Nome:

Número USP:

Provinha II

① O cálculo é um exemplo de teoria matemática que tem sua origem em problemas práticos e foi revolucionário em diversas áreas do conhecimento humano, por exemplo, na biologia.

Se pensarmos nas derivadas como taxa de variação, podemos construir um modelo, chamado modelo SIR, para a evolução de uma epidemia. Primeiramente, nosso modelo será composto de três tipos de pessoa: **suscetíveis**, **infectados** e **recuperados**. Chamaremos o número de indivíduos de cada tipo em um dado tempo de $S(t)$, $I(t)$ e $R(t)$, respectivamente. Esperamos que um indivíduo suscetível passe a ser infectado ao se encontrar com indivíduos infectados, ou seja, a taxa de contaminação deve ser proporcional ao produto $I(t)S(t)$; $R(t)$, por sua vez, deve variar apenas com certa taxa de recuperação; a taxa de crescimento de $I(t)$ deve ser proporcional ao produto $I(t)S(t)$ e deve haver outra componente dependendo da taxa de recuperação. No final das contas nosso modelo é descrito por

$$\begin{aligned}
&\frac{dS}{dt}(t) = -\frac{\beta}{N}I(t)S(t)\\
&\frac{dI}{dt}(t) = \frac{\beta}{N}I(t)S(t) - \gamma I(t)\\
&\frac{dR}{dt}(t) = \gamma I(t)
\end{aligned}$$

onde β e γ são as taxas de infecção e recuperação, respectivamente, e N é o número total de indivíduos do problema.

NÃO ENTRE EM PÂNICO! Em momentos de pandemia e provinha deve-se manter a calma.

(a) Verifique, a partir das equações acima, que a soma $S(t)+I(t)+R(t)$ é constante e argumente que essa contante deve ser igual a N, ou seja, o número total de indivíduos da população. (Sugestão: some as equações).

(b) Coloque $\gamma I(t)$ em evidência na segunda equação e argumente porque se $\frac{\beta S(0)}{\gamma N} > 1$ haverá epidemia e se $\frac{\beta S(0)}{\gamma N} < 1$ não haverá epidemia.

(c) Verifique que $S(t) = S_0 e^{-\frac{\beta}{\gamma N}(R(t)-R_0)}$ satifaz a primeira equação acima. (Sugestão, derive $S(t)$ e use a terceira equação para eliminar $\frac{dR}{dt}$).

Extra - As seguintes questões são opcionais. Recomendamos que pensem sobre elas em casa e discutam entre si e nas monitorias.

(d) Pense nas derivadas como frações, por exemplo, $\frac{dS}{dt}$ como $\frac{\Delta S}{\Delta t}$. Agora divida a primeira equação pela terceira e obtenha a equação diferencial cuja solução foi dita acima, a saber, $S(t) = S_0 e^{-\frac{\beta}{\gamma N}(R(t)-R_0)}$.

(e) O sistema de equações acima não possui solução analítica. Que tal então construir um programa de computador que resolva esse sistema numericamente? Pense em um método simples para implementar em um programa que calcule numericamente e faça um gráfico de $S(t)$, $I(t)$ e $R(t)$. Depois vá a uma monitoria ou procure um monitor para te ajudar com isso.