Variable Compleja

Definición de números complejos

definición, campo

Definición 1. En $\mathbb{R}^2$ se definen las siguientes operaciones de suma y multiplicación

(i) $(a, b) + (c, d) = (a + c, b + d)$,

(ii) $(a, b)(c, d) = (ac - bd, ad + bc)$.

Estas operaciones hacen a $\mathbb{R}^2$ un campo, donde

$$-(a, b) = (-a, -b) \quad \text{y} \quad (a, b)^{-1} = \left(\frac{a}{a^2 + b^2}, \frac{-b}{a^2 + b^2}\right),$$

la última igualdad definida siempre que $(a, b) \neq (0, 0)$. A este campo se le denotará como $\mathbb{C}$ y a sus elementos se les llamará **números complejos** o **número imaginarios**.

Forma binómica de un complejo

definición, forma binómica

Definición 2. Obsérvese que si $(a, b) \in \mathbb{C}$, entonces $(a, b) = (a, 0) + (0, 1)(b, 0) = (a, 0) + i(b, 0)$, donde $i = (0, 1)$. De ahora en adelante, se hará la convención de escribir x en lugar de $(x, 0)$, $x \in \mathbb{R}$, de tal manera que $(a, b) = a + ib$. Esta forma de escribir números complejos se llamará **forma binómica**. Se escribirá ia en vez de $0 + ia$, a en vez de $a + i0$ y $a \pm i$ en vez de $a \pm i1$.

Proposición 1. *Se pueden efectuar las operaciones con números complejos de forma binómica como si fueran binomios algebráicos, reemplazando i^2 por -1, i^3 por $-i$, i^4 por 1, i^5 por i, etc. Específicamente, si $n \in \mathbb{N}$, entonces*

$$i^n = \begin{cases} 1 & \text{si } n \equiv 0 \pmod 4 \\ i & \text{si } n \equiv 1 \pmod 4 \\ -1 & \text{si } n \equiv 2 \pmod 4 \\ -i & \text{si } n \equiv 3 \pmod 4. \end{cases}$$

Demostración. Nótese que $i^2 = -1$, $i^3 = -i$ y $i^4 = 1$. Si $n \in \mathbb{N}$, entonces por el algoritmo de la división, existen $k, r \in \mathbb{Z}$ tal que $n = 4k + r$, $0 \leq r \leq 3$. Si $r = 0$, entonces $i^n = i^{4n} = (i^4)^n = 1^n = 1$. Si $r = 1$ se tiene que $i^n = i^{4k+1} = (i^4)^k i^1 = 1^k i^1 = i$. Si $r = 2$ se puede escribir $i^n = i^{4k+2} = (i^4)^k i^2 = 1^k - 1 = -1$ y finalmente, si $r = 3$, se tiene $i^n = i^{4k+3} = (i^4)^k i^3 = 1^k i^3 = -i$.

Más aún, dado que $(a, 0)(b, 0) = (ab, 0)$ para cualesquiera $a, b \in \mathbb{R}$, se pueden utilizar las propiedades de conmutatividad, asociatividad y distributividad del campo $\mathbb{C}$ para operar sus elementos como si fueran binomios algebraicos cuando están en su forma binómica. □

Propiedades de campo

campo, propiedades

Teorema 1. *Si $z, w \in \mathbb{C}$ y $n \in \mathbb{N}$, se verifican las siguientes propiedades*

(i) *(Binomio de Newton)*

$$(z+w)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} z^k w^{n-k}, \ \ \textit{donde} \ \binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!},$$

(ii) *(Factorización de diferencia de potencias)*

$$\begin{aligned} z^n - w^n &= (z-w)\sum_{k=0}^{n-1} z^k w^{n-1-k} \\ &= (z-w)(z^{n-1} + z^{n-2}w + \cdots + zw^{n-2} + w^{n-1}). \end{aligned}$$

(iii) *(Suma de cuadrados)* $z^2 + w^2 = (z+iw)(z-iw)$.

Demostración. (i) Se verifica en cualquier anillo siempre que $zw = wz$. (ii) Se verifica en cualquier anillo. (iii) $(z+iw)(z-iw) = z^2 - ziw + iwz - i^2 w = z^2 + w^2$, pues $ziw = iwz$ y $i^2 = -1$. □

Norma, conjugado y partes de un complejo

1c

definición, norma, conjugado, parte real, parte imaginaria

DEFINICIÓN 3. Dado un número complejo $z = a + ib \in \mathbb{C}$, se define

(I) La **norma** o **valor absoluto** de z como el número real $|z| = (a^2 + b^2)^{1/2}$,

(II) El **conjugado** de z como el número complejo $\overline{z} = a - ib$,

(III) La **parte real** de z como $\mathrm{Re}(z) = a$ y la **parte imaginaria** de z como $\mathrm{Im}(z) = b$.

Propiedades de normas, conjugados y partes

1c1

propiedades, normas, conjugados, partes

Teorema 2. *Si $z, w \in \mathbb{C}$, se verifica lo siguiente*

(i) $z\overline{z} = |z|^2$,

(ii) $z^{-1} = \overline{z}/|z|^2$, *si* $z \neq 0$,

(iii) $\mathrm{Re}(z) = (z + \overline{z})/2$ *y* $\mathrm{Im}(z) = (z - \overline{z})/2i$,

(iv) $\overline{z + w} = \overline{z} + \overline{w}$ *y* $|zw| = |z||w|$,

(v) $|z/w| = |z|/|w|$ *si* $w \neq 0$,

(vi) $|\overline{z}| = |z|$,

(vii) $|z + w|^2 = |z|^2 + 2\mathrm{Re}(z\overline{w}) + |w|^2$,

(viii) $|z - w|^2 = |z|^2 - 2\mathrm{Re}(z\overline{w}) + |w|^2$,

(ix) $|z + w|^2 + |z - w|^2 = 2(|z|^2 + |w|^2)$,

(x) $\mathrm{Im}(z) = 0$ *si y sólo si* $z = \overline{z}$,

(xi) $\overline{\overline{z}} = z$,

(xii) $|z + w| \leq |z| + |w|$,

(xiii) $\big||z| - |w|\big| \leq |z - w|$,

(xiv) $|z + w| = [(z + w)(\overline{z} + \overline{w})]^{1/2}$.

Demostración. Pendiente. □