Resolução – Lista 1 (Física I – CM0112)

Isabella B. – 11810773

Questão 1

Considere que os cossenos diretores α, β e γ de um vetor são os tradicionais cossenos relacionados aos ângulos que este vetor possui em relação aos eixos coordenados x, y e z. Prove que $\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 = 1$, usando geometria e álgebra vetorial.

Resolução:

Seja $\mathbf{v}$ o vetor (não-nulo) que possui cossenos diretores α, β e γ.

Adotando as notações $v = \|v\|$ e $\mathbf{v}_i$ para a projeção ortogonal de um vetor $\mathbf{v}$ sobre o eixo i, e também assumindo a base canônica, temos

$$
\begin{aligned}
v_x &= v\,\alpha \\
v_y &= v\,\beta \\
v_z &= v\,\gamma
\end{aligned}
$$

e, portanto

$$
\begin{aligned}
v^2 &= v_x^2 + v_y^2 + v_z^2 \\
\implies \cancelto{1}{\frac{v^2}{v^2}} &= \frac{(v\,\alpha)^2 + (v\,\beta)^2 + (v\,\gamma)^2}{v^2} \\
\implies \alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 &= 1
\end{aligned}
$$

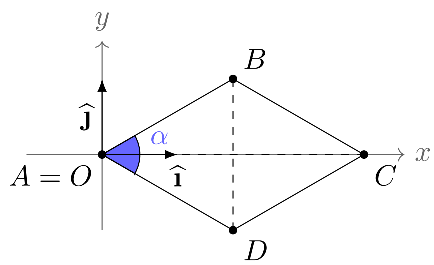
□

Questão 2

Prove que as diagonais de um paralelogramo equilátero são perpendiculares.

Resolução:

Seja $ABCD$ um paralelogramo equilátero num plano cartesiano. Adotemos a base canônica $(\hat{\mathbf{\imath}}, \hat{\mathbf{\jmath}})$. Posicionando o vértice A na origem O e a diagonal AC sobre o eixo x, temos $\hat{\mathbf{\imath}}$ apontando na direção da diagonal.



Seja α o ângulo de abertura $\angle BAD$ e l o comprimento de qualquer um de seus lados, temos $B = (l\cos(\alpha/2), l\sin(\alpha/2))$, $D = (l\cos(\alpha/2), -l\sin(\alpha/2))$ e o vetor $\hat{\mathbf{\jmath}}$, portanto, aponta na direção da diagonal BD ($\mathbf{BD} = D - B = (l\cos(\alpha/2) - l\cos(\alpha/2), -l\sin(\alpha/2) - l\sin(\alpha/2)) = (0, -2l\sin(\alpha/2))$, e não possui componente na horizontal).

Como $\hat{\mathbf{\imath}}$ e $\hat{\mathbf{\jmath}}$ são perpendiculares (por definição), as diagonais de $ABCD$ também o são.

□

Questão 3

Uma nave está subindo verticalmente sobre a superfície do planeta X cuja aceleração gravitacional é de $2\,\mathrm{m/s^2}$. Quando se encontra a $35\,\mathrm{m}$ de altura e tem uma velocidade de $2\,\mathrm{m/s}$ repentinamente os motores se desligam. Qual é a rapidez em m/s com que ela se choca com o solo?

Resolução:

Adotemos um referencial com origem no solo e eixo vertical apontando para cima a partir de sua superfície. Seja a gravidade do planeta $g = 2\,\mathrm{m/s^2}$, seja $h = 35\,\mathrm{m}$ a altura percorrida pela nave antes dela cair, seja $a(t) = -g$ sua aceleração e $v(0) = v_0 = 2\,\mathrm{m/s}$ sua velocidade inicial.

Sendo a velocidade da nave no tempo a integral de sua aceleração

$$v(t) = \int a(t)\,\mathrm{d}t = -g\,t + C_1, \quad C_1 \in \mathbb{R}$$

como $v(t=0) = v_0$, temos $v_0 = C$, e

$$v(t) = -g\,t + v_0. \tag{3.1}$$

Integrando $v(t)$ temos o deslocamento da nave

$$y(t) = \int v(t)\,\mathrm{d}t = -\frac{1}{2}g\,t^2 + v_0\,t + C_2, \quad C_2 \in \mathbb{R}$$

como $y(t=0) = h$, temos $C_2 = h$, e

$$y(t) = -\frac{1}{2}g\,t^2 + v_0\,t + h. \tag{3.2}$$

Fazendo $v(t) = v$ e isolando o tempo em 3.1, temos

$$t = \frac{v_0 - v}{g},$$

fazendo $y(t) = y$ e substituindo em 3.2, temos

$$\begin{aligned} y &= -\frac{1}{2}g\left(\frac{v_0 - v}{g}\right)^2 + v_0\left(\frac{v_0 - v}{g}\right) + h \\ 2g\,(y-h) &= (v_0 - v)\,(v_0 + v) \\ v^2 &= v_0^2 - 2g\,(y-h)\,, \end{aligned} \tag{3.3}$$

e, resolvendo para $y = 0$, temos que a velocidade final na colisão da nave com o solo é

$$v = \sqrt{2^2 - 2\cdot 2\cdot(0-35)} = \sqrt{4\,(1+35)} = 12\,\mathrm{m/s}.$$

Questão 4

Um elevador está subindo desde o chão com velocidade constante. No instante T_1 um homem deixa cair uma bola no chão. A bola cai com aceleração uniforme g e bate o solo no instante T_2. Encontre a altura do elevador no tempo T_1.

Resolução:

Fixando o sistema de coordenadas no chão, com o eixo vertical apontando para cima, sejam $a(t) = -g$ a aceleração da bola no tempo, $v(0) = v_0$ sua velocidade inicial (idem à velocidade do elevador) e h_0 sua altura inicial (no momento T_1), podemos encontrar a função $y(t)$ que descreve sua altura no tempo integrando a aceleração duas vezes:

$$\begin{aligned} y(t) &= \int v(t)\,\mathrm{d}t = \int\int a(t)\,\mathrm{d}t\,\mathrm{d}t \\ &= \int -g\,t + C_1\,\mathrm{d}t, \quad C_1 \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

onde $C_1 = v_0$ pelas condições iniciais da velocidade

$$y(t) = \int -g\,t + v_0\,\mathrm{d}t = -\frac{1}{2}g\,t^2 + v_0\,t + C_2, \quad C_2 \in \mathbb{R}.$$

Pelas condições iniciais da posição, temos

$$\begin{aligned} y(T_1) = h &= -\frac{1}{2}g\,T_1^2 + v_0\,T_1 + C_2 \\ C_2 &= \frac{1}{2}g\,T_1^2 - v_0\,T_1 + h, \end{aligned}$$

portanto,

$$y(t) = -\frac{1}{2}g\left(t^2 - T_1^2\right) + v_0\,(t - T_1) + h. \tag{4.1}$$

Como $y(t = T_2) = 0$, temos que a altura inicial do elevador será dada por

$$\begin{aligned} 0 &= -\frac{1}{2}g\left(T_2^2 - T_1^2\right) + v_0\,(T_2 - T_1) + h \\ h &= (T_2 - T_1)\left(\frac{1}{2}g\,(T_2 + T_1) - v_0\right). \end{aligned}$$

Questão 5

Um jogador de basquete quer encestar a bola levantando-a desde uma altura de 2 m do chão, com velocidade inicial de 7 m/s. A distância da bola à vertical que passa pelo centro do cesto é de 3 m, e o aro do cesto está a 3,05 m de altura do chão. Em que ângulo a bola deve ser levantada?

Resolução:

Fixando a origem do sistema de coordenadas na posição inicial da bola (mãos do jogador), onde o eixo horizontal x aponta no sentido do cesto e é paralelo ao solo e o eixo vertical y aponta para cima (perpendicular ao solo), sejam a velocidade inicial da bola $\mathbf{v_0}$, de módulo $v_0 = 7\,\mathrm{m/s}$, $\mathbf{g}$ a aceleração da gravidade, $h = 3{,}05 - 2 = 1{,}05\,\mathrm{m/s}$ a distância que deve ser percorrida pela bola na vertical, $s = 3\,\mathrm{m}$ a distância que deve ser percorrida pela bola na horizontal e θ o ângulo formado pela velocidade inicial da bola com o solo.

Podemos decompor a velocidade inicial da bola em suas componentes horizontal e vertical, adotando as notações $v_{0x} = v_0 \cos\theta$ para sua componente horizontal e $v_{0y} = v_0 \sin\theta$ para sua componente vertical.

Para encontrar a função de sua posição na horizontal, basta integrar a respectiva componente da velocidade:

$$x(t) = \int v_{0x}\,\mathrm{d}t = v_0 \cos\theta\,t + C_1 \quad C_1 \in \mathbb{R} \tag{5.1}$$

pelas condições iniciais de posição, $C_1 = 0$, portanto

$$x(t) = v_0 \cos\theta\,t \tag{5.2}$$

Podemos encontrar a função de sua velocidade na vertical integrando a aceleração:

$$v_y(t) = \int -g\,\mathrm{d}t = \int -g\,t + C_2, \quad C_2 \in \mathbb{R}$$

pelas condições iniciais da velocidade, $C_2 = v_{0y}$, portanto

$$v_y(t) = \int -g\,\mathrm{d}t = \int -g\,t + v_{0y}. \tag{5.3}$$

e sua posição na vertical será dada por

$$y(t) = \int -g\,t + v_0 \sin\theta\,\mathrm{d}t \tag{5.4}$$

$$= -\frac{1}{2} g\,t^2 + v_0 \sin\theta\,t + C_3, \quad C_3 \in \mathbb{R} \tag{5.5}$$

e, pelas condições iniciais temos $C_3 = 0$, portanto

$$y(t) = -\frac{1}{2} g\,t^2 + v_0 \sin\theta\,t \tag{5.6}$$

Fazendo $x(t) = s$ e isolando t em 5.2

$$x = v_0 \cos\theta\,t \implies t = \frac{x}{v_0 \cos\theta},$$

fazendo $y(t) = h$ e substituindo em 5.6, temos

$$-\frac{1}{2} g \left(\frac{s}{v_0 \cos\theta}\right)^2 + v_0 \sin\theta \left(\frac{s}{v_0 \cos\theta}\right) = h$$

$$-\frac{1}{2} g \left(\frac{s}{v_0}\right)^2 \frac{1}{\cos^2\theta} + s\frac{\sin\theta}{\cos\theta} = h$$

substituindo $\sec^2\theta = 1 + \tan^2\theta$,[1] temos

$$\tan^2\theta - 2\frac{v_0^2}{g\,s}\tan\theta + 2\frac{h}{g}\left(\frac{v_0}{s}\right)^2 + 1 = 0.$$

Fazendo $\tan\theta = z$, recaímos sobre uma equação quadrátrica:

$$z^2 - 2\frac{v_0^2}{g\,s} z + \left(2\frac{h}{g}\left(\frac{v_0}{s}\right)^2 + 1\right) = 0.$$

Tomando $m = v_0^2/\left(g\,s\right)$ e como

$$\left(2\frac{h}{g}\left(\frac{v_0}{s}\right)^2 + 1\right) = (m+d)(m-d) \implies d = \sqrt{\left(\frac{v_0^2}{g\,s}\right)^2 - \left(2\frac{h}{g}\left(\frac{v_0}{s}\right)^2 + 1\right)},$$

temos as raízes

$$m \pm d = \frac{v_0^2 \pm \sqrt{\left(v_0^2\right)^2 - \left(2h\,g\,v_0^2 + (s\,g)^2\right)}}{s\,g},$$

substituindo os valores dados e tomando $g = 9{,}8\,\mathrm{m/s^2}$, temos

$$z = \frac{7^2 \pm \sqrt{7^4 - (2 \cdot 1{,}05 \cdot 9{,}8 \cdot 7^2 + (3 \cdot 9{,}8)^2)}}{3 \cdot 9{,}8}$$
$$\tan\theta \approx \frac{49 \pm 23}{29{,}4}$$

aplicando o arctan de ambos os lados, temos, para $0 \leqslant \theta < \pi/2\,\mathrm{rad}$

$$\theta \approx 67{,}8^\circ \quad \text{ou} \quad \theta \approx 41{,}5^\circ.$$

Questão 6

Um ponto move-se no plano xy segundo as expressões $x = a\,t$ e $y = a\,t\,(1 - \alpha\,t)$, onde a e α são constantes positivas, e t é o tempo. Encontre:

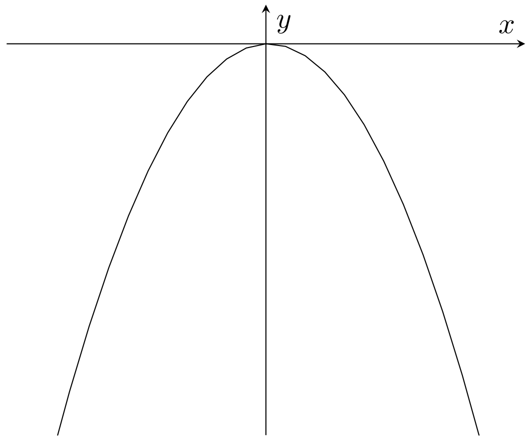
(a) A equação da trajetória $y(x)$ do ponto e faça o gráfico.

Resolução:

Fazendo $t = x/a$ e substituindo na expressão de y, conseguimos $y(x)$:

$$y(x) = a\frac{x}{a}\left(1 - \alpha\frac{x}{a}\right) = x\left(1 - \frac{\alpha\,x}{a}\right)$$

$y \times x$



(b) A velocidade v e a aceleração w do ponto como funções do tempo.

Resolução:

Como temos duas expressões para posição do ponto, devemos derivá-las separadamente para encontrar as funções velocidade e aceleração, portanto, temos, na horizontal

$$v_x(t) = \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}(t) = a, \tag{6.1}$$
$$w_x(t) = \frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2} = \frac{\mathrm{d}v_x}{\mathrm{d}t} = 0, \tag{6.2}$$

[1]Pela relação fundamental da trigonometria segue que $\sin^2\theta + \cos^2\theta = 1 \implies \tan^2\theta + 1 = 1/\cos^2\theta = \sec^2\theta$.

e na vertical

$$v_y(t) = \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}(t) = a\,(1 - 2\alpha\, t)\,, \tag{6.3}$$
$$w_y(t) = \frac{\mathrm{d}^2 y}{\mathrm{d}t^2} = \frac{\mathrm{d}v_y}{\mathrm{d}t} = -2a\,\alpha. \tag{6.4}$$

(c) O instante t_0 no qual o vetor velocidade forma um ângulo de $\pi/4$ com o vetor aceleração.

Resolução:

Seja $(\hat{\imath}, \hat{\jmath})$ a base canônica, os vetores velocidade $\mathbf{v}$ e aceleração $\mathbf{w}$ serão dados por

$$\mathbf{v} = v_x\,\hat{\imath} + v_y\,\hat{\jmath} \tag{6.5}$$
$$\mathbf{w} = w_x\,\hat{\imath} + w_y\,\hat{\jmath} \tag{6.6}$$

Para que esses vetores formem um ângulo de $\pi/4\,\mathrm{rad}$ entre eles, devemos ter

$$\begin{aligned}
\langle \mathbf{v}, \mathbf{w} \rangle &= v_x\, w_x + v_y\, w_y = |\mathbf{v}||\mathbf{w}| \cos \pi/4 \\
a\,0 + a(1 - 2\alpha\, t_0)\,(-2a\,\alpha) &= \frac{\sqrt{2}}{2}\sqrt{a^2 + (a - 2\alpha\, a\, t_0)^2}\sqrt{0^2 + (-2a\,\alpha)^2} \\
-2\sqrt{2}a^2\,\alpha(1 - 2\alpha\, t_0) &= |a|\,\sqrt{1 + (1 - 2\alpha\, t_0)^2}|2a\,\alpha| \\
2\left(1 - 4\alpha\, t_0 + (2\alpha\, t_0)^2\right) &= 2 - 4\alpha\, t_0 + (2\alpha\, t_0)^2 \\
(\alpha\, t_0 - 1)\, 4\alpha\, t_0 &= 0 \\
\implies t_0 = 0 \quad \text{ou} \quad t_0 &= \frac{1}{\alpha}
\end{aligned}$$

Questão 7

Uma pedra é lançada a partir de um telhado com uma velocidade V que forma um ângulo α com a horizontal e descreve uma trajetória parabólica como mostrado na figura 1. Qual é a distancia h na qual a velocidade da pedra é igual a $3V$?

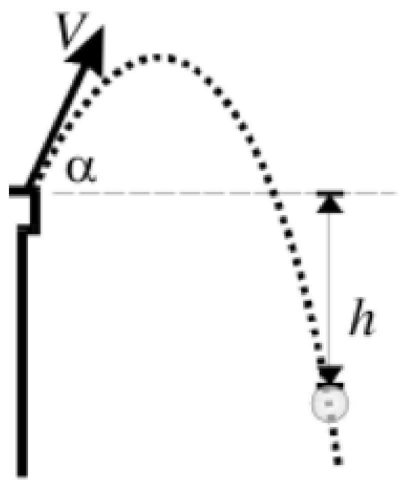


Figura 1: Lançamento oblíquo de uma pedra.

Resolução:

Adotando o referencial com origem no telhado e dois eixos perpendiculares, vertical e horizontal, que apontam, respectivamente, para cima e para a direita, temos a decomposição da velocidade inicial em

$$V_x = V\cos\alpha, \tag{7.1}$$
$$V_y = V\sin\alpha. \tag{7.2}$$

Como o eixo vertical está sujeito à uma aceleração gravitacional $-g$, temos a função de sua velocidade no tempo sendo dada por $v_y(t) = \int -g\,\mathrm{d}t = -g\,t + V_y$ (pela condição inicial). Dessa forma temos o vetor

$$\mathbf{v}(t) = V_x\,\hat{\imath} + v_y(t)\,\hat{\jmath}$$

e queremos encontrar o momento posterior onde possui velocidade $3V$, sendo, portanto, necessário analisar seu módulo:

$$|\mathbf{v}(t)| = \sqrt{V_x^2 + v_y^2} = 3V$$

substituindo 7.1 e 7.2 e fazendo $t = t_h$, temos

$$\sqrt{\left(V\cos\alpha\right)^2 + \left(V\sin\alpha - g\,t_h\right)^2} = 3V$$
$$V^2\left(\sin^2\alpha + \cos^2\alpha\right) - 2V\,g\,t_h\sin\alpha + \left(g\,t_h\right)^2 = \left(3V\right)^2$$
$$-2\left(2\frac{V}{g}\right)^2 - 2\frac{V}{g}\sin\alpha\,t_h + t_h^2 = 0$$

Resolvendo para t_h, temos, por Bháskara,

$$t_h = \frac{2(V/g)\sin\alpha \pm \sqrt{\left(2(V/g)\sin\alpha\right)^2 + 4\cdot 2\left(2V/g\right)^2}}{2}$$
$$t_h = \frac{V}{g}\left(\sin\alpha \pm \sqrt{\sin^2\alpha + 8}\right)$$

Sendo a função analisada uma parábola, escolhemos o maior valor de t_h, pois só nos interessa o momento onde $|\mathbf{v}(t)| = 3V$ e $t > 0$.

Para encontrar a altura h podemos integrar a velocidade vertical da pedra com respeito ao tempo e substituir $t = t_h$, dessa forma temos

$$\int v_y(t)\,\mathrm{d}t = -\frac{1}{2}g\,t^2 + V_y\,t = t\left(V_y - \frac{g\,t}{2}\right)$$

substituindo $t = t_h$, temos

$$h = \left(\frac{V}{g}\left(\sin\alpha + \sqrt{\sin^2\alpha + 8}\right)\right)\left(V\sin\alpha - \frac{g(V/g)\left(\sin\alpha + \sqrt{\sin^2\alpha + 8}\right)}{2}\right)$$
$$= \frac{V^2}{2g}\left(\sin\alpha + \sqrt{\sin^2\alpha + 8}\right)\left(\sin\alpha - \sqrt{\sin^2\alpha + 8}\right) = \frac{\left(2V\right)^2}{g}$$

Questão 8

Um canhão lança um projétil por cima de uma montanha de altura h, de forma a passar quase tangenciando o cume C no ponto mais alto de sua trajetória.

A distância horizontal entre o canhão e o cume é R.

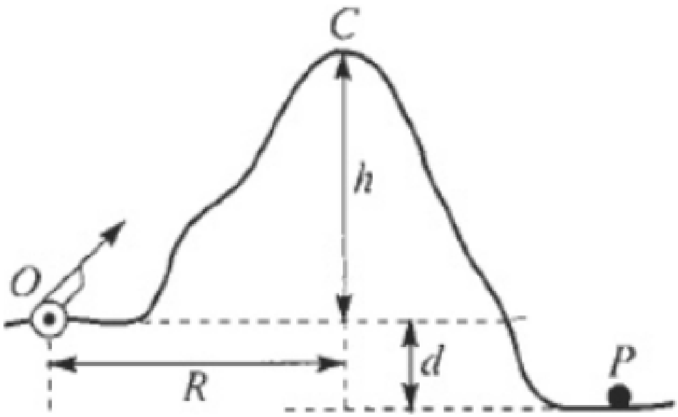


Figura 2: Lançamento de projétil sobre uma montanha.

Atrás da montanha há uma depressão de profundidade d, figura 2. Determine a distância horizontal entre o ponto de lançamento O e o ponto P onde o projétil atinge o solo, em função de R, d e h.

Resolução:

Consideramos a origem o ponto O de lançamento do projétil, onde posicionaremos um eixo de coordenadas com os eixos y orientado para cima e x para a direita.

Sendo o movimento parabólico uma função quadrática da forma

$$y(x) = a\,x^2 + b\,x + c$$

onde y é o deslocamento vertical e x é o deslocamento horizontal, derivando ambos os lados, temos

$$(y(x))' = (a\,x^2 + b\,x + c)'$$
$$v_y(x) = 2a\,x + b$$

onde v_y é a projeção da velocidade no eixo y.

Seja v_{0y} a velocidade inicial projetada no eixo y, montando dois sistemas com os valores conhecidos para $v(x)$ e $y(x)$, respectivamente, temos

$$\begin{cases} v_y(0) = b = v_{0y} \\ v_y(R) = 0 \implies 2a\,R + v_{0y} = 0 \implies a = -\dfrac{v_{0y}}{2R} \end{cases}$$
$$\begin{cases} y(0) = 0 \implies c = 0 \\ y(R) = h \implies -\dfrac{v_{0y}}{2R}\,R^2 + v_{0y}\,R = h \end{cases}$$

Resolvendo a última equação para v_{0y}, temos

$$-\frac{v_{0y}}{2}\,R + v_{0y}\,R = h$$
$$\frac{v_{0y}}{2}\,R = h$$
$$v_{0y} = \frac{2h}{R}$$

Portanto, $y(x) = -\dfrac{v_{0y}}{2R}x^2 + v_{0y}\,x \implies y(x) = -\dfrac{h}{R^2}x^2 + 2\dfrac{h}{R}x.$

Resolvendo para $y(x) = -d$, temos

$$-\frac{h}{R^2}x^2 + 2\frac{h}{R}x = -d$$
$$-\frac{h}{R^2}x^2 + 2\frac{h}{R}x + d = 0$$

por Bháskara

$$\Delta = \left(2\frac{h}{R}\right)^2 - 4\left(-\frac{h}{R^2}\right)d$$
$$= \frac{4}{R^2}h^2 + \frac{4}{R^2}h \cdot d$$
$$= \frac{4}{R^2}\left(h^2 + h \cdot d\right)$$

$$x = \frac{-\frac{2h}{R} \pm \sqrt{\frac{4}{R^2}\left(h^2 + h \cdot d\right)}}{2\left(-\frac{h}{R^2}\right)}$$

como $x > 0$

$$x = \frac{\cancel{\frac{2}{R}}h + \cancel{\frac{2}{R}}\sqrt{h^2 + h \cdot d}}{\cancel{\frac{2}{R}} \cdot \frac{h}{R}}$$
$$= \frac{R}{h}\left(h + \sqrt{h^2\left(1 + d/h\right)}\right)$$
$$= R\left(1 + \sqrt{1 + \frac{d}{h}}\right)$$

Questão 9

Uma roda pneumática segue em linha reta sem deslizar. Seu centro se move com velocidade constante v. Uma pequena pedra alojada no extremo da roda toca o caminho em $t = 0$. Encontrar a posição, velocidade e aceleração da pedra como função do tempo.

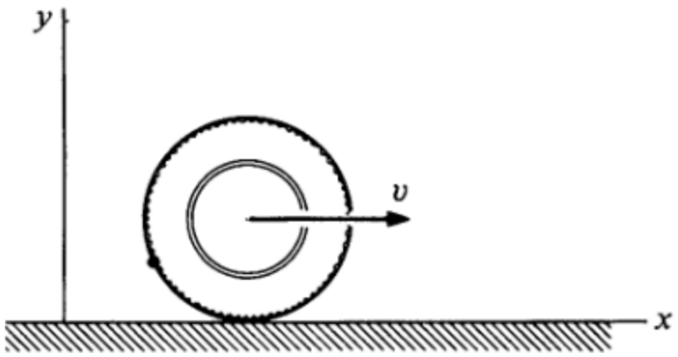


Figura 3: Roda pneumática.

Resolução:

Adotando o referencial do centro da roda, sabemos que a pedra não sofre ação da gravidade, mas possui uma aceleração radial α que a mantém fixada em sua trajetória circular.

Assumindo que a roda pneumática não desliza, seja seu raio r, sua velocidade angular ω e sua massa desprezível, pela condição de rolamento $v = \omega r$, ou seja, sua extremidade deve se mover com velocidade igual àquela do seu centro. Sabemos também que a pedra se move de acordo com

$$\mathbf{r}(t) = A\sin(\omega t + \beta)\hat{\imath} + B\cos(\omega t + \beta)\hat{\jmath} \quad \text{(forma geral de um oscilador harmônico)} \tag{9.1}$$

pelas condições iniciais, temos

$$\mathbf{r}(0) = 0\hat{\imath} - r\hat{\jmath} = A\sin(\beta)\hat{\imath} + B\cos(\beta)\hat{\jmath}$$

analisando as componentes, temos, para $A \neq 0$,

$$\begin{cases} A\sin\beta = 0 \\ B\cos\beta = -r \end{cases}$$
$$\implies \beta = 0 \quad \text{ou} \quad \beta = \pi$$

tomando $\beta = 0$, temos $B = -r$.

Derivando $\mathbf{r}(t)$, encontramos a função de sua velocidade no tempo

$$\mathbf{v}(t) = \frac{\mathrm{d}\mathbf{r}(t)}{\mathrm{d}t} = \frac{A\,v}{r}\cos\left(\frac{v\,t}{r}\right)\hat{\mathbf{\imath}} + v\sin\left(\frac{v\,t}{r}\right)\hat{\mathbf{\jmath}}$$

pela condição inicial da velocidade, temos

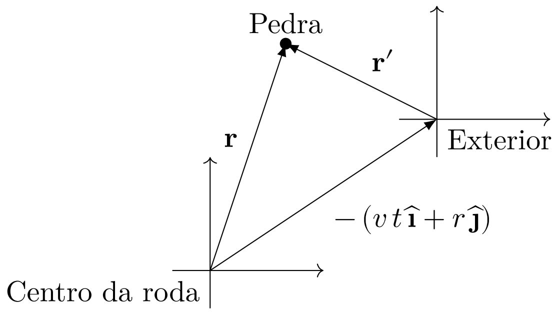
$$\mathbf{v}(0) = -v\,\hat{\mathbf{\imath}} + 0\,\hat{\mathbf{\jmath}} = \frac{A\,v}{r}\cos 0\,\hat{\mathbf{\imath}} + v\sin 0\,\hat{\mathbf{\jmath}} \implies A = -r$$

Derivando novamente, temos a função da aceleração da pedra no tempo

$$\mathbf{a}(t) = \frac{\mathrm{d}\mathbf{v}(t)}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}^2\mathbf{r}(t)}{\mathrm{d}t^2} = \alpha\sin\left(\frac{v\,t}{r}\right)\hat{\mathbf{\imath}} + \alpha\cos\left(\frac{v\,t}{r}\right)\hat{\mathbf{\jmath}}, \quad \text{onde } \alpha = \frac{v^2}{r}$$

Realizando uma transformação de Galileu, adotamos o referencial externo, com origem na posição da pedra em $t = 0$.

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}' - (v\,t\,\hat{\mathbf{\imath}} + r\,\hat{\mathbf{\jmath}}) \implies \mathbf{r}' = \mathbf{r} + (v\,t\,\hat{\mathbf{\imath}} + r\,\hat{\mathbf{\jmath}})$$



Portanto, temos

$$\begin{aligned}
\mathbf{r}'(t) &= \left(v\,t - r\sin\left(\frac{v\,t}{r}\right)\right)\hat{\mathbf{\imath}} + r\left(1 - \cos\left(\frac{v\,t}{r}\right)\right)\hat{\mathbf{\jmath}},\\
\mathbf{v}'(t) &= v\left(1 - \cos\left(\frac{v\,t}{r}\right)\right)\hat{\mathbf{\imath}} + v\sin\left(\frac{v\,t}{r}\right)\hat{\mathbf{\jmath}},\\
\mathbf{a}'(t) &= \alpha\sin\left(\frac{v\,t}{r}\right)\hat{\mathbf{\imath}} + \alpha\cos\left(\frac{v\,t}{r}\right)\hat{\mathbf{\jmath}}.
\end{aligned}$$

Questão 10

Um garoto se encontra no pico de uma montanha a qual tem um ângulo ϕ uniforme com a horizontal, como na figura 4. A que ângulo θ da horizontal deveria ele lançar uma pedra tal que a distância percorrida seja a maior possível?

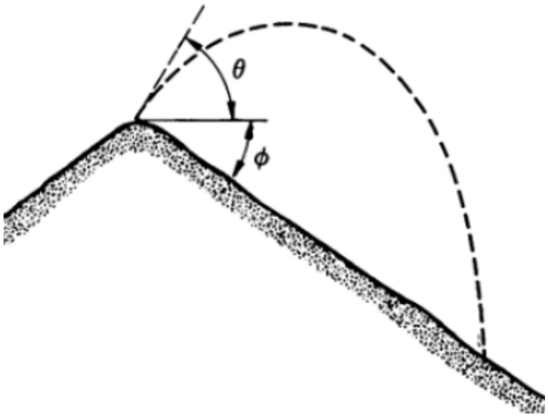


Figura 4: Trajetória do lançamento oblíquo de uma pedra.

Resolução:

Adotando o sistema de coordenadas com origem no ponto de lançamento da pedra e eixos horizontal e vertical orientados para a direita e para cima, respectivamente. Seja $\mathbf{v}(t)$ a função da velocidade na pedra no tempo, $\mathbf{r}(t)$ a função de sua posição, $\mathbf{v_0}$ sua velocidade inicial e g o módulo da aceleração da gravidade.

Temos que $\mathbf{v}(t)$ será dado por

$$\mathbf{v}(t) = \mathbf{v_0} + \int -g\,\hat{\mathbf{j}}\,\mathrm{d}t = \mathbf{v_0} - g\,t\,\hat{\mathbf{j}}. \tag{10.1}$$

De forma análoga, temos

$$\mathbf{r}(t) = \int \mathbf{v_0} - g\,t\hat{\mathbf{j}}\,\mathrm{d}t = \mathbf{v_0}\,t - \frac{1}{2}g\,t^2\,\hat{\mathbf{j}}. \tag{10.2}$$

Pelo enunciado, queremos maximizar a componente horizontal da posição r_x na intercessão de $\mathbf{r}(t)$ e da reta $\mathbf{s}(t)$ (que descreve a descida da montanha). Para tanto, basta utilizarmos que a componente horizontal se conserva, e a vertical terá que descer uma altura adicional $h = r_x \tan\phi$ além de retornar à altura inicial. Dessa forma, encontramos um tempo $t = t_i$ (tempo de intercessão) fazendo

$$r_y = v_{0y}\,t_i - \frac{1}{2}g\,t_i^2 = -h$$
$$t_i^2 - \frac{2}{g}v_{0y}\,t_i - \frac{2}{g}h = 0$$

de tal forma que (por Bháskara), temos

$$t_i = \frac{(2v_{0y}/g) \pm \sqrt{(2v_{0y}/g)^2 + 4(2/g)h}}{2} = \frac{v_{0y} \pm \sqrt{v_{0y}^2 + 2g\,h}}{g}$$

e, substituindo o maior valor (tempo posterior) em r_x temos

$$r_x(t_i) = r_i = v_{0x}\, t_i = v_0\, \cos\theta \left(\frac{v_{0y} + \sqrt{v_{0y}^2 + 2g(r_i \tan\phi)}}{g} \right)$$

$$\left(r_i \frac{g}{v_0 \cos\theta} - v_{0y} \right)^2 = v_{0y}^2 + 2g(r_i \tan\phi)$$

$$r_i^2 \left(\frac{g}{v_0 \cos\theta} \right)^2 - 2g\, r_i \frac{v_0 \sin\theta}{v_0 \cos\theta} = 2g\, r_i \tan\phi$$

$$r_i^2 - 2\frac{\left(v_0 \cos\theta\right)^2}{g} \left(\tan\phi + \tan\theta\right) r_i = 0$$

$$r_i \left(r_i - 2\frac{\left(v_0 \cos\theta\right)^2}{g} \left(\tan\phi + \tan\theta\right) \right) = 0$$

para $r_i \neq 0$, temos

$$\begin{aligned} r_i &= 2\frac{\left(v_0 \cos\theta\right)^2}{g} \left(\tan\phi + \tan\theta\right) \\ &= 2\frac{\left(v_0 \cos\theta\right)^2}{g} \left(\frac{\sin\phi}{\cos\phi} + \frac{\sin\theta}{\cos\theta} \right) \\ &= 2\frac{\left(v_0 \cos\theta\right)^2}{g} \left(\frac{\sin\phi\cos\theta + \sin\theta\cos\phi}{\cos\phi\cos\theta} \right) \\ &= \frac{v_0^2}{g\cos\phi} 2\cos\theta \sin\left(\phi + \theta\right) \end{aligned}$$

Nota:

$$\begin{aligned} \sin\left(a + b\right) &= \sin a \cos b + \sin b \cos a \\ + \sin\left(a - b\right) &= \sin a \cos b - \sin b \cos a \\ \sin\left(a + b\right) + \sin\left(a - b\right) &= 2 \sin a \cos b \qquad (10.3) \end{aligned}$$

por 10.3

$$r_i = \frac{v_0^2}{g\cos\phi} \left(\sin\left(2\theta + \phi\right) + \sin\phi\right)$$

que deve ser maximizada (com respeito à θ) quando $\mathrm{d}r_i / \, \mathrm{d}\theta = 0$, dessa forma

$$\begin{aligned} \frac{\mathrm{d}r_i}{\mathrm{d}\theta} = \frac{v_0^2}{g\cos\phi} \left(2\cos\left(2\theta + \phi\right)\right) &= 0 \\ \cos\left(2\theta + \phi\right) &= 0 \\ 2\theta + \phi &= \frac{\pi}{2} \qquad \Longrightarrow \theta = \frac{\pi/2 - \phi}{2} \end{aligned}$$