Inferencia acerca de la diferencia entre dos medias poblacionales

Isaac Cortés Olmos

Universidad de Atacama

10 de mayo de 2025

Esquema

- Test de diferencia de medias con varianzas conocidas.
- Test de diferencia de medias con varianzas desconocidas (Test de Welch).
- Test de diferencia de medias con muestras pareadas.

Test de diferencia de medias con varianzas conocidas

Aplicación:

- Se comparan dos medias de poblaciones independientes.
- Las varianzas poblacionales son conocidas.
- Las distribuciones de ambos grupos o poblaciones se asumen normales.
- Las muestras son independientes entre sí.
- $H_0 : \mu_1 = \mu_2$ vs $H_1 : \mu_1 \neq \mu_2$.

Test de diferencia de medias con varianzas conocidas

Estadístico de prueba:

$$z = \frac{(\bar{x}_1 - \bar{x}_2) - D_0}{\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2}}}$$

Ejercicios de test de medias con varianzas conocidas

Ejercicio:

Dos yacimientos entregan concentrado de cobre. Se estima que la ley media del yacimiento A es 1.5 % y la del yacimiento B es 1.7 %. Las desviaciones estándar poblacionales conocidas son 0.1 % y 0.15 %, respectivamente. Se toman muestras de tamaño 36 y 49 de cada yacimiento. ¿Es significativa la diferencia al 5 %?

Ejercicio:

Dos hornos metalúrgicos procesan el mismo mineral. El horno 1 da concentración media de hierro de 65.2 % ($\sigma = 0{,}6$), y el horno 2 da 64.8 % ($\sigma = 0{,}5$). Se toman muestras de 30 y 40. ¿Hay diferencia al 10 %?

Test de Welch

Aplicación:

- Las distribuciones de ambos grupos se asumen normales.
- Se quieren comparar las medias de ambos grupos considerados independientes.
- Las varianzas de ambos grupos no son iguales.
- $H_0 : \mu_1 = \mu_2$ vs $H_1 : \mu_1 \neq \mu_2$

Test de Welch

Estadístico de prueba:

$$t = \frac{(\bar{x}_1 - \bar{x}_2) - D_0}{\sqrt{\frac{s_1^2}{n_1} + \frac{s_2^2}{n_2}}}$$

con

$$\mathrm{gl} = \frac{\left(\frac{s_1^2}{n_1} + \frac{s_2^2}{n_2}\right)^2}{\frac{1}{n_1 - 1}\left(\frac{s_1^2}{n_1}\right)^2 + \frac{1}{n_2 - 1}\left(\frac{s_2^2}{n_2}\right)^2}$$

Ejercicios de test de Welch

Ejercicio:

Una planta cambia de bolas de acero a cerámica para ahorrar energía. Se comparan los consumos (kWh/t):

- Acero: $\bar{x} = 22{,}8$, $s = 1{,}5$, $n = 10$.
- Cerámica: $\bar{x} = 21{,}9$, $s = 1{,}3$, $n = 10$.
- ¿El cambio reduce significativamente el consumo al 5 % de significancia?

Ejercicio:

Se comparan dos métodos de lixiviación (A y B) aplicados a muestras de mineral de cobre. Los porcentajes de recuperación para cada método (en %) son:

- Método A: $\bar{x} = 85{,}4$, $s = 2{,}3$, $n = 10$.
- Método B: $\bar{x} = 82{,}1$, $s = 1{,}8$, $n = 10$.
- ¿Existe diferencia significativa entre los métodos al 5 % de significancia?

Test de muestras pareadas

Aplicación:

- Se tienen pares de observaciones dependientes, es decir, cada observación del grupo 1 está relacionada con una observación del grupo 2.
- Se quiere verificar si la media de las diferencias entre ambas mediciones es significativamente distinta de cero (o de otro valor).
- La distribución de las diferencias d_i es aproximadamente normal.
- $H_0 : \mu_d = 0$ vs $H_1 : \mu_d \neq 0$

Test de muestras pareadas

Estadístico de prueba:

$$t = \frac{\overline{d} - \mu_d}{S_d/\sqrt{n}}$$

con

$$\overline{d} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} d_i \qquad \text{y} \qquad S_d = \sqrt{\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(d_i - \overline{d})^2}.$$

Ejercicios de test de medias pareadas

Ejercicio:

Un ingeniero realiza un ajuste automático a un horno de fundición. Mide la temperatura promedio (^oC) en 10 puntos antes y después. El promedio de las diferencias (antes – después) es de $-2{,}4^oC$ con desviación estándar 2.0. ¿Se redujo significativamente la temperatura al 5 % de significancia?

Ejercicio:

Se mide la concentración de azufre en 10 muestras antes y después de un tratamiento térmico. La diferencia media es de $-0{,}6\,\%$ con desviación estándar 0.4 %. ¿Disminuye significativamente el azufre al 5 % de significancia?

Ejercicio:

Se recolectaron 200 muestras de mineral en una faena cuprífera. Los valores de la ley de cobre (%Cu) correspondientes se encuentran disponibles en el archivo de texto Ley de cobre.txt.

Ejercicio 1

Tipo de mineral	Ley de cobre típica (%Cu)
Óxidos de cobre	0,3 %–0,7 %
Sulfuros de cobre	0,4 %–1,2 %
Leyes de alta ley (históricas)	$> 1{,}5$ % (cada vez menos comunes)
Leyes promedio actuales (2020s)	0,5 %–0,7 %

Ejemplos específicos (aproximados)

Mina	Tipo de yacimiento	Ley actual promedio (%Cu)
Chuquicamata	Sulfuro (rajo/subt.)	$\approx 0{,}6\,\%$
Escondida (BHP)	Sulfuro (rajo)	$\approx 0{,}5\,\%$
El Teniente (Codelco)	Sulfuro (subterránea)	$\approx 0{,}8\,\%$
Radomiro Tomic	Óxido	$\approx 0{,}5\,\%$
Ministro Hales	Sulfuro	$\approx 0{,}9\,\%$

Estadística Descriptiva

Ejercicio:

Se realizaron mediciones de los porcentajes de humedad en dos tranques de relaves frescos. Los datos obtenidos están contenidos en los archivos base 1.csv y base 2.csv.

Ejercicio 2

Estado del relave	% de humedad aproximado	Riesgo asociado
Relave espeso o pastoso	20 %-30 %	Bajo riesgo, buena estabilidad
Relave saturado pero estable	30 %-40 %	Estabilidad moderada
Relave altamente saturado	40 %-50 %	Riesgo creciente
Cercano a la licuefacción	60 %-70 %	Muy alto riesgo de colapso

Ejercicio 2

Casos históricos

- Falla de Samarco (Brasil, 2015): El tranque tenía relaves altamente saturados. Se ha documentado que hubo condiciones de presión de poros elevadas y falla por licuefacción.
- Falla de Brumadinho (Brasil, 2019): También se atribuyó a licuefacción estática de relaves muy saturados (¿60 % humedad), en un tranque tipo aguas arriba mal mantenido.

Referencias

Freud, J. (2000). Estadística Matemática con Aplicaciones. Pearson