

Pràctica 6:

Feixos de raigs catòdics

GRUP A6

Isaac Baldi García (1667260)
Miguel Ordejón de Prada (1710966)
Eira Jacas García (1666616)
Víctor Bosch González (1676373)

Març 2025

Abstract: En aquesta pràctica s'estudia el comportament d'un feix de raigs catòdics sota un camp elèctric i un camp magnètic amb l'objectiu de determinar propietats de les partícules que els conformen. Concretament, analitzant les desviacions del feix dels raigs sota aquests camps s'obté la relació entre la càrrega i la massa d'aquestes partícules.

Índex

1	Introducció Teòrica	3
2	Mètode Experimental	5
3	Desviació electroestàtica	6
4	Desviació magnetoestàtica	7
5	Desviació electromagnètica	9
6	Conclusions	10
A	Càlcul d'incerteses	12
B	Regressions lineals	12
C	Trajectòria rectilínia amb camp elèctric i camp magnètic aplicat	13

1 Introducció Teòrica

El camp elèctric generat pel condensador que desviarà el feix es pot considerar un camp uniforme:

$$E = \frac{kV_p}{d} \quad (1)$$

On V_p és el potencial aplicat entre les plàques, d la separació entre elles ($d = 54\text{mm}$) i k una constant que té en compte els efectes de varada degut a que el condensador no es pot considerar ideal, ja que la distàcia és del ordre del tamany.

Una partícula de massa m i càrrega q sota l'influència d'un camp elèctric uniforme en direcció y i magnitud E i amb velocitat en direcció x i magnitud v_0 descriurà la següent trajectòria:

$$x = v_0 t \quad y = -\frac{qEt^2}{2m} \quad (2)$$

Tenint en compte la conservació de l'energia tenim:

$$\frac{1}{2}mv_0^2 = qV_a \quad (3)$$

On V_a és el potencial amb què s'acceleren les partícules.

Combinant les equacions 1, 2 i 3 finalment obtenim:

$$y = \frac{kV_p x^2}{4dV_a} \quad (4)$$

Y apartir del pendent m d'una recta de regressió lineal y l'equació (4):

$$k = \frac{4mdV_a}{V_p} \quad (5)$$

El camp d'inducció magnètica generat per unes bobines de Hemholtz es pot aproximar al camp uniforme

$$\vec{B} = \frac{32\pi n I}{5\sqrt{5}r} \times 10^{-7} \quad \hat{z} \quad \text{Wb/m}^2. \quad (6)$$

Per la llei de Lorentz, una partícula carregada negativament sota un camp d'inducció magnètica, \vec{B} , pateix una força

$$\vec{F} = q\vec{v} \times \vec{B}. \quad (7)$$

En el nostre cas, \vec{v} és perpendicular a \vec{B} i, per tant, les partícules dels raigs catòdics seguiran una trajectòria circular d'equació

$$R = \frac{x^2 + y^2}{2y}. \quad (8)$$

On R és el radi del cercle i hem agafat el centre de coordenades a la boca del tub de raigs catòdics i l'eix x del sistema paral·lel a la direcció de sortida dels raigs.

Iguant la força centrípeta a la força de Lorentz obtenim la relació

$$Bqv = \frac{mv^2}{R} \quad (9)$$

que combinada amb l'equació 6 ens dona la relació entre el radi i la intensitat de corrent

$$R = K \frac{1}{I} \quad \text{on} \quad K = \frac{mv5\sqrt{5}r}{32\pi n} \times 10^7. \quad (10)$$

Tenint en compte l'equació 9 i la llei de la conservació de l'energia mecànica, $qV_a = \frac{1}{2}mv^2$, s'obté

$$\frac{q}{m} = \frac{2V_a}{B^2 R^2} \quad (11)$$

que ens permetrà calcular la relació $\frac{q}{m}$ de les partícules.

Una altra manera de calcular la relació càrrega/massa de les partícules dels raigs catòdics és igualant forces elèctriques i magnètiques. Fent-ho, arribem a la següent equació:

$$qE = qvB \quad (12)$$

Amb la que es troba que la velocitat vindrà donada pel quocient:

$$v = \frac{E}{B} \quad (13)$$

Podem obtenir el radi de la trajectòria circular deguda només a la desviació magnètica com hem explicat prèviament.

De les Eqs (17), (9) es pot deduir l'equació que emprem en la secció 5 per a calcular la relació càrrega/massa a partir de les nostres dades experimentals:

$$\frac{q}{m} = \frac{E}{RB^2} = \frac{kV_p}{dK^2 I^2 R} \quad (14)$$

2 Mètode Experimental

El mètode seguit ha constatat de diverses parts explicades al guió de la pràctica, sempre ajustant al màxim possible l'exactitud de les mesures. Primerament, s'ha aplicat una diferència de potencial al tub de raigs catòdics i s'ha fet visible un feix lluminós sobre una regla. Tot seguit s'ha estudiat la desviació d'aquest feix al aplicar un camp elèctric, generat per un condensador planoparal·lel, o magnètic, generat per unes bobines de Hemholtz, ambdós uniformes i perpendiculars. En aquest punt, mitjançant un dispositiu mòbil s'han fotografiat els diferents casos. Aleshores, s'ha processat cada imatge, ja a ordinador, amb un programa d'edició que permet ajustar les mesures del feix mitjançant els propis píxels de les fotografies comparats amb les marques de la regla. Es a dir, comptant aquests píxels i convertint-los a centímetres. Aquest doncs, ha estat el procediment seguit: triar a consciència diversos punts del feix i donar-ne la posició (x,y) més exacta possible, sempre sent possibles errors degut al processat de la fotografia o al desplaçament de píxels. Més precisament, s'ha aplicat una grid (cuadrícula) sobre els espais compresos entre cada marca de la regla, coincidint amb cada variació de 1 cm, per cada eix. Així, per cada una de les imatges s'ha establert una conversió píxel/cm. S'inclou un exemple gràfic (1) a continuació:

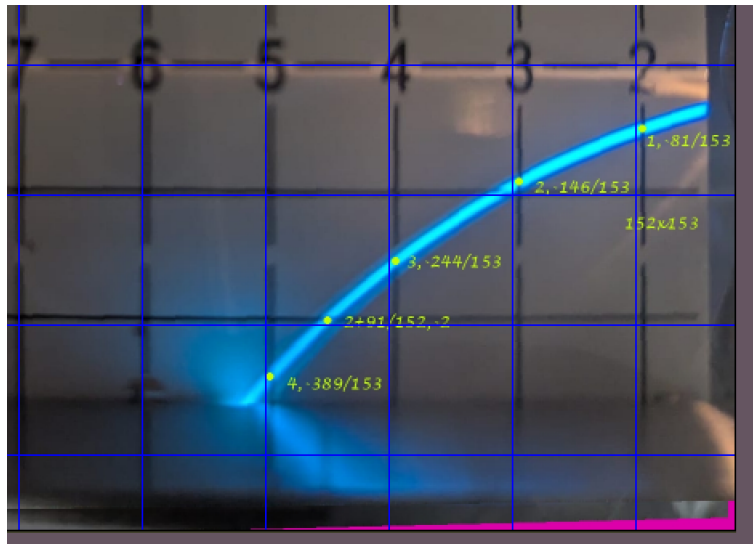


Figura 1: Imatge modificada després de l'aplicació de la grid corresponent amb la seva relació px/cm: 152/1 i 153/1.

Llavors, per cada un dels punts s'ha determinat la posició dins la grid comptant els píxels de separació amb la frontera del quadrat corresponent, i finalment, s'han convertit a centímetres. Amb aquests resultats, s'ha estudiat la desviació de la trajectòria; fet crucial pel desenvolupament de la prova, doncs les partícules del feix es poden identificar segons aquest comportament.

3 Desviació electroestàtica

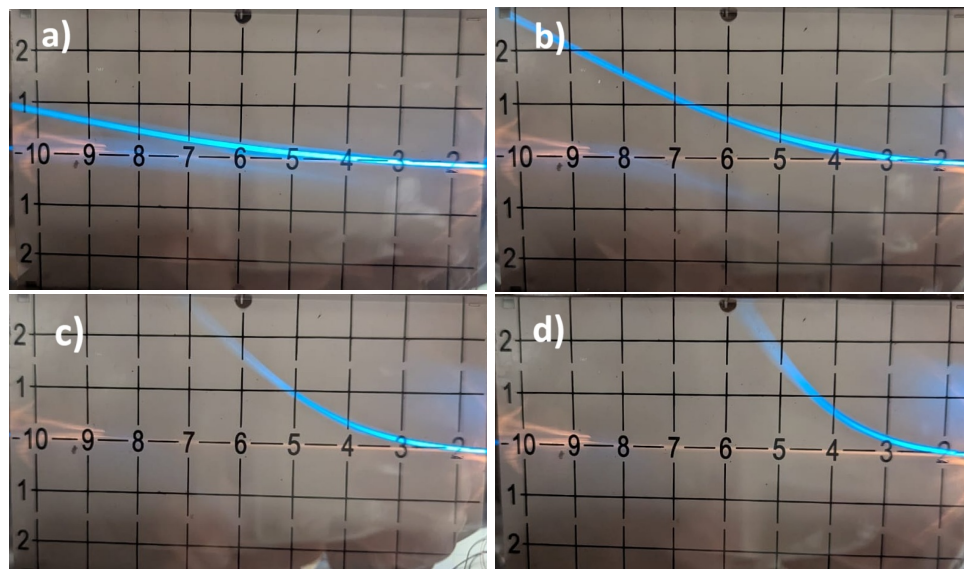


Figura 2: Desviació del raig en presència del camp elèctric generat per les plaques. (a) 1kV, (b) 2kV, (c) 3kV, (d) 4kV

Com es mostra en la figura 2, en subministrar una diferència de potencial a les plaques s'observa com el raig es desvia cap al càtode. Per tant, les partícules de les què està compost els raigs catòdics tenen una càrrega negativa.

Per comprovar que les trajectòries es tracten de paràboles hem fet una regressió de les y en funció de les x^2 , com es mostra a la figura (3). Aquestes tenen un coeficient de correlació $r^2 \sim 0,98$ ¹, confirmant que les partícules segueixen una trajectòria parabòlica. Alhora, a partir del pendent d'aquestes regressions junt amb l'equació (5) obtenim els valors de la constant k per a els diferents valors del potencial V_p ².

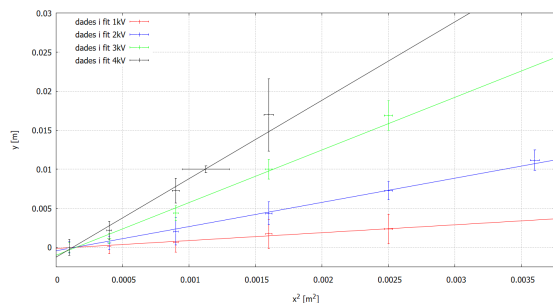


Figura 3: Regressió de y en funció de x^2 de la desviació deguda al camp elèctric

V_p (V)	k
(1000 ± 200)	(0.87 ± 0.19)
(2000 ± 200)	(1.35 ± 0.15)
(3000 ± 200)	(1.94 ± 0.16)
(4000 ± 200)	(2.17 ± 0.16)

Taula 1: Resultats experimentals de les constants k del condensador per cada valor del potencial V_p .

¹Les regressions lineals en detall es troben a l'annex B

²El càlcul de les incerteses es mostra a l'annex A

4 Desviació magnetoestàtica

Després de comprovar que les partícules dels raigs catòdics tenen càrrega negativa (secció 3) n'estudiem la interacció amb el camp magnètic, substancialment uniforme, generat per unes bobines de Hemholtz. Al aplicar el camp, com era d'esperar, hem observat que els raigs es corbaven i ens hem disposat a estudiar les dependències d'aquesta corba i el seu radi amb la intensitat del corrent de les bobines i amb el potencial dels raigs catòdics.

Per calcular el radi de la trajectòria de les partícules dels raigs catòdics en funció de la intensitat de corrent de les bobines hem usat l'equació (8) que defineix el radi com el pendent de la recta de regressió entre $x^2 + y^2$ i $2y$. A la figura (4) hem representat algunes d'aquestes regressions i ja podem veure com a mesura que augmenta la intensitat, el pendent de la recta, és a dir el radi de les partícules, disminueix.

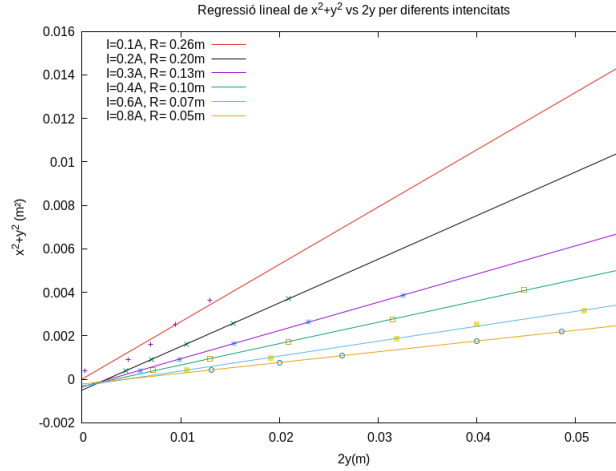


Figura 4: Regressió per diverses intensitats de les bobines de Hemholtz de $x^2 + y^2$ en front $2y$ on y i x són punts de la trajectòria dels raigs catòdics. La pendent de les rectes és el radi de corbatura de la trajectòria.

Agafant 0.1A, 0.2A, 0.3A, 0.4A, 0.5A, 0.6A, 0.7A, 0.8A com a intensitats de mostreig hem obtingut els radis de corbatura de la taula (2)³. Amb aquestes dades (excloent l'última dada ja que té massa incertesa) hem construït la gràfica de la figura (5) on es mostra que la variació de R és lineal amb la variació de $\frac{1}{I}$. Al fer la regressió lineal del radi en funció de l'inversa de l'intensitat hem obtingut la recta

$$y = x(0.03976 \pm 0.0006) + (0.0002 \pm 0.0016) \quad (15)$$

amb un coeficient de determinació de $r^2 = 0.99$. Per tant, la relació és certament lineal i és compatible amb l'equació teòrica (9) ja que a més a més, l'ordenada a l'origen inclou el zero. El resultat de que R és inversament proporcional a I es produeix de que al augmentar la intensitat de les bobines de Hemholtz el camp d'inducció magnètica augmenta provocant que les partícules rebin més força centrípeta que provoca la disminució del radi de la trajectòria.

Per calcular el radi de la trajectòria de les partícules dels raigs catòdics en funció del potencial

³El càlcul de les incerteses es mostra a l'annex A

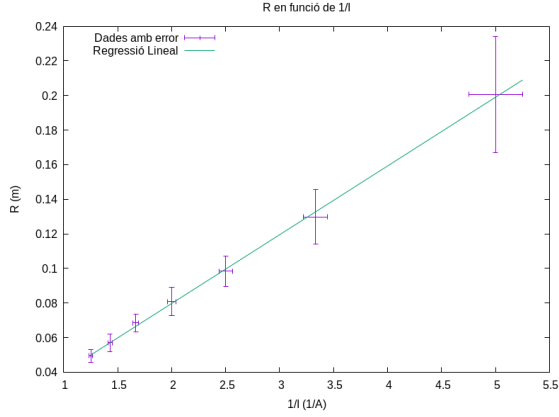


Figura 5: Regressió de R en funció de $1/I$ excloent l'últim punt que perd la tendència.

$I(A)$	$R (m)$
$(0,800 \pm 0,010)$	$(0,0494 \pm 0,0037)$
$(0,700 \pm 0,010)$	$(0,0570 \pm 0,0048)$
$(0,600 \pm 0,010)$	$(0,0685 \pm 0,0051)$
$(0,500 \pm 0,010)$	$(0,0808 \pm 0,0082)$
$(0,400 \pm 0,010)$	$(0,0983 \pm 0,0089)$
$(0,300 \pm 0,010)$	$(0,1298 \pm 0,016)$
$(0,200 \pm 0,010)$	$(0,201 \pm 0,034)$
$(0,100 \pm 0,010)$	$(0,26 \pm 0,10)$

Taula 2: Resultats experimentals dels radis de la trajectòria per cada valor d'intensitat de corrent.

d'acceleració d'aquestes usem l'equació (8) que defineix el radi com el pendent de la recta de regressió entre $x^2 + y^2$ i $2y$. Agafant $2kV$, $3kV$, $4kV$ i $5kV$ com a potencials de mostreig s'obtenen els radis de corbatura de la taula (3). Amb aquestes dades hem construït la gràfica de la figura (6) on es mostra que la variació de R és quadràtica amb la variació de V_a . AL fer la regressió lineal de R^2 respecte V_a hem obtingut la recta

$$y = x(2.93 \times 10^{-6} \pm 0.27 \times 10^{-6}) + (0.00228 \pm 0,00098) \quad (16)$$

amb un coeficient de determinació $r^2 = 0.98$. Per tant, la relació és certament lineal (quadràtica respecte R) i compatible amb l'equació teòrica (11).

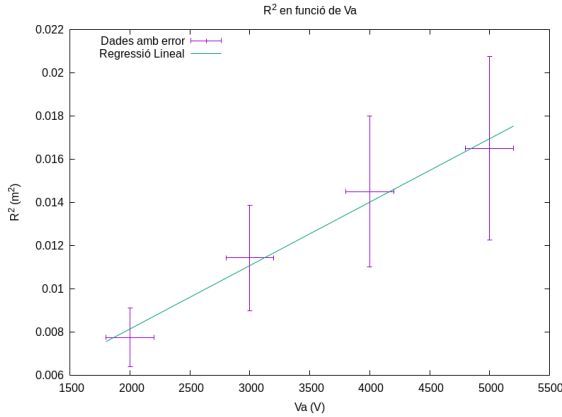


Figura 6: Regressió dels punts experimentals de R^2 en funció de V_a . Veïem que la relació és clarament lineal.

$V_a (V)$	$R (m)$
(2000 ± 200)	(0.0880 ± 0.0077)
(3000 ± 200)	(0.107 ± 0.011)
(4000 ± 200)	(0.120 ± 0.014)
(5000 ± 200)	(0.128 ± 0.015)

Taula 3: Resultats experimentals dels radis de la trajectòria per cada valor de potencial d'acceleració.

Finalment, amb l'equació (11) i els resultats de tots els radis hem calculat que la relació q/m de les partícules dels raigs catòdics té un valor de

$$\frac{q}{m} = (-4.16 \pm 0.88) \times 10^{11} \quad C/Kg.$$

Per fer-ho hem calculat la regressió lineal ajustada entre $2V_a$ i B^2R^2 i hem obtingut la recta $y = (4.16 \pm 0.38)x - (1412.64 \pm 791.71)$ amb un coeficient de determinació de $R^2 = 0.98$. El pendent d'aquesta recta ens ha donat el valor de q/m i després hem afegit l'incertesa instrumental al resultat. La linealitat dels punts indica que els nostres resultats concorden amb la teoria ja que com veiem a l'equació (11) la relació ha de ser lineal. Per altra banda si mirem la relació q/m dels electrons veiem que no és compatible amb el nostre resultat però sí que coincideix en ordre de magnitud. Això pot ser degut a que el camp magnètic generat per les bobines de Hemholtz no és uniforme fent que el seu valor difereixi del teòric.

5 Desviació electromagnètica

En aquest tercer apartat ens interessem la relació càrrega/massa de les partícules dels raigs catòdics per a comprovar que aquesta coincideix amb la de l'electró.

Tenint en compte el que ja hem pogut observar en els apartats anteriors: la desviació parabòlica a l'aplicar un camp elèctric E i desviació circular a l'aplicar el camp magnètic B , el que ens interessa en aquest tercer apartat és aplicant els camps de tal manera que de les dues deflexions estiguin al mateix pla però en amb direccions oposades. D'aquesta manera, aconseguim que la trajectòria dels raig catòdics no es vegi desviada, fet que ens permet igualar l forces elèctriques i magnètiques de tal manera què arribem a la següent equació:

$$qE = qvB \quad (17)$$

Amb la que es troba que la velocitat vindrà donada pel quocient

$$v = \frac{E}{B} \quad (18)$$

Podem obtenir el radi de la trajectòria circular deguda només a la desviació magnètica com s'explica a la secció 4.

De les Eqs (17), (8) es pot deduir l'equació que emprem per a calcular la relació càrrega/massa de la partícula que forma els raigs catòdics a partir de les nostres dades experimentals:

$$\frac{q}{m} = \frac{E}{RB^2} = \frac{kV_p}{dK^2I^2R} \quad (19)$$

Primerament, hem trobat el valor de la diferència de potencial aplicat entre les plaques amb el qual la desviació de la trajectòria rectilínia paral·lela a l'eix de les abscisses és mínima⁴.

En concret hem hagut d'aplicar una diferència de potencial $V_p = (0,85 \pm 0,20)$ kV per compensar un camp magnètic generat per bobines amb intensitat de $I = (0,10 \pm 0,01)$ mA i un potencial $V_a = 3$ kV per a l'acceleració de les partícules dels raigs catòdics.

⁴L'ampliació respecte aquest aspecte es troba en l'annex C

Fixant aquests valors de pontencial i d'intensitat, posteriorment es suprimeix el camp elèctric \vec{E} per poder mesurar el radi de la trajectòria que deguda només de la desviació magnètica d'igual manera que en la secció 4, el qual ha resultat ser $R = (0.263 \pm 0.033)$ m.

Vp (kV)	I (A)	x (cm)	y (cm)
0.85 ± 0.20	0.10 ± 0.01	2.00 ± 0.10	0.01 ± 0.10
		3.00 ± 0.10	0.23 ± 0.10
		4.00 ± 0.10	0.35 ± 0.10
		5.00 ± 0.10	0.47 ± 0.10
		6.00 ± 0.10	0.65 ± 0.10

Amb aquestes dades hem obtingut el radi de la trajectòria pel mètode dels mínims quadrats, on aquest venia donat pel pendent de la recta de regressió lineal.

Essent la recta en qüestió:

$$y = (0.263 \pm 0.033)x + (0.00094 \times 10^{-2} \pm 0.00027) \quad (20)$$

amb un coeficient de determinació $r^2 = 0.96$.

La constant del condensador k , la qual té en compte els efectes de vorada de les plaques, la podem obtenir com hem fet prèviament a la secció 3.

D'altra banda la constant de les bobines de Hemholtz K ve determinada per la geometria d'aquestes, com s'explica en la secció 4.

Per últim, un cop hem trobat la relació càrrega-massa q/m^5 podem comparar-la amb la relació e/m , on e correspon a la càrrega d'un electró i m a la seva massa.

$$\boxed{\frac{q}{m} = (-3.6 \pm 2.2) \times 10^{11} \quad C/Kg.}$$

Tot i que coincideix en ordre de magnitud, observem que el nostre resultat q/m queda lluny del resultat que esperàvem. No obstant, el valor és comparable amb l'esperat degut a la gran incertesa que comporta haver emprat aquest mètode experimental.

6 Conclusions

A partir de l'experimentació amb els raigs catòdics, s'han obtingut resultats que confirmen el comportament esperat dels electrons sota la influència de camps elèctrics i magnètics.

En aplicar una diferència de potencial en les plaques del condensador, s'ha observat que el feix de partícules es desvia en la direcció contrària al camp elèctric. Al travessar una regió amb un camp magnètic uniforme, la trajectòria del feix canvia a una corba amb un radi que té dependència inversament proporcional amb el quocient càrrega/massa (q/m) i amb la intensitat del camp magnètic.

⁵El càlcul de les incerteses associades a aquest resultat es presenten en l'annex A

Així doncs, s'ha verificat que els feixos tractats, els raigs catòdics, estan compostos per partícules carregades negativament i que efectivament, són electrons. Tanmateix, fixant-nos en les diferències numèriques trobades al comparar els nostres resultats amb els esperats podem concloure que el disseny experimental és prou bo per a estudiar la relació càrrega/massa de les partícules dels raigs catòdics però no suficientment exacte. Hauriem de millorar el nostre mètode experimental per tal de minimitzar els errors en la presa de dades experimentals.

A Càlcul d'incerteses

Incertesa instrumental: Hem agafat $\sigma_c = \pm 0.01A$ i $\sigma_t = \pm 100V$ com les incerteses de la font de corrent i la font de tensió respectivament. Per altra banda, hem agafat la mitjana del gruix del raig catòdic com l'incertesa en la mesura dels punts de la trajectòria, ja que per trobar els punts hem usat un mètode de processat d'imatge molt exacte. Això d'ona una incertesa de les mesures de posició: $\sigma_l = \pm 0.0014m$.

Propagació d'errors: Per trobar les incerteses de magnituds dependents d'altres magnituds mesurables hem usat l'equació de propagació d'incerteses

$$\sigma_y^2 = \sum_{i=1}^N \left(\frac{\partial y}{\partial x_i} \right)^2 \sigma_{x_i}^2 \quad (21)$$

on y és la magnitud dependent i x_i les variables mesurables.

Per l'incertesa de la constant k (Equació (5))

$$\sigma_k^2 = \left(\frac{4dV_a}{V_p} \right)^2 \sigma_m^2 + \left(\frac{4md}{V_p} \right)^2 \sigma_{V_a}^2 + \left(\frac{4mdV_a}{V_p^2} \right)^2 \sigma_{V_p}^2 \quad (22)$$

Per l'incertesa instrumental del radi (Equació (8))

$$\sigma_{R,ins}^2 = \left(\frac{\partial R(x,y)}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial R(x,y)}{\partial y} \right)^2 = \sigma_l^2 \left[\left(\frac{x}{y} \right)^2 \left(1 - \frac{(x^2 + y^2)^2}{2y^2} \right) \right] \quad (23)$$

En el cas del càlcul de l'incertesa dels radis, hem calculat l'incertesa combinada

$$\sigma_R = \sqrt{\sigma_{R,ins}^2 + \sigma_{R,est}^2} \quad (24)$$

on $\sigma_{R,ins}$ és l'incertesa instrumental trobada amb l'equació (23) evaluada als valors mitjans de y i x de cada corba i $\sigma_{R,est}$ l'incertesa estadística del pendent calculada amb la regressió que hem usat per trobar el radi.

B Regressions lineals

Per fer regressions lineals que tenen en compte les incerteses individuals de cadascun dels punts hem utilitzat el mètode de mínims quadrats ponderats (weighted least squares).

Donada una funció $f(x, \vec{\beta})$ a ajustar (en el nostre cas $f(x) = mx + n$):

$$f(x, \vec{\beta}) = \sum_{j=1}^m \beta_j \phi_j(x) \quad (25)$$

On β_j són els paràmetres a ajustar i ϕ_j són funcions de x (en el nostre cas $\phi_1 = x$, $\beta_1 = m$ i $\phi_2 = 1$, $\beta_2 = n$)

$$\hat{\beta} = (X^T W X)^{-1} X^T W \vec{y} \quad (26)$$

$$M^\beta = (X^T W X)^{-1} \quad (27)$$

On $\hat{\beta}$ és l'estimador de β , M^β la matriu de variància dels estimadors, d'on els elements de la diagonal són la desviació estàndard al quadrat dels estimadors i, per tant, l'incertesa és l'arrel quadrada dels elements de la diagonal. W és la matriu (diagonal) de ponderació, X és la matriu de les variables independents i \vec{y} el vector de la variable dependent.

$$W_{ii} = \frac{1}{\sigma_i^2} \quad (28)$$

$$X_{ij} = \phi_j(x_i) \quad (29)$$

C Trajectòria rectilínia amb camp elèctric i camp magnètic aplicat

Notem que aquesta trajectòria de fet, no és igual de rectilínia a la trajectòria que podem observar quan no hi ha aplicat ni camp elèctric ni camp magnètic. Això és degut a la no uniformitat que suposem tant del camp elèctric com del camp magnètic.

Per una banda el condensador no és ideal, ja que les plaques són petites, lluny de poder-se considerar infinites però és cert que aquests efectes de vorada ja els tenim en compte al calcular la seva k mitjançant la regressió lineal.

D'altra banda, el solenoide emprat no és ideal tampoc, ja que la seva longitud no és molt més gran que el radi. Això implica que el camp en l'interior sigui de magnitud més gran com més aprop de l'eix central de la bobina ens trobem. Aquest és l'efecte que podem observar en les imatges, podem veure com la trajectòria dels raigs catòdics presenta més desviació deguda al camp magnètic quan passa pel centre del solenoide.