

Variables aleatorias

Isaac Cortés Olmos

Universidad de Atacama

1 de septiembre de 2025



- Valor esperado y varianza de variables aleatorias.
- Distribución bernoulli.
- Distribución binomial.
- Distribución Poisson.

Valor esperado y varianza de variables aleatorias.

Valor esperado de una variable aleatoria

Si X es una v.a discreta y $f(x)$ es el valor de su distribución de probabilidad en x , el valor esperado de X es

$$\mathbb{E}(X) = \sum_x xf(x).$$

De manera correspondiente, si X es v.a continua y $f(x)$ es el valor de su densidad de probabilidad en x , el valor esperado de X es

$$\mathbb{E}(X) = \int_{-\infty}^{\infty} xf(x)dx.$$

Valor esperado y varianza de variables aleatorias.

Propiedades:

- Si b es constante, entonces

$$\mathbb{E}(b) = b$$

- Si a es constante, entonces

$$\mathbb{E}(aX) = a \mathbb{E}(X)$$

- Si a y b son constantes, entonces

$$\mathbb{E}(aX + b) = a \mathbb{E}(X) + b$$

Teorema:

$$\text{Var}(X) = \sigma^2 = \mathbb{E}(X^2) - (\mathbb{E}(X))^2$$

Valor esperado y varianza de variables aleatorias.

Ejemplo:

Calcule la esperanza y varianza de X , que representa el número de puntos lanzados con un dado balanceado.

Variables aleatorias

Solución:

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(X) &= 1 \times \frac{1}{6} + 2 \times \frac{1}{6} + 3 \times \frac{1}{6} + 4 \times \frac{1}{6} + 5 \times \frac{1}{6} + 6 \times \frac{1}{6} \\ &= \frac{1}{6} + \frac{2}{6} + \frac{3}{6} + \frac{4}{6} + \frac{5}{6} + \frac{6}{6} \\ &= \frac{7}{2}\end{aligned}$$

Variables aleatorias

Solución:

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(X^2) &= 1^2 \times \frac{1}{6} + 2^2 \frac{1}{6} + 3^2 \times \frac{1}{6} + 4^2 \frac{1}{6} + 5^2 \frac{1}{6} + 6^2 \frac{1}{6} \\ &= \frac{1}{6} + \frac{4}{6} + \frac{9}{6} + \frac{16}{6} + \frac{25}{6} + \frac{36}{6} \\ &= \frac{91}{6}\end{aligned}$$

Solución:

$$\mathbb{V}\text{ar}(X) = \frac{91}{6} - \frac{49}{4} \quad (1)$$

$$= \frac{35}{12} \quad (2)$$

Variables aleatorias bernoulli y binomial

Definición:

Una v.a X tiene una distribución de Bernoulli y se conoce como una v.a de Bernoulli si y sólo si su distribución de probabilidad está dado por

$$f(x; \theta) = \theta^x (1 - \theta)^{1-x} \quad \text{para} \quad x = 0, 1,$$

donde $0 < \theta < 1$, es la probabilidad de que el ensayo será un éxito.

Variables aleatorias bernoulli y binomial

Calculando la esperanza y varianza de X

$$\mathbb{E}(X) = 0 \times \theta^0(1-\theta)^{(1-0)} + 1 \times \theta^1(1-\theta)^{(1-1)}$$

$$= 0 + \theta$$

$$= \theta$$

$$\mathbb{E}(X^2) = 0^2 \times \theta^0(1-\theta)^{(1-0)} + 1^2 \times \theta^1(1-\theta)^{(1-1)}$$

$$= 0 + \theta$$

$$= \theta$$

$$\mathbb{V}\text{ar}(X) = \mathbb{E}(X^2) - (\mathbb{E}(X))^2$$

$$= \theta - \theta^2$$

$$= \theta(1-\theta)$$

Variables aleatorias bernoulli y binomial

Definición:

Una v.a aleatoria X tiene una distribución binomial y se conoce como una v.a binomial si y sólo si su distribución de probabilidad está dada por

$$f(x;n,\theta) = \binom{n}{x} \theta^x (1 - \theta)^{n-x}, \quad \text{para } x = 0, 1, \dots, n.$$

Variables aleatorias bernoulli y binomial

Ejercicio:

En determinado juego de azar con 2 resultados posibles, la probabilidad de éxito es de 0.7, $\theta = 0,7$ y la probabilidad de fracaso es de 0.3, $1 - \theta = 0,3$. Si se repite el juego 5 veces, ¿cuál es la probabilidad de tener éxito 3 veces?

Distribución de Poisson

Definición:

Una v.a aleatoria X tiene una distribución de Poisson y se conoce como una v.a de Poisson si y sólo si su distribución de probabilidad está dada por

$$f(x; \lambda) = \frac{\lambda^x e^{-\lambda}}{x!} \text{ para } x = 0, 1, 2, \dots$$

Distribución de Poisson

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(X) &= \sum_{x=0}^{\infty} \frac{x e^{-\lambda} \lambda^x}{x!} \\&= e^{-\lambda} \sum_{x=0}^{\infty} \frac{x \lambda^x}{x!} \\&= e^{-\lambda} \sum_{x=1}^{\infty} \frac{x \lambda^x}{x!} \\&= e^{-\lambda} \sum_{x=1}^{\infty} \frac{x \lambda^x}{x(x-1)!} \\&= e^{-\lambda} \sum_{x=1}^{\infty} \frac{\lambda^x}{(x-1)!} = x - 1 \\&= e^{-\lambda} \lambda \sum_{j=0}^{\infty} \frac{\lambda^j}{j!} \\&= e^{-\lambda} \lambda e^{\lambda} \\&= \lambda\end{aligned}$$

Distribución de Poisson

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(X^2) &= \sum_{x=0}^{\infty} \frac{x^2 e^{-\lambda} \lambda^x}{x!} \\&= \sum_{x=0}^{\infty} x(x-1) \frac{e^{-\lambda} \lambda^x}{x!} + \sum_{x=0}^{\infty} \frac{x e^{-\lambda} \lambda^x}{x!} \\&= \sum_{x=2}^{\infty} \frac{e^{-\lambda} \lambda^x}{(x-2)!} + \lambda \\&= e^{-\lambda} \sum_{x=2}^{\infty} \frac{\lambda^x}{(x-2)!} + \lambda \quad j = x-2 \\&= e^{-\lambda} \sum_{j=0}^{\infty} \frac{\lambda^{j+2}}{j!} + \lambda \\&= e^{-\lambda} \lambda^2 \sum_{j=0}^{\infty} \frac{\lambda^j}{j!} + \lambda \\&= e^{-\lambda} e^{\lambda} \lambda^2 + \lambda \\&= \lambda^2 + \lambda\end{aligned}$$

Distribución de Poisson

$$\begin{aligned}\mathbb{V}\text{ar}(X) &= \mathbb{E}(X^2) - (\mathbb{E}(X))^2 \\ &= \lambda^2 + \lambda - \lambda^2 \\ &= \lambda.\end{aligned}$$

Distribución de Poisson

Ejemplo:

- Durante una hora, una impresora saca en promedio 3 hojas por minuto, ¿cuál es la probabilidad de que la impresora imprima 5 hojas durante un minuto escogido al azar?

Referencias

 Freud, J. (2000). Estadística Matemática con Aplicaciones. Pearson