Università degli studi di Bergamo

Anno Accademico 2023/2024

MODELLI E ALGORITMI DI OTTIMIZZAZIONE

Introduzione alle Esercitazioni + Modelli di Pianificazione della Produzione – Esercizi 1 e 2 (E1)

Giovanni Micheli

Programma della lezione

- Introduzione
- Installazione di GAMS
- Modellazione in GAMS
  - Esercizio 1.1
  - Esercizio 1.2

Programma della lezione

- Introduzione
- Installazione di GAMS
- Modellazione in GAMS
  - Esercizio 1.1
  - Esercizio 1.2

Introduzione

Corso di Modelli e Algoritmi di Ottimizzazione

- Studio Teorico
  - ✓ Conoscenza di modelli di programmazione matematica per la risoluzione di problemi decisionali in vari ambiti.
  - ✓ Studio degli algoritmi di soluzione.

- Sperimentazione
  - ✓ Conoscenza del linguaggio di modellazione GAMS per la codifica e la risoluzione dei modelli di ottimizzazione.

Introduzione

- Esempi applicativi

  - Pianificazione industriale
    - Production planning
    - Gestione del magazzino
    - Project planning
    - Supply chain management
  - Assegnamento
    - Allocazione di risorse ad attività
    - Assegnamento di lavori a macchine
  - Logistica
    - Trasporto
    - Vehicle routing
  - Network design
    - Progettazione di reti di telecomunicazione
    - Urban planning
    - Localizzazione di impianti
  - Energia
    - Capacity expansion
    - Unit commitment
    - Ottimizzazione della produzione di idrogeno per elettrolisi
    - Demand Response

Materiale didattico

- Tutto il materiale didattico disponibile nella pagina Elearning di Modelli e Algoritmi di Ottimizzazione a.a. 2023-24
  - Lezioni
    - Slide delle lezioni teoriche
    - Testi delle esercitazioni
    - Modelli matematici
    - Codici GAMS (condivisi al termine delle esercitazioni)
  - Esami
    - Esiti
    - Tracce e soluzioni dei precedenti esami
  - Raccolte di esercizi addizionali
  - Annunci relativi al corso

Modalità d'esame

- Prova scritta
  - ✓ Gestionali: esercizi di modellazione GAMS (~ 1 h 45 min)
  - ✓ Informatici: esercizi algebrici e di modellazione GAMS (~ 2 h 15 min).
- Colloquio orale
  - ✓ Obbligatorio
  - ✓ Sostenuto esclusivamente dagli studenti sufficienti nello scritto
  - ✓ Strettamente collegato alla prova scritta
    - Da sostenere nella stessa sessione
    - L'esito negativo dell'orale comporta l'obbligo di ripetere la prova scritta.

Introduzione

Corso di Modelli e Algoritmi di Ottimizzazione

- Studio Teorico
  - ✓ Conoscenza di modelli di programmazione matematica per la risoluzione di problemi decisionali in vari ambiti.
  - ✓ Studio degli algoritmi di soluzione.

- Sperimentazione
  - ✓ Conoscenza del linguaggio di modellazione GAMS per la codifica e la risoluzione dei modelli di ottimizzazione.

- Cos'è GAMS?

  - ✓ GAMS (General Algebraic Modeling System) è un software sviluppato per la risoluzione di problemi di programmazione matematica del seguente tipo: lineare, intero, misto-intero, non-lineare

  - ✓ Consente di modellare in forma compatta problemi di grandi dimensioni

  - ✓ La versione demo può essere scaricata gratuitamente al link www.gams.com/download/ dopo aver completato la procedura di richiesta di una licenza

Programma della lezione

- Introduzione
- Installazione di GAMS
- Modellazione in GAMS
  - Esercizio 1.1
  - Esercizio 1.2

Installazione

- Collegarsi al link https://www.gams.com/try_gams/ per richiedere una licenza Demo

- Compilare il form con i propri dati personali e selezionare Submit

Request a Free Demo License

GAMS will not work without a valid license. Please use the form below to request a demo license.

First Name*

Last Name*

Email*

Institute/Organisation*

University of Bergamo

Country

Italy

Captcha: Please solve 23 + 21 : 46

I agree that GAMS will collect and store my name, e-mail address, and affiliation for purposes of fraud prevention, and for statistical purposes. All personal information will be deleted after 1 month.

- Attendere la mail con mittente noreply@gams.com contenente il link per la verifica dell'indirizzo di posta fornito (~15 min)

Installazione

- Dopo aver verificato l'indirizzo di posta, attendere una nuova mail con mittente noreply@gams.com contenente il testo della licenza (~1 min)

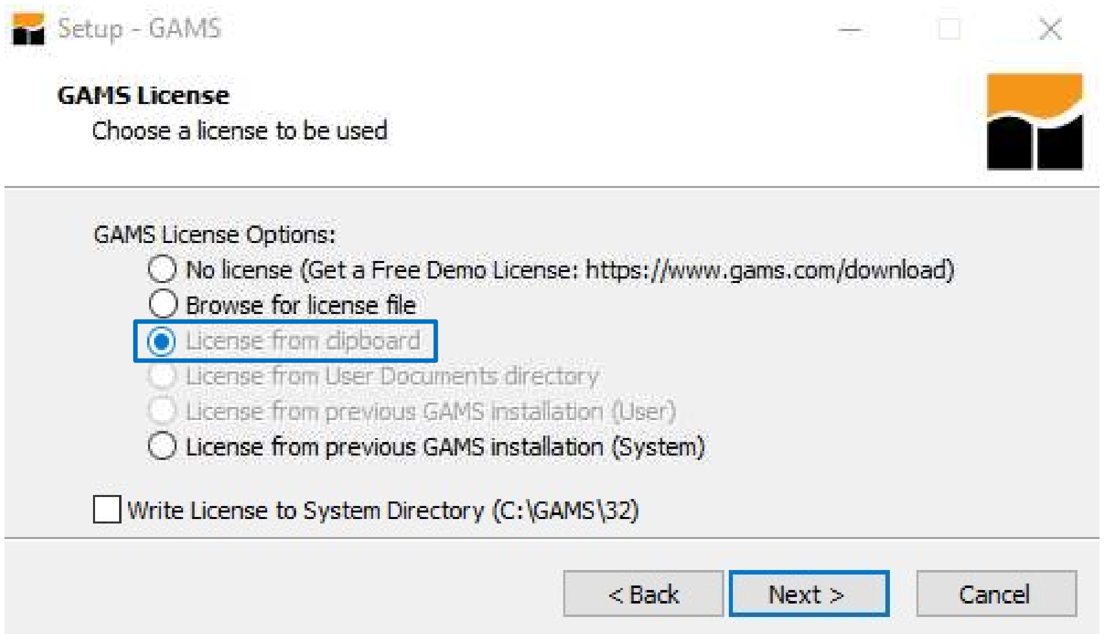
```
GAMS_Demo_license_for_Giovanni_Micheli_________G201003|0002CO-GEN
University_of_Bergamo,_Italy_____________________________________
1268433000_**GAMS_Demo_license_restricted_to_non-commercial_use**
194229140C_______________________________________________________
DL018875_______________________________________C_DEMO____________
giovanni.micheli@unibg.it,_Giovanni_Micheli______________________
```

- Al link www.gams.com/download/ scaricare la versione di GAMS compatibile con il sistema operativo del proprio PC.

- Aprire il file .exe ed avviare la procedura di installazione.

Installazione

- Nella procedura di installazione prediligere l'utilizzo di GAMS IDE rispetto a GAMS Studio, se tale scelta è applicabile.
- Copiare il testo della licenza dall'email ricevuta.
- Durante l'installazione, al momento di selezionare una licenza: selezionare la voce *License from clipboard* terminare l'installazione.



Programma della lezione

- Introduzione
- Installazione di GAMS
- Modellazione in GAMS
  - Esercizio 1.1
  - Esercizio 1.2

Modellazione in GAMS

- Fornire la risoluzione ad un problema decisionale implica lo svolgimento di due attività sequenziali:

1. Modellazione (i.e., trasformazione del problema decisionale in un modello matematico)
   - Insiemi
   - Dati (scalari vs vettori vs matrici)
   - Variabili decisionali
   - Equazioni (funzioni obiettivo e vincoli)

2. Implementazione GAMS (i.e., traduzione del modello matematico in una sequenza di istruzioni eseguibili da GAMS)

Modellazione in GAMS

- Struttura della soluzione di un problema decisionale
  - ✓ Insiemi e indici
  - ✓ Dati (scalari, vettori e matrici)
  - ✓ Variabili
  - ✓ Vincoli
  - ✓ Modello
  - ✓ Risoluzione del modello
  - ✓ Visualizzazione/analisi dei risultati

Esercizio 1

- Insiemi

  ✓ J : insieme dei prodotti

$$J = \{P1, P2, P3, P4\}$$

  ✓ I : insieme dei reparti

$$I = \{A, B, C, D\}$$

Esercizio 1

- Dati - Vettori
  - Pr_j Profitto unitario [$] del prodotto j
  - Pen_j Penalità unitaria [$] del prodotto j
  - D_j Domanda del prodotto j

Esercizio 1

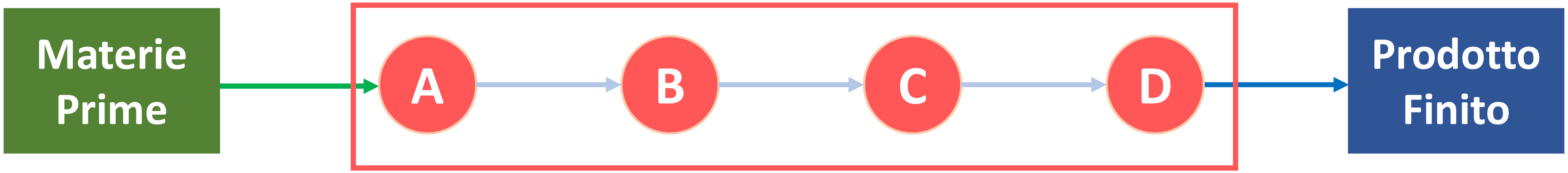
- Dati - Matrici
  - tl_{ij} Tempo di lavorazione [h] del prodotto j nel reparto i

- Dati - Scalari
  - C Capacità [h] di ciascun reparto **1000**

Esercizio 1

- La **configurazione** dei processi produttivi determina la tipologia di variabili decisionali da introdurre.

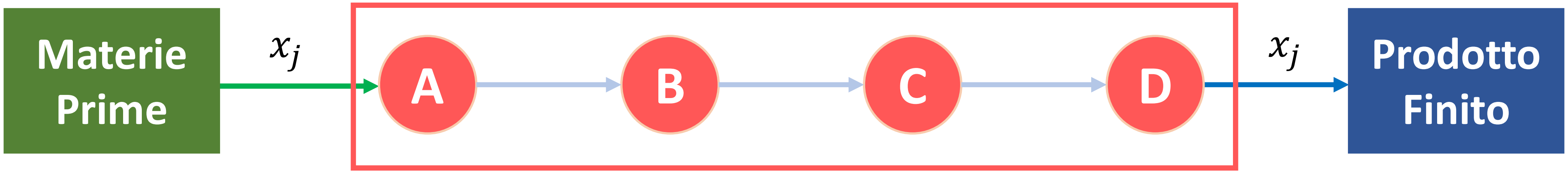
Reparti in serie



Esercizio 1

- La **configurazione** dei processi produttivi determina la tipologia di variabili decisionali da introdurre.

Reparti in serie



Esercizio 1

- Variabili Decisionali (Serie)

  - x_j Quantità del prodotto j realizzata
  - s_j Quantità di domanda del prodotto j non soddisfatta
  - z Variabile obiettivo : profitti totali [$]

Esercizio 1

- Funzione obiettivo (Serie)

Penalità per il non soddisfacimento della domanda

$$\max\ z = \sum_j Pr_j\, x_j - \sum_j Pen_j s_j$$

Ricavi derivanti dal soddisfacimento della domanda

Esercizio 1

- Vincoli (Serie)

  ✓ Capacità

  Il tempo di lavorazione di **ogni** reparto non deve eccedere la rispettiva capacità produttiva

Esercizio 1

- Vincoli (Serie)

  ✓ Capacità

$$\sum_{j} tl_{ij} x_j \leq C \quad \forall i$$

Esercizio 1

- Vincoli (Serie)

  ✓ Capacità

$$\sum_{j} tl_{ij} x_j \leq C \quad \forall i$$

  ✓ Domanda

  La domanda di **ciascun** prodotto è pari alla quota soddisfatta più la quota non soddisfatta

Esercizio 1

- Vincoli (Serie)

  ✓ Capacità

$$\sum_j tl_{ij} x_j \leq C \quad \forall i$$

  ✓ Domanda

$$x_j + s_j = D_j \quad \forall j$$

Esercizio 1

- Vincoli sulle variabili decisionali (Serie)
  - $x_j \geq 0 \quad \forall j$
  - $s_j \geq 0 \quad \forall j$

Esercizio 1

- Un modello di programmazione matematica
  - ✓ Vincoli e variabili inclusi in un modello determinano la classe del modello stesso
    - LP — Modello lineare
    - QCP — Modello quadratico
    - NLP — Modello non lineare
    - MIP — Modello lineare misto-intero
    - MINLP — Modello non-lineare misto-intero

LP, QCP, NLP → Solo variabili continue

MIP, MINLP → Presenza di variabili binarie o intere

LP, MIP: Solo operazioni lineari sulle variabili decisionali

QCP, NLP, MINLP: Presenza di operazioni non lineari sulle variabili decisionali

Esercizio 1

- Vincoli sulle variabili decisionali (Serie)
  - $x_j \geq 0 \quad \forall j$
  - $s_j \geq 0 \quad \forall j$

$\longrightarrow$ LP

Esercizio 1

- Vincoli sulle variabili decisionali (Serie)

  - $x_j \geq 0 \quad \forall j$
  - $s_j \geq 0 \quad \forall j$

  $\longrightarrow$ LP

  - $x_j \in \mathbb{N} \quad \forall j$
  - $s_j \in \mathbb{N} \quad \forall j$

  $\longrightarrow$ MIP $\longrightarrow$ Controllo del gap di ottimalità

Esercizio 1

Gap di ottimalità

- I modelli MIP possono richiedere un enorme impegno di risorse per la determinazione della soluzione ottima
  - Rilassamento continuo (tempo polinomiale)
  - Branch-and bound (tempo esponenziale)

- Di default GAMS nella risoluzione di un modello MIP non determina l'ottimo, ma una soluzione intera (SI) che si trova sufficientemente vicina ad una stima della soluzione ottima (SO)

- Si definisce gap di ottimalità la distanza tra le due soluzioni:
  - ✓ $|SO - SI|$ è il gap assoluto di ottimalità
  - ✓ $\frac{|SO-SI|}{\max(|SO|,|SI|)}$ è il gap relativo di ottimalità

- I gap di ottimalità sono controllabili mediante le estensioni optca e optcr (e.g. *Model_Name.optcr = 0 ;* ⟶ soluzione ottima)

Esercizio 1

- Post-processamento (Serie)
  - ✓ A valle della risoluzione del modello, introduciamo
    - ❖ Un nuovo scalare X_{tot}

$$X_{tot} = \sum_j x_j$$

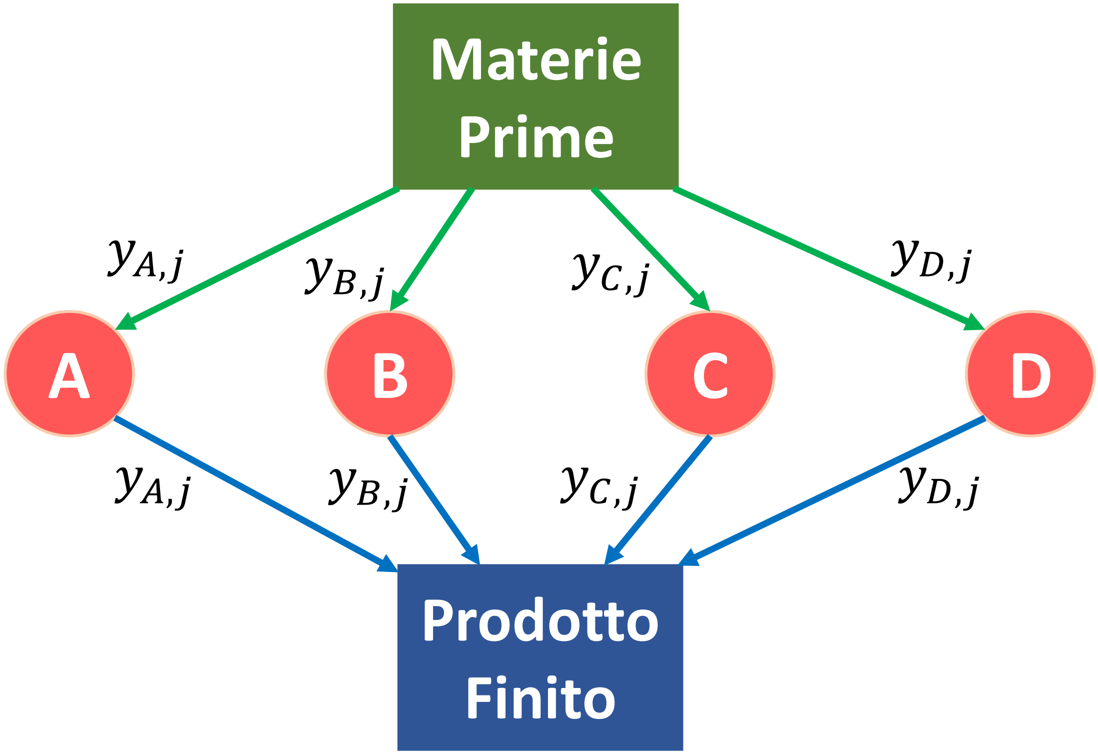
    - ❖ Un nuovo vettore Sat_i

$$Sat_i = \frac{\sum_j tl_{ij} x_j}{C}, \qquad \forall i$$

Esercizio 1

- La **configurazione** dei processi produttivi determina la tipologia di variabili decisionali da introdurre.

Reparti in parallelo



Esercizio 1

- Variabili Decisionali (Parallelo)

  - y_{ij} Quantità del prodotto j realizzata nel reparto i
  - s_j Quantità di domanda del prodotto j non soddisfatta
  - z Variabile obiettivo : profitti totali [$]

Esercizio 1

- Funzione obiettivo (Parallelo)

Penalità per il non soddisfacimento della domanda

$$\max z = \sum_j Pr_j \sum_i y_{ij} - \sum_j Pen_j s_j$$

Ricavi derivanti dal soddisfacimento della domanda

Esercizio 1

- Vincoli (Parallelo)

  ✓ Capacità

$$\sum_j tl_{ij} y_{ij} \leq C \quad \forall i$$

  ✓ Domanda

$$\sum_i y_{ij} + s_j = D_j \quad \forall j$$

Esercizio 1

- Vincoli sulle variabili decisionali (Parallelo)

  - $y_{ij} \geq 0 \quad \forall i, j$
  - $s_j \geq 0 \quad \forall j$

  $\longrightarrow$ LP

  - $y_{ij} \in \mathbb{N} \quad \forall i, j$
  - $s_j \in \mathbb{N} \quad \forall j$

  $\longrightarrow$ MIP $\longrightarrow$ Controllo del gap di ottimalità

Esercizio 1

- Post-processamento (Parallelo)
  - A valle della risoluzione del modello, introduciamo
    - Un nuovo scalare Y_{tot}

$$Y_{tot} = \sum_{i} \sum_{j} y_{ij}$$

    - Un nuovo vettore Sat_i^2

$$Sat_i^2 = \frac{\sum_j tl_{i,j} y_{ij}}{C}, \qquad \forall i$$

Esercizio 2

- Insiemi

  ✓ T : insieme dei mesi dell'orizzonte di pianificazione

$$T = \{1,2,3,4,5,6\}$$

Esercizio 2

- Dati - Vettori
  - D_t Domanda al mese t
  - cp_t Costo unitario di produzione [$] al mese t

Esercizio 2

- Dati - Scalari
  - cs Costo unitario di stoccaggio [$] **8**
  - $I0$ Giacenza iniziale del magazzino **50**
  - IF Giacenza finale del magazzino **60**
  - IM Capacità massima del magazzino **100**

Esercizio 2

- Variabili Decisionali

  - x_t Produzione al mese t
  - I_t Livello del magazzino alla fine del mese t
  - z Variabile obiettivo : costi totali [$]

Esercizio 2

- Funzione obiettivo

Costo di stoccaggio

$$\min \ z = \underbrace{\sum_t cp_t \cdot x_t}_{\text{Costo di produzione}} + cs \sum_t I_t$$

Esercizio 2

- Vincoli

  ✓ Livello finale del magazzino

  Alla fine dell'orizzonte di pianificazione, il livello delle scorte deve essere superiore al minimo valore finale

Esercizio 2

- Vincoli

  ✓ Livello finale del magazzino

$$I_6 \geq IF$$

Esercizio 2

- Vincoli

  ✓ Livello finale del magazzino

$$I_6 \geq IF$$

  ✓ Livello massimo del magazzino

  In **ogni** mese il livello del magazzino non può eccedere la massima capacità

Esercizio 2

- Vincoli

  ✓ Livello finale del magazzino

$$I_6 \geq IF$$

  ✓ Livello massimo del magazzino

$$I_t \leq IM \quad \forall t$$

Esercizio 2

- Vincoli

  ✓ Bilancio

  In **ogni** mese la quantità resa disponibile deve eguagliare la quantità utilizzata

Esercizio 2

- Vincoli
  - ✓ Bilancio
    - Mese 1 $$I0 + x_1 = D_1 + I_1$$

Esercizio 2

- Vincoli
  - ✓ Bilancio
    - Mese 1 $I0 + x_1 = D_1 + I_1$
    - Mese 2 $I_1 + x_2 = D_2 + I_2$

Esercizio 2

- Vincoli
  - ✓ Bilancio
    - Mese 1 $\quad I0 + x_1 = D_1 + I_1$
    - Mese 2 $\quad I_1 + x_2 = D_2 + I_2$

      $\vdots \qquad \vdots$
    - Mese 6 $\quad I_5 + x_6 = D_6 + I_6$

Esercizio 2

- Vincoli

  ✓ Bilancio

$$I_{t-1} + I0|_{t=1} + x_t = D_t + I_t \quad \forall t$$

Esercizio 2

- Vincoli

  ✓ Bilancio

$$I_{t-1} + I0|_{t=1} + x_t = D_t + I_t \quad \forall t$$

Variabile decisionale
(definita solo per $t > 1$)

Parametro in input (da includere nell'equazione solo per $t = 1$)

Esercizio 2

- Vincoli sulle variabili decisionali

  - $x_t \geq 0 \quad \forall t$
  - $I_t \geq 0 \quad \forall t$

$\longrightarrow$ LP

Esercizio 2

- Vincoli sulle variabili decisionali

  - $x_t \geq 0 \quad \forall t$
  - $I_t \geq 0 \quad \forall t$

  $\longrightarrow$ LP

  - $x_t \in \mathbb{N} \quad \forall t$
  - $I_t \in \mathbb{N} \quad \forall t$

  $\longrightarrow$ MIP $\longrightarrow$ Controllo del gap di ottimalità

Takeaway

1. Pianificazione della produzione

2. Regole di modellazione

Takeaway

1. Pianificazione della produzione

- La struttura dei processi produttivi (serie vs parallelo) determina la tipologia di variabili decisionali da introdurre nel problema.

- In presenza di più fonti di disponibilità di un prodotto (e.g., produzione ordinaria, produzione straordinaria, magazzino, outsourcing) e/o impieghi (e.g., vendita su canali diversi, stoccaggio) è indispensabile la scrittura di un vincolo di bilancio che eguagli disponibilità e utilizzi.

Takeaway

2. Regole di modellazione

- Tutti i modelli formulati dovranno essere lineari.
- Per ottenere risultati interi non è sufficiente modificare l'attributo Positive Variables in Integer Variables
    - Va modificata la classe di ottimizzazione (MIP)
    - Va controllato il gap di ottimalità
    - Va controllato l'upper bound.