Resolução – Provinha XI (Física I – 4302111) Nota: 8,5

Isabella B. – 11810773

Questão 1

Considere uma bola de neve que rola **sem deslizar** em uma ladeira que faz um ângulo θ com a horizontal. Durante o percurso, devido à neve depositada na superfície, não só a velocidade, como também a **massa** da esfera variam no tempo.

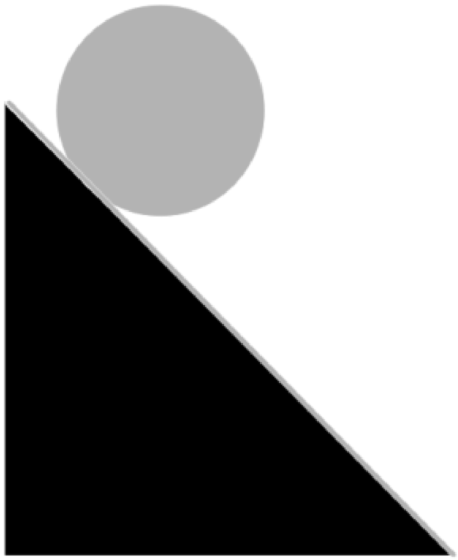


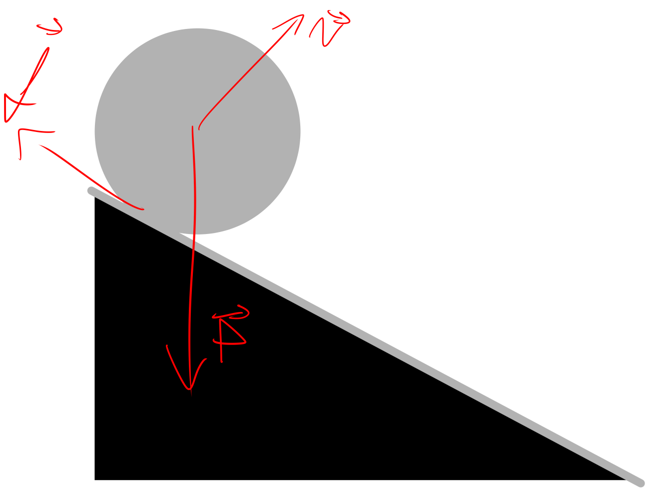
Figura 1: Representação do problema.

(a) Faça o desenho do diagrama de forças agindo na esfera e escreva as equações de movimento na direção paralela à ladeira.

Dica: Lembre-se que a massa da esfera é **variável**.

Resolução:

Sabemos que a gravidade **g** atua na bola de neve, assim como uma força de atrito **f** (pois ela não desliza), portanto:



Dessa forma, a equação de movimento é

$$\mathbf{P} + \mathbf{N} + \mathbf{f} = \frac{\mathrm{d}\mathbf{p}}{\mathrm{d}t} \tag{1.1}$$

onde $\mathbf{p}$ é o momento da bola e $\mathbf{P}$ é seu peso.

Adotando um referencial onde o eixo x é paralelo ao plano que a bola rola, com o sentido positivo apontado para a descida, e o eixo y é perpendicular, na direção da normal, positivo para baixo, temos a equação simplificada

$$m\, g \sin\theta - f = \frac{\mathrm{d}\,(m\, v)}{\mathrm{d}t} \tag{1.2}$$

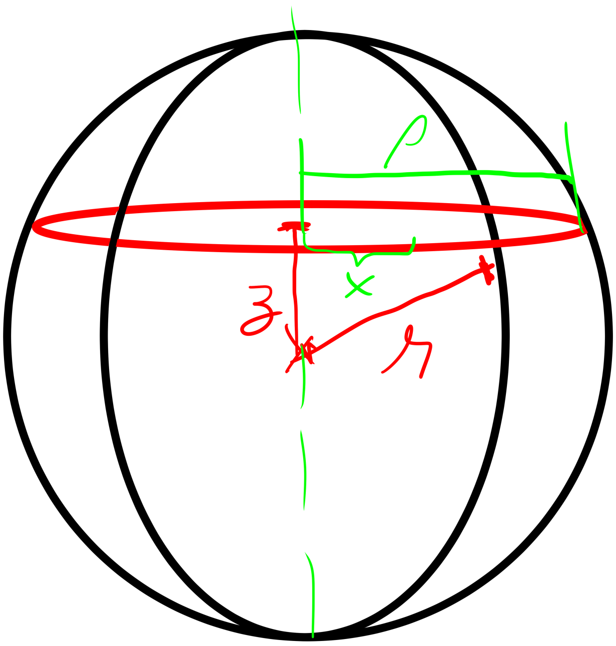
onde m é a massa em função do tempo, e os módulos dos vetores são denotados por $|\mathbf{a}| = a$.

(b) Mostre que o momento de inércia de uma esfera rígida que gira ao redor do eixo que passa pelo seu centro é:

$$I = \frac{2m\, r^2}{5} \tag{1.3}$$

Obs: O resultado pode ser utilizado nos próximos exercícios mesmo que não consiga resolver este item.

Resolução:



Para encontrar o momento de inércia da situação desejada, podemos considerar infinitos discos com momento de inércia dI.
Pela relação de densidade superficial, temos

$$\mathrm{d}m_d = \frac{m_d}{A}\,\mathrm{d}A = \frac{m_d\, 2\pi\, x\,\mathrm{d}x}{\pi\, r^2} = \frac{2m_d\, x\,\mathrm{d}x}{\rho^2}$$

onde, x e ρ são respectivamente a distância até o eixo de rotação e o raio de um disco à uma altura z do centro da esfera, e m_d é a massa do disco.
Dessa forma, podemos integrar o momento de inércia para um único disco pela relação

$$I_d = \int_0^\rho x^2\,\mathrm{d}m = \int_0^\rho \frac{2m_d\, x^3\,\mathrm{d}x}{\rho^2} = \frac{1}{2} m_d\, \rho^2.$$

Portanto, tomando o diferencial $\mathrm{d}I = \rho^2\,\mathrm{d}m/2$, onde d$m$ é o diferencial de massa da esfera, dado por

$$\mathrm{d}m = \frac{m}{V}\,\mathrm{d}V = \frac{m\,\pi\,\rho^2\,\mathrm{d}z}{4\pi\, r^3/3} = \frac{3m\,\rho^2\,\mathrm{d}z}{4r^3}$$

Por Pitágoras, sabemos que $\rho^2 = r^2 - z^2$, portanto

$$\mathrm{d}I = \frac{1}{2}\rho^2 \frac{3m\,\rho^2\,\mathrm{d}z}{4r^3} = \frac{3m\,\left(r^2 - z^2\right)^2\,\mathrm{d}z}{8r^3}$$

e

$$\begin{aligned} I &= \int_{-r}^{r} \frac{3m\,\left(r^4 - 2r^2\,z^2 + z^4\right)}{8r^3}\,\mathrm{d}z \\ &= \left(\frac{3m\,\left(r^4\,z - 2r^2\,z^3/3 + z^5/5\right)}{8r^3}\right)\Bigg|_{-r}^{r} \\ &= \frac{3m\,\left(2r^5 - 4r^5/3 + 2r^5/5\right)}{8r^3} \\ &= \frac{3m\,r^2\,(30 - 20 + 6)}{8\cdot 3\cdot 5} \\ I &= \frac{2m\,r^2}{5} \end{aligned}$$

(c) Considerando o centro como referência calcule o torque resultante na esfera. Utilize seu resultado para mostrar que a equação de movimento na direção paralela à ladeira pode ser reescrita como:

$$m\,g\sin\theta - \frac{I}{r}\frac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}t} - \frac{\omega}{r}\frac{\mathrm{d}I}{\mathrm{d}t} = m\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} + v\frac{\mathrm{d}m}{\mathrm{d}t} \tag{1.4}$$

Resolução:

Sabemos que a força que causa rotação é a força de atrito $\mathbf{f}$, sendo o momento angular $L = I\,\omega$, temos que o módulo do torque $\boldsymbol{\tau}$ é dado por

$$\tau = r\,f = \frac{\mathrm{d}L}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}\,(I\,\omega)}{\mathrm{d}t} = I\frac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}t} + \omega\frac{\mathrm{d}I}{\mathrm{d}t}$$

portanto, substituindo em 1.1, temos

$$P\sin\theta - \left(\frac{I}{r}\frac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}t} + \frac{\omega}{r}\frac{\mathrm{d}I}{\mathrm{d}t}\right) = \frac{\mathrm{d}\,(m\,v)}{\mathrm{d}t}\,.$$

Sendo o peso $P = m\,g$, aplicando a regra da cadeia no momento, temos

$$m\,g\sin\theta - \frac{I}{r}\frac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}t} - \frac{\omega}{r}\frac{\mathrm{d}I}{\mathrm{d}t} = m\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} + v\frac{\mathrm{d}m}{\mathrm{d}t}\,.$$

□

(d) Substitua o momento de inércia encontrado em b e utilize o fato de que a esfera rola sem deslizar para reescrever 1.4 como:

$$m\,g\,r\sin\theta - \frac{7}{5}v\,r\frac{\mathrm{d}m}{\mathrm{d}t} - \frac{2}{5}m\,v\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t} = \frac{7}{5}m\,r\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} \tag{1.5}$$

Resolução:

Substituindo 1.4 em 1.5, temos

$$m\,g\sin\theta - \frac{\left(2m\,r^2/5\right)}{r}\frac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}t} - \frac{\omega}{r}\frac{\mathrm{d}\left(2m\,r^2/5\right)}{\mathrm{d}t} = m\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} + v\frac{\mathrm{d}m}{\mathrm{d}t}$$

sendo $\omega = v/r$, temos

$$m\,g\,r\sin\theta - \frac{2m\,r^2}{5}\frac{\mathrm{d}\,(v/r)}{\mathrm{d}t} - \frac{v}{r}\left(\frac{\mathrm{d}m}{\mathrm{d}t}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}m}\left[\frac{2m\,r^2}{5}\right] + \frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}\left[\frac{2m\,r^2}{5}\right]\right) = r\left(m\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} + v\frac{\mathrm{d}m}{\mathrm{d}t}\right)$$

$$m\,g\,r\sin\theta - \frac{2m\,r^2}{5}\left(\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}v}\left[\frac{v}{r}\right] + \frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}\left[\frac{v}{r}\right]\right) - \frac{v}{r}\left(\frac{\mathrm{d}m}{\mathrm{d}t}\frac{2r^2}{5} + \frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t}\frac{4m\,r}{5}\right) = r\left(m\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} + v\frac{\mathrm{d}m}{\mathrm{d}t}\right)$$

$$m\,g\,r\sin\theta - \frac{2m\,r^2}{5}\left(\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}\frac{1}{r} - \frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t}\frac{v}{r^2}\right) - v\left(\frac{\mathrm{d}m}{\mathrm{d}t}\frac{2r}{5} + \frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t}\frac{4m}{5}\right) = r\left(m\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} + v\frac{\mathrm{d}m}{\mathrm{d}t}\right)$$

$$m\,g\,r\sin\theta - v\,r\frac{\mathrm{d}m}{\mathrm{d}t}\left(1 + \frac{2}{5}\right) - m\,v\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t}\left(\frac{4}{5} - \frac{2}{5}\right) = m\,r\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}\left(1 + \frac{2}{5}\right)$$

$$m\,g\,r\sin\theta - \frac{7}{5}v\,r\frac{\mathrm{d}m}{\mathrm{d}t} - \frac{2}{5}m\,v\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t} = \frac{7}{5}m\,r\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}$$

(e) Assumindo que a densidade ρ da esfera seja constante. Encontre a taxa de variação da massa com o raio $\frac{\mathrm{d}m}{\mathrm{d}r}$. Substitua em 1.5 e mostre que a equação se torna:

$$g\,r\sin\theta - \frac{23}{5}v\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t} = \frac{7}{5}r\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} \tag{1.6}$$

Resolução:

Pela relação da densidade, temos

$$m = \rho\,V = \rho\,\frac{4}{3}\pi\,r^3$$

derivando com respeito ao raio

$$\frac{\mathrm{d}m}{\mathrm{d}r} = \rho\,4\pi\,r^2$$
$$\frac{\mathrm{d}m}{\mathrm{d}r} = \frac{m}{4\pi\,r^3/3}\,4\pi\,r^2 = \frac{3m}{r}. \tag{1.7}$$

Retomando 1.6

$$g\,r\sin\theta - \frac{1}{m}\frac{7}{5}v\,r\frac{\mathrm{d}m}{\mathrm{d}r}\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t} - \frac{2}{5}v\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t} = \frac{7}{5}r\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}$$

substituindo 1.7

$$g\,r\sin\theta - \left(\frac{1}{m}\frac{7}{5}r\frac{3m}{r} + \frac{2}{5}\right)v\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t} = \frac{7}{5}r\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}$$

$$g\,r\sin\theta - \frac{23}{5}v\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t} = \frac{7}{5}r\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}.$$

□

(f) Assumindo que o raio aumenta no tempo à uma taxa constante por rotação da esfera:

$$\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t} = \frac{k}{2\pi/\omega} = \frac{k\,v}{2\pi\,r} \tag{1.8}$$

A equação 1.6 pode ser escrita como:

$$g\sin\theta - \frac{23v^2\,k}{10\pi\,r^2} = \frac{7}{5}\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} \tag{1.9}$$

Essa equação diferencial não pode ser resolvida analiticamente[1]. Porém podemos estudar o comportamento da aceleração da bola de neve tomando a derivada de 1.9 em relação ao tempo. Feito isso, encontre a aceleração terminal em termos de g e θ.

Resolução:

Derivando 1.9 com relação ao tempo, temos

$$\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left[g\sin\theta - \frac{23v^2\,k}{10\pi\,r^2}\right] &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left[\frac{7}{5}\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}\right] \\
g\cos\theta - \frac{23k}{10\pi}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left[\left(\frac{v}{r}\right)^2\right] &= \frac{7}{5}\frac{\mathrm{d}^2v}{\mathrm{d}t^2} \\
g\cos\theta - \frac{23k}{10\pi}\left(2\frac{v}{r}\left(\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}v}\left[\frac{v}{r}\right] + \frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}\left[\frac{v}{r}\right]\right)\right) &= \frac{7}{5}\frac{\mathrm{d}^2v}{\mathrm{d}t^2} \\
g\cos\theta - \frac{23k}{5\pi}\frac{v}{r}\left(\frac{1}{r}\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} - \frac{k\,v}{2\pi\,r}\frac{1}{r^2}\right) &= \frac{7}{5}\frac{\mathrm{d}^2v}{\mathrm{d}t^2}
\end{aligned}$$

a aceleração terminal se dá quando ela não varia mais, portanto, $\frac{\mathrm{d}^2v}{\mathrm{d}t^2} = 0$

$$\begin{aligned}
g\cos\theta - \frac{23k\,v}{5\pi\,r}\left(\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} - \frac{k\,v}{2\pi\,r^2}\right) &= 0 \\
\frac{23k\,v}{5\pi\,r}\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} &= g\cos\theta + \frac{23k\,v}{5\pi\,r}\frac{k\,v}{2\pi\,r^2} \\
\boxed{\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = \frac{5\pi\,g\,r}{23k\,v}\cos\theta + \frac{k\,v}{2\pi\,r^2}}
\end{aligned}$$

[1] É possível reescrever a equação de forma a achar a velocidade e aceleração como funções do raio. Nesse caso existe solução analítica.