PROYECTO ROTACIONES

CITM · MATEMÀTIQUES II · 2021

RESUMEN. En este proyecto trabajaremos la representación de giros en $\mathbb{R}^3$ en el modelo de la esfera de radio π. Recordamos que un giro del α radianes en sentido anti-horario alrededor del eje definido por el vector unitario u se representa mediante un vector en $\mathbb{R}^3$ en dirección de u con longitud α, donde $0 \leq \alpha \leq \pi$.

1. Instalación de software

Instalar los paquetes `GTK` y `Graphics` en `julia` mediante los comandos

```
import Pkg; Pkg.add(["Gtk", "Graphics"])
```

y estudiar los ejemplos en

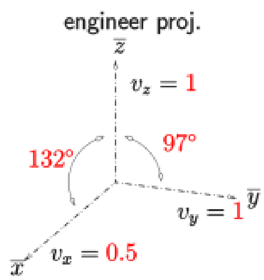
```
~/.julia/packages/Gtk/<hash-value>/example
```

y

`https://juliagraphics.github.io/Gtk.jl/latest/`

2. La ventana básica

1. Encuentra la matriz que lleve los vectores de la base estándard de $\mathbb{R}^3$ a los vectores en $\mathbb{R}^2$ que definen la *axonometría de los ingenieros*:



2. Escribe una función `to_2d` en `julia` que proyecte un vector de $\mathbb{R}^3$ a esta axonometría.
3. Escribe una función `rotate_phi_z` en `julia` que aplique un giro de φ grados alrededor del eje z a un vector en $\mathbb{R}^3$
4. Escribe un fichero en `julia` que dibuje una ventana con los siguientes elementos:
   (a) Una caja de entrada de texto con etiqueta φ
   (b) Un `GtkCanvas` para poder dibujar
   (c) En el `Canvas`, la imagen en $\mathbb{R}^2$ mediante `to_2d` de los tres vectores de la base estándard en $\mathbb{R}^3$, después de efectuar el giro de φ grados alrededor del eje z mediante `rotate_phi_z`. Los tres vectores se han de representar mediante una flecha y en tres colores distintos.

   El dibujo en la ventana ha de actualizarse después de cada cambio en el valor de φ.

Para resolver los problemas en esta página se puede colaborar via Discord.

3. Conversión de rotaciones

Escribe $2\binom{3}{2} = 6$ funciones `a_to_b`, `b_to_a` en `julia` con

$$\texttt{a}, \texttt{b} \in \{\ \texttt{axis\_angle},\ \texttt{mat},\ \texttt{quat}\ \}$$

que convierten las representaciones de un giro mediante eje-ángulo, matrices 3×3 de rotación, y cuaterniones entre sí.

4. El modelo de la bola de rotaciones

Representaremos el conjunto SO(3) de rotaciones en $\mathbb{R}^3$ mediante el modelo de la bola $B_\pi \subset \mathbb{R}^3$ de radio π con centro el origen. Recordamos que para un vector $u \in B_\pi$,

- la dirección (más precisamente, la recta $\mathbb{R} \cdot u$ que genera) representa el eje de giro
- la longitud $0 \leq \|u\| \leq \pi$ representa el ángulo de giro en sentido contra-reloj alrededor del eje $\mathbb{R} \cdot u$
- se identifican puntos diametralmente opuestos en la frontera de B_π.

Esta bola es la que representaremos en la ventana de la sección 2

1. Añadid campos de texto a la ventana para poder entrar
   - un vector y un ángulo
   - y las cuatro coordenadas de un cuaternión.

   Siempre que se cambie uno de estos campos, los demás se deben actualizar automáticamente mediante las funciones de la sección 3. Al lado del vector y el cuaternión se deben representar el vector unitario y el cuaternión unitario correspondiente, sin poderse editar, y éstos son los datos que se utilizarán para convertir a diferentes representaciones.
2. Representad, además, la matriz de rotación correspondiente; no hace falta hacerla editable
3. Dibujad en el canvas el vector u que representa a la rotación actual en el modelo B_π. Este vector ha de tener un color distinto a los vectores base.
4. Escribid una función en `julia` que reduzca el tamaño de un vector en $\mathbb{R}^3$ y lo traslada a un punto dado (un reescalado seguido de una translación).
5. En la punta del vector u dibujad en tamaño pequeño unos ejes de coordenadas que representan cómo la rotación u afecta al sistema de coordenadas. Utilizad la función del apartado anterior.

Todos estos dibujos se han de actualizar si el usuario cambia uno de los campos de texto.

Hasta aquí es obligatorio; lo que viene a continuación es optativo.

5. Composición de rotaciones

1. Añadid un campo para poder entrar un número natural n.
2. Dentro en la bola B_π, distribuid n puntos a lo largo de la circunferencia de radio $30° = \pi/6$ con centro el origen y contenida en el plano xy.
3. Repetid, con colores distintos, con n puntos distribuidos en circunferencias del mismo radio $\pi/6$ en los planos xz e yz.
4. En cada punto representad, como en el apartado 5 anterior, un sistema de coordinadas que muestra el efecto de la rotación correspondiente.

Estos puntos representan unas rotaciones fijas que no cambiarán si el usuario cambia la entrada.

4. Calculad las composiciones $R \circ R_i$, donde R_i son las rotaciones fijas de los apartados anteriores, y R es la rotación que define el usuario. Utilizad la representación de rotaciones `axis_angle`, `mat`, `quat` que os parezca mejor para ello.
5. Dibujad también los vectores que representan a los giros compuestos $R \circ R_i$, y las sistemas de coordenadas correspondientes.

De esta manera, ojalá obtengamos una intuición para el efecto de componer rotaciones.