# Desafio I

A mecânica celeste foi um tópico que atraiu diversos cientistas naturais entre os séculos XVI e XVII. Uma das figuras chave para seu desenvolvimento foi o astrônomo alemão Johannes Kepler, imortalizado na história por suas descobertas resumidas nas seguintes leis, batizadas, em sua homenagem, leis de Kepler:

(I) As órbitas planetárias são elipses com o sol ocupando a posição de um dos focos.

(II) O vetor que mede a posição de cada planeta em relação ao sol varre áreas iguais em intervalos de tempo iguais.

(III) O quadrado do período orbital é proporcional ao cubo do maior raio da elipse.

Figura 1: Johannes Kepler (1571-1630).

Kepler chegou às conclusões acima analisando observações astrônomicas de Tycho Brahe e suas leis foram de fundamental importância para os trabalhos de Isaac Newton. A provinha em questão é dividida da seguinte forma:

1. Na primeira parte, estudaremos o sistema de coordenadas polar, no qual o trabalho algébrico dos exercícios subsequentes é reduzido;
2. No segundo tópico, analisaremos grandezas **conservadas** no tempo, um conceito de fundamental importância na física;
3. Após isso, discutiremos seções cônicas (veja a lei (I) acima);
4. Então, verificaremos que cada lei é, de fato, respeitada pela interação gravitacional e vamos fazer uma aplicação de tudo que aprendemos para o movimento de satélites estudando a *Manobra de Hohmann*!

① **A física não pode depender do sistema de coordenadas!!!** Podemos tirar vantagem disso e escolher um sistema que reduza o trabalho algébrico. Uma maneira de discriminar entre sistemas é utilizar das simetrias do problema, por exemplo, se a situação física estudada apresenta simetria esférica, nada mais justo que utilizarmos coordenadas esféricas para tratar o problema. No caso que queremos estudar, como ficará claro adiante, o sistema de coordenadas polares é útil na simplificação de contas e também na interpretação dos resultados. Nesse sistema iremos decompor os vetores em nos versores $\hat{e}_r$ e $\hat{e}_\theta$, sendo que os dois primeiros são relacionados com os versores cartesianos, os quais vocês estão acostumados, através das relações:

$$\begin{aligned} \hat{e}_r &= \cos(\theta)\hat{e}_x + \sin(\theta)\hat{e}_y \\ \hat{e}_\theta &= -\sin(\theta)\hat{e}_x + \cos(\theta)\hat{e}_y \end{aligned} \tag{1}$$

Considere o movimento de um planeta de massa $m$ ao redor do sol, de massa M, desconsideraremos interações gravitacionais com outros corpos, uma vez que são pequenas em comparação à do sol. Além disso consideraremos que o sol permanece praticamente imóvel na origem do sistema de coordenadas[1], veja a figura (2). Em coordenadas cartesianas podemos decompor o vetor posição $\vec{r}$ da partícula da seguinte forma:

$$\vec{r} = \sqrt{x^2 + y^2}\cos(\theta)\hat{e}_x + \sqrt{x^2 + y^2}\sin(\theta)\hat{e}_y \tag{2}$$

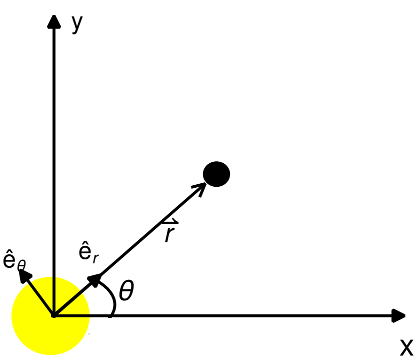


Figura 2: Planeta de massa m, orbitando o sol.

(a) Escreva (2) no sistema de coordenadas polares, ou seja, em termos de $\hat{e}_r$, $\hat{e}_\theta$ e do módulo de $|\vec{r}| \equiv r$.

(b) Calcule as seguintes derivadas e expresse-as em coordenadas polares:

$$\frac{d\hat{e}_r}{dt} \equiv \dot{\hat{e}}_r, \qquad \frac{d\hat{e}_\theta}{dt} \equiv \dot{\hat{e}}_\theta \tag{3}$$

(c) Utilizando os resultados obtidos em (3) calcule os vetores velocidade e aceleração do planeta. Exprima a resposta no sistema de coordenadas polar.

[1] As dimensões de ambos corpos também serão desprezadas, já que não são relevantes para a análise em questão.

② O momento angular $\vec{L}$ é definido da seguinte forma:

$$\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p} \tag{4}$$

Onde $\vec{p}$ e $\vec{r}$ são, respectivamente, o momento e a posição do planeta.

(a) Calcule a derivada do momento angular $\frac{d\vec{L}}{dt}$
**Dica:** O produto vetorial satisfaz a regra do produto para derivadas.

(b) Mostre que o momento angular é **conservado** se atuar na partícula somente uma força central $\vec{F} = f(r)\vec{r}$ .

(c) Considere a interação gravitacional:

$$\vec{F} = -\frac{GMm}{r^3}\vec{r} \tag{5}$$

A energia potencial gravitacional associada à força acima é[2]:

$$U(r) = -\frac{GMm}{r} \tag{6}$$

Escreva a energia mecânica total do planeta. Utilize a velocidade em coordenadas polares, como feito no item 1(c), para escrever o resultado final em coordenadas polares.

(d) Utilizando novamente o item 1(c), escreva a segunda lei de Newton para o problema em questão e encontre as equações de movimento para as componentes $\hat{e}_r$ e $\hat{e}_\theta$.

(e) Calcule $\frac{dE}{dt}$ e use o resultado obtido em 2(d) para mostrar que a energia é **conservada**.

(f) Calcule o produto escalar $\vec{L} \cdot \vec{r}$, o que você pode concluir desse resultado combinado com o que obteve em 2(b) ? Nesse momento deve ficar claro porque podemos representar o movimento com acurácia utilizando apenas a Figura 2.
**Dica:** Lembre-se de que a equação de um plano pode ser escrita na forma $\vec{N} \cdot \vec{r} = 0$ onde $\vec{N}$ é o vetor normal ao plano.

③ Agora, de posse das equações de movimento e sabendo que a situação física satisfaz a condição estabelecida por 2(f), é necessário entendermos seções cônicas. Para isso considere o seguinte problema de geometria analítica:

*"Qual o lugar geométrico descrito por um ponto móvel cuja distância à um ponto fixo tem proporção constante em relação a sua distância perpendicular à uma linha fixa ?"*

Para entender melhor a situação considere a Figura (3), onde adotamos como ponto fixo, chamado *foco*, a origem e consideramos que a linha fixa seja a reta que passa por $x = -d$. Sendo a distância de um ponto arbitrário (o ponto móvel do enunciado acima) ao foco $r_1$ e a distância dele à reta fixa $r_2$ (Veja a Figura 3), responda:

[2] Fixamos seu valor igual a zero no infinito.

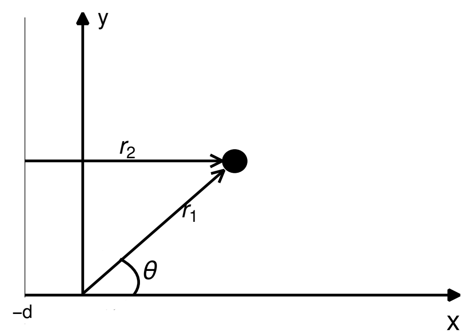


Figura 3: Representação gráfica do problema geométrico. Note que $r_1$, faz o papel do módulo do raio $r$ do exercício anterior.

(a) Calcule a proporção $r_1/r_2$ em termos de $r_1$, $\theta$ e $d$. Note que, caso troquemos nosso ponto móvel por uma partícula ou um corpo extenso cujas dimensões podem ser desprezadas, $r_1$ se reduz, em coordenadas polares, ao módulo do vetor posição $r_1 = |\vec{r}|$.

(b) Queremos que o quociente $r_1/r_2$ seja constante igual a $e$, chamado de *excentricidade da cônica.* Reescreva $r_1$ em termos de $r_c = ed$, $e$ e $\theta$.

Podemos reescrever o resultado de 3(b) em coordenadas cartesianas, correspondendo a três situações distintas:

1. Se $e < 1$:
$$\frac{(x - x_c)^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1, \tag{7}$$
onde
$$\begin{aligned} a &= \frac{r_c}{1 - e^2} \\ b &= \sqrt{1 - e^2}\,a \\ x_c &= ea \end{aligned} \tag{8}$$
A equação 7 descreve uma **elipse** centrada em $(x_c, 0)$, de raio maior $a$ e raio menor $b$ (veja a Figura 4).

2. Se $e > 1$:
$$\frac{(x - x_c)^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1, \tag{9}$$

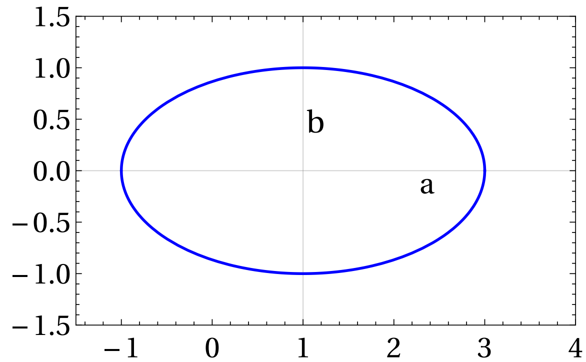


Figura 4: Exemplo de uma eplise com $a = 2$, $b = 1$ e $x_c = 1$.

onde:

$$\begin{aligned} a &= \frac{r_c}{e^2 - 1} \\ b &= \sqrt{e^2 - 1}a \\ x_c &= -ea \end{aligned} \tag{10}$$

A equação 9 descreve uma **hipérbole** com assíntotas intersectando em $(x_c, 0)$ (Veja a Figura 5).

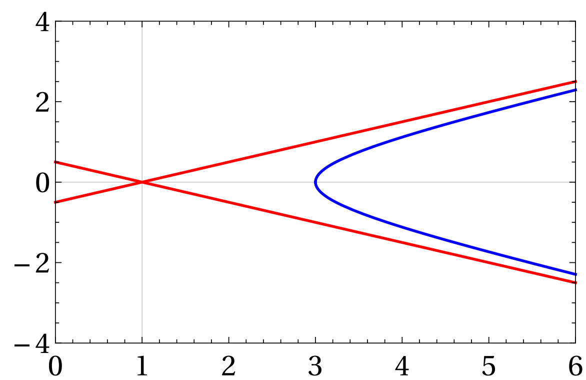


Figura 5: Exemplo de uma hipérbole com $a = 2$, $b = 1$ e $x_c = 1$. As retas vermelhas representam suas assíntotas.

3. Se $e = 1$:

$$y^2 - 2r_c(x - x_c) = 0, \tag{11}$$

onde

$$x_c = -\frac{r_c}{2} \tag{12}$$

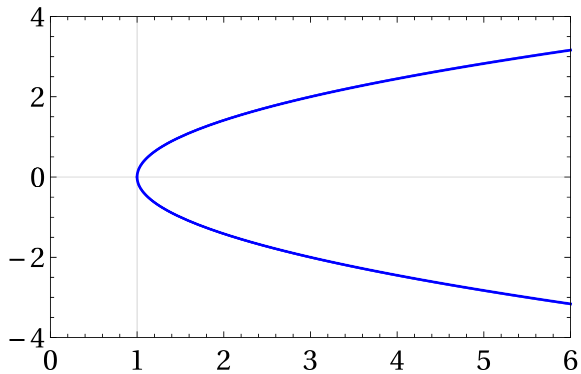


Figura 6: Exemplo de uma parábola alinhada ao eixo x com $x_c = 1$.

A equação 11, provavelmente a mais familiar a vocês, descreve uma parábola alinhada ao eixo x que passa por $(x_c, 0)$ (Veja Figura 6).

Temos agora todos os ingredientes necessários para derivar, de primeiros princípios, as Leis de Kepler!

④ De volta à Figura 2, vamos analisar primeiramente a validade da lei (II):

(a) Escreva o momento angular $\vec{L}$ em coordenadas polares.

**Dica:** Note que $\hat{e}_r \times \hat{e}_\theta = \hat{e}_z$.

Caso você não tenha conseguido mostrar a conservação de momento angular no caso geral do exercício ②, tente mostrar que para o caso particular[3] dessa questão que, de fato, a equação

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = 0$$

é satisfeita.

**Dica:** Calcule a derivada acima e compare com a equação de movimento para a componente $\hat{e}_\theta$.

(b) Vocês verão no futuro que a área de uma elipse pode ser calculada pela integral dupla

$$A = \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{r(\theta)} r' dr'$$

E poderão tirar as mesmas conclusões que iremos chegar analisando o limite a seguir:

Considere a Figura (7), que representa um arco de uma elipse. Se $\Delta\theta \ll 1$, podemos aproximar a área do arco pela área de um triângulo:

$$\Delta A = \frac{r^2 \Delta\theta}{2}$$

[3]Por particular queremos dizer após decompor o vetor em um sistema de coordenadas específico, uma vez que a conservação é geral e independe de sistema de coordendas.

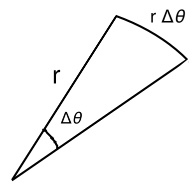


Figura 7: Arco de uma elipse.

Calcule $\lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta A}{\Delta t}$ e compare com o momento angular (item 2(a)). O que você pode concluir sobre a taxa de variação da área ? É compatível com a segunda lei de Kepler?

(c) Agora considere a equação de movimento na direção radial (item 2(d)). Utilize a troca de variáveis $r(t) = u^{-1}(t)$ e mostre que:

$$\dot{r} = -\frac{\dot{u}}{u^2} = -r^2 \frac{du}{d\theta}\frac{d\theta}{dt} = -h\frac{du}{d\theta}$$
$$\ddot{r} = -h\frac{d^2u}{d\theta^2}\dot{\theta} = -u^2h^2\frac{d^2u}{d\theta^2}$$

Onde $h = \frac{L}{m}$ é o momento angular por unidade de massa do planeta e utilizamos a regra da cadeia para obter as útimas igualdades. Também adotamos a notação menos carregada $|\vec{L}| \equiv L$.

(d) Com isso, mostre que a equação radial pode ser transformada em

$$\frac{d^2u}{d\theta^2} + u = \frac{GM}{h^2}$$

(e) Confira que a seguinte expressão é solução da equação diferencial acima:

$$u(\theta) = \frac{GM}{h^2}\left(1 - e\cos\left(\theta - \theta_0\right)\right), \tag{13}$$

onde $\theta_0$ e $e$ são constantes. Podemos tomar, sem perda de generalidade, $\theta_0 = 0$, de forma que a solução $r(\theta)$ é dada por

$$r(\theta) = \frac{r_c}{1 - e\cos(\theta)}, \tag{14}$$

onde $r_c = \frac{h^2}{GM}$. Compare essa equação com o resultado obtido em (b). Essa é a equação de uma cônica confocal com a origem (no caso da dinâmica celeste estamos supondo que a origem do sistema de coordenadas está fixa no sol). Para o caso $e < 1$ essa equação descreve uma elipse. Dado que as outras cônicas não descrevem movimentos limitados (reflita o porquê disso), tire suas conclusões sobre a mecânica celeste e confronte com (I).

(f) Suponha que $a$ e $b$ sejam, respectivamente, o valor do raio maior e menor da elipse. A área da elipse é então dada por

$$A = \pi ab$$

No item 4(b) foi calculada a taxa de variação da área no tempo. O período do movimento pode ser calculado considerando o tempo necessário para varrer a área total da elipse a uma taxa constante $\frac{dA}{dt}$:

$$T = \frac{A}{dA/dt}$$

Calcule o valor acima e utilize os resultados resumidos em (8) e que $r_c = \frac{h^2}{GM}$ para escrever o quadrado do período em função apenas do raio maior $a$. Enfim, mostramos que a lei (III) vale!

④ Todo formalismo desenvolvido até esse ponto pode ser utilizado para entendermos a *manobra de Hohmann*. Considere que um satélite artificial descreve uma órbita circular de raio $r_1$ ao redor do sol e queremos fazer com que ele passe a descrever uma órbita circular $r_2 > r_1$. Para tal, vamos utilizar uma órbita elíptica para fazer o translado entre as órbitas circulares (veja Figura 8).

(a) Utilize seu resultado de 4(c) e a substituição $r = u^{-1}$ para escrever a energia por unidade de massa:

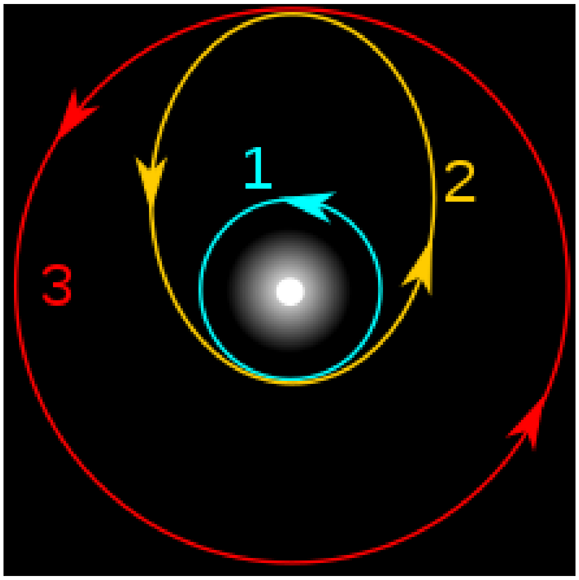


Figura 8: A manobra de transferência entre órbitas circulares de Hohmann.

$$\epsilon = \frac{E}{m} = \frac{h^2}{2}\left(\left(\frac{du}{d\theta}\right)^2 + u(\theta)^2 - 2u(\theta)u_c\right) \tag{15}$$

(b) Substitua a solução $u(\theta)$ de (13) e mostre que

$$\epsilon = \frac{u_c h^2}{2}(e^2 - 1) = \frac{GM}{2r_p}(e - 1),$$

onde $u_c = r_c^{-1}$ e $r_p$ é chamado periélio, a distância mais próxima que o planeta chega do sol em toda sua órbita ($\theta = \pi$ em (14)):

$$r_p = \frac{r_c}{1 + e} = a(1 - e) \tag{16}$$

Discuta o sinal de $\epsilon$ para cada uma das cônicas $e < 1$, $e = 1$ e $e > 1$.

Você se lembra da primeira provinha do átomo de Bohr[4]? Discutimos que a energia gravitacional deveria ser negativa para estados que formam órbitas uma vez que o zero da energia potencial foi fixado no infinito. Aqui você pode vislumbrar que esse resultado é, de fato, consistente. Como você mostrou anteriormente, a energia é conservada, logo basta calcularmos seu valor para um ponto e ele deve ser o mesmo para todos os instantes subsequentes.

(c) Use (16) para mostrar que podemos escrever a energia como função apenas do raio maior $a$:

$$\epsilon = -\frac{GM}{2a} \tag{17}$$

Para o movimento circular, temos que $\dot{r} = 0$ e que $a = b = r_c$, sendo agora justificado o porquê de adotamos o índice $c$ durante todo o exercício.

(d) Mostre que, para órbitas circulares, levando em conta a conservação de energia e utilizando (17), a velocidade tangencial é dada por:

$$v_c = \sqrt{\frac{GM}{r_c}}$$

(e) Faça o mesmo raciocínio para o momento em que o planeta se encontra no perihélio $r_p$ e mostre que :

$$\frac{v_p}{v_c} = \sqrt{1 + e} \tag{18}$$

**Dica:** Note que no perihério também temos que $\dot{r} = 0$.

Analogamente, no afélio – maior distância possível entre o planeta e o sol– temos:

$$r_a = a(1 + e) \tag{19}$$

Podemos mostrar que:

[4]Essa provinha foi aplicada apenas para o pessoal da Geofísica, deixaremos ela disponível na página do curso no moodle para quem quiser olhar.

$$\frac{v_a}{v_c} = \sqrt{1-e} \tag{20}$$

Ufa! Agora nos resta apenas interpretar os resultados acima. Suponha que nosso satélite esteja numa órbita circular de raio $r_1$ e queremos transferí-lo para um órbita circular de raio $r_2 > r_1$. Nós podemos realizar esse feito colocando o satélite temporariamente em uma órbita elíptica na qual o perihélio é a distância $r_1$ e o afélio é a distância $r_2$. Neste caso, a excentricidade será dada por:

$$e = \frac{r_2 - r_1}{r_2 + r_1}$$

De acordo com o resultado de (18), podemos transferir o satélite de sua órbita circular inicial para a órbita elíptica discutida acima se aumentarmos sua velocidade tangencial (ligando os motores do satélite durante um intervalo de tempo, de forma que causem a aceleração necessária) por um fator

$$\kappa_1 = \sqrt{1+e}$$

Uma vez que o satélite está percorrendo a trajetória da elipse, aguardamos o instante no qual ele atinge seu afélio (percorrendo metade da órbita) para reativar os motores e mudar a velocidade, segundo (20), por um fator

$$\kappa_2 = \frac{1}{\sqrt{1-e}} \tag{21}$$

Então o satélite estará com a velocidade tangencial compatível para realizar o movimento circular e assim permanecerá enquanto estiver sob ação apenas da força gravitacional! Legal, não?

(f) **Para provocar...** Imagine que dormimos no ponto após ligar os motores e deixamos o dispositivo ligado de maneira que em (18) a nova velocidade tangencial satisfaça:

$$\frac{v_t}{v_c} > \sqrt{2}$$

O que ocorrerá em momentos subsequentes?

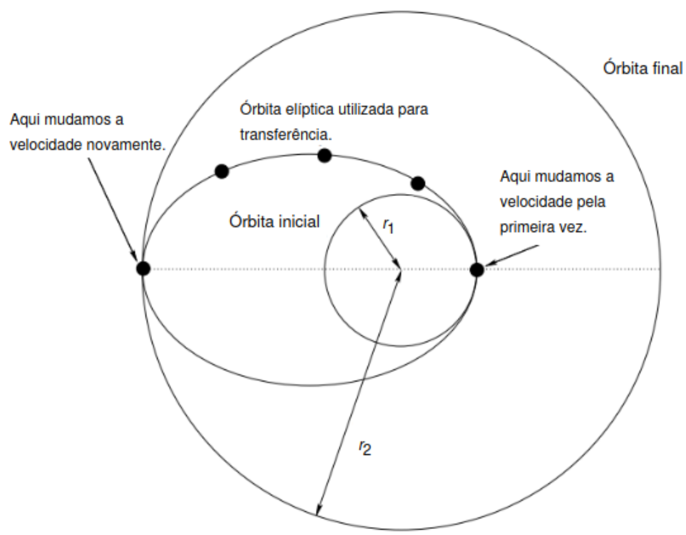


Figura 9: Representação da situação estudada.