Variables aleatorias

Isaac Cortés Olmos

Universidad de Atacama

26 de agosto de 2025

Esquema

- Variables aleatorias.
- Variables aleatorias discretas.
- Variables aleatorias continuas.

Variables aleatorias

Definición:

Si S es un espacio muestral con una medida de probabilidad y X es una función de valor real definida sobre los elementos de S, entonces X se llama una variable aleatoria (v.a).

Variables aleatorias

Ejemplo:

Si X denota la v.a definida como la suma de los números al lanzar dados legales entonces

$$
\begin{aligned}
\mathbb{P}(\{X=2\}) &= \mathbb{P}(\{(1,1)\}) = \frac{1}{36} \\
\mathbb{P}(\{X=3\}) &= \mathbb{P}(\{(1,2),(2,1)\}) = \frac{2}{36} \\
\mathbb{P}(\{X=4\}) &= \mathbb{P}(\{(1,3),(2,2),(3,1)\}) = \frac{3}{36} \\
\mathbb{P}(\{X=5\}) &= \mathbb{P}(\{(1,4),(2,3),(3,2),(4,1)\}) = \frac{4}{36} \\
\vdots \quad & \vdots \\
\mathbb{P}(\{X=12\}) &= \mathbb{P}(\{(6,6)\}) = \frac{1}{36}
\end{aligned}
$$

Variables aleatorias

Definición:

Si X es una v.a discreta la función dada por $f(x) = \mathbb{P}(X = x)$ para cada x dentro del intervalo de X se llama la distribución de probabilidad de X.

Teorema:

Una función puede servir como la distribución de probabilidad de una v.a discreta X si y sólo si sus valores $f(x)$, satisfacen las condiciones

1. $f(x) \geq 0$ para cada valor dentro de su dominio.
2. $\sum_x f(x) = 1$, donde la suma se extiende sobre todos los valores dentro de su dominio.

Variables aleatorias

Ejemplo:

Encuentre la distribución de probabilidad del número total de caras obtenidas en tres lanzamientos de una moneda balanceada

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{8}, & \text{para } x = 0, \\ \\ \frac{3}{8}, & \text{para } x = 1, \\ \\ \frac{3}{8}, & \text{para } x = 2, \\ \\ \frac{1}{8}, & \text{para } x = 3. \end{cases}$$

Definición:

Si X es una v.a discreta, la función dada por

$$F(x) = \mathbb{P}(X \leq x) = \sum_{t \leq x} f(t) \qquad \text{para} \qquad -\infty < x < \infty$$

donde $f(t)$ es el valor de la distribución de probabilidad de X en t, es llamada la función de distribución, o la distribución acumulativa, de X.

Teorema:

Los valores de $F(x)$ de la función de distribución de una v.a discreta X satisface las condiciones

1. $F(-\infty) = 0$ y $F(\infty) = 1$;
2. si $a < b$, entonces $F(a) \leq F(b)$ para cualesquier números reales a y b.

Ejemplo:

Encuentre la función de distribución del número total de caras obtenidas en tres lanzamientos de una moneda balanceada

$$F(x) = \begin{cases} 0, & \text{para } x < 0, \\ \frac{1}{8}, & \text{para } x \leq 0, \\ \frac{4}{8}, & \text{para } x \leq 1, \\ \frac{7}{8}, & \text{para } x \leq 2, \\ 1, & \text{para } x \geq 3. \end{cases}$$

Variables aleatorias

Definición:

Una función con valores $f(X)$, definida sobre el conjunto de todos los números reales, se llama una función de densidad de probabilidad de la v.a continua X si y sólo si

$$\mathbb{P}(a \leq X \leq b) = \int_a^b f(x)\,dx$$

para cualesquiera constantes reales a y b con $a \leq b$.

Teorema:

Si X es una v.a continua y a y b son constantes reales con $a < b$, entonces

$$\mathbb{P}(a \leq X \leq b) = \mathbb{P}(a \leq X < b) = \mathbb{P}(a < X \leq b) = \mathbb{P}(a < X < b).$$

Variables aleatorias

Teorema:

Una función puede servir como una densidad de probabilidad de una v.a continua X si sus valores, $f(x)$, satisfacen las siguientes condiciones

1. $f(x) \geq 0$ para $-\infty < x < \infty$;
2. $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\, dx = 1$.

Ejercicio:

Supongamos que el tiempo de espera (en minutos) de un autobús en una parada sigue una distribución uniforme en el intervalo $[2, 10]$.

1. Encuentra la función de densidad de probabilidad (f.d.p.).
2. Encuentra la función de distribución acumulativa (F.D.A.).
3. Calcula la probabilidad de que el tiempo de espera sea menor a 5 minutos.
4. Calcula la probabilidad de que el tiempo de espera esté entre 6 y 9 minutos.

Referencias

Freud, J. (2000). Estadística Matemática con Aplicaciones. Pearson