

Topología

1 Definición de espacio topológico @definición	3
1a Definición de homeomorfismo @definición, homeomorfismo	4
1a1 Proyección estereográfica @homeomorfismo explícito, proyección estereográfica	5
1b Definición de topología de identificación @generación, definición	6
1b1 Más fina para continuidad @comparación	7
1b2 Caracterización de identificaciones @caracterización, identificación	8
1b3 Propiedades de las identificaciones @propiedades, composición, identificación	9
1b4 Criterio para identificaciones @criterio, sección	10
1b5 Producto de identificaciones @producto, abierta, identificación	11
1b6 Criterio para identificaciones @criterio, abierta, identificación	12
1b7 Identificación es casi homeomorfismo @homeomorfismo, identificación	13
1b8 Restricción de identificaciones @restricción, identificación, criterio	14
1b9 Propiedad universal de las identificaciones @propiedad universal, identificación	15
1b10 Definición de espacio cociente @cociente, topología	16
1b10a Propiedades de saturación @definición, saturación, identificación	17

1b10b Espacios cocientes Hausdorff @espacio cociente, Hausdorff, T2	18
1b11 Homeomorfismo inducido por una identificación	19
1b12 Caracterización de identificaciones @caracterización, compatibilidad, identificación	20
1b13 Criterio para identificaciones @compacto, Hausdorff, identificación	21

Definición de espacio topológico

1

DEFINICIÓN 1. Sea X un conjunto. Una **topología** sobre X es una familia \mathcal{T} de subconjuntos de X con las siguientes propiedades:

definición

(I) $\emptyset, X \in \mathcal{T}$.

(II) Si $\{U_i\}_{i \in I} \subset \mathcal{T}$ entonces $\bigcup_{i \in I} U_i \in \mathcal{T}$.

(III) Si $\{U_i\}_{i \in I} \subset \mathcal{T}$ y I es finito, entonces $\bigcap_{i \in I} U_i \in \mathcal{T}$.

A la pareja (X, \mathcal{T}) se le llama **espacio topológico**.

Definición de homeomorfismo

1a

DEFINICIÓN 2. Un **homeomorfismo** es una función $f : X \longrightarrow Y$ continua y biyectiva, cuya inversa también es continua. En este caso, se dice que los espacios X y Y son **homeomorfos**.

definición, homeomorfismo

Proyección estereográfica

1a1

TEOREMA 1. La función

$$p : S^n - \{N\} \longrightarrow \mathbb{R}^n$$
$$(x_1, \dots, x_{n+1}) \longmapsto \left(\frac{x_1}{1 - x_{n+1}}, \dots, \frac{x_n}{1 - x_{n+1}} \right),$$

donde $N = (0, \dots, 0, 1)$, es un homeomorfismo con las topologías usuales y su inversa está dada por

$$p^{-1} : \mathbb{R}^n \longrightarrow S^n - \{N\}$$
$$y = (y_1, \dots, y_n) \longmapsto \left(\frac{2y_1}{|y|^2 + 1}, \dots, \frac{2y_n}{|y|^2 + 1}, \frac{|y|^2 - 1}{|y|^2 + 1} \right).$$

A este homeomorfismo se le llama **proyección estereográfica**.

Demostración. Es rutinario verificar que $p \circ p^{-1} = \text{id}_{\mathbb{R}^n}$ y que $p^{-1} \circ p = \text{id}_{S^n - \{N\}}$. Además, p es continua por ser sus componentes funciones racionales en las variables x_1, \dots, x_{n+1} tales que su denominador no se anula. De forma similar, p^{-1} es continua por ser sus funciones componentes productos de las variables y_1, \dots, y_n , con la función $1/(|y|^2 + 1)$, la cuál es continua pues el denominador no se anula y la función norma $|y|$ es continua. \square

homeomor-
fismo explícito,
proyección
estereográfica

Definición de topología de identificación

1b

DEFINICIÓN 3. Dados un espacio topológico X , un conjunto Y y una función $f : X \longrightarrow Y$, se puede dotar a Y con una topología, a saber, $\{U \subset Y \mid f^{-1}(U) \text{ es abierto en } X\}$. A esta topología se le llamará **topología de identificación** o **topología coinducida** en Y por X a través de f .

generación,
definición

DEFINICIÓN 4. Si X y Y son espacios topológicos y $f : X \longrightarrow Y$ es una función, se dice que f es una **identificación** si la topología de Y es la topología coinducida por f .

Más fina para continuidad

1b1

PROPOSICIÓN 1. Sea X un espacio topológico y $f : X \longrightarrow Y$ una función. La topología de identificación en Y coinducida por f hace continua a f . Más aún, de entre todas las topologías que hacen continua a f , esta es la más fina.

comparación

Demostración. Sea \mathcal{T}_f la topología de identificación en Y . Si $U \in \mathcal{T}$, entonces $f^{-1}(U)$ es abierto en X , por definición. Como U fue arbitrario, entonces f debe ser continua, por definición de continuidad.

Sea \mathcal{T} una topología que hace continua a f . Si $U \in \mathcal{T}$, entonces $U \subset Y$ y $f^{-1}(U)$ es abierto en X por definición de continuidad, pero esto implica que $U \in \mathcal{T}_f$ por definición de \mathcal{T}_f . Como U fue arbitrario, entonces $\mathcal{T} \subset \mathcal{T}_f$, y a su vez como \mathcal{T} fue una topología arbitraria que hace continua a f , entonces \mathcal{T}_f debe ser la más fina entre ellas. \square

Caracterización de identificaciones

1b2

TEOREMA 2. Si $f : X \longrightarrow Y$ es una función, son equivalentes:

caracterización,
identificación

(I) f es identificación.

(II) U es abierto en Y si y sólo si $f^{-1}(U)$ es abierto en X .

(III) F es cerrado en Y si y sólo si $f^{-1}(F)$ es cerrado en X .

Demostración. (I) \implies (II). Si f es identificación entonces f es, en particular, continua, y por tanto U abierto en Y implica $f^{-1}(U)$ abierto en X . Supogase ahora que $f^{-1}(U)$ es abierto en X con $U \subset Y$. Entonces U es abierto en X por definición de topología de identificación. Como U fue arbitrario se tiene el resultado.

(b) \implies (c). Se tiene que

$$\begin{aligned} F \text{ es cerrado en } Y &\iff X - F \text{ es abierto en } Y \\ &\iff f^{-1}(X - F) = Y - f^{-1}(F) \text{ es abierto en } X, \text{ por hipótesis} \\ &\iff f^{-1}(F) \text{ es cerrado en } X. \end{aligned}$$

□

Propiedades de las identificaciones

1b3

PROPOSICIÓN 2. Se verifican las siguientes afirmaciones:

(I) $\text{id}_X : X \longrightarrow X$ es identificación.

(II) Si f y g son identificaciones, entonces $g \circ f$ es identificación.

(III) Si f y $g \circ f$ son identificaciones, necesariamente g es identificación.

Demostración. Pendiente.

□

propiedades,
composición,
identificación

Criterio para identificaciones

1b4

TEOREMA 3. Sea $p : X \longrightarrow Y$ continua. Si existe una función continua $s : Y \longrightarrow X$ tal que $p \circ s = \text{id}_Y$, entonces p es una identificación.

criterio, sección

Demostración. Pendiente.

□

Producto de identificaciones

1b5

PROPOSICIÓN 3. Si $f_1 : X_1 \longrightarrow Y_1$ y $f_2 : X_2 \longrightarrow Y_2$ son identificaciones, suprayectivas y abiertas, entonces $f_1 \times f_2 : X_1 \times X_2 \longrightarrow Y_1 \times Y_2$ definida como $(f_1 \times f_2)(x_1, x_2) = (f_1(x_1), f_2(x_2))$ es identificación.

producto,
abierto,
identificación

Criterio para identificaciones

1b6

PROPOSICIÓN 4. Si $f : X \longrightarrow Y$ es continua, suprayectiva y abierta o cerrada, entonces f es identificación.

criterio, abierta,
identificación

Demostración. Pendiente.

□

Identificación es casi homeomorfismo

1b7

PROPOSICIÓN 5. Sea $f : X \longrightarrow Y$ una función biyectiva. Entonces f es identificación si y sólo si f es homeomorfismo.

homeomorfismo,
identificación

Demostración. Pendiente.

□

Restricción de identificaciones

1b8

TEOREMA 4. Si $f : X \longrightarrow Y$ es identificación, B es abierto o cerrado en Y y $A = f^{-1}(B)$, entonces $f|_A : A \longrightarrow B$ es identificación.

restricción,
identificación,
criterio

Demostración. Pendiente.

□

Propiedad universal de las identificaciones

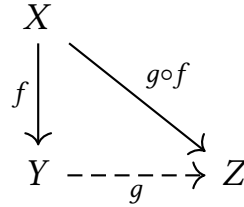
1b9

TEOREMA 5. Sea $f : X \longrightarrow Y$ una función. Entonces f es identificación si y sólo si se cumplen las siguientes condiciones:

propiedad
universal,
identificación

(i) f es continua.

(ii) Una función $g : Y \longrightarrow Z$ es continua si y sólo si $g \circ f$ es continua.



Demostración. Pendiente.

□

Definición de espacio cociente

1b10

DEFINICIÓN 5. Si X es un espacio topológico y \sim es una relación de equivalencia en X , se le llamará ***espacio cociente*** a X/\sim con la topología de identificación coinducida por la proyección canónica $p : X \longrightarrow X/\sim$. Se dirá que X/\sim tiene la ***topología cociente***.

cociente,
topología

DEFINICIÓN 6. A la proyección canónica $p : X \longrightarrow X/\sim$ vista como identificación se le llamará ***aplicación cociente***.

Propiedades de saturación

1b10a

DEFINICIÓN 7. Si $p : X \longrightarrow X/\sim$ es una aplicación cociente y $A \subset X$, se define la **saturación** de A como el conjunto $p^{-1}(p(A))$, que contiene a todos los puntos de A y a todos los puntos en X equivalentes a algún punto de A . Se dice que A es **saturado** si $A = p^{-1}(p(A))$.

definición,
saturación,
identificación

PROPOSICIÓN 6. Si $A \subset X$ es abierto o cerrado y saturado respecto a una relación \sim y p es la respectiva aplicación cociente, entonces $p|_A : A \longrightarrow p(A)$ es una identificación.

Demostración. Corolario de 1b8.

□

PROPOSICIÓN 7. Si $A \subset X$ es saturado respecto a una relación \sim , $p : X \longrightarrow X/\sim$ es la respectiva aplicación cociente y p es una aplicación abierta o cerrada, entonces $p|_A : A \longrightarrow p(A)$ es una identificación.

Demostración. Pendiente.

□

Espacios cocientes Hausdorff

1b10b

TEOREMA 6. Si X es un espacio de Hausdorff, $p : X \longrightarrow X/\sim$ es una aplicación cociente y cada elemento de X/\sim es cerrado en X , entonces X/\sim es un espacio de Hausdorff.

espacio
cociente,
Hausdorff, T2

Demostración. Pendiente.

□

Homeomorfismo inducido por una identificación

1b11

PROPOSICIÓN 8. Sea $f : X \longrightarrow Y$ una identificación y suprayectiva. Si se define en X la relación de equivalencia $x_1 \sim x_2$ si y sólo si $f(x_1) = f(x_2)$, entonces X/\sim es homeomorfo a Y .

Demostración. Pendiente.

□

Observación. Si $x \in X$, entonces $p^{-1}(\{x\}) = [x]$.

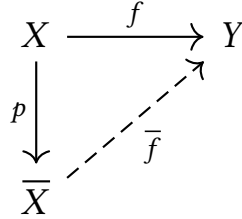
Caracterización de identificaciones

1b12

DEFINICIÓN 8. Dada una función $p : X \longrightarrow \bar{X}$, se dice que otra función $f : X \longrightarrow Y$ es compatible con p si $p(x) = p(x')$ implica que $f(x) = f(x')$, para cada $x, x' \in X$.

caracterización,
compatibilidad,
identificación

TEOREMA 7. Sea $p : X \longrightarrow \bar{X}$ continua y suprayectiva. Entonces p es identificación si y sólo si para cada función continua $f : X \longrightarrow Y$ compatible con p , existe una única función continua $\bar{f} : \bar{X} \longrightarrow Y$ tal que $\bar{f} \circ p = f$.



DEFINICIÓN 9. En la definición anterior, se dice que \bar{f} es el resultado de pasar f al cociente.

Criterio para identificaciones

1b13

TEOREMA 8. Si X es un espacio compacto, Y es un espacio de Hausdorff y $f : X \longrightarrow Y$ es continua y suprayectiva, entonces f es identificación.

compacto,
Hausdorff,
identificación

Demostración. Pendiente.

□