

MÈTODES NUMÈRICS

Grau en matemàtiques i itinerari doble matesfísica, 2023–2024

Pràctica 3. Interpolació polinomial

1 Motivació del treball

El Departament de Dinàmica Planetària de l'Agència Espacial de Bellaterra (AEB) requereix rutines d'interpolació polinomial per tal de fer servir amb taules astronòmiques. Volen una rutina que sigui capaç d'avaluar en un punt tant el polinomi interpolador com la seva derivada mitjançant el mètode de Neville.

2 Requeriments tècnics

2.1 Metodologia

Suposem que tenim punts de suport $\{(x_0, y_0), \dots, (x_n, y_n)\} \subset \mathbb{R}^2$. Per a un subconjunt de $k+1$ subíndexos $\{i_0, \dots, i_k\} \subset \mathbb{N}$, denotem per P_{i_0, \dots, i_k} el polinomi de grau k que interpola els punts $\{(x_{i_0}, y_{i_0}), \dots, (x_{i_k}, y_{i_k})\}$. El mètode de Neville per avaluar $P_n(x) := P_{0,1,\dots,n}(x)$ a $x \in \mathbb{R}$ es basa en la relació

$$P_{i_0, \dots, i_k}(x) = \frac{(x - x_{i_0})P_{i_1, \dots, i_k}(x) - (x - x_{i_k})P_{i_0, \dots, i_{k-1}}(x)}{x_{i_k} - x_{i_0}}, \quad (1)$$

que permet avaluar recurrentment $P_{i,i+1,\dots,i+k}(x)$ mitjançant la construcció de la següent taula (l'exemple és per $n = 4$):

x_0	P_0	$P_{0,1}$	$P_{0,1,2}$	$P_{0,1,2,3}$	$P_{0,1,2,3,4}$
x_1	P_1	$P_{1,2}$	$P_{1,2,3}$	$P_{1,2,3,4}$	
x_2	P_2	$P_{2,3}$	$P_{2,3,4}$		
x_3	P_3	$P_{3,4}$			
x_4	P_4				

La relació (1) es pot derivar respecte de x , i s'obté

$$P'_{i_0, \dots, i_k}(x) = \frac{P_{i_1, \dots, i_k}(x) - P_{i_0, \dots, i_{k-1}}(x)}{x_{i_k} - x_{i_0}} + \frac{(x - x_{i_0})P'_{i_1, \dots, i_k}(x) - (x - x_{i_k})P'_{i_0, \dots, i_{k-1}}(x)}{x_{i_k} - x_{i_0}}.$$

Aquesta relació permet obtenir les derivades $P'_{i,i+1,\dots,i+k}(x)$ mitjançant la construcció d'una taula anàloga:

x_0	P'_0	$P'_{0,1}$	$P'_{0,1,2}$	$P'_{0,1,2,3}$	$P'_{0,1,2,3,4}$
x_1	P'_1	$P'_{1,2}$	$P'_{1,2,3}$	$P'_{1,2,3,4}$	
x_2	P'_2	$P'_{2,3}$	$P'_{2,3,4}$		
x_3	P'_3	$P'_{3,4}$			
x_4	P'_4				

(Atenció! Quant val $P'_i(x)$?).

Per tal de donar a l'AEB un exemple rellevant d'ús de la rutina que heu d'escriure, se us demana calcular l'entrada de les estacions de l'any 2024 a partir d'una taula de posicions del sol respecte de la terra en un sistema de coordenades tal que el pla xy és el pla de l'equador terrestre. Aquestes posicions del sol s'obtenen a partir del servidor HORIZONS d'efemèrides numèriques del Jet Propulsion Laboratory (<http://ssd.jpl.nasa.gov/?horizons>). Fent servir la configuració de les figures 1, 2, s'obté el fitxer `horizons-raw.txt` de la web, que, entre les línies `$$$OE` (Start Of Ephemeris) i `$EOE`, conté els instants de temps (en dies julians) i les coordenades del sol (ascensió recta i declinació¹, totes dues aparents², en graus) als temps donats. Manipulant-lo una mica amb `awk` es pot generar el fitxer `horizons.txt` (trobareu les instruccions al `Makefile`), que conté dues columnes: una amb els instants de temps (en dies julians) i l'altra amb la declinació aparent del sol (en graus).³ A la figura 3 podeu veure l'alçada del sol (en graus) com a funció del temps (en dies, comptats des de l'1 de desembre de 2023). Aquesta figura s'obté executant dins `gnuplot` les instruccions següents:

```
unset key
set size 1,.7
set grid
plot 'horizons.txt' w l
```

2.2 Productes a lliurar

1. Escriviu una rutina amb prototipus

```
void intnev_avald (double x, int n, double xi[], double yi[],
                  double *p, double *dp);
```

que, donat un punt $x \in \mathbb{R}$ i punts de suport $\{(x_i, y_i)\}_{i=0}^n$, amb $\mathbf{x} = x$, $\mathbf{n} = n$, $\{x_i\}_{i=0}^n$ dins `xi[]` i $\{y_i\}_{i=0}^n$ dins `yi[]`, torni $P(x)$ dins `*p` i $P'(x)$ dins `*dp`. Aquesta rutina ha de permetre que `p` o `dp` (o tots dos) puguin ser `NULL`, i en aquest cas no ha de guardar res a `*p` o `*dp` (o a cap d'ells).

2. Escriviu una utilitat `intaimg` (interpol·lar l'antiimatge) que respongui a la crida

```
./intaimg n nimg vimg
```

¹La declinació del sol és l'angle que forma el vector terra-sol amb el pla de l'equador terrestre

²Es parla de declinació *aparent* quan es mesura respecte del pla de l'equador instantani, que varia amb el temps. És habitual mesurar ascensió recta i declinació respecte d'un pla equatorial de referència fixat amb el temps, però aleshores els zeros i els extrems de la declinació del sol no es corresponen amb l'entrada de les estacions.

³No cal que genereu cap d'aquests fitxers. Podeu fer servir els de la web.

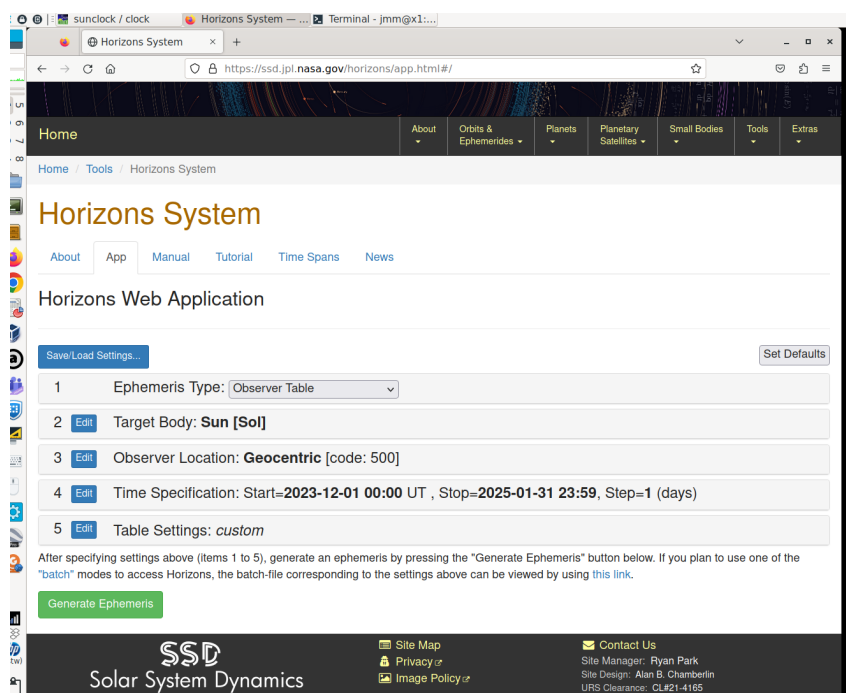


Figura 1: Configuració de HORIZONS per obtenir les posicions del sol: ajustos principals.

Aquesta utilitat ha de llegir per standard input un fitxer amb dues columnes (el fitxer `horizons.txt` d'abans n'és un exemple) de la forma

$$\begin{array}{cc} x_0 & y_0 \\ x_1 & y_1 \\ \vdots & \vdots \\ x_m & y_m \end{array}$$

de manera que les seves línies són punts de la gràfica d'una certa funció f (és a dir, $y_i = f(x_i)$). Observeu que el nombre de línies (o sigui, m) no és conegut a priori (no és un argument de `intaimg`). A continuació, la utilitat `intaimg` ha de buscar el `nimg`-èsim canvi de signe de $y_j - \text{vimg}$ a $y_{j+1} - \text{vimg}$ i llavors trobar una x tal que $f(x) \approx \text{vimg}$ per interpolació inversa (és a dir, interpolant x com a funció de y), mitjançant un polinomi interpolador de grau n .

Per tal de minimitzar l'error d'interpolació, feu la interpolació centrada. És a dir: trieu els nodes d'interpolació $y_k, y_{k+1}, \dots, y_{k+n}$ de manera que el canvi de signe es doni per $j - k = \lfloor n/2 \rfloor$ ($\lfloor \cdot \rfloor$ denota part entera). Per tal de simplificar la implementació, no cal que considereu possibles canvis de signe als primers $\lfloor n/2 \rfloor$ subintervalls de la forma $[x_i, x_{i+1}]$, ni tampoc als darrers $n - \lfloor n/2 \rfloor$.

Per tal de tenir una estimació informal de l'error d'interpolació, feu que `intaimg` escrigui tant el valor que troba per interpolació inversa, anomenem-lo x , com el valor a x del polinomi interpolador amb punts de suport $\{(x_j, y_j)\}_{k \leq j \leq k+n}$.

3. Escriviu una utilitat `intext` (interpolat extrem) que respongui a la crida

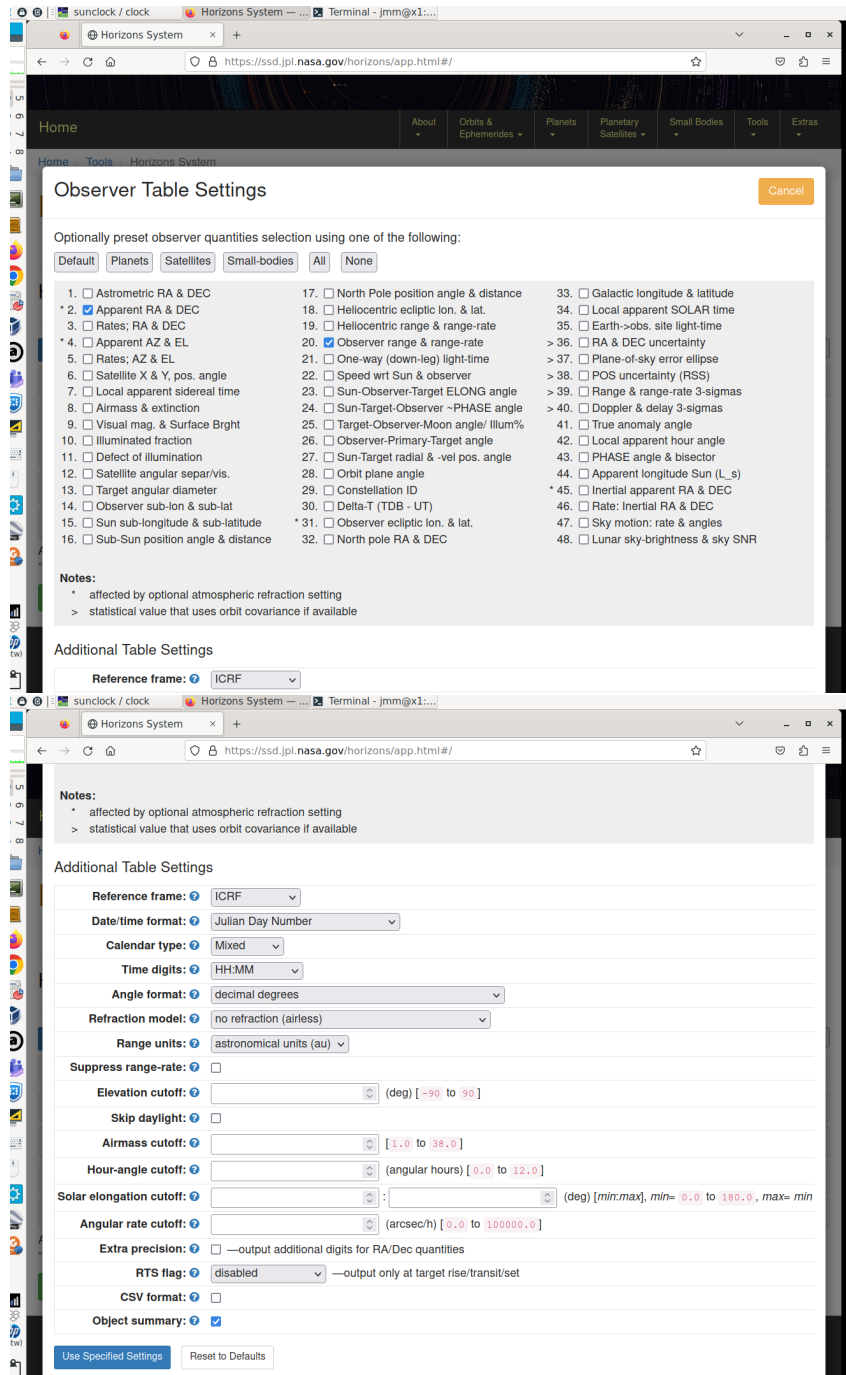


Figura 2: Configuració de HORIZONS per obtenir les posicions del sol: ajustos de taula.

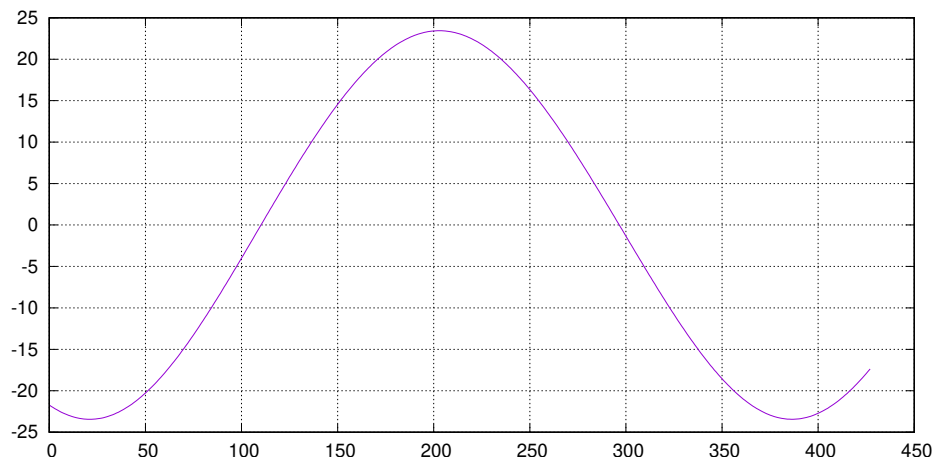


Figura 3: Alçada del sol (en graus) a sobre de l'equador com a funció del temps (dies transcorreguts des de l'1 de desembre de 2023).

```
./intext n next tol ixrr
```

Aquesta utilitat és anàloga a l'anterior, però, en comptes de buscar antiimatges, ha de buscar extrems. Concretament, donats punts $\{(x_i, y_i)\}_{i=0}^m$ com abans de la gràfica d'una certa funció f (o sigui, $y_i = f(x_i)$) que se li passen per standard input, aquesta utilitat ha de trobar el **next**-èsim extrem de la corba, buscant un zero pel mètode de la bisecció de f' aproximada per la derivada del polinomi interpolador de grau n . Feu servir la rutina **biseccio()** de la pràctica anterior, a la que heu de passar els arguments **tol** i **ixrr**.

Com abans, feu la interpolació centrada, i no considereu canvis de signe ni als primers $\lfloor n/2 \rfloor$ subinterval·ls de la forma $[x_i, x_{i+1}]$ ni als darrers $n - \lfloor n/2 \rfloor$.

2.3 Etapes de desenvolupament

1. Escriviu la rutina **intnev_aval**().
2. Valideu-la amb exemples triats per vosaltres.
3. Escriviu la utilitat **intaimg**.
4. A partir del fitxer **horizons.txt**, trobeu els equinoccis de primavera i tardor de l'any 2024 (zeros de la corba corresponent). Recordeu que a la web teniu programes que converteixen de dies julians a dates de calendari i viceversa.
5. Escriviu la utilitat **intext**.
6. A partir del fitxer **horizons.txt**, trobeu els solsticis d'estiu i hivern de l'any 2024 (extrems de la corba corresponent).

3 Lliurament

Heu de lliurar aquesta pràctica a través del campus virtual, dins el termini que consti al lliurament. Els retards es penalitzaran multiplicant la qualificació per $0.9^{\text{\#dies retard}}$. Heu de pujar un únic fitxer `NIU.zip`, on NIU és el vostre NIU, que contingui els següents fitxers:

- Un fitxer de biblioteca `intnev.c`, amb el codi de la funció `intnev_avald()`.
- Un fitxer de capçalera `intnev.h`, amb el prototipus de la funció `intnev_avald()`.
- Un fitxer amb nom a triar per vosaltres, amb el programa principal que hagueu escrit per a la validació de software corresponent a l'etapa 2.
- Un fitxer `intaimg.c` amb el programa principal corresponent a la utilitat `intaimg`, que s'ha de poder generar amb

```
make intaimg
```

a partir del fitxer `Makefile` que trobareu a la web.

- Un fitxer `intext.c` amb el programa principal corresponent a la utilitat `intext`, que s'ha de poder generar amb

```
make intext
```

a partir del fitxer `Makefile` que trobareu a la web.

- Un fitxer `memoria.pdf` amb l'informe.