Resolução – Provinha IV (Física I)

Isabella B. – 11810773

A mecânica celeste foi um tópico que atraiu diversos cientistas naturais entre os séculos XVI e XVII. Uma das figuras chave para seu desenvolvimento foi o astrônomo alemão Johannes Kepler, imortalizado na história por suas descobertas resumidas nas seguintes leis, batizadas, em sua homenagem, leis de Kepler:

(I) As órbitas planetárias são elipses com o sol ocupando a posição de um dos focos.

(II) O vetor que mede a posição de cada planeta em relação ao sol varre áreas iguais em intervalos de tempo iguais.

(III) O quadrado do período orbital é proporcional ao cubo do maior raio da elipse.

Figura 1: Johannes Kepler (1571-1630).

Kepler chegou às conclusões acima analisando observações astronômicas de Tycho Brahe e suas leis foram de fundamental importância para os trabalhos de Isaac Newton. A provinha em questão é dividida da seguinte forma:

1. Na primeira parte, estudaremos o sistema de coordenadas polar, no qual o trabalho algébrico dos exercícios subsequentes é reduzido;
2. No segundo tópico, analisaremos grandezas **conservadas** no tempo, um conceito de fundamental importância na física;
3. Após isso, discutiremos seções cônicas (veja a lei (I) acima);
4. Então, verificaremos que cada lei é, de fato, respeitada pela interação gravitacional e vamos fazer uma aplicação de tudo que aprendemos para o movimento de satélites estudando a *Manobra de Hohmann*!

Questão 1

A física não pode depender do sistema de coordenadas!!! Podemos tirar vantagem disso e escolher um sistema que reduza o trabalho algébrico. Uma maneira de discriminar entre sistemas é utilizar das simetrias do problema, por exemplo, se a situação física estudada apresenta simetria esférica, nada mais justo que utilizarmos coordenadas esféricas para tratar o problema. No caso que queremos estudar, como ficará claro adiante, o sistema de coordenadas polares é útil na simplificação de contas e também na interpretação dos resultados. Nesse sistema iremos decompor os vetores em nos versores $\widehat{\mathbf{e}}_\mathbf{r}$ e $\widehat{\mathbf{e}}_{\boldsymbol{\theta}}$, sendo que os dois primeiros são relacionados com os versores cartesianos, os quais vocês estão acostumados, através das relações:

$$\begin{aligned} \widehat{\mathbf{e}}_\mathbf{r} &= \cos(\theta)\widehat{\mathbf{e}}_\mathbf{x} + \sin(\theta)\widehat{\mathbf{e}}_\mathbf{y} \\ \widehat{\mathbf{e}}_{\boldsymbol{\theta}} &= -\sin(\theta)\widehat{\mathbf{e}}_\mathbf{x} + \cos(\theta)\widehat{\mathbf{e}}_\mathbf{y} \end{aligned} \tag{1.1}$$

Considere o movimento de um planeta de massa m ao redor do sol, de massa M, desconsideraremos interações gravitacionais com outros corpos, uma vez que são pequenas em comparação à do sol. Além disso consideraremos que o sol permanece praticamente imóvel na origem do sistema de coordenadas[1], veja a figura 2. Em coordenadas cartesianas podemos decompor o vetor posição $\mathbf{r}$ da partícula da seguinte forma:

$$\mathbf{r} = \sqrt{x^2+y^2}\cos(\theta)\,\widehat{\mathbf{e}}_{\mathbf{x}} + \sqrt{x^2+y^2}\sin(\theta)\,\widehat{\mathbf{e}}_{\mathbf{y}} \tag{1.2}$$

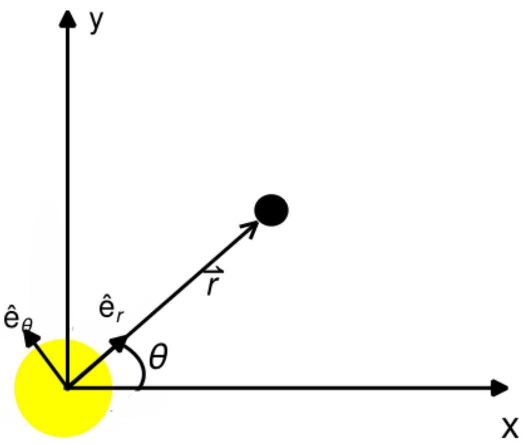


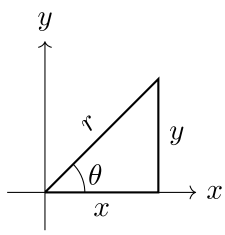
Figura 2: Planeta de massa m, orbitando o sol.

(a) Escreva 1.2 no sistema de coordenadas polares, ou seja, em termos de $\widehat{\mathbf{e}}_{\mathbf{r}}, \widehat{\mathbf{e}}_{\boldsymbol{\theta}}$ e do módulo de $|\mathbf{r}| \equiv r$.

Resolução:

Sendo

$$\cos\theta = \frac{x}{r} \implies x = r\cos\theta$$
$$\sin\theta = \frac{y}{r} \implies y = r\sin\theta$$



Tomando $\sqrt{x^2+y^2}$, temos:

$$\begin{aligned}\sqrt{x^2+y^2} &= \sqrt{(r\cos\theta)^2 + (r\sin\theta)^2}\\ &= \sqrt{r^2\left(\cos^2\theta + \sin^2\theta\right)}\end{aligned}$$

pela relação fundamental da trigonometria:

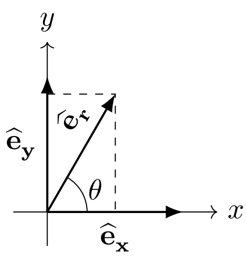
$$= \sqrt{r^2\cdot 1} = r \overset{!}{\geqslant} 0$$

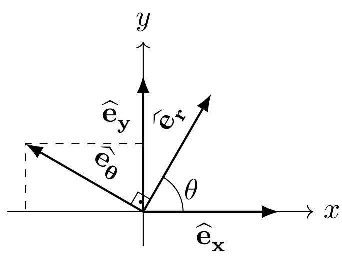
Daí, temos que $\mathbf{r} = r\cos\theta\,\widehat{\mathbf{e}}_{\mathbf{x}} + r\sin\theta\,\widehat{\mathbf{e}}_{\mathbf{y}}$. Agora basta nos livrarmos dos vetores unitários cartesianos. Analisando o triângulo de hipotenusa unitária $\widehat{\mathbf{e}}_{\mathbf{r}}$, temos:

$$\widehat{\mathbf{e}}_{\mathbf{r}} = \widehat{\mathbf{e}}_{\mathbf{x}}\cos\theta + \widehat{\mathbf{e}}_{\mathbf{y}}\sin\theta \tag{1.3}$$

Definindo $\widehat{\mathbf{e}}_{\boldsymbol{\theta}}$ como perpendicular à $\widehat{\mathbf{e}}_{\mathbf{r}}$, temos

$$\widehat{\mathbf{e}}_{\boldsymbol{\theta}} = -\widehat{\mathbf{e}}_{\mathbf{x}}\sin\theta + \widehat{\mathbf{e}}_{\mathbf{y}}\cos\theta \tag{1.4}$$





substituindo, temos:

$$\mathbf{r} = r\left(\widehat{\mathbf{e}}_{\mathbf{x}}\,\cos\theta + \widehat{\mathbf{e}}_{\mathbf{y}}\,\sin\theta\right) = r\,\widehat{\mathbf{e}}_{\mathbf{r}} \tag{1.5}$$

[1] As dimensões de ambos corpos também serão desprezadas, já que não são relevantes para a análise em questão.

(b) Calcule as seguintes derivadas e expresse-as em coordenadas polares:

$$\frac{\mathrm{d}\widehat{\mathbf{e}}_{\mathbf{r}}}{\mathrm{d}t} \equiv \dot{\widehat{\mathbf{e}}}_{\mathbf{r}}\,, \quad \frac{\mathrm{d}\widehat{\mathbf{e}}_{\boldsymbol{\theta}}}{\mathrm{d}t} \equiv \dot{\widehat{\mathbf{e}}}_{\boldsymbol{\theta}} \tag{1.6}$$

Resolução:

Derivando 1.3, temos:

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}\widehat{\mathbf{e}}_{\mathbf{r}}}{\mathrm{d}t} &= \dot{\widehat{\mathbf{e}}}_{\mathbf{r}} = \left(\widehat{\mathbf{e}}_{\mathbf{x}}\cos\theta + \widehat{\mathbf{e}}_{\mathbf{y}}\sin\theta\right)' \\ &= \widehat{\mathbf{e}}_{\mathbf{x}}\dot{\theta}\left(\cos\theta\right)' + \widehat{\mathbf{e}}_{\mathbf{y}}\dot{\theta}\left(\sin\theta\right)' \\ &= \dot{\theta}\left(\widehat{\mathbf{e}}_{\mathbf{x}}\left(-\sin\theta\right) + \widehat{\mathbf{e}}_{\mathbf{y}}\left(\cos\theta\right)\right) = \dot{\theta}\,\widehat{\mathbf{e}}_{\boldsymbol{\theta}}\end{aligned} \tag{1.7}$$

Derivando 1.4, temos:

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}\widehat{\mathbf{e}}_{\boldsymbol{\theta}}}{\mathrm{d}t} &= \dot{\widehat{\mathbf{e}}}_{\boldsymbol{\theta}} = \left(-\widehat{\mathbf{e}}_{\mathbf{x}}\sin\theta + \widehat{\mathbf{e}}_{\mathbf{y}}\cos\theta\right)' \\ &= -\widehat{\mathbf{e}}_{\mathbf{x}}\dot{\theta}\left(\sin\theta\right)' + \widehat{\mathbf{e}}_{\mathbf{y}}\dot{\theta}\left(\cos\theta\right)' \\ &= -\dot{\theta}\left(\widehat{\mathbf{e}}_{\mathbf{x}}\left(\cos\theta\right) + \widehat{\mathbf{e}}_{\mathbf{y}}\left(\sin\theta\right)\right) = -\dot{\theta}\,\widehat{\mathbf{e}}_{\mathbf{r}}\end{aligned} \tag{1.8}$$

(c) Utilizando os resultados obtidos em 1.6 calcule os vetores velocidade e aceleração do planeta. Exprima a resposta no sistema de coordenadas polar.

Resolução:

Munidos de 1.5, 1.7 e 1.8, tomemos $\dot{\mathbf{r}}$:

$$\dot{\mathbf{r}} = \dot{r}\cdot\widehat{\mathbf{e}}_{\mathbf{r}} + r\cdot\dot{\widehat{\mathbf{e}}}_{\mathbf{r}} = \dot{r}\cdot\widehat{\mathbf{e}}_{\mathbf{r}} + r\cdot\dot{\theta}\cdot\widehat{\mathbf{e}}_{\boldsymbol{\theta}} \tag{1.9}$$

tomando, agora, $\ddot{\mathbf{r}}$:

$$\begin{aligned}\ddot{\mathbf{r}} &= \left(\dot{\mathbf{r}}\right)' = \left(\dot{r}\cdot\widehat{\mathbf{e}}_{\mathbf{r}} + r\cdot\dot{\theta}\cdot\widehat{\mathbf{e}}_{\boldsymbol{\theta}}\right)' \\ &= \ddot{r}\cdot\widehat{\mathbf{e}}_{\mathbf{r}} + \dot{r}\cdot\dot{\widehat{\mathbf{e}}}_{\mathbf{r}} + \dot{r}\cdot\dot{\theta}\cdot\widehat{\mathbf{e}}_{\boldsymbol{\theta}} + r\left(\ddot{\theta}\cdot\widehat{\mathbf{e}}_{\boldsymbol{\theta}} + \dot{\theta}\cdot\dot{\widehat{\mathbf{e}}}_{\boldsymbol{\theta}}\right)\end{aligned}$$

substituindo 1.7 e 1.8, e adotando $\dot{a}^2 := \dot{a}\cdot\dot{a}$, temos

$$\begin{aligned}&= \ddot{r}\cdot\widehat{\mathbf{e}}_{\mathbf{r}} + \dot{r}\cdot\dot{\theta}\cdot\widehat{\mathbf{e}}_{\boldsymbol{\theta}} + \dot{r}\cdot\dot{\theta}\cdot\widehat{\mathbf{e}}_{\boldsymbol{\theta}} + r\left(\ddot{\theta}\cdot\widehat{\mathbf{e}}_{\boldsymbol{\theta}} - \dot{\theta}\cdot\dot{\theta}\cdot\widehat{\mathbf{e}}_{\mathbf{r}}\right) \\ \ddot{\mathbf{r}} &= \left(\ddot{r} - r\cdot\dot{\theta}^2\right)\widehat{\mathbf{e}}_{\mathbf{r}} + \left(2\dot{r}\cdot\dot{\theta} + r\cdot\ddot{\theta}\right)\widehat{\mathbf{e}}_{\boldsymbol{\theta}}\end{aligned} \tag{1.10}$$

Questão 2

O momento angular $\mathbf{L}$ é definido da seguinte forma:

$$\mathbf{L} = \mathbf{r}\times\mathbf{p} \tag{2.1}$$

Onde $\mathbf{p}$ e $\mathbf{r}$ são, respectivamente, o momento e a posição do planeta.

(a) Calcule a derivada do momento angular $\frac{\mathrm{d}\mathbf{L}}{\mathrm{d}t}$.

Dica: O produto vetorial satisfaz a regra do produto para derivadas.

Resolução:

Pela dica, sabemos que

$$\frac{\mathrm{d}\mathbf{L}}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}\mathbf{r}}{\mathrm{d}t} \times \mathbf{p} + \mathbf{r} \times \frac{\mathrm{d}\mathbf{p}}{\mathrm{d}t}$$

sendo o momento $\mathbf{p} = m\,\dot{\mathbf{r}}$, temos:

$$\frac{\mathrm{d}\mathbf{L}}{\mathrm{d}t} = \dot{\mathbf{r}} \times \mathbf{p} + \mathbf{r} \times \dot{\mathbf{p}}$$

como um vetor é paralelo a si mesmo, temos

$$\begin{aligned} &= \cancelto{0}{\dot{\mathbf{r}} \times (m\,\dot{\mathbf{r}})} + \mathbf{r} \times (m\,\dot{\mathbf{r}})' \\ &= m\,\mathbf{r} \times \ddot{\mathbf{r}} \end{aligned}$$

por 1.10, temos

$$\begin{aligned} &= m\,\dot{\mathbf{r}} \times \left(\left(\ddot{r} - r\cdot\dot{\theta}^2\right)\widehat{\mathbf{e}}_{\mathbf{r}} + \left(2\dot{r}\cdot\dot{\theta} + r\cdot\ddot{\theta}\right)\widehat{\mathbf{e}}_{\boldsymbol{\theta}}\right) \\ &= m\left(\cancelto{0}{\dot{\mathbf{r}} \times \left(\left(\ddot{r} - r\cdot\dot{\theta}^2\right)\widehat{\mathbf{e}}_{\mathbf{r}}\right)} + \dot{\mathbf{r}} \times \left(\left(2\dot{r}\cdot\dot{\theta} + r\cdot\ddot{\theta}\right)\widehat{\mathbf{e}}_{\boldsymbol{\theta}}\right)\right) \\ &= m\left(2\dot{r}\cdot\dot{\theta} + r\cdot\ddot{\theta}\right)\,\dot{\mathbf{r}} \times \widehat{\mathbf{e}}_{\boldsymbol{\theta}} \end{aligned}$$

por 1.3, 1.4 e 1.5, temos

$$\begin{aligned} &= m\,r\left(2\dot{r}\cdot\dot{\theta} + r\cdot\ddot{\theta}\right)\begin{vmatrix} \widehat{\mathbf{e}}_{\mathbf{x}} & \widehat{\mathbf{e}}_{\mathbf{y}} & \widehat{\mathbf{e}}_{\mathbf{z}} \\ \cos\theta & \sin\theta & 0 \\ -\sin\theta & \cos\theta & 0 \end{vmatrix} \\ &= m\,r\left(2\dot{r}\cdot\dot{\theta} + r\cdot\ddot{\theta}\right)\left(\widehat{\mathbf{e}}_{\mathbf{x}}\,(0\sin\theta - 0\cos\theta) - \widehat{\mathbf{e}}_{\mathbf{y}}\,(0\cos\theta + 0\sin\theta) + \widehat{\mathbf{e}}_{\mathbf{z}}\left(\cos^2\theta + \sin^2\theta\right)\right) \end{aligned}$$

pela relação fundamental da trigonometria

$$= m\,r\left(2\dot{r}\cdot\dot{\theta} + r\cdot\ddot{\theta}\right)\widehat{\mathbf{e}}_{\mathbf{z}}$$

(b) Mostre que o momento angular é conservado se atuar na partícula somente uma força central $\mathbf{F} = f(r)\mathbf{r}$.

(c) Considere a interação gravitacional:

$$\mathbf{F} = -\frac{G\,M\,m}{r^3}\mathbf{r} \tag{2.2}$$

A energia potencial gravitacional associada à força acima é[2]:

$$U(r) = -\frac{G\,M\,m}{r} \tag{2.3}$$

Escreva a energia mecânica total do planeta. Utilize a velocidade em coordenadas polares, como feito no item 1(c), para escrever o resultado final em coordenadas polares.

(d) Utilizando novamente o item 1(c), escreva a segunda lei de Newton para o problema em questão e encontre as equações de movimento para as componentes $\widehat{\mathbf{e}}_{\mathbf{r}}$ e $\widehat{\mathbf{e}}_{\boldsymbol{\theta}}$.

(e) Calcule $\frac{\mathrm{d}E}{\mathrm{d}t}$ e use o resultado obtido em 2(d) para mostrar que a energia é conservada.

(f) Calcule o produto escalar $\mathbf{L}\cdot\mathbf{r}$, o que você pode concluir desse resultado combinado com o que obteve em 2(b)? Nesse momento deve ficar claro porque podemos representar o movimento com acurácia utilizando apenas a Figura 2.

[2]Fixamos seu valor igual a zero no infinito.

Dica: Lembre-se de que a equação de um plano pode ser escrita na forma $\mathbf{N} \cdot \mathbf{r} = 0$ onde $\mathbf{N}$ é o vetor normal ao plano.

Questão 3

Agora, de posse das equações de movimento e sabendo que a situação física satisfaz a condição estabelecida por 2(f), é necessário entendermos seções cônicas. Para isso considere o seguinte problema de geometria analítica:

> *"Qual o lugar geométrico descrito por um ponto móvel cuja distância à um ponto fixo tem proporção constante em relação a sua distância perpendicular à uma linha fixa ?"*

Para entender melhor a situação considere a Figura 3, onde adotamos como ponto fixo, chamado foco, a origem e consideramos que a linha fixa seja a reta que passa por $x = -d$. Sendo a distância de um ponto arbitrário (o ponto móvel do enunciado acima) ao foco r_1 e a distância dele à reta fixa r_2 (Veja a Figura 3), responda:

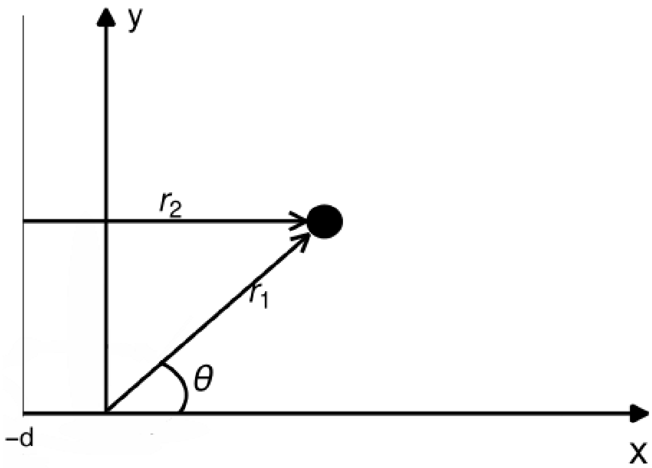


Figura 3: Representação gráfica do problema geométrico. Note que r_1, faz o papel do módulo do raio r do exercício anterior.

(a) Calcule a proporção r_1/r_2 em termos de r_1, θ e d. Note que, caso troquemos nosso ponto móvel por uma partícula ou um corpo extenso cujas dimensões podem ser desprezadas, r_1 se reduz, em coordenadas polares, ao módulo do vetor posição $r_1 = |r|$.

(b) Queremos que o quociente r_1/r_2 seja constante igual a e, chamado de excentricidade da cônica. Reescreva r_1 em termos de $r_c = e\,d, e$ e θ.

Podemos reescrever o resultado de 3(b) em coordenadas cartesianas, correspondendo a três situações distintas:

1.Se $e < 1$:

$$\frac{(x - x_c)^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \tag{3.1}$$

onde

$$\begin{aligned} a &= \frac{r_c}{1 - e^2} \\ b &= \sqrt{1 - e^2}\, a \\ x_c &= e\, a \end{aligned} \tag{3.2}$$

A equação 3.1 descreve uma elipse centrada em $(x_c, 0)$, de raio maior a e raio menor b (veja a Figura 4).

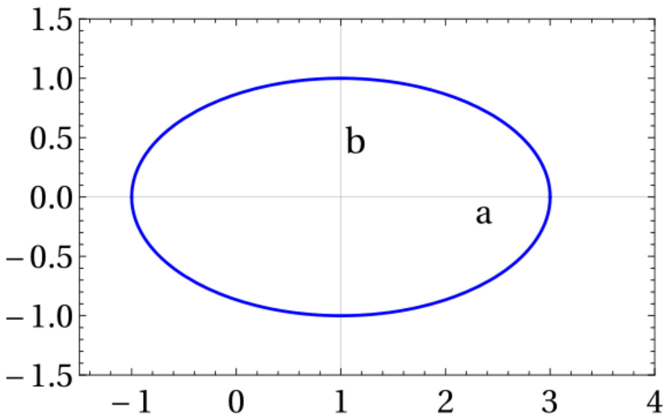


Figura 4: Exemplo de uma eplise com $a = 2, b = 1$ e $x_c = 1$.

2.Se $e > 1$:

$$\frac{(x - x_c)^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 \tag{3.3}$$

onde

$$\begin{aligned} a &= \frac{r_c}{e^2 - 1} \\ b &= \sqrt{e^2 - 1}\, a \\ x_c &= -e\, a \end{aligned} \tag{3.4}$$

A equação 3.3 descreve uma hipérbole com assíntotas intersectando em $(x_c, 0)$ (Veja a Figura 5).

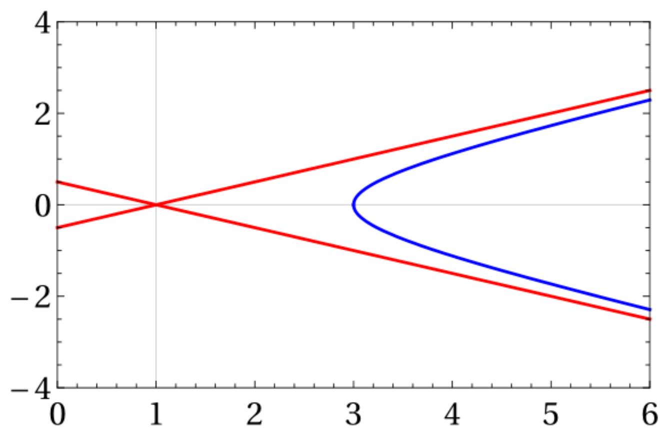


Figura 5: Exemplo de uma hipérbole com $a = 2, b = 1$ e $x_c = 1$. As retas vermelhas representam suas assíntotas.

3.Se $e = 1$:

$$y^2 - 2r_c\,(x - x_c) = 0\,, \tag{3.5}$$

onde

$$x_c = -\frac{r_c}{2} \tag{3.6}$$

A equação 3.5, provavelmente a mais familiar a vocês, descreve uma parábola alinhada ao eixo x que passa por $(x_c, 0)$ (Veja Figura 6). Temos agora todos os ingredientes necessários para derivar, de primeiros princípios, as Leis de Kepler!

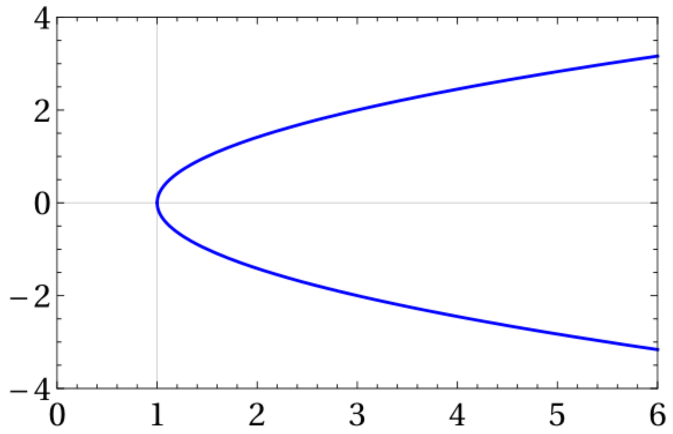


Figura 6: Exemplo de uma parábola alinhada ao eixo x com xc = 1.

Questão 4

De volta à Figura 2, vamos analisar primeiramente a validade da lei (II):

(a) Escreva o momento angular $\mathbf{L}$ em coordenadas polares.

Dica: Note que $\widehat{\mathbf{e}}_{\mathbf{r}} \times \widehat{\mathbf{e}}_{\boldsymbol{\theta}} = \widehat{\mathbf{e}}_{\mathbf{z}}$. Caso você não tenha conseguido mostrar a conservação de momento angular no caso geral do exercício 2, tente mostrar que para o caso particular[3] dessa questão que, de fato, a equação

$$\frac{\mathrm{d}\mathbf{L}}{\mathrm{d}t} = \mathbf{0}$$

é satisfeita.

Dica: Calcule a derivada acima e compare com a equação de movimento para a componente $\widehat{\mathbf{e}}_{\boldsymbol{\theta}}$.

(b) Vocês verão no futuro que a área de uma elipse pode ser calculada pela integral dupla

$$A = \int_0^{2\pi} \mathrm{d}\theta \int_0^{r(\theta)} r' \, \mathrm{d}r'$$

E poderão tirar as mesmas conclusões que iremos chegar analisando o limite a seguir:

Considere a Figura 7, que representa um arco de uma elipse. Se $\Delta\theta \ll 1$, podemos aproximar a área do arco pela área de um triângulo:

$$\Delta A = \frac{r^2 \Delta\theta}{2}$$

[3]Por particular queremos dizer após decompor o vetor em um sistema de coordenadas específico, uma vez que a conservação é geral e independe de sistema de coordendas.

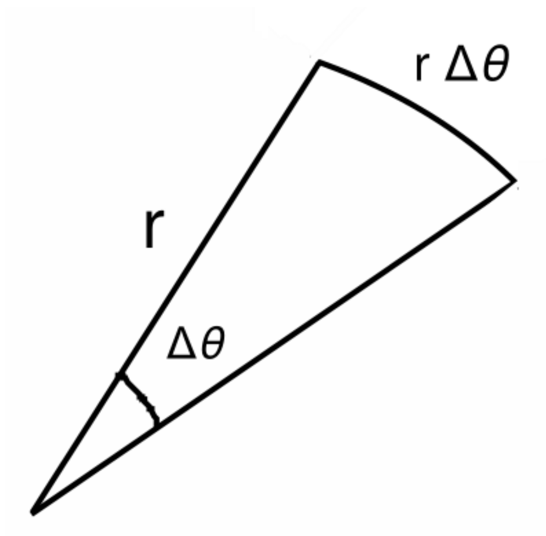


Figura 7: Arco de uma elipse.

Calcule $\lim_{\Delta t \to 0} \Delta A/\Delta t$ e compare com o momento angular (item 2(a)). O que você pode concluir sobre a taxa de variação da área? É compatível com a segunda lei de Kepler?

(c) Agora considere a equação de movimento na direção radial (item 2(d)). Utilize a troca de variáveis $r(t) = u^{-1}(t)$ e mostre que:

$$\dot{r} = -\frac{\dot{u}}{u^2} = -r^2 \frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}\theta}\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t} = -h\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}\theta}$$
$$\ddot{r} = -\frac{\mathrm{d}^2 u}{\mathrm{d}\theta^2}\dot{\theta} = -u^2 h^2 \frac{\mathrm{d}^2 u}{\mathrm{d}\theta^2}$$

Onde $h = L/m$ é o momento angular por unidade de massa do planeta e utilizamos a regra da cadeia para obter as últimas igualdades. Também adotamos a notação menos carregada $|\mathbf{L}| \equiv L$.

(d) Com isso, mostre que a equação radial pode ser transformada em

$$\frac{\mathrm{d}^2 u}{\mathrm{d}\theta^2} + u = \frac{G\,M}{h^2}.$$

(e) Confira que a seguinte expressão é solução da equação diferencial acima:

$$u(\theta) = \frac{G\,M}{h^2}\left(1 - e\cos\left(\theta - \theta_0\right)\right), \tag{4.1}$$

onde θ_0 e e são constantes. Podemos tomar, sem perda de generalidade, $\theta_0 = 0$, de forma que a solução $r(\theta)$ é dada por

$$r(\theta) = \frac{r_c}{1 - e\cos(\theta)} \tag{4.2}$$

onde $r_c = h^2/(G\,M)$. Compare essa equação com o resultado obtido em 3(b). Essa é a equação de uma cônica confocal com a origem (no caso da dinâmica celeste estamos supondo que a origem do sistema de coordenadas está fixa no sol). Para o caso $e < 1$ essa equação descreve uma elipse. Dado que as outras cônicas não descrevem movimentos limitados (reflita o porquê disso), tire suas conclusões sobre a mecânica celeste e confronte com (I).

(f) Suponha que a e b sejam, respectivamente, o valor do raio maior e menor da elipse. A área da elipse é então dada por

$$A = \pi\,a\,b$$

No item 4(b) foi calculada a taxa de variação da área no tempo. O período do movimento pode ser calculado considerando o tempo necessário para varrer a área total da elipse a uma taxa constante $\frac{\mathrm{d}A}{\mathrm{d}t}$:

$$T = \frac{A}{\frac{\mathrm{d}A}{\mathrm{d}t}}.$$

Calcule o valor acima e utilize os resultados resumidos em 3.2 e que $r_c = h^2/(GM)$ para escrever o quadrado do período em função apenas do raio maior a. Enfim, mostramos que a lei (III) vale!

Questão 5

Todo formalismo desenvolvido até esse ponto pode ser utilizado para entendermos a *manobra de Hohmann*. Considere que um satélite artificial descreve uma órbita circular de raio r_1 ao redor do sol e queremos fazer com que ele passe a descrever uma órbita circular $r_2 > r_1$. Para tal, vamos utilizar uma órbita elíptica para fazer o translado entre as órbitas circulares (veja Figura 8).

(a) Utilize seu resultado de 4(c) e a substituição $r = u^{-1}$ para escrever a energia por unidade de massa:

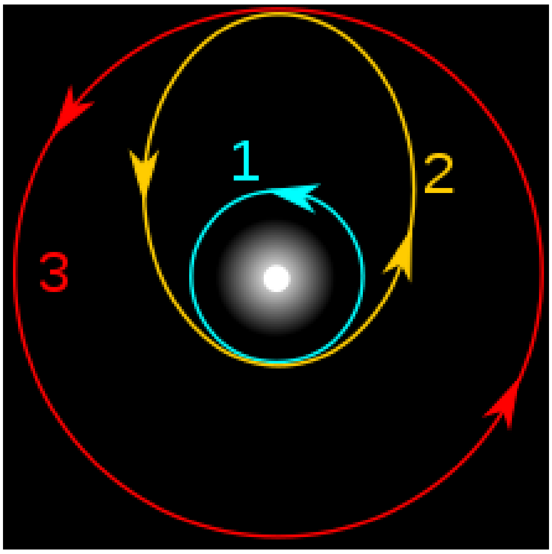


Figura 8: A manobra de transferência entre órbitas circulares de Hohmann.

$$\varepsilon = \frac{E}{m} = \frac{h^2}{2}\left(\left(\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}\theta}^2 + u(\theta\right)^2 - 2u(\theta)u_c\right) \tag{5.1}$$

(b) Substitua a solução $u(\theta)$ de 4.1 e mostre que

$$\varepsilon = \frac{u_c h^2}{2}\left(e^2 - 1\right) = \frac{G\,M}{2r_p}\left(e - 1\right),$$

onde $u_c = r_e^{-1}$ e r_p é chamado periélio, a distância mais próxima que o planeta chega do sol em toda sua órbita ($\theta = \pi$ em 4.2):

$$r_p = \frac{r_c}{1+e} = a\left(1 - e\right) \tag{5.2}$$

Discuta o sinal de ε para cada uma das cônicas $e < 1, e = 1$ e $e > 1$. Você se lembra da primeira provinha do átomo de Bohr[4]? Discutimos que a energia gravitacional deveria ser negativa para estados que formam órbitas uma vez que o zero da energia potencial foi fixado no infinito. Aqui você pode vislumbrar que esse resultado é, de fato, consistente. Como você mostrou anteriormente, a energia é conservada, logo basta calcularmos seu valor para um ponto e ele deve ser o mesmo para todos os instantes subsequentes.

(c) Use 5.2 para mostrar que podemos escrever a energia como função apenas do raio maior a:

$$\varepsilon = -\frac{G\,M}{2a} \tag{5.3}$$

Para o movimento circular, temos que $\dot{r} = 0$ e que $a = b = r_c$, sendo agora justificado o porquê de adotamos o índice c durante todo o exercício.

[4]Essa provinha foi aplicada apenas para o pessoal da Geofísica, deixaremos ela disponível na página do curso no moodle para quem quiser olhar.

(d) Mostre que, para órbitas circulares, levando em conta a conservação de energia e utilizando 5.3, a velocidade tangencial é dada por:

$$v_c = \sqrt{\frac{G\,M}{r_c}}$$

(e) Faça o mesmo raciocínio para o momento em que o planeta se encontra no periélio r_p e mostre que:

$$\frac{v_p}{v_c} = \sqrt{1+e} \tag{5.4}$$

Dica: Note que no periélio também temos que $\dot{r} = 0$.

Analogamente, no afélio — maior distância possível entre o planeta e o sol — temos:

$$r_a = a(1+e) \tag{5.5}$$

Podemos mostrar que:

$$\frac{v_a}{v_c} = \sqrt{1-e} \tag{5.6}$$

Ufa! Agora nos resta apenas interpretar os resultados acima. Suponha que nosso satélite esteja numa órbita circular de raio r_1 e queremos transferí-lo para um órbita circular de raio $r_2 > r_1$. Nós podemos realizar esse feito colocando o satélite temporariamente em uma órbita elíptica na qual o periélio é a distância r_1 e o afélio é a distância r_2. Neste caso, a excentricidade será dada por:

$$e = \frac{r_2 - r_1}{r_2 + r_1}$$

De acordo com o resultado de 5.4, podemos transferir o satélite de sua órbita circular inicial para a órbita elíptica discutida acima se aumentarmos sua velocidade tangencial (ligando os motores do satélite durante um intervalo de tempo, de forma que causem a aceleração necessária) por um fator

$$\kappa_1 = \sqrt{1+e}$$

Uma vez que o satélite está percorrendo a trajetória da elipse, aguardamos o instante no qual ele atinge seu afélio (percorrendo metade da órbita) para reativar os motores e mudar a velocidade, segundo 5.6, por um fator

$$\kappa_2 = \frac{1}{\sqrt{1-e}} \tag{5.7}$$

Então o satélite estará com a velocidade tangencial compatível para realizar o movimento circular e assim permanecerá enquanto estiver sob ação apenas da força gravitacional! Legal, não?

(f) **Para provocar...** Imagine que dormimos no ponto após ligar os motores e deixamos o dispositivo ligado de maneira que em 5.4 a nova velocidade tangencial satisfaça:

$$\frac{v_t}{v_c} > \sqrt{2}$$

O que ocorrerá em momentos subsequentes?

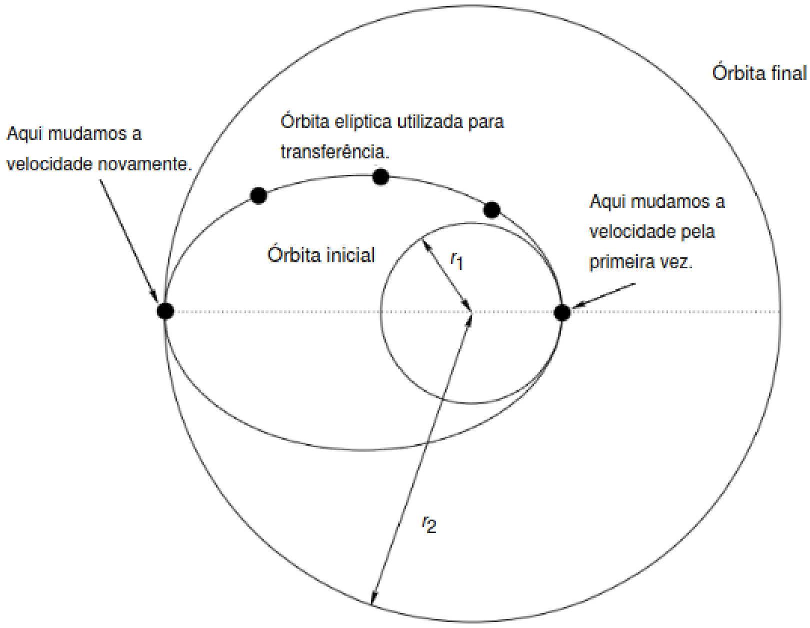


Figura 9: Representação da situação estudada.