



INSTITUTO POLITÉCNICO NACIONAL  
ESCUELA SUPERIOR DE FÍSICA Y MATEMÁTICAS



---

# ESTRUCTURA DEL ANILLO DE FUNCIONES ARITMÉTICAS Y UNA APLICACIÓN AL PROCESAMIENTO DE SEÑALES

PROPUESTA DE TESIS  
QUE PARA OBTENER EL TÍTULO DE  
LICENCIADO EN FÍSICA Y MATEMÁTICAS

PRESENTA  
JOSÉ LUIS JUANICO LÓPEZ

ASESOR DE TESIS  
DR. PABLO LAM ESTRADA

CUIDAD DE MÉXICO

Marzo de 2025



*A mis padres, Adriana y Antonio.*



## Agradecimientos

Debo agradecer a mis padres, quienes en su infinita paciencia vieron como se gestó este trabajo de inicio a fin, con la incertidumbre de si se terminaría algún día. No es necesario mencionar que sin su apoyo económico y emocional este trabajo no existiría.

Debo darle las gracias también a mi asesor, el Dr. Pablo Lam, por su atención incondicional durante toda la realización de este trabajo y su firme convicción en que se podría terminar de forma satisfactoria, sin mencionar la gran ayuda y orientación sobre todos los detalles técnicos y burocráticos necesarios para iniciar y terminar esta tesis. No está de más agradecer a la Dra. Myriam Maldonado, al Dr. César Escobar, al M. en C. Andrés Sabino y al Dr. David Bretón por tomarse la molestia de leer este trabajo y ayudarme a mejorarlo. A final de cuentas, un trabajo siempre es incompleto si no incluye enfoques, observaciones y puntos de vista diferentes al de uno. Cualquier error que se encuentre en este trabajo recae únicamente sobre mi.

Finalmente, siento una inmensa gratitud a la ESFM, o lo que es lo mismo, a todos los profesores que me formaron como matemático en este centro de estudios. De principio a fin me sentí fascinado por los enigmáticos conocimientos que se nos presentaban, y no hubo profesor del que no aprendiera algo maravilloso. Los temas que elegí para discutir aquí están en gran parte influenciados por mis más tiernos inicios al entrar a esta escuela, particularmente por la unidad de álgebra I, a cuyos contenidos volví para desarrollar gran parte de la tesis. En mi opinión, esto prueba que la formación que esta escuela ofrece es de carácter universal y fundamental, abriéndole las puertas a todos sus alumnos para profundizar en cualquier rama de las matemáticas que deseen.



# Índice general

<b>Portada</b> . . . . .	I
<b>Dedicatoria</b> . . . . .	III
<b>Agradecimientos</b> . . . . .	V
<b>Índice general</b> . . . . .	VII
<b>Introducción</b> . . . . .	IX
<b>1. Estructura del anillo de funciones aritméticas</b> . . . . .	1
1.1. Convolución de Dirichlet . . . . .	2
1.2. Una norma para funciones aritméticas . . . . .	6
1.3. Funciones multiplicativas . . . . .	11
1.4. Isomorfismos entre grupos de funciones aritméticas . . . . .	14
1.5. Algunas funciones aritméticas conocidas . . . . .	20
<b>2. Funciones pares</b> . . . . .	25
2.1. Sumas de Ramanujan . . . . .	25
2.2. El subespacio de funciones pares . . . . .	40
<b>3. Procesamiento de señales</b> . . . . .	45
3.1. Transformada Discreta de Fourier . . . . .	45
3.2. Señales pares . . . . .	47
3.3. Aplicaciones . . . . .	51
<b>A. Divisibilidad</b> . . . . .	57
<b>B. Código</b> . . . . .	57
<b>Bibliografía</b> . . . . .	60





## Introducción

En 1640 Fermat afirmó que poseía una demostración del hecho de que si  $p$  es un número primo y  $x$  es cualquier entero no divisible por  $p$ , entonces  $x^{p-1} - 1$  es divisible por  $p$ . Ahora llamado Teorema de Fermat, es uno de los teoremas fundamentales de la teoría de números. Este resultado fue generalizado más tarde por Euler en 1760: si  $\varphi(n)$  denota el número de enteros positivos no mayores a  $n$  que son primos relativos a  $n$ , entonces  $x^{\varphi(n)-1} - 1$  es divisible por  $p$ . Aunque la función  $\varphi$  de Euler se definió para enunciar la generalización anterior, ésta posee remarcables propiedades que hacen valer la pena estudiarla por sí misma. Gauss (1801) probó que si  $n \in \mathbb{N}$  y  $d_1, d_2, \dots, d_k$  son todos los divisores positivos de  $n$ , entonces  $\varphi(d_1) + \varphi(d_2) + \dots + \varphi(d_k) = n$ .

Por otro lado, en 1832 A. F. Möbius definió la función  $\mu(n)$  como cero si  $n$  es divisible por un cuadrado distinto de 1, y como  $(-1)^k$  si  $n$  es producto de  $k$  primos distintos, mientras que  $\mu(1) = 1$  y empleó dicha función en la inversión de series:

$$F(x) = \sum_{s=1}^{\infty} \frac{f(sx)}{s^n} \text{ implica } f(x) = \sum_{s=1}^{\infty} \mu(s) \frac{F(sx)}{s^n}.$$

Dedekind (1857) probó que si  $F(m) = \sum f(d)$ , donde  $d$  recorre todos los divisores positivos de  $m$ , entonces

$$f(n) = F(n) - \sum F\left(\frac{n}{a}\right) + \sum F\left(\frac{n}{ab}\right) - \sum F\left(\frac{n}{abc}\right) + \dots,$$

donde las sumas se extienden sobre todas las combinaciones de los distintos factores primos  $a, b, \dots$  de  $n$ . Laguerre (1863) expresó la ecuación anterior como

$$f(n) = \sum \mu\left(\frac{n}{d}\right) F(d).$$

En particular, como  $\sum \varphi(d) = n$ , se tiene

$$\varphi(n) = n - \sum \frac{n}{a} + \sum \frac{n}{ab} - \dots = n \left(1 - \frac{1}{a}\right) \left(1 - \frac{1}{b}\right) \dots$$

En 1874, F. Mertens notó que  $\sum \mu(d) = 0$  si  $n > 1$ , donde  $d$  recorre todos los divisores positivos de  $n$ . N. V. Bugaiev (1888) consideró la función  $v(x)$  con valor  $\log p$  si  $x$  es potencia de un primo  $p$  y con valor 0 en otro caso. Si  $d$  recorre todos los divisores positivos de  $n$ ,  $\sum v(d) = \log n$  implica que  $\sum \mu(d) \log d = -v(n)$ . Bugaiev llamó a  $F(n) = \sum f(d)$ , la integral numérica de  $f(n)$ , donde la suma es sobre todos los divisores positivos  $d$  de  $n$ , y llamó a  $f(n)$  la derivada numérica de la función  $F(n)$  [7].



En 1857 Liouville estableció sin prueba un gran número de identidades interesantes similares a las anteriores, en sus cuatro artículos *Sur quelques fonctions numeriques*, sobre funciones aritméticas específicas, como la suma y número de divisores de un entero, la función  $\varphi$  de Euler, la función de Möbius  $\mu$ , su propia función  $\lambda$ , etc. Afirmó que estaba en posesión de un método general de extrema simplicidad, con el que tales identidades se podrían escribir a voluntad. Tales identidades probaron ser un valioso punto de partida para la evaluación asintótica de funciones aritméticas, pero su interés peculiar era más bien de naturaleza algebraica [3].

En 1911, al buscar pruebas para las fórmulas de Liouville, E. T. Bell construyó un método general con las características deseadas y lo extendió a otros campos además de los números racionales. Aunque Bell tenía intenciones de publicar su teoría completa en 1915, no fue sino hasta 1927 que una introducción desde un punto de vista lógico fue publicada en [2]. En lo concerniente a los *enteros racionales*, terminología de la época para referirse a los números enteros, en 1912 y 1915 [3], probó el teorema de inversión de Möbius, el cuál es un análogo a la inversión de series de Möbius en un contexto puramente aritmético y lo aplicó a numerosos ejemplos.

Bell (1928), llamó a una función  $f(x)$  *función numérica* si  $f(1) \neq 0$  y  $f(x)$  está definida para todo entero mayor que cero. El lector que recorra este trabajo podrá darse cuenta de que esta definición coincide con la de una función aritmética *invertible*, (proposición 1.6). También llamó a una función *factorizable* a una función numérica  $g(x)$  tal que  $g(1) = 1$  y  $g(mn) = g(m)g(n)$  para todos los pares  $(m, n)$  de primos relativos positivos, que en este trabajo serán referidas como *funciones multiplicativas* (definición 1.10).

Asimismo, Bell consideró la función *unidad*, aquí llamada *identidad* (definición 1.7),  $\varepsilon(x)$  definida como  $\varepsilon(1) = 1$  y  $\varepsilon(n) = 0$  para cada  $n > 1$  y probó que para cualquier función numérica  $f$  existe otra función numérica  $f'$  tal que

$$\sum f(d)f'(d) = \varepsilon(n), \quad (n = 1, 2, 3, \dots)$$

donde la suma se extiende sobre todos los pares de enteros  $(d, \delta)$  tales que  $d, \delta > 0$  y  $n = d\delta$ , y llama a  $f'(x)$  la *recíproca* de  $f(x)$ .

El lector con conocimiento básico de álgebra abstracta puede comenzar a identificar lo que está sucediendo aquí. La función  $\varepsilon$  está actuando como la identidad respecto a la operación de anterior, es decir, hasta ahora el conjunto de funciones aritméticas constituye un monoide. ¿Será esta operación también asociativa o conmutativa? La respuesta a estas preguntas es afirmativa y más aún, con la operación de suma de funciones punto a punto, este conjunto forma un anillo conmutativo con identidad.

Y lo que es más, resulta ser también un dominio entero y de factorización única. En el primer capítulo, el objetivo de este trabajo es presentar algunos resultados sobre la estructura del anillo de funciones aritméticas en el lenguaje del álgebra abstracta y se pueden encontrar en [5, 14, 3]. Después, se exponen varios isomorfismos entre los subgrupos del anillo de funciones aritméticas, aditivos y multiplicativos, entre ellos el subgrupo de funciones multiplicativas y el de funciones aritméticas real-valuadas. Al final de este capítulo se presentan algunas funciones aritméticas conocidas y algunas relaciones entre ellas, derivadas fácilmente con los resultados probados en las secciones anteriores y estos resultados están en [17].

En el segundo capítulo se presentan dos clases de funciones, las funciones aritméticas *periódicas*, en el sentido usual de periodicidad, y las funciones *pares*, una subclase muy especial de las funciones periódicas y son tales que  $f(n) = f((n, r))$ ,  $\forall n \in \mathbb{N}$ , donde  $r \in \mathbb{N}$  es fijo y  $(n, r)$  es el máximo común divisor de  $n$  y  $r$ . Se introducen las sumas de Ramanujan como funciones pares y se presenta una teoría análoga a la teoría de Fourier del análisis real que recae únicamente en las propiedades de divisibilidad de los enteros. Específicamente, se prueba que toda función par tiene una expansión de Fourier finita con sumas de Ramanujan como coeficientes y se prueba que ésta representación puede ser derivada de un producto interno en el espacio de funciones aritméticas pares. Los resultados presentados en este capítulo se pueden encontrar en [6, 11, 12, 13].

En el último capítulo se presenta una aplicación de los resultados expuestos en el segundo capítulo. Se presentan las señales *simétricas*, que son funciones  $x : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{C}$  tales que  $x(n) = x(r - n)$ ,  $\forall n \in \mathbb{Z}$  y  $r \in \mathbb{N}$  fijo y una subclase de éstas señales, las señales *pares*, que son una extensión de las funciones aritméticas pares a  $\mathbb{Z}$ . Se prueba que la Transformada Discreta de Fourier de una señal par se puede calcular usando las sumas de Ramanujan. Estos resultados se pueden consultar en [15, 18].



## 1. Estructura del anillo de funciones aritméticas

**Definición 1.1.** Se entenderá como **función aritmética** a cualquier función  $f : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{C}$ . Se denota al conjunto de todas las funciones aritméticas como  $\mathcal{A}$ .

**Definición 1.2.** (Función constante). La función aritmética constante de valor  $c \in \mathbb{C}$  en  $\mathbb{N}$  será escrita en negritas como  $\mathbf{c}$ . Por ejemplo,  $\mathbf{1}(n) = 1, \forall n \in \mathbb{N}$ .

La siguiente función aritmética, conocida como función de Möbius, es de importancia central en la teoría de números. Aunque a primera vista su definición parece más bien artificial, se verá que aparece naturalmente al derivar propiedades del producto de Dirichlet.

**Definición 1.3.** (Función de Möbius). La función  $\mu$  de Möbius está definida por  $\mu(1) = 1$  y dada  $n = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \cdots p_k^{\alpha_k}$  la factorización de  $n$  en primos, entonces

$$\mu(n) = \begin{cases} (-1)^k & \text{si } \alpha_1 = \alpha_2 = \cdots = \alpha_k = 1 \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

Una primera forma natural de operar funciones aritméticas es haciendo su suma o multiplicación puntual, obteniendo otra función aritmética.

**Definición 1.4.** Si  $f, g \in \mathcal{A}$ , definimos la **suma** de  $f$  y  $g$  como la función

$$\begin{aligned} f + g : \mathbb{N} &\longrightarrow \mathbb{C} \\ n &\longmapsto f(n) + g(n) \end{aligned}$$

y el **producto** de  $f$  y  $g$  como la función

$$\begin{aligned} fg : \mathbb{N} &\longrightarrow \mathbb{C} \\ n &\longmapsto f(n)g(n). \end{aligned}$$

Es fácil verificar que para cualesquiera funciones aritméticas  $f$  y  $g$ ,

$$(I) \quad f + \mathbf{0} = \mathbf{0} + f = f$$

$$(II) \quad f\mathbf{1} = \mathbf{1}f = f$$

$$(III) \quad f + g = g + f$$

$$(IV) \quad fg = gf.$$

## 1.1. Convolución de Dirichlet

**Definición 1.5.** Sean  $f$  una función aritmética,  $n \in \mathbb{N}$  y  $d_1, d_2, \dots, d_k$  todos los divisores positivos de  $n$ . Se define

$$\sum_{d|n} f(d) = f(d_1) + f(d_2) + \dots + f(d_k).$$

**Definición 1.6.** (Convolución de Dirichlet). Si  $f$  y  $g$  son funciones aritméticas, definimos la **convolución de Dirichlet** o **producto de Dirichlet** de  $f$  y  $g$ , como la función aritmética  $f * g$  dada por

$$(f * g)(n) = \sum_{d|n} f(d)g\left(\frac{n}{d}\right), \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Para ver que la operación  $*$  es asociativa, conmutativa y distributiva respecto a la suma son necesarios algunos lemas.

**Lema 1.1.** Si  $k \in \mathbb{N}$ ,  $D \subset \mathbb{N}$  y  $f, g : \{1, \dots, k\} \rightarrow D$  son dos funciones biyectivas y estrictamente crecientes, entonces  $f = g$ .

*Demostración.* Como  $D \subset \mathbb{N}$  podemos ordenar los elementos de  $D$ , digamos  $D = \{d_1, \dots, d_k\}$ , donde  $d_1 < d_2 < \dots < d_k$ . Tenemos que  $d_1$  es entonces el elemento mínimo de  $D$ . Sin embargo, tenemos que  $f(1) \leq f(i)$  y  $g(1) \leq g(i)$ ,  $\forall i = 1, \dots, k$  y como  $f$  y  $g$  son suprayectivas, entonces  $f(1) \leq d_1$  y  $g(1) \leq d_1$ , además  $d_1 \leq f(1)$  y  $d_1 \leq g(1)$  por ser  $d_1$  el elemento mínimo de  $D$ . Luego  $f(1) = d_1 = g(1)$ .

Supongamos que  $f(i) = d_i = g(i)$ ,  $\forall i = 1, \dots, n$  y  $n+1 \leq k$ . Si  $n+1 = k$ , como  $f$  y  $g$  son biyectivas, necesariamente  $f(n+1) = d_{n+1} = g(n+1)$ . Supongamos pues que  $n+1 < k$ . Tenemos que  $d_{n+1}$  es el elemento mínimo del conjunto  $D \setminus \{1, \dots, d_n\}$ . Notemos que  $f(n+1), g(n+1) \in D \setminus \{1, \dots, d_n\}$ . En efecto, pues si  $f(n+1) = d_{i_1}$  o  $g(n+1) = d_{i_2}$ , para algunos  $i_1, i_2 \in \{1, \dots, n\}$ , entonces  $f(n+1) = f(i_1)$  y  $g(n+1) = g(i_2)$  por hipótesis de inducción y por inyectividad se tendría que  $n+1 = i_1 \leq n$  o  $n+1 = i_2 \leq n$ , lo cual es absurdo. En consecuencia  $f(n+1), g(n+1) \in D \setminus \{1, \dots, d_n\}$  y por tanto  $d_{n+1} \leq f(n+1)$  y  $d_{n+1} \leq g(n+1)$ .

Por otra parte, se tiene por suprayectividad que existen  $j_1, j_2 \in \{1, \dots, k\}$  tales que  $f(j_1) = d_{n+1}$  y  $g(j_2) = d_{n+1}$ , más aún,  $n+1 \leq j_1$  y  $n+1 \leq j_2$ , pues en caso contrario se tendría que  $j_1 < n$  o  $j_2 < n$ , es decir,  $f(j_1) < f(n)$  o  $g(j_2) < g(n)$ , es decir,  $d_{n+1} < d_n$ , lo que contradice la hipótesis. Luego  $f(n+1) \leq f(j_1) = d_{n+1}$  y  $g(n+1) \leq g(j_2) = d_{n+1}$ . Se sigue finalmente que  $f(n+1) = d_{n+1} = g(n+1)$ . ■

**Lema 1.2.** Si  $n \in \mathbb{N}$  y  $d_1 = 1 < d_2 < \cdots < d_{k-1} < d_k = n$  son todos los divisores positivos de  $n$ , entonces  $d_i d_{k+1-i} = n$ ,  $\forall i = 1, \dots, k$ .

*Demostración.* Sea  $D = \{d_1, \dots, d_k\}$  y consideremos las funciones  $f : \{1, \dots, k\} \rightarrow D$  definida como  $f(i) = d_i$ ,  $\forall i = 1, \dots, k$  y  $g : \{1, \dots, k\} \rightarrow D$  definida como  $g(i) = n/d_{k+1-i}$ ,  $\forall i = 1, \dots, k$ . Es fácil ver que  $f$  y  $g$  cumplen las condiciones del lema anterior y por tanto  $f(i) = g(i)$ ,  $\forall i = 1, \dots, k$ , es decir,  $d_i d_{k+1-i} = n$ ,  $\forall i = 1, \dots, k$ . ■

**Proposición 1.1.** Si  $f$  y  $g$  son funciones aritméticas,  $n \in \mathbb{N}$  y  $d_1 < \cdots < d_k$  son todos los divisores positivos de  $n$ , entonces

$$(f * g)(n) = \sum_{i=1}^k f(d_i)g(d_{k+1-i}) = f(d_1)g(d_k) + \cdots + f(d_k)g(d_1).$$

*Demostración.* Se sigue de la definición de  $(f * g)(n)$  y del Lema 1.2. ■

**Definición 1.7.** (Función identidad). Se define a la función identidad  $I$  como

$$I(n) = \begin{cases} 1 & \text{si } n = 1 \\ 0 & \text{si } n > 1, \end{cases}$$

para cada  $n \in \mathbb{N}$ .

La siguiente proposición muestra que la función  $I$  actúa como la identidad bajo la convolución de Dirichlet, entre otras propiedades algebraicas.

**Proposición 1.2.** Si  $f, g$  y  $h$  son funciones aritméticas entonces se verifica lo siguiente:

$$(I) \quad (f * g) * h = f * (g * h)$$

$$(II) \quad f * I = I * f = f$$

$$(III) \quad f * (g + h) = (f * g) + (f * h)$$

$$(IV) \quad f * g = g * f$$

*Demostración.* Sea  $n \in \mathbb{N}$ , sean  $d_1 = 1 < d_2 < \cdots < d_k = n$  todos los divisores positivos de  $n$  y para cada  $i = 1, \dots, k$  sean  $c_{i,1} < c_{i,2} < \cdots < c_{i,m_i}$  los divisores positivos de  $d_i$ .

(i) Se tiene

$$((f * g) * h)(n) = \sum_{i=1}^k \sum_{j=1}^{m_i} f(c_{i,j})g(c_{i,m_i+1-j})h(d_{k+1-i}) \quad (1.1)$$

y

$$(f * (g * h))(n) = \sum_{i=1}^k \sum_{j=1}^{m_{k+1-i}} f(d_i)g(c_{m_{k+1-i},j})h(c_{m_{k+1-i},m_{k+1-i}+1-j}). \quad (1.2)$$

Definanse los conjuntos

$$C = \{f(c_{i,j})g(c_{i,m_i+1-j})h(d_{k+1-i}) \mid i = 1, \dots, k, j = 1, \dots, m_i\}$$

$$\mathcal{D} = \{f(d_i)g(c_{m_{k+1-i},j})h(c_{m_{k+1-i},m_{k+1-i}+1-j}) \mid i = 1, \dots, k, j = 1, \dots, m_i\},$$

y  $\mathcal{E} = \{f(a)f(b)f(c) \mid a, b, c \in \mathbb{N} \text{ y } abc = n\}$ . Se tiene que  $C = \mathcal{E}$  y  $\mathcal{D} = \mathcal{E}$ .

En efecto, si  $f(c_{i,j})g(c_{i,m_i+1-j})h(d_{k+1-i})$ , entonces  $c_{i,j}c_{i,m_i+1-j}d_{k+1-i} = d_i d_{k+1-i} = n$ , aplicando dos veces el Lema 1.2. Recíprocamente, si  $a, b, c \in \mathbb{N}$  son tales que  $abc = n$ , entonces  $c \mid n$ , por tanto  $c = d_j$ , para algún  $j = 1, \dots, k$ , es decir,  $c = d_{k+1-i}$  para  $i = k+1-j$  con  $i = 1, \dots, k$ . Notemos entonces que por el Lema 1.2, necesariamente se debe tener  $ab = d_i$ , por lo que  $a = c_{i,j}$ , para algún  $j = 1, \dots, m_i$  y aplicando el lema de nuevo se debe tener que  $b = c_{i,m_i+1-j}$ . En consecuencia  $f(a)g(b)h(c) = f(c_{i,j})g(c_{i,m_i+1-j})h(d_{k+1-i}) \in C$ . Se sigue pues que  $C = \mathcal{E}$ . Similarmente se demuestra que  $\mathcal{D} = \mathcal{E}$ .

Se tiene pues que  $C = \mathcal{D}$  y como las sumas (1.1) y (1.2) se extienden sobre los conjuntos  $C$  y  $\mathcal{D}$ , entonces deben coincidir, es decir,  $((f * g) * h)(n) = (f * (g * h))(n)$ .

(II) Como  $1 < d_i, \forall i = 2, \dots, k$  entonces  $I(d_i) = 0, \forall i = 2, \dots, k$ , luego por la Proposición 1.1 se tiene que

$$\begin{aligned} (f * I)(n) &= \sum_{i=1}^k f(d_i)I(d_{k+1-i}) = f(d_1)I(d_k) + \dots + f(d_k)I(d_1) \\ &= f(d_k)I(d_1) = f(n)I(1) = f(n) \cdot 1 = f(n) \end{aligned}$$

Y

$$\begin{aligned} (I * f)(n) &= \sum_{i=1}^k I(d_i)f(d_{k+1-i}) = I(d_1)f(d_k) + \dots + I(d_k)f(d_1) \\ &= I(d_1)f(d_k) = I(n)f(1) = 1 \cdot f(n) = f(n) \end{aligned}$$



(III) Se tiene

$$\begin{aligned} (f * (g+h))(n) &= \sum_{i=1}^k f(d_i)(g+h)(d_{k+1-i}) = \sum_{i=1}^k f(d_i)[g(d_{k+1-i}) + h(d_{k+1-i})] \\ &= \sum_{i=1}^k f(d_i)g(d_{k+1-i}) + \sum_{i=1}^k f(d_i)h(d_{k+1-i}) = (f * g)(n) + (f * h)(n). \end{aligned}$$

(IV) La conmutatividad de la convolución de Dirichlet es clara, pues

$$(f * g)(n) = \sum_{i=1}^k f(d_i)g(d_{k+1-i}) = \sum_{i=1}^k g(d_i)f(d_{k+1-i}) = (g * f)(n).$$

■

Se puede definir también la bien conocida multiplicación por escalares en el conjunto de funciones aritméticas, análoga a la del espacio euclideo  $\mathbb{R}^n$ .

**Definición 1.8.** Dados  $c \in \mathbb{C}$  y  $f \in \mathcal{A}$ , se define  $cf \in \mathcal{A}$  como la función

$$\begin{aligned} cf : \mathbb{N} &\longrightarrow \mathbb{C} \\ n &\longmapsto cf(n). \end{aligned}$$

**Proposición 1.3.** El grupo abeliano  $(\mathcal{A}, +)$  junto con la multiplicación por escalares definida anteriormente constituyen un espacio vectorial sobre el campo  $\mathbb{C}$ , donde el elemento neutro aditivo es la función  $\mathbf{0}$ . De ahora en adelante, este espacio vectorial será llamado simplemente el espacio de las funciones aritméticas.

**Proposición 1.4.** Si  $c \in \mathbb{C}$  y  $f, g \in \mathcal{A}$  entonces  $c(f * g) = (cf) * g = f * (cg)$ .

*Demostración.* Se tiene que para cualquier  $n \in \mathbb{N}$ ,

$$(c(f * g))(n) = c(f * g)(n) = c \sum_{d|n} f(d)g\left(\frac{n}{d}\right) = \sum_{d|n} (cf(d))g\left(\frac{n}{d}\right) = ((cf) * g)(n).$$

Luego  $c(f * g) = (cf) * g$ . Las demás igualdades se prueban similarmente. ■

**Corolario 1.1.** El anillo  $(\mathcal{A}, +, *)$  es un álgebra conmutativa con identidad sobre el campo  $\mathbb{C}$ .

## 1.2. Una norma para funciones aritméticas

**Definición 1.9.** Sea  $\mathcal{A}$  el conjunto de todas las funciones aritméticas. Se define

$$\begin{aligned} \mathcal{N} : \mathcal{A} &\longrightarrow \mathbb{N} \cup \{0\} \\ f &\longmapsto \mathcal{N}(f) = \begin{cases} 0 & \text{si } f = 0 \\ \min \{n : f(n) \neq 0\} & \text{si } f \neq 0. \end{cases} \end{aligned}$$

**Proposición 1.5.** La función  $\mathcal{N}$  definida anteriormente tiene las siguientes propiedades:

- (I)  $\mathcal{N}(f) = 0 \iff f = 0, \forall f \in \mathcal{A}.$
- (II)  $\mathcal{N}(f * g) = \mathcal{N}(f)\mathcal{N}(g), \forall f, g \in \mathcal{A}.$
- (III)  $\min\{\mathcal{N}(f), \mathcal{N}(g)\} \leq \mathcal{N}(f + g), \forall f, g \in \mathcal{A}.$
- (IV) Si  $\mathcal{N}(f) \neq \mathcal{N}(g)$  entonces  $\mathcal{N}(f + g) = \min\{\mathcal{N}(f), \mathcal{N}(g)\}.$

*Demostración.* (I) Si  $f = 0$  por definición se tiene que  $\mathcal{N}(f) = 0$ . Si  $f \neq 0$ , entonces  $\min \{n : f(n) \neq 0\} \neq 0$ , i.e.  $\mathcal{N}(f) \geq 1 \neq 0$ . Por tanto  $\mathcal{N}(f) = 0$  implica que  $f = 0$ .

(II) Si  $f = 0$  o  $g = 0$  entonces  $\mathcal{N}(f) = 0$  o  $\mathcal{N}(g) = 0$ . Además  $(f * g)(n) = \sum_{d|n} f(d)g(n/d) = 0, \forall n \in \mathbb{N}$ , es decir,  $\mathcal{N}(f * g) = 0 = \mathcal{N}(f)\mathcal{N}(g)$ . Supongamos pues que  $f \neq 0$  y  $g \neq 0$ . Sean  $a = \mathcal{N}(f)$  y  $b = \mathcal{N}(g)$ . Afirmamos que  $ab = \min \{n : (f * g)(n) \neq 0\} = m$ .

En efecto, se tiene

$$\begin{aligned} (f * g)(ab) &= \sum_{d|ab} f(d)g(ab/d) \\ &= \sum_{\substack{d|ab \\ a \leq d}} f(d)g(ab/d), \text{ pues } f(d) = 0, \forall d < a \\ &= \sum_{\substack{d|ab \\ a \leq d \\ ab/d \leq b}} f(d)g(ab/d), \text{ pues } a \leq d \implies ab/d \leq b \\ &= \sum_{a=d} f(d)g(ab/d), \text{ pues } g(d) = 0, \forall d < b \\ &= f(a)g(b) \neq 0. \end{aligned}$$

Luego  $m \leq ab$  por elección de  $m$ . Si  $m < ab$  entonces

$$(f * g)(m) = \sum_{d|m} f(d)g(m/d) = \sum_{\substack{d|m \\ b \leq m/d}} f(d)g(m/d) = \sum_{\substack{d|m \\ d < a}} f(d)g(m/d) = 0,$$

pues  $b \leq m/d$  implica que  $d < a$  y  $f(d) = 0$ . Pero esto contradice la elección de  $m$ . Por tanto,  $m = ab$ .

(III) Sin pérdida de generalidad se puede suponer que  $a \leq b$ , de tal manera que  $\min\{a, b\} = a$ . Si  $n < a$  entonces  $(f + g)(n) = f(n) + g(n) = 0$ , por lo que

$$\min\{N(f), N(g)\} = a \leq \min\{n : (f + g)(n) \neq 0\} = N(f + g).$$

(iv) Supóngase de nuevo sin pérdida de generalidad que  $a < b$ . Entonces

$$(f + g)(a) = f(a) + g(a) = f(a) + 0 = f(a) \neq 0,$$

por tanto,  $N(f + g) \leq a = \min\{a, b\} = \min\{N(f), N(g)\}$ . El resultado se sigue ahora del punto (III). ■

**Teorema 1.1.**  $\mathcal{A}$  es un dominio entero.

*Demostración.* Si  $f, g \in \mathcal{A}$  y  $f * g = 0$  entonces  $N(f * g) = 0 \implies N(f)N(g) = 0 \implies N(f) = 0$  o  $N(g) = 0 \implies f = 0$  o  $g = 0$ . ■

*Observación 1.1.* Como ocurre en cualquier anillo con identidad, el conjunto de elementos invertibles forma un grupo respecto a la operación de multiplicación, en este caso, respecto a la convolución de Dirichlet. Este grupo se denotará  $(\mathcal{A}^*, *)$  o simplemente como  $\mathcal{A}^*$  cuando no haya riesgo de confusión.

**Proposición 1.6.**  $f \in \mathcal{A}^*$  si y sólo si  $N(f) = 1$ .

*Demostración.* Si  $f(1) \neq 0$ , defínase

$$\begin{aligned} f^{-1}(1) &= \frac{1}{f(1)} \\ f^{-1}(n) &= -\frac{1}{f(1)} \sum_{\substack{d|n \\ d \neq n}} f\left(\frac{n}{d}\right) f^{-1}(d), \quad n > 1. \end{aligned} \tag{1.3}$$

Entonces la ecuación recursiva (1.3) define a  $f^{-1}$  de tal forma que  $f * f^{-1} = I$ , pues  $f(1)f^{-1}(1) = 1$  y si  $n > 1$  entonces

$$(f * f^{-1})(n) = \sum_{d|n} f(d)f^{-1}\left(\frac{n}{d}\right) = f(1)f^{-1}(n) + \sum_{\substack{d|n \\ d \neq n}} f(d)f^{-1}\left(\frac{n}{d}\right)$$

$$= f(1)f^{-1}(n) - f(1)f^{-1}(n) = 0$$

es decir,  $f * f^{-1} = I$ .

Si se supone ahora que  $f$  es invertible, entonces, en particular, se tiene que  $(f * f^{-1})(1) = 1$ , y por tanto  $f(1) \neq 0$ , es decir,  $N(f) = 1$ . ■

**Proposición 1.7.** *Si  $N(f) = p$  para algún número primo  $p$ , entonces  $f$  es irreducible en  $\mathcal{A}$ .*

*Demostración.* Como  $p \neq 0$  y  $p \neq 1$ , entonces  $f$  no es cero ni es una unidad. Además, si  $f = g * h$  para algunas funciones  $g, h \in \mathcal{A}$ , entonces  $g, h \neq 0$ , pues en caso contrario  $f = 0$  y en consecuencia  $N(f) = 0 \neq p$ , así que  $N(f)$  y  $N(h)$  son enteros positivos. Luego  $N(f) = N(g * h) = N(g)N(h) = p$  y como  $p$  es primo, entonces  $N(g) = 1$  o bien  $N(h) = 1$ , es decir,  $g$  o  $h$  es unidad. Como  $g$  y  $h$  fueron arbitrarios, entonces  $f$  debe ser irreducible en  $\mathcal{A}$ . ■

**Teorema 1.2.** *No puede existir una sucesión  $\{f_i\}_{i \in \mathbb{N}}$  de funciones aritméticas con la propiedad de que  $f_1 \neq 0$  y  $f_i = f_{i+1} * g_{i+1}$  y  $g_{i+1}$  no es unidad, para cada  $i \in \mathbb{N}$ .*

*Demostración.* Asuma que dicho conjunto existe. Nótese que  $N(f_1) = N(f_2)N(g_2) > N(f_2)$ , pues  $g_2$  no es unidad. De hecho se tiene

$$N(f_1) > N(f_2) > \cdots > N(f_i), \forall i \in \mathbb{N}.$$

Más aún, como cada uno de éstos números son enteros, entonces

$$N(f_1) \geq N(f_2) + 1 \geq \cdots \geq N(f_{i+1}) + i, \forall i \in \mathbb{N}$$

En particular, como  $N(f_1) \geq 1$  por ser  $f_1 \neq 0$ , se tiene que  $N(f_1) \geq N(f_{N(f_1)+1}) + N(f_1)$ , luego  $0 \geq N(f_{N(f_1)+1})$  y por tanto  $N(f_{N(f_1)+1}) = 0$ , en consecuencia  $f_{N(f_1)+1} = 0$ , lo cual no es posible, pues de ser así  $f_1 = f_{N(f_1)+1} * g_{N(f_1)+1} \cdots g_2 = 0$ , contradiciendo la hipótesis. ■

El teorema anterior permite probar que cualquier elemento no cero y no unidad de  $\mathcal{A}$  se puede expresar como producto finito de elementos irreducibles de  $\mathcal{A}$ .

**Proposición 1.8.** *Si  $f \in \mathcal{A} \setminus (\mathcal{A}^* \cup \{0\})$ , entonces  $f$  es producto finito de elementos irreducibles en  $\mathcal{A}$ .*

*Demostración.* Como  $f \neq 0$ , en lo que sigue de esta demostración se debe tener que todas las funciones involucradas son distintas de cero. Se probará primero que  $f$  tiene un factor irreducible. En efecto, si  $f$  es irreducible, entonces no hay nada que probar. Supóngase que este no es el caso y por tanto  $f = f_1 * g_1$ , donde  $f_1$  y  $g_1$  no son unidades.

Si  $f_1$  es irreducible hemos concluido. En caso contrario, se tiene  $f_1 = f_2 * g_2$ , donde  $f_2$  y  $g_2$  no son unidades. De manera inductiva se tiene una sucesión de funciones  $\{f_i\}_{i \in \mathbb{N}}$  tal que  $f_i = f_{i+1} * g_{i+1}$ , donde  $g_{i+1}$  no es unidad para cada  $i \in \mathbb{N}$ , lo cual es imposible por el teorema anterior. En consecuencia, este proceso debe terminar y debe existir  $M \in \mathbb{N}$  tal que  $f_M = f_{M+1} * g_{M+1}$ , donde  $f_{M+1}$  es irreducible y  $f_{M+1} \mid f$ .

Se probará ahora el resultado principal. Escribiendo  $f_{M+1} = p_1$ , se tiene que  $f = p_1 * q_1$ , con  $p_1$  irreducible. Si  $q_1$  es una unidad, entonces  $f$  es irreducible y ya terminamos. Si  $q_1$  no es unidad, nuevamente,  $q_1$  debe tener un factor irreducible, es decir,  $q_1 = p_2 * q_2$ , donde  $p_2$  es irreducible, y por tanto no es unidad. Si  $q_2$  es unidad, entonces  $q_1$  es irreducible y  $f = p_1 * q_1$  es la factorización buscada. Si este proceso nunca terminara, de forma inductiva se tendría una sucesión  $\{q_i\}_{i \in \mathbb{N}}$  tal que  $q_i = p_{i+1} * q_{i+1}$ , con  $p_i$  no unidad, para cada  $i \in \mathbb{N}$ , lo que contradice de nuevo el Teorema 1.2. En consecuencia, el proceso eventualmente termina y por tanto existe  $N \in \mathbb{N}$  tal que  $q_N = p_{N+1} * q_{N+1}$ , donde  $q_{N+1}$  es unidad y  $p_{N+1}$  es irreducible. Luego

$$f = p_1 * p_2 * \cdots * p_N * q_N,$$

donde  $p_1, \dots, p_N$  y  $q_N$  son irreducibles. ■

Habiendo llegado tan lejos, se puede conjeturar que el dominio  $\mathcal{A}$  es un dominio de factorización única. Esta sospecha es, de manera sorprendente, acertada. Sin embargo, la demostración de este hecho no es tan sencilla como la de la proposición anterior.

**Teorema 1.3.**  *$\mathcal{A}$  es un dominio de factorización única.*

*Demostración.* El hecho de que toda función aritmética se puede escribir como producto de funciones aritméticas irreducibles ha quedado en evidencia en la proposición anterior. Una demostración de la unicidad de dicha factorización se puede encontrar en [5, 18, p. 985]. Ahí se prueba que el anillo de series de potencias formales en un conjunto numerable de variables  $\{x_1, x_2, \dots\}$  es un dominio de factorización única. El resultado se sigue entonces del hecho de que este anillo es isomorfo al anillo de funciones aritméticas mediante el isomorfismo

$$\begin{aligned} P : \mathcal{A} &\longrightarrow \mathbb{C}[[x_1, x_2, \dots]] \\ P(f) &\longmapsto \sum_{n \in \mathbb{N}} f(n) x_1^{\alpha_1} \cdots x_v^{\alpha_v}, \end{aligned}$$

donde  $n = p_1^{\alpha_1} \cdots p_v^{\alpha_v}$  es la factorización en primos de  $n$ . Se tiene que  $P(f+g) = P(f) + P(g)$  y  $P(f*g) = P(f)P(g)$ , donde la multiplicación de dos series de este tipo se realiza agrupando términos “semejantes”, es decir, monomios iguales. Otra demostración

de este hecho se puede encontrar en [14]. Ambas demostraciones utilizan el hecho de que los anillos de series de potencias formales en un número finito de variables  $\mathbb{C}[[x_1, \dots, x_n]]$  son dominios de factorización única, para cada  $n \in \mathbb{N}$ . ■

**Corolario 1.2.** *Todo elemento irreducible en  $\mathcal{A}$  es primo en  $\mathcal{A}$ .*

Siendo  $\mathcal{A}$  un dominio de factorización única, cabe preguntarse si también es un dominio de ideales principales. La siguiente proposición muestra que este no es el caso.

**Proposición 1.9.**  *$\mathcal{A}$  no es un dominio de ideales principales.*

*Demostración.* Considere  $f = (0, 1, 0, \dots)$  y  $g = (0, 0, 1, 0, \dots)$ . Se tiene que  $N(f) = 2$  y  $N(g) = 3$ , ambos números primos. Afirmamos que  $I$  es un máximo común divisor de  $f$  y  $g$ . Claro que  $I \mid f$  y  $I \mid g$ . Si  $h \in \mathcal{A}$  es tal que  $h \mid f$  y  $h \mid g$ , entonces  $f = hk_1$  y  $g = hk_2$ , con  $h, k_1, k_2 \in \mathcal{A} \setminus \{0\}$ . Luego  $2 = N(h)N(k_1) < 3 = N(h)N(k_2)$ , en consecuencia,  $1 \leq N(k_1) < N(k_2)$ , así que necesariamente  $N(k_2) = 3$  y  $N(h) = 1$ . Luego  $h$  es unidad, es decir  $h \mid I$ . Esto prueba que  $I$  es máximo común divisor de  $f$  y  $g$ . ■

Si  $\mathcal{A}$  fuera un dominio de ideales principales por [10, §III.3, Thm. 3.11.(ii), p. 140], existirían  $s, t \in \mathcal{A}$  tales que  $I = f * s + g * t$ , en particular,  $1 = I(1) = f(1)s(1) + g(1)t(1) = 0$ , lo cual es imposible. ■

**Teorema 1.4.**  *$\mathcal{A}$  es un anillo local.*

*Demostración.* Por [10, §III.4, Thm. 4.13.(iii), p. 147], basta probar que los elementos no invertibles de  $\mathcal{A}$  forman un ideal de  $\mathcal{A}$ . En efecto, se tiene que  $0 \in \mathcal{A} \setminus \mathcal{A}^*$ . Si  $f \in \mathcal{A} \setminus \mathcal{A}^*$  y  $g \in \mathcal{A}$ , entonces  $f(1) = 0$ , en consecuencia  $(f * g)(1) = f(1)g(1) = 0$ , es decir,  $f * g \in \mathcal{A} \setminus \mathcal{A}^*$ . Además, si  $h \in \mathcal{A} \setminus \mathcal{A}^*$ , entonces  $h(1) = 0$  y por tanto  $f(1) - h(1) = 0$ , es decir  $f - h \in \mathcal{A} \setminus \mathcal{A}^*$ . Esto prueba que  $\mathcal{A} \setminus \mathcal{A}^*$  es un ideal de  $\mathcal{A}$ . ■

**Proposición 1.10.** *Si  $f \in \mathcal{A}$  es tal que  $f(1) = 0$  y  $f(p) \neq 0$  para algún primo  $p$ , entonces  $f$  es irreducible en  $\mathcal{A}$ .*

*Demostración.* Por hipótesis  $f$  no es cero y no es unidad. Supongamos que  $f = g * h$ . Si  $g$  y  $h$  no fueran unidades se tendría que  $g(1) = 0$  y  $h(1) = 0$ , por tanto,  $f(p) = (g * h)(p) = g(1)h(p) + g(p)h(1) = 0$ , lo que contradice la hipótesis. En consecuencia alguna de las funciones  $g$  o  $h$  es unidad. ■

Un corolario de la proposición anterior y el Corolario 1.2 es el siguiente.

**Corolario 1.3.** *Si  $f \in \mathcal{A}$  es tal que  $f(1) = 0$  y  $f(p) \neq 0$  para algún primo  $p$ , entonces  $f$  es un elemento primo de  $\mathcal{A}$ .*

El Teorema 1.2 afirma que el anillo  $\mathcal{A}$  satisface una forma débil de condición de la cadena ascendente, ¿satisfará también la condición de la cadena descendente? Es decir, ¿es  $\mathcal{A}$  artinianiano? El siguiente contraejemplo desacredita esta observación.

**Proposición 1.11.**  *$\mathcal{A}$  no es un anillo artinianiano.*

*Demostración.* Para cada  $n \in \mathbb{N}$  defínase  $I_n = \{f \in \mathcal{A} : \mathcal{N}(f) \geq n\} \cup \{0\}$ . Se tiene lo siguiente:

- (1)  $I_n$  es un ideal de  $\mathcal{A}$ , para cada  $n$ . En efecto, por definición se tiene  $I_n \neq \emptyset$ . Si  $f, g \in I_n$  entonces  $\mathcal{N}(f) \geq n$  y  $\mathcal{N}(g) \geq n$ , luego  $\mathcal{N}(f - g) \geq \min\{\mathcal{N}(f), \mathcal{N}(-g)\} = \min\{\mathcal{N}(f), \mathcal{N}(g)\} \geq n$ , luego  $f - g \in I_n$ .

Además, si  $h \in \mathcal{A}$ , se tienen dos casos. Si  $h = 0$ , entonces  $f * h = 0 \in I_n$ . Si  $h \neq 0$ , entonces  $\mathcal{N}(h) \geq 1$ , de tal manera que  $\mathcal{N}(f * h) = \mathcal{N}(f)\mathcal{N}(h) \geq \mathcal{N}(f) \geq n$ , es decir,  $f * h \in I_n$ . Esto prueba que  $I_n$  es un ideal de  $\mathcal{A}$ .

- (2)  $I_{n+1} \subset I_n$ , para cada  $n \in \mathbb{N}$ , pues  $\mathcal{N}(f) \geq n + 1$  implica que  $\mathcal{N}(f) \geq n$ .

- (3)  $I_n \not\subset I_{n+1}$ , para cada  $n \in \mathbb{N}$ , pues considere  $f \in \mathcal{A}$  definida como

$$f(k) = \begin{cases} 1 & \text{si } k = n \\ 0 & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

Entonces  $\mathcal{N}(f) = n < n + 1$ , es decir,  $f \in I_n$ , pero  $f \notin I_{n+1}$ .

Se tiene pues una cadena descendente de ideales distintos entre sí de  $\mathcal{A}$ , luego  $\mathcal{A}$  no es artinianiano. ■

### 1.3. Funciones multiplicativas

**Definición 1.10.** (Función multiplicativa). Se dice que una función aritmética  $f$  es **multiplicativa** si no es idénticamente cero y para todo  $m, n \in \mathbb{N}$ ,  $(m, n) = 1$  implica que  $f(mn) = f(m)f(n)$ .

*Observación 1.2.* Se denota al conjunto de funciones multiplicativas como  $\mathcal{M}$ . En general si  $f$  y  $g$  son funciones multiplicativas entonces  $f - g$  no es necesariamente una función multiplicativa, sin embargo,  $f * g$  sí lo es.

**Lema 1.3.** Si  $(a, b) = 1$  y  $d \in \mathbb{N}$ , entonces  $(ab, d) = (a, d)(b, d)$ .

*Demostración.* Escribanse  $(a, d) = ax + dy$  y  $(b, d) = bs + dt$ , para algunos  $x, y, s, t \in \mathbb{Z}$ . Entonces

$$(a, d)(b, d) = abxs + axdt + dybs + dydt = ab(xs) + d(axt + ybs + ydt),$$

por tanto,  $(ab, d) \mid (a, d)(b, d)$ .

Por otro lado, escribáse  $1 = az + bw$ , para algunos  $z, w \in \mathbb{Z}$ . Entonces  $d = daz + dbw$ . Además, como  $a = (a, d)m$ ,  $b = (b, d)n$ ,  $d = (b, d)p$  y  $d = (a, d)q$  para algunos  $m, n, p, q \in \mathbb{Z}$ , entonces

$$d = (a, d)(b, d)(pmz + qnw),$$

es decir,  $(a, d)(b, d) \mid d$ . Dado que  $ab = (a, d)(b, d)mn$ , entonces  $(a, d)(b, d) \mid ab$  y en consecuencia  $(a, d)(b, d) \mid (ab, d)$ . Se sigue que  $(ab, d) = (a, d)(b, d)$ . ■

**Lema 1.4.** Si  $(a, b) = 1$ ,  $a_1, \dots, a_l$  son todos los divisores positivos de  $a$  y  $b_1, \dots, b_m$  son todos los divisores positivos de  $b$ , entonces  $\{d > 0 : d \mid ab\} = \{a_i b_j : i = 1, \dots, l, j = 1, \dots, m\}$ .

*Demostración.* Si  $a_i, b_j$  son divisores de  $a$  y  $b$ , respectivamente, entonces existen  $s, t \in \mathbb{Z}$  tales que  $a = a_i s$  y  $b = b_j t$ , luego  $ab = a_i b_j st$ , es decir,  $a_i b_j \mid ab$ . Recíprocamente, si  $d$  es un divisor de  $ab$ , entonces  $(ab, d) = d$ , pero por el lema anterior  $(ab, d) = (a, d)(b, d)$ , luego  $d = (a, d)(b, d)$ , donde  $(a, d)$  es un divisor positivo de  $a$  y  $(b, d)$  es un divisor positivo de  $b$ . ■

**Teorema 1.5.**  $(\mathcal{M}, *)$  es un subgrupo de  $(\mathcal{A}^*, *)$ .

*Demostración.* Si  $f \in \mathcal{M}$ , entonces  $f \neq \mathbf{0}$  y existe  $N \in \mathbb{N}$  tal que  $f(N) \neq 0$ , luego  $f(N) = f(1 \cdot N) = f(1)f(N)$  y en consecuencia  $1 = f(1)$ , es decir,  $f \in \mathcal{A}^*$ . Esto prueba que  $\mathcal{M} \subset \mathcal{A}^*$ .

Claro que el conjunto  $\mathcal{M}$  es no vacío, pues  $I \in \mathcal{M}$ . Veamos que la operación  $*$  es cerrada en  $\mathcal{M}$ . Sean  $f, g$  funciones multiplicativas, sean  $a, b \in \mathbb{N}$  tales que  $(a, b) = 1$  y sean  $a_1, \dots, a_l$  y  $b_1, \dots, b_m$  todos los divisores positivos de  $a$  y  $b$ , respectivamente. Entonces  $(a_i, b_j) = 1$ , para cada  $i = 1, \dots, l$  y para cada  $j = 1, \dots, m$ , luego

$$\begin{aligned} (f * g)(a)(f * g)(b) &= \left[ \sum_{i=1}^l f(a_i)g\left(\frac{a}{a_i}\right) \right] \left[ \sum_{j=1}^m f(b_j)g\left(\frac{b}{b_j}\right) \right] \\ &= \sum_{i=1}^l \sum_{j=1}^m f(a_i)g\left(\frac{a}{a_i}\right) f(b_j)g\left(\frac{b}{b_j}\right) \end{aligned}$$



$$\begin{aligned}
 &= \sum_{i=1}^l \sum_{j=1}^m f(a_i b_j) g\left(\frac{ab}{a_i b_j}\right) \\
 &= \sum_{d|ab} f(d) g\left(\frac{ab}{d}\right) = (f * g)(ab)
 \end{aligned}$$

por el Lema 1.4.

Como ya se probó al inicio de esta demostración, si  $f$  es multiplicativa entonces  $f(1) = 1$ , por lo que existe  $f^{-1}$ . Veamos que  $f^{-1} \in \mathcal{M}$ . Para esto construiremos, a partir de  $f$ , una función multiplicativa  $g$  con la propiedad de que  $f * g = I$ , con lo que quedará demostrado que  $f^{-1}$  es multiplicativa por la unicidad de la inversa. Se procede definiendo a  $g$  de forma gradual:

(1)  $g(1) = 1$ .

(2) Para cada primo  $p$  se define  $g(p) = -f(p)$ . De tal manera que

$$(f * g)(p) = \sum_{d|p} f(d) g\left(\frac{p}{d}\right) = f(1)g(p) + f(p)g(1) = -f(p) + f(p) = 0.$$

(3) Para cada  $a \in \mathbb{N}$  y para cada primo  $p$  se define, recursivamente,

$$g(p^a) = -f(p)g(p^{a-1}) - \cdots - f(p^a)g(1)$$

de tal manera que

$$\begin{aligned}
 (f * g)(p^a) &= \sum_{d|p^a} f(d) g\left(\frac{p^a}{d}\right) = f(1)g(p^a) + f(p)g(p^{a-1}) + \cdots + f(p^a)g(1) \\
 &= -f(p)g(p^{a-1}) - \cdots - f(p^a)g(1) + f(p)g(p^{a-1}) + \cdots + f(p^a)g(1) = 0.
 \end{aligned}$$

(4) Se define

$$g\left(\prod p_i^{a_i}\right) = \prod g(p_i^{a_i}).$$

para cualquier producto finito de potencias de primos, con  $p_i \neq p_j$  si  $i \neq j$ . La función  $g$  ha quedado entonces definida para cualquier entero positivo.

(5)  $g$  es multiplicativa, pues si  $a = p_1^{\alpha_1} \cdots p_m^{\alpha_m}$  y  $b = q_1^{\beta_1} \cdots q_l^{\beta_l}$  son tales que  $(a, b) = 1$ , entonces  $p_i \neq q_j$ , luego

$$\begin{aligned}
 g(ab) &= g(p_1^{\alpha_1} \cdots p_m^{\alpha_m} q_1^{\beta_1} \cdots q_l^{\beta_l}) = g(p_1^{\alpha_1}) \cdots g(p_m^{\alpha_m}) g(q_1^{\beta_1}) \cdots g(q_l^{\beta_l}) \\
 &= g(p_1^{\alpha_1} \cdots p_m^{\alpha_m}) g(q_1^{\beta_1} \cdots q_l^{\beta_l}) = g(a)g(b)
 \end{aligned}$$

(6) Como la operación  $*$  es cerrada en  $\mathcal{M}$ , entonces  $f * g$  es multiplicativa.

(7) Si  $n > 1$  y  $n = p_1^{\alpha_1} \cdots p_l^{\alpha_l}$  es su factorización en primos, entonces

$$(f * g)(n) = (f * g)(p_1^{\alpha_1}) \cdots (f * g)(p_l^{\alpha_l}) = 0$$

donde la primera igualdad se cumple por ser  $f * g$  multiplicativa y la segunda por el inciso (3). Además,  $(f * g)(1) = f(1)g(1) = 1$ . En consecuencia  $f * g = I$ .

(8) Se sigue que  $g = f^{-1}$  y como  $g$  es multiplicativa, entonces  $f^{-1}$  también lo es. ■

**Corolario 1.4.** Si  $f * g$  es multiplicativa y  $g$  es multiplicativa, entonces  $f$  también lo es.

*Demostración.* Como  $g$  es multiplicativa, entonces existe  $g^{-1}$  y también es multiplicativa, luego  $f = (f * g) * g^{-1}$  es multiplicativa por ser producto de funciones multiplicativas. ■

## 1.4. Isomorfismos entre grupos de funciones aritméticas

Se denotará como  $\mathcal{A}_{\mathbb{R}}$  al conjunto de funciones aritméticas real valuadas, es decir,  $\mathcal{A}_{\mathbb{R}} = \{f \in \mathcal{A} : f(n) \in \mathbb{R}, \forall n \in \mathbb{N}\}$ . Asimismo, se define  $P = \{f \in \mathcal{A} : f(1) > 0\}$ . Es fácil verificar que  $(\mathcal{A}_{\mathbb{R}}, +)$  y  $(P, *)$  son subgrupos de  $(\mathcal{A}, +)$  y de  $(\mathcal{A}^*, *)$ , respectivamente. Más aún, estos grupos son isomorfos.

**Lema 1.5.**  $(\mathcal{A}_{\mathbb{R}}, +) \cong (P, *)$ .

*Demostración.* El isomorfismo buscado es

$$\begin{aligned} L : (P, *) &\longrightarrow (\mathcal{A}_{\mathbb{R}}, +) \\ f &\longmapsto Lf \end{aligned}$$

donde  $Lf(1) = \log(1)$  y  $Lf(n) = \sum_{d|n} \log(d)f(d)f^{-1}(n/d)$  para  $n > 1$ . Se tiene que  $L$  es en efecto un homomorfismo, pues para  $n = 1$  se tiene

$$L(f * g)(1) = \log(f * g)(1) = \log(f(1)g(1)) = \log f(1) + \log g(1) = Lf(1) + Lg(1).$$

Para el caso  $n > 1$ , nótese primero que para cualquier  $n \in \mathbb{N}$ ,

$$\log(n)(f * g)(n) = \log(n) \sum_{d|n} f(d)g\left(\frac{n}{d}\right)$$

$$\begin{aligned}
&= \sum_{d|n} f(d)g\left(\frac{n}{d}\right) \left[ \log \frac{n}{d} + \log d \right] \\
&= \sum_{d|n} f(d)g\left(\frac{n}{d}\right) \log\left(\frac{n}{d}\right) + \sum_{d|n} f(d)g\left(\frac{n}{d}\right) \log(d) \\
&= (f * (\log \cdot g))(n) + ((\log \cdot f) * g)(n),
\end{aligned}$$

es decir,  $\log \cdot (f * g) = f * (\log \cdot g) + (\log \cdot f) * g$ . Multiplicando por  $(f * g)^{-1} = f^{-1} * g^{-1}$  a ambos lados de la ecuación, se tiene que

$$(\log \cdot (f * g)) * (f * g)^{-1} = (\log \cdot g) * g^{-1} + (\log \cdot f) * f^{-1},$$

es decir,  $L(f * g) = Lf + Lg$  y en particular para  $n > 1$ . Esto prueba que  $L$  es un homomorfismo.

$L$  también es suprayectivo, pues si  $f \in \mathcal{A}_{\mathbb{R}}$ , defínase  $g(1) = \exp(f(1))$ . Entonces  $Lg(1) = \log g(1) = \log \exp(f(1)) = f(1)$ , pues  $f(1) \in \mathbb{R}$ . Además, como  $g(1) > 0$  existe  $g^{-1}$  y se define recursivamente, para  $n > 1$ ,

$$g(n) = \frac{1}{\log(n)g^{-1}(1)} \left[ f(n) - \sum_{\substack{d|n \\ d \neq 1, n}} \log(d)g(d)g^{-1}\left(\frac{n}{d}\right) \right].$$

Esta ecuación implica que

$$\begin{aligned}
f(n) &= g(n) \log(n)g^{-1}(1) + g(1) \log(1)g^{-1}(n) + \sum_{\substack{d|n \\ d \neq 1, n}} \log(d)g(d)g^{-1}\left(\frac{n}{d}\right) \\
&= \sum_{d|n} \log(d)g(d)g^{-1}\left(\frac{n}{d}\right) = Lg(n).
\end{aligned}$$

En consecuencia,  $Lg(n) = f(n), \forall n \in \mathbb{N}$ , es decir,  $Lg = f$ .

Finalmente, se tiene que  $L$  es inyectivo. En efecto, si  $L(f) = L(g)$ , entonces  $L(f) - L(g) = 0$ , pero  $-Lg = Lg^{-1}$  por ser  $L$  un homomorfismo, luego  $Lf + Lg^{-1} = L(f * g^{-1}) = 0$ . Para  $n = 1$  esto implica que  $\log(f * g^{-1}(1)) = 0$  y por tanto  $(f * g^{-1})(1) = 1$ . Si  $n = 2$ , entonces

$$L(f * g^{-1})(2) = \log(1)(f * g^{-1})(1)(f * g^{-1})^{-1}(2) + \log(2)(f * g^{-1})(2)(f * g^{-1})(1) = 0,$$

pero  $\log(1) = 0$ , por tanto  $\log(2)(f * g^{-1})(2)(f * g^{-1})(1) = 0$  y dado que  $(f * g^{-1})(1) \neq 0$ , entonces  $(f * g^{-1})(2) = 0$ . Supóngase que  $(f * g^{-1})(d) = 0$ , para cada  $1 < d < n$ .

Entonces  $L(f * g) = 0$  implica que

$$\log(n)(f * g^{-1})(n)(f * g^{-1})(1) + \sum_{\substack{d|n \\ d \neq 1, n}} \log(d) \underbrace{(f * g^{-1})(d)}_0 (f * g^{-1})^{-1}\left(\frac{n}{d}\right) = 0,$$

pues  $\log(1) = 0$ , por tanto,  $\log(n)(f * g^{-1})(n)(f * g^{-1})(1) = 0$  y por tanto  $(f * g^{-1})(n) = 0$ . Esto prueba que para cada  $n > 1$ ,  $(f * g^{-1}) = 0$ . Así pues, se tiene que  $f * g^{-1} = I$ , por tanto,  $f = g$ . ■

Se denota  $\mathcal{A}' = \{f \in \mathcal{A}_{\mathbb{R}} : f(n) = 0, \forall n \neq p^\alpha, p \text{ primo y } \alpha \in \mathbb{N}\}$ . La siguiente proposición es una caracterización de las funciones multiplicativas respecto al conjunto  $\mathcal{A}'$  y al isomorfismo  $L$ .

**Proposición 1.12.**  $f \in \mathcal{M}$  si y sólo si  $Lf \in \mathcal{A}'$ .

*Demostración.* Supóngase primero que  $f$  es multiplicativa. Entonces  $f(1) = 1$ , por tanto,  $Lf(1) = \log f(1) = \log 1 = 0$ . Si  $N > 1$  no es potencia de ningún primo, entonces  $N = mn$ , con  $(m, n) = 1$  y  $n, m > 1$ . Luego

$$\begin{aligned} Lf(N) &= Lf(mn) = \sum_{d|mn} \log(d) f(d) f^{-1}\left(\frac{mn}{d}\right) \\ &= \sum_{d|m} \sum_{e|n} f(d) f(e) f^{-1}\left(\frac{m}{d}\right) f^{-1}\left(\frac{n}{e}\right) (\log(d) + \log(e)) \\ &= \sum_{d|m} \log(d) f(d) f^{-1}\left(\frac{m}{d}\right) \sum_{e|n} f(e) f^{-1}\left(\frac{n}{e}\right) \\ &\quad + \sum_{e|n} \log(e) f(e) f^{-1}\left(\frac{n}{e}\right) \sum_{d|m} f(d) f^{-1}\left(\frac{m}{d}\right) \\ &= Lf(m) \sum_{e|n} f(e) f^{-1}\left(\frac{n}{e}\right) + Lf(n) \sum_{d|m} f(d) f^{-1}\left(\frac{m}{d}\right) \\ &= Lf(m)I(n) + Lf(n)I(m) = 0, \end{aligned}$$

pues  $m, n > 1$ . Luego  $f \in \mathcal{A}'$ .

Recíprocamente, supóngase que  $Lf \in \mathcal{A}'$ . En particular se tiene que  $Lf(1) = 0$  y por tanto  $f(1) = 1$ . Se definirá una función multiplicativa  $g$  y se probará que coincide con  $f$ .

(1) Se define  $g(1) = 1 = f(1)$ .

(2) Para cada primo, se define

$$g(n) = \prod_{p|n} f(p^v),$$

donde  $v := \max\{\alpha : p^\alpha \mid n\}$ .

(3)  $g$  es multiplicativa, pues  $(m, n) = 1$  implica que

$$g(mn) = \prod_{p|mn} f(p^v) = \prod_{p|n} f(p^v) \prod_{p|m} f(p^v) = g(n)g(m).$$

(4)  $g$  coincide con  $f$  en todas las potencias de primos, pues si  $q$  es un primo y  $\alpha \in \mathbb{N}$ ,

$$g(q^\alpha) = \prod_{p|q^\alpha} f(p^v) = f(q^\alpha).$$

(5)  $g^{-1}$  coincide con  $f^{-1}$  en todas las potencias de primos, pues si  $q$  es primo,

$$g^{-1}(q) = - \sum_{\substack{d|q \\ d \neq q}} g\left(\frac{q}{d}\right) g^{-1}(d) = -g(q)g^{-1}(1) = -g(q) = -f(q) = f^{-1}(q),$$

por el punto 4. Además, de forma recursiva se tiene que

$$\begin{aligned} g^{-1}(q^\alpha) &= -[g(q^{\alpha-1})g^{-1}(1) + \dots + g(q)g^{-1}(q^{\alpha-1})] \\ &= -[f(q^{\alpha-1})f^{-1}(1) + \dots + f(q)f^{-1}(q^{\alpha-1})] = f^{-1}(q^\alpha), \end{aligned}$$

donde  $g^{-1}$  coincide con  $f^{-1}$  en  $1, q, q^2, \dots, q^{\alpha-1}$ .

(6) El punto anterior implica que  $Lf(q^\alpha) = Lg(q^\alpha)$  para todo primo  $q$  y para todo  $\alpha \in \mathbb{N}$ , pues

$$Lf(q^\alpha) = \sum_{d|p^\alpha} \log(d) f(d) f^{-1}\left(\frac{n}{d}\right) = \sum_{d|p^\alpha} \log(d) g(d) g^{-1}\left(\frac{n}{d}\right) = Lg(q^\alpha).$$

Además, como  $g$  es multiplicativa, entonces  $Lg(n) = 0$  para todo  $n$  no potencia de algún primo, por la primera parte de esta demostración. Luego, por hipótesis se tiene que  $Lf(n) = 0 = Lg(n)$  para todo  $n$  no potencia de algún primo, así que de hecho  $Lf(n) = Lg(n)$  para todo  $n$ , es decir,  $Lf = Lg$  y como la aplicación  $L$  es inyectiva, entonces  $f = g$ . Luego  $f$  es multiplicativa, pues  $g$  lo es.

■

**Lema 1.6.**  $(\mathcal{M}, *) \cong (\mathcal{A}', +)$ .

*Demostración.* Es fácil ver que  $(\mathcal{A}', +)$  es un subgrupo de  $(\mathcal{A}_{\mathbb{R}}, +)$  y que  $(\mathcal{M}, *)$  es un subgrupo de  $(P, *)$ . Luego la restricción del homomorfismo a  $L$  a  $(\mathcal{M}, *)$  sigue siendo un isomorfismo y su imagen es  $(\mathcal{A}', +)$  por la proposición anterior. ■

**Lema 1.7.**  $(\mathcal{A}_{\mathbb{R}}, +) \cong (\mathcal{A}', +)$ .

*Demostración.* Sea

$$\begin{aligned}\phi : (\mathcal{A}_{\mathbb{R}}, +) &\longrightarrow (\mathcal{A}', +) \\ f &\longmapsto F,\end{aligned}$$

donde  $F$  es la función definida como  $F(n) = f(p_n)$ ,  $\forall n \in \mathbb{N}$  y  $p_n$  es el  $n$ -ésimo término en la sucesión de potencias de primos en orden ascendente.

Se tiene que  $\phi$  es un homomorfismo, pues  $\phi(f+g)(n) = (f+g)(p_n) = f(p_n) + g(p_n) = \phi(f)(n) + \phi(g)(n)$ ,  $\forall n \in \mathbb{N}$ , luego  $\phi(f+g) = F+G$ . Se también tiene que  $\phi$  es inyectivo, pues si  $f, g \in (\mathcal{A}', +)$  son tales que  $\phi(f) = \phi(g)$ , entonces  $f(p_n) = g(p_n)$ ,  $\forall n \in \mathbb{N}$ , además  $f(n) = g(n) = 0$  si  $n$  no es potencia de algún primo, de manera que  $f(n) = g(n)$ ,  $\forall n \in \mathbb{N}$ , es decir,  $f = g$ .

Finalmente se tiene que  $\phi$  es suprayectivo, pues si  $F \in (\mathcal{A}', +)$ , defínase  $f(p_n) = F(n)$ ,  $\forall n \in \mathbb{N}$  y  $f(n) = 0$  para toda  $n$  no potencia de algún primo. Entonces  $f \in (\mathcal{A}_{\mathbb{R}}, +)$  y  $\phi(f)(n) = f(p_n) = F(n)$ ,  $\forall n \in \mathbb{N}$ , es decir,  $\phi(f) = F$ . ■

**Lema 1.8.**  $(\mathcal{A}_{\mathbb{R}}, +) \cong (\mathcal{A}_1, +)$ , donde  $\mathcal{A}_1 = \{f \in \mathcal{A} : f(1) \in \mathbb{R}\}$ .

*Demostración.* Es claro que  $(\mathcal{A}_1, +)$  es un grupo aditivo. Defínase

$$\begin{aligned}\psi : (\mathcal{A}_{\mathbb{R}}, +) &\longrightarrow (\mathcal{A}_1, +) \\ f &\longmapsto F\end{aligned}$$

donde  $F$  es la función definida como  $F(n) = f(2n-2) + if(2n-1)$ ,  $\forall n > 1$  y  $F(1) = f(1)$ . Se tiene que  $\psi$  es un homomorfismo, pues  $\psi(f+g)(1) = (f+g)(1) = f(1) + g(1) = \psi(f)(1) + \psi(g)(1)$ , además,

$$\begin{aligned}\psi(f+g)(n) &= (f+g)(2n-2) + i(f+g)(2n-1) \\ &= f(2n-2) + g(2n-2) + if(2n-1) + ig(2n-1) \\ &= [f(2n-2) + if(2n-1)] + [g(2n-2) + ig(2n-1)] \\ &= \psi(f)(n) + \psi(g)(n),\end{aligned}$$

luego  $\psi(f+g) = \psi(f) + \psi(g)$ .

El homomorfismo  $\psi$  es también inyectivo, pues si  $f, g \in (\mathcal{A}_{\mathbb{R}}, +)$  son tales que  $\psi(f) = \psi(g)$ , entonces  $f(n), g(n) \in \mathbb{R}, \forall n \in \mathbb{N}$  y además  $f(2n-2) + if(2n-1) = g(2n-2) + ig(2n-1)$ , por tanto  $f(2n-2) = g(2n-2)$  y  $f(2n-1) = g(2n-1)$  y  $f(1) = g(1)$ , así que  $f(n) = g(n), \forall n \in \mathbb{N}$ , es decir  $f = g$ .

Finalmente,  $\psi$  también es suprayectivo, pues dada  $F \in (\mathcal{A}_1, +)$ , se puede escribir  $F = F_1 + iF_2$ , donde  $F_1, F_2 \in \mathcal{A}_{\mathbb{R}}$ . Defínase  $g(1) = F(1)$  y

$$g(n) = \begin{cases} F_1\left(\frac{n}{2} + 1\right) & \text{si } n \text{ es par} \\ F_2\left(\frac{n+1}{2}\right) & \text{si } n \text{ es impar y } n > 1. \end{cases}$$

Entonces  $g \in \mathcal{A}_{\mathbb{R}}$ ,  $\psi(g)(1) = g(1) = F(1)$  y  $\psi(g)(n) = g(2n-2) + ig(2n-1) = F_1(n) + iF_2(n) = F(n)$  para cada  $n > 1$ , es decir,  $\psi(g) = F$ . ■

**Lema 1.9.**  $(\mathcal{A}_{\mathbb{R}}, +) \cong (\mathcal{A}, +)$ .

*Demostración.* Defínase

$$\begin{aligned} \gamma : (\mathcal{A}_{\mathbb{R}}, +) &\longrightarrow (\mathcal{A}, +) \\ f &\longmapsto F, \end{aligned}$$

donde  $F$  es la función definida como  $F(n) = f(2n-1) + if(2n), \forall n \in \mathbb{N}$ . Se tiene que  $\gamma$  es un homomorfismo, pues

$$\begin{aligned} \gamma(f+g)(n) &= (f+g)(2n-1) + i(f+g)(2n) \\ &= f(2n-1) + g(2n-1) + if(2n) + ig(2n) \\ &= [f(2n-1) + if(2n)] + [g(2n-1) + ig(2n)] \\ &= \gamma(f)(n) + \gamma(g)(n), \end{aligned}$$

por tanto,  $\gamma(f+g) = \gamma(f) + \gamma(g)$ .

El homomorfismo  $\gamma$  es también inyectivo, pues si  $f, g \in \mathcal{A}_{\mathbb{R}}$  son tales que  $\gamma(f) = \gamma(g)$ , entonces  $\gamma(f)(n) = \gamma(g)(n)$  para cada  $n$ , luego  $f(2n-1) + if(2n) = g(2n-1) + ig(2n)$ , por tanto  $f(2n-1) = g(2n-1)$  y  $f(2n) = g(2n)$  para cada  $n$ , en consecuencia  $f(n) = g(n), \forall n \in \mathbb{N}$ , es decir,  $f = g$ .

Finalmente, se tiene que  $\gamma$  es suprayectivo, pues si  $F \in \mathcal{A}$ , se puede escribir  $F = F_1 + iF_2$ , con  $F_1, F_2 \in \mathcal{A}_{\mathbb{R}}$ . Defínase

$$f(n) = \begin{cases} F_1\left(\frac{n+1}{2}\right) & \text{si } n \text{ es impar} \\ F_2\left(\frac{n}{2}\right) & \text{si } n \text{ es par.} \end{cases}$$

Entonces,  $\gamma(f)(n) = f(2n-1) + if(2n) = F_1(n) + iF_2(n) = F(n)$ , para cada  $n$ , es decir,  $f \in \mathcal{A}_{\mathbb{R}}$  es tal que  $\gamma(f) = F$ . ■

El resultado principal de esta sección es el siguiente, corolario de los lemas 1.5, 1.6, 1.7, 1.8 y 1.9.

**Teorema 1.6.** *Los grupos  $(\mathcal{A}_{\mathbb{R}}, +)$ ,  $(P, *)$ ,  $(\mathcal{M}, *)$ ,  $(\mathcal{A}', +)$ ,  $(\mathcal{A}_1, +)$  y  $(\mathcal{A}, +)$  son todos isomorfos.*

## 1.5. Algunas funciones aritméticas conocidas

A continuación se presentan algunas funciones aritméticas de interés en teoría de números y algunas relaciones entre ellas con el producto de Dirichlet.

**Definición 1.11.** (Función idéntica). La función idéntica  $N$  es tal que  $N(n) = n$ , para cada  $n \in \mathbb{N}$ .

**Definición 1.12.** (Función  $\varphi$  de Euler). Para cada  $n \geq 1$ , se define la función  $\varphi$  de Euler  $\varphi(n)$  como el número de enteros positivos no mayores a que  $n$  que son primos relativos a  $n$ .

**Definición 1.13.** (Función de Mangoldt). Para todo  $n \in \mathbb{N}$ , se define la función de Mangoldt como

$$\Lambda(n) = \begin{cases} \log p & \text{si } n = p^m \text{ para algún primo } p \text{ y } m \geq 1 \\ 0 & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

**Definición 1.14.** (Función de Liouville). Se define a la función  $\lambda$  de Liouville como  $\lambda(1) = 1$  y dada  $n = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \cdots p_k^{\alpha_k}$  la factorización de  $n$  en primos, entonces  $\lambda(n) = (-1)^{\alpha_1 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_k}$ .

**Definición 1.15.** (Función divisor). Para cada  $k \in \mathbb{C}$  se define la función divisor de orden  $k$  como

$$\sigma_k(n) = \sum_{d|n} d^k.$$

A la función divisor de orden 1 se le llamará simplemente función divisor y se denotará como  $\sigma$  en vez de  $\sigma_1$ . La función divisor de orden 0 se denomina función número de divisores y se denota  $d$ .

**Proposición 1.13.** *Para todo  $n \in \mathbb{N}$ , se tiene que*

$$\sum_{d|n} \mu(d) = I(n) = \begin{cases} 1 & \text{si } n = 1 \\ 0 & \text{si } n > 1 \end{cases}$$



*Demostración.* Si  $n = 1$ , por definición  $\mu(n) = 1$ . Supongamos que  $n > 2$  y sea  $n = q_1^{\alpha_1} \cdots q_k^{\alpha_k}$  la factorización de  $n$  en primos. Todos los divisores de  $n$  son de la forma  $n = q_1^{\beta_1} \cdots q_k^{\beta_k}$ , con  $0 \leq \beta_i \leq \alpha_i$ ,  $\forall i = 1, \dots, k$ . Sin embargo, hace falta considerar sólo los factores donde  $0 \leq \beta_i \leq 1$ , pues la función de Möbius se anula para cualesquiera otros. Para un  $1 \leq i \leq k$  dado, existen  $\binom{k}{i}$   $i$ -combinaciones (sin repetición y desordenadas) de elementos del conjunto  $P = \{q_1, \dots, q_k\}$ , véase [4]. Luego la suma buscada es igual a

$$\begin{aligned} & \mu(1) + \sum_{p_1 \in \{q_1, \dots, q_k\}} \mu(p_1) + \sum_{\substack{p_1, p_2 \in \{q_1, \dots, q_k\} \\ p_1 \neq p_2}} \mu(p_1 p_2) + \cdots + \sum_{\substack{p_1, \dots, p_k \in \{q_1, \dots, q_k\} \\ p_1 \neq p_2 \neq \dots \neq p_k}} \mu(p_1 \cdots p_k) \\ &= \binom{k}{0}(-1)^0 + \binom{k}{1}(-1)^1 + \binom{k}{2}(-1)^2 + \cdots + \binom{k}{k}(-1)^k = (1 - 1)^k = 0 \end{aligned}$$

Es decir,  $\sum_{d|n} \mu(d) = 0$ . ■

**Corolario 1.5** (Inversión de Möbius). Si  $f, g \in \mathcal{A}$ , entonces para cada  $n \in \mathbb{N}$ ,

$$\sum_{d|n} f(n) = g(n) \iff \sum_{d|n} g(n) \mu\left(\frac{n}{d}\right) = f(n)$$

*Demostración.* De acuerdo con la proposición anterior, se tiene  $\mu * 1 = 1 * \mu = I$ , de tal manera que

$$f * 1 = g \iff f * 1 * \mu = g * \mu \iff f * I = g * \mu \iff f = g * \mu,$$

lo cual es equivalente al enunciado. ■

**Teorema 1.7** (Gauss). Para todo  $n \in \mathbb{N}$  se verifica que

$$\sum_{d|n} \varphi(d) = n.$$

*Demostración.* La siguiente demostración es debida a Gauss en [8]. Sea  $n \in \mathbb{N}$  y sean  $d_1, \dots, d_k$  los distintos divisores positivos de  $n$ . Para cada  $d_i$ , sean  $c_{i,1}, \dots, c_{i,m_i}$  todos los enteros positivos primos relativos y no mayores a  $d_i$ . Notemos que  $\varphi(d_i) = m_i$ . Afirmamos que el conjunto formado por los números

$$\begin{array}{cccc} (n/d_1)c_{1,1} & (n/d_1)c_{1,2} & \cdots & (n/d_1)c_{1,m_1} \\ (n/d_2)c_{2,1} & (n/d_2)c_{2,2} & \cdots & (n/d_2)c_{2,m_2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ (n/d_k)c_{k,1} & (n/d_k)c_{k,2} & \cdots & (n/d_k)c_{k,m_k} \end{array}$$

es igual a  $\{1, 2, \dots, n\}$ . En efecto, sea  $r$  un entero positivo tal que  $1 \leq r \leq n$  y sea  $d = (n, r)$ . Notemos que  $n/d$  es un divisor de  $n$ ,  $r/d \leq n/d$  y  $(n/d, r/d) = 1$ . Además  $(n/(n/d))(r/d) = r$ , luego  $r$  está entre los elementos de la tabla anterior. Recíprocamente, se tiene que  $1 \leq (n/d_i)c_{i,j} \leq (n/d_i)d_i = n$ ,  $\forall i = 1, \dots, k$ ,  $\forall j = 1, \dots, m_i$ .

Finalmente veamos que todos los elementos de la tabla son distintos. Es claro que todos los elementos de cada fila son distintos, pues los divisores de cada  $d_i$  son distintos por hipótesis. Si dos números fueran iguales, para algunos divisores  $M$  y  $N$  de  $n$  distintos, podemos suponer que  $M > N$ . Se tendría pues que  $(n/M)\mu = (n/N)v$ , donde  $\mu$  es primo relativo a  $M$  y  $v$  es primo relativo a  $N$ , luego  $\mu N = vM$ , de manera que  $M \mid \mu N$ , por tanto  $M \mid N$ , lo cual no puede ser pues  $M > N$ . Finalmente:

$$\sum_{d|n} \varphi(d) = \varphi(d_1) + \dots + \varphi(d_k) = m_1 + \dots + m_k = |\{1, \dots, n\}| = n$$

■

Existe una relación entre las funciones  $\mu$  y  $\varphi$  al sumar sobre los divisores de un entero positivo. El siguiente lema será útil para probar dicha relación.

**Lema 1.10.** Si  $n \in \mathbb{N}$ ,  $d$  es un divisor positivo de  $n$ ,  $S = \{x \in \mathbb{N} : 1 \leq x \leq n\}$  y  $A = \{x \in S : d \mid x\}$  entonces  $|A| = n/d$ .

*Demostración.* En efecto, tenemos que la función

$$\begin{aligned} F : \{1, \dots, n/d\} &\longrightarrow A \\ x &\longmapsto dx \end{aligned}$$

es biyectiva, pues si  $x, y \in \{1, \dots, n/d\}$  son tales que  $F(x) = F(y)$ , entonces  $dx = dy$  y por tanto  $x = y$ , pues  $d \neq 0$ . Además, si  $r \in A$  entonces  $d \mid r$  y  $1 \leq r \leq n$ , por lo que existe  $q \in \mathbb{N}$  tal que  $r = dq$ , luego  $q$  es tal que  $1 \leq q \leq n/d$  y  $F(q) = dq = r$ . En consecuencia  $|A| = |\{1, \dots, n/d\}| = n/d$  ■

**Proposición 1.14.** Para todo  $n \in \mathbb{N}$  se verifica que

$$\sum_{d|n} \mu(d) \frac{n}{d} = \varphi(n).$$

*Demostración.* Si  $n = 1$  claro que se tiene  $\mu(1) = \varphi(1) = 1$ . Supongamos que  $n > 1$  y sea  $n = p_1^{\alpha_1} \cdots p_r^{\alpha_r}$  su factorización en primos. Sea  $S = \{1, \dots, n\}$  y para cada  $i = 1, \dots, r$  definamos  $A_i = \{x \in S : p_i \mid x\}$ .

Si  $1 \leq m \leq r$ , como todos los  $p_i$  son primos distintos, se debe tener que

$$\bigcap_{s=1}^m A_i = \{x \in S : p_1 \mid x, p_2 \mid x, \dots, p_m \mid x\} = \{x \in S : p_1 p_2 \dots p_m \mid x\}.$$

Por otro lado, notemos que si  $P = \{x \in S : (n, x) = 1\}$  entonces

$$\bigcap_{i=1}^r S \setminus A_i = P.$$

En efecto, si  $x \in \bigcup_{i=1}^r A_i$  entonces  $x \in S$  y  $p_i \mid x$ , para algún  $p_i$ , de manera que  $p_i \mid n$  y  $p_i \mid x$ , y por tanto  $(n, x) \geq p_i > 1$ , luego  $x \notin P$ . Recíprocamente, si  $x \in S$  y  $x \notin P$ , entonces  $(n, x) > 1$  y por tanto debe existir un primo  $q$  que divide a  $(n, x)$ , pero  $(n, x) \mid n$  y  $(n, x) \mid x$ , por lo que  $q \mid n$  y  $q \mid x$ , luego  $q = p_i$ , para algún  $i = 1, \dots, m$ . En consecuencia,  $p_i \mid x$  y por tanto  $x \in \bigcup_{i=1}^r A_i$ . Se sigue que  $\bigcup_{i=1}^r A_i = S \setminus P$ , o bien  $\bigcap_{i=1}^r S/A_i = P$ .

Como  $p_1 \cdots p_m \mid n$ ,  $\forall m = 1, \dots, r$ , por el lema (1.10) se debe tener que  $|\bigcap_{s=1}^m A_i| = n/p_1 \cdots p_m$ ,  $\forall m = 1, \dots, r$ . Finalmente, por el principio de inclusión-exclusión, se tiene que

$$\begin{aligned} \varphi(n) = |P| &= \left| \bigcap_{i=1}^r S \setminus A_i \right| = |S| + \sum_{i_1 \in \{1, \dots, r\}} (-1) |A_{i_1}| + \sum_{\substack{i_1, i_2 \in \{1, \dots, r\} \\ i_1 \neq i_2}} |A_{i_1} \cap A_{i_2}| + \dots \\ &+ \sum_{\substack{i_1, \dots, i_r \in \{1, \dots, r\} \\ i_1 \neq \dots \neq i_r}} (-1)^r |A_{i_1} \cap \dots \cap A_{i_r}| = n + \sum_{i_1 \in \{1, \dots, r\}} (-1) \frac{n}{p_{i_1}} + \sum_{\substack{i_1, i_2 \in \{1, \dots, r\} \\ i_1 \neq i_2}} \frac{n}{p_{i_1} p_{i_2}} + \dots \\ &+ \sum_{\substack{i_1, \dots, i_r \in \{1, \dots, m\} \\ i_1 \neq \dots \neq i_r}} (-1)^r \frac{n}{p_{i_1} \cdots p_{i_r}} = n + \sum_{i_1 \in \{1, \dots, r\}} \mu(p_{i_1}) \frac{n}{p_{i_1}} + \sum_{\substack{i_1, i_2 \in \{1, \dots, r\} \\ i_1 \neq i_2}} \mu(p_{i_1} p_{i_2}) \frac{n}{p_{i_1} p_{i_2}} + \\ &\dots + \sum_{\substack{i_1, \dots, i_r \in \{1, \dots, m\} \\ i_1 \neq \dots \neq i_r}} \mu(p_{i_1} \cdots p_{i_r}) \frac{n}{p_{i_1} \cdots p_{i_r}} = \sum_{d \mid n} \mu(d) \frac{n}{d}. \end{aligned}$$

■

**Corolario 1.6.** *La función  $\varphi$  es multiplicativa, pues  $\varphi = \mu * N$ , donde  $\mu$  y  $N$  son funciones multiplicativas.*



## 2. Funciones pares

Al estudiar el espacio de funciones aritméticas se puede hacer una analogía con la teoría de Fourier del análisis para funciones periódicas, al considerar la representación de una función periódica como suma de funciones sinusoidales. En este caso, estas funciones osciladoras serán las sumas de Ramanujan  $c_r$  en vez de las funciones sin y cos del análisis real. Se considerarán las clases de funciones aritméticas pares y periódicas, siendo la primera una subclase propia de la segunda y se probará la existencia de dicha representación solo para las funciones pares.

*Observación 2.1.* Durante todo el capítulo se supondrá que  $r$  es un entero positivo arbitrario pero fijo.

**Definición 2.1.** (Función par). Una función aritmética se dice **par** mód  $r$  si  $f(n) = f((n, r))$ , donde  $(m, r)$  es el máximo común divisor de  $n$  y  $r$ , para cada  $n \in \mathbb{N}$ .

**Definición 2.2.** (Función periódica). Una función aritmética se dice **periódica** con periodo  $r$  (o periódica mód  $r$ ) si  $m, n \in \mathbb{N}$  y  $m \equiv n \pmod{r}$  implica que  $f(m) = f(n)$ .

La siguiente proposición es una consecuencia inmediata de las definiciones anteriores.

**Proposición 2.1.** Toda función par mód  $r$  es periódica con periodo  $r$ .

*Demostración.* Si  $m \equiv n \pmod{r}$  entonces  $r \mid m - n$ , por tanto existe  $q \in \mathbb{Z}$  tal que  $m - n = qr$ . Por demostrar que  $(n, r) = (m, r)$ . En efecto, como  $(n, r) \mid n$  y  $(n, r) \mid r$ , entonces  $(n, r) \mid n + qr = m$ , luego  $(n, r) \mid (m, r)$ . Análogamente, se tiene que  $(m, r) \mid (n, r)$ . Se sigue que  $(n, r) = (m, r)$  y por tanto  $f(n) = f((n, r)) = f((m, r)) = f(m)$ . ■

### 2.1. Sumas de Ramanujan

En 1918, Ramanujan publicó el artículo [16], que contiene varias fórmulas notables expresando algunas funciones sobre  $\mathbb{N}$  como el límite puntual de ciertas series trigonométricas. Por ejemplo, probó que

$$\frac{\sigma(n)}{n} = \frac{\pi^2}{6} \left( 1 + \frac{(-1)^n}{2^2} + \frac{2 \cos\left(\frac{2}{3}\pi n\right)}{3^2} + \frac{2 \cos\left(\frac{1}{2}\pi n\right)}{4^2} + \frac{2 \left[ \cos\left(\frac{2}{5}\pi n\right) + \cos\left(\frac{4}{5}\pi n\right) \right]}{5^2} + \frac{2 \cos\left(\frac{1}{3}\pi n\right)}{6^2} + \dots \right),$$

o escrito de otra manera,

$$\frac{\sigma(n)}{n} = \frac{\pi^2}{6} \sum_{r=1}^{\infty} \frac{c_r(n)}{r^2},$$

donde

$$c_r(n) = \sum_{\substack{a=1 \\ (a,r)=1}}^r \cos\left(\frac{2\pi}{r}an\right).$$

Estas sumas son conocidas como sumas de Ramanujan. El valor  $c_r(n)$  es de hecho la suma de las  $n$ -ésimas potencias de las raíces primitivas de la unidad.

**Proposición 2.2.** *Para toda  $n \in \mathbb{N}$  se tiene que*

$$c_r(n) = \sum_{\substack{a=1 \\ (a,r)=1}}^r e^{i(2\pi/r)an},$$

donde  $i$  es la unidad imaginaria.

*Demostración.* En efecto,

$$\sum_{\substack{a=1 \\ (a,r)=1}}^r e^{i(2\pi/r)an} = \sum_{\substack{a=1 \\ (a,r)=1}}^r \cos\left(\frac{2\pi}{r}an\right) + i \sum_{\substack{a=1 \\ (a,r)=1}}^r \sin\left(\frac{2\pi}{r}an\right).$$

Pero  $(a, r) = 1$  si y sólo si  $(a - r, r) = 1$ . Además, si  $1 \leq a \leq r - 1$  entonces  $1 \leq r - a \leq r - 1$ , por tanto

$$\begin{aligned} \sum_{\substack{a=1 \\ (a,r)=1}}^r \sin\left(\frac{2\pi}{r}an\right) &= \sum_{\substack{a=1 \\ (r-a,r)=1}}^r \sin\left(\frac{2\pi}{r}(r-a)n\right) = \sum_{\substack{a=1 \\ (r-a)=1}}^r -\sin\left(\frac{2\pi}{r}an\right) \\ &= - \sum_{\substack{a=1 \\ (a,r)=1}}^r \sin\left(\frac{2\pi}{r}an\right). \end{aligned}$$

Se sigue que la parte imaginaria de la primera suma se anula y se tiene la igualdad deseada. ■

En el siguiente capítulo se verá que esta expresión aparece de forma natural al calcular los coeficientes de Fourier clásicos de cierta función aritmética.

**Proposición 2.3.** *Para toda  $n \in \mathbb{N}$  se tiene que*

$$c_r(n) = \sum_{d|(n,r)} \mu\left(\frac{r}{d}\right) d.$$

*Demostración.* Por la Proposición 1.13 se tiene que la suma  $\sum_{d|k} \mu(d)$  es igual a 1 si  $k = 1$  e igual a 0 en otro caso, luego por la proposición anterior,

$$\begin{aligned} c_r(n) &= \sum_{\substack{a=1 \\ (a,r)=1}}^r e^{i(2\pi/r)an} = \sum_{a=1}^r e^{i(2\pi/r)an} \left( \sum_{d|(a,r)} \mu(d) \right) = \sum_{\substack{d|a \\ d|r}} \sum_{a=1}^r \mu(d) e^{i(2\pi/r)an} \\ &= \sum_{d|r} \mu(d) \sum_{\substack{d|a \\ 1 \leq a \leq r}} e^{i(2\pi/r)an} = \sum_{d|r} \mu(d) \sum_{b=1}^{r/d} e^{i(2\pi/(r/d))bn} \end{aligned}$$

El valor de la suma interior depende de si  $r/d$  divide a  $n$  o no. Si lo hace, cada uno de sus términos es igual a 1 y por tanto la suma vale  $r/d$ . Si este no es el caso se puede sumar,

$$\sum_{b=1}^{r/d} e^{i(2\pi/(r/d))bn} = \frac{e^{i(2\pi/r)/(r/d)}(e^{i(2\pi n)} - 1)}{e^{i(2\pi/r)/(r/d)} - 1} = 0,$$

pues el denominador no se anula. Luego

$$\begin{aligned} c_r(n) &= \sum_{\substack{a=1 \\ (a,r)=1}}^r e^{i(2\pi/r)an} = \sum_{d|r} \mu(d) \begin{cases} r/d & \text{si } r/d \mid n \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases} = \sum_{\substack{d|q \\ (r/d)|n}} \mu(d)(r/d) \\ &= \sum_{\substack{d|r \\ d|n}} \mu\left(\frac{r}{d}\right) d = \sum_{d|(n,r)} \mu\left(\frac{r}{d}\right) d. \end{aligned}$$

■

En lo que sigue de este capítulo se trabajará exclusivamente con ésta última representación de  $c_r$  y se le referirá como *suma de Ramanujan módulo  $r$*  o simplemente *suma de Ramanujan* cuando no haya riesgo de confusión.

**Proposición 2.4.** *Algunas propiedades de la sumas de Ramanujan son las siguientes:*

- (1)  $c_1 = 1$
- (2)  $c_r(1) = \mu(r)$
- (3)  $c_r(n) \leq \max\{\sigma(r), \sigma(n)\}$
- (4)  $c_r(n)$  es una función multiplicativa de  $r$

(5) Si  $p$  es primo y  $m$  es un entero positivo, entonces

$$c_{p^m}(n) = \begin{cases} p^m - p^{m-1} & \text{si } p^m \mid n \\ -p^{m-1} & \text{si } p^{m-1} \mid n \text{ pero } p^m \nmid n \\ 0 & \text{si } p^{m-1} \nmid n. \end{cases}$$

*Demostración.* (1) Para cada  $n \in \mathbb{N}$  se tiene que  $(n, 1) = 1$  y por tanto

$$c_1(n) = \sum_{d \mid (n, 1)} \mu\left(\frac{1}{d}\right) d = \mu(1)1 = 1.$$

(2) De manera similar,

$$c_r(1) = \sum_{d \mid (1, r)} \mu\left(\frac{r}{d}\right) d = \mu(r)1 = \mu(r).$$

(3) Por definición se tiene que  $\sigma(k) = \sum_{d \mid k} d$ . Además  $\mu(k) \leq 1$  para todo  $k \in \mathbb{N}$ , luego

$$c_r(n) = \sum_{d \mid (n, r)} \mu\left(\frac{r}{d}\right) d \leq \sum_{d \mid (n, r)} d = \sum_{\substack{d \mid n \\ d \mid r}} d \leq \sum_{d \mid n} d, \sum_{d \mid r} d \leq \max\{\sigma(n), \sigma(r)\}.$$

(4) Defínase

$$\eta_r(n) = \begin{cases} r & \text{si } r \mid n \\ 0 & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

Se tiene que la función  $\eta_{\square}(n)$  es multiplicativa para  $n$  fijo. En efecto, si  $r, s \in \mathbb{N}$  son tales que  $(r, s) = 1$ , entonces

$$\eta_{rs}(n) = \begin{cases} rs & \text{si } rs \mid n \\ 0 & \text{en otro caso,} \end{cases}$$

pero  $rs \mid n$  si y sólo si  $r \mid n$  y  $s \mid n$ . En efecto, si  $rs \mid n$  es claro que  $r \mid n$  y  $s \mid n$ . Supóngase que  $r \mid n$  y  $s \mid n$ , de tal manera que existen  $q_1, q_2 \in \mathbb{Z}$  tales que  $n = rq_1 = sq_2$ . Como  $(r, s) = 1$ , también existen  $x, y \in \mathbb{Z}$  tales que  $1 = rx + sy$ , luego  $n = nr x + ns y$ , por lo que  $n = rs(q_2 x + q_1 y)$ , es decir,  $rs \mid n$ . Luego, si  $rs \mid n$ , entonces

$$\eta_{rs}(n) = rs = \eta_r(n)\eta_s(n),$$



y si  $rs \nmid n$  entonces  $r \nmid n$  y  $s \nmid n$ , por lo que

$$\eta_{rs}(0) = 0 = \eta_r(n)\eta_s(n).$$

Por otro lado, se tiene que

$$\sum_{d|r} \mu\left(\frac{r}{d}\right) \eta_d(n) = \sum_{\substack{d|r \\ d|n}} \mu\left(\frac{r}{d}\right) d = \sum_{d|(n,r)} \mu\left(\frac{r}{d}\right) d = c_r(n),$$

es decir,  $c_\square(n) = \mu * \eta_\square(n)$ . Luego  $c_\square(n)$  debe ser multiplicativa para  $n$  fijo, por ser producto de funciones multiplicativas.

(5) Se tienen los siguientes casos

- Si  $p^m \mid n$ , entonces  $(n, p^m) = p^m$ , luego

$$c_{p^m}(n) = \sum_{d|p^m} \mu\left(\frac{p^m}{d}\right) d = \mu(1)p^m + \mu(p)p^{m-1} = p^m - p^{m-1},$$

pues  $\mu(p^i) = 0$  para toda  $i > 1$ .

- Si  $p^{m-1} \mid n$  pero  $p^m \nmid n$ , entonces  $(n, p^m) = p^{m-1}$ . En efecto, se tiene que  $p^{m-1} \mid p^m$  y además  $p^{m-1} \mid n$  por hipótesis. Si  $e \in \mathbb{Z}$  es tal que  $e \mid p^m$  y  $e \mid n$ , entonces  $e = p^i$ , para algún  $0 \leq i \leq m-1$ , pues  $p^m \nmid n$ , por tanto  $e \mid p^{m-1}$ . Esto prueba que  $(p^m, n) = p^{m-1}$ , así

$$c_{p^m}(n) = \sum_{d|p^{m-1}} \mu\left(\frac{p^m}{d}\right) d = \mu(p)p^{m-1} = -p^{m-1}$$

- Finalmente, si  $p^{m-1} \nmid n$ , entonces  $p^m \nmid n$ . Además,  $(n, p^m) \mid p^m$ , por tanto  $(n, p^m) = p^i$  para algún  $0 \leq i \leq m$ . Más aún, por la hipótesis se debe tener que  $0 \leq i \leq m-2$ . Luego

$$c_{p^m}(n) = \sum_{d|p^i} \mu\left(\frac{p^m}{d}\right) d = \mu(p^m)1 + \mu(p^{m-1})p + \cdots + \mu(p^{m-i})p^i = 0,$$

pues  $i \leq m-2$  implica que  $2 \leq m-i$  y por tanto  $\mu(p^m) = \cdots = \mu(p^{m-i}) = 0$ . ■

Del la demostración del punto 4 se puede rescatar el siguiente corolario, usando la inversión de Möbius (Corolario 1.5).

**Corolario 2.1.** Para cada  $n \in \mathbb{N}$  fijo se tiene

$$\sum_{d|r} c_d(n) = \eta_r(n) = \begin{cases} r & \text{si } r \mid n \\ 0 & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

Otro corolario notable de la proposición anterior es el siguiente.

**Corolario 2.2.** La suma de las raíces  $r$ -ésimas primitivas de la unidad es igual a  $\mu(r)$ .

*Demostración.* Por el punto (2) de la proposición anterior, se tiene que

$$\sum_{\substack{a=1 \\ (a,r)=1}}^r e^{i(2\pi/r)a} = c_r(1) = \mu(r).$$

■

Las sumas de Ramanujan gozan de la siguiente propiedad de “ortogonalidad”.

**Lema 2.1.** Si  $r$  y  $s$  dividen a  $k$ , entonces

$$\sum_{d|k} c_r(k/d) c_d(k/s) = \begin{cases} k & \text{si } r = s \\ 0 & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

*Demostración.* Si  $r$  y  $s$  dividen a  $k$ , entonces

$$\begin{aligned} \sum_{d|k} c_r(k/d) c_d(k/s) &= \sum_{d|k} c_d(k/s) \sum_{d'|(k/d,r)} \mu(r/d') d' \\ &= \sum_{d|k} c_d(k/s) \sum_{\substack{d'|r \\ d'|k/d}} \mu(r/d') d' = \sum_{\substack{d|k \\ d'|r \\ d'|k/d}} c_d(k/s) \mu(r/d') d' \\ &= \sum_{\substack{d|k/d' \\ d'|r \\ d'|r}} c_d(k/s) \mu(r/d') d' = \sum_{\substack{d'|r \\ d'|k}} \mu(r/d') d' \sum_{d|k/d'} c_d(k/s) \\ &= \sum_{d'|(k,r)} \mu(r/d') d' \eta_{k/d'}(k/s) = \sum_{d'|r} \mu(r/d') d' \eta_{k/d'}(k/s), \quad (2.1) \end{aligned}$$

dado que  $(k, r) = r$  por ser  $r$  divisor de  $k$  y dado que los conjuntos  $\{d, d' \in \mathbb{N} : d \mid k, d' \mid r, d' \mid k/d\}$  y  $\{d, d' \in \mathbb{N} : d \mid k/d', d' \mid r, d' \mid k\}$  son iguales. En efecto, si  $d \mid k$  entonces  $k/d$  es un entero, luego  $d' \mid k/d$  implica que  $k/d = d'q'$ , luego  $k = d'q'd$ , por tanto  $d \mid k/d'$  y  $d' \mid k$ .

Recíprocamente, si  $d' \mid k$  entonces  $k/d'$  es un entero, luego  $d \mid k/d'$  implica que  $k/d' = dq$ , por tanto  $k = dqd'$ , por tanto  $d \mid k$  y  $d' \mid k/d$ .

Si  $s \nmid r$  entonces  $s \nmid d'$  y por tanto  $k/d' \nmid k/s$ . En efecto, pues si  $s \mid d'$ , como  $d' \mid r$  entonces se tendría que  $s \mid r$  por transitividad. Además, si  $k/d' \mid k/s$  se tendría que  $s \mid d'k$ . Luego la suma (2.1) se anula si  $s \nmid r$  y en particular si  $r \neq s$ , pues en este caso se tiene que  $\eta_{k/d'}(k/s) = 0$  para cada  $d' \mid r$ .

Si  $s \mid r$  entonces la suma (2.1) es igual a

$$\begin{aligned} \sum_{\substack{d' \mid r \\ k/d' \mid k/s}} \mu(r/d') d' \frac{k}{d'} &= \sum_{\substack{d' \mid r \\ k/d' \mid k/s}} \mu(r/d') k = \sum_{\substack{d' \mid r \\ s \mid d'}} \mu(r/d') k \\ &= k \sum_{\substack{d' \mid r \\ d' = se}} \mu(r/se) = k \sum_{e \mid r/s} \mu(r/se) \\ &= k \sum_{se \mid r} \mu(r/se) = \begin{cases} k & \text{si } r = s \\ 0 & \text{en otro caso,} \end{cases} \end{aligned}$$

pues  $k/d' \mid k/s$  si y sólo si  $s \mid d'$ . ■

**Corolario 2.3.** *Las sumas de Ramanujan son linealmente independientes respecto a la suma sobre los divisores de  $r$ . Más específicamente, si  $\alpha, \beta$  son funciones aritméticas tales que*

$$\sum_{d \mid r} \alpha(d) c_d(n) = \sum_{d \mid r} \beta(d) c_d(n),$$

para todo  $n \in \mathbb{N}$ , entonces  $\alpha(d) = \beta(d)$  para todo  $d \mid r$ .

*Demostración.* Basta probar que  $\sum_{d \mid r} \alpha(d) c_d(n) = 0$  implica que  $\alpha(d) = 0$  para todo  $d \mid r$ . Supóngase la hipótesis y sea  $\delta \mid r$  arbitrario pero fijo. Si  $e$  es un divisor de  $r$ , se tiene que  $\sum_{d \mid r} \alpha(d) c_d(r/e) = 0$ , luego

$$0 = \sum_{e \mid r} \left( \sum_{d \mid r} \alpha(d) c_d\left(\frac{r}{e}\right) \right) c_e\left(\frac{r}{\delta}\right) = \sum_{d \mid r} \alpha(d) \sum_{e \mid r} c_d\left(\frac{r}{e}\right) c_e\left(\frac{r}{\delta}\right) = \alpha(\delta) r,$$

por la proposición anterior, y dado que  $r \neq 0$  entonces  $\alpha(\delta) = 0$ . Como  $\delta$  fue un divisor arbitrario de  $r$ , se tiene el resultado. ■

**Lema 2.2.** *Si  $d \mid r$  entonces  $c_d(n) = c_d((n, r))$ .*

*Demostración.* Si  $d \mid r$  entonces  $(n, d) = ((n, r), d)$ . En efecto, dado que  $(n, d) \mid n$  y  $(n, d) \mid d$ , entonces  $(n, d) \mid n$ ,  $(n, d) \mid d$  y  $(n, d) \mid r$ , por lo que  $(n, d) \mid (n, r)$  y  $(n, d) \mid d$ , es decir,  $(n, d) \mid ((n, r), d)$ . Recíprocamente se tiene que  $((n, r), d) \mid n$  y  $((n, r), d) \mid d$ , así que  $((n, r), d) \mid (n, d)$ . Se sigue que  $(n, d) = ((n, r), d)$ . Luego

$$c_d(n) = \sum_{e \mid (n, d)} \mu(d/e)e = \sum_{e \mid ((n, r), d)} \mu(d/e)e = c_d((n, r)).$$

■

**Corolario 2.4.** *La suma de Ramanujan módulo  $r$  es par mód  $r$ .*

**Definición 2.3.** (Radical). Sea  $n \in \mathbb{N}$ . Se define el *radical* de  $n$ , denotado por  $n_*$  como

$$n_* = \begin{cases} 1 & \text{si } n = 1 \\ p_1 \cdots p_r & \text{si } n = p_1^{\alpha_1} \cdots p_r^{\alpha_r} \end{cases}$$

donde  $n = p_1^{\alpha_1} \cdots p_r^{\alpha_r}$  es la factorización de  $n > 1$  en primos.

**Definición 2.4.** Una función aritmética  $f$  se dirá *separable* si  $f(n) = f(n_*)$ , para cada  $n \in \mathbb{N}$ .

**Lema 2.3.** *Una función multiplicativa es separable si y sólo si  $(\mu * f)(n) = 0$  para todo  $n$  no libre de cuadrado.*

*Demostración.* Sea  $F = \mu * f$ . Entonces  $F * 1 = f$ , es decir,

$$\sum_{d \mid n} F(d) = f(n), \forall n \in \mathbb{N}.$$

Si  $F(n) = 0$  para cada  $n$  no libre de cuadrado, entonces

$$f(n) = \sum_{d \mid n} F(d) = \sum_{d \mid n_*} F(d) = f(n_*),$$

es decir,  $f$  es separable.

Supóngase ahora que  $f$  es separable. Se tiene que para cada primo  $p$  y para cada  $m > 1$ ,

$$\begin{aligned} F(p^m) &= \sum_{d \mid p^m} \mu(d) f\left(\frac{p^m}{d}\right) = \mu(1)f(p^m) + \mu(p)f(p^{m-1}) \\ &= f(p^m) - f(p^{m-1}) = f(p) - f(p) = 0. \end{aligned}$$

Además como  $f$  es multiplicativa, entonces  $F$  también lo es. Si  $n$  es un entero positivo no libre de cuadrado, entonces existen un primo  $p$  y enteros positivos  $q$  y  $m > 1$  tales que  $n = p^m q$  y  $(p^m, q) = 1$ . Luego  $F(n) = F(p^m)F(q) = 0 \cdot F(q) = 0$ . ■

**Lema 2.4.** Si  $f$  es multiplicativa y separable, entonces para cualesquiera  $a, b \in \mathbb{N}$  se tiene:

$$(I) \quad f(a)f(b) = f(ab)f((a, b)).$$

$$(II) \quad f(a) = f((a, b)) \sum_{\substack{d|a \\ (d, b)=1}} (\mu * f)(d)$$

*Demostración.* (I) Nótese que si  $p$  es un primo y  $m, n > 1$  entonces

$$f(p^m)f(p^n) = f(p)f(p) = f(p^{m+n})f((p^m, p^n)),$$

pues  $(p^m, p^n) = p^i$ , con  $i = \min\{m, n\}$ . Sean  $a, b \in \mathbb{N}$  y escríbase sin pérdida de generalidad  $a = p_1^{\alpha_1} \cdots p_r^{\alpha_r}$  y  $b = p_1^{\beta_1} \cdots p_r^{\beta_r}$ ,  $0 \leq \alpha_i, \beta_i$ . Entonces, como  $f$  es multiplicativa,

$$\begin{aligned} f(ab)f((a, b)) &= f(p_1^{\alpha_1+\beta_1} \cdots p_r^{\alpha_r+\beta_r})f(p_1^{\min\{\alpha_1, \beta_1\}} \cdots p_r^{\min\{\alpha_r, \beta_r\}}) \\ &= f(p_1^{\alpha_1+\beta_1}) \cdots f(p_r^{\alpha_r+\beta_r})f(p_1^{\min\{\alpha_1, \beta_1\}}) \cdots f(p_r^{\min\{\alpha_r, \beta_r\}}) \\ &= f(p_1^{\alpha_1+\beta_1}) \cdots f(p_r^{\alpha_r+\beta_r})f((p_1^{\alpha_1}, p_1^{\beta_1})) \cdots f((p_r^{\alpha_r}, p_r^{\beta_r})) \\ &= f(p_1^{\alpha_1})f(p_1^{\beta_1}) \cdots f(p_r^{\alpha_r})f(p_r^{\beta_r}) \\ &= f(p_1^{\alpha_1} \cdots p_r^{\alpha_r})f(p_1^{\beta_1} \cdots p_r^{\beta_r}) \\ &= f(a)f(b) \end{aligned}$$

(II) Al igual que en la demostración anterior, si  $F = \mu * f$ , entonces

$$\sum_{d|n} F(d) = f(n), \forall n \in \mathbb{N}.$$

Se verá primero que los conjuntos  $\{d \in \mathbb{N} : d \mid a_* \text{ y } (d, b) = 1\}$  y  $\{d \in \mathbb{N} : d \mid a_*/(a, b)_*\}$  son iguales.

Para empezar, se tiene que  $a_*/(a, b)_*$  es un entero. Si  $(a, b)_* = 1$  esto es claro. Si  $(a, b)_* > 1$  se puede escribir  $(a, b)_* = q_1 \cdots q_s$ , donde todos los primos son distintos. Luego  $q_i \mid (a, b)_*$ , pero  $(a, b)_* \mid (a, b)$  y  $(a, b) \mid a$ , por tanto  $q_i \mid a$  y por tanto  $q_i \mid a_*$ . Como  $i \in \{1, \dots, s\}$  fue arbitrario y todos los primos  $q_i$  son distintos, entonces  $q_1 \cdots q_s = (a, b)_* \mid a_*$ , que es lo que se quería probar.

Procedamos a probar la igualdad de los conjuntos. Supóngase primero que  $d \mid a_*$  y  $(d, b) = 1$ . Entonces existe  $c \in \mathbb{N}$  tal que  $a_* = dc$ . Por otro lado, se tiene que  $(a, b) \mid b$  y por tanto  $((a, b), d) = 1$ , más aún, como  $(a, b)_* \mid (a, b)$  entonces también

$((a, b)_*, d) = 1$  y como  $(a, b)_* \mid a_* = dc$ , por el lema de Euclides se debe tener que  $(a, b)_* \mid c$  es decir,  $a_* = (a, b)_* dq$ , para algún  $q \in \mathbb{N}$ , luego  $d \mid a_*/(a, b)_*$ .

Recíprocamente, supóngase que  $d \mid a_*/(a, b)_*$ . Se debe tener que

$$\left( \frac{a_*}{(a, b)_*}, b \right) = 1. \quad (2.2)$$

Pues en caso contrario, es decir, si este máximo común divisor fuera mayor que uno, existiría un primo  $p$  tal que  $p \mid b$  y  $p \mid a_*/(a, b)_*$ , pero  $a_*/(a, b)_* \mid a_*$ , luego  $p \mid a_*$  y por tanto  $p \mid a$ . En consecuencia,  $p \mid (a, b)$  y por tanto  $p \mid (a, b)_*$ . Se puede escribir entonces  $a_* = pp_1 \cdots p_r$ ,  $(a, b)_* = pq_1 \cdots q_s$ , donde todos los primos son distintos. Además, como  $a_* = (a, b)_* n$  para algún  $n \in \mathbb{N}$ , se tiene que  $pp_1 \cdots p_r = pq_1 \cdots q_s r_1 \cdots r_t$ , con  $n = r_1 \cdots r_t$ , y  $r_i$  números primos, no necesariamente distintos. Luego  $p_1 \cdots p_r = q_1 \cdots q_s r_1 \cdots r_t$  y dado que ninguno de los primos  $p_i$  son iguales a  $p$ , entonces ninguno de los primos  $r_j$  puede ser igual a  $p$ , es decir  $p$  no divide a  $n = a_*/(a, b)_*$ , lo cual es absurdo.

Esto prueba la igualdad de dichos conjuntos. Ahora es fácil calcular la siguiente suma,

$$\sum_{\substack{d \mid a \\ (d, b)=1}} F(d) = \sum_{\substack{d \mid a_* \\ (d, b)=1}} F(d) = \sum_{d \mid a_*/(a, b)_*} F(d) = \sum_{d \mid (a_*/(a, b)_*)} (\mu * f)(d) = f(a_*/(a, b)_*).$$

Además, por una demostración similar a la de la ecuación (2.2), se tiene que

$$\left( (a, b)_*, \frac{a_*}{(a, b)_*} \right) = 1.$$

Finalmente, como  $f$  es multiplicativa,

$$f(a) = f(a_*) = f((a, b)_*) f(a_*/(a, b)_*) = f((a, b)) \sum_{\substack{d \mid a \\ (d, b)=1}} (\mu * f)(d).$$

■

*Ejemplo 2.1.* La función  $\bar{\varphi} = \varphi(n)/n$  es separable. Nótese que para cualquier primo  $p$  y  $m > 0$  se tiene  $\varphi(p^m) = p^m - p^{m-1}$ , luego  $\varphi(p^m)/p^m = 1 - p^{-1}$  y también  $\varphi(p)/p = 1 - p^{-1}$ . Ahora, si  $n = p_1^{\alpha_1} \cdots p_r^{\alpha_r}$  entonces, como  $\varphi$  es multiplicativa,

$$\frac{\varphi(n)}{n} = \frac{\varphi(p_1^{\alpha_1})}{p_1^{\alpha_1}} \cdots \frac{\varphi(p_r^{\alpha_r})}{p_r^{\alpha_r}} = \left(1 - \frac{1}{p_1}\right) \cdots \left(1 - \frac{1}{p_r}\right) = \frac{\varphi(p_1)}{p_1} \cdots \frac{\varphi(p_r)}{p_r} = \frac{\varphi(n_*)}{n_*}$$

**Lema 2.5** (Fórmula de Hölder). *Para cada  $n \in \mathbb{N}$  se tiene*

$$c_r(n) = \frac{\varphi(r)\mu\left(\frac{r}{(n,r)}\right)}{\varphi\left(\frac{r}{(n,r)}\right)}$$

*Demostración.* Se tiene

$$c_r(n) = \sum_{d|(n,r)} \mu\left(\frac{r}{d}\right) d = \sum_{\substack{d|(n,r) \\ \left(\frac{r}{(n,r)}, \frac{(n,r)}{d}\right) > 1}} \mu\left(\frac{r}{d}\right) d + \sum_{\substack{d|(n,r) \\ \left(\frac{r}{(n,r)}, \frac{(n,r)}{d}\right) = 1}} \mu\left(\frac{r}{d}\right) d, \quad (2.3)$$

pero si  $(r/(n,r), (n,r)/d) > 1$  entonces  $r/d$  debe tener un factor cuadrado, pues en este caso existe un primo  $p$  tal que  $p \mid r/(n,r)$  y  $p \mid (n,r)/d$ , luego  $r = p(n,r)q_1$  y  $(n,r) = pdq_2$  para algunos enteros  $q_1$  y  $q_2$ , luego  $r = p^2dq_1q_2$  y por tanto  $p^2 \mid r/d$ , así que  $\mu(r/d) = 0$ . Luego la ecuación (2.3) es igual a

$$\begin{aligned} \sum_{\substack{d|(n,r) \\ \left(\frac{r}{(n,r)}, \frac{(n,r)}{d}\right) = 1}} \mu\left(\frac{r}{d}\right) d &= \sum_{\substack{d|(n,r) \\ \left(\frac{r}{(n,r)}, \frac{(n,r)}{d}\right) = 1}} \mu\left(\frac{r}{(n,r)}\right) \mu\left(\frac{(n,r)}{d}\right) d \\ &= \mu\left(\frac{r}{(n,r)}\right) \sum_{\substack{d|(n,r) \\ \left(\frac{r}{(n,r)}, \frac{(n,r)}{d}\right) = 1}} \mu\left(\frac{(n,r)}{d}\right) d \\ &= \mu\left(\frac{r}{(n,r)}\right) \sum_{\substack{d|(n,r) \\ \left(\frac{r}{(n,r)}, d\right) = 1}} \mu(d) \frac{(n,r)}{d} \\ &= (n,r) \mu\left(\frac{r}{(n,r)}\right) \sum_{\substack{d|(n,r) \\ \left(\frac{r}{(n,r)}, d\right) = 1}} \frac{\mu(d)}{d} \end{aligned} \quad (2.4)$$

pues  $\mu$  es multiplicativa. Sea ahora  $\Phi = \mu * \bar{\varphi}$ , donde  $\bar{\varphi}(s) = \varphi(s)/s$  para cada  $s \in \mathbb{N}$ . Se tiene entonces que

$$\begin{aligned} \Phi(s) &= \sum_{d|s} \mu(d) \bar{\varphi}\left(\frac{s}{d}\right) = \sum_{d|s} \mu(d) \varphi\left(\frac{s}{d}\right) \frac{1}{s/d} = \sum_{d|s} \mu(d) \sum_{e|s/d} \mu(e) \frac{s/d}{e} \frac{1}{s/d} \\ &= \sum_{d|s} \mu(d) \sum_{e|s/d} \frac{\mu(e)}{e} = \sum_{e|s} \frac{\mu(e)}{e} \sum_{d|s/e} \mu(d) = \frac{\mu(s)}{s} \end{aligned} \quad (2.5)$$

pues si  $d \mid s$  y  $c \mid s/d$ , entonces  $d/s$  es un entero y  $s/d = eq$  para algún entero  $q$ , luego  $s = deq$  y por tanto  $e \mid s$  y  $d \mid s/e$ . El recíproco es similar. Además, todos los términos en la penúltima suma son cero excepto aquel para el cual  $s/e = 1$ , es decir,  $s = e$ . Luego la suma (2.4) es igual a

$$\begin{aligned}
 (n, r) \mu \left( \frac{r}{(n, r)} \right) \sum_{\substack{d \mid (n, r) \\ \left( \frac{r}{(n, r)}, d \right) = 1}} \Phi(d) &= (n, r) \mu \left( \frac{r}{(n, r)} \right) \sum_{\substack{d \mid (n, r) \\ \left( \frac{r}{(n, r)}, d \right) = 1}} (\mu * \bar{\varphi}(d)) \\
 &= (n, r) \mu \left( \frac{r}{(n, r)} \right) \frac{\bar{\varphi}((n, r))}{\bar{\varphi} \left( (n, r), \frac{r}{(n, r)} \right)} \\
 &= (n, r) \mu \left( \frac{r}{(n, r)} \right) \frac{\bar{\varphi}(r) \bar{\varphi}((n, r))}{\bar{\varphi}((n, r)) \bar{\varphi} \left( \frac{r}{(n, r)} \right)} \\
 &= (n, r) \mu \left( \frac{r}{(n, r)} \right) \frac{\bar{\varphi}(r)}{\bar{\varphi} \left( \frac{r}{(n, r)} \right)} \\
 &= (n, r) \mu \left( \frac{r}{(n, r)} \right) \frac{r \varphi(r)}{(n, r) r \varphi \left( \frac{r}{(n, r)} \right)} \\
 &= \frac{\mu \left( \frac{r}{(n, r)} \right) \varphi(r)}{\varphi \left( \frac{r}{(n, r)} \right)}
 \end{aligned}$$

donde la primera igualdad se cumple por definición de  $\Phi$  y la ecuación (2.5), la segunda por ser  $\bar{\varphi}$  multiplicativa, separable y por el Lema 2.4 (II), la tercera por el Lema 2.4 (I) y la quinta por definición de  $\bar{\varphi}$ . ■

**Teorema 2.1.** *Toda función  $f$  par mód  $r$  tiene una expansión de la forma*

$$f(n) = \sum_{d \mid r} \alpha(d) c_d(n), \quad (2.6)$$

y recíprocamente, toda función aritmética de esta forma es par mód  $r$ . Los coeficientes  $\alpha(d)$  están dados por

$$\alpha(d) = \frac{1}{r} \sum_{e \mid r} f \left( \frac{r}{e} \right) c_e \left( \frac{r}{d} \right), \quad (2.7)$$

o por la fórmula equivalente,

$$\alpha(d) = \frac{1}{r \varphi(d)} \sum_{m=1}^r f(m) c_d(m).$$



A los coeficientes  $\alpha$  se les llamará **coeficientes de Fourier de la función par  $f$** .

*Demostración.* Es claro que toda función de la forma (2.6) es par mód  $r$ , pues por el lema anterior si  $d \mid r$  entonces  $c_d(n) = c_d((n, r))$ . Nótese que

$$\begin{aligned} \sum_{d \mid r} \alpha(d) c_d(n) &= \sum_{d \mid r} \left( \frac{1}{r} \sum_{e \mid r} f\left(\frac{r}{e}\right) c_e\left(\frac{r}{d}\right) \right) c_d(n) \\ &= \frac{1}{r} \sum_{e \mid r} f\left(\frac{r}{e}\right) \sum_{d \mid r} c_e\left(\frac{r}{d}\right) c_d(n) \\ &= \frac{1}{r} \sum_{e \mid r} f\left(\frac{r}{e}\right) \sum_{d \mid r} c_e\left(\frac{r}{d}\right) c_d((n, r)) \\ &= \frac{1}{r} f\left(\frac{r}{q}\right) r = f((n, r)) = f(n), \end{aligned}$$

por el Lema 2.5, donde  $r = (n, r)q$ , para algún  $q \in \mathbb{N}$  y donde la última igualdad se cumple por ser  $f$  par mód  $r$ .

Por otro lado, de la demostración de Teorema 1.7 se puede rescatar el hecho de que el conjunto  $\{1, 2, \dots, r\}$  es igual a  $\bigcup_{e \mid r} \{rx/e : (x, e) = 1, 1 \leq x \leq e\}$  y todos los conjuntos son disjuntos a pares, por tanto

$$\begin{aligned} \frac{1}{r\varphi(d)} \sum_{m=1}^r f(m) c_d(m) &= \frac{1}{r\varphi(d)} \sum_{e \mid r} \sum_{\substack{(x,e)=1 \\ 1 \leq x \leq e}} f\left(\frac{rx}{e}\right) c_d\left(\frac{rx}{e}\right) \\ &= \frac{1}{r\varphi(d)} \sum_{e \mid r} \sum_{\substack{(x,e)=1 \\ 1 \leq x \leq e}} f\left(\left(\frac{rx}{e}, r\right)\right) c_d\left(\left(\frac{rx}{e}, r\right)\right) \\ &= \frac{1}{r\varphi(d)} \sum_{e \mid r} \sum_{\substack{(x,e)=1 \\ 1 \leq x \leq e}} f\left(\frac{r}{e}\right) c_d\left(\frac{r}{e}\right) \\ &= \frac{1}{r\varphi(d)} \sum_{e \mid r} f\left(\frac{r}{e}\right) c_d\left(\frac{r}{e}\right) \varphi(e) \\ &= \frac{1}{r\varphi(d)} \sum_{e \mid r} f\left(\frac{r}{e}\right) c_e\left(\frac{r}{d}\right) \varphi(d) \\ &= \frac{1}{r} \sum_{e \mid r} \left(\frac{r}{e}\right) c_e\left(\frac{r}{d}\right), \end{aligned}$$

donde la segunda igualdad se cumple por ser  $f$  par mód  $r$ , la tercera por ser  $(rx/e, r) = r/e$ , pues  $(x, e) = 1$  implica que  $(r/e)(x, e) = r/e$ , y como  $r/e$  es un entero positivo,

entonces  $(rx/e, r) = r/e$ . La cuarta por definición de  $\varphi$ , y la penúltima igualdad se cumple por la fórmula de Hölder (Lema 2.5) y el Corolario A.1, pues  $e$  y  $d$  dividen a  $d$ , así que

$$c_d\left(\frac{r}{e}\right)\varphi(e) = \frac{\varphi(d)\mu\left(\frac{d}{(r/e, d)}\right)}{\varphi\left(\frac{d}{(r/e, d)}\right)} = \frac{\varphi(d)\mu\left(\frac{e}{(r/d, e)}\right)}{\varphi\left(\frac{e}{(r/d, e)}\right)}\varphi(e) = \varphi(d)c_e\left(\frac{r}{d}\right) \quad (2.8)$$

■

**Corolario 2.5.** Si  $f$  y  $f'$  son funciones pares mód  $r$ , entonces se verifican las siguientes implicaciones

$$f(n) = \sum_{d|r} f'(d)c_d(n), \forall n \in \mathbb{N} \implies f'(\delta) = \frac{1}{r\varphi(\delta)} \sum_{m=1}^r f(m)c_d(m), \forall \delta | r,$$

$$f'(\delta) = \sum_{m=1}^r f(m)c_\delta(m), \forall d | r \implies f(n) = \frac{1}{r} \sum_{d|r} \frac{f'(d)}{\varphi(d)} c_d(n), \forall n \in \mathbb{N}.$$

*Demostración.* En efecto, como  $f$  es par, entonces  $f$  tiene una única representación de la forma (2.6), por tanto se verifica la primera implicación. Para la segunda implicación se tiene que, de nuevo por la ecuación (2.6),

$$f(n) = \sum_{d|r} \left( \frac{1}{r\varphi(d)} \sum_{m=1}^r f(m)c_d(m) \right) c_d(n) = \frac{1}{r} \sum_{d|r} \frac{f'(d)}{\varphi(d)} c_d(n).$$

■

Considerando los casos  $\delta = 1$  y  $n = r$  se tiene el siguiente corolario.

**Corolario 2.6.** Si  $f$  y  $f'$  son funciones pares mód  $r$ , entonces

$$f(n) = \sum_{d|r} f'(d)c_d(n), \forall n \in \mathbb{N} \implies f'(1) = \frac{1}{r} \sum_{m=1}^r f(m),$$

$$f'(\delta) = \sum_{m=1}^r f(m)c_\delta(m), \forall d | r \implies f(r) = \frac{1}{r} \sum_{d|r} f'(d).$$

La Proposición 2.3 sugiere considerar una clase más general de funciones, aquellas que se pueden escribir como

$$f(n) = \sum_{\delta|(n,r)} g(\delta), \forall n \in \mathbb{N},$$

donde  $g$  es una función aritmética.

La siguiente proposición muestra que esta generalización preserva la modularidad respecto a  $r$ . Más aún, el Teorema 2.1 permite caracterizar a las funciones pares módulo  $r$  de esta forma.

**Teorema 2.2.** *Toda función  $f$  par módulo  $r$  se puede expresar como*

$$f(n) = \sum_{\delta|(n,r)} g(\delta), \forall n \in \mathbb{N}. \quad (2.9)$$

*Y recíprocamente, toda función aritmética que tenga esta forma es par módulo  $r$ .*

*Demostración.* Dado que  $(n, r) = ((n, r), r)$ , es claro que toda función aritmética que tenga dicha forma es par mód  $r$ . Supóngase que  $f$  es par mód  $r$ . Por el Teorema 2.1, se puede escribir

$$\begin{aligned} f(n) &= \sum_{d|r} \alpha(d) c_d(n) = \sum_{d|r} \alpha(d) \sum_{\delta|(n,d)} \mu\left(\frac{d}{\delta}\right) \delta \\ &= \sum_{\delta|(n,d)} \sum_{d|r} \alpha(d) \mu\left(\frac{d}{\delta}\right) \delta = \sum_{\delta|(n,r)} \delta \sum_{d|r} \mu\left(\frac{d}{\delta}\right) \delta = \sum_{\delta|(n,r)} g(\delta) \end{aligned}$$

■

En vista de que toda función par tiene al menos dos representaciones, la del teorema anterior y la del Teorema 2.1, cabe preguntarse si existe alguna relación entre ellas. El siguiente teorema da respuesta a esta inquietud.

**Teorema 2.3.** *Si  $f$  es par módulo  $r$ , entonces sus respectivas expansiones (2.6) y (2.9) están relacionadas mediante la fórmula*

$$\alpha(d) = \frac{1}{r} \sum_{e|r/d} g\left(\frac{r}{e}\right) e.$$

*Demostración.* Se tiene que

$$\alpha(d) = \frac{1}{r} \sum_{\delta|r} f\left(\frac{r}{\delta}\right) c_{\delta}\left(\frac{r}{d}\right) = \frac{1}{r} \sum_{\delta|r} c_{\delta}\left(\frac{r}{d}\right) \sum_{e|(r/\delta, \delta)} g(e) = \frac{1}{r} \sum_{\delta|r} c_{\delta}\left(\frac{r}{d}\right) \sum_{e|r/\delta} g(e)$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{r} \sum_{\delta|r} c_\delta \left( \frac{r}{d} \right) \sum_{e|r/\delta} g(e) = \frac{1}{r} \sum_{e|r} g \left( \frac{r}{e} \right) \sum_{\delta|e} c_\delta \left( \frac{r}{d} \right) \\
&= \frac{1}{r} \sum_{e|r} g \left( \frac{r}{e} \right) \cdot \begin{cases} e & \text{si } e \mid r/d \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases} = \frac{1}{r} \sum_{e|r/d} g \left( \frac{r}{e} \right) e.
\end{aligned}$$

por el corolario 2.1. ■

## 2.2. El subespacio de funciones pares

Recuérdese del corolario 1.1 que el anillo  $(\mathcal{A}, +, *)$  es un álgebra conmutativa con identidad. Se tiene que el conjunto de funciones pares es un subespacio de  $\mathcal{A}$ , pero no es un subanillo, pues en general  $(f * g)(n) \neq (f * g)((n, r))$  aún cuando  $f$  y  $g$  sean pares mód  $r$ , tome por ejemplo dos funciones constantes. Se denotará como  $\mathcal{A}_r$  al conjunto de funciones pares módulo  $r$ .

**Proposición 2.5.** *El conjunto  $\mathcal{A}_r$  es una subespacio de  $\mathcal{A}$ .*

*Demostración.* Basta verificar las siguientes condiciones:

- (I)  $\mathcal{A}_r \neq \emptyset$
- (II)  $f, g \in \mathcal{A}_r$  implica  $f + g \in \mathcal{A}_r$
- (III)  $c \in \mathbb{C}$  y  $f \in \mathcal{A}_r$  implica  $cf \in \mathcal{A}_r$ .

Claro que  $\mathbf{0} \in \mathcal{A}_r$ . Sea  $n \in \mathbb{N}$  y supóngase que  $f, g \in \mathcal{A}_r$ . Se tiene que  $(cf)(n) = cf(n) = cf((n, r)) = (cf)((n, r))$ , luego  $cf \in \mathcal{A}_r$ .

Además,  $(f + g)(n) = f(n) + g(n) = f((n, r)) + g((n, r)) = (f + g)((n, r))$ , así que  $f + g \in \mathcal{A}_r$ . ■

El corolario 2.3 afirma que las sumas de Ramanujan  $\mathcal{B}_r = \{c_d\}_{d|r}$  son linealmente independientes respecto a la suma sobre los divisores de  $r$ , además el Teorema 2.1 nos permite expresar cualquier función par como una suma de este tipo. En otras palabras, el conjunto  $\mathcal{B}_r$  es una base del espacio vectorial  $\mathcal{A}_r$ .

**Corolario 2.7.** *El espacio vectorial  $\mathcal{A}_r$  tiene dimensión  $d(r)$ .*

En lo que sigue de esta sección se verá que los coeficientes de la expansión (2.6) pueden ser derivados de un producto interno en este espacio de funciones.

**Proposición 2.6.** La operación  $\langle \ , \ \rangle : \mathcal{A}_r \times \mathcal{A}_r \longrightarrow \mathbb{C}$  definida como

$$\langle f, g \rangle = \sum_{d|r} \varphi(d) f\left(\frac{r}{d}\right) \overline{g\left(\frac{r}{d}\right)}$$

es un producto interno en  $\mathcal{A}_r$ .

*Demostración.* Sean  $c \in \mathbb{C}$  y  $f, g, h \in \mathcal{A}_r$ . Escribese  $f(n) = f_1(n) + if_2(n)$  para todo  $n \in \mathbb{N}$ , donde  $f_1, f_2 \in \mathcal{A}_{\mathbb{R}}$ . Entonces

(I)

$$\begin{aligned} \langle f, f \rangle &= \sum_{d|r} \varphi(d) \left[ f_1\left(\frac{r}{d}\right) + if_2\left(\frac{r}{d}\right) \right] \overline{\left[ f_1\left(\frac{r}{d}\right) + if_2\left(\frac{r}{d}\right) \right]} \\ &= \sum_{d|r} \varphi(d) \left[ f_1^2\left(\frac{r}{d}\right) + f_2^2\left(\frac{r}{d}\right) \right] \geq 0 \end{aligned}$$

Además, si  $\langle f, f \rangle = 0$ , como todos los términos de la suma anterior son positivos, se debe tener que  $f_1(d) = f_2(d) = 0$  para todo  $d$  divisor de  $r$ . Si  $n \in \mathbb{N}$  entonces  $f_1(n) = f((n, r)) = 0$ , pues  $f$  es par mód  $r$  y  $(n, r) \mid r$ . Análogamente se tiene  $f_2(n) = 0$ . Luego  $f(n) = f_1(n) + if_2(n) = 0$  para cada  $n \in \mathbb{N}$ , es decir  $f = 0$ .

(II)

$$\begin{aligned} \langle f + g, h \rangle &= \sum_{d|r} \varphi(d) (f + g)\left(\frac{r}{d}\right) \overline{h\left(\frac{r}{d}\right)} = \sum_{d|r} \varphi(d) \left[ f\left(\frac{r}{d}\right) \overline{h\left(\frac{r}{d}\right)} + g\left(\frac{r}{d}\right) \overline{h\left(\frac{r}{d}\right)} \right] \\ &= \sum_{d|r} \varphi(d) f\left(\frac{r}{d}\right) \overline{h\left(\frac{r}{d}\right)} + \sum_{d|r} \varphi(d) g\left(\frac{r}{d}\right) \overline{h\left(\frac{r}{d}\right)} = \langle f, h \rangle + \langle g, h \rangle \end{aligned}$$

(III)

$$\langle cf, g \rangle = \sum_{d|r} \varphi(d) cf\left(\frac{r}{d}\right) \overline{g\left(\frac{r}{d}\right)} = c \sum_{d|r} \varphi(d) f\left(\frac{r}{d}\right) \overline{g\left(\frac{r}{d}\right)} = c \langle f, g \rangle$$

(IV)

$$\overline{\langle g, f \rangle} = \overline{\sum_{d|r} \varphi(d) g\left(\frac{r}{d}\right) \overline{f\left(\frac{r}{d}\right)}} = \sum_{d|r} \varphi(d) \overline{g\left(\frac{r}{d}\right)} f\left(\frac{r}{d}\right) = \langle f, g \rangle$$

■

El producto interno así definido podría haberse escrito sin el factor  $\varphi(d)$  dentro de la suma. Su uso se justifica al usar la ecuación (2.8) para probar que este producto interno hace de  $\mathcal{B}_r$  una base ortogonal de  $\mathcal{A}_r$ .

**Proposición 2.7.** *Si  $i, j$  son divisores positivos de  $r$ , entonces*

$$\langle c_i, c_j \rangle = \begin{cases} r\varphi(j) & \text{si } i = j \\ 0 & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

*Demostración.* En efecto,

$$\langle c_i, c_j \rangle = \sum_{d|r} \varphi(d) c_i \left( \frac{r}{d} \right) c_j \left( \frac{r}{d} \right) = \sum_{d|r} c_i \left( \frac{r}{d} \right) \varphi(j) c_d \left( \frac{r}{j} \right) = \begin{cases} r\varphi(j) & \text{si } i = j \\ 0 & \text{en otro caso,} \end{cases}$$

donde la segunda igualdad se cumple por la ecuación (2.8) y la tercera por el Lema 2.5. ■

**Corolario 2.8.** *El conjunto*

$$\mathcal{B}'_r = \left\{ c'_d = \frac{1}{\sqrt{r\varphi(d)}} c_d \right\}_{d|r}$$

*es una base ortonormal de  $\mathcal{A}_r$ .*

Como consecuencia del corolario anterior, toda función  $f$  par mód  $r$  debe tener una expansión de la forma  $\sum_{e|r} \beta(e) c'_e$ . Además, si  $d$  es un divisor arbitrario de  $r$ , entonces

$$\langle f, c'_d \rangle = \left\langle \sum_{e|r} \beta(e) c'_e, c'_d \right\rangle = \sum_{e|r} \beta(e) \langle c'_e, c'_d \rangle = \beta(d),$$

pero  $f$  también tiene una única representación de la forma  $\sum_{e|r} \alpha(e) c_d$ , en consecuencia,  $\alpha(d) = \beta(d) / \sqrt{r\varphi(d)}$  para cada  $d$  divisor de  $r$ . Por tanto,

$$\begin{aligned} \alpha(d) &= \frac{\beta(d)}{\sqrt{r\varphi(d)}} = \frac{1}{\sqrt{r\varphi(d)}} \langle f, c'_d \rangle \\ &= \frac{1}{\sqrt{r\varphi(d)}} \sum_{e|r} \varphi(e) f \left( \frac{r}{e} \right) c'_d \left( \frac{r}{e} \right) \\ &= \frac{1}{\sqrt{r\varphi(d)}} \sum_{e|r} \varphi(e) f \left( \frac{r}{e} \right) \frac{1}{\sqrt{r\varphi(d)}} c_d \left( \frac{r}{e} \right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{r\varphi(d)} \sum_{e|r} f\left(\frac{r}{e}\right) \varphi(d) c_e\left(\frac{r}{d}\right) \\
&= \frac{1}{r} \sum_{e|r} f\left(\frac{r}{e}\right) c_e\left(\frac{r}{d}\right),
\end{aligned}$$

donde la cuarta igualdad se cumple nuevamente por (2.8). Esta es la ecuación (2.7). Ahora se pueden llamar propiamente *coeficientes de Fourier* a los coeficientes  $\alpha$  del Teorema 2.1 por ser derivados de un producto interno.





### 3. Procesamiento de señales

Una *señal* es una descripción de un fenómeno que evoluciona en el tiempo o espacio; el *procesamiento de señales* se refiere a cualquier operación manual o mecánica que modifique, analice o manipule de otra forma la información contenida en una señal. Considérese, por ejemplo, la temperatura ambiente; se puede medir su evolución con el tiempo de muchas formas y los datos resultantes representan una “señal” de temperatura. Algunas operaciones sobre esta señal se pueden hacer incluso a mano, por ejemplo calcular la temperatura promedio en un mes o graficar la señal en una hoja de papel.

El adjetivo “digital” proviene de *digitus*, palabra latina para dedo. En este contexto, se refiere a un paradigma en el que el mundo físico se puede describir usando únicamente números enteros. El *procesamiento digital de señales* es por tanto una rama del procesamiento de señales en la cual todo, incluido el tiempo, es descrito en términos de números enteros. En el procesamiento digital de señales, la representación abstracta subyacente siempre es el conjunto de números naturales, independientemente de la naturaleza de la señal [15].

**Definición 3.1.** Más específicamente, una *señal* es cualquier función  $x : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{C}$ .

*Observación 3.1.* Es necesario establecer las dos convenciones siguientes a lo largo del capítulo, siguiendo la notación estándar en la literatura de procesamiento de señales:

- El valor de una señal  $x$  en un índice entero  $n$  se denotará como  $x[n]$ , con corchetes en vez de paréntesis.
- A partir de ahora se le denotará  $j$  a la unidad imaginaria, es decir,  $j = \sqrt{-1}$ .
- Nuevamente, durante todo el capítulo se supondrá que  $r$  es un entero positivo arbitrario pero fijo.

En este capítulo se estudiará una clase particular de señales periódicas, llamadas señales *simétricas* o *pares*, con las herramientas del capítulo anterior. Estas señales no son más que funciones aritméticas pares definidas en los enteros.

#### 3.1. Transformada Discreta de Fourier

**Definición 3.2.** (Señal periódica). Desde luego, una señal periódica con periodo  $r \in \mathbb{N}$  es una señal para la cual  $x[n] = x[n + kr]$  para cada  $n, k \in \mathbb{Z}$ .

Una señal periódica con periodo  $r$  contiene toda su información en un periodo, en el cuál toma  $r$  valores complejos. Considérese pues un arreglo con estos valores, es decir, un elemento de  $\mathbb{C}^r$ .

Sea  $W_r = e^{-j(2\pi/r)}$  y considérese el producto interno  $\langle x, y \rangle = \sum_{n=1}^r \overline{x[n]}y[n]$  en  $\mathbb{C}^r$ . Se sabe, véase por ejemplo [15], que el conjunto  $\{w_k\}_{k=1}^r$ , donde

$$w_k = (W_r^{-k}, W_r^{-2k}, \dots, W_r^{-(r-1)k}, 1) \in \mathbb{C}^r, w = 1, \dots, r,$$

es una base ortogonal de  $\mathbb{C}^r$ . En efecto,

$$\langle w_m, w_n \rangle = \sum_{i=1}^r \overline{W_r^{-mi}} W_r^{-ni} = \sum_{i=1}^r W_r^{(m-n)i} = \begin{cases} r & \text{si } m = n \\ \frac{1 - W_r^{(m-n)r}}{1 - W_r^{m-n}} = 0 & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

Por otro lado, si  $x \in \mathbb{C}^r$ , existen por tanto  $X(k) \in \mathbb{C}, k = 1, \dots, r$ , tales que  $rx = \sum_{k=1}^r X[k]w_k$ . Pero

$$\langle w_k, x \rangle = \left\langle w_k, \frac{1}{r} \sum_{n=1}^r X[n]w_n \right\rangle = \frac{1}{r} \sum_{n=1}^r \langle w_k, X[n]w_n \rangle = \frac{X[k]}{r} r = X[k].$$

En consecuencia,

$$X[k] = \sum_{n=1}^r \overline{W_r^{-nk}} x[n] = \sum_{n=1}^r x[n] W_r^{nk}, \forall k = 1, \dots, r \quad (3.1)$$

y

$$x[n] = \frac{1}{r} \sum_{k=1}^r X[k]w_k[n] = \frac{1}{r} \sum_{k=1}^r X[k]W_r^{-nk}, \forall n = 1, \dots, r. \quad (3.2)$$

La ecuación (3.1) se conoce como fórmula de *análisis* o *coeficientes de Fourier discretos* y la ecuación (3.2) como fórmula de *síntesis* o *reconstrucción* del elemento  $x \in \mathbb{C}^r$ .

Considere la fórmula de síntesis. Dado que  $W_r^{(n+ir)k} = W_r^{nk}$  para cada  $i \in \mathbb{Z}$ , entonces  $x[n + ir] = x[n]$  para todos  $i \in \mathbb{Z}, n = 1, \dots, r$ , de manera que se puede extender  $x \in \mathbb{C}^r$  a una señal periódica a todo  $\mathbb{Z}$  de forma natural. Si  $\tilde{x}$  es una señal periódica y se calcula la fórmula de reconstrucción con los valores de su periodo, dicha extensión coincide con  $\tilde{x}$  en todo  $\mathbb{Z}$ , así que se puede escribir

$$\tilde{X}[k] = \sum_{n=1}^r \overline{W_r^{-nk}} \tilde{x}[n] = \sum_{n=1}^r \tilde{x}[n] W_r^{nk}, \forall k \in \mathbb{Z} \quad (3.3)$$

y

$$\tilde{x}[n] = \frac{1}{r} \sum_{k=1}^r \tilde{X}[k] w_k[n] = \frac{1}{r} \sum_{k=1}^r \tilde{X}[k] W_r^{-nk}, \forall n \in \mathbb{Z}, \quad (3.4)$$

donde la fórmula (3.1) se ha extendido implícitamente a todos los enteros. Dicha extensión, la ecuación (3.3), se llama *transformada discreta de Fourier* de la señal  $\tilde{x}$ . La ecuación (3.4) también será llamada fórmula de *síntesis* o *reconstrucción* de la señal  $\tilde{x}$ .

### 3.2. Señales pares

Las señales simétricas son un análogo a las funciones aritméticas pares estudiadas en el capítulo anterior.

**Definición 3.3.** (Señal simétrica). Una señal  $x$  se dice *simétrica módulo  $r$*  si  $x[n] = x[r - n]$  para cada  $n \in \mathbb{Z}$ .

Una señal simétrica módulo  $r$ , como su nombre sugiere, es simétrica alrededor de la recta  $n = r/2$  si se representa su gráfica en el plano y la señal toma valores reales. Más aún, si una señal simétrica es periódica con periodo  $r$  es real, la parte imaginaria de su transformada de Fourier se anula.

**Proposición 3.1.** Si una señal  $x$  simétrica módulo  $r$  y periódica con periodo  $r$  toma únicamente valores reales, entonces su transformada discreta de Fourier toma únicamente valores reales.

*Demostración.* Sea  $k \in \mathbb{Z}$  arbitrario. Nótese que  $W_r^{(r-n)k} = W_r^{rk-nk} = W_r^{-nk} = \overline{W_r^{nk}}$ . Luego, su transformada discreta de Fourier es

$$\begin{aligned} X[k] &= \sum_{n=1}^r x[n] W_r^{nk} = \sum_{n=1}^r x[r-n] \overline{W_r^{(r-n)k}} = \overline{\sum_{n=1}^r x[r-n] W_r^{(r-n)k}} \\ &= \overline{\sum_{n=1}^r x[r] W_r^{rk} = \overline{X[k]}}, \end{aligned}$$

donde la segunda igualdad se cumple por la observación anterior y por la simetría de  $x$ , la tercera por tomar  $x$  únicamente valores reales y la cuarta reindexando y usando que  $x$  es periódica con periodo  $r$ . Luego  $X[k]$  es un complejo igual a su conjugado, para cada  $k \in \mathbb{Z}$ , es decir  $X[k]$  es real, para cada  $k \in \mathbb{Z}$ . ■

**Definición 3.4.** (Señal par). Una señal par módulo  $r$  es una función  $x : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{C}$  tal que  $x[n] = x[(n, r)]$ ,  $\forall n \in \mathbb{Z}$ . Son una generalización de las funciones aritméticas pares, definición 2.1.

Toda señal par módulo es periódica con periodo  $r$  y simétrica módulo  $r$ . La demostración de lo primero es idéntica a la de la Proposición 2.1.

**Proposición 3.2.** *Cualquier señal  $x$  par módulo  $r$  es simétrica módulo  $r$ .*

*Demostración.* Si  $n \in \mathbb{Z}$ , se tiene  $x[n] = x[(n, r)] = x[(-n, r)] = x[(r - n, r)] = x[r - n]$ . ■

Las señales pares son mucho más restrictivas que las periódicas y las simétricas en cuanto al número de valores que pueden tomar y en general toman pocos valores. Específicamente, la cardinalidad de la imagen de una señal par módulo  $r$  no puede exceder  $d(r)$ .

**Proposición 3.3.** *Si  $x : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{C}$  es una señal par módulo  $r$ , entonces  $|x(Z)| \leq d(r)$ , donde  $d(r)$  es el número de divisores de  $r$ .*

*Demostración.* Para cada divisor positivo  $d$  de  $r$ , sea

$$S_d = \left\{ \left( \frac{r}{d} \right) \alpha : (\alpha, d) = 1, 1 \leq \alpha \leq d \right\}.$$

Por el Teorema 1.7 se tiene que  $\bigcup_{d|r} S_d = \{1, 2, \dots, r\}$ .

Además, si  $(r/d)\alpha \in S_d$  entonces

$$\left( \left( \frac{r}{d} \right) \alpha, r \right) = \left( \left( \frac{r}{d} \right), r \right) = \frac{r}{d}, \quad (3.5)$$

pues  $(\alpha, d) = 1$  y  $d \mid r$ . Más aún, si  $x$  es par y  $n, m \in S_e$  entonces  $x[n] = x[m]$ . En efecto, se debe tener que  $n = (r/d)\alpha$  y  $m = (r/d)\beta$  con  $(\alpha, d) = (\beta, d) = 1$  y  $1 \leq \alpha, \beta \leq d$ . Luego, como  $x$  es par,

$$x[n] = x \left[ \frac{r}{d} \alpha \right] = x \left[ \left( \frac{r}{d} \alpha, r \right) \right] = x \left[ \frac{r}{d} \right]$$

y

$$x[m] = x \left[ \frac{r}{d} \beta \right] = x \left[ \left( \frac{r}{d} \beta, r \right) \right] = x \left[ \frac{r}{d} \right],$$

por tanto  $x[n] = x[m]$ . Como  $x$  es periódica con periodo  $r$ , hace falta conocer sus valores únicamente en los enteros  $1, \dots, r$ . Así,

$$\{x[1], \dots, x[r]\} = \bigcup_{d|r} \left\{ x \left[ \left( \frac{r}{d} \right) \alpha \right] : (\alpha, d) = 1, 1 \leq \alpha \leq d \right\} = \bigcup_{d|r} \{x[r/d]\},$$

donde el último conjunto tiene a lo sumo  $d(r)$  elementos. ■

Los conjuntos  $S_d$  de la proposición anterior se llaman *sistemas de residuos* de los divisores  $d$  de  $r$  [18]. Al igual que con las sumas de Ramanujan, cada señal par se puede expresar como combinación lineal de señales indicadoras sobre los sistemas de residuos.

**Definición 3.5.** Si  $d$  es un divisor de  $r$ , se define  $h_{r,d} : \{1, \dots, r\} \longrightarrow \mathbb{C}$  como

$$h_{r,d}[n] = \begin{cases} 1 & \text{si } n \in S_d \\ 0 & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

**Proposición 3.4.** Para cada  $n \in \{1, 2, \dots, r\}$  se tiene  $h_{r,d}[n] = h_{r,d}[(n, r)]$ .

*Demostración.* Sea  $d$  un divisor positivo de  $r$  y sea  $n \in \{1, 2, \dots, r\}$ . Basta probar que  $n \in S_d$  si y sólo si  $(n, r) \in S_d$ .

Si  $n \in S_d$ , entonces  $n = (r/d)x$  con  $(x, d) = 1$  y  $1 \leq x \leq d$ . Además, como  $(n, r) \mid n$  y  $(n, r) \mid r$ , existen  $a, b \in \mathbb{N}$  tales que  $n = (n, r)a$  y  $r = (n, r)b$ . Luego  $(n, r)a = (r/d)x$  y por tanto  $(n, r)ad = (n, r)bx$ , así que  $ad = bx$ . Dado que  $(a, b) = (n/(n, r), r/(n, r)) = 1$  y  $a \mid bx$ , entonces  $a \mid x$  y por tanto  $x = aq$ , para algún  $q \in \mathbb{N}$ . Se sigue que  $(n, r) = (r/d)q$  y además  $1 \leq q \leq aq = x \leq d$ . Luego  $(n, r) \in S_d$ .

Recíprocamente, si  $(n, r) \in S_d$ , escribáse  $(n, r) = (r/d)y$  con  $(y, d) = 1$  y  $1 \leq y \leq d$ . Como  $(n, r) \mid r$  entonces  $(r/d)y \mid r$ , luego  $r = (r/d)yq$  para algún  $q \in \mathbb{N}$  y por tanto  $rd = ryq$ , así que  $d = yq$ , es decir  $y \mid d$ . Se debe tener por tanto que  $y = (y, d) = 1$ , luego  $(n, r) = (r/d)$  y como  $n = (n, r)a$  para algún  $a \in \mathbb{N}$ , entonces  $n = (r/d)a$ . Además, como  $n \leq r$ , entonces  $(r/d)a \leq r$ , luego  $ra \leq rd$ , es decir,  $1 \leq a \leq d$  y por tanto  $n \in S_d$ . ■

Las funciones  $h_{r,d}$  se pueden extender de forma natural a una función simétrica a todo  $\mathbb{Z}$  definiendo  $h_{r,d}[n] = h_{r,d}[(n, r)]$  para cada  $n \in \mathbb{Z}$  y abusando de la notación se le seguirá denotando  $h_{r,d}$ . Sin embargo, en lo que sigue será suficiente considerar únicamente su restricción a  $\{1, 2, \dots, r\}$ .

**Proposición 3.5.** Cualquier señal par  $x$  módulo  $r$  se puede escribir como

$$x[n] = \sum_{d \mid r} x \left[ \frac{r}{d} \right] h_{r,d}[n], \quad (3.6)$$

para todo  $n \in \mathbb{Z}$ .

*Demostración.* Sin pérdida de generalidad supóngase que  $n \in \{1, 2, \dots, r\}$ . Entonces existe un único  $e \mid r$  tal que  $n \in S_e$ , es decir, tal que  $n = (r/e)\alpha$ , con  $(e, \alpha) = 1$  y

$1 \leq \alpha \leq e$ . Luego

$$\begin{aligned} \sum_{d|r} x \left[ \frac{r}{d} \right] h_{r,d}[n] &= \sum_{\substack{d|r \\ n \in S_d}} x \left[ \frac{r}{d} \right] = x \left[ \frac{r}{e} \right] = x \left[ \left( \frac{r}{e}, r \right) \right] \\ &= x \left[ \left( \frac{r}{e} \alpha, r \right) \right] = x[(n, r)] = x[n] \end{aligned}$$

por (3.5) y por ser  $x$  par. ■

La siguiente proposición muestra que las sumas de Ramanujan aparecen naturalmente como los coeficientes de Fourier clásicos en la fórmula de síntesis (3.4) para las señales  $h_{r,d}$ .

**Proposición 3.6.** *Los coeficientes de Fourier de la señal  $h_{r,d}$  están dados por*

$$H_{r,d}[k] = c_d[k].$$

donde  $c_d$  es la suma de Ramanujan módulo  $d$ .

*Demostración.* Utilizando (3.1) para calcular los coeficientes de  $h_{r,d}$  en (3.4), se tiene que:

$$\begin{aligned} H_{r,d}[k] &= \sum_{n=1}^r h_{r,d}(n) W_r^{nk} = \sum_{\substack{n=1 \\ n \in S_d}}^r W_r^{nk} = \sum_{\substack{n=1 \\ n=(r/d)x \\ 1 \leq x \leq d \\ (x,d)=1}}^r W_r^{nk} \\ &= \sum_{\substack{x=1 \\ (x,d)=1}}^d W_d^{xk} = \sum_{\substack{x=1 \\ (x,d)=1}}^d W_d^{-xk} = c_d[k], \quad (3.7) \end{aligned}$$

pues  $e^{-i(2\pi/r)nk} = e^{-i(2\pi/d)xk}$  si  $n = (r/d)x$ . ■

**Proposición 3.7.** *Si  $x$  es una señal par, sus coeficientes de Fourier discretos están dados por*

$$X[k] = \sum_{d|r} x \left[ \frac{r}{d} \right] c_d[k].$$

*Demostración.* Utilizando las ecuaciones (3.1), (3.6) y (3.7) se tiene que

$$\begin{aligned} X[k] &= \sum_{n=1}^r x[n] W_r^{nk} = \sum_{n=1}^r \sum_{d|r} x \left[ \frac{r}{d} \right] h_{r,d}[n] W_r^{nk} = \sum_{d|r} x \left[ \frac{r}{d} \right] \sum_{n=1}^r h_{r,d}[n] W_r^{nk} \\ &= \sum_{d|r} x \left[ \frac{r}{d} \right] H_{r,d}[k] = \sum_{d|r} x \left[ \frac{r}{d} \right] c_d[k]. \end{aligned}$$
■

*Observación 3.2.* Dado que  $c_d[k] = c_d[(k, d)]$ , la proposición anterior implica que la transformada discreta de Fourier de una señal par módulo  $r$  también es par módulo  $r$ . Además tal ecuación define una extensión natural de  $c_d$  a todo  $\mathbb{Z}$ .

**Proposición 3.8.** Si  $x$  es una señal par módulo  $r$ , entonces

$$x[n] = \frac{1}{r} \sum_{d|r} X\left[\frac{r}{d}\right] c_d[n], \forall n \in \mathbb{Z}.$$

*Demostración.* Considere la transformada de Fourier discreta  $X$  de  $x$ . Dado que  $X$  también es par módulo  $r$ , la proposición 3.5 implica que

$$X[n] = \sum_{d|r} x\left[\frac{r}{d}\right] h_{r,d}[n], \forall n \in \mathbb{Z},$$

luego, usando la fórmula de reconstrucción (3.4), se tiene

$$\begin{aligned} x[n] &= \frac{1}{r} \sum_{k=1}^r X[k] W_r^{-nk} = \frac{1}{r} \sum_{k=1}^r \sum_{d|r} X\left[\frac{r}{d}\right] h_{r,d}[k] W_r^{-nk} \\ &= \frac{1}{r} \sum_{d|r} X\left[\frac{r}{d}\right] \sum_{k=1}^r h_{r,d}[k] W_r^{-nk} = \frac{1}{r} \sum_{d|r} X\left[\frac{r}{d}\right] c_d[n], \end{aligned}$$

para todo  $n \in \mathbb{Z}$ . ■

### 3.3. Aplicaciones

*Ejemplo 3.1.* Como ejemplo concreto, considere una señal  $x$  arbitraria y simétrica módulo  $r = 10$ . Por la proposición 3.3,  $x$  puede tomar a lo sumo  $d(10) = 4$  valores y estos estarán agrupados en los sistemas de residuos de los divisores de 10.

Específicamente, se tiene  $S_1 = \{10\}$ ,  $S_2 = \{5\}$ ,  $S_5 = \{2, 4, 6, 8\}$ ,  $S_{10} = \{1, 3, 5, 7\}$ . Por tanto,  $x[2] = x[4] = x[6] = x[8]$  y  $x[1] = x[3] = x[5] = x[7]$ . Luego los coeficientes  $X[k]$ , dados por 3.7, son

$$\begin{aligned} X[1] &= X[3] = X[5] = X[7] = \sum_{d|10} x\left[\frac{10}{d}\right] c_d[1] = x[10] - x[5] - x[2] + x[1] \\ X[2] &= X[4] = X[6] = X[8] = \sum_{d|10} x\left[\frac{10}{d}\right] c_d[2] = x[10] + x[5] - x[2] - x[1] \end{aligned}$$

$$X[5] = \sum_{d|10} x \left[ \frac{10}{d} \right] c_d[5] = x[10] - x[5] + 4x[2] - 4x[1]$$

$$X[10] = \sum_{d|10} x \left[ \frac{10}{d} \right] c_d[10] = x[10] + x[5] + 4x[2] + 4x[1].$$

El cálculo de estos coeficientes se reduce entonces a calcular  $c_d[k]$  para cada  $d \mid r$  y  $k \mid r$ . A diferencia de la transformada discreta de Fourier clásica, éstos cálculos no requieren la implementación de las funciones sin y cos. Las sumas de Ramanujan se puede implementar o bien usando la Proposición 2.3, implementando sólo la función de Möbius, una una suma condicional y el máximo común divisor, o bien utilizando la fórmula cerrada sin sumatorias 2.5 (fórmula de Hölder), pero implementando la función de Möbius, la función  $\varphi$  de Euler y el máximo común divisor.

*Ejemplo 3.2.* Suponga que se quiere obtener una señal simétrica  $x$  módulo 3 tal que  $x[1] = x[2] = 1$  y  $x[3] = 3$ . Calculando sus coeficientes de Fourier, se tiene

$$X[1] = X[2] = \sum_{d|3} x \left[ \frac{3}{d} \right] c_d[1] = x[3] - x[1] = 2$$

$$X[2] = \sum_{d|3} x \left[ \frac{3}{d} \right] c_d[3] = x[3] + 2x[1] = 5.$$

Utilizando la fórmula de reconstrucción, se puede escribir

$$x[n] = \frac{1}{3} \sum_{d|3} X \left[ \frac{3}{d} \right] c_d[n] = \frac{1}{3} (5c_1[n] + 2c_3[n]), \forall n \in \mathbb{Z}.$$

Se puede calcular también su transformada discreta de Fourier usando la proposición 3.7 para todo entero  $k$ ,

$$X[k] = \sum_{d|3} x \left[ \frac{3}{d} \right] c_d[k] = 3c_1[k] + c_3[k], \forall k \in \mathbb{Z}.$$

La gráfica de esta señal se muestra en la Figura 2.

De acuerdo a la Proposición 3.1, como  $x$  sólo toma valores reales entonces  $X$  sólo toma valores reales. Se puede observar en la Figura 2 que  $X[1] = X[2] = 2$  y  $X[3] = 5$ . Calculando la transformada de forma clásica usando la fórmula (3.1), se tiene

$$X[1] = \sum_{n=1}^3 x[n] W_3^{n \cdot 1} = x[1] e^{-j(2\pi/3) \cdot 1} + x[2] e^{-j(2\pi/3) \cdot 2} + x[3] e^{-j(2\pi/3) \cdot 3}$$



$$= \left(-\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i\right) + \left(-\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i\right) + 3 = -1 + 3 = 2$$

$$\begin{aligned} X[2] &= \sum_{n=1}^3 x[n] W_3^{n \cdot 2} = x[1] e^{-j(2\pi/3) \cdot 2} + x[2] e^{-j(2\pi/3) \cdot 4} + x[3] e^{-j(2\pi/3) \cdot 6} \\ &= \left(-\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i\right) + \left(-\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i\right) + 3 = -1 + 3 = 2 \end{aligned}$$

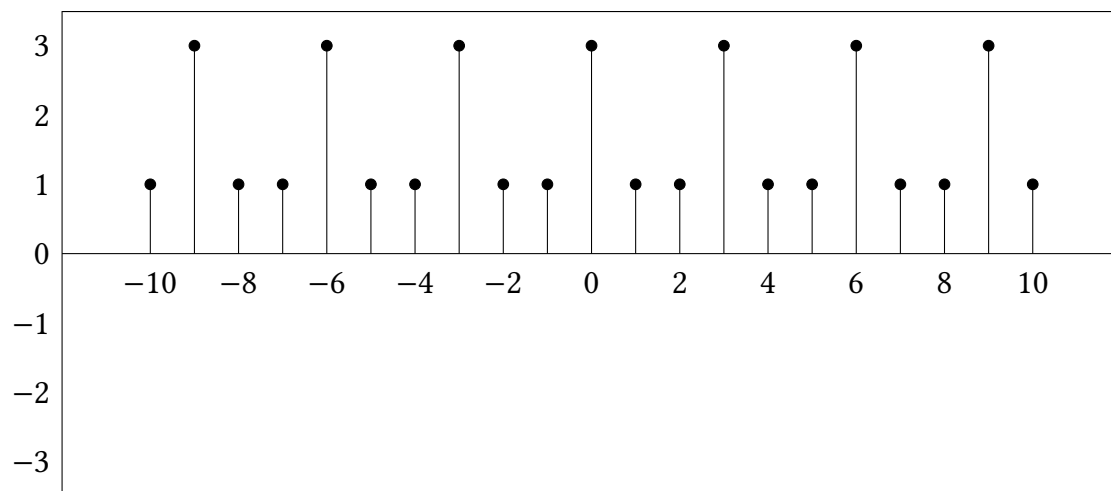
$$\begin{aligned} X[1] &= \sum_{n=1}^3 x[n] W_3^{n \cdot 1} = x[1] e^{-j(2\pi/3) \cdot 1} + x[2] e^{-j(2\pi/3) \cdot 2} + x[3] e^{-j(2\pi/3) \cdot 3} \\ &= 1 + 1 + 3 = 5 \end{aligned}$$

*Ejemplo 3.3.* En las Figuras 3, 4, 5 y 6, se muestran las gráficas de las sumas de Ramanujan  $c_3$  y  $c_6$ , con sus respectivas transformadas discretas de Fourier dadas por

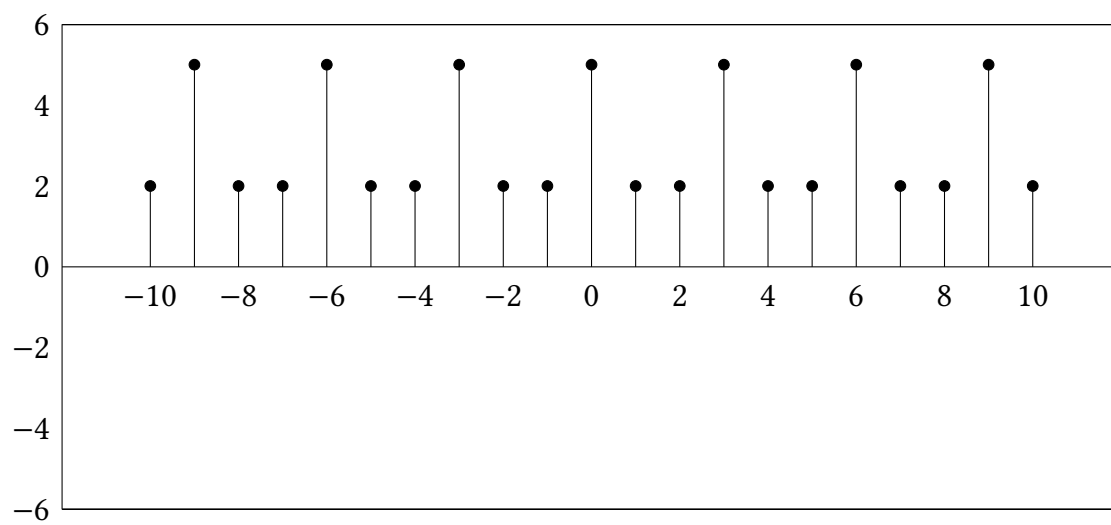
$$C_3[k] = 2c_1[k] - c_3[k], \forall k \in \mathbb{Z},$$

$$C_6[k] = 2c_1[k] - 2c_2[k] - c_3[k] + c_6[k], \forall k \in \mathbb{Z},$$

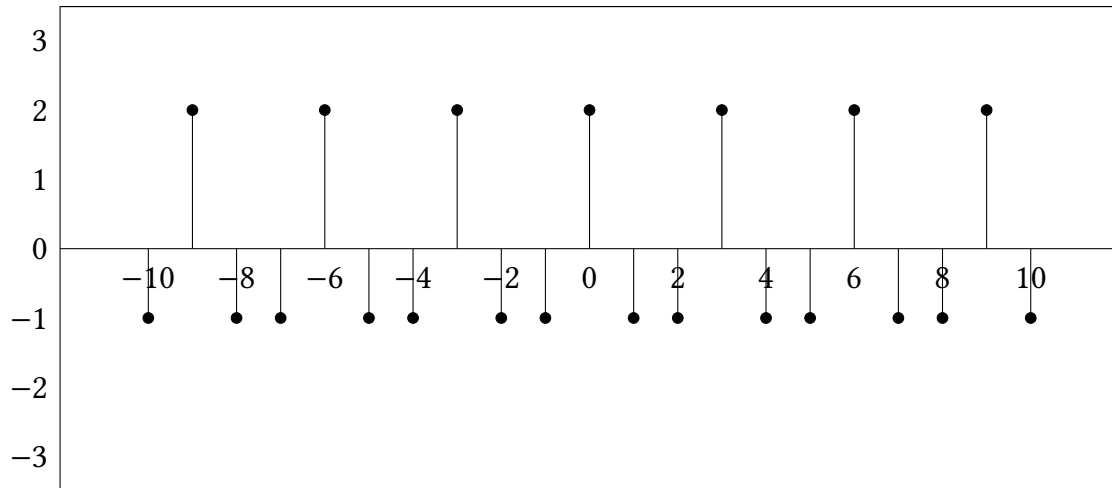
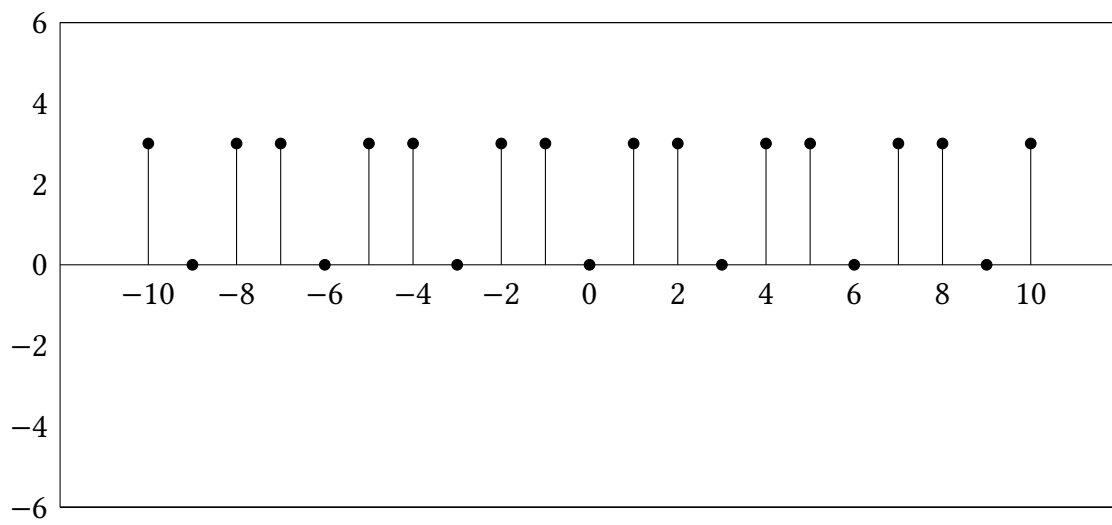
respectivamente. El código para generar estas gráficas se encuentra en el Apéndice B.

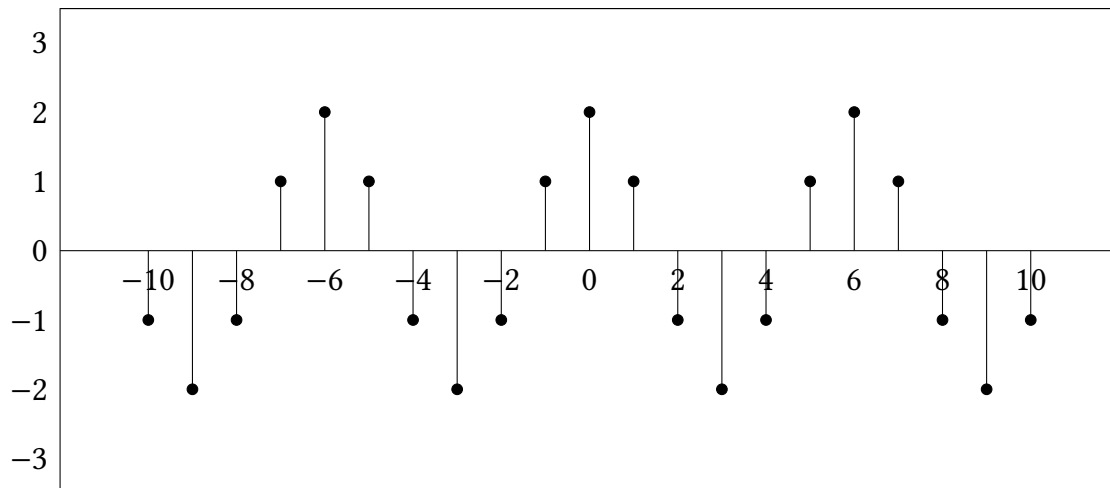


**Figura 1:**  $x[n] = \frac{1}{3}(5c_1[n] + 2c_3[n])$

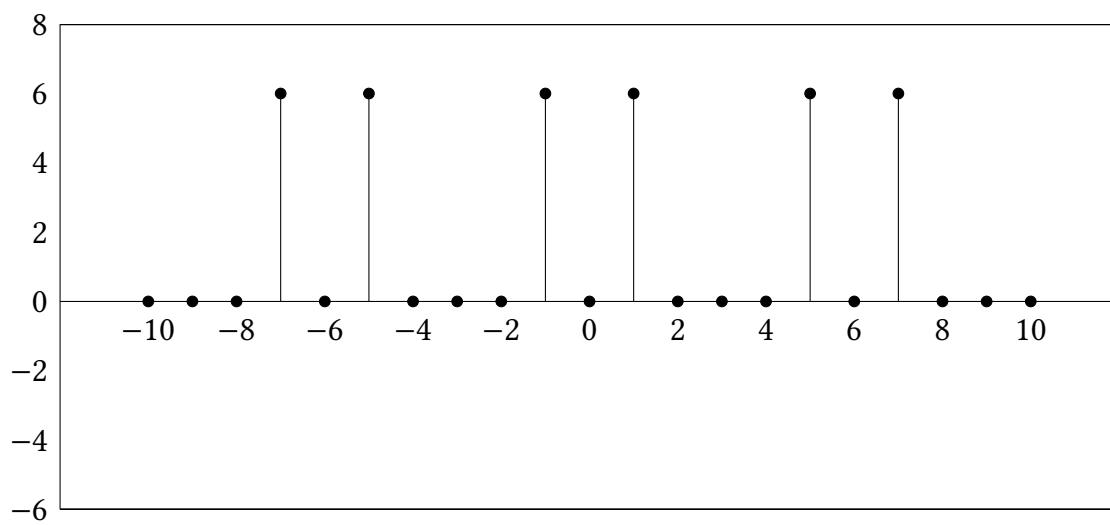


**Figura 2:**  $X[n] = 3c_1[k] + c_3[k]$

**Figura 3:**  $c_3[k]$ **Figura 4:**  $C_3[k] = 2c_1[k] - c_3[k]$



**Figura 5:**  $c_6[k]$



**Figura 6:**  $C_6[k] = 2c_1[k] - 2c_2[k] - c_3[k] + c_6[k]$

## A. Divisibilidad

**Proposición A.1.** Si  $r \in \mathbb{N}$ ,  $r = eq_1$ ,  $r = dq_2$ ,  $d = (q_1, d)k_1$  y  $e = (q_2, e)k_2$  entonces  $k_1 = k_2$ .

*Demostración.* Nótese que  $q_1, q_2$  enteros positivos, además  $(q_1q_2, r) = (q_1q_2, r)$ , luego  $(q_1q_2, eq_1) = (q_1q_2, dq_2)$  y por tanto  $q_1(q_2, e) = q_2(q_1, d)$  por la proposición anterior. Luego, dado que  $r = (q_2, e)k_2q_1 = (q_1, d)k_1q_2$ , la ley de cancelación implica que  $k_1 = k_2$ . ■

**Corolario A.1.** Si  $r \in \mathbb{N}$ ,  $e \mid r$  y  $d \mid r$  con  $e, r \in \mathbb{N}$ , entonces

$$d/(r/e, d) = e/(r/d, e).$$

**Teorema A.1** (Lema de Euclides). Si  $a \mid bc$  y  $(a, b) = 1$  entonces  $a \mid c$ .

*Demostración.* Si  $(a, b) = 1$ , podemos escribir  $1 = as + bt$ , donde  $s, t \in \mathbb{Z}$ . Luego  $c = a(sc) + bc(t)$  y como  $a \mid a$  y  $a \mid bc$  por hipótesis, entonces  $a \mid c$ . ■

## B. Código

El siguiente programa se utilizó para generar la Figura 6. El archivo ejecutable se usa como `./div [int1] [int2]`, donde `int1` e `int2` son el intervalo para la gráfica. El programa genera una tabla en formato `.csv` que puede ser leída por cualquier software de graficación.

```

1  #include <stdio.h>
2  #include <stdlib.h>
3  #include <math.h>
4
5  \\maximo comun divisor
6
7  int mcd(int a, int b) {
8      return b == 0 ? a > 0 ? a : -a : mcd(b, a % b);
9  }
10
11  \\suma sobre divisores
12
13  int dsum(int n) {
14      int sum=0;
15      for(int i=1; i<=n; i++)
16          if((n % i) == 0)
17              sum+=i;

```

```
18     return sum;
19 }
20
21 \\funcion de mobius
22
23 int mob(int n) {
24     int p=0;
25     if (n == 1) {
26         return 1;
27     }
28     if (n%2 == 0) {
29         n=n/2;
30         p++;
31         if (n % 2 == 0)
32             return 0;
33     }
34     for (int i=3; i <= n; i+=2) {
35         if (n%i == 0) {
36             n = n/i;
37             p++;
38             if (n % i == 0)
39                 return 0;
40         }
41     }
42     return (p % 2 == 0) ? 1 : -1;
43 }
44
45 \\suma de ramanujan modulo r
46
47 int ram(int r, int n) {
48     int sum=0;
49     int nr=mcd(n,r);
50     for(int d=1; d<=nr; d++)
51         if(nr % d == 0)
52             sum+=mob(r/d)*d;
53     return sum;
54 }
55
56 \\programa principal
57
58 int main(int argc, char** argv) {
59     FILE* div=fopen("div.csv", "w");
60
61     for(int j = atoi(argv[1]); j <= atoi(argv[2]); j++)
62         fprintf(div, "%d, %1.5f\n", j, 2.0*ram(1,j) - 2.0*
63             ram(2,j) - 1.0*ram(3,j) + 1.0*ram(6,j));
64     fclose(div);
```

```
64     return 0;  
65 }
```

Por ejemplo, al ejecutar `./div -10 10` para la Figura 6, el programa generó el siguiente archivo llamado `div.csv`.

```
-10, 0.00000  
-9, 0.00000  
-8, 0.00000  
-7, 6.00000  
-6, 0.00000  
-5, 6.00000  
-4, 0.00000  
-3, 0.00000  
-2, 0.00000  
-1, 6.00000  
0, 0.00000  
1, 6.00000  
2, 0.00000  
3, 0.00000  
4, 0.00000  
5, 6.00000  
6, 0.00000  
7, 6.00000  
8, 0.00000  
9, 0.00000  
10, 0.00000
```

## Bibliografia

- [1] APOSTOL, T. M. *Introduction to Analytic Number Theory*. Springer, 1976.
- [2] BELL, E. T. Arithmetic of logic. *Transactions of the American Mathematical Society* 29, 3 (1927), 597–611.
- [3] BELL, E. T. Outline of a theory of arithmetical functions in their algebraic aspects. *The Journal of the Indian Mathematical Society* 17 (1928), 249–260.
- [4] BRUALDI, R. A. *Introductory Combinatorics*, 3 ed. Prentice-Hall, 1999.
- [5] CASHWELL, E. D., AND EVERETT, C. J. The ring of number-theoretic functions. *Pacific Journal of Mathematics* 9, 4 (1959).
- [6] COHEN, E. A class of arithmetical functions. *Proceedings of the National Academy of Sciences of the United States of America* 41, 11 (1955).
- [7] DICKSON, L. E. *History of the Theory of Numbers*, vol. I. Chelsea Publishing Company, 1952.
- [8] GAUSS, C. F. *Disquisitiones Arithmeticae*, english ed. Springer-Verlag, 1966.
- [9] HARDY, G. H., AND WRIGHT, E. M. *An Introduction to the Theory of Numbers*, 5 ed. Oxford University Press, 1979.
- [10] HUNGERFORD, T. W. *Algebra*. Springer, 1974.
- [11] KNOPFMACHER, J. *Abstract Analytic Number Theory*, vol. 12. North-Holland Publishing Company, 1975.
- [12] KNOPFMACHER, J. Fourier analysis of arithmetical functions. *Annali di Matematica Pura ed Applicata* 109 (1976), 177–201.
- [13] MURTY, M. R. Ramanujan series for arithmetical functions. *Hardy-Ramanujan Journal* 36 (2013).
- [14] NISHIMURA, H. On the unique factorization theorem for formal power series. *Journal of Mathematical Sciences, Kyoto Univ.* (1967).
- [15] PRANDONI, P., AND VETTERLI, M. *Signal processing for communications*, 1 ed. EPFL Press, 2008.



- [16] RAMANUJAN, S. On certain trigonometric sums and their applications in the theory of numbers. *Transactions of the Cambridge Phil. Society* 22 (1918), 179–199.
- [17] REARICK, D. F. Operators on algebras of arithmetic functions. *Duke Mathematical Journal* 35 (1968), 761–766.
- [18] SAMADI, S., AHMAD, M., AND SWAMY, M. Ramanujan sums and discrete Fourier transforms. *IEEE Signal Processing Letters* 12, 4 (2005), 293–296.
- [19] ZALDÍVAR, F. *Introducción a la teoría de números*, 1 ed. Fondo de Cultura Económica, 2014.

$$e^{i\pi} + 1 = 0$$