1. Funciones pares

Al estudiar el espacio de funciones aritméticas se puede hacer una analogía con la teoría de Fourier del análisis para funciones definidas en todo el plano real o complejo, para la cuál se necesitará la noción de periodicidad. En este capítulo se considerará una clase de funciones aritméticas que captura esta noción. También se expondran resultados análogos a los de análisis respecto a funciones periódicas. Estos resultados se puede encontrar en [6].

Observación 1.1. Durante todo el capítulo se supondrá que r es un entero positivo arbitrario pero fijo.

Definición 1.1. (Función par)**.** Una función aritmética se dice **par** $\operatorname{mód} r$ si $f(n) = f((n,r))$, donde (m,r) es el máximo común divisor de n y r, para cada $n \in \mathbb{N}$.

Definición 1.2. (Función periódica)**.** Una función aritmética se dice **periódica** con periodo r (o periódica $\operatorname{mód} r$) si $m, n \in \mathbb{N}$ y $m \equiv n \pmod{r}$ implica que $f(m) = f(n)$.

La siguiente proposición es una consecuencia inmediata de las definiciones anteriores.

Proposición 1.1. *Toda función par* $\operatorname{mód} r$ *es periódica con periodo* r*.*

Demostración. Si $m \equiv n \pmod{r}$ entonces $r \mid m - n$, por tanto existe $q \in \mathbb{Z}$ tal que $m - n = qr$. Por demostrar que $(n,r) = (m,r)$. En efecto, como $(n,r) \mid n$ y $(n,r) \mid r$, entonces $(n,r) \mid n + qr = m$, luego $(n,r) \mid (m,r)$. Análogamente, se tiene que $(m,r) \mid (n,r)$. Se sigue que $(n,r) = (m,r)$ y por tanto $f(n) = f((n,r)) = f((m,r)) = f(m)$. ■

1.1. Sumas de Ramanujan

En 1918, Ramanujan publicó el artículo [15], que contiene varias fórmulas notables expresando algunas funciones sobre $\mathbb{N}$ como el límite puntual de ciertas series trigonométricas. Por ejemplo, probó que

$$\begin{aligned}\frac{\sigma(n)}{n} = \frac{\pi^2}{6}\Bigg(1 &+ \frac{(-1)^n}{2^2} + \frac{2\cos\left(\frac{2}{3}\pi n\right)}{3^2} + \frac{2\cos\left(\frac{1}{2}\pi n\right)}{4^2} \\ &+ \frac{2\left[\cos\left(\frac{2}{5}\pi n\right) + \cos\left(\frac{4}{5}\pi n\right)\right]}{5^2} + \frac{2\cos\left(\frac{1}{3}\pi n\right)}{6^2} + \cdots\Bigg),\end{aligned}$$

o escrito de otra manera,

$$\frac{\sigma(n)}{n} = \frac{\pi^2}{6}\sum_{r=1}^{\infty}\frac{c_r(n)}{r^2},$$

donde

$$c_r(n) = \sum_{\substack{a=1\\(a,r)=1}}^{r} \cos\left(\frac{2\pi}{r}an\right).$$

Estas sumas son conocidas como sumas de Ramanujan. El valor $c_r(n)$ es de hecho la suma de las n-ésimas potencias de las raíces primitivas de la unidad.

Proposición 1.2. *Para toda $n \in \mathbb{N}$ se tiene que*

$$c_r(n) = \sum_{\substack{a=1\\(a,r)=1}}^{r} e^{i(2\pi/r)an},$$

donde i es la unidad imaginaria.

Demostración. En efecto,

$$\sum_{\substack{a=1\\(a,r)=1}}^{r} e^{i(2\pi/r)an} = \sum_{\substack{a=1\\(a,r)=1}}^{r} \cos\left(\frac{2\pi}{r}an\right) + i\sum_{\substack{a=1\\(a,r)=1}}^{r} \sin\left(\frac{2\pi}{r}an\right).$$

Pero $(a,r)=1$ si y sólo si $(a-r,r)=1$. Además, si $1 \leq a \leq r-1$ entonces $1 \leq r-a \leq r-1$, por tanto

$$\begin{aligned}\sum_{\substack{a=1\\(a,r)=1}}^{r} \sin\left(\frac{2\pi}{r}an\right) = \sum_{\substack{a=1\\(r-a,r)=1}}^{r} \sin\left(\frac{2\pi}{r}(r-a)n\right) &= \sum_{\substack{a=1\\(r-a)=1}}^{r} -\sin\left(\frac{2\pi}{r}an\right)\\ &= -\sum_{\substack{a=1\\(a,r)=1}}^{r} \sin\left(\frac{2\pi}{r}an\right).\end{aligned}$$

Se sigue que la parte imaginaria de la suma original se anula y se tiene la igualdad deseada. ■

En el siguiente capítulo se verá que esta expresión aparece de forma natural al calcular los coeficientes de Fourier clásicos de cierta función aritmética.

Proposición 1.3. *Para toda $n \in \mathbb{N}$ se tiene que*

$$c_r(n) = \sum_{d|(n,r)} \mu\left(\frac{r}{d}\right)d.$$

Demostración. Por la proposición ?? se tiene que la suma $\sum_{d|k} \mu(d)$ es igual a 1 si $k = 1$ e igual a 0 en otro caso, luego por la proposición anterior,

$$\sum_{\substack{a=1 \\ (a,r)=1}}^{r} e^{i(2\pi/r)an} = \sum_{a=1}^{r} e^{i(2\pi/r)an} \left(\sum_{d|(a,r)} \mu(d) \right) = \sum_{\substack{d|a \\ d|r}} \sum_{a=1}^{r} \mu(d) e^{i(2\pi/r)an}$$

$$= \sum_{d|r} \mu(d) \sum_{\substack{d|a \\ 1\leq a\leq r}} e^{i(2\pi/r)an} = \sum_{d|r} \mu(d) \sum_{b=1}^{r/d} e^{i(2\pi/(r/d))bn}$$

El valor de la suma interior depende de si r/d divide a n o no. Si lo hace, cada uno de sus términos es igual a 1 y por tanto la suma vale r/d. Si este no es el caso se puede sumar,

$$\sum_{b=1}^{r/d} e^{i(2\pi/(r/d))bn} = \frac{e^{i(2\pi/r)/(r/d)}(e^{i(2\pi n)} - 1)}{e^{i(2\pi/r)/(r/d)} - 1} = 0,$$

pues el denominador no se anula. Luego

$$c_r(n) = \sum_{\substack{a=1 \\ (a,r)=1}}^{r} e^{i(2\pi/r)an} = \sum_{d|r} \mu(d) \begin{cases} r/d & \text{si } r/d \mid n \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases} = \sum_{\substack{d|q \\ (r/d)|n}} \mu(d)(r/d)$$

$$= \sum_{\substack{d|r \\ d|n}} \mu\left(\frac{r}{d}\right) d = \sum_{d|(n,r)} \mu\left(\frac{r}{d}\right) d.$$

■

En lo que sigue de este capítulo se trabajará exclusivamente con ésta última representación de c_r y se le referirá como *suma de Ramanujan módulo r* o simplemete *suma de Ramanujan* cuando no haya riesgo de confusión.

Proposición 1.4. *Algunas propiedades de la sumas de Ramanujan son las siguientes:*

(1) $c_1 = \mathbf{1}$

(2) $c_r(1) = \mu(r)$

(3) $c_r(n) \leq \text{máx}\{\sigma(r), \sigma(n)\}$

(4) $c_r(n)$ *es una función multiplicativa de r*

(5) *Si p es primo y m es un entero positivo, entonces*

$$c_{p^m}(n) = \begin{cases} p^m - p^{m-1} & \text{si } p^m \mid n \\ -p^{m-1} & \text{si } p^{m-1} \text{ pero } p^m \nmid n \\ 0 & \text{si } p^{m-1} \nmid n. \end{cases}$$

Demostración. (1) Para cada $n \in \mathbb{N}$ se tiene que $(n,1) = 1$ y por tanto

$$c_1(n) = \sum_{d|(n,1)} \mu\left(\frac{1}{d}\right) d = \mu(1)1 = 1.$$

(2) De manera similar,

$$c_r(1) = \sum_{d|(1,r)} \mu\left(\frac{r}{d}\right) d = \mu(r)1 = \mu(r).$$

(3) Por definición se tiene que $\sigma(k) = \sum_{d|k} d$. Además $\mu(k) \leq 1$ para todo $k \in \mathbb{N}$, luego

$$c_r(n) = \sum_{d|(n,r)} \mu\left(\frac{r}{d}\right) d \leq \sum_{d|(n,r)} d = \sum_{\substack{d|n \\ d|r}} d \leq \sum_{d|n} d, \sum_{d|r} d \leq \text{máx}\{\sigma(n), \sigma(r)\}.$$

(4) Defínase

$$\eta_r(n) = \begin{cases} r & \text{si } r \mid n \\ 0 & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

Se tiene que la función $\eta_\square(n)$ es multiplicativa para n fijo. En efecto, si $r, s \in \mathbb{N}$ son tales que $(r,s) = 1$, entonces

$$\eta_{rs}(n) = \begin{cases} rs & \text{si } rs \mid n \\ 0 & \text{en otro caso,} \end{cases}$$

pero $rs \mid n$ si y sólo si $r \mid n$ y $s \mid n$. En efecto, si $rs \mid n$ es claro que $r \mid n$ y $s \mid n$. Supóngase que $r \mid n$ y $s \mid n$, de tal manera que existen $q_1, q_2 \in \mathbb{Z}$ tales que $n = rq_1 = sq_2$. Como $(r,s) = 1$, también existen $x, y \in \mathbb{Z}$ tales que $1 = rx + sy$, luego $n = nrx + nsy$, por lo que $n = rs(q_2 x + q_1 y)$, es decir, $rs \mid n$. Luego, si $rs \mid n$, entonces

$$\eta_{rs}(n) = rs = \eta_r(n)\eta_s(n),$$

y si $rs \nmid$ entonces $r \nmid n$ y $s \nmid n$, por lo que

$$\eta_{rs}(0) = 0 = \eta_r(n)\eta_s(n).$$

Por otro lado, se tiene que

$$\sum_{d|r} \mu\left(\frac{r}{d}\right)\eta_d(n) = \sum_{\substack{d|r\\ d|n}} \mu\left(\frac{r}{d}\right) d = \sum_{d|(n,r)} \mu\left(\frac{r}{d}\right) d = c_r(n),$$

es decir, $c_\square(n) = \mu * \eta_\square(n)$. Luego $c_\square(n)$ debe ser multiplicativa para n fijo, por ser producto de funciones multiplicativas.

(5) Tenemos los siguientes casos:

- Si $p^m \mid n$, entonces $(n, p^m) = p^m$, luego

$$c_{p^m}(n) = \sum_{d|p^m} \mu\left(\frac{p^m}{d}\right) d = \mu(1)p^m + \mu(p)p^{m-1} = p^m - p^{m-1},$$

pues $\mu(p^i) = 0$ para toda $i > 1$.

- Si $p^{m-1} \mid n$ pero $p^m \nmid n$, entonces $(n, p^m) = p^{m-1}$. En efecto, se tiene que $p^{m-1} \mid p^m$ y además $p^{m-1} \mid n$ por hipótesis. Si $e \in \mathbb{Z}$ es tal que $e \mid p^m$ y $e \mid n$, entonces $e = p^i$, para algún $0 \leq i \leq m-1$, pues $p^m \nmid n$, por tanto $e \mid p^{m-1}$. Esto prueba que $(p^m, n) = p^{m-1}$, así

$$c_{p^m}(n) = \sum_{d|p^{m-1}} \mu\left(\frac{p^m}{d}\right) d = \mu(p)p^{m-1} = -p^{m-1}$$

- Finalmente, si $p^{m-1} \nmid n$, entonces $p^m \nmid n$. Además, $(n, p^m) \mid p^m$, por tanto $(n, p^m) = p^i$ para algún $0 \leq i \leq m$. Más aún, por la hipótesis se debe tener que $0 \leq i \leq m-2$. Luego

$$c_{p^m}(n) = \sum_{d|p^i} \mu\left(\frac{p^m}{d}\right) d = \mu(p^m)1 + \mu(p^{m-1})p + \cdots + \mu(p^{m-i})p^i = 0,$$

pues $i \leq m-2$ implica que $2 \leq m-i$ y por tanto $\mu(p^m) = \ldots = \mu(p^{m-i}) = 0$.

■

Del la demostración del punto 4 se puede rescatar el siguiente corolario, usando la inversión de Möbius (**??**).

Corolario 1.1. *Para cada $n \in \mathbb{N}$ fijo se tiene*

$$\sum_{d|r} c_d(n) = \eta_r(n) = \begin{cases} r & \text{si } r \mid n \\ 0 & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

Otro corolario notable de la proposición anterior es el siguiente.

Corolario 1.2. *La suma de las raíces r-ésimas primitivas de la unidad es igual a $\mu(r)$.*

Demostración. Por el punto (2) de la proposición anterior, se tiene que

$$\sum_{\substack{a=1 \\ (a,r)=1}}^{r} e^{i(2\pi/r)a} = c_r(1) = \mu(r).$$

■

Las sumas de Ramanujan gozan de la siguiente propiedad de "ortogonalidad".

Lema 1.1. *Si r y s dividen a k, entonces*

$$\sum_{d|k} c_r(k/d) c_d(k/s) = \begin{cases} k & \text{si } r = s \\ 0 & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

Demostración. Si r y s dividen a k, entonces

$$\begin{aligned}
\sum_{d|k} c_r(k/d) c_d(k/s) &= \sum_{d|k} c_d(k/s) \sum_{d'|(k/d,r)} \mu(r/d')d' \\
&= \sum_{d|k} c_d(k/s) \sum_{\substack{d'|r \\ d'|k/d}} \mu(r/d')d' = \sum_{\substack{d|k \\ d'|r \\ d'|k/d}} c_d(k/s)\mu(r/d')d' \\
&= \sum_{\substack{d|k/d' \\ d'|r \\ d'|r}} c_d(k/s)\mu(r/d')d' = \sum_{\substack{d'|r \\ d'|k}} \mu(r/d')d' \sum_{d|k/d'} c_d(k/s) \\
&= \sum_{d'|(k,r)} \mu(r/d)d'\eta_{k/d'}(k/s) = \sum_{d'|r} \mu(r/d)d'\eta_{k/d'}(k/s),
\end{aligned} \tag{1.1}$$

dado que $(k,r) = r$ por ser r divisor de k y dado que los conjuntos $\{d, d' \in \mathbb{N} : d \mid k, d' \mid r, d' \mid k/d\}$ y $\{d, d' \in \mathbb{N} : d \mid k/d', d' \mid r, d' \mid k\}$ son iguales. En efecto, si $d \mid k$ entonces k/d es un entero, lueg $d' \mid k/d$ implica que $k/d = d'q'$, luego $k = d'q'd$, por tanto $d \mid k/d'$ y $d' \mid k$.

Recíprocamente, si $d' \mid k$ entonces k/d' es un entero, luego $d \mid k/d'$ implica que $k/d' = dq$, por tanto $k = dqd'$, por tanto $d \mid k$ y $d' \mid k/d$.

Si $s \nmid r$ entonces $s \nmid d'$ y por tanto $k/d' \nmid k/s$. En efecto, pues si $s \mid d'$, como $d' \mid r$ entonces se tendría que $s \mid r$ por transitividad. Además, si $k/d' \mid k/s$ se tendría que $s \mid d'k$. Luego la suma (1.1) se anula si $s \nmid r$ y en particular si $r \neq s$, pues en este caso se tiene que $\eta_{k/d'}(k/s) = 0$ para cada $d' \mid r$.

Si $s \mid r$ entonces la suma (1.1) es igual a

$$\begin{aligned}
\sum_{\substack{d'|r \\ k/d'|k/s}} \mu(r/d')d'\frac{k}{d'} &= \sum_{\substack{d'|r \\ k/d'|k/s}} \mu(r/d')k = \sum_{\substack{d'|r \\ s|d'}} \mu(r/d')k \\
&= k \sum_{\substack{d'|r \\ d'=se}} \mu(r/se) = k \sum_{e|r/s} \mu(r/se) \\
&= k \sum_{se|r} \mu(r/se) = \begin{cases} k & \text{si } r = s \\ 0 & \text{en otro caso,} \end{cases}
\end{aligned}$$

pues $k/d' \mid k/s$ si y sólo si $s \mid d'$. ■

Corolario 1.3. *Las sumas de Ramanujan son linealmente independientes respecto a la suma sobre los divisores de r. Más específicamente, si α, β son funciones aritméticas tales que*

$$\sum_{d|r} \alpha(d)c_d(n) = \sum_{d|r} \beta(d)c_d(n),$$

para todo $n \in \mathbb{N}$, entonces $\alpha(d) = \beta(d)$ para todo $d \mid r$.

Demostración. Basta probar que $\sum_{d|r} \alpha(d)c_d(n) = 0$ implica que $\alpha(d) = 0$ para todo $d \mid r$. Supóngase la hipótesis y sea $\delta \mid r$ arbitrario pero fijo. Si e es un divisor de r, se tiene que $\sum_{d|r} \alpha(d)c_d(r/e) = 0$, luego

$$0 = \sum_{e|r} \left(\sum_{d|r} \alpha(d)c_d\left(\frac{r}{e}\right) \right) c_e\left(\frac{r}{\delta}\right) = \sum_{d|r} \alpha(d) \sum_{e|r} c_d\left(\frac{r}{e}\right) c_e\left(\frac{r}{\delta}\right) = \alpha(\delta)r,$$

por el la proposición anterior, y dado que $r \neq 0$ entonces $\alpha(\delta) = 0$. Como δ fue un divisor arbitrario de r, se tiene el resultado. ■

Lema 1.2. *Si $d \mid r$ entonces $c_d(n) = c_d((n,r))$.*

Demostración. Si $d \mid r$ entonces $(n,d) = ((n,r),d)$. En efecto, dado que $(n,d) \mid n$ y $(n,d) \mid d$, entonces $(n,d) \mid n$, $(n,d) \mid d$ y $(n,d) \mid r$, por lo que $(n,d) \mid (n,r)$ y $(n,d) \mid d$, es decir, $(n,d) \mid ((n,r),d)$. Recíprocamente se tiene que $((n,r),d) \mid n$ y $((n,r),d) \mid d$, así que $((n,r),d) \mid (n,d)$. Se sigue que $(n,d) = ((n,r),d)$. Luego

$$c_d(n) = \sum_{e|(n,d)} \mu(d/e)e = \sum_{e|((n,r),d)} \mu(d/e)e = c_d((n,r)).$$

■

Corolario 1.4. *La suma de Ramanujan módulo r es par* mód r.

Definición 1.3. (Radical). Sea $n \in \mathbb{N}$. Se define el *radical* de n, denotado por n_* como

$$n_* = \begin{cases} 1 & \text{si } n = 1 \\ p_1 \cdots p_r & \text{si } n = p_1^{\alpha_1} \cdots p_r^{\alpha_r} \end{cases}$$

donde $n = p_1^{\alpha_1} \cdots p_r^{\alpha_r}$ es la factorización de $n > 1$ en primos.

Definición 1.4. Una función aritmética f se dirá *separable* si $f(n) = f(n_*)$, para cada $n \in \mathbb{N}$.

Lema 1.3. *Una función multiplicativa es separable si y sólo si $(\mu * f)(n) = 0$ para todo n no libre de cuadrado.*

Demostración. Sea $F = \mu * f$. Entonces $F * \mathbf{1} = f$, es decir,

$$\sum_{d|n} F(d) = f(n), \forall\, n \in \mathbb{N}.$$

Si $F(n) = 0$ para cada n no libre de cuadrado, entonces

$$f(n) = \sum_{d|n} F(d) = \sum_{d|n_*} F(d) = f(n_*),$$

es decir, f es separable.

Supóngase ahora que f es separable. Se tiene que para cada primo p y para cada $m > 1$,

$$\begin{aligned} F(p^m) = \sum_{d|p^m} \mu(d) f\left(\frac{p^m}{d}\right) &= \mu(1)f(p^m) + \mu(p)f(p^{m-1}) \\ &= f(p^m) - f(p^{m-1}) = f(p) - f(p) = 0. \end{aligned}$$

Además como f es multiplicativa, entonces F también lo es. Si n es un entero positivo no libre de cuadrado, entonces existen un primo p y enteros positivos q y $m > 1$ tales que $n = p^m q$ y $(p^m, q) = 1$. Luego $F(n) = F(p^m)F(q) = 0 \cdot F(q) = 0$. ■

Lema 1.4. *Si f es multiplicativa y separable, entonces para cualesquiera $a, b \in \mathbb{N}$ se tiene:*

(i) $f(a)f(b) = f(ab)f((a,b))$.

(ii) $f(a) = f((a,b)) \displaystyle\sum_{\substack{d|a \\ (d,b)=1}} (\mu * f)(d)$

Demostración. (i) Nótese que si p es un primo y $m, n > 1$ entonces

$$f(p^m)f(p^n) = f(p)f(p) = f(p^{m+n})f((p^m, p^n)),$$

pues $(p^m, p^n) = p^i$, con $i = \text{mín}\{m, n\}$. Sean $a, b \in \mathbb{N}$ y escríbase sin pérdida de generalidad $a = p_1^{\alpha_1} \cdots p_r^{\alpha_r}$ y $b = p_1^{\beta_1} \cdots p_r^{\beta_r}$, $0 \leq \alpha_i, \beta_i$. Entonces, como f es multiplicativa,

$$\begin{aligned}
f(ab)f((a,b)) &= f(p_1^{\alpha_1+\beta_1} \cdots p_r^{\alpha_r+\beta_r})f(p_1^{\text{mín}\{\alpha_1,\beta_1\}} \cdots p_r^{\text{mín}\{\alpha_r,\beta_r\}}) \\
&= f(p_1^{\alpha_1+\beta_1}) \cdots f(p_r^{\alpha_r+\beta_r})f(p_1^{\text{mín}\{\alpha_1,\beta_1\}}) \cdots f(p_r^{\text{mín}\{\alpha_r,\beta_r\}}) \\
&= f(p_1^{\alpha_1+\beta_1}) \cdots f(p_r^{\alpha_r+\beta_r})f((p_1^{\alpha_1}, p_1^{\beta_1})) \cdots f((p_r^{\alpha_r}, p_r^{\beta_r})) \\
&= f(p_1^{\alpha_1})f(p_1^{\beta_1}) \cdots f(p_r^{\alpha_r})f(p_r^{\beta_r}) \\
&= f(p_1^{\alpha_1} \cdots p_r^{\alpha_r})f(p_1^{\beta_1} \cdots p_r^{\beta_r}) \\
&= f(a)f(b)
\end{aligned}$$

(ii) Al igual que en la demostración anterior, si $F = \mu * f$, entonces

$$\sum_{d|n} F(d) = f(n), \forall\, n \in \mathbb{N}.$$

Se verá primero que los conjuntos $\{d \in \mathbb{N} : d \mid a_* \text{ y } (d,b) = 1\}$ y $\{d \in \mathbb{N} : d \mid a_*/(a,b)_*\}$ son iguales.

Para empezar, se tiene que $a_*/(a,b)_*$ es un entero. Si $(a,b)_* = 1$ esto es claro. Si $(a,b)_* > 1$ se puede escribir $(a,b)_* = q_1 \cdots q_s$, donde todos los primos son distintos. Luego $q_i \mid (a,b)_*$, pero $(a,b)_* \mid (a,b)$ y $(a,b) \mid a$, por tanto $q_i \mid a$ y por tanto $q_i \mid a_*$. Como $i \in \{1, \ldots, s\}$ fue arbitrario y todos los primos q_i son distintos, entonces $q_1 \cdots q_s = (a,b)_* \mid a_*$, que es lo que se quería probar.

Procedamos a probar la igualdad de los conjuntos. Supóngase primero que $d \mid a_*$ y $(d,b) = 1$. Entonces existe $c \in \mathbb{N}$ tal que $a_* = dc$. Por otro lado, se tiene que $(a,b) \mid b$ y por tanto $((a,b),d) = 1$, más aún, como $(a,b)_* \mid (a,b)$ entonces también

$((a,b)_*, d) = 1$ y como $(a,b)_* \mid a_* = dc$, por el lema de Euclides se debe tener que $(a,b)_* \mid c$ es decir, $a_* = (a,b)_* dq$, para algún $q \in \mathbb{N}$, luego $d \mid a_*/(a,b)_*$.

Recíprocamente, supóngase que $d \mid a_*/(a,b)_*$. Se debe tener que

$$\left(\frac{a_*}{(a,b)_*}, b\right) = 1. \tag{1.2}$$

Pues en caso contrario, es decir, si este máximo común divisor fuera mayor que uno, existiría un primo p tal que $p \mid b$ y $p \mid a_*/(a,b)_*$, pero $a_*/(a,b)_* \mid a_*$, luego $p \mid a_*$ y por tanto $p \mid a$. En consecuencia, $p \mid (a,b)$ y por tanto $p \mid (a,b)_*$. Se puede escribir entonces $a_* = pp_1 \cdots p_r$, $(a,b)_* = pq_1 \cdots q_s$, donde todos los primos son distintos. Además, como $a_* = (a,b)_* n$ para algún $n \in \mathbb{N}$, se tiene que $pp_1 \cdots p_r = pq_1 \cdots q_s r_1 \cdots r_t$, con $n = r_1 \cdots r_t$, y r_i números primos, no necesariamente distintos. Luego $p_1 \cdots p_r = q_1 \cdots q_s r_1 \cdots r_t$ y dado que ningúno de los primos p_i son iguales a p, entonces ninguno de los primos r_j puede ser igual a p, es decir p no divide a $n = a_*/(a,b)_*$, lo cual es absurdo.

Esto prueba la igualdad de dichos conjuntos. Ahora es fácil calcular la siguiente suma,

$$\sum_{\substack{d|a \\ (d,b)=1}} F(d) = \sum_{\substack{d|a_* \\ (d,b)=1}} F(d) = \sum_{d|a_*/(a,b)_*} F(d) = \sum_{d|(a_*/(a,b)_*)} (\mu * f)(d) = f(a_*/(a,b)_*).$$

Además, por una demostración similar a la de la ecuación (1.2), se tiene que

$$\left((a,b)_*, \frac{a_*}{(a,b)_*}\right) = 1.$$

Finalmente, como f es multiplicativa,

$$f(a) = f(a_*) = f((a,b)_*) f(a_*/(a,b)_*) = f((a,b)) \sum_{\substack{d|a \\ (d,b)=1}} (\mu * f)(d).$$

■

Ejemplo 1.1. La función $\overline{\varphi} = \varphi(n)/n$ es separable. Nótese que para cualquier primo p y $m > 0$ se tiene $\varphi(p^m) = p^m - p^{m-1}$, luego $\varphi(p^m)/p^m = 1 - p^{-1}$ y también $\varphi(p)/p = 1 - p^{-1}$. Ahora, si $n = p_1^{\alpha_1} \cdots p_r^{\alpha_r}$ entonces, como φ es multiplicativa,

$$\frac{\varphi(n)}{n} = \frac{\varphi(p_1^{\alpha_1})}{p_1^{\alpha_1}} \cdots \frac{\varphi(p_r^{\alpha_r})}{p_r^{\alpha^r}} = \left(1 - \frac{1}{p_1}\right) \cdots \left(1 - \frac{1}{p_r}\right) = \frac{\varphi(p_1)}{p_1} \cdots \frac{\varphi(p_r)}{p_r} = \frac{\varphi(n_*)}{n_*}$$

Lema 1.5 (Fórmula de Hölder)**.** *Para cada $n \in \mathbb{N}$ se tiene*

$$c_r(n) = \frac{\varphi(r)\mu\left(\frac{r}{(n,r)}\right)}{\varphi\left(\frac{r}{(n,r)}\right)}$$

Demostración. Se tiene

$$c_r(n) = \sum_{d|(n,r)} \mu\left(\frac{r}{d}\right) d = \sum_{\substack{d|(n,r)\\ \left(\frac{r}{(n,r)},\frac{(n,r)}{d}\right)>1}} \mu\left(\frac{r}{d}\right) d + \sum_{\substack{d|(n,r)\\ \left(\frac{r}{(n,r)},\frac{(n,r)}{d}\right)=1}} \mu\left(\frac{r}{d}\right) d, \tag{1.3}$$

pero si $(r/(n,r),(n,r)/d) > 1$ entonces r/d debe tener un factor cuadrado, pues en este caso existe un primo p tal que $p \mid r/(n,r)$ y $p \mid (n,r)/d$, luego $r = p(n,r)q_1$ y $(n,r) = pdq_2$ para algunos enteros q_1 y q_2, luego $r = p^2dq_1q_2$ y por tanto $p^2 \mid r/d$, así que $\mu(r/d) = 0$. Luego la ecuación (1.3) es igual a

$$\begin{aligned}
\sum_{\substack{d|(n,r)\\ \left(\frac{r}{(n,r)},\frac{(n,r)}{d}\right)=1}} \mu\left(\frac{r}{d}\right) d &= \sum_{\substack{d|(n,r)\\ \left(\frac{r}{(n,r)},\frac{(n,r)}{d}\right)=1}} \mu\left(\frac{r}{(n,r)}\right)\mu\left(\frac{(n,r)}{d}\right) d \\
&= \mu\left(\frac{r}{(n,r)}\right) \sum_{\substack{d|(n,r)\\ \left(\frac{r}{(n,r)},\frac{(n,r)}{d}\right)=1}} \mu\left(\frac{(n,r)}{d}\right) d \\
&= \mu\left(\frac{r}{(n,r)}\right) \sum_{\substack{d|(n,r)\\ \left(\frac{r}{(n,r)},d\right)=1}} \mu(d)\frac{(n,r)}{d} \\
&= (n,r)\mu\left(\frac{r}{(n,r)}\right) \sum_{\substack{d|(n,r)\\ \left(\frac{r}{(n,r),d}\right)=1}} \frac{\mu(d)}{d}
\end{aligned} \tag{1.4}$$

pues μ es multiplicativa. Sea ahora $\Phi = \mu * \overline{\varphi}$, donde $\overline{\varphi}(s) = \varphi(s)/s$ para cada $s \in \mathbb{N}$. Se tiene entonces que

$$\begin{aligned}
\Phi(s) &= \sum_{d|s} \mu(d)\overline{\varphi}\left(\frac{s}{d}\right) = \sum_{d|s} \mu(d)\varphi\left(\frac{s}{d}\right)\frac{1}{s/d} = \sum_{d|s} \mu(d) \sum_{e|s/d} \mu(e)\frac{s/d}{e}\frac{1}{s/d} \\
&= \sum_{d|s} \mu(d) \sum_{e|s/d} \frac{\mu(e)}{e} = \sum_{e|s} \frac{\mu(e)}{e} \sum_{d|s/e} \mu(d) = \frac{\mu(s)}{s}
\end{aligned} \tag{1.5}$$

pues si $d \mid s$ y $c \mid s/d$, entonces d/s es un entero y $s/d = eq$ para algún entero q, luego $s = deq$ y por tanto $e \mid s$ y $d \mid s/e$. El recíproco es similar. Además, todos los términos en la penúltima suma son cero excepto aquel para el cual $s/e = 1$, es decir, $s = e$. Luego la suma (1.4) es igual a

$$\begin{aligned}
(n,r)\mu\left(\frac{r}{(n,r)}\right)\sum_{\substack{d\mid(n,r)\\ \left(\frac{r}{(n,r)},d\right)=1}}\Phi(d) &= (n,r)\mu\left(\frac{r}{(n,r)}\right)\sum_{\substack{d\mid(n,r)\\ \left(\frac{r}{(n,r)},d\right)=1}}(\mu * \overline{\varphi}(d)) \\
&= (n,r)\mu\left(\frac{r}{(n,r)}\right)\frac{\overline{\varphi}((n,r))}{\overline{\varphi}\left((n,r),\frac{r}{(n,r)}\right)} \\
&= (n,r)\mu\left(\frac{r}{(n,r)}\right)\frac{\overline{\varphi}(r)\overline{\varphi}((n,r))}{\overline{\varphi}((n,r))\overline{\varphi}\left(\frac{r}{(n,r)}\right)} \\
&= (n,r)\mu\left(\frac{r}{(n,r)}\right)\frac{\overline{\varphi}(r)}{\overline{\varphi}\left(\frac{r}{(n,r)}\right)} \\
&= (n,r)\mu\left(\frac{r}{(n,r)}\right)\frac{r\varphi(r)}{(n,r)r\varphi\left(\frac{r}{(n,r)}\right)} \\
&= \frac{\mu\left(\frac{r}{(n,r)}\right)\varphi(r)}{\varphi\left(\frac{r}{(n,r)}\right)}
\end{aligned}$$

donde la primera igualdad se cumple por definición de Φ y la ecuación (1.5), la segunda por ser $\overline{\varphi}$ multiplicativa, separable y por el Lema 1.4 (ii), la tercera por el Lema 1.4 (i) y la quinta por definición de $\overline{\varphi}$. ∎

Teorema 1.1. *Toda función f par* mód r *tiene una expansión de la forma*

$$f(n) = \sum_{d\mid r}\alpha(d)c_d(n), \tag{1.6}$$

y recíprocamente, toda función aritmética de esta forma es par mód r. *Los coeficientes $\alpha(d)$ están dados por*

$$\alpha(d) = \frac{1}{r}\sum_{e\mid r} f\left(\frac{r}{e}\right)c_e\left(\frac{r}{d}\right), \tag{1.7}$$

o por la fórmula equivalente,

$$\alpha(d) = \frac{1}{r\varphi(d)}\sum_{m=1}^{r} f(m)c_d(m).$$

A los coeficientes α se les llamará ***coeficientes de Fourier*** *de la función par f.*

Demostración. Es claro que toda función de la forma (1.6) es par mód r, pues por el lema anterior si $d \mid r$ entonces $c_d(n) = c_d((n, r))$. Nótese que

$$\begin{aligned}
\sum_{d|r} \alpha(d) c_d(n) &= \sum_{d|r} \left(\frac{1}{r} \sum_{e|r} f\left(\frac{r}{e}\right) c_e\left(\frac{r}{d}\right) \right) c_d(n) \\
&= \frac{1}{r} \sum_{e|r} f\left(\frac{r}{e}\right) \sum_{d|r} c_e\left(\frac{r}{d}\right) c_d(n) \\
&= \frac{1}{r} \sum_{e|r} f\left(\frac{r}{e}\right) \sum_{d|r} c_e\left(\frac{r}{d}\right) c_d((n, r)) \\
&= \frac{1}{r} f\left(\frac{r}{q}\right) r = f((n, r)) = f(n),
\end{aligned}$$

por el Lema 1.1, donde $r = (n, r)q$, para algún $q \in \mathbb{N}$ y donde la última igualdad se cumple por ser f par mód r.

Por otro lado, de la demostración de la **??** se puede rescatar el hecho de que el conjunto $\{1, 2, \ldots, r\}$ es igual a $\bigcup_{e|r}\{rx/e \ : \ (x, e) = 1, 1 \leq x \leq e\}$ y todos los conjuntos son disjuntos a pares, por tanto

$$\begin{aligned}
\frac{1}{r\varphi(d)} \sum_{m=1}^{r} f(m) c_d(m) &= \frac{1}{r\varphi(d)} \sum_{e|r} \sum_{\substack{(x,e)=1 \\ 1 \leq x \leq e}} f\left(\frac{rx}{e}\right) c_d\left(\frac{rx}{e}\right) \\
&= \frac{1}{r\varphi(d)} \sum_{e|r} \sum_{\substack{(x,e)=1 \\ 1 \leq x \leq e}} f\left(\left(\frac{rx}{e}, r\right)\right) c_d\left(\left(\frac{rx}{e}, r\right)\right) \\
&= \frac{1}{r\varphi(d)} \sum_{e|r} \sum_{\substack{(x,e)=1 \\ 1 \leq x \leq e}} f\left(\frac{r}{e}\right) c_d\left(\frac{r}{e}\right) \\
&= \frac{1}{r\varphi(d)} \sum_{e|r} f\left(\frac{r}{e}\right) c_d\left(\frac{r}{e}\right) \varphi(e) \\
&= \frac{1}{r\varphi(d)} \sum_{e|r} f\left(\frac{r}{e}\right) c_e\left(\frac{r}{d}\right) \varphi(d) \\
&= \frac{1}{r} \sum_{e|r} \left(\frac{r}{e}\right) c_e\left(\frac{r}{d}\right),
\end{aligned}$$

donde la segunda igualdad se cumple por ser f par mód r, la tercera por ser $(rx/e, r) = r/e$, pues $(x, e) = 1$ implica que $(r/e)(x, e) = r/e$, y como r/e es un entero positivo, entonces $(rx/e, r) = r/e$. La cuarta por definición de φ, y la penúltima igualdad se cumple por la fórmula de Hölder (Lema 1.5) y el **??**, pues e y d dividen a d, así que

$$c_d\left(\frac{r}{e}\right)\varphi(e) = \frac{\varphi(d)\mu\left(\dfrac{d}{(r/e,d)}\right)}{\varphi\left(\dfrac{d}{(r/e,d)}\right)} = \frac{\varphi(d)\mu\left(\dfrac{e}{(r/d,e)}\right)}{\varphi\left(\dfrac{e}{(r/d,e)}\right)}\varphi(e) = \varphi(d)c_e\left(\frac{r}{d}\right) \tag{1.8}$$

■

Corolario 1.5. *Si f y f' son funciones pares* mód r, *entonces se verifican las siguientes implicaciones*

$$f(n) = \sum_{d|r} f'(d)c_d(n), \forall\, n \in \mathbb{N} \implies f'(\delta) = \frac{1}{r\varphi(\delta)}\sum_{m=1}^{r} f(m)c_d(m), \forall\, \delta \mid r,$$

$$f'(\delta) = \sum_{m=1}^{r} f(m)c_\delta(m), \forall\, d \mid r \implies f(n) = \frac{1}{r}\sum_{d|r}\frac{f'(d)}{\varphi(d)}c_d(n), \forall\, n \in \mathbb{N}.$$

Demostración. En efecto, como f es par, entonces f tiene una única representación de la forma (1.6), por tanto se verifica la primera implicación. Para la segunda implicación se tiene que, de nuevo por la ecuación (1.6),

$$f(n) = \sum_{d|r}\left(\frac{1}{r\varphi(d)}\sum_{m=1}^{r} f(m)c_d(m)\right)c_d(n) = \frac{1}{r}\sum_{d|r}\frac{f'(d)}{\varphi(d)}c_d(n).$$

■

Considerando los casos $\delta = 1$ y $n = r$ se tiene el siguiente corolario.

Corolario 1.6. *Si f y f' son funciones pares* mód r, *entonces*

$$f(n) = \sum_{d|r} f'(d)c_d(n), \forall\, n \in \mathbb{N} \implies f'(1) = \frac{1}{r}\sum_{m=1}^{r} f(m),$$

$$f'(\delta) = \sum_{m=1}^{r} f(m)c_\delta(m), \forall\, d \mid r \implies f(r) = \frac{1}{r}\sum_{d|r} f'(d).$$

Volviendo a la definición de la suma de Ramanujan módulo r, **??**, se puede considerar una clase más general de funciones, aquellas que se pueden escribir como

$$f(n) = \sum_{\delta|(n,r)} g(\delta), \forall\, n \in \mathbb{N},$$

donde g es una función aritmética.

La siguiente proposición muestra que esta generalización preserva la modularidad respecto a r. Más aún, el Teorema 1.1 permite caracterizar a las funciones pares módulo r de esta forma.

Teorema 1.2. *Toda función f par módulo r se puede expresar como*

$$f(n) = \sum_{\delta|(n,r)} g(\delta), \forall\, n \in \mathbb{N}. \tag{1.9}$$

Y recíprocamente, toda función aritmética que tenga esta forma es par módulo r.

Demostración. Dado que $(n,r) = ((n,r),r)$, es claro que toda función arimética que tenga dicha forma es par mód r. Supóngase que f es par mód r. Por el Teorema 1.1, se puede escribir

$$\begin{aligned} f(n) &= \sum_{d|r} \alpha(d) c_d(n) = \sum_{d|r} \alpha(d) \sum_{\delta|(n,d)} \mu\left(\frac{d}{\delta}\right)\delta \\ &= \sum_{\delta|(n,d)} \sum_{d|r} \alpha(d)\mu\left(\frac{d}{\delta}\right)\delta = \sum_{\delta|(n,r)} \delta \sum_{d|r} \mu\left(\frac{d}{\delta}\right)\delta = \sum_{\delta|(n,r)} g(\delta) \end{aligned}$$

■

En vista de que toda función par tiene al menos dos representaciones, la del teorema anterior y la del Teorema 1.1, cabe preguntarse si existe alguna relación entre ellas. El siguiente teorema da respuesta a esta inquietud.

Teorema 1.3. *Si f es par módulo r, entonces sus respectivas expansiones* (1.6) *y* (1.9) *están relacionadas mediante la fórmula*

$$\alpha(d) = \frac{1}{r} \sum_{e|r/d} g\left(\frac{r}{e}\right) e.$$

Demostración. Se tiene que

$$\begin{aligned} \alpha(d) = \frac{1}{r} \sum_{\delta|r} f\left(\frac{r}{\delta}\right) c_\delta\left(\frac{r}{d}\right) &= \frac{1}{r} \sum_{\delta|r} c_\delta\left(\frac{r}{d}\right) \sum_{e|(r/\delta,\delta)} g(e) = \frac{1}{r} \sum_{\delta|r} c_\delta\left(\frac{r}{d}\right) \sum_{e|r/\delta} g(e) \\ &= \frac{1}{r} \sum_{\delta|r} c_\delta\left(\frac{r}{d}\right) \sum_{e|r/\delta} g(e) = \frac{1}{r} \sum_{e|r} g\left(\frac{r}{e}\right) \sum_{\delta|e} c_\delta\left(\frac{r}{d}\right) \\ &= \frac{1}{r} \sum_{e|r} g\left(\frac{r}{e}\right) \cdot \begin{cases} e & \text{si } e \mid r/d \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases} = \frac{1}{r} \sum_{e|r/d} g\left(\frac{r}{e}\right) e. \end{aligned}$$

por el corolario 1.1. ■

1.2. El subespacio de funciones pares

Recuérdese del **??** que el anillo $(\mathcal{A}, +, *)$ es un álgebra conmutativa con identidad. Se tiene que el conjunto de funciones pares es un subespacio de $\mathcal{A}$, pero no es un subanillo, pues en general $(f * g)(n) \neq (f * g)((n, r))$ aún cuando f y g sean pares mód r, tome por ejemplo dos funciones constantes. Se denotará como $\mathcal{A}_r$ al conjunto de funciones pares módulo r.

Proposición 1.5. *El conjunto $\mathcal{A}_r$ es una subespacio de $\mathcal{A}$.*

Demostración. Basta verificar las siguientes condiciones:

(i) $\mathcal{A}_r \neq \emptyset$

(ii) $f, g \in \mathcal{A}_r$ implica $f + g \in \mathcal{A}_r$

(iii) $c \in \mathbb{C}$ y $f \in \mathcal{A}_r$ implica $cf \in \mathcal{A}$.

Claro que $\mathbf{0} \in \mathcal{A}_r$. Sea $n \in \mathbb{N}$ y supóngase que $f, g \in \mathcal{A}_r$. Se tiene que $(cf)(n) = cf(n) = cf((n, r)) = (cf)((n, r))$, luego $cf \in \mathcal{A}_r$.

Además, $(f + g)(n) = f(n) + g(n) = f((n, r)) + g((n, r)) = (f + g)((n, r))$, así que $f + g \in \mathcal{A}_r$. ∎

El corolario 1.3 afirma que las sumas de Ramanujan $\mathcal{B}_r = \{c_d\}_{d|r}$ son linealmente independientes respecto a la suma sobre los divisores de r, además el Teorema 1.1 nos permite expresar cualquier función par como una suma de este tipo. En otras palabras, el conjunto $\mathcal{B}_r$ es una base del espacio vectorial $\mathcal{A}_r$.

Corolario 1.7. *El espacio vectorial $\mathcal{A}_r$ tiene dimensión $d(r)$.*

En lo que sigue de esta sección se verá que los coeficientes de la expansión (1.6) pueden ser derivados de un producto interno en este espacio de funciones.

Proposición 1.6. *La operación $\langle\ ,\ \rangle : \mathcal{A}_r \times \mathcal{A}_r \longrightarrow \mathbb{R}$ definida como*

$$\langle f, g \rangle = \sum_{d|r} \varphi(d) f\left(\frac{r}{d}\right) \overline{g\left(\frac{r}{d}\right)}$$

es un producto interno en $\mathcal{A}_r$.

Demostración. Sean $c \in \mathbb{C}$ y $f, g, h \in \mathcal{A}_r$. Escríbase $f(n) = f_1(n) + i f_2(n)$ para todo $n \in \mathbb{N}$, donde $f_1, f_2 \in \mathcal{A}_{\mathbb{R}}$. Entonces

(i)

$$\begin{aligned}\langle f, f\rangle &= \sum_{d\mid r}\varphi(d)\left[f_1\left(\frac{r}{d}\right)+if_2\left(\frac{r}{d}\right)\right]\overline{\left[f_1\left(\frac{r}{d}\right)+if_2\left(\frac{r}{d}\right)\right]}\\ &= \sum_{d\mid r}\varphi(d)\left[f_1^2\left(\frac{r}{d}\right)+f_2^2\left(\frac{r}{d}\right)\right]\geq 0\end{aligned}$$

Además, si $\langle f, f\rangle = 0$, como todos los términos de la suma anterior son positivos, se debe tener que $f_1(d) = f_2(d) = 0$ para todo d divisor de r. Si $n \in \mathbb{N}$ entonces $f_1(n) = f((n, r)) = 0$, pues f es par mód r y $(n, r) \mid r$. Análogamente se tiene $f_2(n) = 0$. Luego $f(n) = f_1(n) + if_2(n) = 0$ para cada $n \in \mathbb{N}$, es decir $f = \mathbf{0}$.

(ii)

$$\begin{aligned}\langle f+g, h\rangle &= \sum_{d\mid r}\varphi(d)(f+g)\left(\frac{r}{d}\right)\overline{g\left(\frac{r}{d}\right)} = \sum_{d\mid r}\varphi(d)\left[f\left(\frac{r}{d}\right)\overline{h\left(\frac{r}{d}\right)}+g\left(\frac{r}{d}\right)\overline{h\left(\frac{r}{d}\right)}\right]\\ &= \sum_{d\mid r}\varphi(d)f\left(\frac{r}{d}\right)\overline{h\left(\frac{r}{d}\right)}+\sum_{d\mid r}g\left(\frac{r}{d}\right)\overline{h\left(\frac{r}{d}\right)} = \langle f, h\rangle + \langle g, h\rangle\end{aligned}$$

(iii)

$$\langle cf, g\rangle = \sum_{d\mid r}\varphi(d)cf\left(\frac{r}{d}\right)\overline{g\left(\frac{r}{d}\right)} = c\sum_{d\mid r}\varphi(d)f\left(\frac{r}{d}\right)\overline{g\left(\frac{r}{d}\right)} = c\langle f, g\rangle$$

(iv)

$$\overline{\langle g, f\rangle} = \overline{\sum_{d\mid r}\varphi(d)g\left(\frac{r}{d}\right)\overline{f\left(\frac{r}{d}\right)}} = \sum_{d\mid r}\varphi(d)f\left(\frac{r}{d}\right)\overline{g\left(\frac{r}{d}\right)} = \langle f, g\rangle$$

■

El producto interno así definido podría haberse escrito sin el factor $\varphi(d)$ dentro de la suma. Su uso se justifica al usar la ecuación (1.8) para probar que este producto interno hace de $\mathcal{B}_r$ una base ortogonal de $\mathcal{A}_r$.

Proposición 1.7. *Si i, j son divisores positivos de r, entonces*

$$\langle c_i, c_j\rangle = \begin{cases} r\varphi(j) & \textit{si } i = j\\ 0 & \textit{en otro caso.}\end{cases}$$

Demostración. En efecto,

$$\langle c_i, c_j \rangle = \sum_{d|r} \varphi(d) c_i \left(\frac{r}{d}\right) c_j \left(\frac{r}{d}\right) = \sum_{d|r} c_i \left(\frac{r}{d}\right) \varphi(j) c_d \left(\frac{r}{j}\right) = \begin{cases} r\varphi(j) & \text{si } i = j \\ 0 & \text{en otro caso,} \end{cases}$$

donde la segunda igualdad se cumple por la ecuación (1.8) y la tercera por el Lema 1.1. ■

Corolario 1.8. *El conjunto*

$$\mathcal{B}'_r = \left\{ c'_d = \frac{1}{\sqrt{r\varphi(d)}} c_d \right\}_{d|r}$$

es una base ortonormal de $\mathcal{A}_r$.

Como consecuencia del corolario anterior, toda función f par mód r debe tener una expansión de la forma $\sum_{e|r} \beta(e) c'_e$. Además, si d es un divisor arbitrario de r, entonces

$$\left\langle f, c'_d \right\rangle = \left\langle \sum_{e|r} \beta(e) c'_e, c'_d \right\rangle = \sum_{e|r} \beta(e) \left\langle c'_e, c'_d \right\rangle = \beta(d),$$

pero f también tiene una única representación de la forma $\sum_{e|r} \alpha(d) c_d$, en consecuencia, $\alpha(d) = \beta(d)/\sqrt{r\varphi(d)}$ para cada d divisor de r. Por tanto,

$$\begin{aligned} \alpha(d) &= \frac{\beta(d)}{\sqrt{r\varphi(d)}} = \frac{1}{\sqrt{r\varphi(d)}} \left\langle f, c'_d \right\rangle \\ &= \frac{1}{\sqrt{r\varphi(d)}} \sum_{e|r} \varphi(e) f\left(\frac{r}{e}\right) c'_d \left(\frac{r}{e}\right) \\ &= \frac{1}{\sqrt{r\varphi(d)}} \sum_{e|r} \varphi(e) f\left(\frac{r}{e}\right) \frac{1}{\sqrt{r\varphi(d)}} c_d \left(\frac{r}{e}\right) \\ &= \frac{1}{r\varphi(d)} \sum_{e|r} f\left(\frac{r}{e}\right) \varphi(d) c_e \left(\frac{r}{d}\right) \\ &= \frac{1}{r} \sum_{e|r} f\left(\frac{r}{e}\right) c_e \left(\frac{r}{d}\right), \end{aligned}$$

donde la cuarta igualdad se cumple nuevamente por (1.8). Esta es la ecuación (1.7). Como es usual en el análisis funcional, ahora se pueden llamar propiamente *coeficientes de Fourier* a los coeficientes α del Teorema 1.1.

Bibliografía

[1] Apostol, T. M. *Introduction to Analytic Number Theory.* Springer, 1976.

[2] Bell, E. T. Arithmetic of logic. *Transactions of the American Mathematical Society 29*, 3 (1927), 597–611.

[3] Bell, E. T. Outline of a theory of arithmetical functions in their algebraic aspects. *The Journal of the Indian Mathematical Society 17* (1928), 249–260.

[4] Brualdi, R. A. *Introductory Combinatorics*, 3 ed. Prentice-Hall, 1999.

[5] Cashwell, E. D., and Everett, C. J. The ring of number-theoretic functions. *Pacific Journal of Mathematics 9*, 4 (1959).

[6] Cohen, E. A class of arithmetical functions. *Proceedings of the National Academy of Sciences of the United States of America 41*, 11 (1955).

[7] Dickson, L. E. *History of the Theory of Numbers*, vol. I. Chelsea Publishing Company, 1952.

[8] Gauss, C. F. *Disquisitiones Arithmeticae*, english ed. Springer-Verlag, 1966.

[9] Hardy, G. H., and Wright, E. M. *An Introduction to the Theory of Numbers*, 5 ed. Oxford University Press, 1979.

[10] Hungerford, T. W. *Algebra.* Springer, 1974.

[11] Knopfmacher, J. *Abstract Analytic Number Theory*, vol. 12. North-Holland Publishing Company, 1975.

[12] Knopfmacher, J. Fourier analysis of arithmetical functions. *Annali di Matematica Pura ed Applicata 109* (1976), 177–201.

[13] Murty, M. R. Ramanujan series for arithmetical functions. *Hardy-Ramanujan Journal 36* (2013).

[14] Nishimura, H. On the unique factorization theorem for formal power series. *Journal of Mathematical Sciences, Kyoto Univ.* (1967).

[15] Ramanujan, S. On certain trigonometric sums and their applications in the theory of numbers. *Transactions of the Cambridge Phil. Society 22* (1918), 179–199.

[16] Rearick, D. F. Operators on algebras of arithmetic functions. *Duke Mathematical Journal 35* (1968), 761–766.

[17] Zaldívar, F. *Introducción a la teoría de números*, 1 ed. Fondo de Cultura Económica, 2014.