PROYECTO TRANSFORMACIONES AFÍNES

CITM · MATEMÀTIQUES II · 2021

1. Calentamiento (1 punto)

El punto p tiene

- coordenadas $p_A = (3, 4)$ en el sistema ortonormal afín de coordenadas A, y
- coordenadas $p_B = (-2{,}5, 0{,}5)$ en el sistema ortonormal afín de coordenadas B.

De los sistemas de coordenadas sabemos que

- el ángulo entre el eje x de A y el eje y de B es de $30°$ en sentido contra-reloj.

1. Cuáles son las coordenadas del origen de A, vistas desde B?
2. Cuáles son las coordenadas del origen de B, vistas desde A?
3. Cuáles son las coordenadas del punto q expresadas en A, si $q_B = (3, 1)$?

2. 3 puntos:

Sean A, B, C tres sistemas ortonormales de coordenadas afínes de $\mathbb{R}^3$. Sabemos que

- El origen de coordenadas de B visto desde A es $(3, 1, -2)$
- El origen de coordenadas de C visto desde B es $(-3, 1, -2)$
- Los ejes de los tres sistemas tienen orientaciones diferentes en el espacio. Concretamente, para llegar de los ejes del sistema A a los ejes del sistema B hay que girar
  - $25°$ alrededor del eje z; después
  - $145°$ alrededor del eje y; después
  - $30°$ alrededor del eje x.
- Si B y C tendrían el mismo origen, entonces la transformación

  $$w \longmapsto q\, w\, q^*$$

  permitiría expresar en el sistema B un vector definido en el sistema C, donde

  $$q \;=\; \frac{1}{7}\left(-\frac{7\sqrt{3}}{2} + 3\boldsymbol{i} - \boldsymbol{j} - \frac{3}{2}\boldsymbol{k}\right).$$

Además, hay dados los puntos v_1, v_2 cuyas coordenadas en C son $(0, 2, 0)$ y $(0, 2, 5)$, respectivamente.

Con todos estos datos, determina

1. La expresión afín que transforma un vector dado en el sistema C al sistema B. No hace falta calcular valores concretos.
2. La matriz afín que convierte las coordenadas de un vector en el sistema C al sistema A.

3. 3 puntos:

Las filas contenidas en el archivo `circle.txt` son coordenadas de puntos contenidos en una circunferencia con respecto de la base canónica.

En el punto $(1, 6, 1)$ hay una cámara con longitud focal $1/34\,\mathrm{m}$, a cuya orientación se llega girando el sistema canónico de coordenadas $90°$ alrededor del eje y, y después $-20°$ alrededor del eje z resultante.

1. Proyecta los puntos del archivo al plano focal de la cámara y dibuja el resultado.
2. Haz un dibujo 3d de toda la escena, con los dos sistemas ortonormales de coordenadas y los puntos de la circunferencia.

4. 3 PUNTOS:

Los cuatro puntos a, b, c, d cuyas coordenadas son las columnas de la matriz

$$\begin{bmatrix} 0{,}9115 & 3{,}7207 & 1{,}9659 & 2{,}6663 \\ 1{,}9397 & 2{,}8794 & 1{,}0000 & 3{,}8191 \\ 3{,}3304 & 4{,}4372 & 3{,}2588 & 4{,}5087 \end{bmatrix}$$

definen dos segmentos, $\overline{ab}$ y $\overline{cd}$. Estos segmentos están observados por una cámara, de la cual sabemos que

- El origen del sistema de coordenadas global, visto desde la cámara, está en $(4{,}665; 3{,}735; -0{,}5395)$.
- A la orientación de los ejes de la cámara se llega girando el sistema global un ángulo de $-150°$ alrededor del eje $u = (0{,}01; -0{,}2; 1{,}0)$.

Con todos estos datos,

1. Verifica que los dos segmentos se intersectan.
2. Calcula el ángulo entre los dos segmentos en el espacio.
3. Calcula el ángulo entre los dos segmentos en el plano de la imagen de la cámara.
4. Dibuja en 3d la escena, en las coordenadas globales.
5. Dibuja en 3d la misma escena, pero esta vez en las coordenadas de la cámara.