

QUESTÃO 1

Matéria escura em aglomerados de galáxias

Em 1933, o astrônomo suíço-americano Fritz Zwicky, baseando-se em medidas publicadas por Edwin Hubble e Milton Humason, em 1931, foi o primeiro astrônomo a trazer provas convincentes acerca da existência da chamada *matéria escura*¹. Vamos entender como isso aconteceu.

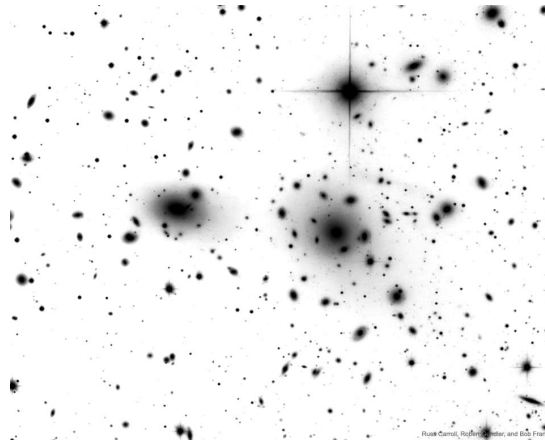


Figura 1: Aglomerado de galáxias *Coma*. Quase todo objeto mostrado na imagem é uma galáxia e é um dos aglomerados mais densos hoje conhecido, contendo milhares de galáxias. Cada uma das galáxias possui bilhões de estrelas. Ainda que próximo de nós se comparado à distância de outros aglomerados conhecidos, a luz de Coma demora cerca de centenas de milhares de anos para chegar até nós. Ainda mais: o aglomerado é tão grande que a luz demora milhões de anos para ir de um lado ao outro do aglomerado. [Crédito: Russ Carroll, Robert Gendler, & Bob Franke; Dan Zowada Memorial Observatory]

Zwicky observou que a dispersão (desvio padrão) da componente da velocidade ao longo da linha de visada, também chamada de velocidade radial, de oito galáxias individuais no aglomerado é da ordem de $\sigma_r = \sqrt{\langle v_r^2 \rangle - \langle v_r \rangle^2} \sim 10^3$ km/s. Esta medida nos dá uma ótima estimativa da energia cinética do sistema. Contudo, a quantidade de matéria e gás visíveis no aglomerado não são capazes de produzir atração gravitacional suficiente para manter o sistema ligado! Tal fato já havia sido notado por Hubble e Humason, mas foi Zwicky quem aplicou o teorema do virial para estimar a massa do aglomerado (até onde sabemos).

(0) **Unidades:** Utilizaremos o parsec para medir distâncias. Tal unidade é comumente adotada em cosmologia e astronomia galáctica e extragaláctica:

$$1 \text{ pc} \approx 3 \cdot 10^{13} \text{ km}$$

Também trabalharemos com anos (quanto vale um ano em segundos?). Para a sua sanidade, escreva a velocidade das galáxias nessas unidades (pc/ano) e trabalhe com essas unidades no que segue!

(1) Primeiro, vamos entender por que é razoável utilizar o teorema do virial nessa situação. Assuma que o raio e idade do aglomerado são da ordem de $\sim 1,5$ Mpc, onde $1 \text{ Mpc} = 1 \cdot 10^6 \text{ pc}$, e $\sim 10^{10}$ anos, respectivamente. Estime quantos anos leva para uma galáxia atravessar o aglomerado e, com isso, estime quantas vezes cada galáxia pode cruzar, em média, o aglomerado. Argumente porque podemos supor que o aglomerado de Coma encontra-se em equilíbrio e, portanto, podemos utilizar o teorema do virial.

¹Apesar do termo ter-se popularizado com o trabalho de Zwicky, ele não foi o primeiro a introduzir o termo em context astronômico. Em 1906, Henri Poincaré já havia discutido a possibilidade da existência de “matière obscure” dentro da nossa própria galáxia [Poincaré, H. “The Milky Way and the Theory of Gases”, *Popular Astronomy*, v. 14, p.475-488, 1906]. Se você não sabia, o Teorema do Virial foi derivado pela primeira vez no contexto da teoria cinética dos gases. Ele estava sendo utilizado por Kelvin (sim, o cara da termodinâmica) na tentativa de estimar a densidade de matéria na Via Láctea.

Resolução:


Sendo a velocidade radial em relação a um observador na Terra, podemos estabelecer que a medida de dispersão σ_r das oito galáxias do aglomerado consideradas no problema é uma boa medida da velocidade relativa média das galáxias em relação a Coma.

Convertendo a medida de σ_r dada, temos:

$$\sigma_r = \frac{1 \cdot 10^3 \text{ km}}{1 \text{ s}} \cdot \frac{1 \text{ pc}/3 \cdot 10^{13} \text{ km}}{(1 \text{ ano}/365 \text{ dias}) \cdot (1 \text{ dia}/24 \text{ h}) \cdot (1 \text{ h}/60 \text{ min}) \cdot (1 \text{ min}/60 \text{ s})} \approx 1 \cdot 10^{-3} \text{ pc/ano}$$

Dessa forma, podemos estimar que uma galáxia qualquer leva

$$\frac{2 \cdot 1,5 \cdot 10^6 \text{ pc}}{1 \cdot 10^{-3} \text{ pc/ano}} = 3 \cdot 10^9 \text{ anos}$$

para cruzar o aglomerado, e, portanto, cruzou-o, em média $1 \cdot 10^{10}/3 \cdot 10^9 \approx 3,3$ vezes. 

Dessa forma, assumindo que as galáxias tem idade aproximada à do aglomerado, podemos concluir que, na média de 10^{10} anos, todas as galáxias já puderam se locomover algumas vezes por toda a sua extensão, e que o sistema encontra-se em equilíbrio dinâmico, de tal forma que vale o teorema do virial.

(2) Vamos fazer então a aproximação da vaca esférica: trate o aglomerado como sendo uma esfera homogênea de massa M e raio R . Mostre que a energia potencial total é dada por

$$u = -\frac{3}{5} \frac{G M^2}{R}$$

Dica: considere a energia potencial gravitacional que uma casca esférica de espessura dr (qual é a massa $m(r)$ da casca?) sente na presença de um núcleo esférico sólido de raio r e densidade ρ constante (e qual é a massa $M(r)$ do núcleo?).

Resolução:

Sendo a energia potencial de uma massa m em relação a um ponto de massa $M(r)$

$$U(r) = - \int_{\infty}^r \mathbf{F}(\mathbf{r}') \cdot d\mathbf{r}' = - \frac{G M(r) m}{r},$$

podemos tomar o diferencial dU em relação a uma massa dm e, daí, temos:

$$dU = - \frac{G M(r) dm}{r}$$

integrando de 0 à R , temos

$$\int_{U(0)}^{U(R)} dU = \int_{M(0)}^{M(R)} - \frac{G M(r) dm}{r}$$

aproximando o objeto como uma esfera, temos $M(r) = \frac{4}{3}\pi \rho r^3 \Rightarrow dm = 4\pi \rho r^2 dr$, portanto

$$\begin{aligned}
 U &= \int_0^R -\frac{G\left(\frac{4}{3}\pi \rho r^3\right)(4\pi \rho r^2 dr)}{r} \\
 &= -\frac{G\left(\frac{4}{3}\pi \rho r^3\right)(4\pi \rho r^2 dr)}{r} \int_0^R r^5 dr \\
 &= -\frac{16}{3}G\pi^2 \rho^2 \int_0^R r^4 dr \\
 &= -\frac{16}{3}G\pi^2 \rho^2 \left(\frac{1}{5}r^5\right) \Big|_0^R \\
 &= -\frac{3}{5}\frac{G}{R} \left(\frac{4}{3}\pi \rho R^3\right)^2 \\
 U &= -\frac{3}{5}\frac{G M^2}{R}
 \end{aligned}$$

□

(3) Uma vez que você se convenceu que o sistema pode ser tratado como estando em equilíbrio, considere a energia cinética média, $K = \frac{1}{2}M\langle v^2 \rangle$, e utilize o teorema do virial para expressar a massa M do aglomerado em termos da média do raio R do aglomerado e do quadrado da velocidade tridimensional, $\langle v_{\text{tot}}^2 \rangle = \langle v_x^2 + v_y^2 + v_z^2 \rangle$.

Resolução:

Pelo teorema do virial, temos

$$\begin{aligned}
 2\langle K \rangle &= -\langle U \rangle \\
 2\left(\frac{1}{2}M\langle v_{\text{tot}}^2 \rangle\right) &= -\left(-\frac{3}{5}\frac{G M^2}{\langle R \rangle}\right) \\
 M &= \frac{5}{3}\frac{\langle R \rangle \langle v_{\text{tot}}^2 \rangle}{G}.
 \end{aligned} \tag{1.1}$$

(4) Com os valores de raio e dispersão de velocidades assumidos para o aglomerado de Coma, estime a massa do aglomerado. Lembre-se que essa massa é a massa necessária para manter o sistema (aglomerado) coeso. *Dica: assuma que a dispersão de velocidades total é isotrópica, ou seja, não depende da direção, e que $\langle v_{\text{tot}} \rangle = \langle v_r \rangle = 0$!*

Resolução:

Pela relação da dispersão, temos

$$\langle v_r^2 \rangle = \sigma_r^2 + \langle v_r \rangle^2,$$

e o quadrado da velocidade total $\langle v_{\text{tot}}^2 \rangle$ pode ser dado por

$$\langle v_{\text{tot}}^2 \rangle = \langle v_r^2 \rangle + \langle v_t^2 \rangle = \sigma_r^2 + \langle v_r \rangle^2 + \langle v_t^2 \rangle,$$

onde $\langle v_t^2 \rangle$ é a média dos quadrados das velocidades tangenciais.

Assumindo a isotropia da dispersão das velocidades, podemos considerar $\langle v_r^2 \rangle = \langle v_t^2 \rangle = \sigma_r^2$ e, portanto, de 1.1, temos:

$$M = \frac{5}{3}\frac{\langle R \rangle \langle v_{\text{tot}}^2 \rangle}{G} = \frac{5}{3}\frac{\langle R \rangle (2\sigma_r^2)}{G}$$

substituindo os valores, temos

$$M \approx \frac{5}{3} \frac{1,5 \text{ Mpc} \left(2 \cdot (1 \cdot 10^3 \text{ km/s})^2 \right)}{4 \cdot 10^{-3} \text{ pc M}_{\odot}^{-1} (\text{km/s})^2} = 1,25 \cdot 10^{15} \text{ M}_{\odot} \quad \text{💬}$$

(5) Compare o resultado do item anterior com os valores da massa estelar $M_{\star} \approx 3 \cdot 10^{13} \text{ M}_{\odot}$ e da massa em forma de gás $M_{\text{gas}} \approx 2 \cdot 10^{14} \text{ M}_{\odot}$ medidos para o aglomerado. Como isso se traduz na porcentagem de matéria bariônica (ou seja, gás e estrelas)? O que podemos concluir? Note que todas as nossas conclusões estão baseando-se na hipótese fundamental de que o teorema do virial pode ser aplicado ao sistema. Ou seja, estamos tratando as galáxias no aglomerado como partículas em um gás.

Dados: Considere $G \approx 4 \cdot 10^{-3} \text{ pc M}_{\odot}^{-1} (\text{km/s})^2$, onde $1 \text{ M}_{\odot} \approx 2 \cdot 10^{30} \text{ kg}$ é a massa solar, unidade padrão de massa em astronomia.

Resolução:

Somando as massas estelar e em forma de gás do aglomerado, temos a razão

$$\frac{M_{\star} + M_{\text{gas}}}{M} \approx \frac{3 \cdot 10^{13} \text{ M}_{\odot} + 2 \cdot 10^{14} \text{ M}_{\odot}}{1,25 \cdot 10^{15} \text{ M}_{\odot}} \approx 0,18 = 18 \% \quad \text{💬}$$

Portanto, podemos concluir que, como somente 18% da massa é bariônica, os outros 82% devem ser massa não bariônica, ou, “*matière obscure*”.