Combinatoria

Isaac Ropero

28/12/2020

Combinatoria. Número binomial. Combinaciones sin repetición

Número combinatorio o número binomial

Nos da el número de subconjuntos de tamaño k de un conjunto de tamaño n. Este número es

$$C_n^k = \binom{n}{k} = \frac{n!}{k! \cdot (n-k)!}.$$

Ejemplo *Por ejemplo si tenemos un equipo de baloncesto con 7 jugadores ¿cuántos equipos de 5 jugadores distintos podemos formar?*
$\binom{7}{5} = \frac{7!}{5! \cdot (7-5)!} = \frac{7!}{5! \cdot 2!} = \frac{6 \cdot 7}{2} = \frac{42}{2} = 21.$

combinations(n, r, v, set, repeats.allowed)

```r
library(gtools)
combinations(7, 5, letters[1:7])
```

```
##       [,1] [,2] [,3] [,4] [,5]
##  [1,] "a"  "b"  "c"  "d"  "e" 
##  [2,] "a"  "b"  "c"  "d"  "f" 
##  [3,] "a"  "b"  "c"  "d"  "g" 
##  [4,] "a"  "b"  "c"  "e"  "f" 
##  [5,] "a"  "b"  "c"  "e"  "g" 
##  [6,] "a"  "b"  "c"  "f"  "g" 
##  [7,] "a"  "b"  "d"  "e"  "f" 
##  [8,] "a"  "b"  "d"  "e"  "g" 
##  [9,] "a"  "b"  "d"  "f"  "g" 
## [10,] "a"  "b"  "e"  "f"  "g" 
## [11,] "a"  "c"  "d"  "e"  "f" 
## [12,] "a"  "c"  "d"  "e"  "g" 
## [13,] "a"  "c"  "d"  "f"  "g" 
## [14,] "a"  "c"  "e"  "f"  "g" 
## [15,] "a"  "d"  "e"  "f"  "g" 
## [16,] "b"  "c"  "d"  "e"  "f" 
## [17,] "b"  "c"  "d"  "e"  "g" 
## [18,] "b"  "c"  "d"  "f"  "g" 
## [19,] "b"  "c"  "e"  "f"  "g" 
## [20,] "b"  "d"  "e"  "f"  "g" 
## [21,] "c"  "d"  "e"  "f"  "g" 
```

Combinatoria. Combinaciones con repetición

En combinatoria, las combinaciones con repetición de un conjunto son las distintas formas en que se puede hacer una selección de elementos de un conjunto dado, permitiendo que las selecciones puedan repetirse.

$$CR_n^k = \binom{n+k-1}{k} = \frac{(n+k-1)!}{k!(n-1)!}.$$

Ejemplo

Vamos a imaginar que vamos a repartir 12 caramelos entre Antonio, Beatriz, Carlos y Dionisio (que representaremos como A, B, C, D). Una posible forma de repartir los caramelos sería: dar 4 caramelos a Antonio, 3 a Beatriz, 2 a Carlos y 3 a Dionisio. Dado que no importa el orden en que se reparten, podemos representar esta selección como AAAABBBCCDDD.

Otra forma posible de repartir los caramelos podría ser: dar 1 caramelo a Antonio, ninguno a Beatriz y Carlos, los 11 restantes se los damos a Dionisio. Esta repartición la representamos como ADDDDDDDDDDD

Recíprocamente, cualquier serie de 12 letras A, B, C, D se corresponde a una forma de repartir los caramelos. Por ejemplo, la serie AAAABBBBBDDD corresponde a: Dar 4 caramelos a Antonio, 5 caramelos a Beatriz, ninguno a Carlos y 3 a Dionisio.

De esta forma, el número de formas de repartir los caramelos es:

$$CR_{12}^4 = \binom{12+4-1}{4}$$

Combinatoria. Variaciones.

Variaciones

Con los número $\{1, 2, 3\}$ ¿cuántos números de dos cifras distintas podemos formar sin repetir ninguna cifra?

La podemos escribir

$$12, 13, 21, 23, 31, 32$$

Combinatoria. Variaciones(sin repetición)

En nuestro ejemplo con $n = 3$ dígitos podemos escribir las siguientes variaciones de orden $k = 2$

$$V_{n=3}^{k=2} = \frac{3!}{(3-2)!} = \frac{1 \cdot 2 \cdot 3}{1} = 6.$$

Ejercicio

```
permutations(3,2)
```

```
##      [,1] [,2]
## [1,]    1    2
## [2,]    1    3
## [3,]    2    1
## [4,]    2    3
## [5,]    3    1
## [6,]    3    2
```

Combinatoria. Variaciones con repetición.

Variaciones con repetición

¿Y repitiendo algún dígito?

$$VR_n^k = n^k$$

```
permutations(3,2, repeats.allowed = TRUE)
```

```
##       [,1] [,2]
##  [1,]    1    1
##  [2,]    1    2
##  [3,]    1    3
##  [4,]    2    1
##  [5,]    2    2
##  [6,]    2    3
##  [7,]    3    1
##  [8,]    3    2
##  [9,]    3    3
```

Permutaciones

Las permutaciones de un conjunto de cardinal n son todas las variaciones de orden máximo n. Las denotamos y valen:

$$P_n = V_n^n = n!$$

Por ejemplo todos los números que se pueden escribir ordenando todos los dígitos $\{1, 2, 3\}$ sin repetir ninguno

```
library(combinat)
for(permutacion in permn(3)) print(permutacion)
```

```
## [1] 1 2 3
## [1] 1 3 2
## [1] 3 1 2
## [1] 3 2 1
## [1] 2 3 1
## [1] 2 1 3
```

Efectivamente

$$P_3 = 3! = 1 \cdot 2 \cdot 3.$$

Números multinomiales. Permutaciones con repetición.

Consideremos un conjunto de elementos $\{a_1, a_2, \ldots, a_k\}$.

Entoces, si cada uno de los objetos a_i de un conjunto, aparece repetido n_i veces para cada i desde 1 hasta k, entonces el número de permutaciones con elementos repetidos es:

$$PR_n^{n_1,n_2,\ldots,n_k} = \binom{n}{n_1 \quad n_2 \quad \ldots \quad n_k} = \frac{n!}{n_1! \cdot n_2! \cdot \ldots \cdot n_k!},$$

Ejemplo

¿Cuantas palabras diferentes se pueden formar con las letras de la palabra `PROBABILIDAD`?

El conjunto de letras de la palabra considerada es el siguiente: $\{A, B, D, I, L, O, P, R\}$ con las repeticiones siguientes: las letras A, B, D, e I, aparecen 2 veces cada una; y las letras L, O, P, R una vez cada una de ellas.

Por tanto, utilizando la fórmula anterior, tenemos que el número de palabras (permutaciones con elementos repetidos) que podemos formar es

$$PR_{12}^{2,2,2,2,1,1,1,1} = \frac{12!}{(2!)^4(1!)^4} = 29937600.$$