Probabilidades

Isaac Cortés Olmos

Universidad de Atacama

23 de agosto de 2025

Esquema

- Probabilidad de unión de tres eventos.
- Probabilidad condicional.
- Probabilidad de eventos independientes.
- Teorema de Bayes.

Probabilidades

Teorema

Si A, B y C son tres eventos cualquiera en el espacio muestral S, entonces

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(A\cup B\cup C) = \mathbb{P}(A)+\mathbb{P}(B)+\mathbb{P}(C)-\mathbb{P}(A\cap B)\\ -\mathbb{P}(A\cap C)-\mathbb{P}(B\cap C)+\mathbb{P}(A\cap B\cap C).\end{aligned}$$

Ejemplo:

Si una persona acude con su dentista, supongamos que la probabilidad de que limpie la dentadura es 0,44, la probabilidad de que le tape una caries es 0,24, la probabilidad de que se le extraiga un diente es 0,21, la probabilidad de que se le limpie la dentadura y le tape una caries es 0,08, la probabilidad de que le limpie la dentadura y le extraiga un diente es 0,11, la probabilidad de que le tape una caries y le saque un diente es 0,07, y la probabilidad de que le limpie la dentadura, le tape una caries y le saque un diente es 0,03. ¿cuál es la probabilidad de que una persona que acude con su dentista se le haga por lo menos una de estas cosas?

Probabilidades

Definición:

- Si A y B son dos eventos cualquiera en un espacio muestral S y $\mathbb{P}(A) \neq 0$, la probabilidad condicional de B dado A es

$$\mathbb{P}(B|A) = \frac{\mathbb{P}(B \cap A)}{\mathbb{P}(A)}$$

Ejemplo:

Un recipiente contiene 5 transistores defectuosos (inmediatamente fallan cuando se ponen en uso), 10 transistores parcialmente defectuosos (que fallan después de unas horas en uso) y 25 transistores aceptables. Del recipiente se toma aleatoriamente un transistor y se pone en funcionamiento. Si no falla inmediatamente ¿Cuál es la probabilidad de que sea aceptable?

Probabilidades

Teorema:

Si A y B son dos eventos cualquiera en un espacio muestral S y $\mathbb{P}(A) \neq 0$, entonces

$$\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(B) \times \mathbb{P}(A|B).$$

Ejemplo:

La Señora Pérez piensa que hay un 30 por ciento de posibilidad de que la empresa donde labora abra una sucursal en Phoenix. Si lo hace, ella tiene un 60 % de seguridad de que será nombrada directora de esta nueva oficina. ¿Con qué probabilidad se abrirá una sucursal en Phoenix y Pérez será la directora?

Probabilidades

Teorema:

Si A, B y C son tres eventos cualquiera en un espacio muestral S tal que $\mathbb{P}(A \cap B) \neq 0$, entonces

$$\mathbb{P}(A \cap B \cap C) = \mathbb{P}(A) \times \mathbb{P}(B|A) \times \mathbb{P}(C|A \cap B).$$

Ejemplo:

Una caja de fusibles contiene 20 unidades, de los cuales cinco están defectuosos. Si se seleccionan tres fusibles aleatoriamente y se sacan de la caja en sucesión sin reemplazo, ¿Cuál es la probabilidad de que los tres fusibles estén defectuosos?

Probabilidades

Definición:

Dos eventos A y B son independientes si y sólo si

$$\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A) \times \mathbb{P}(B).$$

Si dos eventos no son independientes, decimos que son dependientes.

Ejemplo:

Se lanza una moneda tres veces y se supone que los ocho resultados posibles, CCC, CCS, CSC, SCC, CSS, SCS, SSC y SSS, son igualmente probables. Si A es el evento de que una cara ocurra en cada uno de los dos primeros lanzamientos, B es el evento que un sello ocurra en el tercer lanzamiento y C es el evento que exactamente dos sellos ocurren en los tres lanzamientos, demuestre que

- los eventos A y B son independientes.
- los eventos B y C son dependientes.

Teorema de Bayes

Teorema

Si los eventos $B_1, B_2, \ldots,$ y B_k constituyen una partición del espacio muestral S y $\mathbb{P}(B_i) \neq 0$ para $i = 1, 2, \ldots, k$, entonces para cualquier evento A en S

$$\mathbb{P}(A) = \sum_{i=1}^{k} \mathbb{P}(B_i) \times \mathbb{P}(A|B_i)$$

Ejemplo

Los miembros de una empresa de consultoría rentan automóviles de tres agencias de renta de automóviles: 60 % de la agencia 1, 30 % de la agencia 2, y 10 % de la agencia 3. Si 9 % de los automóviles de la agencia 1 necesita una afinación, 20 % de los autos de la agencia 2 necesitan una afinación, y 6 % de los autos de la agencia 3 necesitan una afinación, ¿Cuál es la probabilidad de que un automóvil rentado, entregado a la empresa, necesite una afinación?

Ejercicios

Teorema

- Si $B_1, B_2, \ldots, B_k$ constituyen una partición del espacio muestral S y $\mathbb{P}(B_i) \neq 0$ para $i = 1, 2, \ldots, k$, entonces para cualquier evento A en S tal que $\mathbb{P}(A) \neq 0$

$$\mathbb{P}(B_r|A) = \frac{\mathbb{P}(B_r) \times \mathbb{P}(A|B_r)}{\displaystyle\sum_{i=1}^{k} \mathbb{P}(B_i) \times \mathbb{P}(A|B_i)}$$

Ejemplo

Con respecto al ejemplo anterior, si un automóvil de renta entregado a la empresa de consultoría necesita una afinación, ¿Cuál es la probabilidad de que provenga de la agencia de renta 2?

Referencias

Freud, J. (2000). Estadística Matemática con Aplicaciones. Pearson