Resolução – Prova I (Matemática II)

20 de maio / Isabella B. Amaral – 118010773

Questão 1

Se o seu número USP for par demonstre que $\cos 1$ é irracional, mas se o seu número USP for ímpar demonstre que $\sin 1$ é irracional.

Resolução:

Sabemos, por 7.1, uma função f pode ser aproximada unicamente por um polinômio em torno de um ponto a por

$$f(x) = T(f,a)(x) = f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + ... = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}}{n!}(x-a)^n.$$

Dessa forma podemos fazer

$$\begin{aligned} \sin 1 = T(\sin, 0)(1) &= \sin 0 + \frac{\sin'(0)}{1!}(x-0) + \cancel{\frac{\sin''(0)}{2!}(x-0)^2} + \cdots \\ &= 1 - \frac{1}{3!} + \frac{1}{5!} - \cdots, \end{aligned}$$

portanto, supondo que $\alpha = \sin 1$ é da forma a/b, onde $a, b \in \mathbb{Z}$, devemos ter $b!\alpha$ como um inteiro. Vamos separá-lo em duas porções $b!\alpha = C + D$. Defina

$$s = \begin{cases} b-1, & \text{para } b \text{ ímpar} \\ b, & \text{para } b \text{ par} \end{cases}$$

fazemos, então

$$C = 1 - \frac{1}{3!} + \cdots + (-1)^{-(s+1)/2} \frac{b!}{s!}$$

de tal forma que é claramente formado por inteiros e, portanto, a porção restante, D, também deve ser inteira. Porém verificamos que

$$D = \begin{cases} (-1)^{-(s+1)/2+1} \left(\frac{1}{(b+1)} - \frac{1}{(b+1)(b+3)} + \cdots \right), & \text{para } b \text{ par} \\ (-1)^{-(s+1)/2+1} \left(\frac{1}{(b+2)} - \frac{1}{(b+2)(b+4)} + \cdots \right), & \text{para } b \text{ ímpar} \end{cases}$$

e, sendo o segundo caso estritamente menor que o primeiro, temos que as somas são limitadas por

$$\frac{1}{(b+1)} - \frac{1}{(b+1)(b+3)} + \cdots < \frac{1}{(b+1)} + \frac{1}{(b+1)(b+3)(b+5)} + \cdots < \sum_{n=1}^{\infty} (b+1)^{-1}$$

que é uma série geométrica convergente. Como essa série converge para

$$\sum_{n=1}^{\infty} (b+1)^{-1} = \frac{1/(b+1)}{1 - 1/(b+1)} = \frac{1}{b} < 1$$

e, como os termos são não nulos, temos uma contradição, pois $D \notin \mathbb{Z}$.

$\square$

Questão 2

Suponha que $f\colon (-1,1) \longrightarrow \mathbb{R}$ e $g\colon (-1,1) \longrightarrow \mathbb{R}$ são funções cinco vezes deriváveis, f é ímpar,

$$\lim_{x\to 0} \frac{f(x) - \sin(x)}{x^5} = 0$$

e $T_3(g;0)(x) = 1 - x + x^3$.

Suponha que $h(x) = f(x)g(x)$ satisfaz $h^{(5)}(0) = 1$ e calcule $T_4(g;0)(x)$.

Resolução:

Pelo limite, temos que $f(x)$ é bem aproximado por um seno, até um polinômio de quinto grau, de tal forma que $f(0) = 0, f'(0) = 1, f''(0) = 0, f^{(3)}(0) = -1, f^{(4)}(0) = 0, f^{(5)}(0) = 1$, e portanto, temos

$$\begin{aligned} h^{(5)}(0) &= \cancelto{1}{f^{(5)}g(0)} + \cancel{5f^{(4)}(0)g'(0)} + \cancelto{-1}{f^{(3)}}10g''(0) + \cancel{10f''(0)g^{(3)}(0)} + \cancelto{1}{f'(0)}5g^{(4)}(0) + \cancel{f(0)g^{(5)}(0)} \\ 1 &= 1 - 10g''(0) + 5g^{(4)}(0) \end{aligned}$$

pelo formato de $T_3(g;0)(x)$ notamos que $g''(0) = 0$, portanto

$$0 = g^{(4)}(0),$$

e, dessa forma, $T_4(g;0)(x) = T_3(g;0)(x) = 1 - x + x^3$.

Questão 3

Calcule as integrais abaixo:

(i)

$$\int \frac{3x^2 + 2}{(x-1)(x^2+4)^2}\,\mathrm{d}x$$

Resolução:

Por decomposição em frações parciais, temos que

$$\begin{aligned} \frac{3x^2+2}{(x-1)(x^2+4)^2} &= \frac{A}{x-1} + \frac{Bx+C}{x^2+4} + \frac{Dx+E}{(x^2+4)^2} \\ &= \frac{A(x^2+4)^2 + (Bx+C)(x-1)(x^2+4) + (Dx+E)(x-1)}{(x-1)(x^2+4)^2} \end{aligned}$$

e, comparando coeficientes, temos

$$\begin{cases} A + B = 0 \implies A = -B \\ C - B = 0 \implies B = C \\ 8A + 4B - C + D = 3 \implies -5C + D = 3 \\ 4C - 4B + E - D = 0 \implies D = E \\ 16A - 4C - E = 2 \implies -20C - D = 2 \end{cases}$$

o que implica em $B = C = -A = -1/5$ e $D = E = 2$. Agora temos um problema mais simples

$$\int \frac{3x^2+2}{(x-1)(x^2+4)^2}\,\mathrm{d}x = \int \frac{1/5}{x-1} + \frac{-x/5-1/5}{x^2+4} + \frac{2x+2}{(x^2+4)^2}\,\mathrm{d}x$$
$$= \frac{1}{5}\underbrace{\int \frac{1}{x-1}\,\mathrm{d}x}_{(1)} - \frac{1}{5}\underbrace{\int \frac{x+1}{x^2+4}\,\mathrm{d}x}_{(2)} + 2\underbrace{\int \frac{x+1}{(x^2+4)^2}\,\mathrm{d}x}_{(3)}$$

Substituindo $u = x-1 \implies \mathrm{d}u = \mathrm{d}x$ notamos que a integral (1) se trata de um $\ln x$ (por definição). Para a segunda integral, podemos fazer

$$\int \frac{x+1}{x^2+4}\,\mathrm{d}x = \int \frac{(x/2)/2+1/4}{(x/2)^2+1}\,\mathrm{d}x$$

tomando $\tan t = x/2 \implies \mathrm{d}x = \sec^2 t\,\mathrm{d}t$

$$= \int \frac{\tan t/2 + 1/4}{\tan^2 t+1}\sec^2 t\,\mathrm{d}t$$
$$= \int \frac{1}{2}\frac{\sin t}{\cos t}\,\mathrm{d}t + \int \frac{1}{4}\,\mathrm{d}t$$

seja $v = \cos t \implies \mathrm{d}v = -\sin t\,\mathrm{d}t$

$$= \int \frac{1}{2}\frac{-\mathrm{d}v}{v} + \frac{\arctan(x/2)}{4}$$
$$= -\frac{1}{2}\ln\cos\arctan(x/2) + \frac{\arctan(x/2)}{4}.$$

Pela relação fundamental da trigonometria temos que

$$\sin^2\theta + \cos^2\theta = 1 \implies \cos^2\theta = \left(\tan^2\theta+1\right)^{-1}$$

substituindo $\theta = \arctan\alpha$ temos

$$\cos\arctan\alpha = \left(\alpha^2+1\right)^{-1/2}. \tag{3.1}$$

Dessa forma a segunda integral iguala

$$\int \frac{x+1}{x^2+4}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{4}\left(\ln\left((x/2)^2+1\right) + \arctan(x/2)\right)$$

Por semelhança, notamos que a substituição trigonométrica na terceira integral nos dá

$$\int \frac{\tan t/8 + 1/16}{(\tan^2 t+1)^2}\sec^2 t\,\mathrm{d}t = \frac{1}{8}\int \frac{\tan t}{\sec^2 t}\,\mathrm{d}t + \frac{1}{16}\int \frac{1}{\sec^2 t}\,\mathrm{d}t$$
$$= \frac{1}{8}\int \underbrace{\sin t}_{=w}\cos t\,\mathrm{d}t + \frac{1}{16}\int \cos^2 t\,\mathrm{d}t$$
$$= \frac{1}{8}\int w\,\mathrm{d}w + \frac{1}{32}\int 1+\cos\underbrace{2t}_{=x}\,\mathrm{d}t$$
$$= \frac{1}{16}w^2 + \frac{1}{32}\left(t + \int \cos x\,\mathrm{d}x\right)$$
$$\int \frac{x+1}{(x^2+4)^2}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{16}\left(\sin^2(x/2) + \frac{1}{2}\sin x + \frac{1}{4}x\right)$$

Dessa forma, adotando que C é uma constante arbitrária, temos:

$$\int \frac{3x^2+2}{(x-1)(x^2+4)^2}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{5}\ln\left(\frac{x-1}{\left(x^2/4+1\right)^{1/4}}\right) + \frac{1}{20}\arctan\left(\frac{x}{2}\right) +$$
$$\frac{1}{8}\left(\sin^2\left(\frac{x}{2}\right) + \frac{1}{2}\sin x + \frac{1}{4}x\right) + C$$

(ii)

$$\int \frac{1}{1 + a\sin x}\,\mathrm{d}x, \text{ em que } 0 < a < 1$$

Resolução:

Fazendo $a\sin x = \tan^2 t \implies a\cos x\,\mathrm{d}x = 2\tan t\sec^2 t\,\mathrm{d}t$, portanto

$$\int \frac{1}{1 + a\sin x}\,\mathrm{d}x = \int \frac{1}{1+\tan^2 t}\frac{2\tan t\sec^2 t}{a\cos t}\,\mathrm{d}t = \int \frac{2\sin t}{a\cos^2 t}\,\mathrm{d}t$$

fazendo $u = \cos t \implies \mathrm{d}u = -\sin t\,\mathrm{d}t$

$$= -\frac{2}{a}\int \frac{\mathrm{d}u}{u^2} = \frac{2}{au}$$

adotando que C é uma constante arbitrária, temos

$$\int \frac{1}{1 + a\sin x}\,\mathrm{d}x = \frac{2}{a\cos\sqrt{\arccos\left(a\sin x\right)}} + C$$

(iii)

$$\int \frac{\sqrt{4 - x - x^2}}{x^2}\,\mathrm{d}x$$

(iv)

$$\int \frac{\arctan\sqrt{x}}{(1+x)\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x$$

Resolução:

Primeiro, precisamos de alguns resultados parciais, como

$$f \circ f^{-1}(x) = x \implies \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} f^{-1} = \frac{1}{\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}u} f(u)}, \quad u = f^{-}1$$

$$\implies \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\arctan(x) = \frac{1}{\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}u}\tan u}, \quad u = \tan^{-1}$$

$$= \frac{1}{\sec^2\tan^{-1} x}$$

substituindo 3.1

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\arctan(x) = \cos^2\tan^{-1} x = \frac{1}{1+x^2}.$$

Dessa forma, substituindo $u = \arctan\sqrt{x} \implies \mathrm{d}u = (1+x)^{-1}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\sqrt{x} = \mathrm{d}x/(2(x+1)\sqrt{x})$, temos

$$\int \frac{\arctan\sqrt{x}}{(1+x)\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x = \int 2u\,\mathrm{d}u = u^2$$

adotando que C é uma constante arbitrária, temos

$$\int \frac{\arctan\sqrt{x}}{(1+x)\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x = \left(\arctan\sqrt{x}\right)^2 + C$$

Questão 4

Justifique suas afirmações e cálculos.

(i) Prove que a equação $\cos x = x$ tem apenas uma solução positiva.

Resolução:

Sendo $f(x) = \cos x - x$ segue que $f'(x) = \sin x - 1 \leqslant 0$, de tal forma que sempre $f(x)$ é estritamente decrescente e, dessa forma, sendo $f(0) = 1 > -\pi/2 = f(\pi/2)$, pelo teorema do valor intermediário deve possuir uma solução única e positiva.

(ii) Use que $1{,}7320 < \sqrt{3} < 1{,}7321$ e o polinômio de Taylor de ordem... de $\cos x$ em zero para provar que $r = \sqrt{3} - 1$ satisfaz $|\cos r - r| < 0{,}012$.

Resolução:

Sendo a derivação da função $\cos x$ "periódica", i.e.

$$\begin{aligned} f'(0) &= [-\sin x]\Big|_{x=0} = 0 \\ f''(0) &= [-\cos x]\Big|_{x=0} = -1 \\ f^{(3)}(0) &= [\sin x]\Big|_{x=0} = 0 \\ f^{(4)}(0) &= [\cos x]\Big|_{x=0} = 1 \end{aligned}$$

podemos tomar a expansão de Taylor de ordem 4

$$T_4(\cos; 0)(x) = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!},$$

e, substituindo o valor desejado, temos:

$$\begin{aligned} T_4(\cos; 0)(r = \sqrt{3} - 1) &= 1 - \frac{\left(\sqrt{3} - 1\right)^2}{2!} + \frac{\left(\sqrt{3} - 1\right)^4}{4!} \\ &= 1 - \frac{3 + 1 - 2\sqrt{3}}{2!} + \frac{\left(4 - 2\sqrt{3}\right)^2}{4!} \\ &= \left(\sqrt{3} - 1\right) + \frac{16 - 16\sqrt{3} + 12}{4!} \\ T_4(\cos; 0)(r) &= \left(\sqrt{3} - 1\right) + \frac{7 - 4\sqrt{3}}{6} \end{aligned}$$

de tal forma que a expressão desejada nos deixa com

$$\cos r - r \approx \left(\sqrt{3} - 1\right) + \frac{7 - 4\sqrt{3}}{6} - \left(\sqrt{3} - 1\right) = \frac{7 - 4\sqrt{3}}{6},$$

portanto, temos

$$
\begin{gathered}
1{,}7320 < \sqrt{3} < 1{,}7321 \\
-1{,}7320 > -\sqrt{3} > -1{,}7321 \\
\frac{7 - 4 \cdot 1{,}7320}{6} > \frac{7 - 4\sqrt{3}}{6} > \frac{7 - 4 \cdot 1{,}7321}{6} \\
0{,}012 > \frac{7 - 4\sqrt{3}}{6} > 0{,}011\,9\overline{3} \\
\implies \left|\frac{7 - 4\sqrt{3}}{6}\right| = |\cos r - r| < 0{,}012.
\end{gathered}
$$

□

(iii) Decida se r é maior ou menor do que a raiz positiva da equação $\cos x = x$.

Resolução:

Sabemos que a função $f(x) = \cos x - x$ é estritamente decrescente, dessa forma, dado que $0{,}012 > \cos r - r = f(r) > 0{,}011\,9\overline{3}$, r é maior que a raíz positiva de $f(x) = 0$.

Questão 5

Use as duas primeiras derivadas não nulas de $f(x) = \sin(x^2)$ em zero e obtenha uma aproximação de $\int f(x)\,\mathrm{d}x$ com o uso do polinômio de Taylor correspondente.

Apresente a melhor estimativa de erro que conseguir para sua aproximação.

Resolução:

Derivando a função $f(x)$, temos

$$
\begin{aligned}
f'(0) &= \left[2x\cos(x^2)\right]\Big|_{x=0} = 0 \\
f''(0) &= \left[2\cos(x^2) - 4x^2\sin(x^2)\right]\Big|_{x=0} = 2 \\
f^{(3)}(0) &= \left[-4x\left(3\sin(x^2) + x^2\cos(x^2)\right)\right]\Big|_{x=0} = 0 \\
f^{(4)}(0) &= \left[4\left(-3\sin(x^2) + 15x^2\cos(x^2) + 8x^4\sin(x^2)\right)\right]\Big|_{x=0} = -12
\end{aligned}
$$

portanto, temos a integral da expansão de Taylor

$$
\int T_4(f;0)(x)\,\mathrm{d}x = \int \frac{2}{2!}x^2 + \frac{-12}{4!}x^4\,\mathrm{d}x = \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{2}\frac{1}{5}x^5 + C, \quad C \in \mathbb{R},
$$

e, conforme a aproximação seria melhorada usando $T_5(f;0)(x)$, temos que

$$
f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}}{n!}(x-a)^n = T_4(f;0)(x) + \cdots
$$

De tal forma que, utilizando o próximo termo não nulo da série, i.e.

$$
\begin{aligned}
f^{(6)}(0) &= \frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2}\left[4\left(-3\sin(x^2)+15x^2\cos(x^2)+8x^4\sin(x^2)\right)\right]\Big|_{x=0} \\
&= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left[4\left(-3\cdot 2x\cos(x^2)+15\left(2x\cos(x^2)+x^2(-2x\sin(x^2))\right)+8\left(4x^3\sin(x^2)+x^4\cdot 2x\cos(x^2)\right)\right)\right]\Big|_{x=0} \\
&= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left[8\left(12x\cos(x^2)+x^3\sin(x^2)+8x^5\cos(x^2)\right)\right]\Big|_{x=0} \\
&= \left[8\left(12\left(\cos(x^2)-x\cdot 2x\sin(x^2)\right)+3x^2\sin(x^2)+x^3\cdot 2x\cos(x^2)+8\left(5x^4\cos(x^2)-x^5\cdot 2x\sin(x^2)\right)\right)\right]\Big|_{x=0} \\
f^{(6)}(0) &= \left[8\left(12\cos(x^2)-9x^2\sin(x^2)+42x^4\cos(x^2)-16x^6\sin(x^2)\right)\right]\Big|_{x=0} = 48
\end{aligned}
$$

podemos estimar um erro de

$$\int f(x)-T_4(f;0)(x)\,\mathrm{d}x \approx \int \frac{f^{(6)}(0)}{6!}x^6\,\mathrm{d}x = \int \frac{48}{6!}x^6\,\mathrm{d}x = \frac{48}{7!}x^7 + C, \quad C \in \mathbb{R}.$$