además, p es continua por ser sus componentes funciones racionales en las variables  $x_1, \dots, x_{n+1}$  tales que su denominador no se anula. De forma similar,  $p^{-1}$  es continua por ser sus funciones componentes productos de las variables  $y_1, \ldots, y_n$ , con la función  $1/(|y|^2+1)$ , la cuál es continua pues el denominador no se anula y la función norma |y| es continua. 

homeomorfismo explícito, proyección estereográfica DEFINICIÓN 3. Dados un espacio topológico X, un conjunto Y y una función  $f: X \longrightarrow Y$ , se puede dotar a Y con una topología, a saber,  $\{A \subset Y \mid f^{-1}(Y) \text{ es abierto en } X\}$ . A esta topología se le llamará **topología de identificación** o **topología coinducida** en Y por X a través de f.

generación, definición

DEFINICIÓN 4. Si X y Y son espacios topológicos y  $f:X\longrightarrow Y$  es una función, se dice que f es una **identificación** si la topología de Y es la topología coinducida por f.

## Más fina para continuidad

1b1

Proposición 1. Sea X un espacio topológico y  $f:X\longrightarrow Y$  una función. La topología de identificación en Y coinducida por f hace continua a f. Más aún, de entre todas las topologías que hacen continua a f, esta es la más fina.

comparación

Тео<br/>лема 2. Si  $f: X \longrightarrow Y$  es una función, son equivalentes:

caracterización, identificación

- (I) f es identificación.
- (II) U es abierto en Y si y sólo si  $f^{-1}(U)$  es abierto en X.
- (III) F es cerrado en Y si y sólo si  $f^{-1}(F)$  es cerrado en X.

Demostración. Pendiente.

Proposición 2. Se verifican las siguientes afirmaciones:

(I)  $id_X : X \longrightarrow X$  es identificación.

(II) Si f y g son identificaciones, entonces  $g \circ f$  es identificación.

(III) Si f y  $g \circ f$  son identificaciones, necesariamente g es identificación.

Demostración. Pendiente.

propiedades, composición, identificación

## Criterio para identificaciones

1b4

Тео<br/>кема 3. Sea  $p: X \longrightarrow Y$  continua. Si existe una función continua  $s: Y \longrightarrow X$  tal que  $p \circ s = \mathrm{id}_Y$ , entonces p es una identificación.

criterio, sección

#### Producto de identificaciones

1b5

Proposición 3. Si  $f_1: X_1 \longrightarrow Y_1$  y  $f_2: X_2 \longrightarrow Y_2$  son identificaciones, suprayectivas y abiertas, entonces  $f_1 \times f_2: X_1 \times X_2 \longrightarrow Y_1 \times Y_2$  definida como  $(f_1 \times f_2)(x_1, x_2) = (f_1(x_1), f_2(x_2))$  es identificación.

producto, abierta, identificación

## Criterio para identificaciones

1b6

Proposición 4. Si  $f: X \longrightarrow Y$  es continua, suprayectiva y abierta o cerrada, entonces f es identificación.

criterio, abierta, identificación

### Identificación es casi homeomorfismo

Proposición 5. Sea  $f: X \longrightarrow Y$  una función biyectiva. Entonces f es identificación si y sólo si f es homeomorfismo.

Demostración. Pendiente.

1b7

homeomorfismo, identificación

#### Restricción de identificaciones

1b8

Теогема 4. Si  $f: X \longrightarrow Y$  es identificación, B es abierto o cerrado en Y y  $A = f^{-1}(B)$ , entonces  $f|_A: A \longrightarrow B$  es identificación.

restricción, identificación, criterio

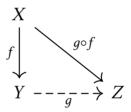
# Propiedad universal de las identificaciones

1b9

Тео<br/>лема 5. Sea  $f:X\longrightarrow Y$  una función. Entonces f es identificación si y sólo si se cumplen las siguientes condiciones:

propiedad universal, identificación

- (I) f es continua.
- (II) Una función  $g:Y\longrightarrow Z$  es continua si y sólo si  $g\circ f$  es continua.



Demostración. Pendiente.

## Definición de espacio cociente

1b10

DEFINICIÓN 5. Si X es un espacio topológico y  $\sim$  es una relación de equivalencia en X, se le llamará *espacio cociente* a  $X/\sim$  con la topología de identificación coinducida por la proyección canónica  $p:X\longrightarrow X/\sim$ . Se dirá que  $X/\sim$  tiene la *topología cociente*.

cociente, topología

Definición 6. A la proyección canónica  $p: X \longrightarrow X/\sim$  vista como identificación se le llamará *aplicación cociente*.

## Propiedades de saturación

1b10a

DEFINICIÓN 7. Si  $p: X \longrightarrow X/\sim$  es una aplicación cociente y  $A \subset X$ , se define la **saturación** de A como el conjunto  $p^{-1}(p(A))$ , que contiene a todos los puntos de A y a todos los puntos en X equivalentes a algún punto de A. Se dice que A es **saturado** si  $A = p^{-1}(p(A))$ .

definición, saturación, identificación

Proposición 6. Si  $A \subset X$  es abierto o cerrado y saturado respecto a una relación  $\sim$  y p es la respectiva aplicación cociente, entonces  $p|_A:A\longrightarrow p(A)$  es una identificación.

Demostración. Corolario de 1b8.

Proposición 7. Si  $A \subset X$  es saturado respecto a una relación  $\sim$ ,  $p: X \longrightarrow X/\sim$  es la respectiva aplicación cociente y p es una aplicación abierta o cerrada, entonces  $p|_A: A \longrightarrow p(A)$  es una identificación.

Demostración. Pendiente.

## Espacios cocientes Hausdorff

1b10b

Теоrема 6. Si X es un espacio de Hausdorff,  $p:X\longrightarrow X/\sim$  es una aplicación cociente y cada elemento de  $X/\sim$  es cerrado en X, entonces  $X/\sim$  es un espacio de Hausdorff.

espacio cociente, Hausdorff, T2

Proposición 8. Sea  $f: X \longrightarrow Y$  una identificación y suprayectiva. Si se define en X la relación de equivalencia  $x_1 \sim x_2$  si y sólo si  $f(x_1) = f(x_2)$ , entonces  $X/\sim$  es homeomorfo a Y.

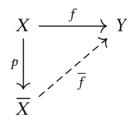
Demostración. Pendiente.

*Observación.* Si  $x \in X$ , entonces  $p^{-1}(\{x\}) = [x]$ .

Definición 8. Dada una función  $p: X \longrightarrow \overline{X}$ , se dice que otra función  $f: X \longrightarrow Y$  es compatible con p si p(x) = p(x') implica que f(x) = f(x'), para cada  $x, x' \in X$ .

caracterización, compatibilidad, identificación

Теоrема 7. Sea  $p:X\longrightarrow \overline{X}$  continua y suprayectiva. Entonces p es identificación si y sólo si para cada función continua  $f:X\longrightarrow Y$  compatible con p, existe una única función continua  $\overline{f}:\overline{X}\longrightarrow Y$  tal que  $\overline{f}\circ p=f$ .



Definición 9. En la definición anterior, se dice que  $\overline{f}$  es el resultado de pasar f al cociente.

## Criterio para identificaciones

1b13

Теоrема 8. Si X es un espacio compacto, Y es un espacio de Hausdorff y  $f: X \longrightarrow Y$  es continua y suprayectiva, entonces f es identificación.

compacto, Hausdorff, identificación