Resolução – Prova III (Matemática I)

30 de novembro / Isabella B. Amaral – 118010773

Nota: Todos os teoremas e axiomas referenciados nessa prova são citados pelo Apostol nos capítulos abordados em aula, a não ser que seja explicitado o contrário.

QUESTÃO 1

Grupo I — Q1

Calcule os seguintes limites:

(a) $\lim_{x\to 0} x^p \cos\frac{1}{x^q}$, p e q naturais.

Resolução:

Seja $\alpha = 1/x^q$, $\alpha \to \infty$ quando $x \to 0$, porém sendo a função cosseno limitada, pelo teorema 3.3, nós temos que

$$\begin{aligned} -1 \leqslant &\cos\alpha \leqslant 1 \\ -x^p \leqslant &x^p \cos\alpha \leqslant x^p \end{aligned}$$

e quando $x \to 0$, temos

$$0 \leqslant \lim_{x\to 0} x^p \cos\alpha \leqslant 0$$

o que nos dá

$$\lim_{x\to 0} x^p \cos\frac{1}{x^q} = 0.$$

(b) $\lim_{t\to 1} \frac{x^3-1}{x-1}$.

Resolução:

Assumindo um erro de digitação no limite, temos, pela fatoração $a^3 - b^3 = (a-b)\left(a^2 + a\,b + b^2\right)$ que

$$\begin{aligned} \lim_{x\to 1} \frac{x^3-1}{x-1} &= \lim_{x\to 1} \frac{(x-1)\left(x^2+x+1\right)}{x-1} \\ &= \lim_{x\to 1} x^2 + x + 1, \end{aligned}$$

que pode ser calculado substituindo x por 1, simplesmente, e nos dá

$$1^2 + 1 + 1 = 3.$$

(c) $\lim_{t\to 0} \frac{\sqrt{2+t} - \sqrt{2-t}}{t}$.

Resolução:

Manipulando a expressão, temos

$$\begin{aligned}
\lim_{t\to 0}\frac{\sqrt{2+t}-\sqrt{2-t}}{t} &= \lim_{t\to 0}\frac{\left(\sqrt{2+t}-\sqrt{2-t}\right)\left(\sqrt{2+t}+\sqrt{2-t}\right)}{t\left(\sqrt{2+t}+\sqrt{2-t}\right)}\\
&= \lim_{t\to 0}\frac{2+t-(2-t)}{t\left(\sqrt{2+t}+\sqrt{2-t}\right)}\\
&= \lim_{t\to 0}\frac{2}{\sqrt{2+t}+\sqrt{2-t}}
\end{aligned}$$

novamente, substituindo t por 0, temos

$$= \frac{2}{2\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

(d) $\lim_{x\to 0}\frac{\sin(\tan x)}{\sin x}$.

Resolução:

Manipulando a expressão temos que

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin(\tan x)}{\sin x}\cdot\frac{\tan x}{\tan x} = \lim_{x\to 0}\frac{\sin(\tan x)}{\tan x}\cdot\frac{1}{\cos x}$$

e pelo teorema 3.1, temos que

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin(\tan x)}{\tan x}\cdot\frac{1}{\cos x} = \left(\lim_{x\to 0}\frac{1}{\cos x}\right)\cdot\left(\lim_{x\to 0}\frac{\sin(\tan x)}{\tan x}\right).$$

Sendo $\lim_{x\to 0}\tan x = 0$ temos o limite fundamental $\lim_{x\to 0}\sin(\tan x)\tan x = 1$, e como $x \to 0 \implies \cos x \to 1$, o limite desejado é

$$\left(\lim_{x\to 0}\frac{1}{\cos x}\right)\cdot\left(\lim_{x\to 0}\frac{\sin(\tan x)}{\tan x}\right) = 1\cdot 1 = 1.$$

QUESTÃO 2

Grupo II — Q2

Sejam p e q naturais, calcule $\lim_{x\to 0}\frac{\sin px - \sin qx}{x}$.

Resolução:

Primeiramente, temos um lema

Lema 2.1. *Seja* $\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x} = 1$ *o limite fundamental. Aplicando um fator linear* $\alpha \neq 0$ *qualquer no seno, temos* $\lim_{x\to 0}\frac{\sin\alpha x}{x} = \alpha$.

Demonstração. Basta manipular o limite de tal forma que

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin\alpha x}{x}\cdot\frac{\alpha}{\alpha},$$

e pelo teorema 3.1, podemos remover a constante do limite de tal forma que

$$\alpha \cdot \left(\lim_{x \to 0} \frac{\sin \alpha x}{\alpha x} \right).$$

Como o produto αx tende a zero da mesma forma que x sozinho, o limite fundamental permanece inalterado e temos

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin \alpha x}{x} = \alpha \cdot 1 = \alpha.$$

$\square$

Pelo teorema 3.1, temos que

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin px - \sin qx}{x} = \lim_{x \to 0} \frac{\sin px}{x} - \lim_{x \to 0} \frac{\sin qx}{x}$$

que é, trivialmente, a subtração de dois limites como o discutido no lema acima, portanto, temos

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin px}{x} - \lim_{x \to 0} \frac{\sin qx}{x} = p - q.$$

Note que a restrição no lema de $\alpha \neq 0$ também se aplica ao limite desejado e, portanto, caso $p = 0$ ou $q = 0$ teremos uma indeterminação.

QUESTÃO 3

Grupo II — Q3

Determine todas as funções $f \colon \mathbb{R} \longleftrightarrow \mathbb{R}$ contínuas tais que existe $\lim_{x \to 0} f(x) \sin \frac{1}{x}$.

Resolução:

Seja $\alpha = 1/x^q$, $\alpha \to \infty$ quando $x \to 0$, porém sendo a função seno limitada, pelo teorema 3.3, nós temos que

$$\begin{aligned} -1 \leqslant &\sin \alpha \leqslant 1 \\ -f(x) \leqslant f(x) &\sin \alpha \leqslant f(x). \end{aligned}$$

Dessa forma, podemos notar que o limite desejado só existe se $\lim_{x \to 0} -f(x) = \lim_{x \to 0} f(x)$, e isso só deve ocorrer para o caso em que $\lim_{x \to 0} f(x) = 0$, pois caso esta tenda à ∞ ou $-\infty$ teremos uma descontinuidade em $x = 0$.

QUESTÃO 4

Grupo III — Q4

Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ contínua e periódica de período $p > 0$. Prove que f é uniformemente contínua.

Resolução:

Sendo a função f contínua, para um intervalo $[0, p]$ esta deve ser uniformemente contínua pois, dados

x, y quaisquer no intervalo, pela continuidade da função sempre haverá δ_i tal que, dado um $\varepsilon_i > 0$,

$$|y - x| < \delta_i \implies |f(y) - f(x)| < \varepsilon_i,$$

pois, pelo teorema 3.13, podemos subdividir os valores da função em partições menores que ε, e isso nos permite escolher o menor $\delta_i(\varepsilon_i)$, o qual satisfará todas as inequações simultaneamente[1].

Dessa forma, sendo a função periódica, devemos ter que é uniformemente contínua para qualquer intervalo $[kp, (k+1)p]\,, k \in \mathbb{Z}$, pois, dados $x_k = x + kp, y_k = y + kp$, temos

$$\left|y_k - x_k\right| = |y + kp - (x + kp)| = |y - x| < \delta \implies |f(y) - f(x)| < \varepsilon.$$

Dada a validade da afirmação para qualquer $k \in \mathbb{Z}$, a função f é uniformemente contínua em todo o seu domínio (k vezes um intervalo fechado de interesse gera todo o domínio real) como se queria demonstrar.

QUESTÃO 5

Grupo IV — Q7

Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = \cos(3x)$, se $x \leqslant \alpha$, e $f(x) = x - \alpha$, se $x > \alpha$. Determine os $\alpha \in \mathbb{R}$ para os quais f fica contínua em todos os pontos de $\mathbb{R}$.

Resolução:

Como $\cos(3x)$ é contínua e $x - \alpha$ também, $f(x)$ será contínua se, para $x = \alpha$, tivemos $f(\alpha) = \cos(3\alpha) = \alpha - \alpha = 0$.

Dessa forma, $f(x)$ será contínua para $\alpha = \dfrac{1}{3}\arccos(\cos 0) + 2n\pi \implies \alpha = \dfrac{\pi}{6} + 2n\pi$ ou $\alpha = \dfrac{\pi}{2} + 2n\pi, n \in \mathbb{Z}$.

QUESTÃO 6

Grupo V — Q11

Seja $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ convexa.

i. Prove que f tem máximo e esse máximo é $f(a)$ ou $f(b)$.

ii. Prove que f é limitada inferiormente.

Resolução:

Primeiro assumimos a continuidade de funções convexas.

Sendo a função convexa, podemos dividí-la em duas porções monotônicas, as quais chamarei de ℓ e r, respectivamente. $\ell\colon [a, c] \longrightarrow \mathbb{R}$ a parte monotonicamente decrescente e $r\colon [c, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ a parte monotonicamente crescente.

Dessa forma, temos que para dois pontos subsequentes $x < y$ no domínio de ℓ, $\ell(x) > \ell(y)$ e, portanto, $\ell(a) > \ell(c)$ e, de forma análoga, $r(c) < r(b)$.

Portanto (i), $\max f$ no intervalo $[a, b]$ deve ser $f(a) = \ell(a)$ ou $f(b) = r(b)$, e (ii) a função é limitada inferiormente por $L \leqslant f(c) = \ell(c) = r(c), L \in \mathbb{R}$ (o que também pode ser garantido pelo teorema 3.12).

[1] Alternativamente, basta assumir um intervalo fechado e compacto, para o qual, então, será possível encontrar finitos $\delta_i(\varepsilon_i)$ e, então, escolher o melhor/menor dentre eles para garantir a uniformidade da função no intervalo.

QUESTÃO 7

Grupo VI — Q12

Sejam a, b, c, h em $\mathbb{R}$, com $h > 0$, e $f(t) = a\,t^2 + b\,t + c \geqslant 0$, para $0 \leqslant t \leqslant h$. Considere um sólido convexo S contido na região $\left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : 0 \leqslant x \leqslant h\right\}$. Suponha que a seção de S perpendicular ao eixo dos x que passa por $(\xi, 0, 0)$, para $0 \leqslant \xi \leqslant h$, tem área $f(\xi)$. Sejam B_1, M e B_2 as áreas das seções de S perpendiculares ao eixo dos x que passam respectivamente por $(0,0,0), (h/2, 0, 0)$ e $(h, 0, 0)$. Determine o volume de S em função de B_1, M e B_2.

Resolução:

Podemos encontrar o volume desejado $v := v(S)$ integrando as áreas de seção do sólido entre 0 e h, portanto

$$\begin{aligned} v &= \int_0^h f(t)\,\mathrm{d}t = \int_0^h a\,t^2 + b\,t + c\,\mathrm{d}t \\ &= \frac{1}{3}a\,t^3 + \frac{1}{2}b\,t^2 + c\,t\Big|_0^h \\ v &= \frac{1}{3}a\,h^3 + \frac{1}{2}b\,h^2 + c\,h. \end{aligned} \tag{7.1}$$

Para expressar o resultado em termos de B_1, M e B_2 devemos avaliar os pontos dados:

$$B_1 = f(0) = \left(a\,t^2 + b\,t + c\right)\Big|_{t=0} = c, \tag{7.2}$$

$$M = f\left(\frac{h}{2}\right) = a\left(\frac{h}{2}\right)^2 + b\left(\frac{h}{2}\right) + c, \text{ e} \tag{7.3}$$

$$B_2 = f(h) = a\,h^2 + b\,h + c. \tag{7.4}$$

Fazendo $B_2 - 2M$ e substituindo 7.2, temos

$$B_2 - 2M = a\frac{h^2}{2} - B_1 \implies a = \frac{2}{h^2}\left(B_2 + B_1 - 2M\right). \tag{7.5}$$

Substituindo 7.5 e 7.2 em 7.4, temos

$$B_2 = \frac{2}{h^2}\left(B_2 + B_1 - 2M\right)h^2 + b\,h + B_1 = 2B_2 + 3B_1 - 4M + b\,h \implies b = \frac{1}{h}\left(4M - B_2 - 3B_1\right). \tag{7.6}$$

Dessa forma, temos o volume dado pelo sólido como sendo

$$\begin{aligned} v &= h\left(\frac{1}{3}\frac{2}{h^2}\left(B_2 + B_1 - 2M\right)h^2 + \frac{1}{2}\frac{1}{h}\left(4M - B_2 - 3B_1\right)h + B_1\right) \\ &= h\left(\frac{2}{3}\left(B_2 + B_1 - 2M\right)\cdot\frac{2}{2} + \frac{1}{2}\left(4M - B_2 - 3B_1\right)\cdot\frac{3}{3} + B_1\right) \\ &= h\frac{1}{6}\left(4B_2 + 4B_1 - 8M + 12M - 3B_2 - 9B_1 + 6B_1\right) \\ v &= \frac{h}{6}\left(B_1 + 4M + B_2\right). \end{aligned}$$

QUESTÃO 8

Grupo VII — Q15

Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ contínua. Suponha que existem reais $a_1, a_2, \ldots, a_p$ diferentes ($p \geqslant 2$), tais que $f(a_k) = a_{k+1}$, se $1 \leqslant k \leqslant p-1$ e $f(a_p) = a_1$. Prove que existe pelo menos um $\bar{x} \in \mathbb{R}$ tal que $f(\bar{x}) = \bar{x}$.

Resolução:

Nota: essa resolução foi feita em conjunto com um colega do curso de matemática.

Sejam $i_1, \ldots, i_p$ um rearranjo dos índices $1, \ldots, p$ de modo que $a_{i_k} \leqslant a_{i_{k+1}}$ para todo $k < p$.

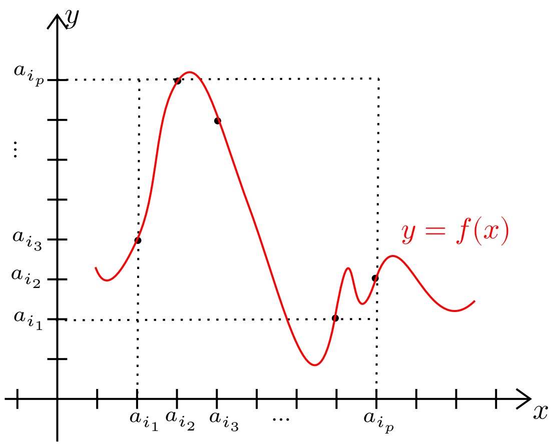

Figura 1: Ilustração gráfica.

Considere uma função $g\colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ dada por $g(x) := f(x) - x$. Como f é contínua, é claro que g também é. Sejam $a, b \in \left[a_{i_1}, a_{i_p}\right]$ tais que

$$f(a) = \max_{x \in \left[a_{i_1}, a_{i_p}\right]} f(x) \quad \text{e} \quad f(b) = \min_{x \in \left[a_{i_1}, a_{i_p}\right]} f(x).$$

Tais números existem pois f é contínua e $\left[a_{i_1}, a_{i_p}\right]$ é um intervalo fechado. Dessa forma, note que $f(a) \geqslant a_{i_p} \geqslant x$ e $f(b) \leqslant a_{i_1} \leqslant x$ para todo $x \in \left[a_{i_1}, a_{i_p}\right]$. Ou seja: g atinge tanto valores não-negativos ($g(a) \geqslant 0$) quanto não-positivos ($g(b) \leqslant 0$).

Supondo, sem perda de generalidade, que $a < b$, decorre do *teorema do valor intermediário* que existe um $\bar{x} \in [a, b] \subseteq \left[a_{i_1}, a_{i_p}\right]$ tal que $g(\bar{x}) = 0$. Dessa forma, $\bar{x}$ é tal que $0 = f(\bar{x}) - \bar{x}$, i.e., $f(\bar{x}) = \bar{x}$.

$\square$

QUESTÃO 9

Grupo VIII — Q17

Provar que $\frac{79}{160} \leqslant \int_0^{1/2} \sqrt{1-\xi^4}\,\mathrm{d}\xi \leqslant \frac{79}{600}\sqrt{15}$.

Resolução:

Sabemos que

$$\frac{1}{\sqrt{1-0^4}} \leqslant \frac{1}{\sqrt{1-\xi^4}} \leqslant \frac{1}{\sqrt{1-\left(\frac{1}{2}\right)^4}}$$

que não se altera caso multipliquemos por $1-\xi^4$

$$1-\xi^4 \leqslant \frac{1-\xi^4}{\sqrt{1-\xi^4}} \leqslant \frac{4}{\sqrt{15}}\left(1-\xi^4\right)$$

integrando ξ de 0 a 1/2, temos

$$\begin{aligned}
\int_0^{1/2} 1-\xi^4\,\mathrm{d}\xi &\leqslant \int_0^{1/2} \frac{1-\xi^4}{\sqrt{1-\xi^4}}\,\mathrm{d}\xi \leqslant \int_0^{1/2} \frac{4}{\sqrt{15}}\left(1-\xi^4\right)\mathrm{d}\xi \\
\xi - \frac{1}{5}\xi^5\Big|_0^{1/2} &\leqslant \int_0^{1/2} \sqrt{1-\xi^4}\,\mathrm{d}\xi \leqslant \frac{4}{\sqrt{15}}\left(\xi - \frac{1}{5}\xi^5\right)\Big|_0^{1/2} \\
\frac{1}{2} - \frac{1}{5}\left(\frac{1}{2}\right)^5 &\leqslant \int_0^{1/2} \sqrt{1-\xi^4}\,\mathrm{d}\xi \leqslant \frac{4}{\sqrt{15}}\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{5}\left(\frac{1}{2}\right)^5\right) \\
\frac{80-1}{160} &\leqslant \int_0^{1/2} \sqrt{1-\xi^4}\,\mathrm{d}\xi \leqslant \frac{4\cdot\sqrt{15}}{15}\left(\frac{80-1}{160}\right) \\
\frac{79}{160} &\leqslant \int_0^{1/2} \sqrt{1-\xi^4}\,\mathrm{d}\xi \leqslant \frac{79}{600}\sqrt{15}.
\end{aligned}$$

□

QUESTÃO 10

Grupo IX — Q18

Prove que se f é integrável em $[a,b]$, $\int_a^b (f(x))^2\,\mathrm{d}x = 0$ e f é contínua em $c \in [a,b]$, então $f(c) = 0$.

Resolução:

Sendo a integral, vulgarmente, uma soma de infinitos termos, ao tomarmos

$$\int_a^b (f(x))^2\,\mathrm{d}x = \int_a^b |f(x)|^2\,\mathrm{d}x = 0,$$

como $|f| \geqslant 0$, essa soma somente será nula se todos os termos forem nulos, dessa forma é garantido que, para $c \in [a,b]$, $f(c) = 0$.

QUESTÃO 11

Grupo X — Q20

Suponha que S é uma esfera de raio $R > 0$ e que $u : S \to R$ é a função temperatura (num determinado instante T fixado), isto é $u(p)$ é a temperatura do ponto p no instante T. Suponha que u é contínua e mostre que existem pontos antípodas que tem mesma temperatura.

Resolução:

Nota: essa resolução foi feita em conjunto com um colega do curso de matemática.

Dado um ponto $p \in S$, identifique por $-p \in S$ seu *antípoda*. Considere

$$\begin{array}{rccc} \Delta : & S & \longmapsto & \mathbb{R} \\ & p & \longmapsto & u(p) - u(-p) \end{array}$$

Como u é contínua, Δ obviamente também é. Restrinja Δ a um círculo máximo C, i.e. uma circunferência de raio R inteiramente contida em S. Denote esta restrição de função por $\big|_C$.

Um círculo máximo C contido em um plano α pode ser parametrizado por uma função $f_\alpha : [0, 2\pi] \longrightarrow C$ contínua, dado que basta transladar e inclinar o conjunto $\{(R\cos(t), R\sin(t), 0) \mid t \in [0, 2\pi]\}$.

Dessa forma, $u\big|_C \circ f_\alpha : [0, 2\pi] \longrightarrow \mathbb{R}$ é uma função contínua. Dado $[0, 2\pi]$ é um intervalo fechado, existem instantes $t_{\text{max}}, t_{\text{min}} \in [0, 2\pi]$ tais que:

- $(u\big|_C \circ f_\alpha)(t_{\text{max}})$ é um valor de máximo.
- $(u\big|_C \circ f_\alpha)(t_{\text{min}})$ é um valor de mínimo.

Note que $u(f_\alpha(t_{\text{max}})) \geqslant u(-f_\alpha(t_{\text{max}}))$ e $u(f_\alpha(t_{\text{min}})) \geqslant u(-f_\alpha(t_{\text{min}}))$. Ou seja $\Delta\big|_C$ possui valores positivos e negativos. Supondo sem perda de generalidade que $t_{\text{max}} < t_{\text{min}}$, o *teorema do valor intermediário* garante que existe um ponto $t \in [t_{\text{max}}, t_{\text{min}}] \subset [0, 2\pi]$ tal que $(\Delta\big|_C \circ f_\alpha)(t) = 0$. No ponto $p := f_\alpha(t)$, por construção, $u(p) = u(-p)$.

Dessa forma, em cada círculo máximo $C \subset S$, existe um par de pontos antipodais com mesma temperatura.