Università degli studi di Bergamo

Anno Accademico 2023/2024

MODELLI E ALGORITMI DI OTTIMIZZAZIONE

Modelli con Variabili

Binarie – Esercizi 1, 2 e 3 (E2)

Giovanni Micheli

Le variabili binarie

- Le variabili binarie vengono utilizzate per
    1. Rappresentare scelte dicotomiche
    2. Trattare funzioni discontinue (costi fissi)
    3. Gestire il soddisfacimento di vincoli alternativi
    4. Imporre l'appartenenza di variabili ad intervalli discontinui (minimi tecnici)
    5. Esprimere condizioni logiche

Le variabili binarie

- Le variabili binarie vengono utilizzate per

1. Rappresentare scelte dicotomiche
2. Trattare funzioni discontinue (costi fissi)
3. Gestire il soddisfacimento di vincoli alternativi
4. Imporre l'appartenenza di variabili ad intervalli discontinui (minimi tecnici)
5. Esprimere condizioni logiche

Esercizio 1

- Insiemi

  - ✓ I : insieme dei bancali

$$I = \{1,2,\dots,12\}$$

  - ✓ J : insieme delle stive

$$J = \{1,2,3,4,5,6\}$$

Esercizio 1

- Dati - Vettori
  - p_i Peso [ton] del bancale i
  - C_j Capacità [ton] della stiva j

- Dati - Scalari
  - N Numero massimo di bancali imbarcabili in una stiva **4**

Esercizio 1

- Variabili Decisionali
  - x_{ij} Binaria: 1 se il bancale i è imbarcato nella stiva j – 0 altrimenti
  - y_j Binaria: 1 se la stiva j è utilizzata – 0 altrimenti
  - z Variabile obiettivo : numero totale di stive utilizzate

Esercizio 1

- Funzione obiettivo

$$\min\ z = \sum_j y_j$$

Esercizio 1

- Vincoli
  - ✓ Assegnamento bancali

    Ogni bancale deve essere assegnato ad un'unica stiva

Esercizio 1

- Vincoli

  ✓ Assegnamento bancali

$$\sum_j x_{ij} = 1 \quad \forall i$$

Esercizio 1

- Vincoli

  ✓ Assegnamento bancali

$$\sum_j x_{ij} = 1 \quad \forall i$$

  ✓ Numero bancali

  Ogni stiva non può ospitare più di 4 bancali

Esercizio 1

- Vincoli

  ✓ Assegnamento bancali

$$\sum_{j} x_{ij} = 1 \quad \forall i$$

  ✓ Numero bancali

$$\sum_{i} x_{ij} \leq N \quad \forall j$$

Esercizio 1

- Vincoli

  ✓ Capacità stive

  Per **ogni** stiva, il peso complessivo imbarcato non può eccedere la capacità

Esercizio 1

- Vincoli
  - ✓ Capacità stive

$$\sum_{i} p_i x_{ij} \leq C_j \quad \forall j$$

Esercizio 1

- Vincoli

  ✓ Capacità stive

$$\sum_{i} p_i x_{ij} \leq C_j \quad \forall j$$

  ✓ Coerenza

  Va sempre imposto un collegamento tra variabili decisionali del problema (e.g., vincolo di bilancio nella pianificazione della produzione, vincolo di produzione nella miscelazione). In questo caso: l'assegnamento di **ciascun** bancale a **ciascuna** stiva può avvenire solo se la stiva è utilizzata.

Esercizio 1

- Vincoli

  ✓ Capacità stive

$$\sum_i p_i x_{ij} \leq C_j \quad \forall j$$

  ✓ Coerenza

$$x_{ij} \leq y_j \quad \forall i, j$$

Esercizio 1

- In assenza della coerenza (i.e., il collegamento tra variabili del problema) la modellazione risulta completamente **errata**.

- La coerenza può essere imposta tramite un vincolo dedicato (come nel precedente caso) o **riformulando** i vincoli del problema in modo da imporre la corrispondenza logica tra variabili (approccio preferibile).

- Nell'esercizio in questione, la coerenza può essere imposta direttamente nei **vincoli**:
  - ✓ Numero bancali
  - ✓ Capacità stive

Esercizio 1

- Come imporre la coerenza nei vincoli (approccio 1)

  ✓ Numero bancali

  Per **ogni** stiva, il numero di bancali imbarcati è

  - Nullo se la stiva non è utilizzata
  - Limitato da 4 se la stiva è utilizzata

Esercizio 1

- Come imporre la coerenza nei vincoli (approccio 1)

  ✓ Numero bancali

$$\sum_{i} x_{ij} \leq N y_j \quad \forall j$$

Esercizio 1

- Come imporre la coerenza nei vincoli (approccio 1)
  - ✓ Numero bancali

$$\sum_i x_{ij} \leq N y_j \quad \forall j$$

Se $y_j = 0$

$$x_{ij} = 0 \quad \forall i$$

Esercizio 1

- Come imporre la coerenza nei vincoli (approccio 1)

  ✓ Numero bancali

$$\sum_i x_{ij} \leq N y_j \quad \forall j$$

Se $y_j = 0$

$$x_{ij} = 0 \quad \forall i$$

Se $y_j = 1$

$$\sum_i x_{ij} \leq N$$

Esercizio 1

- Come imporre la coerenza nei vincoli (approccio 2)

  ✓ Capacità stive

  Per **ogni** stiva, il peso complessivo imbarcato è

  - Nullo se la stiva non è utilizzata
  - Limitato dalla capacità se la stiva è utilizzata

Esercizio 1

- Come imporre la coerenza nei vincoli (approccio 2)

  ✓ Capacità stive

$$\sum_i p_i x_{ij} \leq C_j y_j \quad \forall j$$

Se $y_j = 0$

$$x_{i,j} = 0 \quad \forall i$$

Se $y_j = 1$

$$\sum_i p_i x_{ij} \leq C_j$$

Esercizio 1

- Riassumendo, tre formulazioni possibili

$$\min\ z = \sum_j y_j$$
$$\text{s.t.} \sum_j x_{ij} = 1 \quad \forall i$$
$$\sum_i x_{ij} \le N \quad \forall j$$
$$\sum_i p_i x_{ij} \le C_j \quad \forall j$$
$$x_{ij} \le y_j \quad \forall i,j$$
$$x_{ij} \in \{0;1\} \quad \forall i,j$$
$$y_j \in \{0;1\} \quad \forall j$$

$$\min\ z = \sum_j y_j$$
$$\text{s.t.} \sum_j x_{ij} = 1 \quad \forall i$$
$$\sum_i x_{ij} \le N y_j \quad \forall j$$
$$\sum_i p_i x_{ij} \le C_j \quad \forall j$$
$$x_{ij} \in \{0;1\} \quad \forall i,j$$
$$y_j \in \{0;1\} \quad \forall j$$

$$\min\ z = \sum_j y_j$$
$$\text{s.t.} \sum_j x_{ij} = 1 \quad \forall i$$
$$\sum_i x_{ij} \le N \quad \forall j$$
$$\sum_i p_i x_{ij} \le C_j y_j \quad \forall j$$
$$x_{ij} \in \{0;1\} \quad \forall i,j$$
$$y_j \in \{0;1\} \quad \forall j$$

Preferibili

Le variabili binarie

- Le variabili binarie vengono utilizzate per

1. Rappresentare scelte dicotomiche
2. Trattare funzioni discontinue (costi fissi)
3. Gestire il soddisfacimento di vincoli alternativi
4. Imporre l'appartenenza di variabili ad intervalli discontinui (minimi tecnici)
5. Esprimere condizioni logiche

Funzioni discontinue (costi fissi)

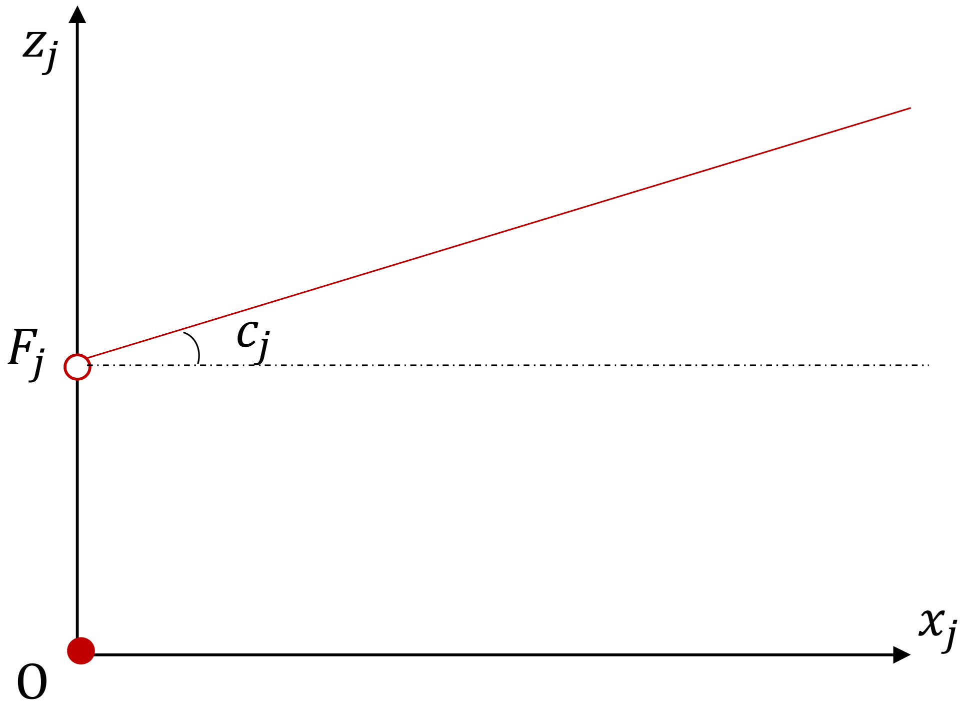
- Nella produzione del bene j, in caso di presenza, oltre al costo variabile c_j, di un costo fisso F_j (indipendente dalla quantità prodotta), la funzione di costo diventa

$$z_j(x_j) = \begin{cases} F_j + c_j x_j & \text{se } x_j > 0 \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

Funzioni discontinue (costi fissi)

- Nella produzione del bene j, in caso di presenza, oltre al costo variabile c_j, di un costo fisso F_j (indipendente dalla quantità prodotta), la funzione di costo diventa

$$z_j(x_j) = \begin{cases} F_j + c_j x_j & \text{se } x_j > 0 \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$



Funzioni discontinue (costi fissi)

- Utilizzando le sole variabili x_j non è possibile risolvere la non linearità nell'origine indotta dalla presenza di costi fissi.

- Si introduce una variabile binaria y_j, a cui attribuire il seguente significato:

$$y_j = \begin{cases} 1 & \text{se } x_j > 0 \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

- La funzione di costo può quindi essere riscritta in forma lineare:

$$z_j(x_j, y_j) = F_j y_j + c_j x_j$$

Funzioni discontinue (costi fissi)

- Perché la modellazione sia corretta, le variabili del problema devono essere collegate, garantendo il soddisfacimento della condizione logica:
  - $x_j > 0$ se e solo se $y_j = 1$ (i.e., si possono avere unità di bene prodotte solo se la corrispondente produzione è attivata).

- Tale condizione logica è garantita introducendo un maggiorante M_j e imponendo il seguente **vincolo di coerenza**:

$$\boxed{x_j \leq M_j y_j \quad \forall j}$$

Funzioni discontinue (costi fissi)

- Perché la modellazione sia corretta, le variabili del problema devono essere collegate, garantendo il soddisfacimento della condizione logica:
  - $x_j > 0$ se e solo se $y_j = 1$ (i.e., si possono avere unità di bene prodotte solo se la corrispondente produzione è attivata).

- Tale condizione logica è garantita introducendo un maggiorante M_j e imponendo il seguente **vincolo di coerenza**:

$$\boxed{x_j \leq M_j y_j \quad \forall j}$$

Se $y_j = 0$

$$\downarrow$$

$x_j = 0$

Funzioni discontinue (costi fissi)

- Perché la modellazione sia corretta, le variabili del problema devono essere collegate, garantendo il soddisfacimento della condizione logica:
  - $x_j > 0$ se e solo se $y_j = 1$ (i.e., si possono avere unità di bene prodotte solo se la corrispondente produzione è attivata).

- Tale condizione logica è garantita introducendo un maggiorante M_j e imponendo il seguente **vincolo di coerenza**:

$$\boxed{x_j \leq M_j y_j \quad \forall j}$$

Se $y_j = 0$ $\rightarrow$ $x_j = 0$

Se $y_j = 1$ $\rightarrow$ $x_j \leq M_j$

Esercizio 2

- Insiemi

  ✓ J : insieme delle compagnie telefoniche

$$J = \{A, B, C\}$$

Esercizio 2

- Dati - Vettori
  - F_j Canone mensile fisso [$] offerto dalla compagnia telefonica j
  - c_j Costo variabile [$/minuto] offerto dalla compagnia telefonica j
- Dati - Scalari
  - D Domanda mensile [minuti] **250**

Esercizio 2

- Variabili Decisionali

  - x_j Utilizzo [minuti] della compagnia j
  - y_j Binaria: 1 se la compagnia j è utilizzata – 0 altrimenti
  - z Variabile obiettivo : costi telefonici totali [$]

Esercizio 2

- Funzione obiettivo

$$\min\ z = \sum_j \left(F_j y_j + c_j x_j\right)$$

Esercizio 2

- Vincoli

  ✓ Utilizzo mensile

  L'utilizzo complessivo delle compagnie telefoniche deve eguagliare la domanda mensile

Esercizio 2

- Vincoli

  ✓ Utilizzo mensile

$$\sum_{j} x_j = D$$

Esercizio 2

- Vincoli

  ✓ Utilizzo mensile

$$\sum_j x_j = D$$

  ✓ Coerenza

  Creazione della corrispondenza logica tra variabili binarie e continue → le binarie sono attive quando le rispettive variabili continue sono positive

Esercizio 2

- Vincoli

  ✓ Utilizzo mensile

$$\sum_j x_j = D$$

  ✓ Coerenza

$$x_j \leq D y_j \quad \forall j$$

Maggiorante più stretto

Esercizio 2

- Vincoli sulle variabili decisionali

  - $x_j \geq 0 \quad \forall j$
  - $y_j \in \{0; 1\} \quad \forall j$

$\longrightarrow$ MIP

$\downarrow$

Controllo del gap
di ottimalità

Le variabili binarie

- Le variabili binarie vengono utilizzate per

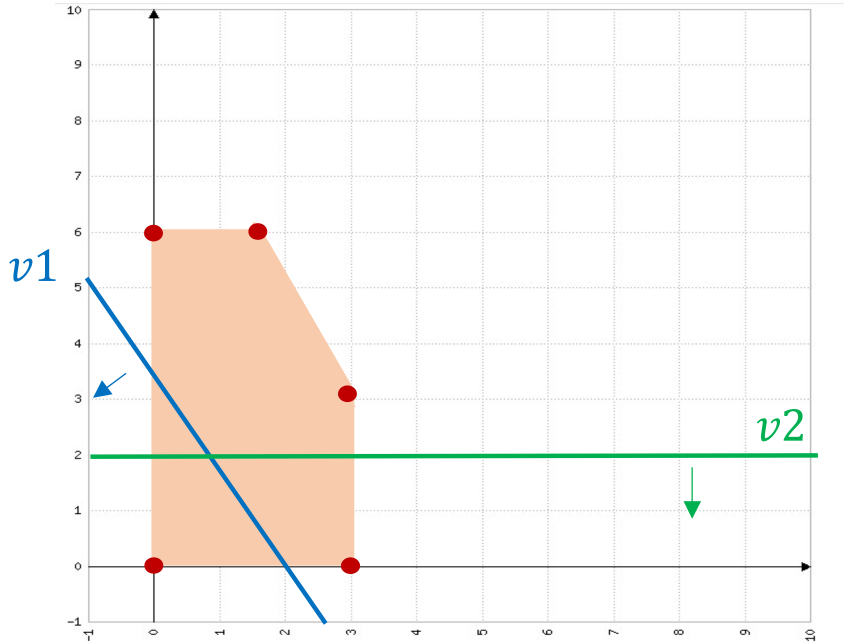
1. Rappresentare scelte dicotomiche
2. Trattare funzioni discontinue (costi fissi)
3. Gestire il soddisfacimento di vincoli alternativi
4. Imporre l'appartenenza di variabili ad intervalli discontinui (minimi tecnici)
5. Esprimere condizioni logiche

Vincoli alternativi

- Consideriamo la presenza di due vincoli alternativi $v1$ e $v2$ (i.e., due vincoli di cui è richiesto il soddisfacimento di uno solo).

$$v1 : \sum_{j=1}^{n} a_{1,j}\, x_j \leq b_1$$

$$v2 : \sum_{j=1}^{n} a_{2,j}\, x_j \leq b_2$$

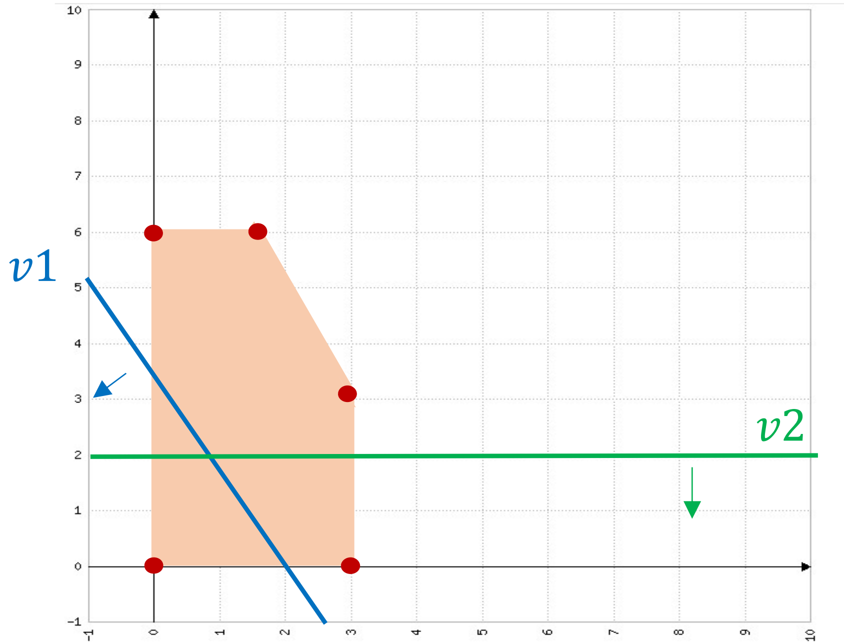


- Introduciamo due variabili binarie y_1 e y_2 e un numero reale positivo M sufficientemente grande da rendere ridondanti i vincoli se sommato ai termini noti b_1 e b_2.

Vincoli alternativi

- Costruiamo i seguenti vincoli:

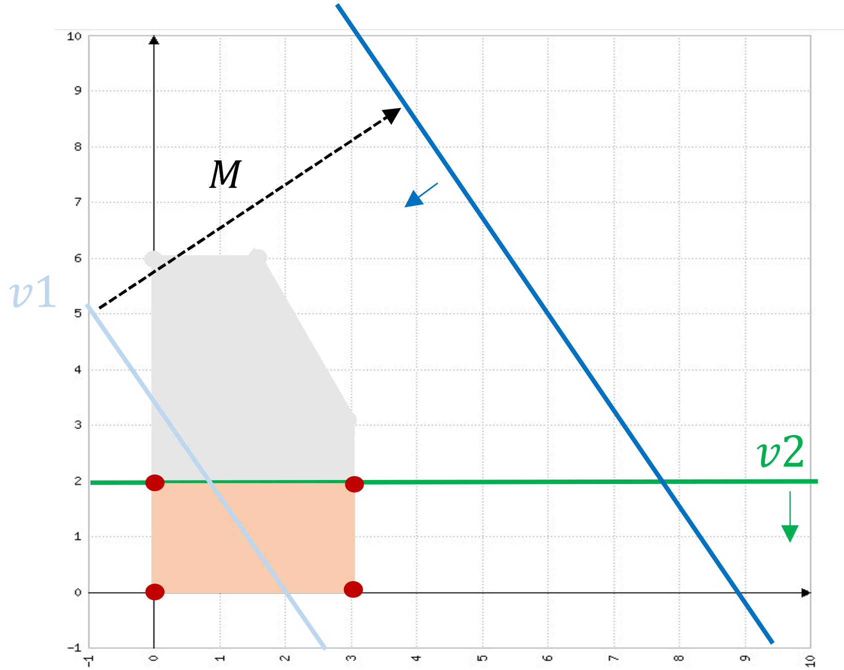
$$\begin{cases} \displaystyle\sum_{j=1}^{n} a_{1,j}\, x_j \leq b_1 + M y_1 \\ \displaystyle\sum_{j=1}^{n} a_{2,j}\, x_j \leq b_2 + M y_2 \\ \\ y_1 + y_2 = 1 \end{cases}$$



Vincoli alternativi

- Costruiamo i seguenti vincoli:

$$\begin{cases} \sum_{j=1}^{n} a_{1,j}\, x_j \le b_1 + M y_1 \\ \sum_{j=1}^{n} a_{2,j}\, x_j \le b_2 + M y_2 \\ y_1 + y_2 = 1 \end{cases}$$



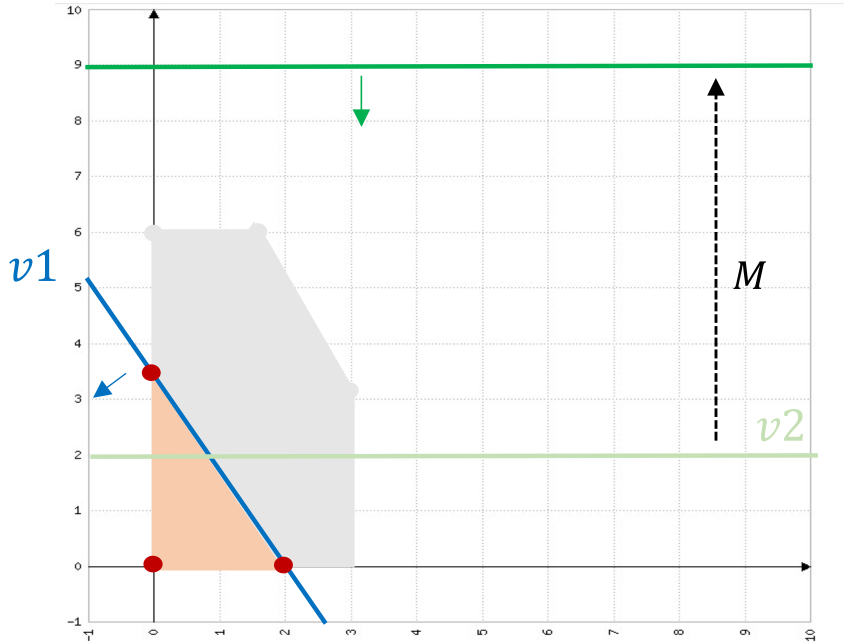
- Caso 1: $y_1 = 1\,, y_2 = 0$

Il primo vincolo è ridondante, mentre il secondo è applicato.

Vincoli alternativi

- Costruiamo i seguenti vincoli:

$$
\begin{cases}
\sum_{j=1}^{n} a_{1,j}\, x_j \le b_1 + M y_1 \\
\sum_{j=1}^{n} a_{2,j}\, x_j \le b_2 + M y_2 \\
\color{red}{y_1 + y_2 = 1}
\end{cases}
$$



- Caso 2: $y_1 = 0\,, y_2 = 1$

Il primo vincolo è applicato, mentre il secondo è ridondante.

Vincoli alternativi

- Considerando che $y_1 + y_2 = 1$ (e quindi $y_2 = 1 - y_1$) l'imposizione dei due vincoli alternativi può essere effettuata introducendo una sola variabile binaria y:

$$\begin{cases} \sum_{j=1}^{n} a_{1,j}\, x_j \leq b_1 + My \\ \sum_{j=1}^{n} a_{2,j}\, x_j \leq b_2 + M(1-y) \\ y \in \{0;1\} \end{cases}$$

Esercizio 3

- Insiemi

  ✓ J : insieme degli ordini di produzione

$$J = \{1,2,3\}$$

Esercizio 3

- Dati - Vettori
  - tl_j Tempo di lavorazione [giorni] dell'ordine j
  - D_j Data di consegna [giorno] dell'ordine j
  - P_j Penalità per ritardi [$/giorno] dell'ordine j

- Variabili Decisionali

  - x_j Giorno di inizio della lavorazione di j
  - S_j^+ Giorni di ritardo per l'ordine j
  - S_j^- Giorni di anticipo per l'ordine j
  - y_{ij} Binaria: 1 se l'ordine i precede l'ordine j – 0 altrimenti
  - z Variabile obiettivo : penalità totali [$]

Esercizio 3

- Funzione obiettivo

$$\min\ z = \sum_{j} P_j S_j^+$$

Esercizio 3

- Vincoli

  ✓ Bilancio dei tempi

  Collegamento tra variabili, definendo gli anticipi e i ritardi di **ciascun** ordine in funzione della fine delle lavorazioni e delle date di consegna

Esercizio 3

- Vincoli

  ✓ Bilancio dei tempi

$$x_j + tl_j + S_j^- = D_j + S_j^+ \quad \forall j$$

Esercizio 3

- Vincoli

  ✓ Bilancio dei tempi

$$x_j + tl_j + S_j^- = D_j + S_j^+ \quad \forall j$$

Se $x_j + tl_j < D_j \rightarrow S_j^- > 0$

Anticipo nella lavorazione

Esercizio 3

- Vincoli

  ✓ Bilancio dei tempi

$$x_j + tl_j + S_j^- = D_j + S_j^+ \quad \forall j$$

Se $x_j + tl_j < D_j \rightarrow S_j^- > 0$

Anticipo nella lavorazione

Se $x_j + tl_j > D_j \rightarrow S_j^+ > 0$

Ritardo nella lavorazione

Esercizio 3

- Vincoli

  ✓ Non sovrapposizione dei lavori

  Due lavorazioni non possono essere svolte simultaneamente:

  – *j* precede *i*

  – *i* precede *j*

Esercizio 3

- Vincoli

  ✓ Non sovrapposizione dei lavori

$$\begin{cases} x_j + tl_j \le x_i + My_{ij} \\ x_i + tl_i \le x_j + M(1 - y_{ij}) \qquad \forall i, j : j > i \\ y_{ij} \in \{0; 1\} \end{cases}$$

Esercizio 3

- Vincoli sulle variabili decisionali

  - $x_j, S_j^+, S_j^- \geq 0 \quad \forall j$
  - $y_j \in \{0; 1\} \quad \forall j$

$\longrightarrow$ MIP

$\downarrow$

Controllo del gap
di ottimalità

Takeaway

1. Utilizzo delle variabili binarie

2. Regole di modellazione

Takeaway

1. Utilizzo delle variabili binarie per determinate finalità

   - Modellare decisioni dicotomiche
   - Risolvere le discontinuità legate alla presenza di costi fissi
   - Imporre vincoli alternativi
   - Modellare minimi tecnici
   - Esprimere condizioni logiche

Takeaway

2. Regole di modellazione

- Tutte le variabili decisionali introdotte devono essere collegate tra di loro. In presenza di binarie, il collegamento avviene tramite il vincolo di coerenza:
  - $x_j \leq M_j y_j$

- Tutti i modelli formulati devono essere lineari.
  - Scrivere $x_j y_j$ in sostituzione del vincolo di coerenza è semanticamente corretto, ma non accettabile in un modello di programmazione lineare.