Variables aleatorias

Isaac Cortés Olmos

Universidad de Atacama

5 de mayo de 2025

Esquema

- Distribución Gamma.
- Distribución Beta.
- Distribución Normal.

Variable aleatoria Gamma

Definición:

Se dice que una v.a continua X tiene una distribución gamma si la función de densidad de probabilidad de X es

$$f(x;\alpha,\sigma) = \frac{1}{\sigma^{\alpha}\Gamma(\alpha)} x^{\alpha-1} e^{-\frac{x}{\sigma}}, \quad \text{para} \quad x \geq 0,$$

donde los parámetros α y σ satisfacen $\alpha > 0$ y $\sigma > 0$.

Definición:

La función de distribución acumulada $F(x)$ de la v.a X es dada por

$$\mathbb{P}(X \leq x) = F(x;\alpha,\sigma) = F\left(\frac{x}{\sigma};\alpha\right)$$

donde $F(\cdot;\alpha)$ es la función gamma incompleta.

Variable aleatoria Gamma

Proposición:

La media y la varianza de una v.a X que tiene la distribución gamma $f(x;\alpha,\sigma)$:

$$\mathbb{E}(X) = \alpha\sigma, \qquad \mathbb{V}\text{ar}(X) = \alpha\sigma^2.$$

Proposición:

Con $\alpha > 0$, la función gamma $\Gamma(\alpha)$ se define como

$$\Gamma(\alpha) = \int_0^\infty x^{\alpha-1}e^{-x}dx,$$

con cualquier entero positivo, n, $\Gamma(n) = (n-1)!$.

Variable aleatoria Gamma

Ejemplo:

El consumo diario de energía eléctrica (en millones de kWh) se modela con una distribución gamma con media 6 y varianza 12.

- Calcular la probabilidad de que el consumo no exceda los 12 millones de kWh en un día.
- Determinar la probabilidad de que el consumo diario esté entre 3 y 5 millones de kWh.

Ejemplo:

El tiempo de reabastecimiento para cierto producto sigue una distribución gamma con media 40 días y varianza 400 días^2. Calcular la probabilidad de que una orden se reciba dentro de los primeros 20 días.

Variable aleatoria Beta

Definición:

Se dice que una v.a aleatoria X tiene una distribución beta con parámetros $a > 0$ y $b > 0$ si la función de densidad de probabilidad de X es

$$f(x;a,b) = \frac{\Gamma(a+b)}{\Gamma(a)\Gamma(b)} x^{a-1}(1-x)^{b-1}, \quad \text{para} \quad 0 \leq x \leq 1.$$

Proposición:

La media y la varianza de una variable beta son las siguientes:

$$\mathbb{E}(X) = \frac{a}{a+b}, \qquad \mathbb{V}\text{ar}(X) = \frac{ab}{(a+b)^2(a+b+1)}.$$

Variable aleatoria Beta

Ejemplo:

La proporción de impurezas en un producto químico sigue una distribución Beta con $a = 3$ y $b = 7$. Determinar la probabilidad de que la proporción de impurezas sea inferior al 20 %.

Ejemplo:

La proporción de pólizas de hogar que durante el año tiene algún siniestro sigue una distribución beta con $a = 3$ y $b = 0{,}5$.

- Hallar la media y varianza de la proporción de siniestros.
- ¿Cuál es la probabilidad de que la proporción de hogares con algún siniestro sea como máximo del 45 %?

Variable aleatoria Normal

Definición:

Una v.a aleatoria que tiene una distribución normal estándar se llama variable aleatoria normal estándar y se denotará por Z. La función de densidad de probabilidad de Z es

$$f(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-z^2/2}, \quad \text{para} \quad -\infty < z < \infty.$$

La función de distribución acumulada de Z será denotada por $\Phi(z)$.

Ejercicio:

Encuentre las probabilidades de que una v.a que tiene la distribución normal estándar asumirá un valor

- menor que 1.72
- menor que -0.88
- entre 1.30 y 1.75;
- entre -0.25 y 0.45

Variable aleatoria Normal

Definición:

Se dice que una v.a continua X tiene una distribución normal con parámetros μ y σ, donde $-\infty < \mu < \infty$ y $\sigma > 0$, si la función de densidad de probabilidad de X es

$$f(x;\mu,\sigma) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-(x-\mu)^2/(2\sigma^2)}, \quad \text{para} \quad -\infty < x < \infty.$$

Teorema:

Si X tiene una distribución normal con media μ y la desviación estándar σ, entonces

$$Z = \frac{X-\mu}{\sigma}$$

tiene la distribución normal estándar.

Variable aleatoria Normal

Ejercicio:

En un proceso fotográfico, el tiempo de revelado de impresiones se puede considerar como una v.a que tiene la distribución normal con $\mu = 15{,}40$ segundos y $\sigma = 0{,}48$ segundos. Encuentre las probabilidades de que el tiempo que toma revelar una de las impresiones será

- al menos 16 segundos;
- a lo más 14,20 segundos;
- cualquier valor entre 15 y 15,8 segundos.

Referencias

Freud, J. (2000). Estadística Matemática con Aplicaciones. Pearson