
1. Funciones pares

Al estudiar el espacio de funciones aritméticas se puede hacer una analogía con la teoría de Fourier del análisis para funciones definidas en todo el plano real o complejo, para la cuál se necesitará la noción de periodicidad. En este capítulo se considerará una clase de funciones aritméticas que captura esta noción. También se expondrán resultados análogos a los de análisis respecto a funciones periódicas. Estos resultados se puede encontrar en [6].

Observación 1.1. Durante todo el capítulo se supondrá que r es un entero positivo arbitrario pero fijo.

Definición 1.1. (Función par). Una función aritmética se dice **par** mód r si $f(n) = f((n, r))$, donde (m, r) es el máximo común divisor de n y r , para cada $n \in \mathbb{N}$.

Definición 1.2. (Función periódica). Una función aritmética se dice **periódica** con periodo r (o periódica mód r) si $m, n \in \mathbb{N}$ y $m \equiv n \pmod{r}$ implica que $f(m) = f(n)$.

La siguiente proposición es una consecuencia inmediata de las definiciones anteriores.

Proposición 1.1. *Toda función par mód r es periódica con periodo r .*

Demostración. Si $m \equiv n \pmod{r}$ entonces $r \mid m - n$, por tanto existe $q \in \mathbb{Z}$ tal que $m - n = qr$. Por demostrar que $(n, r) = (m, r)$. En efecto, como $(n, r) \mid n$ y $(n, r) \mid r$, entonces $(n, r) \mid n + qr = m$, luego $(n, r) \mid (m, r)$. Análogamente, se tiene que $(m, r) \mid (n, r)$. Se sigue que $(n, r) = (m, r)$ y por tanto $f(n) = f((n, r)) = f((m, r)) = f(m)$. ■

1.1. Sumas de Ramanujan

En 1918, Ramanujan publicó el artículo [16], que contiene varias fórmulas notables expresando algunas funciones sobre \mathbb{N} como el límite puntual de ciertas series trigonométricas. Por ejemplo, probó que

$$\frac{\sigma(n)}{n} = \frac{\pi^2}{6} \left(1 + \frac{(-1)^n}{2^2} + \frac{2 \cos\left(\frac{2}{3}\pi n\right)}{3^2} + \frac{2 \cos\left(\frac{1}{2}\pi n\right)}{4^2} + \frac{2 \left[\cos\left(\frac{2}{5}\pi n\right) + \cos\left(\frac{4}{5}\pi n\right) \right]}{5^2} + \frac{2 \cos\left(\frac{1}{3}\pi n\right)}{6^2} + \dots \right),$$

o escrito de otra manera,

$$\frac{\sigma(n)}{n} = \frac{\pi^2}{6} \sum_{r=1}^{\infty} \frac{c_r(n)}{r^2},$$

donde

$$c_r(n) = \sum_{\substack{a=1 \\ (a,r)=1}}^r \cos\left(\frac{2\pi}{r}an\right).$$

Estas sumas son conocidas como sumas de Ramanujan. El valor $c_r(n)$ es de hecho la suma de las n -ésimas potencias de las raíces primitivas de la unidad.

Proposición 1.2. *Para toda $n \in \mathbb{N}$ se tiene que*

$$c_r(n) = \sum_{\substack{a=1 \\ (a,r)=1}}^r e^{i(2\pi/r)an},$$

donde i es la unidad imaginaria.

Demostración. En efecto,

$$\sum_{\substack{a=1 \\ (a,r)=1}}^r e^{i(2\pi/r)an} = \sum_{\substack{a=1 \\ (a,r)=1}}^r \cos\left(\frac{2\pi}{r}an\right) + i \sum_{\substack{a=1 \\ (a,r)=1}}^r \sin\left(\frac{2\pi}{r}an\right).$$

Pero $(a, r) = 1$ si y sólo si $(r-a, r) = 1$. Además, si $1 \leq a \leq r-1$ entonces $1 \leq r-a \leq r-1$, por tanto

$$\begin{aligned} \sum_{\substack{a=1 \\ (a,r)=1}}^r \sin\left(\frac{2\pi}{r}an\right) &= \sum_{\substack{a=1 \\ (r-a,r)=1}}^r \sin\left(\frac{2\pi}{r}(r-a)n\right) = \sum_{\substack{a=1 \\ (r-a)=1}}^r -\sin\left(\frac{2\pi}{r}an\right) \\ &= - \sum_{\substack{a=1 \\ (a,r)=1}}^r \sin\left(\frac{2\pi}{r}an\right). \end{aligned}$$

Se sigue que la parte imaginaria de la primera suma se anula y se tiene la igualdad deseada. ■

En el siguiente capítulo se verá que esta expresión aparece de forma natural al calcular los coeficientes de Fourier clásicos de cierta función aritmética.

Proposición 1.3. *Para toda $n \in \mathbb{N}$ se tiene que*

$$c_r(n) = \sum_{d|(n,r)} \mu\left(\frac{r}{d}\right) d.$$

Demostración. Por la proposición ?? se tiene que la suma $\sum_{d|k} \mu(d)$ es igual a 1 si $k = 1$ e igual a 0 en otro caso, luego por la proposición anterior,

$$\begin{aligned} c_r(n) &= \sum_{\substack{a=1 \\ (a,r)=1}}^r e^{i(2\pi/r)an} = \sum_{a=1}^r e^{i(2\pi/r)an} \left(\sum_{d|(a,r)} \mu(d) \right) = \sum_{\substack{d|a \\ d|r}} \sum_{a=1}^r \mu(d) e^{i(2\pi/r)an} \\ &= \sum_{d|r} \mu(d) \sum_{\substack{d|a \\ 1 \leq a \leq r}} e^{i(2\pi/r)an} = \sum_{d|r} \mu(d) \sum_{b=1}^{r/d} e^{i(2\pi/(r/d))bn} \end{aligned}$$

El valor de la suma interior depende de si r/d divide a n o no. Si lo hace, cada uno de sus términos es igual a 1 y por tanto la suma vale r/d . Si este no es el caso se puede sumar,

$$\sum_{b=1}^{r/d} e^{i(2\pi/(r/d))bn} = \frac{e^{i(2\pi/r)/(r/d)}(e^{i(2\pi n)} - 1)}{e^{i(2\pi/r)/(r/d)} - 1} = 0,$$

pues el denominador no se anula. Luego

$$\begin{aligned} c_r(n) &= \sum_{\substack{a=1 \\ (a,r)=1}}^r e^{i(2\pi/r)an} = \sum_{d|r} \mu(d) \begin{cases} r/d & \text{si } r/d \mid n \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases} = \sum_{\substack{d|q \\ (r/d)|n}} \mu(d)(r/d) \\ &= \sum_{\substack{d|r \\ d|n}} \mu\left(\frac{r}{d}\right) d = \sum_{d|(n,r)} \mu\left(\frac{r}{d}\right) d. \end{aligned}$$

■

En lo que sigue de este capítulo se trabajará exclusivamente con ésta última representación de c_r y se le referirá como *suma de Ramanujan módulo r* o simplemente *suma de Ramanujan* cuando no haya riesgo de confusión.

Proposición 1.4. *Algunas propiedades de la sumas de Ramanujan son las siguientes:*

- (1) $c_1 = 1$
- (2) $c_r(1) = \mu(r)$
- (3) $c_r(n) \leq \max\{\sigma(r), \sigma(n)\}$
- (4) $c_r(n)$ es una función multiplicativa de r

(5) Si p es primo y m es un entero positivo, entonces

$$c_{p^m}(n) = \begin{cases} p^m - p^{m-1} & \text{si } p^m \mid n \\ -p^{m-1} & \text{si } p^{m-1} \mid n \text{ pero } p^m \nmid n \\ 0 & \text{si } p^{m-1} \nmid n. \end{cases}$$

Demostración. (1) Para cada $n \in \mathbb{N}$ se tiene que $(n, 1) = 1$ y por tanto

$$c_1(n) = \sum_{d \mid (n, 1)} \mu\left(\frac{1}{d}\right) d = \mu(1)1 = 1.$$

(2) De manera similar,

$$c_r(1) = \sum_{d \mid (1, r)} \mu\left(\frac{r}{d}\right) d = \mu(r)1 = \mu(r).$$

(3) Por definición se tiene que $\sigma(k) = \sum_{d \mid k} d$. Además $\mu(k) \leq 1$ para todo $k \in \mathbb{N}$, luego

$$c_r(n) = \sum_{d \mid (n, r)} \mu\left(\frac{r}{d}\right) d \leq \sum_{d \mid (n, r)} d = \sum_{\substack{d \mid n \\ d \mid r}} d \leq \sum_{d \mid n} d, \sum_{d \mid r} d \leq \max\{\sigma(n), \sigma(r)\}.$$

(4) Defínase

$$\eta_r(n) = \begin{cases} r & \text{si } r \mid n \\ 0 & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

Se tiene que la función $\eta_{\square}(n)$ es multiplicativa para n fijo. En efecto, si $r, s \in \mathbb{N}$ son tales que $(r, s) = 1$, entonces

$$\eta_{rs}(n) = \begin{cases} rs & \text{si } rs \mid n \\ 0 & \text{en otro caso,} \end{cases}$$

pero $rs \mid n$ si y sólo si $r \mid n$ y $s \mid n$. En efecto, si $rs \mid n$ es claro que $r \mid n$ y $s \mid n$. Supóngase que $r \mid n$ y $s \mid n$, de tal manera que existen $q_1, q_2 \in \mathbb{Z}$ tales que $n = rq_1 = sq_2$. Como $(r, s) = 1$, también existen $x, y \in \mathbb{Z}$ tales que $1 = rx + sy$, luego $n = nr x + ns y$, por lo que $n = rs(q_2 x + q_1 y)$, es decir, $rs \mid n$. Luego, si $rs \mid n$, entonces

$$\eta_{rs}(n) = rs = \eta_r(n)\eta_s(n),$$

y si $rs \nmid n$ entonces $r \nmid n$ y $s \nmid n$, por lo que

$$\eta_{rs}(0) = 0 = \eta_r(n)\eta_s(n).$$

Por otro lado, se tiene que

$$\sum_{d|r} \mu\left(\frac{r}{d}\right) \eta_d(n) = \sum_{\substack{d|r \\ d|n}} \mu\left(\frac{r}{d}\right) d = \sum_{d|(n,r)} \mu\left(\frac{r}{d}\right) d = c_r(n),$$

es decir, $c_\square(n) = \mu * \eta_\square(n)$. Luego $c_\square(n)$ debe ser multiplicativa para n fijo, por ser producto de funciones multiplicativas.

(5) Tenemos los siguientes casos:

- Si $p^m \mid n$, entonces $(n, p^m) = p^m$, luego

$$c_{p^m}(n) = \sum_{d|p^m} \mu\left(\frac{p^m}{d}\right) d = \mu(1)p^m + \mu(p)p^{m-1} = p^m - p^{m-1},$$

pues $\mu(p^i) = 0$ para toda $i > 1$.

- Si $p^{m-1} \mid n$ pero $p^m \nmid n$, entonces $(n, p^m) = p^{m-1}$. En efecto, se tiene que $p^{m-1} \mid p^m$ y además $p^{m-1} \mid n$ por hipótesis. Si $e \in \mathbb{Z}$ es tal que $e \mid p^m$ y $e \mid n$, entonces $e = p^i$, para algún $0 \leq i \leq m-1$, pues $p^m \nmid n$, por tanto $e \mid p^{m-1}$. Esto prueba que $(p^m, n) = p^{m-1}$, así

$$c_{p^m}(n) = \sum_{d|p^{m-1}} \mu\left(\frac{p^m}{d}\right) d = \mu(p)p^{m-1} = -p^{m-1}$$

- Finalmente, si $p^{m-1} \nmid n$, entonces $p^m \nmid n$. Además, $(n, p^m) \mid p^m$, por tanto $(n, p^m) = p^i$ para algún $0 \leq i \leq m$. Más aún, por la hipótesis se debe tener que $0 \leq i \leq m-2$. Luego

$$c_{p^m}(n) = \sum_{d|p^i} \mu\left(\frac{p^m}{d}\right) d = \mu(p^m)1 + \mu(p^{m-1})p + \dots + \mu(p^{m-i})p^i = 0,$$

pues $i \leq m-2$ implica que $2 \leq m-i$ y por tanto $\mu(p^m) = \dots = \mu(p^{m-i}) = 0$. ■

Del la demostración del punto 4 se puede rescatar el siguiente corolario, usando la inversión de Möbius (??).

Corolario 1.1. Para cada $n \in \mathbb{N}$ fijo se tiene

$$\sum_{d|r} c_d(n) = \eta_r(n) = \begin{cases} r & \text{si } r \mid n \\ 0 & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

Otro corolario notable de la proposición anterior es el siguiente.

Corolario 1.2. La suma de las raíces r -ésimas primitivas de la unidad es igual a $\mu(r)$.

Demostración. Por el punto (2) de la proposición anterior, se tiene que

$$\sum_{\substack{a=1 \\ (a,r)=1}}^r e^{i(2\pi/r)a} = c_r(1) = \mu(r).$$

■

Las sumas de Ramanujan gozan de la siguiente propiedad de “ortogonalidad”.

Lema 1.1. Si r y s dividen a k , entonces

$$\sum_{d|k} c_r(k/d) c_d(k/s) = \begin{cases} k & \text{si } r = s \\ 0 & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

Demostración. Si r y s dividen a k , entonces

$$\begin{aligned} \sum_{d|k} c_r(k/d) c_d(k/s) &= \sum_{d|k} c_d(k/s) \sum_{d'|(k/d,r)} \mu(r/d') d' \\ &= \sum_{d|k} c_d(k/s) \sum_{\substack{d'|r \\ d'|k/d}} \mu(r/d') d' = \sum_{\substack{d|k \\ d'|r \\ d'|k/d}} c_d(k/s) \mu(r/d') d' \\ &= \sum_{\substack{d|k/d' \\ d'|r \\ d'|r}} c_d(k/s) \mu(r/d') d' = \sum_{\substack{d'|r \\ d'|k}} \mu(r/d') d' \sum_{d|k/d'} c_d(k/s) \\ &= \sum_{d'|(k,r)} \mu(r/d') d' \eta_{k/d'}(k/s) = \sum_{d'|r} \mu(r/d') d' \eta_{k/d'}(k/s), \quad (1.1) \end{aligned}$$

dado que $(k, r) = r$ por ser r divisor de k y dado que los conjuntos $\{d, d' \in \mathbb{N} : d \mid k, d' \mid r, d' \mid k/d\}$ y $\{d, d' \in \mathbb{N} : d \mid k/d', d' \mid r, d' \mid k\}$ son iguales. En efecto, si $d \mid k$ entonces k/d es un entero, luego $d' \mid k/d$ implica que $k/d = d'q'$, luego $k = d'q'd$, por tanto $d \mid k/d'$ y $d' \mid k$.

Recíprocamente, si $d' \mid k$ entonces k/d' es un entero, luego $d \mid k/d'$ implica que $k/d' = dq$, por tanto $k = dqd'$, por tanto $d \mid k$ y $d' \mid k/d$.

Si $s \nmid r$ entonces $s \nmid d'$ y por tanto $k/d' \nmid k/s$. En efecto, pues si $s \mid d'$, como $d' \mid r$ entonces se tendría que $s \mid r$ por transitividad. Además, si $k/d' \mid k/s$ se tendría que $s \mid d'k$. Luego la suma (1.1) se anula si $s \nmid r$ y en particular si $r \neq s$, pues en este caso se tiene que $\eta_{k/d'}(k/s) = 0$ para cada $d' \mid r$.

Si $s \mid r$ entonces la suma (1.1) es igual a

$$\begin{aligned} \sum_{\substack{d' \mid r \\ k/d' \mid k/s}} \mu(r/d') d' \frac{k}{d'} &= \sum_{\substack{d' \mid r \\ k/d' \mid k/s}} \mu(r/d') k = \sum_{\substack{d' \mid r \\ s \mid d'}} \mu(r/d') k \\ &= k \sum_{\substack{d' \mid r \\ d' = se}} \mu(r/se) = k \sum_{e \mid r/s} \mu(r/se) \\ &= k \sum_{se \mid r} \mu(r/se) = \begin{cases} k & \text{si } r = s \\ 0 & \text{en otro caso,} \end{cases} \end{aligned}$$

pues $k/d' \mid k/s$ si y sólo si $s \mid d'$. ■

Corolario 1.3. *Las sumas de Ramanujan son linealmente independientes respecto a la suma sobre los divisores de r . Más específicamente, si α, β son funciones aritméticas tales que*

$$\sum_{d \mid r} \alpha(d) c_d(n) = \sum_{d \mid r} \beta(d) c_d(n),$$

para todo $n \in \mathbb{N}$, entonces $\alpha(d) = \beta(d)$ para todo $d \mid r$.

Demostración. Basta probar que $\sum_{d \mid r} \alpha(d) c_d(n) = 0$ implica que $\alpha(d) = 0$ para todo $d \mid r$. Supóngase la hipótesis y sea $\delta \mid r$ arbitrario pero fijo. Si e es un divisor de r , se tiene que $\sum_{d \mid r} \alpha(d) c_d(r/e) = 0$, luego

$$0 = \sum_{e \mid r} \left(\sum_{d \mid r} \alpha(d) c_d \left(\frac{r}{e} \right) \right) c_e \left(\frac{r}{\delta} \right) = \sum_{d \mid r} \alpha(d) \sum_{e \mid r} c_d \left(\frac{r}{e} \right) c_e \left(\frac{r}{\delta} \right) = \alpha(\delta) r,$$

por la proposición anterior, y dado que $r \neq 0$ entonces $\alpha(\delta) = 0$. Como δ fue un divisor arbitrario de r , se tiene el resultado. ■

Lema 1.2. *Si $d \mid r$ entonces $c_d(n) = c_d((n, r))$.*

Demostración. Si $d \mid r$ entonces $(n, d) = ((n, r), d)$. En efecto, dado que $(n, d) \mid n$ y $(n, d) \mid d$, entonces $(n, d) \mid n$, $(n, d) \mid d$ y $(n, d) \mid r$, por lo que $(n, d) \mid (n, r)$ y $(n, d) \mid d$, es decir, $(n, d) \mid ((n, r), d)$. Recíprocamente se tiene que $((n, r), d) \mid n$ y $((n, r), d) \mid d$, así que $((n, r), d) \mid (n, d)$. Se sigue que $(n, d) = ((n, r), d)$. Luego

$$c_d(n) = \sum_{e \mid (n, d)} \mu(d/e)e = \sum_{e \mid ((n, r), d)} \mu(d/e)e = c_d((n, r)).$$

■

Corolario 1.4. La suma de Ramanujan módulo r es par mód r .

Definición 1.3. (Radical). Sea $n \in \mathbb{N}$. Se define el *radical* de n , denotado por n_* como

$$n_* = \begin{cases} 1 & \text{si } n = 1 \\ p_1 \cdots p_r & \text{si } n = p_1^{\alpha_1} \cdots p_r^{\alpha_r} \end{cases}$$

donde $n = p_1^{\alpha_1} \cdots p_r^{\alpha_r}$ es la factorización de $n > 1$ en primos.

Definición 1.4. Una función aritmética f se dirá *separable* si $f(n) = f(n_*)$, para cada $n \in \mathbb{N}$.

Lema 1.3. Una función multiplicativa es separable si y sólo si $(\mu * f)(n) = 0$ para todo n no libre de cuadrado.

Demostración. Sea $F = \mu * f$. Entonces $F * 1 = f$, es decir,

$$\sum_{d \mid n} F(d) = f(n), \forall n \in \mathbb{N}.$$

Si $F(n) = 0$ para cada n no libre de cuadrado, entonces

$$f(n) = \sum_{d \mid n} F(d) = \sum_{d \mid n_*} F(d) = f(n_*),$$

es decir, f es separable.

Supóngase ahora que f es separable. Se tiene que para cada primo p y para cada $m > 1$,

$$\begin{aligned} F(p^m) &= \sum_{d \mid p^m} \mu(d) f\left(\frac{p^m}{d}\right) = \mu(1)f(p^m) + \mu(p)f(p^{m-1}) \\ &= f(p^m) - f(p^{m-1}) = f(p) - f(p) = 0. \end{aligned}$$

Además como f es multiplicativa, entonces F también lo es. Si n es un entero positivo no libre de cuadrado, entonces existen un primo p y enteros positivos q y $m > 1$ tales que $n = p^m q$ y $(p^m, q) = 1$. Luego $F(n) = F(p^m)F(q) = 0 \cdot F(q) = 0$. ■

Lema 1.4. Si f es multiplicativa y separable, entonces para cualesquiera $a, b \in \mathbb{N}$ se tiene:

$$(I) \quad f(a)f(b) = f(ab)f((a, b)).$$

$$(II) \quad f(a) = f((a, b)) \sum_{\substack{d|a \\ (d,b)=1}} (\mu * f)(d)$$

Demostración. (I) Nótese que si p es un primo y $m, n > 1$ entonces

$$f(p^m)f(p^n) = f(p)f(p) = f(p^{m+n})f((p^m, p^n)),$$

pues $(p^m, p^n) = p^i$, con $i = \min\{m, n\}$. Sean $a, b \in \mathbb{N}$ y escríbase sin pérdida de generalidad $a = p_1^{\alpha_1} \cdots p_r^{\alpha_r}$ y $b = p_1^{\beta_1} \cdots p_r^{\beta_r}$, $0 \leq \alpha_i, \beta_i$. Entonces, como f es multiplicativa,

$$\begin{aligned} f(ab)f((a, b)) &= f(p_1^{\alpha_1+\beta_1} \cdots p_r^{\alpha_r+\beta_r})f(p_1^{\min\{\alpha_1, \beta_1\}} \cdots p_r^{\min\{\alpha_r, \beta_r\}}) \\ &= f(p_1^{\alpha_1+\beta_1}) \cdots f(p_r^{\alpha_r+\beta_r})f(p_1^{\min\{\alpha_1, \beta_1\}}) \cdots f(p_r^{\min\{\alpha_r, \beta_r\}}) \\ &= f(p_1^{\alpha_1+\beta_1}) \cdots f(p_r^{\alpha_r+\beta_r})f((p_1^{\alpha_1}, p_1^{\beta_1})) \cdots f((p_r^{\alpha_r}, p_r^{\beta_r})) \\ &= f(p_1^{\alpha_1})f(p_1^{\beta_1}) \cdots f(p_r^{\alpha_r})f(p_r^{\beta_r}) \\ &= f(p_1^{\alpha_1} \cdots p_r^{\alpha_r})f(p_1^{\beta_1} \cdots p_r^{\beta_r}) \\ &= f(a)f(b) \end{aligned}$$

(II) Al igual que en la demostración anterior, si $F = \mu * f$, entonces

$$\sum_{d|n} F(d) = f(n), \forall n \in \mathbb{N}.$$

Se verá primero que los conjuntos $\{d \in \mathbb{N} : d \mid a_* \text{ y } (d, b) = 1\}$ y $\{d \in \mathbb{N} : d \mid a_*/(a, b)_*\}$ son iguales.

Para empezar, se tiene que $a_*/(a, b)_*$ es un entero. Si $(a, b)_* = 1$ esto es claro. Si $(a, b)_* > 1$ se puede escribir $(a, b)_* = q_1 \cdots q_s$, donde todos los primos son distintos. Luego $q_i \mid (a, b)_*$, pero $(a, b)_* \mid (a, b)$ y $(a, b) \mid a$, por tanto $q_i \mid a$ y por tanto $q_i \mid a_*$. Como $i \in \{1, \dots, s\}$ fue arbitrario y todos los primos q_i son distintos, entonces $q_1 \cdots q_s = (a, b)_* \mid a_*$, que es lo que se quería probar.

Procedamos a probar la igualdad de los conjuntos. Supóngase primero que $d \mid a_*$ y $(d, b) = 1$. Entonces existe $c \in \mathbb{N}$ tal que $a_* = dc$. Por otro lado, se tiene que $(a, b) \mid b$ y por tanto $((a, b), d) = 1$, más aún, como $(a, b)_* \mid (a, b)$ entonces también

$((a, b)_*, d) = 1$ y como $(a, b)_* \mid a_* = dc$, por el lema de Euclides se debe tener que $(a, b)_* \mid c$ es decir, $a_* = (a, b)_* dq$, para algún $q \in \mathbb{N}$, luego $d \mid a_*/(a, b)_*$.

Recíprocamente, supóngase que $d \mid a_*/(a, b)_*$. Se debe tener que

$$\left(\frac{a_*}{(a, b)_*}, b \right) = 1. \quad (1.2)$$

Pues en caso contrario, es decir, si este máximo común divisor fuera mayor que uno, existiría un primo p tal que $p \mid b$ y $p \mid a_*/(a, b)_*$, pero $a_*/(a, b)_* \mid a_*$, luego $p \mid a_*$ y por tanto $p \mid a$. En consecuencia, $p \mid (a, b)$ y por tanto $p \mid (a, b)_*$. Se puede escribir entonces $a_* = pp_1 \cdots p_r$, $(a, b)_* = pq_1 \cdots q_s$, donde todos los primos son distintos. Además, como $a_* = (a, b)_* n$ para algún $n \in \mathbb{N}$, se tiene que $pp_1 \cdots p_r = pq_1 \cdots q_s r_1 \cdots r_t$, con $n = r_1 \cdots r_t$, y r_i números primos, no necesariamente distintos. Luego $p_1 \cdots p_r = q_1 \cdots q_s r_1 \cdots r_t$ y dado que ninguno de los primos p_i son iguales a p , entonces ninguno de los primos r_j puede ser igual a p , es decir p no divide a $n = a_*/(a, b)_*$, lo cual es absurdo.

Esto prueba la igualdad de dichos conjuntos. Ahora es fácil calcular la siguiente suma,

$$\sum_{\substack{d \mid a \\ (d, b)=1}} F(d) = \sum_{\substack{d \mid a_* \\ (d, b)=1}} F(d) = \sum_{d \mid a_*/(a, b)_*} F(d) = \sum_{d \mid (a_*/(a, b)_*)} (\mu * f)(d) = f(a_*/(a, b)_*).$$

Además, por una demostración similar a la de la ecuación (1.2), se tiene que

$$\left((a, b)_*, \frac{a_*}{(a, b)_*} \right) = 1.$$

Finalmente, como f es multiplicativa,

$$f(a) = f(a_*) = f((a, b)_*) f(a_*/(a, b)_*) = f((a, b)) \sum_{\substack{d \mid a \\ (d, b)=1}} (\mu * f)(d).$$

■

Ejemplo 1.1. La función $\bar{\varphi} = \varphi(n)/n$ es separable. Nótese que para cualquier primo p y $m > 0$ se tiene $\varphi(p^m) = p^m - p^{m-1}$, luego $\varphi(p^m)/p^m = 1 - p^{-1}$ y también $\varphi(p)/p = 1 - p^{-1}$. Ahora, si $n = p_1^{\alpha_1} \cdots p_r^{\alpha_r}$ entonces, como φ es multiplicativa,

$$\frac{\varphi(n)}{n} = \frac{\varphi(p_1^{\alpha_1})}{p_1^{\alpha_1}} \cdots \frac{\varphi(p_r^{\alpha_r})}{p_r^{\alpha_r}} = \left(1 - \frac{1}{p_1}\right) \cdots \left(1 - \frac{1}{p_r}\right) = \frac{\varphi(p_1)}{p_1} \cdots \frac{\varphi(p_r)}{p_r} = \frac{\varphi(n_*)}{n_*}$$

Lema 1.5 (Fórmula de Hölder). *Para cada $n \in \mathbb{N}$ se tiene*

$$c_r(n) = \frac{\varphi(r)\mu\left(\frac{r}{(n,r)}\right)}{\varphi\left(\frac{r}{(n,r)}\right)}$$

Demostración. Se tiene

$$c_r(n) = \sum_{d|(n,r)} \mu\left(\frac{r}{d}\right) d = \sum_{\substack{d|(n,r) \\ \left(\frac{r}{(n,r)}, \frac{(n,r)}{d}\right) > 1}} \mu\left(\frac{r}{d}\right) d + \sum_{\substack{d|(n,r) \\ \left(\frac{r}{(n,r)}, \frac{(n,r)}{d}\right) = 1}} \mu\left(\frac{r}{d}\right) d, \quad (1.3)$$

pero si $(r/(n,r), (n,r)/d) > 1$ entonces r/d debe tener un factor cuadrado, pues en este caso existe un primo p tal que $p \mid r/(n,r)$ y $p \mid (n,r)/d$, luego $r = p(n,r)q_1$ y $(n,r) = pdq_2$ para algunos enteros q_1 y q_2 , luego $r = p^2dq_1q_2$ y por tanto $p^2 \mid r/d$, así que $\mu(r/d) = 0$. Luego la ecuación (1.3) es igual a

$$\begin{aligned} \sum_{\substack{d|(n,r) \\ \left(\frac{r}{(n,r)}, \frac{(n,r)}{d}\right) = 1}} \mu\left(\frac{r}{d}\right) d &= \sum_{\substack{d|(n,r) \\ \left(\frac{r}{(n,r)}, \frac{(n,r)}{d}\right) = 1}} \mu\left(\frac{r}{(n,r)}\right) \mu\left(\frac{(n,r)}{d}\right) d \\ &= \mu\left(\frac{r}{(n,r)}\right) \sum_{\substack{d|(n,r) \\ \left(\frac{r}{(n,r)}, \frac{(n,r)}{d}\right) = 1}} \mu\left(\frac{(n,r)}{d}\right) d \\ &= \mu\left(\frac{r}{(n,r)}\right) \sum_{\substack{d|(n,r) \\ \left(\frac{r}{(n,r)}, d\right) = 1}} \mu(d) \frac{(n,r)}{d} \\ &= (n,r) \mu\left(\frac{r}{(n,r)}\right) \sum_{\substack{d|(n,r) \\ \left(\frac{r}{(n,r)}, d\right) = 1}} \frac{\mu(d)}{d} \end{aligned} \quad (1.4)$$

pues μ es multiplicativa. Sea ahora $\Phi = \mu * \bar{\varphi}$, donde $\bar{\varphi}(s) = \varphi(s)/s$ para cada $s \in \mathbb{N}$. Se tiene entonces que

$$\begin{aligned} \Phi(s) &= \sum_{d|s} \mu(d) \bar{\varphi}\left(\frac{s}{d}\right) = \sum_{d|s} \mu(d) \varphi\left(\frac{s}{d}\right) \frac{1}{s/d} = \sum_{d|s} \mu(d) \sum_{e|s/d} \mu(e) \frac{s/d}{e} \frac{1}{s/d} \\ &= \sum_{d|s} \mu(d) \sum_{e|s/d} \frac{\mu(e)}{e} = \sum_{e|s} \frac{\mu(e)}{e} \sum_{d|s/e} \mu(d) = \frac{\mu(s)}{s} \end{aligned} \quad (1.5)$$

pues si $d \mid s$ y $c \mid s/d$, entonces d/s es un entero y $s/d = eq$ para algún entero q , luego $s = deq$ y por tanto $e \mid s$ y $d \mid s/e$. El recíproco es similar. Además, todos los términos en la penúltima suma son cero excepto aquel para el cual $s/e = 1$, es decir, $s = e$. Luego la suma (1.4) es igual a

$$\begin{aligned}
(n, r) \mu \left(\frac{r}{(n, r)} \right) \sum_{\substack{d \mid (n, r) \\ \left(\frac{r}{(n, r)}, d \right) = 1}} \Phi(d) &= (n, r) \mu \left(\frac{r}{(n, r)} \right) \sum_{\substack{d \mid (n, r) \\ \left(\frac{r}{(n, r)}, d \right) = 1}} (\mu * \bar{\varphi}(d)) \\
&= (n, r) \mu \left(\frac{r}{(n, r)} \right) \frac{\bar{\varphi}((n, r))}{\bar{\varphi} \left((n, r), \frac{r}{(n, r)} \right)} \\
&= (n, r) \mu \left(\frac{r}{(n, r)} \right) \frac{\bar{\varphi}(r) \bar{\varphi}((n, r))}{\bar{\varphi}((n, r)) \bar{\varphi} \left(\frac{r}{(n, r)} \right)} \\
&= (n, r) \mu \left(\frac{r}{(n, r)} \right) \frac{\bar{\varphi}(r)}{\bar{\varphi} \left(\frac{r}{(n, r)} \right)} \\
&= (n, r) \mu \left(\frac{r}{(n, r)} \right) \frac{r \varphi(r)}{(n, r) r \varphi \left(\frac{r}{(n, r)} \right)} \\
&= \frac{\mu \left(\frac{r}{(n, r)} \right) \varphi(r)}{\varphi \left(\frac{r}{(n, r)} \right)}
\end{aligned}$$

donde la primera igualdad se cumple por definición de Φ y la ecuación (1.5), la segunda por ser $\bar{\varphi}$ multiplicativa, separable y por el Lema 1.4 (II), la tercera por el Lema 1.4 (I) y la quinta por definición de $\bar{\varphi}$. ■

Teorema 1.1. *Toda función f par mód r tiene una expansión de la forma*

$$f(n) = \sum_{d \mid r} \alpha(d) c_d(n), \quad (1.6)$$

y recíprocamente, toda función aritmética de esta forma es par mód r . Los coeficientes $\alpha(d)$ están dados por

$$\alpha(d) = \frac{1}{r} \sum_{e \mid r} f \left(\frac{r}{e} \right) c_e \left(\frac{r}{d} \right), \quad (1.7)$$

o por la fórmula equivalente,

$$\alpha(d) = \frac{1}{r \varphi(d)} \sum_{m=1}^r f(m) c_d(m).$$

A los coeficientes α se les llamará **coeficientes de Fourier** de la función par f .

Demostración. Es claro que toda función de la forma (1.6) es par mód r , pues por el lema anterior si $d \mid r$ entonces $c_d(n) = c_d((n, r))$. Nótese que

$$\begin{aligned} \sum_{d \mid r} \alpha(d) c_d(n) &= \sum_{d \mid r} \left(\frac{1}{r} \sum_{e \mid r} f\left(\frac{r}{e}\right) c_e\left(\frac{r}{d}\right) \right) c_d(n) \\ &= \frac{1}{r} \sum_{e \mid r} f\left(\frac{r}{e}\right) \sum_{d \mid r} c_e\left(\frac{r}{d}\right) c_d(n) \\ &= \frac{1}{r} \sum_{e \mid r} f\left(\frac{r}{e}\right) \sum_{d \mid r} c_e\left(\frac{r}{d}\right) c_d((n, r)) \\ &= \frac{1}{r} f\left(\frac{r}{q}\right) r = f((n, r)) = f(n), \end{aligned}$$

por el Lema 1.1, donde $r = (n, r)q$, para algún $q \in \mathbb{N}$ y donde la última igualdad se cumple por ser f par mód r .

Por otro lado, de la demostración de la ?? se puede rescatar el hecho de que el conjunto $\{1, 2, \dots, r\}$ es igual a $\bigcup_{e \mid r} \{rx/e : (x, e) = 1, 1 \leq x \leq e\}$ y todos los conjuntos son disjuntos a pares, por tanto

$$\begin{aligned} \frac{1}{r\varphi(d)} \sum_{m=1}^r f(m) c_d(m) &= \frac{1}{r\varphi(d)} \sum_{e \mid r} \sum_{\substack{(x,e)=1 \\ 1 \leq x \leq e}} f\left(\frac{rx}{e}\right) c_d\left(\frac{rx}{e}\right) \\ &= \frac{1}{r\varphi(d)} \sum_{e \mid r} \sum_{\substack{(x,e)=1 \\ 1 \leq x \leq e}} f\left(\left(\frac{rx}{e}, r\right)\right) c_d\left(\left(\frac{rx}{e}, r\right)\right) \\ &= \frac{1}{r\varphi(d)} \sum_{e \mid r} \sum_{\substack{(x,e)=1 \\ 1 \leq x \leq e}} f\left(\frac{r}{e}\right) c_d\left(\frac{r}{e}\right) \\ &= \frac{1}{r\varphi(d)} \sum_{e \mid r} f\left(\frac{r}{e}\right) c_d\left(\frac{r}{e}\right) \varphi(e) \\ &= \frac{1}{r\varphi(d)} \sum_{e \mid r} f\left(\frac{r}{e}\right) c_e\left(\frac{r}{d}\right) \varphi(d) \\ &= \frac{1}{r} \sum_{e \mid r} \left(\frac{r}{e}\right) c_e\left(\frac{r}{d}\right), \end{aligned}$$

donde la segunda igualdad se cumple por ser f par mód r , la tercera por ser $(rx/e, r) = r/e$, pues $(x, e) = 1$ implica que $(r/e)(x, e) = r/e$, y como r/e es un entero positivo,

entonces $(rx/e, r) = r/e$. La cuarta por definición de φ , y la penúltima igualdad se cumple por la fórmula de Hölder (Lema 1.5) y el ??, pues e y d dividen a d , así que

$$c_d\left(\frac{r}{e}\right)\varphi(e) = \frac{\varphi(d)\mu\left(\frac{d}{(r/e, d)}\right)}{\varphi\left(\frac{d}{(r/e, d)}\right)} = \frac{\varphi(d)\mu\left(\frac{e}{(r/d, e)}\right)}{\varphi\left(\frac{e}{(r/d, e)}\right)}\varphi(e) = \varphi(d)c_e\left(\frac{r}{d}\right) \quad (1.8)$$

■

Corolario 1.5. Si f y f' son funciones pares mód r , entonces se verifican las siguientes implicaciones

$$f(n) = \sum_{d|r} f'(d)c_d(n), \forall n \in \mathbb{N} \implies f'(\delta) = \frac{1}{r\varphi(\delta)} \sum_{m=1}^r f(m)c_d(m), \forall \delta | r,$$

$$f'(\delta) = \sum_{m=1}^r f(m)c_\delta(m), \forall d | r \implies f(n) = \frac{1}{r} \sum_{d|r} \frac{f'(d)}{\varphi(d)} c_d(n), \forall n \in \mathbb{N}.$$

Demostración. En efecto, como f es par, entonces f tiene una única representación de la forma (1.6), por tanto se verifica la primera implicación. Para la segunda implicación se tiene que, de nuevo por la ecuación (1.6),

$$f(n) = \sum_{d|r} \left(\frac{1}{r\varphi(d)} \sum_{m=1}^r f(m)c_d(m) \right) c_d(n) = \frac{1}{r} \sum_{d|r} \frac{f'(d)}{\varphi(d)} c_d(n).$$

■

Considerando los casos $\delta = 1$ y $n = r$ se tiene el siguiente corolario.

Corolario 1.6. Si f y f' son funciones pares mód r , entonces

$$f(n) = \sum_{d|r} f'(d)c_d(n), \forall n \in \mathbb{N} \implies f'(1) = \frac{1}{r} \sum_{m=1}^r f(m),$$

$$f'(\delta) = \sum_{m=1}^r f(m)c_\delta(m), \forall d | r \implies f(r) = \frac{1}{r} \sum_{d|r} f'(d).$$

Volviendo a la definición de la suma de Ramanujan módulo r , ??, se puede considerar una clase más general de funciones, aquellas que se pueden escribir como

$$f(n) = \sum_{\delta|(n,r)} g(\delta), \forall n \in \mathbb{N},$$

donde g es una función aritmética.

La siguiente proposición muestra que esta generalización preserva la modularidad respecto a r . Más aún, el Teorema 1.1 permite caracterizar a las funciones pares módulo r de esta forma.

Teorema 1.2. *Toda función f par módulo r se puede expresar como*

$$f(n) = \sum_{\delta|(n,r)} g(\delta), \forall n \in \mathbb{N}. \quad (1.9)$$

Y recíprocamente, toda función aritmética que tenga esta forma es par módulo r .

Demostración. Dado que $(n, r) = ((n, r), r)$, es claro que toda función aritmética que tenga dicha forma es par mód r . Supóngase que f es par mód r . Por el Teorema 1.1, se puede escribir

$$\begin{aligned} f(n) &= \sum_{d|r} \alpha(d) c_d(n) = \sum_{d|r} \alpha(d) \sum_{\delta|(n,d)} \mu\left(\frac{d}{\delta}\right) \delta \\ &= \sum_{\delta|(n,d)} \sum_{d|r} \alpha(d) \mu\left(\frac{d}{\delta}\right) \delta = \sum_{\delta|(n,r)} \delta \sum_{d|r} \mu\left(\frac{d}{\delta}\right) \delta = \sum_{\delta|(n,r)} g(\delta) \end{aligned}$$

■

En vista de que toda función par tiene al menos dos representaciones, la del teorema anterior y la del Teorema 1.1, cabe preguntarse si existe alguna relación entre ellas. El siguiente teorema da respuesta a esta inquietud.

Teorema 1.3. *Si f es par módulo r , entonces sus respectivas expansiones (1.6) y (1.9) están relacionadas mediante la fórmula*

$$\alpha(d) = \frac{1}{r} \sum_{e|r/d} g\left(\frac{r}{e}\right) e.$$

Demostración. Se tiene que

$$\begin{aligned} \alpha(d) &= \frac{1}{r} \sum_{\delta|r} f\left(\frac{r}{\delta}\right) c_\delta\left(\frac{r}{d}\right) = \frac{1}{r} \sum_{\delta|r} c_\delta\left(\frac{r}{d}\right) \sum_{e|(r/\delta, \delta)} g(e) = \frac{1}{r} \sum_{\delta|r} c_\delta\left(\frac{r}{d}\right) \sum_{e|r/\delta} g(e) \\ &= \frac{1}{r} \sum_{\delta|r} c_\delta\left(\frac{r}{d}\right) \sum_{e|r/\delta} g(e) = \frac{1}{r} \sum_{e|r} g\left(\frac{r}{e}\right) \sum_{\delta|e} c_\delta\left(\frac{r}{d}\right) \\ &= \frac{1}{r} \sum_{e|r} g\left(\frac{r}{e}\right) \cdot \begin{cases} e & \text{si } e \mid r/d \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases} = \frac{1}{r} \sum_{e|r/d} g\left(\frac{r}{e}\right) e. \end{aligned}$$

por el corolario 1.1. ■

1.2. El subespacio de funciones pares

Recuérdese del ?? que el anillo $(\mathcal{A}, +, *)$ es un álgebra conmutativa con identidad. Se tiene que el conjunto de funciones pares es un subespacio de \mathcal{A} , pero no es un subanillo, pues en general $(f * g)(n) \neq (f * g)((n, r))$ aún cuando f y g sean pares mód r , tome por ejemplo dos funciones constantes. Se denotará como \mathcal{A}_r al conjunto de funciones pares módulo r .

Proposición 1.5. *El conjunto \mathcal{A}_r es una subespacio de \mathcal{A} .*

Demostración. Basta verificar las siguientes condiciones:

- (I) $\mathcal{A}_r \neq \emptyset$
- (II) $f, g \in \mathcal{A}_r$ implica $f + g \in \mathcal{A}_r$
- (III) $c \in \mathbb{C}$ y $f \in \mathcal{A}_r$ implica $cf \in \mathcal{A}_r$.

Claro que $\mathbf{0} \in \mathcal{A}_r$. Sea $n \in \mathbb{N}$ y supóngase que $f, g \in \mathcal{A}_r$. Se tiene que $(cf)(n) = cf(n) = cf((n, r)) = (cf)((n, r))$, luego $cf \in \mathcal{A}_r$.

Además, $(f + g)(n) = f(n) + g(n) = f((n, r)) + g((n, r)) = (f + g)((n, r))$, así que $f + g \in \mathcal{A}_r$. ■

El corolario 1.3 afirma que las sumas de Ramanujan $\mathcal{B}_r = \{c_d\}_{d|r}$ son linealmente independientes respecto a la suma sobre los divisores de r , además el Teorema 1.1 nos permite expresar cualquier función par como una suma de este tipo. En otras palabras, el conjunto \mathcal{B}_r es una base del espacio vectorial \mathcal{A}_r .

Corolario 1.7. *El espacio vectorial \mathcal{A}_r tiene dimensión $d(r)$.*

En lo que sigue de esta sección se verá que los coeficientes de la expansión (1.6) pueden ser derivados de un producto interno en este espacio de funciones.

Proposición 1.6. *La operación $\langle \ , \ \rangle : \mathcal{A}_r \times \mathcal{A}_r \longrightarrow \mathbb{R}$ definida como*

$$\langle f, g \rangle = \sum_{d|r} \varphi(d) f\left(\frac{r}{d}\right) \overline{g\left(\frac{r}{d}\right)}$$

es un producto interno en \mathcal{A}_r .

Demostración. Sean $c \in \mathbb{C}$ y $f, g, h \in \mathcal{A}_r$. Escribase $f(n) = f_1(n) + if_2(n)$ para todo $n \in \mathbb{N}$, donde $f_1, f_2 \in \mathcal{A}_{\mathbb{R}}$. Entonces

(I)

$$\begin{aligned}\langle f, f \rangle &= \sum_{d|r} \varphi(d) \left[f_1\left(\frac{r}{d}\right) + if_2\left(\frac{r}{d}\right) \right] \overline{\left[f_1\left(\frac{r}{d}\right) + if_2\left(\frac{r}{d}\right) \right]} \\ &= \sum_{d|r} \varphi(d) \left[f_1^2\left(\frac{r}{d}\right) + f_2^2\left(\frac{r}{d}\right) \right] \geq 0\end{aligned}$$

Además, si $\langle f, f \rangle = 0$, como todos los términos de la suma anterior son positivos, se debe tener que $f_1(d) = f_2(d) = 0$ para todo d divisor de r . Si $n \in \mathbb{N}$ entonces $f_1(n) = f((n, r)) = 0$, pues f es par mód r y $(n, r) \mid r$. Análogamente se tiene $f_2(n) = 0$. Luego $f(n) = f_1(n) + if_2(n) = 0$ para cada $n \in \mathbb{N}$, es decir $f = 0$.

(II)

$$\begin{aligned}\langle f + g, h \rangle &= \sum_{d|r} \varphi(d) (f + g)\left(\frac{r}{d}\right) \overline{g\left(\frac{r}{d}\right)} = \sum_{d|r} \varphi(d) \left[f\left(\frac{r}{d}\right) \overline{g\left(\frac{r}{d}\right)} + g\left(\frac{r}{d}\right) \overline{h\left(\frac{r}{d}\right)} \right] \\ &= \sum_{d|r} \varphi(d) f\left(\frac{r}{d}\right) \overline{h\left(\frac{r}{d}\right)} + \sum_{d|r} \varphi(d) g\left(\frac{r}{d}\right) \overline{h\left(\frac{r}{d}\right)} = \langle f, h \rangle + \langle g, h \rangle\end{aligned}$$

(III)

$$\langle cf, g \rangle = \sum_{d|r} \varphi(d) cf\left(\frac{r}{d}\right) \overline{g\left(\frac{r}{d}\right)} = c \sum_{d|r} \varphi(d) f\left(\frac{r}{d}\right) \overline{g\left(\frac{r}{d}\right)} = c \langle f, g \rangle$$

(IV)

$$\overline{\langle g, f \rangle} = \overline{\sum_{d|r} \varphi(d) g\left(\frac{r}{d}\right) \overline{f\left(\frac{r}{d}\right)}} = \sum_{d|r} \varphi(d) f\left(\frac{r}{d}\right) \overline{g\left(\frac{r}{d}\right)} = \langle f, g \rangle$$

■

El producto interno así definido podría haberse escrito sin el factor $\varphi(d)$ dentro de la suma. Su uso se justifica al usar la ecuación (1.8) para probar que este producto interno hace de \mathcal{B}_r una base ortogonal de \mathcal{A}_r .

Proposición 1.7. Si i, j son divisores positivos de r , entonces

$$\langle c_i, c_j \rangle = \begin{cases} r\varphi(j) & \text{si } i = j \\ 0 & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

Demostración. En efecto,

$$\langle c_i, c_j \rangle = \sum_{d|r} \varphi(d) c_i \left(\frac{r}{d} \right) c_j \left(\frac{r}{d} \right) = \sum_{d|r} c_i \left(\frac{r}{d} \right) \varphi(j) c_d \left(\frac{r}{j} \right) = \begin{cases} r\varphi(j) & \text{si } i = j \\ 0 & \text{en otro caso,} \end{cases}$$

donde la segunda igualdad se cumple por la ecuación (1.8) y la tercera por el Lema 1.1. ■

Corolario 1.8. *El conjunto*

$$\mathcal{B}'_r = \left\{ c'_d = \frac{1}{\sqrt{r\varphi(d)}} c_d \right\}_{d|r}$$

es una base ortonormal de \mathcal{A}_r .

Como consecuencia del corolario anterior, toda función f par mód r debe tener una expansión de la forma $\sum_{e|r} \beta(e) c'_e$. Además, si d es un divisor arbitrario de r , entonces

$$\langle f, c'_d \rangle = \left\langle \sum_{e|r} \beta(e) c'_e, c'_d \right\rangle = \sum_{e|r} \beta(e) \langle c'_e, c'_d \rangle = \beta(d),$$

pero f también tiene una única representación de la forma $\sum_{e|r} \alpha(d) c_d$, en consecuencia, $\alpha(d) = \beta(d) / \sqrt{r\varphi(d)}$ para cada d divisor de r . Por tanto,

$$\begin{aligned} \alpha(d) &= \frac{\beta(d)}{\sqrt{r\varphi(d)}} = \frac{1}{\sqrt{r\varphi(d)}} \langle f, c'_d \rangle \\ &= \frac{1}{\sqrt{r\varphi(d)}} \sum_{e|r} \varphi(e) f \left(\frac{r}{e} \right) c'_d \left(\frac{r}{e} \right) \\ &= \frac{1}{\sqrt{r\varphi(d)}} \sum_{e|r} \varphi(e) f \left(\frac{r}{e} \right) \frac{1}{\sqrt{r\varphi(d)}} c_d \left(\frac{r}{e} \right) \\ &= \frac{1}{r\varphi(d)} \sum_{e|r} f \left(\frac{r}{e} \right) \varphi(d) c_e \left(\frac{r}{d} \right) \\ &= \frac{1}{r} \sum_{e|r} f \left(\frac{r}{e} \right) c_e \left(\frac{r}{d} \right), \end{aligned}$$

donde la cuarta igualdad se cumple nuevamente por (1.8). Esta es la ecuación (1.7). Como es usual en el análisis funcional, ahora se pueden llamar propiamente *coeficientes de Fourier* a los coeficientes α del Teorema 1.1.

2. Procesamiento de señales

Una *señal* es una descripción de un fenómeno que evoluciona en el tiempo o espacio; el *procesamiento de señales* se refiere a cualquier operación manual o mecánica que modifique, analice o manipule de otra forma la información contenida en una señal. Considérese, por ejemplo, la temperatura ambiente; se puede medir su evolución con el tiempo de muchas formas y los datos resultantes representan una “señal” de temperatura. Algunas operaciones sobre esta señal se pueden hacer incluso a mano, por ejemplo calcular la temperatura promedio en un mes o graficar la señal en una hoja de papel.

El adjetivo “digital” proviene de *digitus*, palabra latina para dedo. En este contexto, se refiere a un paradigma en el que el mundo físico se puede describir usando únicamente números enteros. El *procesamiento digital de señales* es por tanto una rama del procesamiento de señales en la cual todo, incluido el tiempo, es descrito en términos de números enteros. En el procesamiento de digital de señales, la representación abstracta subyacente siempre es el conjunto de números naturales, independientemente de la naturaleza de la señal [15].

Definición 2.1. Más específicamente, una *señal* es cualquier función $x : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{C}$.

Observación 2.1. Es necesario establecer las dos convenciones siguientes a lo largo del capítulo, siguiendo la notación estándar en la literatura de procesamiento de señales:

- El valor de una señal x en un índice entero n se denotará como $x[n]$, con corchetes en vez de paréntesis.
- A partir de ahora se le denotará j a la unidad imaginaria, es decir, $j = \sqrt{-1}$.

En este capítulo se estudiará una clase particular de señales periódicas, llamadas señales *simétricas* o *pares*, con las herramientas del capítulo anterior. Estas señales no son más que funciones aritméticas pares definidas en los enteros.

2.1. Transformada Discreta de Fourier

Definición 2.2. (Señal periódica). Desde luego, una señal periódica con periodo $r \in \mathbb{N}$ es una señal para la cual $x[n] = x[n + kr]$ para cada $n, k \in \mathbb{Z}$.

Una señal periódica con periodo r contiene toda su información en un periodo, en el cuál toma r valores complejos. Considérese pues un arreglo con estos valores, es decir, un elemento de \mathbb{C}^r .

Sea $W_r = e^{-j(2\pi/r)}$ y considérese el producto interno $\langle x, y \rangle = \sum_{n=1}^r \overline{x[n]}y[n]$ en \mathbb{C}^r . Se sabe, véase por ejemplo [15], que el conjunto $\{w_k\}_{k=1}^r$, donde

$$w_k = (W_r^{-k}, W_r^{-2k}, \dots, W_r^{-(r-1)k}, 1) \in \mathbb{C}^r, k = 1, \dots, r,$$

es una base ortogonal de \mathbb{C}^r . En efecto,

$$\langle w_m, w_n \rangle = \sum_{i=1}^r \overline{W_r^{-mi}} W_r^{-ni} = \sum_{i=1}^r W_r^{(m-n)i} = \begin{cases} r & \text{si } m = n \\ \frac{1 - W_r^{(m-n)r}}{1 - W_r^{m-n}} = 0 & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

Por otro lado, si $x \in \mathbb{C}^r$, existen por tanto $X(k) \in \mathbb{C}, k = 1, \dots, r$, tales que $rx = \sum_{k=1}^r X[k]w_k$. Pero

$$\langle w_k, x \rangle = \left\langle w_k, \frac{1}{r} \sum_{n=1}^r X[n]w_n \right\rangle = \frac{1}{r} \sum_{n=1}^r \langle w_k, X[n]w_n \rangle = \frac{X[k]}{r} r = X[k].$$

En consecuencia,

$$X[k] = \sum_{n=1}^r \overline{W_r^{-nk}} x[n] = \sum_{n=1}^r x[n] W_r^{nk}, \forall k = 1, \dots, r \quad (2.1)$$

y

$$x[n] = \frac{1}{r} \sum_{k=1}^r X[k]w_k[n] = \frac{1}{r} \sum_{k=1}^r X[k]W_r^{-nk}, \forall n = 1, \dots, r. \quad (2.2)$$

Las ecuaciones (2.1) y (2.2) se conocen como las fórmulas de *análisis* y *síntesis* de la *Transformada Discreta de Fourier* del elemento $x \in \mathbb{C}^r$, respectivamente.

Considere la ecuación de síntesis (2.2). Dado que $W_r^{(n+ir)k} = W_r^{nk}$ para cada $i \in \mathbb{Z}$, entonces $x[n + ir] = x[n]$ para todos $i \in \mathbb{Z}, n = 1, \dots, r$, de manera que se puede extender $x \in \mathbb{C}^r$ a una señal periódica a todo \mathbb{Z} de forma natural.

Si ahora \tilde{x} es una señal periódica con periodo r se pueden escribir, gracias a la observación anterior y a las fórmulas de análisis y síntesis,

$$\tilde{X}[k] = \sum_{n=1}^r \overline{W_r^{-nk}} \tilde{x}[n] = \sum_{n=1}^r \tilde{x}[n] W_r^{nk}, \forall k \in \mathbb{Z} \quad (2.3)$$

y

$$\tilde{x}[n] = \frac{1}{r} \sum_{k=1}^r \tilde{X}[k]w_k[n] = \frac{1}{r} \sum_{k=1}^r \tilde{X}[k]W_r^{-nk}, \forall n \in \mathbb{Z}. \quad (2.4)$$

La representación (2.4) de la señal \tilde{x} se llama *Serie Discreta de Fourier* y sus fórmulas de análisis y síntesis son idénticas a las anteriores para elementos de \mathbb{C}^r , con la diferencia de que los índices son válidos en todo el dominio \mathbb{Z} .

2.2. Señales simétricas

Las señales simétricas son un análogo a las funciones aritméticas pares estudiadas en el capítulo anterior.

Definición 2.3. (Señal simétrica). Una señal x se dice *simétrica módulo r* si $x[n] = x[(n, r)]$ para cada $n \in \mathbb{Z}$.

Toda señal simétrica módulo r es periódica módulo r y la demostración es idéntica a la de la Proposición 1.1.

Bibliografia

- [1] APOSTOL, T. M. *Introduction to Analytic Number Theory*. Springer, 1976.
- [2] BELL, E. T. Arithmetic of logic. *Transactions of the American Mathematical Society* 29, 3 (1927), 597–611.
- [3] BELL, E. T. Outline of a theory of arithmetical functions in their algebraic aspects. *The Journal of the Indian Mathematical Society* 17 (1928), 249–260.
- [4] BRUALDI, R. A. *Introductory Combinatorics*, 3 ed. Prentice-Hall, 1999.
- [5] CASHWELL, E. D., AND EVERETT, C. J. The ring of number-theoretic functions. *Pacific Journal of Mathematics* 9, 4 (1959).
- [6] COHEN, E. A class of arithmetical functions. *Proceedings of the National Academy of Sciences of the United States of America* 41, 11 (1955).
- [7] DICKSON, L. E. *History of the Theory of Numbers*, vol. I. Chelsea Publishing Company, 1952.
- [8] GAUSS, C. F. *Disquisitiones Arithmeticae*, english ed. Springer-Verlag, 1966.
- [9] HARDY, G. H., AND WRIGHT, E. M. *An Introduction to the Theory of Numbers*, 5 ed. Oxford University Press, 1979.
- [10] HUNGERFORD, T. W. *Algebra*. Springer, 1974.
- [11] KNOPFMACHER, J. *Abstract Analytic Number Theory*, vol. 12. North-Holland Publishing Company, 1975.
- [12] KNOPFMACHER, J. Fourier analysis of arithmetical functions. *Annali di Matematica Pura ed Applicata* 109 (1976), 177–201.
- [13] MURTY, M. R. Ramanujan series for arithmetical functions. *Hardy-Ramanujan Journal* 36 (2013).
- [14] NISHIMURA, H. On the unique factorization theorem for formal power series. *Journal of Mathematical Sciences, Kyoto Univ.* (1967).
- [15] PRANDONI, P., AND VETTERLI, M. *Signal processing for communications*, 1 ed. EPFL Press, 2008.

-
-
- [16] RAMANUJAN, S. On certain trigonometric sums and their applications in the theory of numbers. *Transactions of the Cambridge Phil. Society* 22 (1918), 179–199.
 - [17] REARICK, D. F. Operators on algebras of arithmetic functions. *Duke Mathematical Journal* 35 (1968), 761–766.
 - [18] ZALDÍVAR, F. *Introducción a la teoría de números*, 1 ed. Fondo de Cultura Económica, 2014.