Variables aleatorias

Isaac Cortés Olmos

Universidad de Atacama

11 de abril de 2025

Esquema

- Valor esperado y varianza de variables aleatorias.
- Distribución bernoulli.
- Distribución binomial.
- Distribución Poisson.

Valor esperado y varianza de variables aleatorias.

Valor esperado de una variable aleatoria

Si X es una v.a discreta y $f(x)$ es el valor de su distribución de probabilidad en x, el valor esperado de X es

$$\mathbb{E}(X) = \sum_{x} x f(x).$$

De manera correspondiente, si X es v.a continua y $f(x)$ es el valor de su densidad de probabilidad en x, el valor esperado de X es

$$\mathbb{E}(X) = \int_{-\infty}^{\infty} x f(x) dx.$$

Valor esperado y varianza de variables aleatorias.

Propiedades:

- Si b es constante, entonces

$$\mathbb{E}(b) = b$$

- Si a es constante, entonces

$$\mathbb{E}(aX) = a\,\mathbb{E}(X)$$

- Si a y b son constantes, entonces

$$\mathbb{E}(aX + b) = a\,\mathbb{E}(X) + b$$

Teorema:

$$\mathbb{V}\text{ar}(X) = \sigma^2 = \mathbb{E}(X^2) - (\mathbb{E}(X))^2$$

Valor esperado y varianza de variables aleatorias.

Ejemplo:

Calcule la esperanza y varianza de X, que representa el número de puntos lanzados con un dado balanceado.

Variables aleatorias

Solución:

$$
\begin{aligned}
\mathbb{E}(X) &= 1 \times \frac{1}{6} + 2\frac{1}{6} + 3 \times \frac{1}{6} + 4\frac{1}{6} + 5\frac{1}{6} + 6\frac{1}{6} \\
&= \frac{1}{6} + \frac{2}{6} + \frac{3}{6} + \frac{4}{6} + \frac{5}{6} + \frac{6}{6} \\
&= \frac{7}{2}
\end{aligned}
$$

Variables aleatorias

Solución:

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(X^2) &= 1^2\times\frac{1}{6}+2^2\frac{1}{6}+3^2\times\frac{1}{6}+4^2\frac{1}{6}+5^2\frac{1}{6}+6^2\frac{1}{6}\\ &= \frac{1}{6}+\frac{4}{6}+\frac{9}{6}+\frac{16}{6}+\frac{25}{6}+\frac{36}{6}\\ &= \frac{91}{6}\end{aligned}$$

Solución:

$$\begin{aligned}\mathbb{V}\mathrm{ar}(X) &= \frac{91}{6}-\frac{49}{4} && (1)\\ &= \frac{35}{12} && (2)\end{aligned}$$

Variables aleatorias bernoulli y binomial

Definición:

Una v.a X tiene una distribución de Bernoulli y se conoce como una v.a de Bernoulli si y sólo si su distribución de probabilidad está dado por

$$f(x;\theta) = \theta^x(1-\theta)^{1-x} \qquad \text{para} \qquad x = 0,1,$$

donde $0 < \theta < 1$, es la probabilidad de que el ensayo será un éxito.

Variables aleatorias bernoulli y binomial

Calculando la esperanza y varianza de X

$$
\begin{aligned}
\mathbb{E}(X) &= 0 \times \theta^0 (1-\theta)^{(1-0)} + 1 \times \theta^1 (1-\theta)^{(1-1)} \\
&= 0 + \theta \\
&= \theta \\
\mathbb{E}(X^2) &= 0^2 \times \theta^0 (1-\theta)^{(1-0)} + 1^2 \times \theta^1 (1-\theta)^{(1-1)} \\
&= 0 + \theta \\
&= \theta \\
\mathbb{V}\mathrm{ar}(X) &= \mathbb{E}(X^2) - (\mathbb{E}(X))^2 \\
&= \theta - \theta^2 \\
&= \theta(1-\theta)
\end{aligned}
$$

Variables aleatorias bernoulli y binomial

Definición:

Una v.a aleatoria X tiene una distribución binomial y se conoce como una v.a binomial si y sólo si su distribución de probabilidad está dada por
f(x;n,θ) $= \binom{n}{x}\theta^x(1-\theta)^{n-x}, \quad$ para $\quad x = 0, 1, \ldots, n.$

Variables aleatorias bernoulli y binomial

Ejercicio:

En determinado juego de azar con 2 resultados posibles, la probabilidad de éxito es de 0.7, $\theta = 0{,}7$ y la probabilidad de fracaso es de 0.3, $1 - \theta = 0{,}3$. Si se repite el juego 5 veces, ¿cuál es la probabilidad de tener éxito 3 veces?

Distribución de Poisson

Definición:

Una v.a aleatoria X tiene una distribución de Poisson y se conoce como una v.a de Poisson si y sólo si su distribución de probabilidad está dada por

$$f(x;\lambda) = \frac{\lambda^x e^{-\lambda}}{x!} \text{ para } x = 0, 1, 2, \ldots$$

Distribución de Poisson

$$
\begin{aligned}
\mathbb{E}(X) &= \sum_{x=0}^{\infty} \frac{xe^{-\lambda}\lambda^x}{x!} \\
&= e^{-\lambda} \sum_{x=0}^{\infty} \frac{x\lambda^x}{x!} \\
&= e^{-\lambda} \sum_{x=1}^{\infty} \frac{x\lambda^x}{x!} \\
&= e^{-\lambda} \sum_{x=1}^{\infty} \frac{x\lambda^x}{x(x-1)!} \\
&= e^{-\lambda} \sum_{x=1}^{\infty} \frac{\lambda^x}{(x-1)!} = x-1 \\
&= e^{-\lambda}\lambda \sum_{j=0}^{\infty} \frac{\lambda^j}{j!} \\
&= e^{-\lambda}\lambda e^{\lambda} \\
&= \lambda
\end{aligned}
$$

Distribución de Poisson

$$
\begin{aligned}
\mathbb{E}(X^2) &= \sum_{x=0}^{\infty} \frac{x^2 e^{-\lambda} \lambda^x}{x!} \\
&= \sum_{x=0}^{\infty} x(x-1) \frac{e^{-\lambda} \lambda^x}{x!} + \sum_{x=0}^{\infty} \frac{x e^{-\lambda} \lambda^x}{x!} \\
&= \sum_{x=2}^{\infty} \frac{e^{-\lambda} \lambda^x}{(x-2)!} + \lambda \\
&= e^{-\lambda} \sum_{x=2}^{\infty} \frac{\lambda^x}{(x-2)!} + \lambda \qquad j = x-2 \\
&= e^{-\lambda} \sum_{j=0}^{\infty} \frac{\lambda^{j+2}}{j!} + \lambda \\
&= e^{-\lambda} \lambda^2 \sum_{j=0}^{\infty} \frac{\lambda^j}{j!} + \lambda \\
&= e^{-\lambda} e^{\lambda} \lambda^2 + \lambda \\
&= \lambda^2 + \lambda
\end{aligned}
$$

Distribución de Poisson

$$\begin{aligned}\mathbb{V}\mathsf{ar}(X) &= \mathbb{E}(X^2) - (\mathbb{E}(X))^2 \\ &= \lambda^2 + \lambda - \lambda^2 \\ &= \lambda.\end{aligned}$$

Distribución de Poisson

Ejemplo:

- Durante una hora, una impresora saca en promedio 3 hojas por minuto, ¿cuál es la probabilidad de que la impresora imprima 5 hojas durante un minuto escogido al azar?

Referencias

Freud, J. (2000). Estadística Matemática con Aplicaciones. Pearson