

Università degli studi di Bergamo

Anno Accademico 2023/2024

MODELLI E ALGORITMI DI OTTIMIZZAZIONE

Modelli con Variabili

Binarie – Esercizi 4 e 5 (E2)



Giovanni Micheli

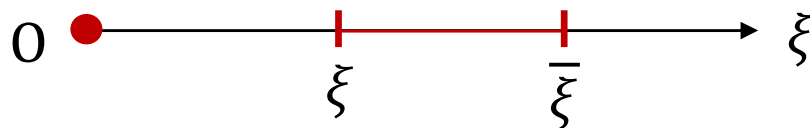
- Le variabili binarie vengono utilizzate per
 1. Rappresentare scelte dicotomiche
 2. Trattare funzioni discontinue (costi fissi)
 3. Gestire il soddisfacimento di vincoli alternativi
 4. Imporre l'appartenenza di variabili ad intervalli discontinui (minimi tecnici)
 5. Esprimere condizioni logiche



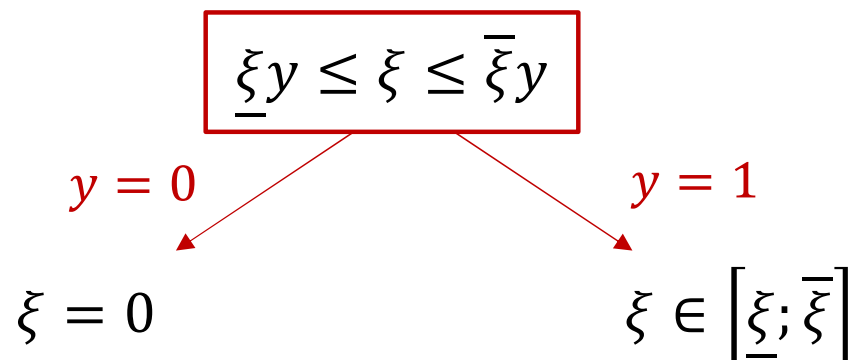
- Le variabili binarie vengono utilizzate per
 1. Rappresentare scelte dicotomiche
 2. Trattare funzioni discontinue (costi fissi)
 3. Gestire il soddisfacimento di vincoli alternativi
 - 4. Imporre l'appartenenza di variabili ad intervalli discontinui (minimi tecnici)**
 5. Esprimere condizioni logiche



- Un minimo tecnico è una minima quantità da garantire solo in caso di attivazione della produzione.

$$\xi \in \{0 \cup [\underline{\xi}; \bar{\xi}]\}$$


$$y \in \{0 ; 1\}$$



- Insiemi

✓ J : insieme dei prodotti

$$J = \{1,2,3,4\}$$



- Dati - Vettori

- q_j Minima quantità di j da produrre (solo se la produzione è attivata)
- P_j Prezzo di vendita del prodotto j
- c_j Costo marginale del prodotto j
- tl_j Tempo di lavorazione del prodotto j



- Dati - Scalari

- H Disponibilità di ore lavorative **6000**



- Variabili Decisionali
 - x_j Quantità prodotta di j
 - y_j Binaria: 1 se la produzione di j è attivata
– 0 altrimenti
 - z Variabile obiettivo: profitti totali

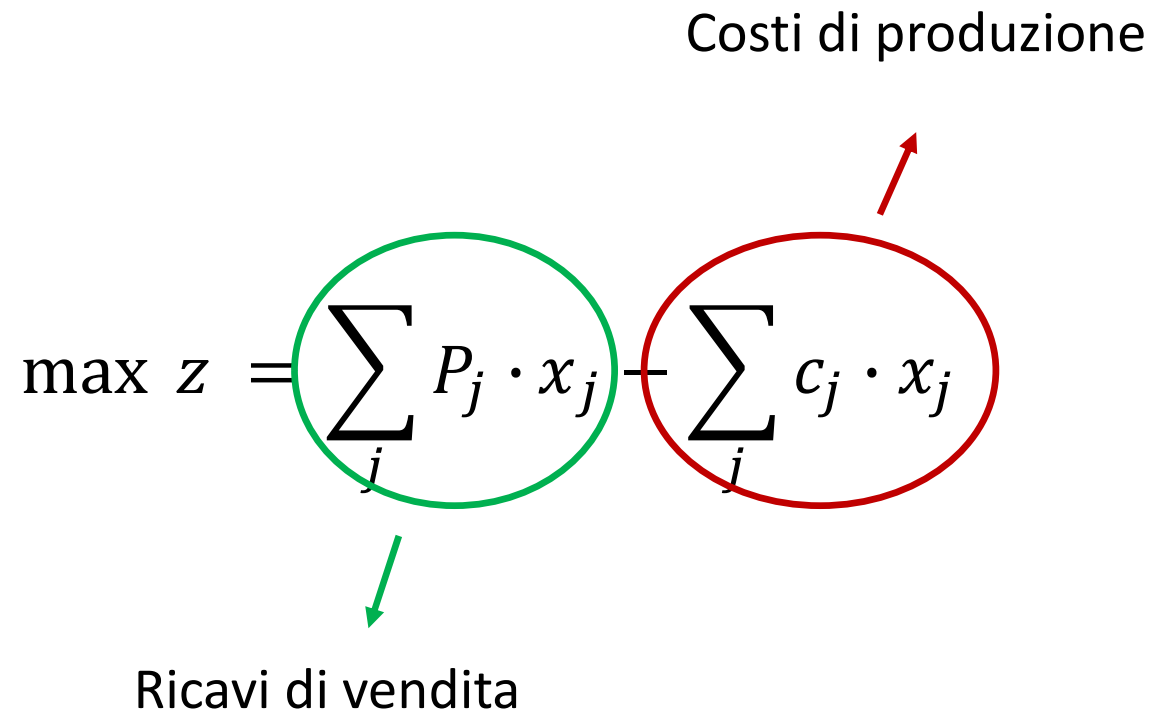


- Funzione Obiettivo

Costi di produzione

$$\max z = \sum_j P_j \cdot x_j - \sum_j c_j \cdot x_j$$

Ricavi di vendita



- Vincoli

- ✓ Capacità

Il tempo complessivo di lavorazione non può eccedere la capacità



- Vincoli

- ✓ Capacità

$$\sum_j tl_j \cdot x_j \leq H$$



- Vincoli

- ✓ Capacità

$$\sum_j tl_j \cdot x_j \leq H$$

- ✓ Minimo tecnico

Per **ogni** prodotto, se la rispettiva produzione è attivata, è necessario produrre un quantitativo minimo

- Vincoli

- ✓ Capacità

$$\sum_j tl_j \cdot x_j \leq H$$

- ✓ Minimo tecnico

$$qy_j \leq x_j \leq My_j$$

- Vincoli sulle variabili decisionali

- $x_j \geq 0 \quad \forall j$

- $y_j \in \{0; 1\} \quad \forall j$

→ MIP



Controllo del gap
di ottimalità

- Le variabili binarie vengono utilizzate per
 1. Rappresentare scelte dicotomiche
 2. Trattare funzioni discontinue (costi fissi)
 3. Gestire il soddisfacimento di vincoli alternativi
 4. Imporre l'appartenenza di variabili ad intervalli discontinui (minimi tecnici)
 5. Esprimere condizioni logiche



- Siano α , β e γ tre condizioni logiche che possono assumere valore vero o falso
 - Rappresentate tramite variabili binarie y_α , y_β e y_γ (1: vero, 0 : falso)
- Introduremo dei vincoli per modellare alcuni esempi di condizioni logiche
 - Intersezione
 - ❖ γ è vera se entrambe le condizioni α e β sono vere, altrimenti è falsa
 - Numero di condizioni logiche vere
 - ❖ Al massimo k
 - ❖ Almeno k
 - ❖ Esattamente k



- Intersezione

✓ γ è vera se entrambe le condizioni α e β sono vere, altrimenti è falsa

γ_α	γ_β	γ_γ
0	0	0
1	0	0
0	1	0
1	1	0
0	0	1
1	0	1
0	1	1
1	1	1



- Intersezione

✓ γ è vera se entrambe le condizioni α e β sono vere, altrimenti è falsa

γ_α	γ_β	γ_γ	
0	0	0	A
1	0	0	A
0	1	0	A
1	1	0	NA
0	0	1	NA
1	0	1	NA
0	1	1	NA
1	1	1	A

Dobbiamo ora identificare un set di vincoli che permetta di escludere tutte e sole le combinazioni non ammissibili

- Intersezione

✓ γ è vera se entrambe le condizioni α e β sono vere, altrimenti è falsa

y_α	y_β	y_γ	
0	0	0	A
1	0	0	A
0	1	0	A
1	1	0	NA
0	0	1	NA
1	0	1	NA
0	1	1	NA
1	1	1	A

$y_\gamma \leq y_\alpha$

- Intersezione

✓ γ è vera se entrambe le condizioni α e β sono vere, altrimenti è falsa

y_α	y_β	y_γ	
0	0	0	A
1	0	0	A
0	1	0	A
1	1	0	NA
0	0	1	NA
1	0	1	NA
0	1	1	NA
1	1	1	A

$y_\gamma \leq y_\alpha$

$y_\gamma \leq y_\beta$

- Intersezione

✓ γ è vera se entrambe le condizioni α e β sono vere, altrimenti è falsa

y_α	y_β	y_γ	
0	0	0	A
1	0	0	A
0	1	0	A
1	1	0	NA
0	0	1	NA
1	0	1	NA
0	1	1	NA
1	1	1	A

$$y_\gamma \leq y_\alpha$$

$$y_\gamma \leq y_\beta$$

$$y_\gamma \geq y_\alpha + y_\beta - 1$$

considero la somma $y_\alpha + y_\beta = 2$



- Numero condizioni logiche

- ✓ Al massimo k tra le condizioni α , β e γ sono vere

$$y_\alpha + y_\beta + y_\gamma \boxed{\leq} k$$

- ✓ Almeno k tra le condizioni α , β e γ sono vere

$$y_\alpha + y_\beta + y_\gamma \boxed{\geq} k$$

- ✓ Esattamente k tra le condizioni α , β e γ sono vere

$$y_\alpha + y_\beta + y_\gamma \boxed{=} k$$



- Insiemi

✓ I : insieme dei sili

$$I = \{1, 2, 3, \dots, 6\}$$

✓ J : insieme delle fattorie

$$J = \{1, 2, 3, \dots, 7\}$$



- Dati - Vettori

- D_j Domanda giornaliera [quintali] di foraggio della fattoria j
- Q_i Massima quantità giornaliera [quintali] di foraggio per il silo i
- CF_i Costi fissi quadriennali [€] del silo i
- CS_i Costo unitario giornaliero di stoccaggio [€/quintale] del silo i



- Dati - Matrici

- $dist_{ij}$ Distanza [km] del silo i dalla fattoria j

- Dati - Scalari

- c Costo unitario di trasporto **0.06**
[€/km·quintale]



- Calcolo dei parametri di costo

- f_i Costi fissi giornalieri [€] del silo i

$$f_i = \frac{CF_i}{4 \cdot 365 + 1}$$

- ct_{ij} Costo di trasporto [€/quintale] dal silo i alla fattoria j

$$ct_{i,j} = 2dist_{i,j} \cdot c$$



- Variabili Decisionali

- x_{ij} Quantità trasportata [quintali] dal silo i alla fattoria j ($x_{i,j} \geq 0$)
- s_i Quantità stoccata [quintali] dal silo i ($s_i \geq 0$)
- y_i Binaria: 1 se il silo i è attivato – 0 altrimenti
- z Variabile obiettivo : costi totali [€]



- Funzione obiettivo

$$\min z = \underbrace{\sum_i f_i y_i}_{\text{Costi fissi}} + \underbrace{\sum_i c s_i s_i}_{\text{Costi di stoccaggio}} + \underbrace{\sum_i \sum_j c t_{ij} x_{ij}}_{\text{Costi di trasporto}}$$

- Vincoli

- ✓ Domanda

La domanda di **ogni** fattoria deve essere soddisfatta



- Vincoli

✓ Domanda

$$\sum_i x_{ij} = D_j \quad \forall j$$



- Vincoli

- ✓ Domanda

$$\sum_i x_{ij} = D_j \quad \forall j$$

- ✓ Quantità stoccata

Per **ogni** silo, la quantità complessivamente in uscita è pari alla quantità stoccata

- Vincoli

- ✓ Domanda

$$\sum_i x_{ij} = D_j \quad \forall j$$

- ✓ Quantità stoccata

$$s_i = \sum_j x_{ij} \quad \forall i$$



- Vincoli

- ✓ Capacità di stoccaggio

Per **ogni** silo, la quantità complessivamente stoccata non deve eccedere la capacità massima



- Vincoli

- ✓ Capacità di stoccaggio

$$s_i \leq Q_i y_i \quad \forall i$$



- Vincoli

✓ Capacità di stoccaggio

$$s_i \leq Q_i y_i \quad \forall i$$

$$y_i = 0$$

$$s_i = 0$$



- Vincoli

- ✓ Capacità di stoccaggio

$$s_i \leq Q_i y_i \quad \forall i$$

$$y_i = 0$$

$$s_i = 0$$

Un silo non attivo non può essere utilizzato per lo stoccaggio



- Vincoli

- ✓ Capacità di stoccaggio

$$s_i \leq Q_i y_i \quad \forall i$$

$y_i = 0$ leads to $s_i = 0$

$y_i = 1$ leads to $s_i \leq Q_i$

Un silo non attivo non può essere utilizzato per lo stoccaggio

- Vincoli

- ✓ Capacità di stoccaggio

$$s_i \leq Q_i y_i \quad \forall i$$

$$y_i = 0$$

$$s_i = 0$$

Un silo non attivo non può essere utilizzato per lo stoccaggio

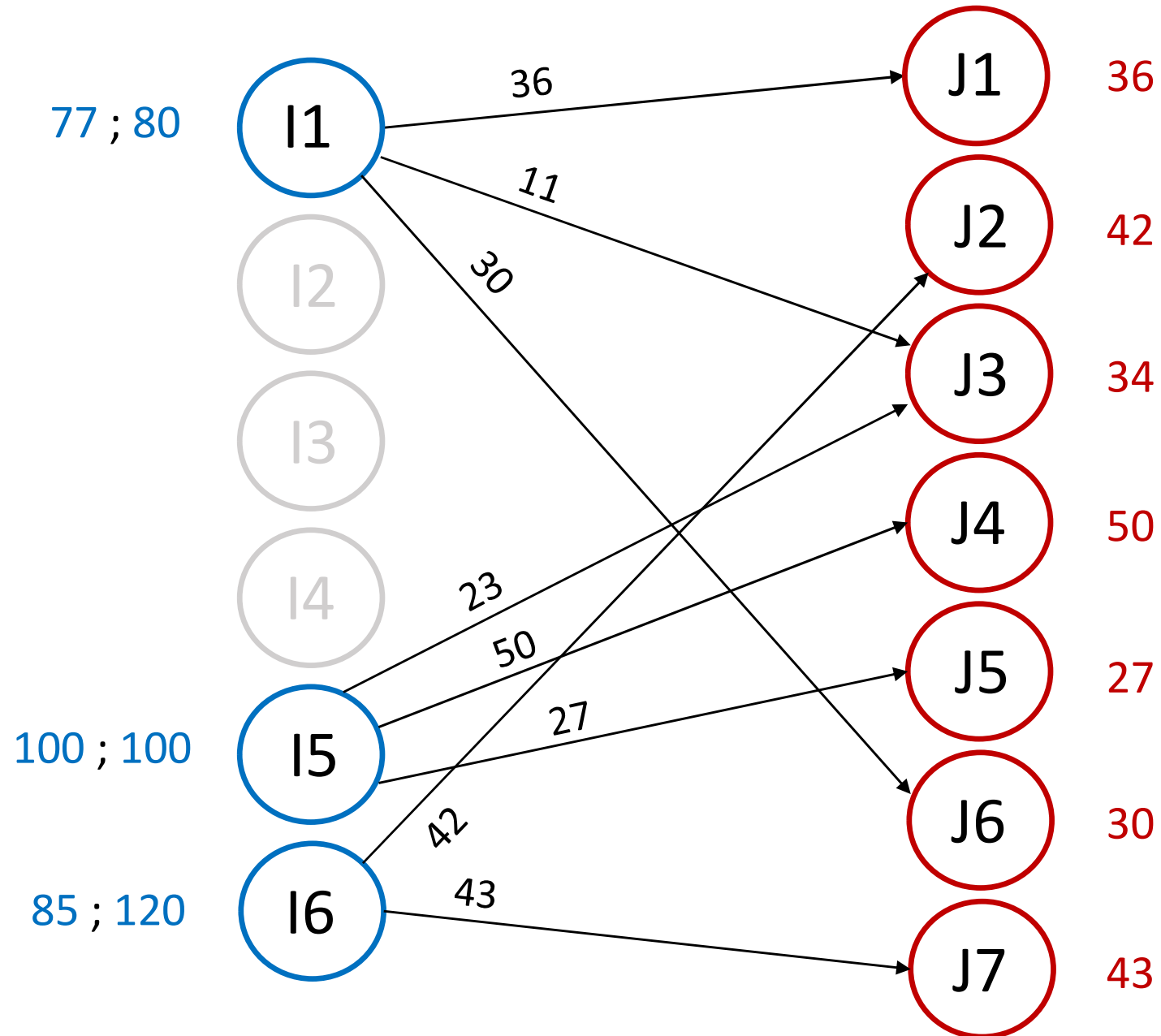
$$y_i = 1$$

$$s_i \leq Q_i$$

Un silo attivo può essere utilizzato per lo stoccaggio nel rispetto della capacità

Esercizio 5

A)



- Modifiche al punto B)
 - ✓ Numero di sili attivati
È necessario attivare almeno 4 sili



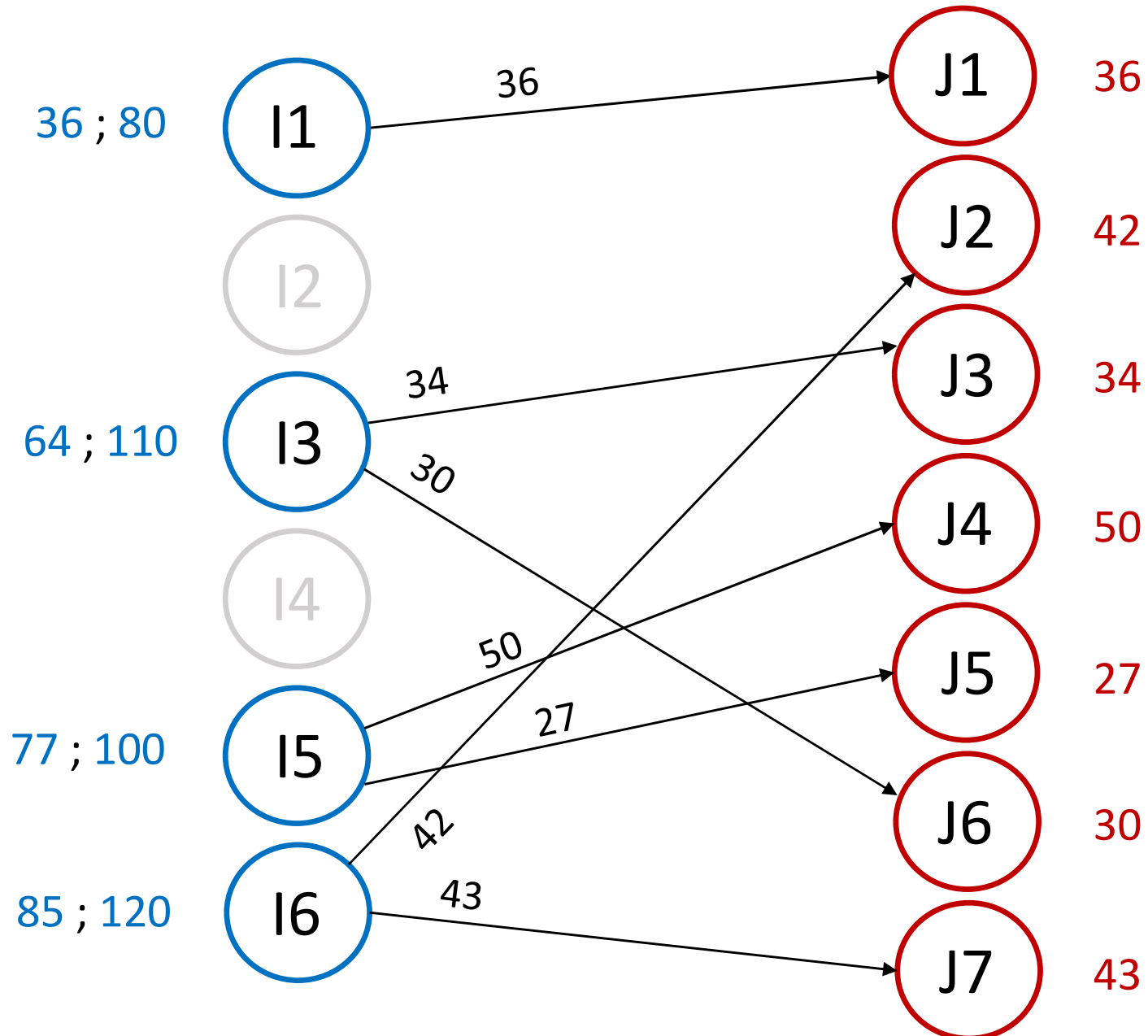
- Modifiche al punto B)
 - ✓ Numero di sili attivati

$$\sum_i y_i \geq 4$$



Esercizio 5

B)



- Modifiche al punto C)
 - ✓ Fornitura minima
Ogni silo, se attivato, deve stoccare una quantità minima

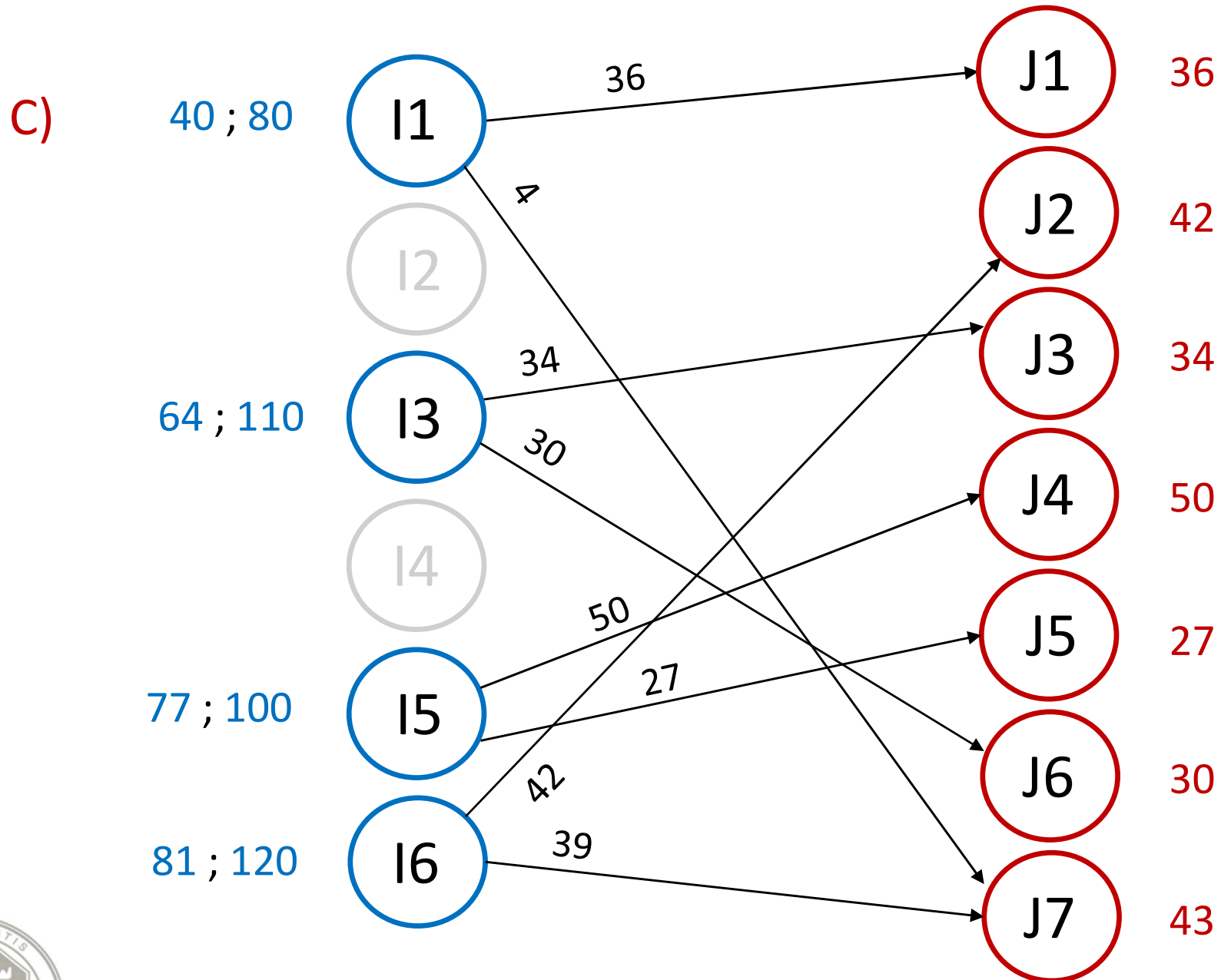
- Modifiche al punto C)

✓ Fornitura minima

$$0.5Q_i y_i \leq s_i \leq Q_i y_i \quad \forall i$$



Esercizio 5



- Modifiche al punto D)
 - ✓ 3 può essere attivato solo se almeno uno tra 1 e 2 è attivato

y_1	y_2	y_3
0	0	0
1	0	0
0	1	0
1	1	0
0	0	1
1	0	1
0	1	1
1	1	1

- Modifiche al punto D)
 - ✓ 3 può essere attivato solo se almeno uno tra 1 e 2 è attivato

y_1	y_2	y_3	
0	0	0	A
1	0	0	
0	1	0	
1	1	0	
0	0	1	NA
1	0	1	
0	1	1	
1	1	1	

- Modifiche al punto D)
 - ✓ 3 può essere attivato solo se almeno uno tra 1 e 2 è attivato

y_1	y_2	y_3	
0	0	0	A
1	0	0	A
0	1	0	
1	1	0	
0	0	1	NA
1	0	1	A
0	1	1	
1	1	1	

Esercizio 5

- Modifiche al punto D)
 - ✓ 3 può essere attivato solo se almeno uno tra 1 e 2 è attivato

y_1	y_2	y_3	
0	0	0	A
1	0	0	A
0	1	0	A
1	1	0	
0	0	1	NA
1	0	1	A
0	1	1	A
1	1	1	



- Modifiche al punto D)
 - ✓ 3 può essere attivato solo se almeno uno tra 1 e 2 è attivato

y_1	y_2	y_3	
0	0	0	A
1	0	0	A
0	1	0	A
1	1	0	A
0	0	1	NA
1	0	1	A
0	1	1	A
1	1	1	A

Esercizio 5

- Modifiche al punto D)
 - ✓ 3 può essere attivato solo se almeno uno tra 1 e 2 è attivato

y_1	y_2	y_3	
0	0	0	A
1	0	0	A
0	1	0	A
1	1	0	A
0	0	1	NA
1	0	1	A
0	1	1	A
1	1	1	A

$$y_3 \leq y_1 + y_2$$



- Modifiche al punto D)
 - ✓ 6 può essere attivato solo attivando entrambi 4 e 5

y_4	y_5	y_6
0	0	0
1	0	0
0	1	0
1	1	0
0	0	1
1	0	1
0	1	1
1	1	1

- Modifiche al punto D)
 - ✓ 6 può essere attivato solo attivando entrambi 4 e 5

y_4	y_5	y_6	
0	0	0	A
1	0	0	
0	1	0	
1	1	0	
0	0	1	NA
1	0	1	
0	1	1	
1	1	1	

- Modifiche al punto D)
 - ✓ 6 può essere attivato solo attivando entrambi 4 e 5

y_4	y_5	y_6	
0	0	0	A
1	0	0	A
0	1	0	
1	1	0	
0	0	1	NA
1	0	1	NA
0	1	1	
1	1	1	

- Modifiche al punto D)
 - ✓ 6 può essere attivato solo attivando entrambi 4 e 5

y_4	y_5	y_6	
0	0	0	A
1	0	0	A
0	1	0	A
1	1	0	
0	0	1	NA
1	0	1	NA
0	1	1	NA
1	1	1	

- Modifiche al punto D)
 - ✓ 6 può essere attivato solo attivando entrambi 4 e 5

y_4	y_5	y_6	
0	0	0	A
1	0	0	A
0	1	0	A
1	1	0	A
0	0	1	NA
1	0	1	NA
0	1	1	NA
1	1	1	A

Esercizio 5

- Modifiche al punto D)
 - ✓ 6 può essere attivato solo attivando entrambi 4 e 5

y_4	y_5	y_6	
0	0	0	A
1	0	0	A
0	1	0	A
1	1	0	A
0	0	1	NA
1	0	1	NA
0	1	1	NA
1	1	1	A

$y_6 \leq y_4$



Esercizio 5

- Modifiche al punto D)
 - ✓ 6 può essere attivato solo attivando entrambi 4 e 5

y_4	y_5	y_6	
0	0	0	A
1	0	0	A
0	1	0	A
1	1	0	A
0	0	1	NA
1	0	1	NA
0	1	1	NA
1	1	1	A

$$y_6 \leq y_4$$

$$y_6 \leq y_5$$



Esercizio 5

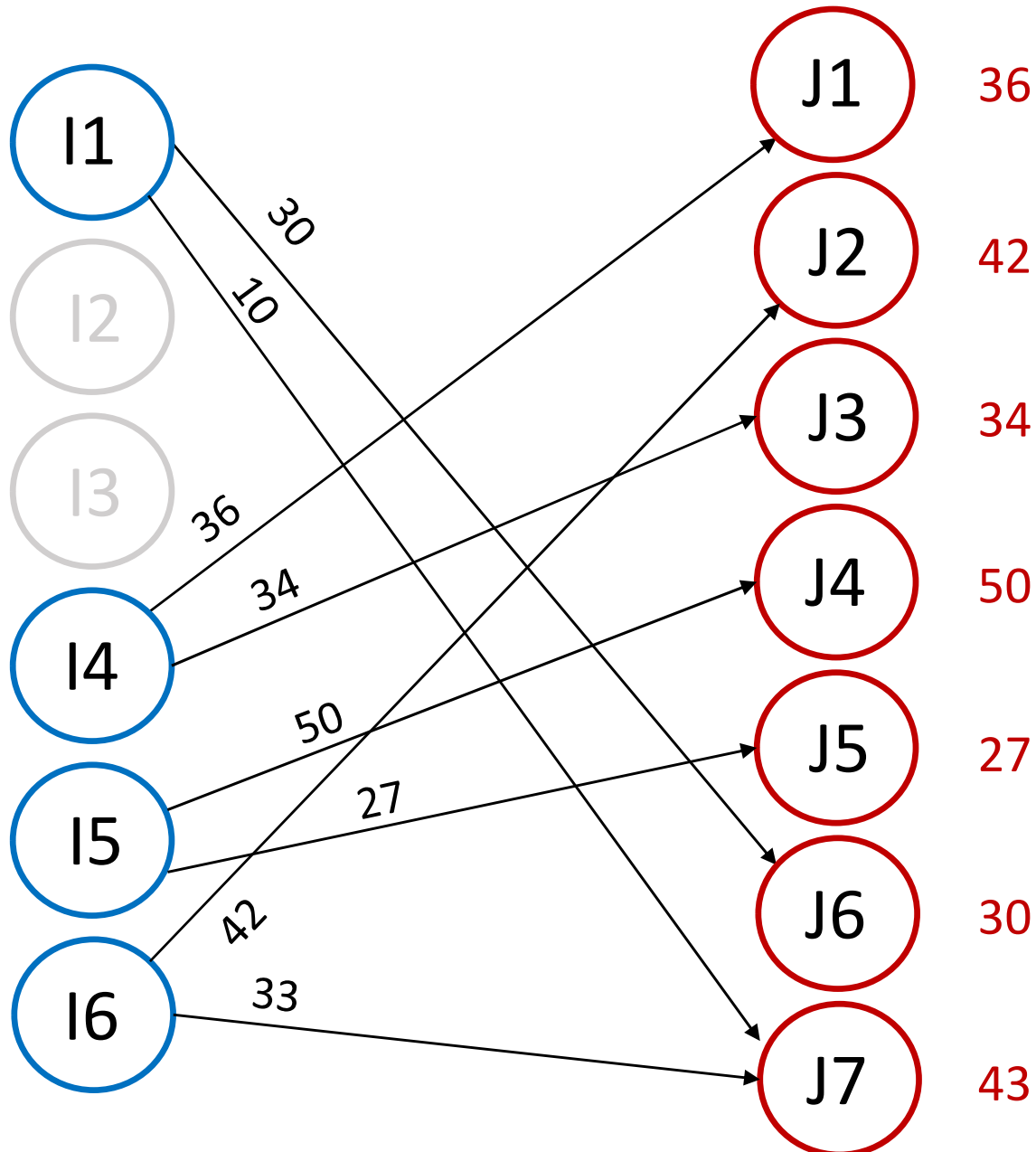
D)

40 ; 80

70 ; 120

77 ; 100

75 ; 120



1. Utilizzo delle variabili binarie
2. Regole di modellazione



1. Utilizzo delle variabili binarie per determinate finalità (lista completa)
 - Modellare decisioni dicotomiche
 - Risolvere le discontinuità legate alla presenza di costi fissi
 - Imporre vincoli alternativi
 - Modellare minimi tecnici
 - Esprimere condizioni logiche

2. Regole di modellazione

- In presenza di minimi tecnici, il vincolo di coerenza è duplice:
 - $m_j y_j \leq x_j \leq M_j y_j$
- Lo strumento da utilizzare per esprimere condizioni logiche è la tabella di verità
 - Costruzione tabella
 - Classificazione delle combinazioni in ammissibili (A) e non-ammissibili (NA)
 - Imposizione di vincoli **lineari** che escludano solamente le combinazioni NA, mantenendo le combinazioni A all'interno della regione ammissibile.

