Pruebas de Hipótesis

Isaac Cortés Olmos

Universidad de Atacama

June 5, 2025

Esquema

1. Pruebas de Hipótesis
   - Pruebas de hipótesis: la varianza σ^2 desconocida

Pruebas de Hipótesis

Pruebas de hipótesis

Propiedades de la distribución χ^2

- χ^2 es no negativa en su valor; es cero o de valor positivo.
- χ^2 no es simétrica; es sesgada a la derecha.
- χ^2 está distribuida para formar una familia de distribuciones, una distribución separada para cada número diferente de grados de libertad.

Pruebas de hipótesis

Suposición

- Inferencias acerca de la varianza σ^2 o desviación estándar σ : la población muestreada está normalmente distribuida.

Intervalos de confianza para σ^2

- $\left(\dfrac{(n-1)S^2}{\chi^2_{(n-1),\alpha/2}} ; \dfrac{(n-1)S^2}{\chi^2_{(n-1),1-\alpha/2}} \right)$.
- Con $(n-1)$ grados de libertad.

Procedimiento de pruebas de hipótesis

Estadística de prueba de hipótesis

$$\chi^{2*} = \frac{(n-1)S^2}{\sigma^2} \text{ con } (n-1) \text{ g.l.} \tag{1}$$

Ejemplo

La compañía embotelladora de bebidas gaseosas desea controlar la variabilidad en la cantidad de líquido, no permitiendo que la varianza exceda de 0.0004. Una muestra de tamaño 28 con una varianza de 0.0007, ¿indica que el proceso de embotellado está fuera de control (respecto a la varianza) al nivel de significación de 0.05?

Procedimiento

1. **El inicio:**
   a) Describir el parámetro poblacional de interés.
   b) Expresar H_0 y H_1.
2. **Criterios de prueba de hipótesis:**
   a) Comprobar las suposiciones.
   b) Identificar la distribución de probabilidad y la estadística de prueba a usar.
   c) Determinar el nivel de significación α
3. **La evidencia muestral:**
   a) Recolectar la información muestral.
   b) Calcular el valor de la estadística de prueba.
4. **La distribución de probabilidad:**
   a) Determina la región crítica y el (los) valor (es) crítico(s).
   b) Determinar si el estadístico de prueba está o no en la región crítica.
5. **Los resultados:**
   a) Expresar la decisión acerca de H_0.
   b) Expresar la conclusión acerca de H_1.

Procedimiento

1. **El inicio:**
   a) σ^2, varianza en la cantidad de líquido de una bebida gaseosa durante el proceso de embotellado.
   b) $H_0 : \sigma^2 = 0.0004$ ($\leq$ no es mayor a 0.0004) y
   $H_1 : \sigma^2 > 0.0004$ (varianza es mayor a 0.0004).
2. **Criterios de prueba de hipótesis:**
   a) La cantidad de líquido puesto en una botella está por lo general normalmente distribuida. Al comprobar la distribución de la muestra, podemos verificar esto.
   b) La distribución ji cuadrada se usará con $g.l = (n–1) = 28 - 1 = 27$.
   c) $\alpha = 0.05$
3. **La evidencia muestral:**
   a) $n = 28$ y $S^2 = 0.0007$.
   b) $\chi^{2*} = \frac{(28-1)0.0007}{0.0004} = 47.25$.

Procedimiento

4. **La distribución de probabilidad:**
   a) $\chi^2_{27;0.05} = 40.1$.
   b) $\chi^{2*} = 47.25$ se encuentra en la región crítica.
5. **Los resultados:**
   a) Rechazar H_0.
   b) En el nivel de significación de 0.05, concluimos que el proceso de embotellado está fuera de control con respecto a la varianza.

Pruebas de hipótesis

Ejercicio 1

- El fabricante dice que una sustancia química fotográfica tiene una duración útil en depósito que está normalmente distribuida alrededor de una media de 180 días, con una desviación estándar de no más de 10 días. Como usuario de esta sustancia química, Fast Photo está interesado en que la desviación estándar pueda ser diferente de 10 días; de otro modo, comprará una cantidad mayor mientras la sustancia química sea parte de una promoción especial. Se seleccionaron y probaron 12 muestras aleatorias, resultando una desviación estándar de 14 días. Al nivel de significación de 0.05, ¿le parece que esta muestra presenta suficiente evidencia para demostrar que la desviación estándar es diferente de 10 días?

Pruebas de hipótesis

Propiedades de la distribución binomial

Si una muestra aleatoria de tamaño n se selecciona de una gran población con $\mathbb{P}(\text{éxito}) = p$, entonces la distribución muestral de p' tiene:

- Una media μ_p, igual a p.
- Un error estándar σ_p, igual a $\sqrt{\frac{p(1-p)}{n}}$
- Una distribución normal aproximada si n es suficientemente grande.

Pruebas de hipótesis

Suposición

- Las n observaciones aleatorias que forman la muestra, se seleccionan de manera independiente de una población que no cambia durante el muestreo.

Intervalos de confianza para una proporción

- $\left(p' - z_{\alpha/2} \times \sqrt{\dfrac{p'(1-p')}{n}}\ ;\ p' + z_{\alpha/2} \times \sqrt{\dfrac{p'(1-p')}{n}}\right).$

Procedimiento de pruebas de hipótesis

Estadística de prueba de hipótesis

$$z^* = \frac{p' - p}{\sqrt{\frac{p(1-p)}{n}}}. \tag{2}$$

Ejemplo:

Muchas personas duermen hasta tarde los fines de semana para compensar las noches cortas durante la semana laboral. El consejo para Mejor Sueño reporta que 61% de las personas tienen más de 7 horas de sueño por noche los fines de semana. Una muestra aleatoria de 350 adultos descubrió que 235 tuvieron más de 7 horas de sueño cada noche el pasado fin de semana. En el nivel de significancia de 0.05 ¿esta evidencia muestra que más de 61% duerme 7 horas o más por noche los fines de semana?

Procedimiento

1. **El inicio:**
   a) p, la proporción de adultos que tienen más de 7 horas de sue' no por noche los fines de semana.
   b) $H_0 : p = 0.61$ y $H_1 : p > 0.61$.
2. **Criterios de prueba de hipótesis:**
   a) La muestra aleatoria de 350 adultos se encuestó de manera independiente.
   b) Se usará la z normal estándar. Se espera que p' tenga una distribución aproximadamente normal.
   c) $\alpha = 0.05$
3. **La evidencia muestral:**
   a) $n = 350$ y $x = 235$:

   $$p' = \frac{x}{n} = \frac{235}{350} = 0.671.$$

   b) $z^* = \frac{(0.671 - 0.61)}{\sqrt{\frac{0.61 \times 0.39}{350}}} = 2.34.$

Procedimiento

4. **La distribución de probabilidad:**
   a) $z_{0.05} = 1.65$.
   b) $z^* = 2.34$ se encuentra en la región crítica.
5. **Los resultados:**
   a) Rechazar H_0.
   b) En el nivel de significación de 0.05, concluimos que la proporción de adultos en la población muestreada que tiene más de 7 horas de sueño nocturno los fines de semana es significativamente mayor que 61%.

Procedimiento de pruebas de hipótesis

Ejercicio:

Septiembre es el mes para renovar la credencial de la biblioteca. De acuerdo con una encuesta nacional Harris durante Agosto de 2008, 68% de los adultos estadounidenses tienen una credencial de biblioteca. Supón que realizas una encuesta de 1000 adultos elegidos al azar con la finalidad de poner a prueba $H_0 : p = 0.68$ y $H_1 : p < 0.68$, donde p representa la proporción de adultos que actualmente tienen una credencial de biblioteca; 651 de los 1000 muestreados tienen credencial de biblioteca. Use $\alpha = 0.01$

Referencias I

- Devore, J. L. (2009). *Probabilidad y estadística para ingeniería y ciencias*. Cengage Learning Editores.
- Díaz Mata, A. (2013). *Estadística aplicada a la Administración y Economía*. McGraw–Hill.
- Ross, S. M. (2002). *Probabilidad y estadística para ingeniería y ciencias*. McGraw–Hill.
- Spiegel, M. R., & Stephens, L. J. (2009). *Estadística*. McGraw–Hill.