Variables aleatorias

Isaac Cortés Olmos

Universidad de Atacama

1 de septiembre de 2025

Esquema

- Distribución Hipergeométrica.
- Distribución Exponencial.
- Distribución Weibull.

Variable aleatoria hipergeométrica

Definición:

Si X es el número de éxitos (S) en una muestra completamente aleatoria de tamaño n extraída de la población compuesta de M éxitos y $(N-M)$ fallas, entonces la distribución de probabilidad de X, llamada distribución hipergeométrica, es

$$\mathbb{P}(X=x) = h(x;n,M,N) = \frac{\binom{M}{x}\binom{N-M}{n-x}}{\binom{N}{n}},$$

con x, un entero, que satisface $\max(0, n-N+M) \leq x \leq \min(n,M)$.

Variable aleatoria hipergeométrica

Proposición:

La media y la varianza de la variable aleatoria hipergeométrica X cuya función de probabilidad es $h(x; n, M, N)$ son

$$\mathbb{E}(X) = n \times \frac{M}{N}, \qquad \mathbb{V}\text{ar}(X) = \left(\frac{N-n}{N-1}\right) \times n \times \frac{M}{N} \times \left(1 - \frac{M}{N}\right).$$

Variable aleatoria hipergeométrica

Ejemplo:

Una caja contiene 15 piezas de las cuales cuatro están con defecto. Se retira una muestra de tres piezas de la caja sin reposición. Calcular la probabilidad que haya dos o tres piezas defectuosas en la muestra.

Ejemplo:

En un estudio realizado por Gallup Organization se le preguntó a los encuestados ¿Cuál es su deporte favorito? El futbol americano y el basquetbol, clasificaron como número uno y dos respectivamente en cuanto a preferencia. Suponga que en un grupo de 10 individuos, siete prefieren el futbol americano y tres el basquetbol. Seleccionemos una muestra al azar de tres de estos individuos.

- ¿cuál es la probabilidad de que exactamente dos prefieran el futbol americano?
- ¿cuál es la probabilidad de que la mayoría (ya sea dos o tres) prefiera el futbol americano?

Variable aleatoria Exponencial

Definición:

Una v.a aleatoria X tiene una distribución exponencial con parámetro λ si su densidad de probabilidad está dada por

$$f(x;\lambda) = \lambda e^{-\lambda x}, \quad \text{para} \quad x > 0,$$

donde $\lambda > 0$ es una constante.

Definición:

La función de distribución acumulada $F(x)$ de la v.a X es dada por

$$F(x;\lambda) = \int_0^x \lambda e^{-\lambda t} dt = 1 - e^{-\lambda x},$$

para $0 < x < \infty$ y $F(x) = 0$ para $x < 0$.

Variable aleatoria Exponencial

Proposición:

La media y la varianza de una variable aleatoria exponencial son las siguientes:

$$\mathbb{E}(X) = \frac{1}{\lambda}, \qquad \mathbb{V}\text{ar}(X) = \frac{1}{\lambda^2}.$$

Proposición:

Con $\alpha > 0$, la función gamma $\Gamma(\alpha)$ se define como

$$\Gamma(\alpha) = \int_0^\infty x^{\alpha-1} e^{-x} dx,$$

con cualquier entero positivo, n, $\Gamma(n) = (n-1)!$.

Variable aleatoria Exponencial

Ejemplo:

En una línea de ensamblaje, las piezas llegan en promedio cada 3 minutos. Suponiendo que el tiempo entre llegadas sigue una distribución exponencial, ¿cuál es la probabilidad de que la próxima pieza llegue en menos de 2 minutos?

Ejemplo:

El tiempo de respuesta de un sistema automático sigue una distribución exponencial con media 0.5 segundos. ¿Cuál es la probabilidad de que el sistema responda entre 0.2 y 0.7 segundos?

Variable aleatoria Weibull

Definición:

Una v.a aleatoria X tiene una distribución Weibull con parámetros $a > 0$ y $\sigma > 0$ si su densidad de probabilidad está dada por

$$f(x; a, \sigma) = \left(\frac{a}{\sigma}\right)\left(\frac{x}{\sigma}\right)^{a-1} \exp\left\{-\left(\frac{x}{\sigma}\right)^{a}\right\}, \quad \text{para} \quad x > 0.$$

Definición:

La función de distribución acumulada $F(x)$ de la v.a X es dada por

$$F(x; \lambda) = \int_0^x \left(\frac{a}{\sigma}\right)\left(\frac{t}{\sigma}\right)^{a-1} \exp\left\{-\left(\frac{t}{\sigma}\right)^{a}\right\} dt = 1 - \exp\left\{-\left(\frac{x}{\sigma}\right)^{a}\right\},$$

para $0 < x < \infty$ y $F(x) = 0$ para $x < 0$.

Variable aleatoria Weibull

Proposición:

La media y la varianza de una variable aleatoria Weibull son las siguientes:

$$\mathbb{E}(X) = \sigma\Gamma\left(1+\frac{1}{a}\right), \qquad \mathbb{V}\mathrm{ar}(X) = \sigma^2\left[\Gamma\left(1+\frac{2}{a}\right) - \left(\Gamma\left(1+\frac{1}{a}\right)\right)^2\right].$$

Variable aleatoria Weibull

Ejemplo:

Un motor eléctrico tiene una vida que sigue una Weibull con parámetros $a = 2{,}5$ y $\sigma = 5000$. ¿Cuál es la probabilidad de que funcione más de 6000 horas?

Ejemplo:

La vida de un componente con desgaste acelerado se modela con Weibull de $a = 3$ y $\sigma = 1000$. ¿Cuál es la probabilidad de que falle entre las 500 y las 900 horas?

Referencias

Freud, J. (2000). Estadística Matemática con Aplicaciones. Pearson