# Resolução – Provinha IX (Física I – 4302111)

Isabella B. – 11810773

QUESTÃO 1

## Matéria escura em aglomerados de galáxias

Em 1933, o astrônomo suíço-americano Fritz Zwicky, baseando-se em medidas publicadas por Edwin Hubble e Milton Humason, em 1931, foi o primeiro astrônomo a trazer provas convincentes acerca da existência da chamada *matéria escura*[1]. Vamos entender como isso aconteceu.

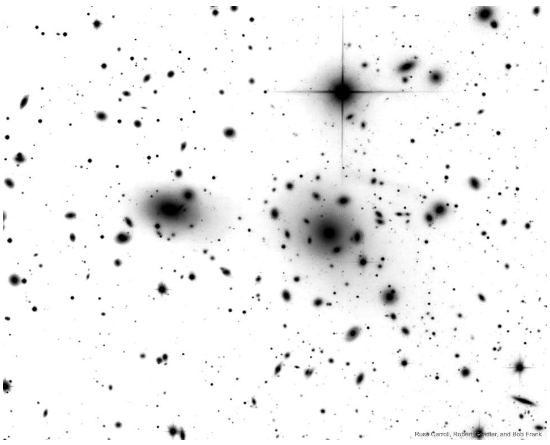


Figura 1: Aglomerado de galáxias *Coma*. Quase todo objeto mostrado na imagem é uma galáxia e é um dos aglomerados mais densos hoje conhecido, contendo milhares de galáxias. Cada uma das galáxias possui bilhões de estrelas. Ainda que próximo de nós se comparado à distância de outros aglomerados conhecidos, a luz de Coma demora cerca de centenas de milhares de anos para chegar até nós. Ainda mais: o aglomerado é tão grande que a luz demora milhões de anos para ir de um lado ao outro do aglomerado. [Crédito: Russ Carroll, Robert Gendler, & Bob Franke; Dan Zowada Memorial Observatory]

Zwicky observou que a dispersão (desvio padrão) da componente da velocidade ao longo da linha de visada, também chamada de velocidade radial, de oito galáxias individuais no aglomerado é da ordem de $\sigma_r = \sqrt{\langle v_r^2 \rangle - \langle v_r \rangle^2} \sim 10^3\,\mathrm{km/s}$. Esta medida nos da uma ótima estimativa da energia cinética do sistema. Contudo, a quantidade de matéria e gás visíveis no aglomerado não são capazes de produzir atração gravitacional suficiente para manter o sistema ligado! Tal fato já havia sido notado por Hubble e Humason, mas foi Zwicky quem aplicou o teorema do virial para estimar a massa do aglomerado (até onde sabemos).

(0) **Unidades:** Utilizaremos o parsec para medir distâncias. Tal unidade é comumente adotada em cosmologia e astronomia galáctica e extragaláctica:

$$1\,\mathrm{pc} \approx 3 \cdot 10^{13}\,\mathrm{km}$$

Também trabalharemos com anos (quanto vale um ano em segundos?). Para a sua sanidade, escreva a velocidade das galáxias nessas unidades (pc/ano) e trabalhe com essas unidades no que segue!

(1) Primeiro, vamos entender por que é razoável utilizar o teorema do virial nessa situação. Assuma que o raio e idade do aglomerado são da ordem de $\sim 1{,}5\,\mathrm{Mpc}$, onde $1\,\mathrm{Mpc} = 1 \cdot 10^6\,\mathrm{pc}$, e $\sim 10^{10}$ anos, respectivamente. Estime quantos anos leva para uma galáxia atravessar o aglomerado e, com isso, estime quantas vezes cada galáxia pode cruzar, em média, o aglomerado. Argumente porque podemos supor que o aglomerado de Coma encontra-se em equilíbrio e, portanto, podemos utilizar o teorema do virial.

[1] Apesar do termo ter-se popularizado com o trabalho de Zwicky, ele não foi o primeiro a introduzir o termo em context astronômico. Em 1906, Henri Poincaré já havia discutido a possibilidade da existência de "matière obscure" dentro da nossa própria galáxia [Poincaré, H. "The Milky Way and the Theory of Gases", Popular Astronomy, v. 14, p.475-488, 1906]. Se você não sabia, o Teorema do Virial foi derivado pela primeira vez no contexto da teoria cinética dos gases. Ele estava sendo utilizado por Kelvin (sim, o cara da termodinâmica) na tentativa de estimar a densidade de matéria na Via Láctea.

**Resolução:**

Sendo a velocidade radial em relação à um observador na Terra, podemos estabelecer que a medida de dispersão $\sigma_r$ das oito galáxias do aglomerado consideradas no problema é uma boa medida da velocidade relativa média das galáxias em relação a Coma.

Convertendo a medida de $\sigma_r$ dada, temos:

$$\sigma_r = \frac{1 \cdot 10^3\,\mathrm{km}}{1\,\mathrm{s}} \cdot \frac{1\,\mathrm{pc}/3 \cdot 10^{13}\,\mathrm{km}}{(1\,\mathrm{ano}/365\,\mathrm{dias}) \cdot (1\,\mathrm{dia}/24\,\mathrm{h}) \cdot (1\,\mathrm{h}/60\,\mathrm{min}) \cdot (1\,\mathrm{min}/60\,\mathrm{s})} \approx 1 \cdot 10^{-3}\,\mathrm{pc/ano}$$

Dessa forma, podemos estimar que uma galáxia qualquer leva

$$\frac{2 \cdot 1{,}5 \cdot 10^6\,\mathrm{pc}}{1 \cdot 10^{-3}\,\mathrm{pc/ano}} = 3 \cdot 10^9\,\mathrm{anos}$$

para cruzar o aglomerado, e, portanto, cruzou-o, em média $1 \cdot 10^{10}/3 \cdot 10^9 \approx 3{,}3$ vezes.

Dessa forma, assumindo que as galáxias tem idade aproximada à do aglomerado, podemos concluir que, na média de $10^{10}$ anos, todas as galáxias já puderam se locomover algumas vezes por toda a sua extensão, e que o sistema encontra-se em equilíbrio dinâmico, de tal forma que vale o teorema do virial.

(2) Vamos fazer então a aproximação da vaca esférica: trate o aglomerado como sendo uma esfera homogênea de massa $M$ e raio $R$. Mostre que a energia potencial total é dada por

$$u = -\frac{3}{5}\frac{G\,M^2}{R}$$

*Dica: considere a energia potencial gravitacional que uma casca esférica de espessura* $\mathrm{d}r$ *(qual é a massa* $m(r)$ *da casca?) sente na presença de um núcleo esférico sólido de raio* $r$ *e densidade* $\rho$ *constante (e qual é a massa* $M(r)$ *do núcleo?).*

**Resolução:**

Sendo a energia potencial de uma massa $m$ em relação a um ponto de massa $M(r)$

$$U(r) = -\int_{\infty}^{r} \mathbf{F}(\mathbf{r}') \cdot \mathrm{d}\mathbf{r}' = -\frac{G\,M(r)\,m}{r},$$

podemos tomar o diferencial $\mathrm{d}U$ em relação a uma massa $\mathrm{d}m$ e, daí, temos:

$$\mathrm{d}U = -\frac{G\,M(r)\;\mathrm{d}m}{r}$$

integrando de 0 à $R$, temos

$$\int_{U(0)}^{U(R)} \mathrm{d}U = \int_{M(0)}^{M(R)} -\frac{G\,M(r)\;\mathrm{d}m}{r}$$

aproximando o objeto como uma esfera, temos $M(r) = \frac{4}{3}\pi\,\rho\,r^3 \implies \mathrm{d}m = 4\pi\,\rho\,r^2\,\mathrm{d}r$, portanto

$$
\begin{aligned}
U &= \int_0^R -\frac{G\left(\frac{4}{3}\pi\,\rho\,r^3\right)\left(4\pi\,\rho\,r^2\,\mathrm{d}r\right)}{r} \\
&= -\frac{G\left(\frac{4}{3}\pi\,\rho\,r^3\right)\left(4\pi\,\rho\,r^2\,\mathrm{d}r\right)}{r}\int_0^R r^5\,\mathrm{d}r \\
&= -\frac{16}{3}G\pi^2\,\rho^2\int_0^R r^4\,\mathrm{d}r \\
&= -\frac{16}{3}G\pi^2\,\rho^2\left(\frac{1}{5}r^5\right)\bigg|_0^R \\
&= -\frac{3}{5}\frac{G}{R}\left(\frac{4}{3}\pi\,\rho\,R^3\right)^2 \\
U &= -\frac{3}{5}\frac{G\,M^2}{R}
\end{aligned}
$$

□

(3) Uma vez que você se convenceu que o sistema pode ser tratado como estando em equilíbrio, considere a energia cinética média, $K = \frac{1}{2}M\langle v^2\rangle$, e utilize o teorema do virial para expressar a massa $M$ do aglomerado em termos da média do raio $R$ do aglomerado e do quadrado da velocidade tridimensional, $\langle v_{\mathrm{tot}}^2\rangle = \langle v_x^2 + v_y^2 + v_z^2\rangle$.

**Resolução:**

Pelo teorema do virial, temos

$$
\begin{aligned}
2\langle K\rangle &= -\langle U\rangle \\
2\left(\frac{1}{2}M\langle v_{\mathrm{tot}}^2\rangle\right) &= -\left(-\frac{3}{5}\frac{G\,M^2}{\langle R\rangle}\right) \\
M &= \frac{5}{3}\frac{\langle R\rangle\,\langle v_{\mathrm{tot}}^2\rangle}{G}.
\end{aligned} \tag{1.1}
$$

(4) Com os valores de raio e dispersão de velocidades assumidos para o aglomerado de Coma, estime a massa do aglomerado. Lembre-se que essa massa é a massa necessária para manter o sistema (aglomerado) coeso. *Dica: assuma que a dispersão de velocidades total é isotrópica, ou seja, não depende da direção, e que* $\langle v_{\mathrm{tot}}\rangle = \langle v_r\rangle = 0$*!*

**Resolução:**

Pela relação da dispersão, temos

$$\langle v_r^2\rangle = \sigma_r^2 + \langle v_r\rangle^2,$$

e o quadrado da velocidade total $\langle v_{\mathrm{tot}}^2\rangle$ pode ser dado por

$$\langle v_{\mathrm{tot}}^2\rangle = \langle v_r^2\rangle + \langle v_t^2\rangle = \sigma_r^2 + \langle v_r\rangle^2 + \langle v_t^2\rangle,$$

onde $\langle v_t^2\rangle$ é a média dos quadrados das velocidades tangenciais.

Assumindo a isotropia da dispersão das velocidades, podemos considerar $\langle v_r^2\rangle = \langle v_t^2\rangle = \sigma_r^2$ e, portanto, de 1.1, temos:

$$M = \frac{5}{3}\frac{\langle R\rangle\,\langle v_{\mathrm{tot}}^2\rangle}{G} = \frac{5}{3}\frac{\langle R\rangle\left(2\sigma_r^2\right)}{G}$$

substituindo os valores, temos

$$M \approx \frac{5}{3} \frac{1{,}5\,\mathrm{Mpc}\left(2 \cdot \left(1 \cdot 10^3\,\mathrm{km/s}\right)^2\right)}{4 \cdot 10^{-3}\,\mathrm{pc}\,\mathrm{M}_\odot^{-1}(\mathrm{km/s})^2} = 1{,}25 \cdot 10^{15}\,\mathrm{M}_\odot$$

(5) Compare o resultado do item anterior com os valores da massa estelar $M_\star \approx 3 \cdot 10^{13}\,\mathrm{M}_\odot$ e da massa em forma de gás $M_{\mathrm{gas}} \approx 2 \cdot 10^{14}\,\mathrm{M}_\odot$ medidos para o aglomerado. Como isso se traduz na porcentagem de matéria bariônica (ou seja, gás e estrelas)? O que podemos concluir? Note que todas as nossas conclusões estão baseando-se na hipótese fundamental de que o teorema do virial pode ser aplicado ao sistema. Ou seja, estamos tratando as galáxias no aglomerado como partículas em um gás.

**Dados:** Considere $G \approx 4 \cdot 10^{-3}\,\mathrm{pc}\,\mathrm{M}_\odot^{-1}(\mathrm{km/s})^2$, onde $1\,\mathrm{M}_\odot \approx 2 \cdot 10^{30}\,\mathrm{kg}$ é a massa solar, unidade padrão de massa em astronomia.

**Resolução:**

Somando as massas estelar a em forma de gás do aglomerado, temos a razão

$$\frac{M_\star + M_{\mathrm{gas}}}{M} \approx \frac{3 \cdot 10^{13}\,\mathrm{M}_\odot + 2 \cdot 10^{14}\,\mathrm{M}_\odot}{1{,}25 \cdot 10^{15}\,\mathrm{M}_\odot} \approx 0{,}18 = 18\,\%.$$

Portanto, podemos concluir que, como somente 18 % da massa é bariônica, os outros 82 % devem ser massa não bariônica, ou, "*matière obscure*".