Resolução – Prova IV (Matemática I)

9 de janeiro / Isabella B. Amaral – 118010773

Nota: Todos os teoremas e axiomas referenciados nessa prova são citados pelo Apostol nos capítulos abordados em aula, a não ser que seja explicitado o contrário.

Definição 1. *Uma função $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ é dita Lipschtziana se, por definição, existe $M \geqslant 0$ tal que, para todos os x e y em I, tem-se que $|f(x) - f(y)| \leqslant M|x - y|$.*

Questão 1

Suponha que $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ é derivável, periódica de período $p > 0$ e que $f'(x)$ é contínua. Prove que f é Lipschitziana.

Resolução:

Pelo resultado da questão IV do grupo III da prova anterior, sabemos que uma função periódica é uniformemente contínua, dessa forma, temos que, dado um ε, haverá um $\delta = \varepsilon/M, M \in \mathbb{R}$ para o qual vale a continuidade da função. Dessa forma, podemos tomar a razão

$$\frac{|f(x) - f(y)|}{|x - y|} \leqslant \frac{\varepsilon}{\delta} = \frac{\varepsilon}{\varepsilon/M} = M \implies |f(x) - f(y)| \leqslant M|x - y|.$$

$\square$

Questão 2

Esboce o gráfico de $f(x) = \dfrac{(x-1)^3}{x^2+1}, x \in \mathbb{R}$.

Resolução:

Analisando $f(x) = 0$, temos

$$\frac{(x-1)^3}{x^2+1} = 0$$

como $x^2 = -1 \implies x \in \mathbb{C}$, podemos analisar somente o numerador sem perda de generalidade

$$(x-1)^3 = 0$$

que, pelo teorema fundamental da álgebra deveria ter 3 raízes, porém só possui uma real:

$$x = 1$$

Agora, analisamos o comportamento da primeira derivada da função. Sejam $g = (x-1)^3$ e $h = x^2 + 1$, de tal forma que $f = g/h$, temos, pelo teorema 4.1, temos

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left[\frac{(x-1)^3}{x^2+1}\right] = \frac{g'\,h - g\,h'}{h^2}$$

pela regra da cadeia

$$= \frac{\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left[(x-1)^3\right]\,h - g\,\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left[x^2+1\right]}{h^2} = \frac{3(x-1)^2\,h - g\,2x}{h^2}$$

substituindo

$$= \frac{3(x-1)^2\left(x^2+1\right)-(x-1)^3\,2x}{(x^2+1)^2} = \frac{(x-1)^2\left(x^2+2x+3\right)}{\left(x^2+1\right)^2},$$

fazendo $f' = 0$, temos

$$\frac{(x-1)^2\left(x^2+2x+3\right)}{\left(x^2+1\right)^2} = 0$$

como a análise está restrita à $\mathbb{R}$ podemos analisar somente o numerador sem perda de generalidade

$$(x-1)^2\left(x^2+2x+3\right) = 0$$

$$\implies (x-1)^2 = 0 \quad \text{ou} \quad \left(x^2+2x+3\right) = 0,$$

porém como para x^2+2x+3 o discriminante é menor que zero, não temos raízes reais, bastando analisar a parcela $(x-1)^2$, a qual tem raíz dupla para $x = 1$.

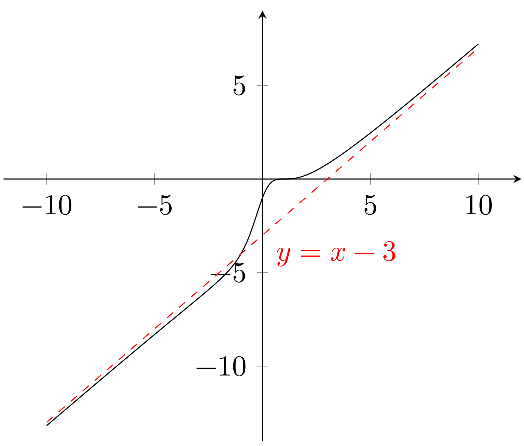
Analisando o comportamento da função para os limites de $x \to -\infty$ e $x \to \infty$, temos que o polinômio de grau superior no numerador faz a função tender à $-\infty$ e ∞ respectivamente, de tal forma que $(1, 0)$ deve ser ponto de inflexão e raíz.

Porém em se tratando de uma função racional, temos um comportamento assintótico que pode ser analisado através de divisão polinomial parcial, até a primeira potência negativa:

$$\begin{array}{r|l} & x - 3 \\ x^2+1 & x^3 - 3x^2 + 3x - 1 \\ & -x^3 \qquad\quad - x \\ \hline & -3x^2 + 2x - 1 \\ & 3x^2 \qquad\quad + 3 \\ \hline & 2x + 2 \end{array}$$

Como essa potência negativa desaparece no limite de $x \to -\infty$ ou no limite de $x \to \infty$ temos a assíntota $y = x - 3$ para a função.

Plotando, temos



Questão 3

Seja $f : (0, +\infty) \longrightarrow \mathbb{R}$ uma função contínua tal que $f(1) = 17$ e, se $x > 0$ e $y > 0$,

$$\int_1^{x\,y} f(t)\,\mathrm{d}t = y \int_1^{x} f(t)\,\mathrm{d}t + x \int_1^{y} f(t)\,\mathrm{d}t.$$

Determine $f(x)$, para $x > 0$.

Resolução:

Derivando a relação dada em termos de t, temos

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left[\int_1^{x\,y} f(t)\,\mathrm{d}t\right] = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left[y \int_1^{x} f(t)\,\mathrm{d}t + x \int_1^{y} f(t)\,\mathrm{d}t\right]$$

e, pelo primeiro teorema fundamental do cálculo

$$f(t) = \int_1^{x} f(t)\,\mathrm{d}t + y\,f(t) + \int_1^{y} f(t)\,\mathrm{d}t + x\,f(t)$$

$$\Longrightarrow\ (1 - y - x)\,f(t) = \int_1^{x} f(t)\,\mathrm{d}t + \int_1^{y} f(t)\,\mathrm{d}t$$

derivando novamente, temos

$$(1 - y - x)\,\frac{\mathrm{d}f(t)}{\mathrm{d}t} = 2f(t) \implies \frac{f'}{f} = \frac{2}{1 - y - x}$$

integrando ambos os lados com respeito a t

$$\int \frac{f'(t)}{f(t)}\,\mathrm{d}t = \int \frac{2}{1 - y - x}\,\mathrm{d}t$$

à esquerda temos a definição de logaritmo

$$\ln f(t) + C = \frac{2}{1 - y - x} t$$

sendo $\exp(x)$ a inversa de $\ln x$, temos

$$f(t) = \exp\left(\frac{2}{1 - y - x} t - C\right) = \underbrace{\exp(C)}_{=\gamma} \cdot \exp\left(\frac{2}{1 - y - x} t\right).$$

Avaliando $f(t = 1)$ temos que

$$f(1) = 17 = \gamma \exp\left(\frac{2}{1 - y - x}\right) \implies \gamma = \exp\left(-\frac{2}{1 - y - x}\right),$$

dessa forma, temos

$$f(t) = \exp\left(\frac{2}{1 - y - x}\,(t - 1)\right).$$

Questão 4

Dada uma esfera de raio $R > 0$, determine o raio r e a altura h do cilindro circular reto inscrito nessa esfera cuja superfície lateral $(2\pi\, r\, h)$ é máxima.

Resolução:

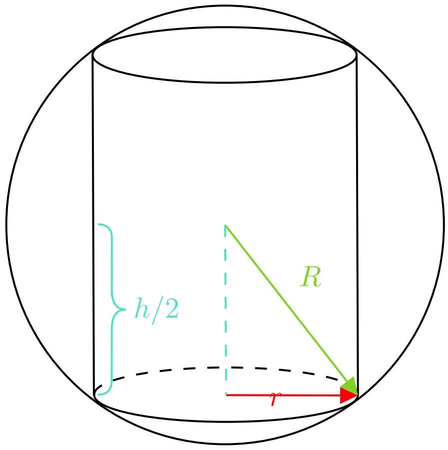
Pela construção geométrica do problema temos que

$$R^2 = \left(\frac{h}{2}\right)^2 + r^2. \tag{4.1}$$

Definindo uma função $r(h)$ e substituindo na relação que deve ser maximizada, temos

$$2\pi\, h \sqrt{R^2 - \left(\frac{h}{2}\right)^2} \tag{4.2}$$

Derivando podemos encontrar pontos de máximo e mínimo dessa função, portanto fazemos



$$\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}h}\left[2\pi\, h \sqrt{R^2 - \left(\frac{h}{2}\right)^2}\right] &= 2\pi \left(\sqrt{R^2 - \left(\frac{h}{2}\right)^2} + h\,\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}h}\,\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}y}\,[y]\right) \quad \text{onde } y = R^2 - \left(\frac{h}{2}\right)^2 \\
&= 2\pi \left(\sqrt{R^2 - \left(\frac{h}{2}\right)^2} + h\left(-\frac{h}{2}\right)\left(\sqrt{R^2 - \left(\frac{h}{2}\right)^2}\right)^{-1}\right)
\end{aligned}$$

igualando a zero, temos

$$0 \overset{!}{=} 2\pi \left(\sqrt{R^2 - \left(\frac{h}{2}\right)^2} - \frac{h^2/2}{\sqrt{R^2 - \left(\frac{h}{2}\right)^2}}\right)$$

$$\begin{aligned}
&\implies \sqrt{R^2 - \left(\frac{h}{2}\right)^2} = \frac{h^2/2}{\sqrt{R^2 - \left(\frac{h}{2}\right)^2}} \\
&\implies R^2 - \left(\frac{h}{2}\right)^2 = \frac{h^2}{2} \\
&\implies h^2 = 2R^2 \implies h = R\sqrt{2}
\end{aligned}$$

substituindo em 4.1, temos

$$R^2 = \left(\frac{R\sqrt{2}}{2}\right)^2 + r^2 \implies r = R\frac{\sqrt{2}}{2}.$$

Questão 5

Demonstrar que $\displaystyle\int_0^x \frac{\sin t}{1+t}\,\mathrm{d}t \geqslant 0$, para todo $x \geqslant 0$.

Resolução:

Sendo $\sin t$ uma função contínua e sendo

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left[\frac{1}{1+t}\right] = -\frac{1}{\underbrace{(1+t)^2}_{\geqslant 0}} \leqslant 0.$$

e contínua no intervalo $[0,\infty)$, podemos aplicar o teorema 5.5, de tal forma que

$$\int_0^x \frac{\sin t}{1+t}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{1+0}\int_0^c \sin t\,\mathrm{d}t + \frac{1}{1+x}\int_c^x \sin t\,\mathrm{d}t, \quad \text{onde } c \in [0,x]\,.$$

Integrando $\sin t$, temos

$$\frac{(1+x)\,(-\cos t)\Big|_0^c + (-\cos t)\Big|_c^x}{1+x} = \frac{(1+x)\,(1-\cos c) + (\cos x - \cos c)}{1+x}$$
$$\implies \frac{x\,(1-\cos c) - \cancel{\cos c} + \cancel{\cos c} + (1-\cos x)}{1+x}$$

e, como para $x > 0$ segue que $1 + x > 0$ e como

$$-1 \leqslant \cos x \leqslant 1 \implies 0 \leqslant -\cos x \leqslant 2,$$

a expressão

$$\int_0^x \frac{\sin t}{1+t}\,\mathrm{d}t = \frac{x\,(1-\cos c) + (1-\cos x)}{1+x} \geqslant 0.$$

□

Questão 6

Sejam f e g funções de $\mathbb{R}$ em $\mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^1$ tais que $f(0) = 0, g(0) = 1$, e $f'(x) = g(x), g'(x) = -f(x)$, para todo $x \in \mathbb{R}$. Prove que $f(x) = \sin x$ e $g(x) = \cos x$, para todo $x \in \mathbb{R}$.

Hmm... uma dica? Bem... comece provando que $f^2(x) + g^2(x)$ é quem deveria ser se tudo fosse o que deveria ser, e depois...

Resolução:

Nota: Essa questão foi feita com o auxílio de um amigo da matemática.

Dado que $f' = g, g' = -f \in \mathcal{C}^1$, temos que f e g são de classe $\mathcal{C}^2$. E, de fato, repetindo o procedimento podemos ver que são de classe $\mathcal{C}^\infty$. Então, a igualdade $f'' = g' = -f$ nos dá um sistema:

$$\begin{cases} f'' + f = 0 \\ f(0) = 0 \\ f'(0) = 1 \end{cases}$$

Uma possível solução para a primeira relação é dada da forma $e^{\lambda x}$ para algum $\lambda \in \mathbb{C}$. Note que

$$\forall\, x \in \mathbb{R}, (e^{\lambda x})'' + e^{\lambda x} = 0 \iff \lambda^2 + 1 = 0 \iff \lambda \in \{i, -i\}.$$

Então $x \longmapsto e^{ix}$ e $x \longmapsto e^{-ix}$ são soluções de $f'' + f = 0$. Mais ainda, toda combinação linear da forma $ae^{ix} + be^{-ix}$ também é uma solução. Pelo enunciado, temos que

- $f(0) = 0 \Rightarrow a + b = ae^{i\cdot 0} + be^{-i\cdot 0} = 0 \Rightarrow a + b = 0$.
- $f'(0) = 1 \Rightarrow ai - bi = aie^{i\cdot 0} - bie^{-i\cdot 0} = 1 \Rightarrow a - b = -i$.

Basta, então, resolver o seguinte sistema.

$$\begin{cases} a + b = 0 \\ a - b = -i \end{cases} \quad \Rightarrow \boxed{a = -i/2 = -b}$$

Ou seja: $f(x) = -\dfrac{i}{2}e^{ix} + \dfrac{i}{2}e^{-ix} = \sin x$ devido a *famosa* relação de Euler $e^{ix} = \cos x + i \sin x$. Como $f' = g$, segue que $g(x) = \cos x$.