Teoría de Conjuntos

Isaac Cortés Olmos

Universidad de Atacama

25 de marzo de 2025

Esquema

- Conjuntos.
- Notación de conjuntos.
- Conjuntos finitos e infinitos.
- Igualdad de conjuntos.
- Subconjuntos.
- Subconjunto propio.
- Comparabilidad.
- Conjunto universal.
- Conjunto potencia.
- Conjuntos disjuntos.
- Diagrama de Venn-Euler.

Conjuntos y subconjuntos

Conjunto

- Un conjunto es una lista, colección o clase de objetos bien definidos, objetos que pueden ser: números, personas, letras, ríos, etc. Estos objetos se llaman elementos o miembros del conjunto.

Ejemplos

- Los números 2, 4, 6, 8.
- Los ríos de Chile.
- Los estudiantes ausentes de la Universidad de Atacama.

Conjuntos y subconjuntos

Notación de conjuntos

- Los conjuntos se denotan por letras mayúsculas

$$A, B, X, Y \dots$$

- Los elementos de los conjuntos se representan por letras minúsculas

$$a, b, x, y \dots$$

Conjuntos y subconjuntos

Notación de conjuntos

- Forma tabular:

$$A = \{1, 3, 7, 10\}$$

- Forma de definición por comprensión o constructivo de un conjunto

$$B = \{x |\ x \text{ es par}\}$$

se lee "B es el conjunto de los números x tales que x es par".

- Si un objeto x es elemento de un conjunto A, es decir, si A contiene a x como uno de sus elementos, se escribe

$$x \in A$$

que se puede leer también "x pertenece a A" o "x está en A ".

Conjuntos y subconjuntos

Notación de conjuntos

- Si un objeto x no es elemento de un conjunto A, es decir, si A no contiene a x como uno de sus elementos, se escribe

$$x \notin A$$

que se puede leer también "x no pertenece a A" o "x no está en A".

Ejemplos:

- Si $A = \{a, e, i, o, u\}$, entonces $a \in A$, $b \notin A$, $e \in A$, $f \notin A$.
- Si $B = \{x |\ x \text{ es par}\}$, entonces $3 \notin B$, $6 \in B$, $11 \notin B$, $14 \in B$.

Conjuntos y subconjuntos

Conjuntos finitos e infinitos

- Un conjunto es finito si consta de un cierto número de elementos distintos, es decir, si al contar los diferentes elementos del conjunto el proceso de contar puede acabar.
- Si un conjunto no es finito, el conjunto es infinito.

Ejemplos:

- Si M es el conjunto de los días de la semana, entonces M es finito.
- Si $N = \{2, 4, 6, 8, \ldots\}$, entonces N es infinito.

Conjuntos y subconjuntos

Igualdad de conjuntos

- El conjunto A es igual al conjunto B si ambos tienen los mismos elementos, es decir, si cada elemento que pertenece a A pertenece también a B y si cada elemento que pertenece a B pertenece también a A.
- Se denota la igualdad de conjuntos A y B por $A = B$.

Ejemplos:

- Sean $A = \{1,2,3,4\}$ y $B = \{3,1,4,2\}$, entonces $A = B$.
- Sean $E = \{x|\, x^2 - 3x = -2\}$, $F = \{2,1\}$ y $G = \{1,2,2,1\}$. Resulta que $E = F = G$.

Conjuntos y subconjuntos

Conjunto vacío

- El conjunto vacío es aquel conjunto que carece de elementos. Este conjunto se suele llamar conjunto nulo.
- Se denotará el conjunto vacío por el símbolo $\emptyset$.

Ejemplos:

- Si A es el conjunto de personas vivientes mayores de 200 años. A es vacío según las estadísticas conocidas.

Conjuntos y subconjuntos

Subconjuntos

- Si todo elemento de un conjunto A es también elemento de un conjunto B, entonces se dice que A es un subconjunto de B.
- Se denota esta relación escribiendo $A \subset B$, que se puede leer "A está contenido en B"

Ejemplos:

- El conjunto $E = \{2,4,6\}$ es un subconjunto del $F = \{6,2,4\}$, pues cada número 2,4, y 6 que pertenece a E pertenece también a F.
- El conjunto $C = \{1,3,5\}$ es un subconjunto del $D = \{5,4,3,2,1\}$, ya que todo número 1,3, y 5 de C pertenece también a D.

Conjuntos y subconjuntos

Definición:

- Dos conjuntos A y B son iguales, $A = B$, si y solo si, $A \subset B$ y $B \subset A$.
- Si A es un subconjunto de B, se puede escribir también $B \supset A$.
- Además, si A no es un subconjunto de B, se puede escribir como $A \not\subset B$ o $B \not\supset A$

Observaciones:

- El conjunto vacío $\emptyset$ se considera subconjunto de todo conjunto.
- Si A no es un subconjunto de B, es decir, si $A \not\subset B$, entonces hay por lo menos un elemento de A que no es elemento de B.

Conjuntos y subconjuntos

Subconjunto propio

- Se dirá que B es un subconjunto propio de A si, en primer lugar, B es un subconjunto de A y, en segundo lugar, B no es igual a A. Se denota por $B \subset A$.

Comparabilidad

- Dos conjuntos A y B se dicen comparables si $A \subset B$ o $B \subset A$. En cambio, dos conjuntos A y B se dicen no comparables si $A \not\subset B$ y $B \not\subset A$.

Conjunto universal

- El conjunto universal se define como el "universo" de elementos con los que trabajamos. Todos los conjuntos que analizamos son subconjuntos de este universo.

Conjuntos y subconjuntos

Ejemplo:

- Si estamos analizando a los estudiantes de una escuela, el conjunto universal podría ser:

$$U = \{\text{Todos los estudiantes de la escuela}\}$$

- Un subconjunto podría ser:

$$A = \{\text{Estudiantes que juegan fútbol}\}$$

Conjuntos y subconjuntos

Conjunto potencia

- La familia de todos los subconjuntos de un conjunto S se llama conjunto potencia de S. Se denota por 2^S.

Ejemplo:

- Si $T = \{4,7,8\}$, entonces:

$$2^T = \{T, \{4,7\}, \{4,8\}, \{7,8\}, \{4\}, \{7\}, \{8\}, \emptyset\}$$

Conjuntos y subconjuntos

Conjuntos disjuntos

- Si dos conjuntos A y B no tienen elementos comunes, es decir, si ningún elemento de A está en B y si ningún elemento de B está en A, se dice que A y B son disjuntos.

Ejemplo:

- Sean A el conjunto de los números positivos y B el número de los negativos. Entonces A y B son disjuntos, pues ningún número es positivo y negativo.

Conjuntos y subconjuntos

Diagramas de Venn-Euler

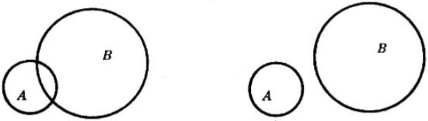
- Estos diagramas permiten ilustrar de manera sencilla e instructiva las relaciones entre conjuntos.

Conjuntos y subconjuntos

Figura 1: Suponga que $A \subset B$ y $A \neq B$. Entonces A y B se describen como uno de los siguientes diagramas:

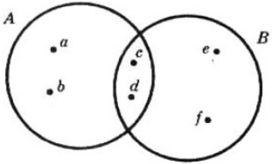
Conjuntos y subconjuntos

Figura 2: Si A y B son conjuntos disjuntos (derecha) y no disjuntos (izquierda) se pueden representar como:



Conjuntos y subconjuntos

Figura 3: Sean $A = \{a, b, c, d\}$ y $B = \{c, d, e, f\}$. Se ilustran estos conjuntos con un diagrama de Venn de la siguiente forma:



Referencias

Lipschutz, S. (1991). Teoría de conjuntos y temas afines. McGraw-Hill.