

Variable Compleja

1 Definición de números complejos @definición, campo	2
1a Forma binómica de un complejo @definición, forma binómica	3
1a1 Potencias de la unidad imaginaria	4
1b Propiedades de campo @campo, propiedades	5
1c Norma, conjugado y partes de un complejo @definición, norma, conjugado, parte real, parte imaginaria	6
1c1 Propiedades de normas, conjugados y partes @propiedades, normas, conjugados, partes	7

Definición de números complejos

1

DEFINICIÓN 1. En \mathbb{R}^2 se definen las siguientes operaciones de suma y multiplicación

definición,
campo

$$(I) \quad (a, b) + (c, d) = (a + c, b + d),$$

$$(II) \quad (a, b)(c, d) = (ac - bd, ad + bc).$$

Estas operaciones hacen a \mathbb{R}^2 un campo, donde

$$-(a, b) = (-a, -b) \quad \text{y} \quad (a, b)^{-1} = \left(\frac{a}{a^2 + b^2}, \frac{-b}{a^2 + b^2} \right),$$

la última igualdad definida siempre que $(a, b) \neq (0, 0)$. A este campo se le denotará como \mathbb{C} y a sus elementos se les llamará **números complejos** o **número imaginarios**.

Forma binómica de un complejo

1a

DEFINICIÓN 2. Obsérvese que si $(a, b) \in \mathbb{C}$, entonces $(a, b) = (a, 0) + (0, 1)(b, 0) = (a, 0) + i(b, 0)$, donde $i = (0, 1)$. De ahora en adelante, se hará la convención de escribir x en lugar de $(x, 0)$, $x \in \mathbb{R}$, de tal manera que $(a, b) = a + ib$. Esta forma de escribir números complejos se llamará **forma binómica**. Se escribirá ia en vez de $0 + ia$, a en vez de $a + i0$ y $a \pm i$ en vez de $a \pm i1$.

definición,
forma binómica

Potencias de la unidad imaginaria

1a1

PROPOSICIÓN 1. *Se pueden efectuar las operaciones con números complejos de forma binómica como si fueran binomios algebraicos, reemplazando i^2 por -1 , i^3 por $-i$, i^4 por 1 , i^5 por i , etc. Específicamente, si $n \in \mathbb{N}$, entonces*

$$i^n = \begin{cases} 1 & \text{si } n \equiv 0 \pmod{4} \\ i & \text{si } n \equiv 1 \pmod{4} \\ -1 & \text{si } n \equiv 2 \pmod{4} \\ -i & \text{si } n \equiv 3 \pmod{4}. \end{cases}$$

Demostración. Nótese que $i^2 = -1$, $i^3 = -i$ y $i^4 = 1$. Si $n \in \mathbb{N}$, entonces por el algoritmo de la división, existen $k, r \in \mathbb{Z}$ tal que $n = 4k + r$, $0 \leq r \leq 3$. Si $r = 0$, entonces $i^n = i^{4k} = (i^4)^k = 1^k = 1$. Si $r = 1$ se tiene que $i^n = i^{4k+1} = (i^4)^k i^1 = 1^k i^1 = i$. Si $r = 2$ se puede escribir $i^n = i^{4k+2} = (i^4)^k i^2 = 1^k (-1) = -1$ y finalmente, si $r = 3$, se tiene $i^n = i^{4k+3} = (i^4)^k i^3 = 1^k (-i) = -i$.

Más aún, dado que $(a, 0)(b, 0) = (ab, 0)$ para cualesquiera $a, b \in \mathbb{R}$, se pueden utilizar las propiedades de conmutatividad, asociatividad y distributividad del campo \mathbb{C} para operar sus elementos como si fueran binomios algebraicos cuando están en su forma binómica. \square

Propiedades de campo

1b

TEOREMA 1. Si $z, w \in \mathbb{C}$ y $n \in \mathbb{N}$, se verifican las siguientes propiedades

campo,
propiedades

(I) (Binomio de Newton)

$$(z + w)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} z^k w^{n-k}, \text{ donde } \binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!},$$

(II) (Factorización de diferencia de potencias)

$$\begin{aligned} z^n - w^n &= (z - w) \sum_{k=0}^{n-1} z^k w^{n-1-k} \\ &= (z - w)(z^{n-1} + z^{n-2}w + \cdots + zw^{n-2} + w^{n-1}). \end{aligned}$$

(III) (Suma de cuadrados) $z^2 + w^2 = (z + iw)(z - iw)$.

Demostración. (I) Se verifica en cualquier anillo siempre que $zw = wz$. (II) Se verifica en cualquier anillo. (III) $(z + iw)(z - iw) = z^2 - ziw + iwz - i^2w = z^2 + w^2$, pues $ziw = iwz$ y $i^2 = -1$. \square

Norma, conjugado y partes de un complejo

1c

DEFINICIÓN 3. Dado un número complejo $z = a + ib \in \mathbb{C}$, se define

- (I) La **norma** o **valor absoluto** de z como el número real $|z| = (a^2 + b^2)^{1/2}$,
- (II) El **conjugado** de z como el número complejo $\bar{z} = a - ib$,
- (III) La **parte real** de z como $\operatorname{Re}(z) = a$ y la **parte imaginaria** de z como $\operatorname{Im}(z) = b$.

definición,
norma,
conjugado,
parte real, parte
imaginaria

Propiedades de normas, conjugados y partes

1c1

TEOREMA 2. Si $z, w \in \mathbb{C}$, se verifica lo siguiente

$$(I) \quad z\bar{z} = |z|^2,$$

$$(II) \quad z^{-1} = \bar{z}/|z|^2, \text{ si } z \neq 0,$$

$$(III) \quad \operatorname{Re}(z) = (z + \bar{z})/2 \text{ y } \operatorname{Im}(z) = (z - \bar{z})/2i,$$

$$(IV) \quad \overline{z + w} = \bar{z} + \bar{w} \text{ y } |zw| = |z||w|,$$

$$(V) \quad |z/w| = |z|/|w| \text{ si } w \neq 0,$$

$$(VI) \quad |\bar{z}| = |z|,$$

$$(VII) \quad |z + w|^2 = |z|^2 + 2\operatorname{Re}(z\bar{w}) + |w|^2,$$

$$(VIII) \quad |z - w|^2 = |z|^2 - 2\operatorname{Re}(z\bar{w}) + |w|^2,$$

$$(IX) \quad |z + w|^2 + |z - w|^2 = 2(|z|^2 + |w|^2),$$

$$(X) \quad \operatorname{Im}(z) = 0 \text{ si y sólo si } z = \bar{z},$$

$$(XI) \quad \bar{\bar{z}} = z,$$

$$(XII) \quad |z + w| \leq |z| + |w|,$$

$$(XIII) \quad \left| |z| - |w| \right| \leq |z - w|,$$

$$(XIV) \quad |z + w| = [(z + w)(\bar{z} + \bar{w})]^{1/2}.$$

propiedades,
normas,
conjugados,
partes

Demostración. Pendiente.

□