Topología

Definición de espacio topológico 1

Definición 1. Sea X un conjunto. Una **topología** sobre Xes una familia $\mathcal{T}$ de subconjuntos de X con las siguientes propiedades: definición

(i) $\varnothing, X \in \mathcal{T}$.

(ii) Si $\{U_i\}_{i\in\mathcal{I}} \subset \mathcal{T}$ entonces $\bigcup_{i\in\mathcal{I}} U_i \in \mathcal{T}$.

(iii) Si $\{U_i\}_{i\in\mathcal{I}} \subset \mathcal{T}$ y $\mathcal{I}$ es finito, entonces $\bigcap_{i\in\mathcal{I}} U_i \in \mathcal{T}$.

A la pareja $(X, \mathcal{T})$ se le llama **espacio topológico**.

Definición de homeomorfismo

DEFINICIÓN 2. Un **homeomorfismo** es una función $f : X \longrightarrow Y$ continua y biyectiva, cuya inversa también es continua. En este caso, se dice que los espacios X y Y son **homeomorfos**.

definición, homeomorfismo

Proyección estereográfica

homeomorfismo explícito, proyección estereográfica

Teorema 1. *La función*

$$p : S^n - \{N\} \longrightarrow \mathbb{R}^n$$
$$(x_1, \ldots, x_{n+1}) \longmapsto \left(\frac{x_1}{1 - x_{n+1}}, \ldots, \frac{x_n}{1 - x_{n+1}} \right),$$

donde $N = (0, \ldots, 0, 1)$*, es un homeomorfismo con las topologías usuales y su inversa está dada por*

$$p^{-1} : \mathbb{R}^n \longrightarrow S^n - \{N\}$$
$$y = (y_1, \ldots, y_n) \longmapsto \left(\frac{2y_1}{|y|^2 + 1}, \ldots, \frac{2y_n}{|y|^2 + 1}, \frac{|y|^2 - 1}{|y|^2 + 1} \right).$$

A este homeomorfismo se le llama ***proyección estereográfica****.*

Demostración. Es rutinario verificar que $p \circ p^{-1} = \mathrm{id}_{\mathbb{R}^n}$ y que $p^{-1} \circ p = \mathrm{id}_{S^n - \{N\}}$. Además, p es continua por ser sus componentes funciones racionales en las variables $x_1, \ldots, x_{n+1}$ tales que su denominador no se anula. De forma similar, p^{-1} es continua por ser sus funciones componentes productos de las variables $y_1, \ldots, y_n$, con la función $1/(|y|^2 + 1)$, la cuál es continua pues el denominador no se anula y la función norma $|y|$ es continua. □

Definición de topología de identificación

1b

generación, definición

Definición 3. Dados un espacio topológico X, un conjunto Y y una función $f : X \longrightarrow Y$, se puede dotar a Y con una topología, a saber, $\{U \subset Y \mid f^{-1}(U) \text{ es abierto en } X\}$. A esta topología se le llamará **topología de identificación** o **topología coinducida** en Y por X a través de f.

Definición 4. Si X y Y son espacios topológicos y $f : X \longrightarrow Y$ es una función, se dice que f es una **identificación** si la topología de Y es la topología coinducida por f.

Más fina para continuidad

comparación

Proposición 1. *Sea X un espacio topológico y $f : X \longrightarrow Y$ una función. La topología de identificación en Y coinducida por f hace continua a f. Más aún, de entre todas las topologías que hacen continua a f, esta es la más fina.*

Demostración. Sea $\mathcal{T}_f$ la topología de identificación en Y. Si $U \in \mathcal{T}$, entonces $f^{-1}(U)$ es abierto en X, por definición. Como U fue arbitrario, entonces f debe ser continua, por definición de continuidad.

Sea $\mathcal{T}$ una topología que hace continua a f. Si $U \in \mathcal{T}$, entonces $U \subset Y$ y $f^{-1}(U)$ es abierto en X por definición de continuidad, pero esto implica que $U \in \mathcal{T}_f$ por definición de $\mathcal{T}_f$. Como U fue arbitrario, entonces $\mathcal{T} \subset \mathcal{T}_f$, y a su vez como $\mathcal{T}$ fue una topología arbitraria que hace continua a f, entonces $\mathcal{T}_f$ debe ser la más fina entre ellas. □

Caracterización de identificaciones

1b2

caracterización, identificación

Teorema 2. *Si $f : X \longrightarrow Y$ es una función, son equivalentes*

(i) *f es identificación.*

(ii) *U es abierto en Y si y sólo si $f^{-1}(U)$ es abierto en X.*

(iii) *F es cerrado en Y si y sólo si $f^{-1}(F)$ es cerrado en X.*

Demostración. (i) $\implies$ (ii). Si f es identificación entonces f es, en particular, continua, y por tanto U abierto en Y implica $f^{-1}(U)$ abierto en X. Supogase ahora que $f^{-1}(U)$ es abierto en X con $U \subset Y$. Entonces U es abierto en X por definición de topología de identificación. Como U fue arbitrario se tiene el resultado.

(ii) $\implies$ (iii). Se tiene que

$$\begin{aligned} F \text{ es cerrado en } Y &\iff X - F \text{ es abierto en } Y \\ &\iff f^{-1}(X - F) = Y - f^{-1}(F) \text{ es abierto en } X, \text{ por hipótesis} \\ &\iff f^{-1}(F) \text{ es cerrado en } X. \end{aligned}$$

(iii) $\implies$ (ii). Es similar al punto anterior.

(ii) $\implies$ (i). Sea $\mathcal{T}$ la topología de Y. Si se verifica (ii), entonces la $\mathcal{T}$ hace continua a f. Más aún, si hay otra topología $\mathcal{T}'$ que hace continua a f, entonces $U \in \mathcal{T}$ implica que $f^{-1}(U)$ es abierto en X, y por tanto $U \in \mathcal{T}$ por hipótesis. Luego $\mathcal{T}' \subset \mathcal{T}$ y como $\mathcal{T}'$ fue arbitraria, entonces $\mathcal{T}$ es de hecho más fina en Y que cualquier otra que haga continua a f. Es fácil verificar que sólo existe una topología sobre Y con esta propiedad y es la topología de identificación. Luego, $\mathcal{T}$ es la topología de identificación coinducida por f, es decir, f es una identificación. $\square$

Propiedades de las identificaciones

1b3

propiedades, composición, identificación

Proposición 2. *Sean $f : X \longrightarrow Y$ y $g : Y \longrightarrow Z$ funciones. Se verifican las siguientes afirmaciones*

(i) *$\mathrm{id}_X : X \longrightarrow X$ es identificación.*

(ii) *Si f y g son identificaciones, entonces $g \circ f$ es identificación.*

(iii) *Si f y $g \circ f$ son identificaciones, necesariamente g es identificación.*

Demostración. (i) Se sigue de que U es abierto en X si y sólo si $\mathrm{id}_X(U) = U$ es abierto en X.

(ii) Como f y g son identificaciones, entonces, por 1b2,

$$\begin{aligned} U \text{ es abierto en } Z &\iff g^{-1}(U) \text{ es abierto en } Y \\ &\iff f^{-1}(g^{-1}(U)) = (g \circ f)^{-1}(U) \text{ es abierto en } X. \end{aligned}$$

Luego $g \circ f$ es identificación.

(iii) Se tiene que

$$\begin{aligned} U \text{ es abierto en } Z &\iff (g \circ f)^{-1}(U) = f^{-1}(g^{-1}(U)) \text{ es abierto en } X \\ &\iff g^{-1}(U) \text{ es abierto en } Y, \end{aligned}$$

luego g es identificación. $\square$

Criterio para identificaciones

criterio, sección

Teorema 3. *Sea $p : X \longrightarrow Y$ continua. Si existe una función continua $s : Y \longrightarrow X$ tal que $p \circ s = \mathrm{id}_Y$, entonces p es una identificación.*

Demostración. Si $U \subset Y$ es tal que $p^{-1}(U)$ es abierto en X, entonces $s^{-1}(p^{-1}(U)) = (p \circ s)^{-1}(U) = \mathrm{id}_Y(U) = U$ es abierto, por ser s continua. Como p es también continua por hipótesis, se tiene que U es abierto en Y si y sólo si $p^{-1}(U)$ es abierto en X, luego p es identificación. □

Definición 5. A $s : Y \longrightarrow X$ en el teorema anterior se le llama **sección** de p.

Producto de identificaciones

1b5

producto, abierta, identificación

Proposición 3. *Si* $f_1 : X_1 \longrightarrow Y_1$ *y* $f_2 : X_2 \longrightarrow Y_2$ *son identificaciones, suprayectivas y abiertas, entonces* $f_1 \times f_2 : X_1 \times X_2 \longrightarrow Y_1 \times Y_2$ *definida como* $(f_1 \times f_2)(x_1, x_2) = (f_1(x_1), f_2(x_2))$ *es identificación.*

Criterio para identificaciones

1b6

criterio, abierta, identificación

PROPOSICIÓN 4. *Si $f : X \longrightarrow Y$ es continua, suprayectiva y abierta o cerrada, entonces f es identificación.*

Demostración. Pendiente. $\square$

Identificación es casi homeomorfismo

1b7

homeomorfismo, identificación

PROPOSICIÓN 5. *Sea $f : X \longrightarrow Y$ una función biyectiva. Entonces f es identificación si y sólo si f es homeomorfismo.*

Demostración. Pendiente. $\square$

Restricción de identificaciones

1b8

restricción, identificación, criterio

Teorema 4. *Si* $f : X \longrightarrow Y$ *es identificación,* B *es abierto o cerrado en* Y *y* $A = f^{-1}(B)$*, entonces* $f|_A : A \longrightarrow B$ *es identificación.*

Demostración. Pendiente. □

Propiedad universal de las identificaciones

propiedad universal, identificación

Teorema 5. *Sea* $f : X \longrightarrow Y$ *una función. Entonces* f *es identificación si y sólo si se cumplen las siguientes condiciones:*

(i) f *es continua.*

(ii) *Una función* $g : Y \longrightarrow Z$ *es continua si y sólo si* $g \circ f$ *es continua.*

$$\begin{tikzcd} X \arrow[d, "f"'] \arrow[dr, "g\circ f"] & \\ Y \arrow[r, dashed, "g"'] & Z \end{tikzcd}$$

Demostración. Pendiente. □

Definición de espacio cociente

cociente, topología

Definición 6. Si X es un espacio topológico y $\sim$ es una relación de equivalencia en X, se le llamará **espacio cociente** a $X/{\sim}$ con la topología de identificación coinducida por la proyección canónica $p : X \longrightarrow X/{\sim}$. Se dirá que $X/{\sim}$ tiene la **topología cociente**.

Definición 7. A la proyección canónica $p : X \longrightarrow X/{\sim}$ vista como identificación se le llamará **aplicación cociente**.

Propiedades de saturación

1b10a

definición, saturación, identificación

Definición 8. Si $p : X \longrightarrow X/\sim$ es una aplicación cociente y $A \subset X$, se define la **saturación** de A como el conjunto $p^{-1}(p(A))$, que contiene a todos los puntos de A y a todos los puntos en X equivalentes a algún punto de A. Se dice que A es **saturado** si $A = p^{-1}(p(A))$.

PROPOSICIÓN 6. *Si $A \subset X$ es abierto o cerrado y saturado respecto a una relación $\sim$ y p es la respectiva aplicación cociente, entonces $p|_A : A \longrightarrow p(A)$ es una identificación.*

Demostración. Corolario de 1b8. □

PROPOSICIÓN 7. *Si $A \subset X$ es saturado respecto a una relación $\sim$, $p : X \longrightarrow X/\sim$ es la respectiva aplicación cociente y p es una aplicación abierta o cerrada, entonces $p|_A : A \longrightarrow p(A)$ es una identificación.*

Demostración. Pendiente. □

Espacios cocientes Hausdorff

1b10b

espacio cociente, Hausdorff, T2

Teorema 6. *Si X es un espacio de Hausdorff, $p : X \longrightarrow X/\sim$ es una aplicación cociente y cada elemento de $X/\sim$ es cerrado en X, entonces $X/\sim$ es un espacio de Hausdorff.*

Demostración. Pendiente. $\square$

Homeomorfismo inducido por una identificación

PROPOSICIÓN 8. *Sea $f : X \longrightarrow Y$ una identificación y suprayectiva. Si se define en X la relación de equivalencia $x_1 \sim x_2$ si y sólo si $f(x_1) = f(x_2)$, entonces $X/\sim$ es homeomorfo a Y.*

Demostración. Pendiente. $\square$

Observación. Si $x \in X$, entonces $p^{-1}(\{x\}) = [x]$.

Caracterización de identificaciones

caracterización, compatibilidad, identificación

Definición 9. Dada una función $p : X \longrightarrow \overline{X}$, se dice que otra función $f : X \longrightarrow Y$ es compatible con p si $p(x) = p(x')$ implica que $f(x) = f(x')$, para cada $x, x' \in X$.

Teorema 7. *Sea $p : X \longrightarrow \overline{X}$ continua y suprayectiva. Entonces p es identificación si y sólo si para cada función continua $f : X \longrightarrow Y$ compatible con p, existe una única función continua $\overline{f} : \overline{X} \longrightarrow Y$ tal que $\overline{f} \circ p = f$.*

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[r, "f"] \arrow[d, "p"'] & Y \\
\overline{X} \arrow[ur, dashed, "\overline{f}"'] &
\end{tikzcd}$$

Definición 10. En la definición anterior, se dice que $\overline{f}$ es el resultado de pasar f al cociente.

Criterio para identificaciones

1b13

compacto, Hausdorff, identificación

Teorema 8. *Si X es un espacio compacto, Y es un espacio de Hausdorff y $f : X \longrightarrow Y$ es continua y suprayectiva, entonces f es identificación.*

Demostración. Pendiente. $\square$