Resolução – Prova II (Matemática I)

4 de novembro / Isabella B. Amaral – 118010773

Nota: Todos os teoremas e axiomas referenciados nessa prova são citados pelo Apostol nos dois primeiros capítulos do livro de cálculo I, a não ser que seja explicitado o contrário.

Nota 2: As resoluções dessa prova foram fortemente inspiradas por colegas, por conta da dinâmica adotada na resolução.

Questão 1

Calcular a área entre os gráficos de $f(x) = \sin x, 0 \leqslant x \leqslant \pi$ e $g(x) = 2x(x-\pi), 0 \leqslant x \leqslant \pi$.

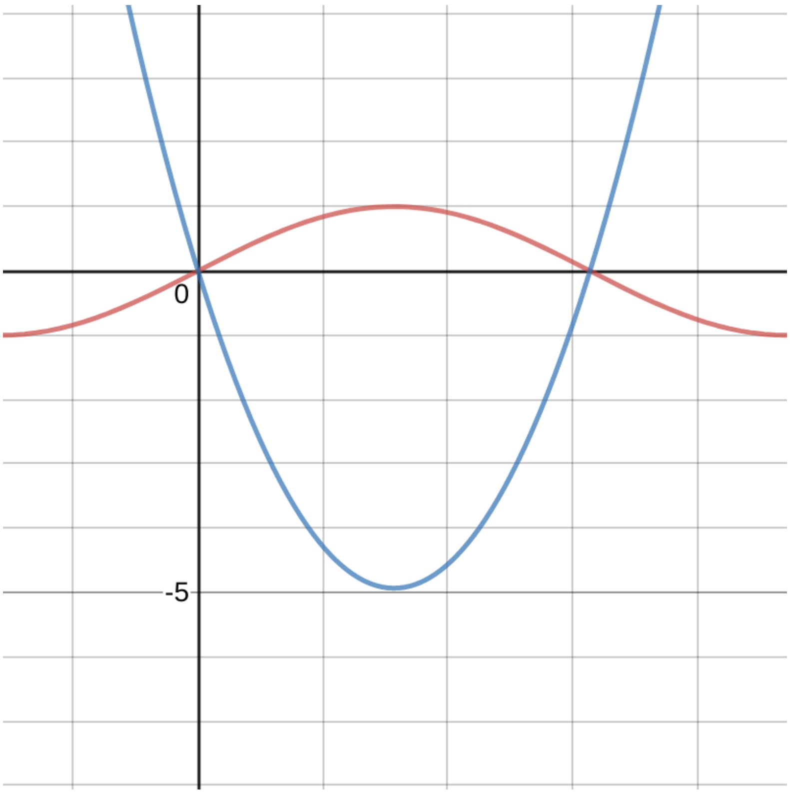
Resolução:

Sabemos que para $0 \leqslant x \leqslant \pi$, $\sin x \geqslant 0$ e $2x(x-\pi) \leqslant 0$, por uma simples análise gráfica, e que as únicas intercessões entre as funções se dão para $x = 0$ e $x = \pi$, então podemos integrar a região entre elas simplesmente fazendo

$$\int_0^\pi \sin x - 2x(x-\pi)\,\mathrm{d}x$$

pela propriedade aditiva

$$\begin{aligned}
&\iff \int_0^\pi \sin x\,\mathrm{d}x - \int_0^\pi 2x^2\,\mathrm{d}x + \int_0^\pi 2x\,\pi\,\mathrm{d}x \\
&\implies (-\cos x)\Bigg|_0^\pi - \frac{2}{3}x^3\Bigg|_0^\pi + x^2\,\pi\Bigg|_0^\pi \\
&\implies (-\cos\pi - (-\cos 0)) - \left(\frac{2}{3}\pi^3 - \frac{2}{3}0^3\right) + \left(\pi^2\,\pi - 0^2\,\pi\right) \\
&\quad = 2 + \frac{1}{3}\pi^3.
\end{aligned}$$



Questão 2

Calcular $\int_{-17\pi}^{17\pi} x^2 \sin^{17}(3x)\cos^3(17x)\,\mathrm{d}x$.

Resolução:

Pela propriedade aditiva das integrais, temos

$$\int_{-17\pi}^{17\pi} x^2 \sin^{17}(3x)\cos^3(17x)\,\mathrm{d}x = \int_0^{17\pi} x^2 \sin^{17}(3x)\cos^3(17x)\,\mathrm{d}x + \int_{-17\pi}^{0} x^2 \sin^{17}(3x)\cos^3(17x)\,\mathrm{d}x,$$

e, por definição,

$$\int_{-17\pi}^{0} x^2 \sin^{17}(3x)\cos^3(17x)\,\mathrm{d}x = \int_0^{17\pi} (-x)^2 \sin^{17}(-3x)\cos^3(-17x)\,\mathrm{d}x.$$

Sendo $(-x)^2 = x^2$, $\cos x$ uma função par e $\sin x$ uma função ímpar, temos

$$\int_0^{17\pi} (-x)^2 \sin^{17}(-3x)\cos^3(-17x)\,\mathrm{d}x = \int_0^{17\pi} x^2\left(-\sin(3x)\right)^{17}\cos^3(17x)\,\mathrm{d}x$$

e, portanto, a integral desejada é da forma

$$\int_0^a f(x)\,\mathrm{d}x - \int_0^a f(x)\,\mathrm{d}x$$

que iguala zero.

Questão 3

Seja $\phi(x) = x - \lfloor x \rfloor, x \in \mathbb{R}$.

(a) Calcule $T \in \mathbb{R}$ tal que $\phi(x)\,\mathrm{d}x = \sqrt{17}$.

(b) Tome $a \in \mathbb{R}$ e calcule $\lambda \in \mathbb{R}$ tal que $\int_a^{a+\lambda} \phi(x)\,\mathrm{d}x = \sqrt{2}$.

Questão 4

Sejam n e m naturais não nulos. Calcule:

(a) $\int_{-\pi}^{\pi} \cos(n\,x)\sin(m\,x)\,\mathrm{d}x$,

Resolução:

Tomando α e β números arbitrários, temos

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{2}\left(\sin(\alpha+\beta)+\sin(\alpha-\beta)\right)\\
&=\frac{1}{2}\left(\sin\alpha\cos\beta+\sin\beta\cos\alpha+\sin\alpha\cos\beta-\sin\beta\cos\alpha\right)\\
&=\sin\alpha\cos\beta,
\end{aligned} \tag{4.1}$$

que é conhecida como transformação de soma em produto.

Tomando $n = (a+b)/2$ e $m = (a-b)/2$,[1] para a, b arbitrários, temos, pela transformação de soma em produto:

$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos(n\,x)\sin(m\,x)\,\mathrm{d}x = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{1}{2}\left(\sin(a\,x)+\sin(b\,x)\right)\mathrm{d}x.$$

O que nos dá o resultado

$$\frac{1}{2}\left(\left(-\frac{1}{a}\cos(a\,x)\right)\Bigg|_{-\pi}^{\pi}+\left(-\frac{1}{b}\cos(b\,x)\right)\Bigg|_{-\pi}^{\pi}\right) = -\frac{1}{2}\left(\frac{1}{a}\left(\cos(a\pi)-\cos(-a\pi)\right)+\frac{1}{b}\left(\cos(b\pi)-\cos(-b\pi)\right)\right)$$

que iguala zero.

(b) $\int_{-\pi}^{\pi} \cos(n\,x)\cos(m\,x)\,\mathrm{d}x$ e $\int_{-\pi}^{\pi} \sin(n\,x)\sin(m\,x)\,\mathrm{d}x$, se $n \neq m$,

Resolução:

Tomando α e β números arbitrários, temos

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{2}\left(\cos(\alpha+\beta)+\cos(\alpha-\beta)\right)\\
&=\frac{1}{2}\left(\cos\alpha\cos\beta-\sin\beta\sin\alpha+\cos\alpha\cos\beta+\sin\beta\sin\alpha\right)\\
&=\cos\alpha\cos\beta,
\end{aligned} \tag{4.2}$$

e, também

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{2}\left(\cos(\alpha-\beta)-\cos(\alpha+\beta)\right)\\
&=\frac{1}{2}\left(\cos\alpha\cos\beta+\sin\beta\sin\alpha-\cos\alpha\cos\beta+\sin\beta\sin\alpha\right)\\
&=\sin\alpha\sin\beta,
\end{aligned} \tag{4.3}$$

[1] Note que $a = n + m, b = n - m$.

Tomando $n = (a+b)/2$ e $m = (a-b)/2$, para a, b arbitrários e aplicando 4.2 na integral do produto dos cossenos, temos

$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos(n\,x)\cos(m\,x)\,\mathrm{d}x = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{1}{2}\left(\cos(a\,x) + \cos(b\,x)\right)\mathrm{d}x.$$

O que nos dá o resultado

$$\frac{1}{2}\left(\left(\frac{1}{a}\sin(a\,x)\right)\Bigg|_{-\pi}^{\pi} + \left(\frac{1}{b}\sin(b\,x)\right)\Bigg|_{-\pi}^{\pi}\right) =$$
$$\frac{1}{2}\left(\frac{1}{a}\left(\sin(a\pi) - \sin(-a\pi)\right) + \frac{1}{b}\left(\sin(b\pi) - \sin(-b\pi)\right)\right) =$$
$$= \frac{\sin(a\pi)}{a} + \frac{\sin(b\pi)}{b}$$

Aplicando 4.3 na integral do produto dos senos, temos

$$\int_{-\pi}^{\pi} \sin(n\,x)\sin(m\,x)\,\mathrm{d}x = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{1}{2}\left(\cos(b\,x) - \cos(a\,x)\right)\mathrm{d}x.$$

O que nos dá o resultado

$$\frac{1}{2}\left(\left(\frac{1}{b}\sin(b\,x)\right)\Bigg|_{-\pi}^{\pi} - \left(\frac{1}{a}\sin(a\,x)\right)\Bigg|_{-\pi}^{\pi}\right) =$$
$$\frac{1}{2}\left(\frac{1}{b}\left(\sin(b\pi) - \sin(-b\pi)\right) - \frac{1}{a}\left(\sin(a\pi) - \sin(-a\pi)\right)\right) =$$
$$= \frac{\sin(b\pi)}{b} - \frac{\sin(a\pi)}{a}.$$

(c) $\int_{-\pi}^{\pi} \cos^2(n\,x)\,\mathrm{d}x$ e $\int_{-\pi}^{\pi} \sin^2(n\,x)\,\mathrm{d}x$.

Resolução:

Basta notar que $\cos^2(n\,x) = \cos(n\,x)\cos(m\,x)$ para $n = m$ (idem para os senos). Dessa forma temos um caso particular da questão anterior, e, sendo $n = a/2$, temos

$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos(n\,x)\cos(n\,x)\,\mathrm{d}x = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{1}{2}\cos(a\,x)\,\mathrm{d}x$$

o que nos dá o resultado

$$\frac{1}{2}\frac{1}{a}\sin(a\,x)\Bigg|_{-\pi}^{\pi} = \frac{1}{a}\sin(a\,\pi),$$

e

$$\int_{-\pi}^{\pi} \sin(n\,x)\sin(n\,x)\,\mathrm{d}x = \int_{-\pi}^{\pi} -\frac{1}{2}\cos(a\,x)\,\mathrm{d}x$$

o que nos dá o resultado

$$-\frac{1}{2}\frac{1}{a}\sin(a\,x)\Bigg|_{-\pi}^{\pi} = -\frac{1}{a}\sin(a\,\pi).$$

Questão 5

Use o que foi visto na disciplina e calcule $\sin \dfrac{\pi}{3}$.

Resolução:

Sabemos o cosseno de π, dessa forma, encontrando o cosseno de arco triplo, podemos encontrar a resposta desejada, portanto:

$$\begin{aligned}
\sin(3x) = \sin(2x + x) &= \sin 2x \cos x + \cos 2x \sin x \\
&= (2 \sin x \cos x) \cos x + (\cos^2 x - \sin^2 x) \sin x \\
&= 3 \sin x \cos^2 x - \sin^3 x = 3 \sin x \left(1 - \sin^2 x\right) - \sin^3 x \\
&= 3 \sin x - 4 \sin^3 x \implies \sin \pi \qquad \sin(\pi/3) \left(3 - 4 \sin^2(\pi/3)\right) = 0,
\end{aligned}$$

Como $\sin(\pi/3) = 0$ é uma solução trivial, temos $\sin^2(\pi/3) = 3/4 \implies \sin(\pi/3) = \pm\sqrt{3/4}$. Porém, como estamos analisando um ângulo no primeiro quadrante, temos que $\sin \pi/3 \geqslant 0$, dessa forma: $\sin(\pi/3) = \sqrt{3}/2$.

Questão 6

Seja $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ uma função integrável. Prove que $\int_a^b f(x)\, \mathrm{d}x = (b - a) \int_0^1 f(a + (b - a)x)\, \mathrm{d}x$ (use o que se viu na disciplina até aqui).

Resolução:

Essa demonstração segue trivialmente de uma expansão e translação da função:

1. Primeiro vamos expandir a função por um fator k (teorema 1.19):

$$\int_a^b f(x)\, \mathrm{d}x = \frac{1}{k} \int_{k\,a}^{k\,b} f\left(\frac{x}{k}\right) \mathrm{d}x,$$

onde $k = 1/(b - a)$.

2. Depois vamos transladar a função por um fator c (teorema 1.18):

$$\frac{1}{k} \int_{k\,a}^{k\,b} f\left(\frac{x}{k}\right) \mathrm{d}x = \frac{1}{k} \int_{k\,a+c}^{k\,b+c} f\left(\frac{x - c}{k}\right) \mathrm{d}x,$$

onde $c = -a/(b - a)$.

Dessa forma, temos

$$(b - a) \int_{a/(b-a)-a/(b-a)}^{b/(b-a)-a/(b-a)} f\left((b - a)\left(x + \frac{a}{(b - a)}\right)\right) \mathrm{d}x = (b - a) \int_0^1 f(a + (b - a)x)\, \mathrm{d}x.$$

$\square$

Questão 7

(a) Seja $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ uma função integrável com $f(x) \geqslant 0$, para todo $x \in [a, b]$. Defina $A(x) = \int_a^x f(s)\, \mathrm{d}s$, $x \in [a, b]$. Prove que A é integrável.

(b) Seja $g : [a, b] \to R$ uma função integrável e defina $G(x) = \int_0^x f(s)\,\mathrm{d}s, x \in a[a, b]$. Prove que G é integrável.

Questão 8

Sejam $p > 0$ e $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ periódica de período p (isto é, $f(x+p) = f(x)$, para todo $x \in \mathbb{R}$) e integrável em todo intervalo $[a, b]$ da reta. Mostre que, fazendo $g(x) = \int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t$ e $A = g(p/2)$, tem–se:

1. $g(x+p) - g(x) = g(p)$, para todo $x \in \mathbb{R}$.

Resolução:

Tomando a diferença das integrais avaliadas, temos

$$g(x+p) - g(x) = \int_0^{x+p} f(t)\,\mathrm{d}t - \int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t$$

translacionando a primeira integral por $-p$, temos

$$\begin{aligned} &= \int_{-p}^{x} f(t+p)\,\mathrm{d}t - \int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t \\ &= \int_{-p}^{0} f(t+p)\,\mathrm{d}t + \int_0^x \underbrace{f(t+p)}_{=f(t)}\,\mathrm{d}t - \int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t \end{aligned}$$

translacionando a primeira integral por p, temos

$$= \int_p^0 f(t)\,\mathrm{d}t$$

$\square$

2. Prove que g é periódica se, e só se, $\int_0^p f(t)\,\mathrm{d}t = 0$.

Resolução:

Se $g(x+p) - g(x) = g(p)$, segue que se $g(p) = 0$, $g(x+p) = g(x)$, que é a nossa definição de periodicidade. E se $g(x+p) = g(x)$, temos, similarmente à letra (a):

$$\begin{aligned} \int_0^{x+p} f(t)\,\mathrm{d}t &= \int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t \\ \implies \int_{-p}^{x} f(t+p)\,\mathrm{d}t &= \int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t \\ \implies \int_{-p}^{0} f(t+p)\,\mathrm{d}t + \int_0^x \underbrace{f(t+p)}_{=f(t)}\,\mathrm{d}t &= \int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t \\ \implies \int_0^p f(t)\,\mathrm{d}t + \int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t &= \int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t \\ \implies \int_0^p f(t)\,\mathrm{d}t &= 0 \end{aligned}$$

$\square$

3. Suponha que f é uma função par e calcule $g(n\,p/2)$ em função de A, para $n \in \mathbb{N}$ (sugestão: considere inicialmente o caso $n = 2$ e resolva-o, o resto deve ser simples).

Resolução:

Tomando $n = 2$, temos

$$g(2p/2) = g(p) = \int_0^p f(t)\,\mathrm{d}t,$$

translacionando por $-p/2$, temos, pela paridade da função

$$\int_{-p/2}^{p/2} f(t + p/2)\,\mathrm{d}t = 2\int_0^{p/2} f(t + p/2)\,\mathrm{d}t$$

transladando por $p/2$, temos

$$2\int_{p/2}^{p} f(t)\,\mathrm{d}t = 2\int_0^p f(t)\,\mathrm{d}t - 2\int_0^{p/2} f(t)\,\mathrm{d}t.$$

Ou seja, vale que $g(2p/2) = g(p) = 2g(p) - 2A \iff g(p) = 2A$.

Assumindo $g(n\,p/2) = n\,A$, vamos provar que $g\left((n+1)p/2\right) = (n+1)\,A$:

$$\int_0^{n\,p/2} f(t)\,\mathrm{d}t = n\int_0^{p/2} f(t)\,\mathrm{d}t$$

$$\int_0^{n\,p/2} f(t)\,\mathrm{d}t + \int_0^{p/2} f(t)\,\mathrm{d}t = n\int_0^{p/2} f(t)\,\mathrm{d}t + \int_0^{p/2} f(t)\,\mathrm{d}t$$

$$\int_0^{n\,p/2} f(t)\,\mathrm{d}t + \int_{n\,p/2}^{n\,p/2+p/2} f(t - n\,p/2)\,\mathrm{d}t = (n+1)\int_0^{p/2} f(t)\,\mathrm{d}t.$$

Avaliando a paridade de $\int_{n\,p/2}^{n\,p/2+p/2} f(t - n\,p/2)\,\mathrm{d}t$, temos

- Para $n = 2m$ (par), temos:

$$\int_{n\,p/2}^{n\,p/2+p/2} f(t - 2m\,p/2)\,\mathrm{d}t = \int_{n\,p/2}^{n\,p/2+p/2} f(t)\,\mathrm{d}t,$$

ou seja

$$\int_0^{n\,p/2} f(t)\,\mathrm{d}t + \int_{n\,p/2}^{n\,p/2+p/2} f(t)\,\mathrm{d}t = \int_0^{(n+1)p/2} f(t)\,\mathrm{d}t = (n+1)\int_0^{p/2} f(t)\,\mathrm{d}t.$$

$\square$

- Para $n = 2m - 1$ (ímpar) eu não sei.

Questão 9

Sejam f e g funções definidas no intervalo $[0, 1]$ tomando valores em $\mathbb{R}$, ambas limitadas. Suponha que $f(x)$ é integrável.

(a) Suponha que $f(x) = g(x)$, para todo $x \in [0, 1]\backslash F$ onde $F \subset [0, 1]$ é um conjunto finito. Prove que $g(x)$ é integrável e $\int_0^1 g(x)\,\mathrm{d}x = \int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x$.

(b) Suponha que $f(x) = g(x)$, se $x \in [0, 1]\backslash \{1/n, n \in \mathbb{N}^\star\}$. Prove que $g(x)$ é integrável e $\int_0^1 g(x)\,\mathrm{d}x = \int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x$.