Resolução – Provinha VIII (Física I)

Isabella B. – 11810773

Questão 1

Em 19 de janeiro de 2006, a NASA lançou a sonda *New Horizons* numa missão para estudar a geomorfologia de Plutão. No entanto, ela não foi lançada diretamente para o planeta-anão, mas numa trajetória de 23 km/s (em relação ao Sol) em direção a Júpiter, astro com que teve máxima aproximação no dia 28 de fevereiro de 2007, e cuja força de gravidade foi usada para acelerá-la, um processo conhecido como assistência gravitacional (ou estilingue gravitacional).

(a) Mostre que, considerando situações inicial e final em que a sonda está suficientemente distante de Júpiter, o processo de deflexão de sua trajetória pode ser considerado uma colisão elástica.

Resolução:

Considerando que a sonda viaja à uma distância R do centro de massa (CM) de Júpiter, teremos a conservação de energia e de momento do sistema se, e somente se, as únicas forças atuantes forem conservativas, o que é o caso para um R suficientemente grande, de tal forma que a sonda orbita o planeta numa região sem atmosfera e, portanto, sem forças dissipativas.

Como as forças que atuam no sistema são todas internas, pois a sonda e o planeta sofrem somente uma força gravitacional mútua, o momento é conservado[1]:

$$\sum \mathbf{F_{int}} = \mathbf{0}\,, \quad \mathbf{F_{ext}} = \mathbf{0} \implies \sum \frac{\mathrm{d}\mathbf{p}}{\mathrm{d}t} = \mathbf{0}$$

Dessa forma, a energia do sistema também é conservada e, portanto, podemos considerar que o problema trata de uma colisão elástica.

(b) O momento angular de um corpo na posição $\mathbf{r}$ com momento $\mathbf{p}$ é dado pela expressão $\mathbf{L} = \mathbf{r} \times \mathbf{p}$. Calcule a variação temporal de $\mathbf{L}$ para um corpo sob ação da força gravitacional de um planeta (muito massivo em relação ao objeto) na origem.

Resolução:

Denotarei o módulo de um vetor $\boldsymbol{\alpha}$ por $|\boldsymbol{\alpha}| = \alpha$.

Para um corpo de massa m e posição $\mathbf{r}$ em relação a um corpo de massa $M \gg m$ que exerce sobre ele uma força gravitacional, temos $\ddot{r} = g_p$, que é a gravidade do planeta.

Nessa situação, podemos descrever seu vetor posição como

$$\mathbf{r} = r\left(\cos\theta\,\hat{\mathbf{\imath}} + \sin\theta\,\hat{\mathbf{\jmath}}\right)$$

onde θ é o ângulo formado em relação a alguma reta bem definida que passa pelo centro de massa do planeta.

Dessa forma

$$\begin{aligned}\ddot{\mathbf{r}} &= \frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}t^2}\left[r\left(\cos\theta\,\hat{\mathbf{\imath}} + \sin\theta\,\hat{\mathbf{\jmath}}\right)\right] \\ &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left[\dot{r}\left(\cos\theta\,\hat{\mathbf{\imath}} + \sin\theta\,\hat{\mathbf{\jmath}}\right) + r\left(-\dot{\theta}\sin\theta\,\hat{\mathbf{\imath}} + \dot{\theta}\cos\theta\,\hat{\mathbf{\jmath}}\right)\right]\end{aligned}$$

[1] $\sum \mathbf{F_{int}}$ representa as forças internas ao sistema, enquanto $\mathbf{F_{ext}}$ representa as forças externas, e $\sum \mathbf{p}$ é o momento total.

se a única força que atua no sistema é a gravitacional, $\dot{\theta} = 0$

$$
\begin{aligned}
&= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left[\dot{r}\left(\cos\theta\,\hat{\mathbf{\imath}} + \sin\theta\,\hat{\mathbf{\jmath}}\right)\right] \\
&= \ddot{r}\left(\cos\theta\,\hat{\mathbf{\imath}} + \sin\theta\,\hat{\mathbf{\jmath}}\right) + \cancelto{0}{\dot{r}\,\dot{\theta}\left(-\sin\theta\,\hat{\mathbf{\imath}} + \cos\theta\,\hat{\mathbf{\jmath}}\right)} \\
\ddot{\mathbf{r}} &= g_p\left(\cos\theta\,\hat{\mathbf{\imath}} + \sin\theta\,\hat{\mathbf{\jmath}}\right) \qquad (1.1)
\end{aligned}
$$

Sendo $\mathbf{p} = m\,\mathbf{v} = m\,\dot{\mathbf{r}}$, e a derivada do produto vetorial

$$\frac{\mathrm{d}\mathbf{L}}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left[\mathbf{r}\times\mathbf{p}\right] = \frac{\mathrm{d}\mathbf{r}}{\mathrm{d}t}\times\mathbf{p} + \mathbf{r}\times\frac{\mathrm{d}\mathbf{p}}{\mathrm{d}t}$$

substituindo $\mathbf{p} = m\,\dot{\mathbf{r}}$, temos

$$
\begin{aligned}
&= \cancelto{0}{\frac{\mathrm{d}\mathbf{r}}{\mathrm{d}t}\times m\,\dot{\mathbf{r}}} + \mathbf{r}\times\frac{\mathrm{d}m\,\dot{\mathbf{r}}}{\mathrm{d}t} \\
&= m\,\mathbf{r}\times\ddot{\mathbf{r}}
\end{aligned}
$$

substituindo 1.1 e tomando o produto vetorial, temos

$$
\begin{aligned}
&= m\begin{vmatrix} \hat{\mathbf{\imath}} & \hat{\mathbf{\jmath}} & \hat{\mathbf{k}} \\ r\,\cos\theta & r\,\sin\theta & 0 \\ g_p\,\cos\theta & g_p\,\sin\theta & 0 \end{vmatrix} \\
\frac{\mathrm{d}\mathbf{L}}{\mathrm{d}t} &= m\,\hat{\mathbf{k}}\,\Big(r\,g_p\left(\cos\theta\,\sin\theta - \cos\theta\,\sin\theta\right)\Big) = \mathbf{0}
\end{aligned}
$$

Pelo item anterior, sabemos que o movimento ocorre num plano. Assim, estabeleçamos espertamente um referencial Oxy com origem inicialmente em Júpiter[2], e cujo eixo Ox seja paralelo a seu momento final.

(c) Calcule, nesse referencial, a velocidade final da sonda em termos das velocidades iniciais da sonda e de Júpiter. Considere que a massa da *New Horizons* é desprezível em relação à de um planeta.

Resolução:

Sejam m a massa da sonda, M a massa do planeta, e $\mathbf{v}, \mathbf{p}$ e $\mathbf{V}, \mathbf{P}$ suas respectivas velocidades e momentos em relação ao Sol.

Posicionamos o eixo de coordenadas de tal forma que Ox seja paralela ao momento final de Júpiter $\mathbf{P_f}$. Seu momento inicial $\mathbf{P_i}$, e os momentos inicial e final da sonda ($\mathbf{p_i}$ e $\mathbf{p_f}$) fazem ângulos θ, α e β, respectivamente, com Ox.

Por transformações de Galileu, sabemos que a velocidade inicial da sonda no referencial do planeta será $\mathbf{v_i'} = \mathbf{v_i} - \mathbf{V_i}$.

Considerando uma colisão elástica entre os corpos, como no item a, por conservação de momento, temos:

$$\mathbf{p_i} + \mathbf{P_i} = \mathbf{p_f} + \mathbf{P_f} \implies \mathbf{p_f} - \mathbf{p_i} = -M\,\left(\mathbf{V_f} - \mathbf{V_i}\right)$$

E, como $M \gg m$ e o encontro é muito rápido, a sonda afeta a velocidade do planeta desprezivelmente,

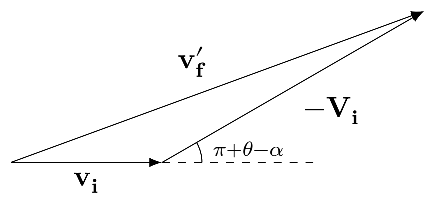
[2] A interação entre a sonda e Júpiter dura alguns dias, bastante pouco face à translação joviana de quase 12 anos. Assim, podemos considerar que, ao longo do processo de colisão, o referencial não estará acelerado pela gravidade do Sol.

portanto, podemos considerar $\mathbf{p'_f} \approx \mathbf{p'_i}$ no referencial do planeta. Dessa forma

$$\mathbf{v'_f} = \mathbf{v'_i}$$
$$\mathbf{v'_f} = \mathbf{v_i} - \mathbf{V_i}$$

Porém, como a sonda muda de direção no encontro, essas velocidades não são iguais em módulo, dessa forma

$$|\mathbf{v'_f}| = v_i^2 + V_i^2 - 2v_i\,V_i \cos{(\theta - \alpha)} \qquad (1.2)$$



(d) Júpiter percorre sua órbita a uma velocidade média de 13 km/s. Comente qual seria a situação mais favorável para a assistência gravitacional (e.g. em termos das velocidades dos corpos envolvidos) e diga, nesse caso hipotético, qual seria a variação da velocidade da *New Horizons* no referencial do Sol.

Resolução:

Como a velocidade final no referencial do Sol será

$$|\mathbf{v_f} - \mathbf{V_f}| \approx |\mathbf{v_f} - \mathbf{V_i}| = v_i^2 + V_i^2 - 2v_i\,V_i \cos{(\theta - \alpha)}$$
$$v_f^2 + V_i^2 - 2v_f\,V_i \cos{(\beta - \theta)} = v_i^2 + V_i^2 - 2v_i\,V_i \cos{(\theta - \alpha)}$$
$$\left(v_f - (V_i \cos{(\beta - \theta)})\right)^2 = v_i^2 - 2v_i\,V_i \cos{(\theta - \alpha)} + \left(V_i \cos{(\beta - \theta)}\right)^2$$
$$v_f = \sqrt{v_i^2 - 2v_i\,V_i \cos{(\theta - \alpha)} + \left(V_i \cos{(\beta - \theta)}\right)^2} + V_i \cos{(\beta - \theta)}$$

Podemos ver que o valor máximo da raiz, em relação aos ângulos, se dá quando $\theta - \alpha = \pi$ e $\beta - \theta = 0$, o que corresponde à sonda entrar em contato com o planeta com velocidade contrária a sua, e sair no mesmo sentido e direção de viagem do planeta. Desse modo, sua variação de velocidade seria:

$$\begin{aligned} \Delta v &= v_{f\,max} - v_i \\ &= \sqrt{v_i^2 + 2v_i\,V_i + V_i^2} + V_i - v_i \\ \Delta v &= v_i + V_i + V_i - v_i = 2V_i \\ &= 2 \cdot 13 = 26\,\text{km/s} \end{aligned} \qquad (1.3)$$

(e) Sabendo que a *New Horizons* tem massa de 480 kg e tem velocidade de 4 km/s antes de utilizar a assistência gravitacional, estime quanto combustível seria necessário para que apenas a sonda[3] ganhasse a mesma velocidade adquirida via assistência gravitacional no caso mais favorável. Considere que seria utilizado como combustível LOX/LH2 com 100% de eficiência (o que claramente não é possível).

Dados: A reação de combustão é dada por $2H_2 + O_2 \rightarrow 2H_2O +$ energia, sendo que o calor específico de combustão da reação é de 141,8 MJ/kg.

Resolução:

Pelo item anterior, a sonda ganharia 26 km/s.

[3]Como trata-se de uma estimativa, estamos desconsiderando que a *New Horizons* precisaria levar consigo a massa de combustível. Portanto a quantidade estimada de combustível é subestimada.

Considerando a variação de energia cinética da sonda onde ela ganharia essa velocidade, temos

$$\begin{aligned}\Delta K &= \frac{1}{2}m\left(v_f^2 - v_i^2\right)\\ &= \frac{1}{2}480\left((26+4)^2 - 4^2\right)\\ &= 240(26+4-4)(26+4+4) = 212\,160\,\mathrm{MJ}\end{aligned}$$

portanto, precisaríamos de, aproximadamente

$$\frac{212\,160}{141{,}8} = 1496{,}2\,\mathrm{kg}$$

de combustível.