Análisis combinatorio

Isaac Cortés Olmos

Universidad de Atacama

25 de marzo de 2025

Esquema

- Factorial.
- Permutaciones.
- Combinatorias.

Análisis combinatorio

Factorial

- El factorial de un número entero positivo n, denotado como $n!$, es el producto de todos los números enteros positivos desde n hasta 1.
- Definición:

$$n! = n \times (n-1) \times (n-2) \times \ldots \times 3 \times 2 \times 1$$

- Por convención: $0! = 1$

Ejemplos:

- Un restaurante ofrece 5 platos principales. Si un cliente quiere probar todos los platos, pero en un orden diferente cada vez, ¿de cuántas formas puede hacerlo?
- Un puesto de helados ofrece 4 sabores diferentes y el cliente pide un cono con 4 bolas, una de cada sabor. Si el orden en que se apilan las bolas importa, ¿de cuántas maneras puede organizarse el helado?

Análisis combinatorio

Teorema

- Si una operación consta de k pasos, de los cuales el primero se puede llevar a cabo de n_1 maneras, para cada una de estas el segundo paso se puede efectuar de n_2 maneras, para cada uno de los primeros dos el tercer paso se puede hacer en n_3 maneras, y así sucesivamente, entonces la operación completa se puede realizar en $n_1 \times n_2 \times n_3 \times \ldots n_k$ maneras.

Ejemplo: Elección de un tour en el norte de Chile

- Imagina que un turista llega a San Pedro de Atacama y tiene las siguientes opciones para organizar su día:
  - Mañana: Puede elegir entre visitar el Valle de la Luna (V_1), Géiseres de Tatio (V_2) y Salar de Atacama (V_3).
  - Tarde: Puede elegir entre bañarse en las Termas de Puritama (T_1), visitar la laguna Cejar (T_2) o practicar sandboarding en el valle de Marte (T_3).
- Encuentre el número de maneras diferentes posibles de combinación de actividades.

Análisis combinatorio

Teorema

- El número de permutaciones de n objetos diferentes tomados r a la vez es

$$P(n,r) = \frac{n!}{(n-r)!}$$

Ejemplo:

- Supongamos que en Copiapó se organiza una competencia de motocross en las dunas de Medanoso y hay 5 pilotos inscritos: A, B, C, D y E.
- Si queremos determinar cúantas maneras distintas pueden llegar los tres primeros lugares (oro, plata y bronces), estamos ante una permutación sin repetición, ya que el orden sí importa (llegar primero no es lo mismo que llegar tercero).

Análisis combinatorio

Solución:

- La fórmula de permutaciones es:

$$P(5,3) = \frac{5!}{(5-3)!} = \frac{5!}{2!} = \frac{5 \times 4 \times 3 \times 2!}{2!} = 60,$$

- con $n = 5$ (pilotos en total) y $r = 3$ (puestos que se ocupan en el podio).

Análisis combinatorio

Teorema

- El número de permutaciones de n objetos de los cuales n_1 son de una clase, n_2 son de una segunda clase,..., n_k son de la k-ésima clase y $n_1 + n_2 + \ldots + n_k = n$ es:

$$\frac{n!}{n_1!n_2!\ldots n_k!}$$

Análisis combinatorio

Ejemplo:

- ¿De cuántas maneras se pueden ordenar las letras de la palabra MIMOSA?

Solución:

1. La palabra MIMOSA tiene 6 letras, por lo que $n = 6$.
2. La letra M se repite 2 veces y las demás letras (I, O, S, A) aparecen 1 vez cada una. Entonces, tenemos que $n_1 = 2$, $n_2 = 1$, $n_3 = 1$, $n_4 = 1$ y $n_5 = 1$.
3. Reemplazando en la fórmula, tenemos

$$
\begin{aligned}
P &= \frac{6!}{2!1!1!1!1!} \\
&= \frac{720}{2} \\
&= 360.
\end{aligned}
$$

Ejercicio:

- En Tierra Amarilla, famosa por su minería, se organiza una exhibición de minerales en un museo. Se tienen 8 minerales en total, pero algunos son del mismo tipo:
  - 3 de oro (O).
  - 2 de cobre (C).
  - 3 de plata (S).
- ¿De cuántas maneras se pueden ordenar los 8 minerales en una vitrina?

Análisis combinatorio

Teorema

- El número de combinaciones de n objetos diferentes tomados r a la vez es

$$\binom{n}{r} = \frac{n!}{r!(n-r)!}$$

- para $r = 0, 1, 2 \ldots, n$.

Análisis combinatorio

Ejemplo:

- Un grupo de geólogos en la mina de Chuquicamata ha recolectado 10 muestras de roca y necesitan elegir 3 de ellas para un análisis de laboratorio. El orden en que se eligen las muestras no importa.

Solución:

1. $n = 15$ (trabajadores) y $r = 4$ (trabajadores a seleccionar)
2. Aplicar la fórmula

$$\begin{aligned}\binom{15}{4} &= \frac{15!}{4!(15-4)!}\\ &= \frac{32760}{24}\\ &= 1365.\end{aligned}$$

Análisis combinatorio

Ejercicio:

- Una empresa minera tiene 8 perforadoras disponibles, pero solo necesita usar 5 para una exploración. ¿De cuántas maneras pueden elegirlas?

Solución:

1. $n = 15$ (trabajadores) y $r = 4$ (trabajadores a seleccionar)
2. Aplicar la fórmula

$$\binom{8}{5} = \frac{8!}{5!(8-5)!} = \frac{8 \times 7 \times 6}{3!} = 56.$$

Referencias

Freud, J. (2000). Estadística Matemática con Aplicaciones. Pearson