Topología

Definición de espacio topológico

DEFINICIÓN 1. Sea X un conjunto. Una ***topología*** sobre Xes una familia $\mathcal{T}$ de subconjuntos de X con las siguientes propiedades: definición

(I) $\varnothing, X \in \mathcal{T}$.

(II) Si $\{U_i\}_{i\in\mathcal{I}} \subset \mathcal{T}$ entonces $\bigcup_{i\in\mathcal{I}} U_i \in \mathcal{T}$.

(III) Si $\{U_i\}_{i\in\mathcal{I}} \subset \mathcal{T}$ y $\mathcal{I}$ es finito, entonces $\bigcap_{i\in\mathcal{I}} U_i \in \mathcal{T}$.

A la pareja $(X, \mathcal{T})$ se le llama ***espacio topológico***.

Definición de homeomorfismo

1a

Definición 2. Un ***homeomorfismo*** es una función $f : X \longrightarrow Y$ continua y biyectiva, cuya inversa también es continua. En este caso, se dice que los espacios X y Y son ***homeomorfos***.

definición, homeomorfismo

homeomorfismo explícito, proyección estereográfica

Teorema 1. La función

$$\begin{aligned} p : S^n - \{N\} &\longrightarrow \mathbb{R}^n \\ (x_1, \ldots, x_{n+1}) &\longmapsto \left(\frac{x_1}{1 - x_{n+1}}, \ldots, \frac{x_n}{1 - x_{n+1}} \right), \end{aligned}$$

donde $N = (0, \ldots, 0, 1)$, es un homeomorfismo con las topologías usuales y su inversa está dada por

$$\begin{aligned} p^{-1} : \mathbb{R}^n &\longrightarrow S^n - \{N\} \\ y = (y_1, \ldots, y_n) &\longmapsto \left(\frac{2y_1}{|y|^2 + 1}, \ldots, \frac{2y_n}{|y|^2 + 1}, \frac{|y|^2 - 1}{|y|^2 + 1} \right). \end{aligned}$$

A este homeomorfismo se le llama ***proyección estereográfica***.

Demostración. Es rutinario verificar que $p \circ p^{-1} = \mathrm{id}_{\mathbb{R}^n}$ y que $p^{-1} \circ p = \mathrm{id}_{S^n - \{N\}}$. Además, p es continua por ser sus componentes funciones racionales en las variables $x_1, \ldots, x_{n+1}$ tales que su denominador no se anula. De forma similar, p^{-1} es continua por ser sus funciones componentes productos de las variables $y_1, \ldots, y_n$, con la función $1/(|y|^2 + 1)$, la cuál es continua pues el denominador no se anula y la función norma $|y|$ es continua. $\square$

Definición de topología de identificación

generación, definición

Definición 3. Dados un espacio topológico X, un conjunto Y y una función $f : X \longrightarrow Y$, se puede dotar a Y con una topología, a saber, $\{A \subset Y \mid f^{-1}(Y) \text{ es abierto en } X\}$. A esta topología se le llamará ***topología de identificación*** o ***topología coinducida*** en Y por X a través de f.

Definición 4. Si X y Y son espacios topológicos y $f : X \longrightarrow Y$ es una función, se dice que f es una ***identificación*** si la topología de Y es la topología coinducida por f.

Más fina para continuidad

1b1

comparación

Proposición 1. Sea X un espacio topológico y $f : X \longrightarrow Y$ una función. La topología de identificación en Y coinducida por f hace continua a f. Más aún, de entre todas las topologías que hacen continua a f, esta es la más fina.

Demostración. Pendiente. $\square$

Caracterización de identificaciones

1b2

caracterización, identificación

Teorema 2. Si $f : X \longrightarrow Y$ es una función, son equivalentes:

(i) f es identificación.

(ii) U es abierto en Y si y sólo si $f^{-1}(U)$ es abierto en X.

(iii) F es cerrado en Y si y sólo si $f^{-1}(F)$ es cerrado en X.

Demostración. Pendiente. $\square$

Propiedades de las identificaciones

1b3

propiedades, composición, identificación

Proposición 2. Se verifican las siguientes afirmaciones:

(i) $\mathrm{id}_X : X \longrightarrow X$ es identificación.

(ii) Si f y g son identificaciones, entonces $g \circ f$ es identificación.

(iii) Si f y $g \circ f$ son identificaciones, necesariamente g es identificación.

Demostración. Pendiente. $\square$

Criterio para identificaciones

1b4

criterio, sección

Teorema 3. Sea $p : X \longrightarrow Y$ continua. Si existe una función continua $s : Y \longrightarrow X$ tal que $p \circ s = \mathrm{id}_Y$, entonces p es una identificación.

Demostración. Pendiente. $\square$

Producto de identificaciones

PROPOSICIÓN 3. Si $f_1 : X_1 \longrightarrow Y_1$ y $f_2 : X_2 \longrightarrow Y_2$ son identificaciones, suprayectivas y abiertas, entonces $f_1 \times f_2 : X_1 \times X_2 \longrightarrow Y_1 \times Y_2$ definida como $(f_1 \times f_2)(x_1, x_2) = (f_1(x_1), f_2(x_2))$ es identificación.

producto, abierta, identificación

Criterio para identificaciones

1b6

criterio, abierta, identificación

PROPOSICIÓN 4. Si $f : X \longrightarrow Y$ es continua, suprayectiva y abierta o cerrada, entonces f es identificación.

Demostración. Pendiente. $\square$

Identificación es casi homeomorfismo

1b7

PROPOSICIÓN 5. Sea $f : X \longrightarrow Y$ una función biyectiva. Entonces f es identificación si y sólo si f es homeomorfismo.

homeomorfismo, identificación

Demostración. Pendiente. $\square$

Restricción de identificaciones

1b8

restricción, identificación, criterio

Teorema 4. Si $f : X \longrightarrow Y$ es identificación, B es abierto o cerrado en Y y $A = f^{-1}(B)$, entonces $f|_A : A \longrightarrow B$ es identificación.

Demostración. Pendiente. $\square$

Propiedad universal de las identificaciones

1b9

propiedad universal, identificación

TEOREMA 5. Sea $f : X \longrightarrow Y$ una función. Entonces f es identificación si y sólo si se cumplen las siguientes condiciones:

(I) f es continua.

(II) Una función $g : Y \longrightarrow Z$ es continua si y sólo si $g \circ f$ es continua.

$$\begin{tikzcd} X \arrow[d, "f"'] \arrow[dr, "g\circ f"] & \\ Y \arrow[r, dashed, "g"'] & Z \end{tikzcd}$$

Demostración. Pendiente. $\square$

Definición de espacio cociente

cociente, topología

Definición 5. Si X es un espacio topológico y $\sim$ es una relación de equivalencia en X, se le llamará ***espacio cociente*** a $X/\sim$ con la topología de identificación coinducida por la proyección canónica $p : X \longrightarrow X/\sim$. Se dirá que $X/\sim$ tiene la ***topología cociente***.

Definición 6. A la proyección canónica $p : X \longrightarrow X/\sim$ vista como identificación se le llamará ***aplicación cociente***.

Propiedades de saturación

definición, saturación, identificación

Definición 7. Si $p : X \longrightarrow X/\sim$ es una aplicación cociente y $A \subset X$, se define la ***saturación*** de A como el conjunto $p^{-1}(p(A))$, que contiene a todos los puntos de A y a todos los puntos en X equivalentes a algún punto de A. Se dice que A es ***saturado*** si $A = p^{-1}(p(A))$.

Proposición 6. Si $A \subset X$ es abierto o cerrado y saturado respecto a una relación $\sim$ y p es la respectiva aplicación cociente, entonces $p|_A : A \longrightarrow p(A)$ es una identificación.

Demostración. Corolario de 1b8. □

Proposición 7. Si $A \subset X$ es saturado respecto a una relación $\sim$, $p : X \longrightarrow X/\sim$ es la respectiva aplicación cociente y p es una aplicación abierta o cerrada, entonces $p|_A : A \longrightarrow p(A)$ es una identificación.

Demostración. Pendiente. □

Espacios cocientes Hausdorff

1b10b

espacio cociente, Hausdorff, T2

TEOREMA 6. Si X es un espacio de Hausdorff, $p : X \longrightarrow X/\sim$ es una aplicación cociente y cada elemento de $X/\sim$ es cerrado en X, entonces $X/\sim$ es un espacio de Hausdorff.

Demostración. Pendiente. □

Homeomorfismo inducido por una identificación

Proposición 8. Sea $f : X \longrightarrow Y$ una identificación y suprayectiva. Si se define en X la relación de equivalencia $x_1 \sim x_2$ si y sólo si $f(x_1) = f(x_2)$, entonces $X/\sim$ es homeomorfo a Y.

Demostración. Pendiente. $\square$

Observación. Si $x \in X$, entonces $p^{-1}(\{x\}) = [x]$.

Caracterización de identificaciones

1b12

caracterización, compatibilidad, identificación

Definición 8. Dada una función $p : X \longrightarrow \overline{X}$, se dice que otra función $f : X \longrightarrow Y$ es compatible con p si $p(x) = p(x')$ implica que $f(x) = f(x')$, para cada $x, x' \in X$.

Teorema 7. Sea $p : X \longrightarrow \overline{X}$ continua y suprayectiva. Entonces p es identificación si y sólo si para cada función continua $f : X \longrightarrow Y$ compatible con p, existe una única función continua $\overline{f} : \overline{X} \longrightarrow Y$ tal que $\overline{f} \circ p = f$.

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "f"] \arrow[d, "p"'] & Y \\ \overline{X} \arrow[ur, dashed, "\overline{f}"'] & \end{tikzcd}$$

Definición 9. En la definición anterior, se dice que $\overline{f}$ es el resultado de pasar f al cociente.

Criterio para identificaciones

1b13

compacto, Hausdorff, identificación

TEOREMA 8. Si X es un espacio compacto, Y es un espacio de Hausdorff y $f : X \longrightarrow Y$ es continua y suprayectiva, entonces f es identificación.

Demostración. Pendiente. $\square$