Resolução – Prova I (Matemática I)

27 de Setembro / Isabella B. Amaral – 118010773

Nota: Todos os teoremas e axiomas referenciados nessa prova são citados pelo Apostol no capítulo introdutório, a não ser que seja explicitado o contrário.

QUESTÃO 1

Grupo I — Q1

Seja $A \subset \mathbb{R}^+, A \neq \varnothing$ e considere $B = \left\{x \in \mathbb{R} : x = \dfrac{1}{y}, y \in A\right\}$.

(a) Prove que A tem ínfimo.

Resolução:

Dado um elemento $c \in C$, para $C \subset \mathbb{R}$, seja C limitado superiormente por $a \in A$, temos que quaisquer a, c satisfazem $c \leqslant a$. Pelo teorema 1.34, os conjuntos A e C possuem ínfimo e supremo, respectivamente, que satisfazem $\sup C \leqslant \inf A$. (Resolução inspirada por comentários de colegas).

$\square$

(b) Prove que $\inf A \geqslant 0$.

Resolução:

Seja $n = \inf A$, suponha $n < 0$: Temos que, para $\varepsilon > 0$ tão pequeno quanto se queira, é possível termos $n + \epsilon < 0$. Porém, pelo teorema 1.32, $n + \varepsilon > a$, para algum $a \in A$. Absurdo! Porque qualquer $a \in A$ deve ser estritamente positivo por definição. (Resolução inspirada por comentários de colegas.)

$\square$

(c) Prove que, se $\inf A > 0$ então B tem supremo.

Resolução:

Começarei demonstrando 3 lemas:

Lema 1.1. *Dado a real,* $a > 0 \iff a^{-1} > 0$.

*Demonstração.*Seja $b = a^{-1} \cdot a^{-1} = (a^{-1})^2$, pelo teorema 1.20 temos que $b > 0$ e, dessa forma, $a \cdot b = a(a^{-1} \cdot a^{-1}) = (a \cdot a^{-1})a^{-1} = a^{-1}$ que também deve pertencer a $\mathbb{R}^+$ (axioma 7). (Note que automaticamente vale a recíproca) $\square$

Lema 1.2. *Dados* $a, b \in \mathbb{R}^+$ *tais que* $0 < a < b$, *teremos que seus inversos obedecem* $0 < b^{-1} < a^{-1}$.

*Demonstração.*Sendo $b > a$ vale que $b^{-1} \cdot b = 1 > b^{-1} \cdot a$, e disso, temos $a^{-1} \cdot 1 > (a^{-1} \cdot a) \cdot b^{-1} = b^{-1}$. E pelo lema 1.1, temos que $0 < b^{-1} < a^{-1}$. $\square$

Lema 1.3. *Dado um real positivo* x, *vale que, (a) se* $x > 1$, *temos* $0 < x^{-1} < x$ *e (b) se* $0 < x < 1$, *temos* $0 < x < x^{-1}$.

*Demonstração.*Pelo axioma 6, o inverso de 1 é ele mesmo (trivial), dessa forma, pelo teorema 1.21, no primeiro caso (a) do lema, temos $0 < 1 < x$, e pelo lema 1.2 vale que $0 < x^{-1} < 1 < x$

e, automaticamente, vale que $0 < x^{-1} < x$. Para o segundo caso (b) temos uma demonstração equivalente ($0 < x < 1 \overset{\text{lema 1.2}}{\implies} 0 < x < 1 < x^{-1}$). $\square$

Dessa forma, segue que, para $a > 1, a \in A$, temos $0 < a^{-1} < 1 < a$, de tal forma que, para $a_2 > a_1 > 1$, os respectivos $b_1 = a_1^{-1}$ e $b_2 = a_2^{-1}$ ficam na ordem $b_2 > b_1 > 1 > b_1^{-1} > b_2^{-1} > 0$, e para a_n, com n grande o suficiente, conseguimos um b tão perto de zero quanto se queira (definitivamente não é um supremo, mas pode ser um ínfimo).

Para $a = 1$ segue que $b = 1$, porém, para $0 < a < 1$ temos o comportamento inverso do parágrafo anterior. Sendo $0 < a < 1 < a^{-1}$, dados $0 < a_2 < a_1 < 1$, teremos $0 < a_2 < a_1 < 1 < a_1^{-1} < a_2^{-1}$, e a sequência de elementos de B poderá ser tão grande quanto menor seja $a \in A$. Se $\inf A > 0$, existe somente um $a_m \in A$ tal que $\inf A = a_m$, e como $0 < a_m < a_n$ para qualquer $a_n \in A$, $b_m = a_m^{-1}$ deve ser o maior $b \in B$ (i.e. seu supremo).

Para $\inf A = 0$ não existe $a \in A$ cumprindo o papel de a_m, e não deve haver majorante para B, pois sempre haverá um $0 < k < a_n$ tal que $k^{-1} > a_n^{-1}$.

$\square$

(d) Prove que, se B tem supremo então $\inf A > 0$.

Resolução:

Pela resolução do item anterior, podemos notar que B só tem supremo quando $\inf A > 0$.

QUESTÃO 2

Grupo I — Q3

Sejam $k \in \mathbb{N}$ e $\varepsilon > 0$, prove que existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $\dfrac{n^k}{n!} < \varepsilon$.

Resolução:

Assumindo $n \neq 0, n \in \mathbb{N}$. Começarei demonstrando 2 lemas:

Lema 2.1. *Para qualquer $\varepsilon > 0$ tão pequeno quanto se queira, podemos ter um $x \in \mathbb{R}^+$ tal que $0 < x < \varepsilon$.*

Demonstração. Pelo teorema 1.30, sempre há um n inteiro positivo tal que, dados x, y reais, $x > 0$, temos $nx > y$. Restringindo para $y > 0$, temos, pelo teorema 1.19, que pode-se introduzir uma variável $c > 0$ real tal que $c(nx) = \varepsilon$ e, então, teremos $cy < c(nx) = \varepsilon$. Fixando $n = 1$, temos que x e c são reais positivos arbitrariamente pequenos (o que nos permite gerar qualquer ε de interesse), e está provado o lema. $\square$

Lema 2.2. *Dado um inteiro positivo qualquer n, podemos conseguir um real $x = 1/n$ tão pequeno quanto se queira.*

Demonstração. Admitindo-se a existência de reais r que possuem valor análogo aos inteiros n, de tal forma que $n = r$. Porém, como r possui inverso, o lema é trivial. $\square$

Se, para qualquer real $x > 1$ existe seu inverso $0 < a = x^{-1} < x$, dado um $\varepsilon > 0$ arbitrário, podemos escolher $a < \varepsilon$ (garantido pelo lema 2.1). Dessa forma, tomando $a = \dfrac{1}{n}$ (lema 2), temos

$$\frac{n^k}{n!} < a = \frac{1}{n} < \varepsilon \iff \frac{n^k}{n!} - \frac{1}{n} < 0 \iff \frac{n \cdot n^k - n!}{n \cdot n!} = \frac{\left(n^k - (n-1)!\right)}{n!} < 0,$$

multiplicando por -1, ficamos com

$$\frac{1}{n!}\left((n-1)! - n^k\right) > 0.$$

Dessa forma, como $(n!)^{-1} > 0$ (garantido pelo lema 1.1), pelo teorema 1.24 devemos ter $(n-1)! - n^k > 0 \iff (n-1)! > n^k$.

Sendo os inteiros positivos um conjunto indutivo, provarei por indução finita que a desigualdade $h(k) : (n-1)! > n^k$ possui solução para todo k. Tomemos $h(k = 1)$ como nosso caso inicial:

$$h(1) : (n-1)! > n \implies n > 3.$$

Tomando, agora, um k arbitrário, temos

$$\underbrace{(n-1)! > n^k}_{h(k)} \iff n(n-1)! > n \cdot n^k \iff \underbrace{n! > n^{k+1}}_{h(k+1)}.$$

Como se queria demonstrar.

QUESTÃO 3

Grupo II — Q1

Considere números reais estritamente positivos $a_1, a_2, \dots, a_n, \dots$ tais que, para todo natural $n \geqslant 1$ tem-se $a_{n+1} \leqslant \dfrac{a_n}{2}$. Prove que $a_n \leqslant \dfrac{a_1}{2^{n-1}}$, para todo $n \in \mathbb{N}^\star$.

Resolução:

Avaliando $a_{n+1} \leqslant \dfrac{a_n}{2}$ para $n = 1$, temos $a_2 \leqslant \dfrac{a_1}{2}$. Como $a_3 \leqslant \dfrac{a_2}{2} \leqslant \dfrac{1}{2}\dfrac{a_1}{2}$ (pelo teorema 1.19), vale que $a_3 \leqslant \dfrac{a_1}{2^{3-1}}$. Sendo os naturais um conjunto indutivo e tomando $n = 1$ como caso base, temos, por indução finita:

$$\begin{gathered} a_k \leqslant \frac{a_{k-1}}{2} \leqslant \frac{1}{2}\frac{a_{k-2}}{2} \leqslant \frac{1}{2^2}\frac{a_{k-2}}{2} \leqslant \cdots \leqslant \frac{1}{2^{k-2}}\frac{a_1}{2} = \frac{a_1}{2^{k-1}} \\ \implies a_{k+1} \leqslant \frac{1}{2}a_k \leqslant \frac{1}{2}\frac{a_{k-1}}{2} \leqslant \cdots \leqslant \frac{1}{2^{k-1}}\frac{a_1}{2} = \frac{a_1}{2^k}. \end{gathered}$$

□

QUESTÃO 4

Grupo III — Q2

Mostre que se u, v e w são reais estritamente positivos e $u + v + w = 1$ então $(1-u)(1-v)(1-w) \geqslant 8uvw$.

Resolução:

Antes de iniciar, provarei três lemas:

Lema 4.1. *Dados reais a e b, segue que* $\sqrt{a}\sqrt{b} = \sqrt{a \cdot b}$.

Demonstração. Sejam $x^2 = a, y^2 = b, z^2 = (x \cdot y)^2$. Queremos mostrar que $z^2 = x^2 \cdot y^2$. Segue, pela definição de expoente, que $z^2 = (x \cdot y)^2 = (x \cdot y)(x \cdot y) = x^2 \cdot y^2$. □

Lema 4.2. *Para qualquer a real não negativo, vale que* $\sqrt{a^2} = \left(\sqrt{a}\right)^2$.

Demonstração. Pela definição de expoente temos que $\sqrt{a^2} = \sqrt{a \cdot a}$, e pelo lema 4.1, temos que $\sqrt{a \cdot a} = \sqrt{a}\sqrt{a} = \left(\sqrt{a}\right)^2$. □

Lema 4.3. *Para qualquer a real não negativo,* $\left(\sqrt{a}\right)^2 = a$.

Demonstração. Pelo teorema 1.35, dado que $a \geqslant 0$, há somente uma solução para a equação $a^2 = a^2$, nomeadamente a solução $a = \sqrt{a^2} (= \left(\sqrt{a}\right)^2$ pelo lema 4.1). □

Pela desigualdade entre médias, temos três relações independentes:

$$\frac{u+v}{2} \geqslant \sqrt{u\,v} \tag{4.1}$$

$$\frac{u+w}{2} \geqslant \sqrt{u\,w} \tag{4.2}$$

$$\frac{v+w}{2} \geqslant \sqrt{v\,w} \tag{4.3}$$

E pela relação dada no enunciado, vale que $u + v = 1 - w$ (análogo para as outras relações).

Realizando a substituição descrita, pelo teorema 1.19 podemos multiplicar as 3 desigualdades, de tal forma que:

$$\left(\frac{1-w}{2}\right)\left(\frac{1-v}{2}\right)\left(\frac{1-u}{2}\right) \geqslant \sqrt{u\,v}\sqrt{u\,w}\sqrt{v\,w}$$

pelo lema 4.1, temos

$$\implies \frac{1}{8}(1-w)(1-v)(1-u) \geqslant \sqrt{(u\,v)(u\,w)(v\,w)}$$

pelo teorema 1.19 e pela definição de expoente, temos

$$\implies (1-w)(1-v)(1-u) \geqslant 8\sqrt{(u\,v\,w)^2}$$

finalmente, pelo lema 4.3, vale a desigualdade enunciada

$$\implies (1-w)(1-v)(1-u) \geqslant 8u\,v\,w.$$

□

QUESTÃO 5

Grupo IV — Q2

Sejam $a_1, \dots, a_n, b_1, \dots, b_n$ números reais estritamente positivos tais que, $a_1 + a_2 + \dots + a_n = b_1 + b_2 + \dots + b_n$. Demonstre que

$$\frac{a_1^2}{a_1+b_1} + \frac{a_2^2}{a_2+b_2} + \dots + \frac{a_n^2}{a_n+b_n} \geqslant \frac{a_1+a_2+\dots+a_n}{2}.$$

Resolução:

Antes de prosseguir, segue um lema:

Lema 5.1. *Para x real positivo,* $\left(x^{-1}\right)^{1/2} = \left(x^{1/2}\right)^{-1}$.

Demonstração. Defina $y = x^{-1}$, a demonstração é trivial pois basta que $y^{1/2} = (y)^{1/2}$, o que segue do lema 4.1. □

Pela desigualdade de Cauchy-Schwarz, temos que

$$\left(\sum_{k=1}^{n} x_k\, y_k\right)^2 \leqslant \left(\sum_{k=1}^{n} x_k^2\right)\left(\sum_{k=1}^{n} y_k^2\right).$$

Defina as sequências $x_j = a_j / \left(a_j + b_j\right)^{1/2}$ e $y_j = \left(a_j + b_j\right)^{1/2}$. Por Cauchy-Schwarz e pelo lema 5.1 segue que

$$\left(\left(\frac{a_1}{\sqrt{a_1+b_1}}\right)^2 + \dots + \left(\frac{a_n}{\sqrt{a_n+b_n}}\right)^2\right)\left(\left(\sqrt{a_1+b_1}\right)^2 + \dots + \left(\sqrt{a_n+b_n}\right)^2\right) \geqslant \left(a_1\frac{\sqrt{a_1+b_1}}{\sqrt{a_1+b_1}} + \dots + a_n\frac{\sqrt{a_n+b_n}}{\sqrt{a_n+b_n}}\right)^2$$

pelo lema 4.3 e pelo axioma 6, temos que

$$\implies \left(\frac{a_1^2}{a_1+b_1} + \dots + \frac{a_n^2}{a_n+b_n}\right)\left(a_1 + b_1 + \dots + a_n + b_n\right) \geqslant \left(a_1 + \dots + a_n\right)^2$$

pela relação dada no enunciado e pela definição de expoente,

$$\implies \left(\frac{a_1^2}{a_1+b_1} + \dots + \frac{a_n^2}{a_n+b_n}\right) 2\left(a_1 + \dots + a_n\right) \geqslant \left(a_1 + \dots + a_n\right)\left(a_1 + \dots + a_n\right)$$

multiplicando pelo inverso do dobro da soma de $a_1 + \dots + a_n$ em ambos os lados da desigualdade (garantido pelo lema 1.1 e pelo teorema 1.19), temos

$$\implies \frac{a_1^2}{a_1+b_1} + \dots + \frac{a_n^2}{a_n+b_n} \geqslant \left(a_1 + \dots + a_n\right)\frac{\left(a_1 + \dots + a_n\right)}{2\left(a_1 + \dots + a_n\right)}$$

$$\implies \frac{a_1^2}{a_1+b_1} + \dots + \frac{a_n^2}{a_n+b_n} \geqslant \frac{1}{2}\left(a_1 + \dots + a_n\right)$$

□

QUESTÃO 6

Grupo V — Q2

(a) Suponha que $r \in \mathbb{Q}\backslash 0$ e que $x \in \mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}$. Demonstre que rx não é racional.

Resolução:

Suponha que rx é racional. Isso implica na existência de um número da forma a/b (a, b números inteiros, b não nulo) que possa representar rx. Ou seja, $rx = a/b$ para algum par a, b. Sendo r um racional não nulo, podemos tomar um $a = cr$, (c também inteiro) de tal forma que, multiplicando pelo inverso de r em ambos os lados da igualdade $rx = cr/b$, ficamos com $x = c/b$ sendo uma fração racional irredutível, porém isso viola a condição de x ser irracional. Absurdo!

□

(b) Prove que, se $\varepsilon > 0$, existe $x \in \mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}$ tal que $0 < x < \varepsilon$.

Resolução:

Por raciocínio similar ao do item anterior, temos facilmente que $x + r \in \mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}$:

Lema 6.1. *A soma de racional com irracional é irracional.*

*Demonstração.*Seja r um racional (não nulo) e x um número irracional, por hipótese, suponhamos que $x + r$ é racional e, portanto, deve ter uma notação na forma a/b com a e b inteiros e $b \neq 0$, dessa forma:

$$x + r = \frac{a}{b} \iff x = \frac{a}{b} - r \iff \frac{a - b\,r}{b} = \frac{c}{b}, c \in \mathbb{Z}. \quad \text{Absurdo!}$$

□

Dessa forma, o conjunto dos irracionais não deve ser limitado superiormente, pois, se fosse limitado por b, poderíamos sempre tomar $b + x, x$ irracional e estaríamos dentro do conjunto ainda. Absurdo!

Além disso, temos que para um x irracional arbitrário, seu inverso é irracional também, pois, supondo que não fosse, haveria um x que não pode igualar um racional a/b, mas seu inverso pode igualar b/a, porém como a e b são inteiros não nulos arbitrários isso é claramente absurdo.

Dessa forma, dado um $\varepsilon > 0$, sabemos que sempre haverá $x > 1 > \varepsilon$ irracional e, pelos lemas 1.1 e 1.2, $0 < x^{-1} < \varepsilon < 1 < \varepsilon^{-1}$ (para isso basta selecionar x grande o suficiente) onde x^{-1} tem que ser irracional pelo que foi demonstrado anteriormente.

□

(c) Provar que se a e b são reais, com $a < b$, então existe um irracional ξ tal que $a < \xi < b$.

Resolução:

Tomando um $\varepsilon = b - a$, temos que existe um x irracional que satisfaz $0 < x < \varepsilon$, conforme provado no item anterior. Pelo teorema 1.18, podemos somar a a essa desigualdade, tal que $a < x + a = \xi < b - a + a = b$ é satisfeita, e pelo lema 6.1, ξ é irracional.

□

QUESTÃO 7

Grupo VI — Q1

Um subconjunto $G \subset \mathbb{R}$ diz–se subgrupo aditivo de $\mathbb{R}$ se valerem as seguintes propriedades:

- $0 \in G$;
- Se $a \in G$ e $b \in G$ então $a + b \in G$;
- Se $a \in G$, então $-a \in G$.

Suponha que G é um subgrupo aditivo de $\mathbb{R}$ e prove que:

(i) Se $a \in G$ e $m \in \mathbb{Z}$ então $ma \in G$.

Resolução:

Podemos notar que, se $a + b \in G$ e $-a \in G$, se podemos expressar $m\,a$ como uma soma ou como o oposto de uma soma, então $m\,a \in G$.

Lema 7.1. *Existe uma relação direta entre soma de reais e multiplicação por inteiros.*

Demonstração. Sendo m um inteiro e $a \in G$, queremos demonstrar que, para $m > 0, m\,a = \underbrace{a + a + \cdots + a}_{m \text{ vezes}}$.

Sendo os inteiros positivos um conjunto indutivo, podemos demonstrar a hipótese por indução finita. Para o caso base $m = 1$ vale que $1 \cdot a = a$. Tomando um $m > 1$ arbitrário, temos que

$$m\,a = \underbrace{a + a + \cdots + a}_{m \text{ vezes}} \implies m\,a + a = (m+1)a = \underbrace{a + a + \cdots + a}_{m+1 \text{ vezes}}.$$

Para o caso $m = 0$ o lema é trivial, e para $m < 0$ basta realizarmos o procedimento subtraindo ao invés de somando. □

Dessa forma, se $a + b \in G$, $m\,a \in G$.

(ii) Se a e b estão em G então $a - b \in G$.

Resolução:

Se $b \in G$ segue que $c = -b \in G$ e, portanto, $a - b = a + c \in G$.

□

(iii) Se $G \neq \{0\}$ então $G^+ = \{g \in G : g > 0\} \neq \varnothing$ e existe $\inf G^+$.

Resolução:

Se $G \neq \{0\}$, existe um conjunto $H \subset G$ disjunto de G^+ ($H = \{h \in G : h < 0\}$). Como para quaisquer $g \in G^+$ e $h \in H$ temos $h < g$, vale o teorema 1.34, portanto, existe $\inf G^+$.

(iv) Se $G \neq \{0\}$ e $\mu = \inf G^+ > 0$ então $G = \{x = m\mu : m \in \mathbb{Z}\}$

Resolução:

Como G^+ possui ínfimo positivo, este deve ser o menor elemento do conjunto, pois deve ser igual à um $a - b = c \in G$ tal que $0 < c = a - b$, e como $a \neq b, b < a$ para qualquer $a \in G$, logo $b = c = \inf G^+$.

Dessa forma, vale a Arquimediana do conjunto, pois:

Como $\mathbb{Z}$ não possui cota superior, então vale, pelo teorema 1.30 que, tomando $g \in G$ arbitrário, sempre existe um $m \in \mathbb{Z}$ tal que $m\mu > g$. De forma análoga, $\mathbb{Z}$ também não possui cota inferior e, portanto, sempre temos $m\mu < g$ para qualquer $g \in G$ (basta usar o argumento do teorema 1.30 para $m(-\mu) > -g \iff m\mu < g$). E pelos itens anteriores sabemos que um elemento de G multiplicado por um inteiro deve pertencer à G.

(v) Se $G \neq \{0\}$ e $\inf G^+ = 0$, então, para todos os reais x e y, com $x < y$, existe $g \in G$ tal que $x < g < y$.

Resolução:

Se o ínfimo do conjunto G^+ é zero, como todos os seus membros são maiores que zero, dado qualquer $\varepsilon > 0$ existe um $g \in G^+$ tal que $0 < g < \varepsilon$ pois, caso contrário, teríamos um ínfimo igual à g. Como G não possui cota superior, sempre é possível encontrar um $\ell \in G$ maior que x. Definindo $0 < \varepsilon = y - x$, como é possível ter um g arbitrariamente pequeno e menor que ε, podemos sempre construir a desigualdade $\ell + g < y$, e dessa forma, somando $0 < g < \varepsilon$ e $x < \ell$ (teorema 1.25), temos $x < g + \ell < y$ (note que mostrar que $g + \ell \in G$ é trivial).

$\square$

QUESTÃO 8

Grupo VII — Q1

Seja $n \in \mathbb{N}^\star$ e considere um polinômio $p(x) = a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n$ com coeficientes reais, i.e. $a_j \in \mathbb{R}$, para todo $j \in \{0, 1, \ldots, n\}$, de grau n, ou seja $a_n \neq 0$.

(a) Suponha que $a_0 > 0$ e mostre que existe $\varepsilon > 0$ tal que, se $|x| < \varepsilon$ então $p(x) > 0$.

Resolução:

Mostrarei esse item avaliando o pior caso possível:

Dado o polinômio $p(x)$, suponhamos que todos os seus coeficientes, com exceção de a_0, sejam negativos, dessa forma, para que $p(x) > 0$ devemos ter $a_0 > (a_0 - p(x)) = q(x)$. Fixemos um $0 < a_0 < 1$. Daí surge a necessidade de limitar $x < 1$, pois a_0 deve ser maior que $q(x)$, e para quaisquer coeficientes $|a_j| > 1$ o valor de $q(x)$ explode rapidamente. Sendo x limitado, podemos reduzir nosso problema notando que, dados expoentes naturais $m > n$ vale que, para $0 < x < 1, x^n < x^m$. Para demonstrar isso basta notar que $0 < x < 1 \iff x \cdot x < 1 \cdot x < 1$, etc.

Dessa forma, para x pequeno o suficiente, todos os termos de expoentes maior que 1 podem ser arbitrariamente pequenos, e podemos simplificar nosso polinômio por

$$-x + b \geqslant 0, \quad b = \frac{1}{a_1}\left(a_0 + \sum_{k=2}^{n} -a_k x^k\right) > 0.$$

Agora, para chegar à desigualdade desejada, basta notar que, pela desigualdade triangular podemos chegar à chamada *desigualdade triangular reversa*:

$$\begin{aligned} |a| = |a - b + b| \leqslant |a - b| + |b| \implies \quad & |a| - |b| \leqslant |a - b| \\ |b| = |b - a + a| \leqslant |a - b| + |a| \implies \quad & -|a - b| \leqslant |a| - |b| \end{aligned}$$

juntando as duas, temos, então

$$-|a - b| \leqslant |a| - |b| \leqslant |a - b|$$

e pelo teorema 1.38 vale que

$$|a - b| \geqslant ||a| - |b||.$$

Aplicando a desigualdade triangular reversa na desigualdade $b - x \geqslant 0$, temos

$$|b - x| \geqslant ||b| - |x|| > 0 \implies |x| < |b| = \varepsilon$$

$\square$

(b) Prove que existe $L > 0$ em $\mathbb{R}$ tal que $p(x)$ tem o mesmo sinal de a_n para todo $x > L$.

Sugestão: Lembre que se $x > 0$ então $p(x)$ e $p(x)/x^n$ têm o mesmo sinal, agora...

Resolução:

Analisando o polinômio $p(x)$, temos que se $x > 0$, então $p(x)/x^n$ tem o mesmo sinal que $p(x)$, e definindo

$$\frac{p(x)}{x^n} = \frac{a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_0}{x^n} + a_n = y + a_n = q(y).$$

Agora podemos analisar o sinal de $q(y)$. Como queremos que $q(y)$ tenha o mesmo sinal que a_n, é necessário tornar y arbitrariamente pequeno. Como dados n, m naturais tais que $n < m$ Sendo $x > 1, x^m > x^n \iff x^m/x^n = 1/x^{n-m} > 1$ (trivial), por argumento semelhante ao item anterior podemos fazer $y = \left(\sum_{k=n-1}^{0} a_k x^k\right)/x^n = \ell/x$ (já que o termo de maior expoente no numerador é $a_{n-1}x^{n-1}$, tomando o resto da expressão como constante e arbitrariamente pequena, basta analisarmos a diferença dos expoentes $n - (n-1) = 1$).

Pelo lema 2.1, temos que ℓ/x é arbitrariamente pequeno para x grande, e dado um $\varepsilon > 0$, pelo mesmo lema podemos ter um $0 < \ell/x < \varepsilon \iff x > \ell/\varepsilon = L$ para o qual vale que $q(x)$ tem o mesmo sinal de a_n, como se queria demonstrar.