Resolução da provinha III de Física I (4302111)

Isabella B. – 11810773

Nota: 10

QUESTÃO 1

Considere um corpo de massa M que no referencial S têm velocidade $\mathbf{u}$, posição $\mathbf{x}$ e energia $E = \dfrac{|\mathbf{P}|^2}{2M} + U_{int}(\mathbf{x})$, onde $\mathbf{P} = M\mathbf{u}$ é o seu momento total. Suponha que a energia potencial de interação $U_{int}(\mathbf{x})$ seja invariante por transformações de Galileu, isto é, $U_{int}(\mathbf{x} + \mathbf{V}t) = U_{int}(\mathbf{x})$ para qualquer velocidade $\mathbf{V}$ e tempo t. Com isso em mente, responda as seguintes questões:

(a) Em um referencial S', se movendo com velocidade $-\mathbf{V}$ em relação a S, ache a velocidade $\mathbf{u'}$ do corpo e prove que sua energia é dada por $E' = E + {}^1\!/\!_2 M|\mathbf{V}|^2 + \mathbf{V}\cdot\mathbf{P}$.

(Ainda que não tenha derivado os resultados acima, é permitido utilizá-los nos itens a seguir)

Resolução:

Dado $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{u}$, sabemos, por transformações de Galileu, que

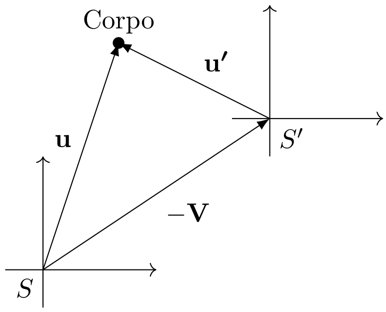
$$\mathbf{u} - \mathbf{u'} = -\mathbf{V} \implies \mathbf{u'} = \mathbf{u} + \mathbf{V} \qquad (1)$$

multiplicando a eq. 1 por M

$$\mathbf{P'} = \mathbf{P} + M\mathbf{V} \qquad (2)$$

integrando a eq. 1 com respeito a t

$$\mathbf{x'} = \mathbf{x} + \mathbf{V}t \qquad (3)$$



Tomando $E' = \dfrac{|\mathbf{P'}|^2}{2M} + U_{int}(\mathbf{x'})$ (dada no enunciado) e substituindo as equações 2 e 3, teremos:

$$\begin{aligned}
E' &= \frac{|\mathbf{P} + M\mathbf{V}|^2}{2M} + U_{int}(\mathbf{x} + \mathbf{V}t) \\
&= \frac{\left(\sqrt{(\mathbf{P} + M\mathbf{V})(\mathbf{P} + M\mathbf{V})}\right)^2}{2M} + U_{int}(\mathbf{x}) \\
&= \frac{\left|\mathbf{P}\cdot\mathbf{P} + (M\mathbf{V})\cdot\mathbf{P} + \mathbf{P}\cdot(M\mathbf{V}) + (M\mathbf{V})\cdot(M\mathbf{V})\right|}{2M} + U_{int}(\mathbf{x}) \\
&= \frac{\left|\mathbf{P}\cdot\mathbf{P} + M^2\mathbf{V}\cdot\mathbf{V} + 2M\mathbf{V}\cdot\mathbf{P}\right|}{2M} + U_{int}(\mathbf{x})
\end{aligned}$$

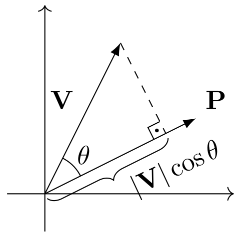
sabendo que $\mathbf{P}\cdot\mathbf{P} = |\mathbf{P}|^2 > 0$ e $\mathbf{V}\cdot\mathbf{V} = |\mathbf{P}|^2 > 0$, e assumindo $M > 0$, temos

$$\begin{aligned}
E' &= \frac{|\mathbf{P}|^2 + M^2|\mathbf{V}|^2 + 2M\mathbf{V}\cdot\mathbf{P}}{2M} + U_{int}(\mathbf{x}) \\
&= \underbrace{\frac{|\mathbf{P}|^2}{2M} + U_{int}(\mathbf{x})}_{=E} + \frac{M^{\cancel{2}}|\mathbf{V}|^2}{2\cancel{M}} + \frac{\cancel{2M}\mathbf{V}\cdot\mathbf{P}}{\cancel{2M}} \\
&= E + \frac{M|\mathbf{V}|^2}{2} + \mathbf{V}\cdot\mathbf{P}
\end{aligned}$$

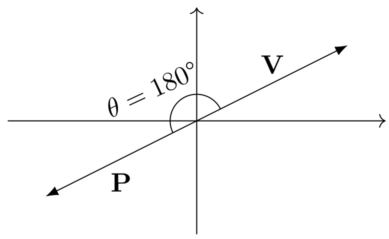
$\square$

(b) Fixados $|\mathbf{V}|$ e $|\mathbf{P}|$, prove que o mínimo de $\mathbf{V} \cdot \mathbf{P}$ é $-|\mathbf{V}||\mathbf{P}|$.
(Dica: Interprete $\mathbf{V} \cdot \mathbf{P}$ geometricamente.)

Resolução:
Dados os vetores $\mathbf{V}$ e $\mathbf{P}$, que possuem módulos constantes, respectivamente $|\mathbf{V}|$ e $|\mathbf{P}|$, sendo $\mathbf{V} \cdot \mathbf{P}$ a multiplicação da projeção ortogonal de $\mathbf{V}$ em $\mathbf{P}$ pelo módulo de $\mathbf{P}$ (ou vice-versa, pois $\mathbf{V} \cdot \mathbf{P} = \mathbf{P} \cdot \mathbf{V}$), pela equação $\mathbf{V} \cdot \mathbf{P} = |\mathbf{V}||\mathbf{P}| \cos\theta$, onde θ é o ângulo entre eles, temos que o valor mínimo de $\mathbf{V} \cdot \mathbf{P} = -|\mathbf{V}||\mathbf{P}|$, pois $-1 \leqslant \cos\theta \leqslant 1$ sendo, portanto, $\cos 180° = -1$ seu valor mínimo, na situação onde $\mathbf{V}$ e $\mathbf{P}$ apontam em direções opostas.



Caso qualquer



Caso mínimo

□

QUESTÃO 2

Agora estamos em posição de entender o argumento de Landau. Para isso considere a Figura 1:

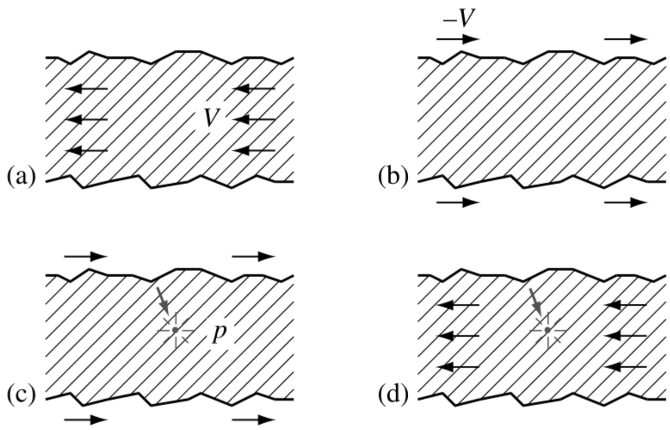


Figura 1: Diagramas das diferentes situações do fluido retratadas no texto.

Landau imaginou um fluido de massa M e velocidade $\mathbf{V}$ (veja a Figura 1(a)) escoando em um tubo estreito. Para um fluido normal, com viscosidade, suas interações com o tubo seriam a causa primária do atrito viscoso e da dissipação de energia que as partículas no fluido sofrem.

Ele considerou que o mecanismo para a viscosidade seria a criação de excitações no fluido que se propagariam com momento $\mathbf{p}$ e relação de dispersão $\epsilon(|\mathbf{p}|)$[1], por conta da interação com o tubo. As excitações não devem ser entendidas como partículas no sentido usual, pois elas são a combinação de complexos movimentos ocorrendo no fluido (exemplos serão dados mais a frente).

(a) Considere a situação da Figura 1(b). Ela representa a visão de um observador no **referencial de repouso** S do fluido. Suponha que, sem excitação, a energia do fluido nesse referencial seja E_0, chamada *energia do estado fundamental*. Com a adição de uma excitação de energia $\epsilon(|\mathbf{p}|)$ e momento $\mathbf{p}$, qual será a nova energia E e o novo momento $\mathbf{P}$ do fluido nesse mesmo referencial?

Resolução:
E e $\mathbf{P}$ devem ser $E = E_0 + \epsilon(|\mathbf{p}|)$ e $\mathbf{P} = \mathbf{p}$, respectivamente.

[1] Lembre-se novamente de que aqui estamos assumindo uma forma geral dessa relação e não necessariamente que seja igual à $|\mathbf{p}|^2/2m$

(b) Com base no exercício 1(a), faça uma transformação de Galileu para referencial de laboratório S', no qual o fluido se move com velocidade $\mathbf{V}$ (veja a Figura 1(d)), e encontre o momento $\mathbf{P'}$ e energia E' do fluido nesse referencial.

(Ainda que não seja necessário, podemos assumir que $|\mathbf{p}|^2/2M \ll E'$ para simplificar as contas, pois se espera que o momento da excitação seja muito menor do que o momento do fluido $M\mathbf{V}$.)

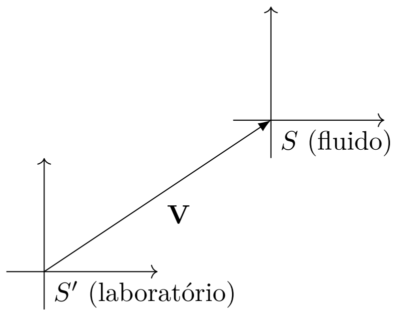
Resolução:

Pela transformação de Galileu, enquanto a velocidade do fluido no referencial anterior seria meramente $\mathbf{u} = \mathbf{0}$, agora será $\mathbf{u'} = \mathbf{V}$, e, portanto, pelos resultados da questão 1(a) a energia E' no novo referencial será

$$E' = E + \frac{M|\mathbf{V}|^2}{2} + \mathbf{V} \cdot \mathbf{P} \tag{4}$$

e

$$\mathbf{P'} = \mathbf{P} + M\mathbf{V} \tag{5}$$



(c) Qual seria a energia $\tilde{E}$ e o momento $\tilde{\mathbf{P}}$ do fluido **sem excitação**, no referencial do laboratório? Prove que a diferença de energia é dada por $\Delta E = E' - \tilde{E} = \epsilon(|\mathbf{p}|) + \mathbf{p} \cdot \mathbf{V}$.

(Dica: Não é necessário refazer todas as contas. Tente adaptar o item anterior, porém não esqueça de dar justificativas)

(Ainda que não tenha derivado os resultados acima, é permitido utilizá-los nos itens a seguir)

Se o custo para criar a excitação ΔE for menor do que zero, então as excitações serão criadas espontaneamente. Portanto, para que o fluido perca energia pela dissipação induzida por essas excitações, é necessário e suficiente que $\Delta E < 0$.

Resolução:

Considerando o mesmo fluido sob transformação de Galileu, porém sem a excitação da questão 2(a). Adotando momento inicial nulo, teríamos

$$\tilde{E} = E_0 + \frac{M|\mathbf{V}|^2}{2} \tag{6}$$

e

$$\tilde{\mathbf{P}} = M\mathbf{V} \tag{7}$$

Fazendo $\Delta E = E' - \tilde{E}$, temos

$$\begin{aligned}\Delta E = E' - \tilde{E} &= \left(E + \frac{M|\mathbf{V}|^2}{2} + \mathbf{V} \cdot \mathbf{P}\right) - \left(E_0 + \frac{M|\mathbf{V}|^2}{2}\right) \\ &= \cancel{E_0} + \epsilon(|\mathbf{p}|) + \cancel{\frac{M|\mathbf{V}|^2}{2}} + \mathbf{V} \cdot \mathbf{p} - \cancel{E_0} - \cancel{\frac{M|\mathbf{V}|^2}{2}}\end{aligned}$$

pela simetria do produto escalar

$$\Delta E = \epsilon(|\mathbf{p}|) + \mathbf{p} \cdot \mathbf{V} \tag{8}$$

□

(d) Fixados $|\mathbf{p}|$ e $|\mathbf{V}|$, só pode haver $\Delta E < 0$ se o seu mínimo for menor que zero também. Usando o item 1(b), prove que o mínimo de ΔE nessas condições é $\epsilon(|\mathbf{p}|) - |\mathbf{p}||\mathbf{V}|$. Prove então que só pode haver $\Delta E < 0$ se $|\mathbf{V}| > \epsilon(|\mathbf{p}|)/|\mathbf{p}|$, com $\mathbf{p} \neq \mathbf{0}$.

No caso oposto, ou seja, supondo que tenhamos $\Delta E > 0$, é necessário dispêndio de energia para criar **qualquer excitação**. Logo um fluido no regime de velocidade

$$|\mathbf{V}| < \min_{\mathbf{p} \neq \mathbf{0}} \frac{\epsilon(|\mathbf{p}|)}{|\mathbf{p}|} \tag{9}$$

não apresentaria viscosidade, sendo então um **superfluido**!

Resolução:
Pelo item 1(b), temos

$$\min \mathbf{p} \cdot \mathbf{V} = -|\mathbf{p}||\mathbf{V}|$$

dado $|\mathbf{p}|$ fixado, admitimos $\epsilon(|\mathbf{p}|)$ fixado também, e daí segue, da eq. 8

$$\min \Delta E = \epsilon(|\mathbf{p}|) - |\mathbf{p}||\mathbf{V}| \tag{10}$$

e para que a eq. 10 seja menor que zero, precisamos que

$$\epsilon(|\mathbf{p}|) < |\mathbf{p}||\mathbf{V}|$$

assumindo $\mathbf{p} \neq \mathbf{0}$

$$|\mathbf{V}| > \frac{\epsilon(|\mathbf{p}|)}{|\mathbf{p}|}$$

□

(e) Imagine que as excitações sejam ondas de som, cuja energia é proporcional ao momento:

$$\epsilon(|\mathbf{p}|) = v_s|\mathbf{p}| \tag{11}$$

onde v_s é a velocidade do som. Usando a equação 9, mostre que existe uma velocidade crítica v_c, abaixo da qual ocorre superfluidez, e que seu valor é $v_c = v_s$. Excitações desse tipo são chamada fônons.

Resolução:
Sendo v_c a velocidade crítica, estabelecida na equação 9, temos

$$|\mathbf{V}| < v_c = \min_{\mathbf{p}\neq\mathbf{0}} \frac{\epsilon(|\mathbf{p}|)}{|\mathbf{p}|}$$

Pela eq. 11, temos

$$\epsilon(|\mathbf{p}|) = v_s|\mathbf{p}| \overset{\mathbf{p}\neq\mathbf{0}}{\implies} v_s = \frac{\epsilon(|\mathbf{p}|)}{|\mathbf{p}|} \quad \text{(constante)}$$

daí, tiramos

$$v_c = v_s$$

□

(f) No caso "normal" de excitações massivas do tipo $\epsilon(|\mathbf{p}|) = \dfrac{|\mathbf{p}|^2}{2m}$, mostre que a velocidade crítica é $v_c = 0$, isto é, **não ocorre estado superfluido**.

Resolução:
Da equação 9, temos:

$$|\mathbf{V}| < \min_{\mathbf{p}\neq\mathbf{0}} \frac{\epsilon(|\mathbf{p}|)}{|\mathbf{p}|} = v_c$$

substituindo $\epsilon(|\mathbf{p}|) = |\mathbf{p}|^2/2m$

$$\begin{aligned} v_c &= \min_{\mathbf{p}\neq\mathbf{0}} \frac{|\mathbf{p}|^2/2m}{|\mathbf{p}|} \\ &= \min_{\mathbf{p}\neq\mathbf{0}} \frac{|\mathbf{p}|}{2m} \end{aligned}$$

como $\mathbf{p} \neq \mathbf{0}$, devemos tomar o limite $|\mathbf{p}| \to 0$

$$v_c = \lim_{|\mathbf{p}|\to 0} \frac{|\mathbf{p}|}{2m} = 0$$

□

(g) Existem excitações chamadas rótons que possuem relação de dispersão dada por

$$\epsilon(|\mathbf{p}|) = \Delta + \frac{(|\mathbf{p}| - p_0)^2}{2\mu}\,, \tag{12}$$

onde p_0, μ e Δ são constantes independentes de $\mathbf{p}$. Determine a velocidade crítica v_c nesse caso.

Resolução:
Supondo $\mu > 0$, sem perda de generalidade, temos que

$$\epsilon(|\mathbf{p}|) = a|\mathbf{p}|^2 + b|\mathbf{p}| + c$$

com $a > 0$. Disso, concluímos que seu valor mínimo se dá quando

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}|\mathbf{p}|}\left[\epsilon(|\mathbf{p}|)\right] = 0.$$

Sendo assim, para algumas relações de dispersão quadráticas $\epsilon(|\mathbf{p}|)$ bem comportadas, o valor da reta $v(|\mathbf{p}|)$ passando por $(0, 0)$ e tangenciando $\epsilon(|\mathbf{p}|)$ será solução de $v_c = \epsilon(|\mathbf{p}|)/|\mathbf{p}|$. Podemos analisar o comportamento dessa reta tangente $\epsilon(|\mathbf{p}|)$ no Mathematica (arquivo enviado por e-mail).

(h) Represente graficamente na Figura 2 a velocidade crítica para a relação de dispersão representada. Justifique. (Dica: Qual o significado geométrico da equação 9?)

Resolução:

Pelo mesmo raciocínio do item anterior, podemos notar que v_c corresponde ao ponto onde a reta tangente à relação de dispersão (e que passa pela origem) tem coeficiente angular mínimo e, portanto, será a reta ao lado.

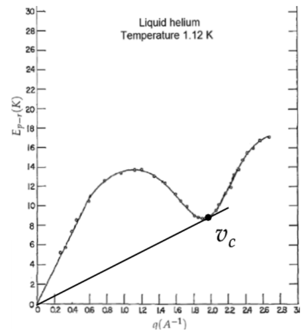


Figura 2: Relação de dispersão

(i) A partir dos itens 2(e) e 2(g), indique na Figura 3 a região aproximada correspondente a excitações de fônons e a de rótons. Justifique sua escolha. Qual delas é a mais importante para a velocidade crítica e por quê?

Resolução:

Considerando a região em torno do ponto marcado na resolução do item 2(h) é semelhante a uma parábola com concavidade para cima e que está perto da origem, a região grifada de vermelho deve ser uma boa aproximação para a excitação dos rótons.

Já as excitações dos fônons, que podem ser descritas como retas com coeficiente angular alto e próximas da origem, podem ser aproximadas pela região grifada em azul.

Sendo as excitações dos rótons mais pontuais, são mais importantes como demarcação da velocidade crítica (as excitações dos fônons podem variar mais de valor crítico).

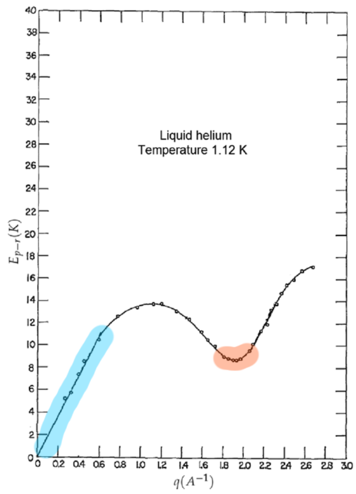


Figura 3: Relação de dispersão