Isabella B. – 11810773

Questão 1

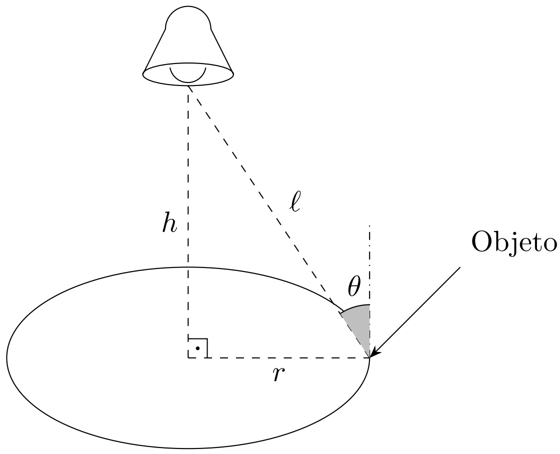
Uma lâmpada pende sobre o centro de uma mesa redonda de raio r. A que altura da mesa deve estar a lâmpada para que a iluminação de um objeto que se encontra à beira da mesa seja a melhor possível? A iluminação é diretamente proporcional ao cosseno do ângulo de incidência da luz (que se propaga em linha reta) e inversamente proporcional ao quadrado da distância da fonte (lâmpada).

Resolução:

Pelo enunciado, sabemos que a intensidade de iluminação $I \propto \dfrac{\cos\theta}{\ell^2}$. Sendo θ o ângulo de incidência, $\cos\theta = \dfrac{h}{\ell}$ e $\ell = (r^2 + h^2)^{1/2}$. Para encontrar o valor ótimo que a questão pede devemos:

1. colocar I em função de alguma das variáveis do problema (h é uma boa candidata, pois é exatamente o que queremos), e;
2. derivar e igualar a zero, para encontrar o valor ótimo.

(extra) caso haja mais de uma resposta para o item 2, devemos derivar I novamente para encontrar qual dos dois valores se encaixa nas especificações do problema (melhor iluminação $\implies$ I máximo, logo $I''(h_{\text{máx}}) < 0$).



Fazendo

$$I = k\frac{\cos\theta}{\ell^2} \quad k \in \mathbb{R}$$

e, portanto,

$$I = k\frac{h/\ell}{\ell^2} = k\frac{h}{\ell^3} = k\frac{h}{(r^2+h^2)^{3/2}} \tag{1.1}$$

fazendo $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}h}\left[I(h)\right]$, temos:

$$\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}h}\left[I(h)\right] &= k\,(h)'\left(r^2+h^2\right)^{-3/2} + kh\left(\left(r^2+h^2\right)^{-3/2}\right)' \\
&= k\left(\left(r^2+h^2\right)^{-3/2} + h\left(u^{-3/2}\right)'(u)'\right) \quad \text{onde } u = r^2+h^2 \\
&= k\left(\left(r^2+h^2\right)^{-3/2} + h\left(-\frac{3}{2}\right)\left(r^2+h^2\right)^{-5/2}(2h)\right) \\
&= k\left(\left(r^2+h^2\right)^{-3/2} - 3h^2\left(r^2+h^2\right)^{-5/2}\right) \qquad (1.2)
\end{aligned}$$

Como, para $\frac{\mathrm{d}I}{\mathrm{d}h} = 0$, temos um ponto de extremo da função, temos:

$$\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}I}{\mathrm{d}h} &= 0 \\
3\cancel{k}h^2\left(r^2+h^2\right)^{-5/2} &= \cancel{k}\left(r^2+h^2\right)^{-3/2} \\
\left(3h^2\right)^2\left(r^2+h^2\right)^{-5} &= \left(r^2+h^2\right)^{-3} \\
\left(3h^2\right)^2 &= \left(r^2+h^2\right)^{-3-(-5)} = \left(r^2+h^2\right)^2 \implies \\
\left|3h^2\right| &= \left|r^2+h^2\right| \implies \\
h &= \frac{r}{\sqrt{2}} \quad \text{pois } h \overset{!}{>} 0
\end{aligned}$$

Tomando $\dfrac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}h^2}\left[I(h)\right]$, temos:

$$\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}h^2}\left[I(h)\right] &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}h}\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}h}\left[I(h)\right]\right) = k\left(\left(\left(r^2+h^2\right)^{-3/2}\right)' - \left(3h^2\left(r^2+h^2\right)^{-5/2}\right)'\right) \\
&= k\left((u)'\left(u^{-3/2}\right)' - \left(\left(3h^2\right)'\left(r^2+h^2\right)^{-5/2} + 3h^2\left((u)'\left(u^{-5/2}\right)'\right)\right)\right) \quad \text{onde } u = r^2+h^2 \\
&= k\left((2h)\left(-\frac{3}{2}\right)\left(r^2+h^2\right)^{-5/2} - \left((6h)\left(r^2+h^2\right)^{-5/2} + 3h^2\left((2h)\left(-\frac{5}{2}\right)\left(r^2+h^2\right)^{-7/2}\right)\right)\right) \\
&= k\left(-3h\left(r^2+h^2\right)^{-5/2} - 6h\left(r^2+h^2\right)^{-5/2} + 15h^3\left(r^2+h^2\right)^{-7/2}\right) \\
&= 3hk\left(-3\left(r^2+h^2\right)^{-5/2} + 5h^2\left(r^2+h^2\right)^{-7/2}\right) \qquad (1.3)
\end{aligned}$$

Substituindo $h = r/\sqrt{2}$ em 1.3, temos:

$$\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}h^2}\left[I\left(\frac{r}{\sqrt{2}}\right)\right] &= 3\left(\frac{r}{\sqrt{2}}\right)k\left(-3\left(r^2+\left(\frac{r}{\sqrt{2}}\right)^2\right)^{-5/2} + 5\left(\frac{r}{\sqrt{2}}\right)^2\left(r^2+\left(\frac{r}{\sqrt{2}}\right)^2\right)^{-7/2}\right) \\
&= 3k\left(\frac{r}{\sqrt{2}}\right)\left(-3\left((mr)^2\right)^{-5/2} + \frac{5r^2}{2}\left((mr)^2\right)^{-7/2}\right) \quad \text{onde } m = \sqrt{3/2} \\
&= \frac{3kr}{\sqrt{2}}\left(-3(mr)^{-5} + \frac{5r^2}{2}(mr)^{-7}\right) \overset{!}{<} 0
\end{aligned}$$

Se $\dfrac{3kr}{\sqrt{2}} > 0$, então

$$-3(mr)^{-5} + \frac{5r^2}{2}(mr)^{-7} < 0 \implies \frac{5r^2}{2} < 3(mr)^{-5+7} \implies \frac{5}{6} < \frac{3}{2}$$

o que é sempre verdadeiro. Portanto, conforme o previsto, $h = r/\sqrt{2}$ é ponto crítico onde a iluminação será máxima ($I(r/\sqrt{2}) = I_{\text{máx}}$).

Questão 2

A partir de um tronco de árvore redondo de diâmetro d devemos cortar uma viga de seção retangular. Quais devem ser a largura ℓ e a altura h dessa seção para que a viga tenha a resistência máxima possível (a) à sua compressão e (b) à sua flexão? Note que a resistência da viga à compressão é proporcional à área de sua seção transversal e a resistência à flexão é proporcional ao produto da largura pelo quadrado da altura da seção transversal.

(a) **Resolução:**

Sendo a resistência à compressão $R_c \propto \ell h$, temos $R_c = k_c \ell h \quad k_c \in \mathbb{R}$. Fazendo $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\ell}\left[R_c(\ell)\right] \overset{!}{=} 0$ encontraremos o valor de ℓ para o qual R_c será máxima. Sendo $d^2 = h^2 + \ell^2 \implies h = \left(d^2 - \ell^2\right)^{1/2}$, logo

$$
\begin{aligned}
R_c = k_c \ell h = k_c \ell \left(d^2 - \ell^2\right)^{1/2} &\implies \\
\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\ell}\left[R_c(\ell)\right] &= \left(k_c \ell \left(d^2 - \ell^2\right)^{1/2}\right)' \\
&= k_c \left((\ell)' \left(d^2 - \ell^2\right)^{1/2} + \ell \left(\left(d^2 - \ell^2\right)^{1/2}\right)' \right) \\
&= k_c \left(\left(d^2 - \ell^2\right)^{1/2} + \ell \left(u^{1/2}\right)' (u)' \right) \quad \text{onde } u = d^2 - \ell^2 \\
&= k_c \left(\left(d^2 - \ell^2\right)^{1/2} + \ell \left(\frac{1}{2}\left(d^2 - \ell^2\right)^{-1/2}\right)(-2\ell) \right) \\
&= k_c \left(\left(d^2 - \ell^2\right)^{1/2} - \ell^2 \left(d^2 - \ell^2\right)^{-1/2} \right) \qquad (2.1)
\end{aligned}
$$

Igualando 2.1 à zero, temos

$$
\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}R_c}{\mathrm{d}\ell} &= 0 \\
\cancel{k_c}\left(d^2 - \ell^2\right)^{1/2} &= \cancel{k_c}\ell^2 \left(d^2 - \ell^2\right)^{-1/2} \implies \\
\frac{\left(d^2 - \ell^2\right)^{1/2}}{\left(d^2 - \ell^2\right)^{-1/2}} = \left(d^2 - \ell^2\right)^{1/2+1/2} &= \ell^2 \\
2\ell^2 &= d^2 \implies \\
|\ell| &= \left|\frac{d}{\sqrt{2}}\right| \implies \\
\ell &= \frac{d}{\sqrt{2}} \quad \text{pois } \ell \overset{!}{>} 0
\end{aligned}
$$

Tomando a segunda derivada de $R_c(\ell)$, temos

$$
\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}\ell^2}\left[R_c(\ell)\right] = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\ell}\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\ell}\left[R_c(\ell)\right]\right) &= k_c \left(\left(\left(d^2 - \ell^2\right)^{1/2}\right)' - \left(\ell^2 \left(d^2 - \ell^2\right)^{-1/2}\right)' \right) \\
&= k_c \left((u)' \left(u^{1/2}\right)' - \left(\left(\ell^2\right)' u^{-1/2}\right) + \left(\ell^2 (u)' \left(u^{-1/2}\right)'\right) \right) \quad \text{onde } u = d^2 - \ell^2 \\
&= k_c \left((-2\ell)\left(\frac{1}{2}\left(d^2 - \ell^2\right)^{-1/2}\right) - \left((2\ell)\left(d^2 - \ell^2\right)^{-1/2} + \ell^2 \cdot (-2\ell)\left(-\frac{1}{2}\left(d^2 - \ell^2\right)^{-3/2}\right) \right) \right) \\
&= k_c \left(-\ell \left(d^2 - \ell^2\right)^{-1/2} - 2\ell \left(d^2 - \ell^2\right)^{-1/2} - \ell^3 \left(d^2 - \ell^2\right)^{-3/2} \right) \\
&= -\ell k_c \left(3\left(d^2 - \ell^2\right)^{-1/2} + \ell^2 \left(d^2 - \ell^2\right)^{-3/2} \right) \qquad (2.2)
\end{aligned}
$$

Daí, substituindo $\ell = d/\sqrt{2}$, temos:

$$\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}\ell^2}\left[R_c\left(\frac{d}{\sqrt{2}}\right)\right] = -\left(\frac{d}{\sqrt{2}}\right)k_c\left(3\left(d^2-\left(\frac{d}{\sqrt{2}}\right)^2\right)^{-1/2} + \left(\frac{d}{\sqrt{2}}\right)^2\left(d^2-\left(\frac{d}{\sqrt{2}}\right)^2\right)^{-3/2}\right)$$
$$= -\frac{d\ k_c}{\sqrt{2}}\left(3\left(\frac{d^2}{2}\right)^{-1/2} + \frac{d^2}{2}\left(\frac{d^2}{2}\right)^{-3/2}\right) \overset{!}{<} 0$$

Se $-\dfrac{d\ k_c}{\sqrt{2}} < 0$, então

$$3\left(\frac{d^2}{2}\right)^{-1/2} + \left(\frac{d^2}{2}\right)^{1-3/2} > 0 \implies 3 > 0$$

o que é sempre verdadeiro. Como $d^2 \neq 0$, $\ell = d/\sqrt{2}$ é solução única e ótima do problema.

(b) **Resolução:**

Sendo a resistência à flexão $R_f \propto \ell h^2$, temos $R_f = k_f \ell h^2 \quad k \in \mathbb{R}$. Fazendo $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\ell}\left[R_f(\ell)\right] \overset{!}{=} 0$ encontraremos o valor de ℓ para o qual R_f será máxima. Sendo $d^2 = h^2 + \ell^2 \implies h^2 = d^2 - \ell^2$, logo

$$\begin{aligned} R_f = k_f \ell h^2 &= k_f \ell\left(d^2-\ell^2\right) \implies && (2.3)\\ \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\ell}\left[R_f(\ell)\right] &= \left(k_f \ell d^2 - \ell^3\right)' \\ &= k_f\left(\left(\ell d^2\right)' - \left(\ell^3\right)'\right) \\ &= k_f\left(d^2 - 3\ell^2\right) && (2.4) \end{aligned}$$

Fazendo $\frac{\mathrm{d}R_f}{\mathrm{d}\ell} = 0$, temos:

$$\begin{aligned} \frac{\mathrm{d}R_f}{\mathrm{d}\ell} &= 0 \\ \cancel{k_f} d^2 &= \cancel{k_f} 3\ell^2 \implies \\ \ell &= \frac{d}{\sqrt{3}} \quad \text{pois } \ell \overset{!}{>} 0 \end{aligned}$$

Tomando a segunda derivada, temos:

$$\begin{aligned} \frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}\ell^2}\left[R_f(\ell)\right] &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\ell}\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\ell}\left[R_f(\ell)\right]\right) = \left(k_f\left(d^2-3\ell^2\right)\right)' \\ &= -6k_f\ell && (2.5) \end{aligned}$$

Fazendo $\ell = \dfrac{d}{\sqrt{3}}$:

$$\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}\ell^2}\left[R_f\left(\frac{d}{\sqrt{3}}\right)\right] = -6k_f\frac{d}{\sqrt{3}} \overset{!}{<} 0$$

Bastando, para isso, $k_f > 0$.

Portanto, $\ell = d/\sqrt{3}$ é solução única e ótima do problema.

Questão 3

Certos átomos sofrem decaimentos radioativos. Esses decaimentos ocorrem a uma taxa constante, ou seja, a medida que os átomos decaem, a taxa de mudança do número de isótopos radioativos na amostra num determinado instante é proporcional ao número de isótopos presente naquele instante. O ^{14}C é um isótopo radioativo do carbono que tem meia-vida de 5600 anos. A meia-vida é o tempo que leva para uma certa quantidade de átomos se reduzir à metade. Que fração de ^{14}C em uma amostra de rocha estaria presente após 10 mil anos?

Resolução:

Seja $\Omega(t)$ a função que descreve a quantidade de átomos numa amostra radioativa, pelo problema, temos:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left[\Omega(t)\right] = k\Omega(t)$$
$$\int \frac{1}{\Omega(t)}\frac{\mathrm{d}\Omega(t)}{\mathrm{d}t}\,\mathrm{d}t = \int k\,\mathrm{d}t$$

sendo $\mathrm{d}\Omega = \left[\frac{\mathrm{d}\Omega}{\mathrm{d}t}\right]\mathrm{d}t$, temos

$$\int \frac{1}{\Omega}\,\mathrm{d}\Omega = k\,t$$
$$\ln\Omega + \alpha = k\,t$$
$$\Omega(t) = \mathrm{e}^{k\,t-\alpha}$$
$$\Omega(t) = \mathrm{e}^{-\alpha}\cdot\mathrm{e}^{k\,t}$$

onde $\mathrm{e}^{-\alpha} = C, \alpha$ e k são constantes em $\mathbb{R}$.

Pelo enunciado, $\Omega(5600) = \dfrac{1}{2}\Omega(0)$, portanto:

$$\cancel{C}\mathrm{e}^{5600k} = \frac{1}{2}\cancel{C}\cancelto{1}{\mathrm{e}^{0k}} \implies 5600k = \ln 1/2 \implies k = -\frac{\ln 2}{5600}$$

Logo,

$$\Omega(t) = C\exp\left(-\frac{\ln 2}{5600}t\right) \implies \frac{\Omega(10\,000)}{\Omega(0)} = \frac{\cancel{C}\exp\left(-\frac{\ln 2}{5600}10\,000\right)}{\cancelto{1}{C\exp\left(-\frac{\ln 2}{5600}0\right)}} = \left(\frac{1}{2}\right)^{25/14} \approx 29\%$$

Questão 4

A quantidade de luz absorvida ao passar por uma camada delgada de água é proporcional à quantidade de luz que incide sobre a camada e à espessura da camada. Se ao atravessar uma camada de água de 3 m de espessura metade da quantidade inicial de luz é absorvida, que parte dessa quantidade chegará a profundidade de 30 m?

Resolução:

Se a quantidade de luz absorvida é Q_a que é igual a quantidade de luz que incide sobre uma determinada camada de água (Q_i), pelo mesmo raciocínio do problema anterior, temos:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}d}\left[Q_i(d)\right] = k\,Q_i(d) \implies Q_i(d) = C\exp(kt)$$

onde d é a espessura da camada e $C, k \in \mathbb{R}$, onde C é a quantidade inicial.

Como $Q_i(3) = \frac{1}{2}Q_i(0)$, $\mathrm{e}^{3k} = \frac{1}{2} \implies 3k = -\ln 2 \implies k = -\frac{\ln 2}{3}$.

Logo,

$$Q_i(d) = C\exp\left(-\frac{\ln 2}{3}d\right) \implies Q_i(30) = C\left(\frac{1}{2}\right)^{30/3} = C\left(\frac{1}{2}\right)^{10}.$$

Questão 5

Um avião à jato precisa atingir a velocidade de 500 km/s para decolar e tem uma aceleração de $4\,\mathrm{m/s^2}$. Quanto tempo ele leva para decolar e que distância percorre na pista até a decolagem?

Resolução:

Sendo $v(t_f) = v_f = 500/3{,}6\,\mathrm{m/s}$ a velocidade do avião no instante t_f, imediatamente antes da decolagem, e $v(t_i) = v_i = 0$ a velocidade inicial do avião, assim como $x(t_f) = x_f$ a distância percorrida por ele na pista ao final do trajeto considerado e $x(t_i) = x_i = 0$ sua posição inicial, temos:

$$v_f = v_i + \int_{t_i}^{t_f} a(t)\,\mathrm{d}t = 0 + \int_0^{t_f} 4\,\mathrm{d}t = (4t)\Big|_0^{t_f} = 4t_f = \frac{500}{3{,}6} \implies t_f \approx 34{,}72\,\mathrm{s}$$

Daí, temos:

$$x_f = x_i + \int_{t_i}^{t_f} v(t)\,\mathrm{d}t = 0 + \int_0^{t_f} 4t\,\mathrm{d}t = \left(\frac{1}{2}4t^2\right)\Big|_0^{t_f\approx 34{,}72} \approx 2(34.72)^2 = 2411{,}26\,\mathrm{m}$$

Questão 6

Uma partícula, inicialmente em repouso na origem de um sistema de coordenadas, move-se durante 10 s em linha reta, com aceleração crescente segundo a lei

$$a = bt$$

onde t é o tempo e $b = 0{,}5\,\mathrm{m/s^3}$. Trace os gráficos da velocidade v e da posição x da partícula em função do tempo. Qual a expressão analítica de $v(t)$?

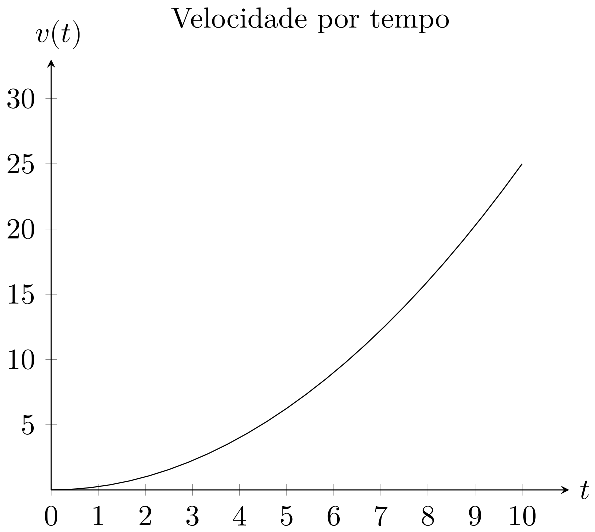
Resolução:

Fazendo

$$v(t) = \int a(t)\,\mathrm{d}t = \int b\,t\,\mathrm{d}t = \frac{1}{2} b\,t^2 + \cancelto{0}{v_0} = \frac{t^2}{4}$$

e, em 10 s, temos

$$v(10) = \frac{10^2}{4} = 25\,\mathrm{m/s^2}$$

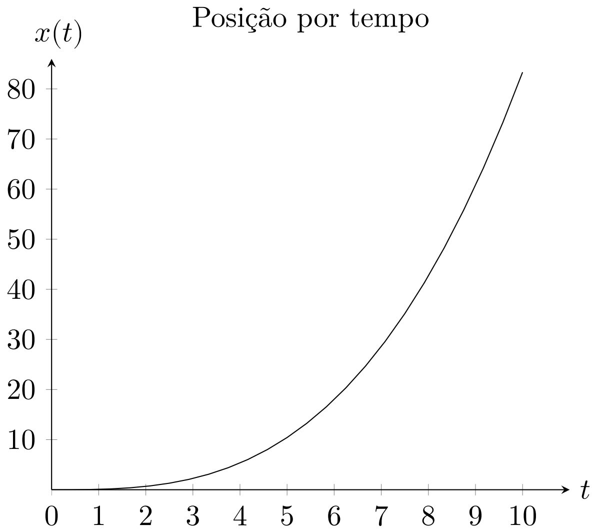


Fazendo

$$x(t) = \int v(t)\,\mathrm{d}t = \int \frac{t^2}{4}\,\mathrm{d}t = \left(\frac{1}{3}\frac{\tau^3}{4}\right) + \cancelto{0}{x_0} = \frac{t^3}{12}$$

e, em 10 s, temos

$$x(10) = \frac{10^3}{12} \approx 83{,}33\,\mathrm{m/s^2}$$

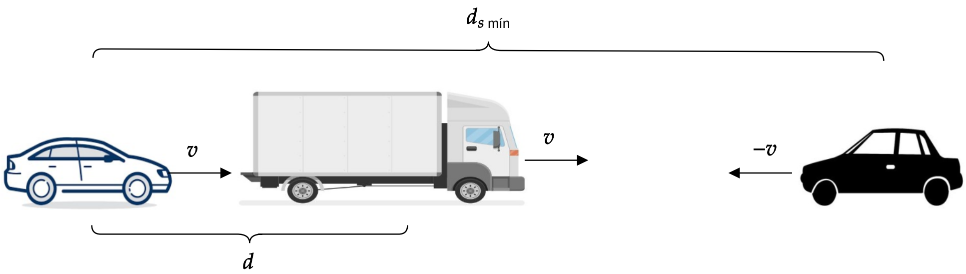


Questão 7

Numa rodovia de mão dupla, um carro encontra-se 15 m atrás de um caminhão (distância entre pontos médios), ambos trafegando a 80 km/h. O carro tem uma aceleração máxima de $3\,\mathrm{m/s^2}$. O motorista deseja ultrapassar o caminhão e voltar para a sua mão 15 m adiante do caminhão. No momento que começa a ultrapassagem, avista um carro que vem vindo em sentido oposto, também a 80 km/h. A que distância mínima precisa estar do outro carro para que a ultrapassagem seja segura?

Resolução:

Considerando a situação como abaixo[1]:



Para encontrar o tempo de ultrapassagem t_u, podemos fazer $s(t_u) = \int_0^{t_u} \left[\int_0^t a(\tau)\,\mathrm{d}\tau\right] \mathrm{d}t \overset{!}{=} 2d$ onde $s(t)$ é o deslocamento no tempo t e $a(t)$ é a aceleração do veículo que deseja fazer a ultrapassagem (considerada constante e de módulo $a(t) = a_{\text{máx}} = 3\,\mathrm{m/s^2}$). Resolvendo, temos

$$\begin{aligned}
s(t_u) &= \int_0^{t_u} \left[\int_0^t a(\tau)\,\mathrm{d}\tau\right] \mathrm{d}t = \int_0^{t_u} \left[\int_0^t a_{\text{máx}}\,\mathrm{d}\tau\right] \mathrm{d}t \\
&= \int_0^{t_u} (a_{\text{máx}}\,\tau)\Big|_0^t \,\mathrm{d}t = \int_0^{t_u} a_{\text{máx}}\,t\,\mathrm{d}t \\
&= \left(\frac{1}{2}a_{\text{máx}}\,t^2\right)\Bigg|_0^{t_u} = \frac{a_{\text{máx}}}{2}t_u^2 \overset{!}{=} 2d
\end{aligned}$$

Daí, temos $t_u = 2\sqrt{d/a_{\text{máx}}}$.

Considerando o tempo mínimo de uma ultrapassagem segura como $t_s = t_u = 2\sqrt{d/a_{\text{máx}}}$, teremos a distância mínima para a ultrapassagem como a integral da velocidade relativa $\mathbf{v_{rel}}$ entre os dois veículos no intervalo de tempo considerado.

Estando os dois indo em sentidos opostos, com velocidade de módulo v, temos:

$$\begin{cases} v_1(t) = v + \displaystyle\int_0^t a(\tau)\,\mathrm{d}\tau \\ v_2(t) = -v \end{cases}$$

Logo,

$$\begin{aligned}
v_{rel}(t) = v_1(t) - \mathbf{v_2}(t) &= v + \int_0^t a(\tau)\,\mathrm{d}\tau - (-v) \\
&= 2v + \int_0^t a(\tau)\,\mathrm{d}\tau
\end{aligned}$$

Portanto,

$$s(t_s) = \int_0^{t_s} v_{rel} = \int_0^{t_s} 2v + \left[\int_0^t a(\tau)\,\mathrm{d}\tau\right] \mathrm{d}t$$

substituindo os valores:

$$\begin{aligned}
&= \int_0^{t_s} 2v + a_{\text{máx}}\,t\,\mathrm{d}t = \left(2\frac{80}{3{,}6}t + \frac{3}{2}t^2\right)\Bigg|_0^{t_s = 2\sqrt{d/a_{\text{máx}}} = 2\sqrt{5}} \\
&= \frac{160}{3.6}(2\sqrt{5}) + \frac{3}{2}(2\sqrt{5})^2 \approx 228{,}76\,\mathrm{m}
\end{aligned}$$

Questão 8

Um trem com aceleração máxima a e desaceleração máxima f (magnitude da aceleração de freamento) tem de percorrer uma distância d entre duas estações. O maquinista pode escolher entre (a) seguir com a aceleração máxima até certo ponto e a partir daí frear com desaceleração máxima, até chegar, ou; (b)

[1] Todos as resoluções nessa lista consideram um sistema de coordenadas padrão, com os eixos x e y na horizontal, e o eixo z na vertical, e $\hat{\imath}, \hat{\jmath}$ e $\hat{\mathbf{k}}$ sendo vetores unitários apontando no sentido positivo de x, y e z, respectivamente, com origem inercial e, a não ser que esteja especificada, irrelevante. Também adotamos a notação $|\mathbf{v}| = v$.

acelerar até uma certa velocidade, mantê-la constante durante algum tempo e depois frear até a chegada. Mostre que a primeira opção é a que minimiza o tempo de percurso (sugestão: utilize gráficos $v \times t$) e calcule o tempo mínimo de percurso em função de a, f e d.

Resolução (Por João Vitor & myself):

Sendo d a área do gráfico, no caso mais geral (trapézio), temos

$$d = \frac{1}{2} v_{max} \left(t_f + (t_b - t_a) \right). \tag{8.1}$$

Sabendo que o trem começa e termina a viagem com $v = 0$, podemos usar a definição de aceleração média para encontrar duas relações

$$v_{max} = a\, t_a \quad \text{e} \tag{8.2}$$
$$-v_{max} = -f \left(t_f - t_b \right) \tag{8.3}$$

isolando os tempos e somando as duas equações, temos

$$\begin{aligned} \frac{v_{max}}{a} + \frac{v_{max}}{f} &= t_f - t_b + t_a \\ v_{max} \left(\frac{f + a}{f\,a} \right) &= t_f - \Delta t, \quad \Delta t = t_b - t_a \\ v_{max} &= \left(t_f - \Delta t \right) \frac{f\,a}{f + a}. \end{aligned} \tag{8.4}$$

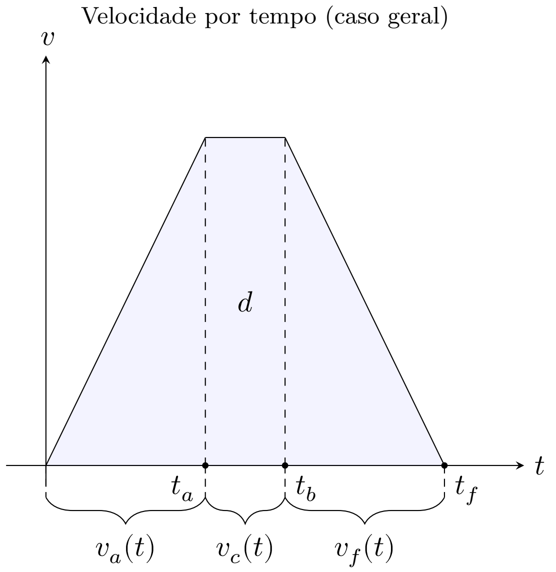
Substituindo em 8.1 e isolando t_f, temos

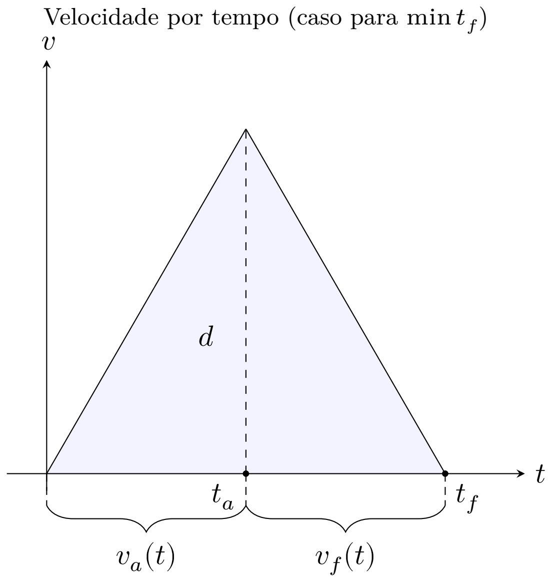
$$\begin{aligned} d &= \frac{1}{2} \left(t_f - \Delta t \right) \left(t_f + \Delta t \right) \frac{f\,a}{f + a} \\ t_f^2 - \Delta t^2 &= \frac{2d\,(f + a)}{f\,a} \\ t_f &= \sqrt{\frac{2d\,(f + a)}{f\,a} + \Delta t^2}. \end{aligned}$$

Sendo o primeiro termo da raiz uma constante, denotemos ele por C. Vamos, então, derivar t_f com respeito à Δt e igualar a zero, a fim de encontrar um mínimo:

$$\frac{\mathrm{d}t_f}{\mathrm{d}\Delta t} = 2\Delta t \frac{1}{2} \frac{1}{\sqrt{C + \Delta t^2}} = 0 \implies \Delta t = 0$$

Dessa forma, sabemos que t_f é mínimo quando $t_a = t_b$, e o trecho para o qual $v =$const. não existe.





Assumindo o caso onde t_f é mínimo,

$$d = \frac{v_{max}\, t_f}{2} \implies t_f = \frac{2d}{v_{max}} \tag{8.5}$$

Para um movimento acelerado, dada uma velocidade inicial v_0, uma velocidade final v e uma aceleração qualquer a, temos $t = (v - v_0)/a$. Para um dado deslocamento d, temos

$$\begin{aligned}
d &= v_0\, t + \frac{1}{2} a\, t^2 \\
&= v_0 \frac{(v - v_0)}{a} + \frac{1}{2} a \left(\frac{(v - v_0)}{a} \right)^2 \\
&= \frac{2v_0\,(v - v_0) + (v - v_0)^2}{2a} \\
&= \frac{2v_0\, v - 2v_0^2 + v^2 - 2v\, v_0 + v_0^2}{2a} \\
2a\, d &= v^2 - v_0^2 \quad \textit{The infamous Torricelli equation.}
\end{aligned} \tag{8.6}$$

Sendo $d = d_a + d_f$ também, onde d_a e d_f são as distâncias percorridas durante a aceleração a e a aceleração f, respectivamente. Substituindo em 8.6, temos

$$v_{max}^2 - 0^2 = 2a\, d_a \implies d_a = \frac{v_{max}^2}{2a}$$
$$0^2 - v_{max}^2 = -2f\, d_f \implies d_f = \frac{v_{max}^2}{2f}$$

Portanto

$$\begin{aligned}
d &= d_a + d_f = \frac{v_{max}^2}{2a} + \frac{v_{max}^2}{2f} \\
d &= \frac{v_{max}^2\,(f + a)}{2a\, f}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
v_{max}^2 &= \frac{2a\, f\, d}{f + a} \\
v_{max} &= \sqrt{\frac{2a\, f\, d}{f + a}} \quad \text{Pois a velocidade deve ser positiva.}
\end{aligned}$$

Substituindo em 8.5, temos:

$$t_f = \frac{2d}{\sqrt{\dfrac{2a\, f\, d}{f + a}}} = 2d \sqrt{\frac{f + a}{2a\, f\, d}}$$
$$t_f = \sqrt{\frac{4d^2\,(f + a)}{2a\, f\, d}} = \sqrt{\frac{2d\,(f + a)}{a\, f}}$$

Nota: Repare que, sendo $\Delta t = 0$ no caso do tempo mínimo, bastaria substituir 8.4 em 8.5 para encontrar o mesmo resultado.

Questão 9

Um foguete para pesquisas meteorológicas é lançado verticalmente para cima. O combustível, que lhe imprime uma aceleração de 1,5g (g é a aceleração da gravidade) durante o período de queima, esgota-se após 1/2 minuto.

(a) Qual seria a altitude máxima atingida pelo foguete, se pudéssemos desprezar a resistência do ar?

Resolução:

Para encontrar a altura máxima devemos encontrar $h(t_s)$, onde t_s é o tempo de subida do foguete, devemos resolver $v(t) \stackrel{!}{=} 0$, pois neste momento teremos a inversão do sentido da velocidade do foguete, que deve ter alcançado sua altitude máxima. Sendo a velocidade do foguete $v(t)$ composta por duas acelerações (da gravidade g e da queima do combustível a_c), as quais podemos descrever por:

$$\begin{cases} a_c(t) = 1{,}5g \\ g(t) = -g \end{cases}$$

Integrando ambas com respeito ao tempo t e somando-as, encontramos a velocidade $v(t_s)$:

$$\begin{aligned} v(t) &= \int_0^t \left(a_c(t') + g(t')\right) \mathrm{d}t' \\ &= \int_0^{30} 1{,}5g \,\mathrm{d}t' + \int_{30}^{t_s} -g \,\mathrm{d}t' \\ &= (1{,}5g\,t')\Big|_0^{30} + (-g\,t')\Big|_{30}^{t} \\ &= g\,(45 - (t-30)) \\ v(t) &= g\,(75 - t) \end{aligned} \tag{9.1}$$

Para encontrar o tempo de subida t_s, basta fazermos $v(t_s) = 0$:

$$g\,(75 - t_s) = 0 \implies t_s = 75\,\mathrm{s}$$

A partir disso podemos encontrar o deslocamento $s(t = t_s)$ integrando a velocidade $v(t)$ com respeito a t:

$$\begin{aligned} s(t_s) &= \int_0^{t_s} v(t)\,\mathrm{d}t \\ &= \int_0^{30} \left[\int_0^t a_c(\tau)\,\mathrm{d}\tau\right] \mathrm{d}t + \int_{30}^{t_s = 75\,\mathrm{s}} g\,(75 - t)\,\mathrm{d}t \end{aligned}$$

fazendo $u = t - 30 \implies \mathrm{d}u = \mathrm{d}t$, temos

$$\begin{aligned} &= g\left(\int_0^{30} 1{,}5t\,\mathrm{d}t + \int_0^{45} 75 - (u+30)\,\mathrm{d}u\right) \\ &= g\left(\left(\frac{1{,}5}{2}t^2\right)\Big|_0^{30} + \left(45u - \frac{1}{2}u^2\right)\Big|_0^{45}\right) \\ &= g\left(\frac{1{,}5}{2}30^2 + 45\cdot 45 - \frac{45^2}{2}\right) = g\frac{45\cdot(30 + 2\cdot 45 - 45)}{2} \\ s(t_s) &= \frac{45\cdot 75}{2}g \approx 16{,}5\,\mathrm{km} \quad (\text{Considerando } g = 9{,}81\,\mathrm{m/s^2}) \end{aligned}$$

(b) Com que velocidade (em m/s e km/h) e depois de quanto tempo, ele voltaria a atingir o solo?

Resolução:

Para encontrar o momento em que o foguete atinge o solo novamente, devemos encontrar $s(t) = 0, t > 0$. Podemos adotar um novo $s(t+75) = s_q(t)$, onde consideramos apenas a queda do foguete. Podemos descrever $s_q(t)$ como

$$\begin{aligned} s_q(t) &= s(75) + \int_0^t v_q(\tau)\,\mathrm{d}\tau \\ &= s(75) + \int_0^t \int_0^\tau -g\,\mathrm{d}t'\,\mathrm{d}\tau \\ &= s(75) + \int_0^t -g\,\tau\,\mathrm{d}\tau \\ &= s(75) - \frac{g}{2}\left(t^2\right) \overset{!}{=} 0 \end{aligned}$$

Resolvendo, temos:

$$\begin{aligned} \frac{45 \cdot 75}{2} g = \frac{1}{2} g(t^2) \implies \\ t = \sqrt{45 \cdot 75} \approx 58{,}09\,\mathrm{s} \end{aligned}$$

Utilizando a equação 9.1, para $t_t = 58{,}09 + 75 = 133{,}09\,\mathrm{s}$ e $g = 9{,}81\,\mathrm{m/s^2}$, temos:

$$|v(133{,}09)| = |g\,(75 - 133{,}09)\,| = |-58{,}09g| \approx 569{,}86\,\mathrm{m/s} \approx 2051{,}51\,\mathrm{km/h}$$

Questão 10

Um Boeing 777 está se dirigindo à porta de desembarque em um aeroporto após aterrissagem. Em um determinado instante o avião se encontra na posição da figura 1, onde as rodas dianteiras estão alinhadas com a linha amarela que ele deve seguir até o ponto de estacionamento, enquanto as rodas traseiras estão posicionadas de forma a rodar o corpo do avião para alinhá-lo também com a mesma linha. Mostre que o alinhamento nunca poderá ser perfeito. Admita que a distância entre as rodas dianteiras e traseiras seja de 30 m, que o avião esteja se deslocando a 5 m/s e que inicialmente a distância das rodas traseiras da linha amarela seja de 10 m. Quanto tempo leva o avião até que a distância das rodas traseiras da linha amarela seja de 10 cm? Qual o deslocamento do avião durante esse tempo?

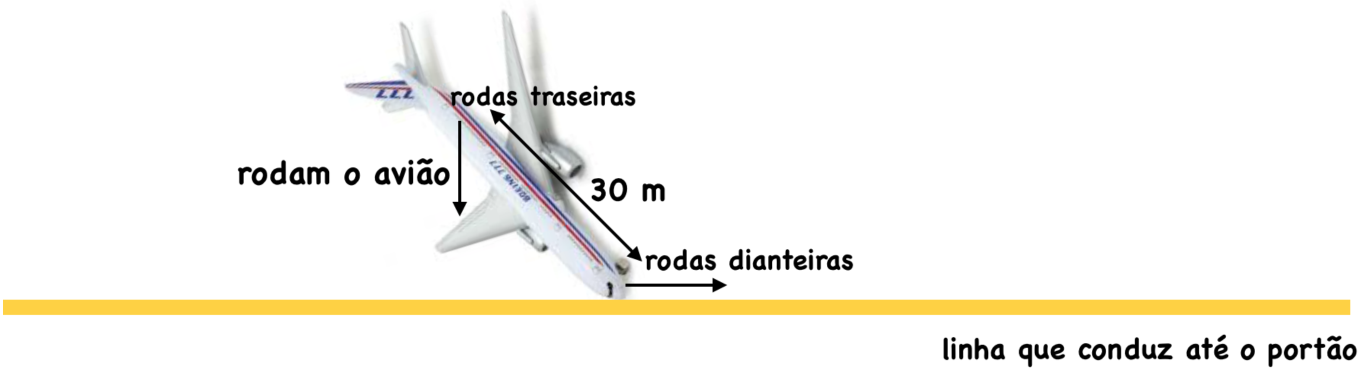
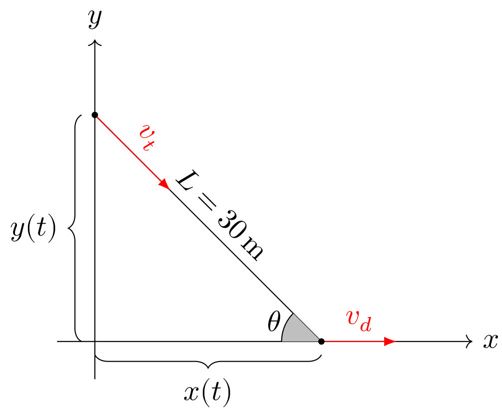


Figura 1: Avião se posicionando para entrar no portão de desembarque.

Resolução (Por Anahí & monitores):

Montando o diagrama ao lado, e assumindo que a velocidade das rodas traseiras $v_t(t)$ seja constante e de módulo 5 m/s, e que $v_d(t)$ seja a velocidade das rodas dianteiras, temos.



$$\cos\theta = \frac{x(t)}{L} \tag{10.1}$$

$$\sin\theta = \frac{y(t)}{L} \tag{10.2}$$

e daí, encontrando a velocidade com que a posição vertical das rodas traseiras varia, temos:

$$\begin{aligned} \dot{y} &= -v_t \sin\theta \\ &= -\frac{v_t}{L} y(t) \end{aligned}$$

que é uma equação diferencial, cuja resolução recai em:

$$y(t) = A \exp\left(-\frac{v_t}{L} t\right)$$

Analisando a condição inicial, dada no problema, temos

$$y(0) = 10 \implies A = 10$$

o que nos dá a posição com forma geral:

$$y(t) = 10 \exp\left(-\frac{t}{6}\right) \tag{10.3}$$

Sabendo que a função exponencial pura possui assíntota no eixo x e, portanto, as rodas traseiras nunca estarão perfeitamente alinhadas às dianteiras.

Para encontrar o tempo até que as rodas traseiras tenham 10 cm de distância da linha amarela, podemos igualar 10.3 ao valor desejado, resolvendo para o tempo

$$\begin{aligned} y(t) &= 10^{-1} \\ 10\,\mathrm{e}^{-\dfrac{t}{6}} &= 10^{-1} \\ -\frac{t}{6} &= \ln 10^{-2} \\ t &= 12 \ln 10 \approx 27{,}631\,\mathrm{s} \end{aligned}$$

Para encontrar a distância percorrida na horizontal nesse tempo, devemos encontrar a função $x_d(t)$.

Sabemos que L é constante, e que sempre vale

$$L^2 = x^2(t) + y^2(t) \implies x(t) = \sqrt{L^2 - y^2(t)}$$

Também temos que:

$$x(t) = x_d(t) - x_t(t)$$

igualando as duas e derivando

$$\begin{aligned} \sqrt{L^2 - y^2(t)} &= x_d(t) - x_t(t) \implies \\ \left(\sqrt{L^2 - y^2(t)}\right)' &= \left(x_d(t) - x_t(t)\right)' \\ u' \left(u^{1/2}\right)' &= x_d'(t) - x_t'(t) \quad \text{onde } u = L^2 - y^2(t) \\ \left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left[L^2 - y^2(t)\right]\right) \frac{1}{2}\left(L^2 - y^2(t)\right)^{-1/2} &= v_d(t) - v_t(t)\cos\theta \\ \left(\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}v}\left[L^2 - v^2\right]\right) \frac{1}{2}\left(L^2 - y^2(t)\right)^{-1/2} &= v_d(t) - v_t(t)\frac{x(t)}{L} \quad \text{onde } v = y(t) \\ \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}\left(-2y(t)\right) \frac{1}{2}\left(L^2 - y^2(t)\right)^{-1/2} &= v_d(t) - \frac{1}{6}x(t) \end{aligned}$$

$$-y(t)\dot{y}\left(L^2 - y^2(t)\right)^{-1/2} = v_d(t) - \frac{\sqrt{L^2 - y^2(t)}}{6} \tag{10.4}$$

Derivando 10.3, temos

$$\dot{y}(t) = -\frac{10}{6}\exp\left(-\frac{t}{6}\right) = -\frac{1}{6}y(t)$$

Substituindo em 10.4 e isolando $v_d(t)$

$$\begin{aligned} v_d(t) &= \frac{\sqrt{L^2 - y^2(t)}}{6} - y(t)\left(-\frac{1}{6}y(t)\right)\left(L^2 - y^2(t)\right)^{-1/2} \\ &= \frac{\left(\sqrt{L^2 - y^2(t)}\right)^2 + y^2(t)}{6\sqrt{L^2 - y^2(t)}} \\ &= \frac{L^2}{6\sqrt{L^2 - y^2(t)}} \end{aligned}$$

Integrando com respeito a t, temos

$$\int v_d(t)\,\mathrm{d}t = x_d(t) = \int \frac{L^2}{6\sqrt{L^2 - y^2(t)}}\,\mathrm{d}t$$

fazendo $y = y(t) \implies \mathrm{d}y = -y(t)/6\,\mathrm{d}t$

$$
\begin{aligned}
&= \int \frac{L^2}{6\sqrt{L^2 - y^2}} \left(-\frac{6}{y}\right) \mathrm{d}y \\
&= -\int \frac{L^2}{y\sqrt{L^2 - y^2}} \,\mathrm{d}y
\end{aligned}
$$

fazendo $y = L\,\sin\varphi \implies \mathrm{d}y = L\,\cos\varphi\,\mathrm{d}\varphi$

$$
\begin{aligned}
&= -\int \frac{L^2\,(\cancel{L}\,\cos\varphi)}{(\cancel{L}\,\sin\varphi)\sqrt{L^2 - (L\,\sin\varphi)^2}} \,\mathrm{d}\varphi \\
&= -\int \frac{L^2\cos\varphi}{\sin\varphi\sqrt{L^2\,(1 - \sin^2\varphi)}} \,\mathrm{d}\varphi \\
&= -\int \frac{L^2\cos\varphi}{\sin\varphi\sqrt{(L\cos\varphi)^2}} \,\mathrm{d}\varphi \\
&= -\int \frac{L^2\cancel{\cos\varphi}}{L\sin\varphi\,\cancel{\cos\varphi}} \,\mathrm{d}\varphi \\
&= -L\int \frac{1}{\sin\varphi} \,\mathrm{d}\varphi \\
&= -L\,\ln|\csc\varphi - \cot\varphi| + C \\
&= -L\,\ln\left|\frac{1}{\sin\varphi} - \frac{\cos\varphi}{\sin\varphi}\right| + C \\
&= -L\,\ln\left|\frac{L}{y(t)}\left(1 - \sqrt{1 - \left(\frac{y(t)}{L}\right)^2}\right)\right| + C
\end{aligned}
$$

Tomando a integral definida e substituindo os valores, temos

$$
\begin{aligned}
\int_0^{t=27.631} v_d(\tau)\,\mathrm{d}\tau = x(t = 27.631) &= \left(-30\,\ln\left|\frac{30}{y(\tau)}\left(1 - \sqrt{1 - \left(\frac{y(\tau)}{30}\right)^2}\right)\right| + C\right)\Bigg|_0^{t=27.631} \\
&= -30\,\ln\left|\frac{30}{10^{-1}}\left(1 - \sqrt{1 - \left(\frac{10^{-1}}{30}\right)^2}\right)\right| \approx 191{,}91\,\mathrm{m}
\end{aligned}
$$

que é o deslocamento horizontal do avião.