

Análisis combinatorio

Universidad de Atacama



- Factorial.
- Permutaciones.
- Combinatorias.

Análisis combinatorio

Factorial

- El factorial de un número entero positivo n , denotado como $n!$, es el producto de todos los números enteros positivos desde n hasta 1.
- Definición:

$$n! = n \times (n-1) \times (n-2) \times \dots \times 3 \times 2 \times 1$$

- Por convención: $0! = 1$

Ejemplos:

- Un restaurante ofrece 5 platos principales. Si un cliente quiere probar todos los platos, pero en un orden diferente cada vez, ¿de cuántas formas puede hacerlo?
- Un puesto de helados ofrece 4 sabores diferentes y el cliente pide un cono con 4 bolas, una de cada sabor. Si el orden en que se apilan las bolas importa, ¿de cuántas maneras puede organizarse el helado?

Análisis combinatorio

Teorema

- Si una operación consta de k pasos, de los cuales el primero se puede llevar a cabo de n_1 maneras, para cada una de estas el segundo paso se puede efectuar de n_2 maneras, para cada uno de los primeros dos el tercer paso se puede hacer en n_3 maneras, y así sucesivamente, entonces la operación completa se puede realizar en $n_1 \times n_2 \times n_3 \times \dots n_k$ maneras.

Ejemplo: Elección de un tour en el norte de Chile

- Imagina que un turista llega a San Pedro de Atacama y tiene las siguientes opciones para organizar su día:
 - ▶ Mañana: Puede elegir entre visitar el Valle de la Luna (V_1), Géiseres de Tatio (V_2) y Salar de Atacama (V_3).
 - ▶ Tarde: Puede elegir entre bañarse en las Termas de Puritama (T_1), visitar la laguna Cejar (T_2) o practicar sandboarding en el valle de Marte (T_3).
- Encuentre el número de maneras diferentes posibles de combinación de actividades.

Análisis combinatorio

Teorema

- El número de permutaciones de n objetos diferentes tomados r a la vez es

$$P(n, r) = \frac{n!}{(n-r)!}$$

Ejemplo:

- Supongamos que en Copiapó se organiza una competencia de motocross en las dunas de Medanos y hay 5 pilotos inscritos: A, B, C, D y E .
- Si queremos determinar cuántas maneras distintas pueden llegar los tres primeros lugares (oro, plata y bronce), estamos ante una permutación sin repetición, ya que el orden sí importa (llegar primero no es lo mismo que llegar tercero).

Análisis combinatorio

Solución:

- La fórmula de permutaciones es:

$$\begin{aligned}P(5,3) &= \frac{5!}{(5-3)!} \\&= \frac{5!}{2!} \\&= \frac{5 \times 4 \times 3 \times 2!}{2!} \\&= 60,\end{aligned}$$

- con $n = 5$ (pilotos en total) y $r = 3$ (puestos que se ocupan en el podio).

Análisis combinatorio

Teorema

- El número de permutaciones de n objetos de los cuales n_1 son de una clase, n_2 son de una segunda clase, \dots , n_k son de la k -ésima clase y $n_1 + n_2 + \dots + n_k = n$ es:

$$\frac{n!}{n_1! n_2! \dots n_k!}$$

Análisis combinatorio

Ejemplo:

- ¿De cuántas maneras se pueden ordenar las letras de la palabra MIMOSA?

Solución:

- La palabra MIMOSA tiene 6 letras, por lo que $n = 6$.
- La letra M se repite 2 veces y las demás letras (I, O, S, A) aparecen 1 vez cada una. Entonces, tenemos que $n_1 = 2$, $n_2 = 1$, $n_3 = 1$, $n_4 = 1$ y $n_5 = 1$.
- Reemplazando en la fórmula, tenemos

$$\begin{aligned} P &= \frac{6!}{2!1!1!1!1!} \\ &= \frac{720}{2} \\ &= 360. \end{aligned}$$

Análisis combinatorio

Ejercicio:

- En Tierra Amarilla, famosa por su minería, se organiza una exhibición de minerales en un museo. Se tienen 8 minerales en total, pero algunos son del mismo tipo:
 - ▶ 3 de oro (O).
 - ▶ 2 de cobre (C).
 - ▶ 3 de plata (S).
- ¿De cuántas maneras se pueden ordenar los 8 minerales en una vitrina?

Análisis combinatorio

Teorema

- El número de combinaciones de n objetos diferentes tomados r a la vez es

$$\binom{n}{r} = \frac{n!}{r!(n-r)!}$$

- para $r = 0, 1, 2, \dots, n$.

Análisis combinatorio

Ejemplo:

- Un grupo de geólogos en la mina de Chuquicamata ha recolectado 10 muestras de roca y necesitan elegir 3 de ellas para un análisis de laboratorio. El orden en que se eligen las muestras no importa.

Solución:

- ① $n = 10$ (muestras de roca) y $r = 3$ (muestras de roca a seleccionar)
- ② Aplicar la fórmula

$$\begin{aligned}\binom{10}{3} &= \frac{10!}{3!(10-3)!} \\ &= \frac{10 \times 9 \times 8}{3!} \\ &= 120.\end{aligned}$$

Análisis combinatorio

Ejercicio:

- Una empresa minera tiene 8 perforadoras disponibles, pero solo necesita usar 5 para una exploración. ¿De cuántas maneras pueden elegir las?

Solución:

- $n = 8$ (perforadoras) y $r = 5$ (perforadoras a seleccionar)
- Aplicar la fórmula

$$\begin{aligned}\binom{8}{5} &= \frac{8!}{5!(8-5)!} \\ &= \frac{8 \times 7 \times 6}{3!} \\ &= 56.\end{aligned}$$

Referencias

 Freud, J. (2000). Estadística Matemática con Aplicaciones. Pearson