Nota: 9,2

1.(a) Sendo o momento no tempo t, $p(t) = (m+\Delta m)v$, e em $t+\Delta t$, $p(t+\Delta t) = m(v+\Delta v) + \Delta m(v - v_e)$, na ausência de forças externas, $p(t) = p(t+\Delta t) \Rightarrow$

$$(m+\Delta m)v = m(v+\Delta v) + \Delta m(v - v_e) \Leftrightarrow$$

$$\Delta m\, v_e = \Delta v \cdot m \Leftrightarrow$$

$$\Delta v = \frac{v_e \Delta m}{m} \qquad (1.1)$$

(b) Dividindo (1.1) por Δt, temos:

$$\frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{v_e}{m}\frac{\Delta m}{\Delta t}$$ tomando o limite $\Delta t \to 0$, temos:

$$\lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta v}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{v_e}{m}\frac{\Delta m}{\Delta t} \Rightarrow \frac{dv}{dt} = \frac{v_e}{m}\frac{dm}{dt} \Leftrightarrow$$

(Pela 2ª Lei de Newton) $m\frac{dv}{dt} = v_e \frac{dm}{dt} \Rightarrow F_f = v_e \frac{dm}{dt}$, que é a força aplicada pelo foguete.

(Pela 3ª Lei de Newton) $F_p = -F_f = -v_e \frac{dm}{dt}$ (1.2)

□

(c) Por (1.2), temos:

$$m\frac{dv}{dt} = -v_e \frac{dm}{dt} \Leftrightarrow$$

$$\frac{\dot{v}}{v_e} = -\frac{\dot{m}}{m} \Rightarrow$$

$$\frac{1}{v_e}\int_0^t \dot{v}\, dt = -\int_0^t \frac{\dot{m}}{m}\, dt$$

Como $v(t) \Rightarrow \left[\frac{dv}{dt}\right] dt = dv$ e $m(t) \Rightarrow dm = \left[\frac{dm}{dt}\right] dt$, temos:

$$\frac{1}{v_e}\int_0^t dv = -\int_{m(0)=m_0}^{m(t)=m_f} \frac{1}{m}\, dm \Rightarrow$$

$$\frac{1}{v_e} v \Big|_0^t = -\ln(m)\Big|_{m_0}^{m_f}$$

Sendo $v(t) - v(0) = \Delta v$:

$$\frac{\Delta v}{v_e} = -[\ln(m_f) - \ln(m_0)] \Rightarrow \Delta v = v_e \ln\left(\frac{m_0}{m_f}\right)$$

□

2(a) Sendo a força total sobre o foguete $F_g + F_p$, pela segunda lei de Newton, temos:

$$m\, a(t) = -mg - v_e \dot{m}$$

(b) Assumindo $m \neq 0$, temos:

$$a(t) = -g - v_e \frac{\dot{m}}{m} = -g - v_e\, \dot{u}\, \ln' u \,, \quad u = m(t)$$
$$= -g - v_e \frac{d}{dt}\left[\ln(m(t))\right]$$

$\square$

(c) Devemos ter $a(0) > 0$ para que o foguete saia do chão, isso implica em:

$$-g - v_e \frac{d}{dt}\left[\ln(m(t))\right]\Big|_{t=0} > 0 \Leftrightarrow$$

$$-\frac{\dot{m}(0)}{m_0} > \frac{g}{v_e} \Rightarrow |\dot{m}(0)| > \frac{g}{v_e} m_0$$

(d) Integrando (2), temos:

$$v(t) = \int_0^t a(t')\, dt' = \int_0^t -g - v_e \frac{d}{dt}\left[\ln(m(t))\right] dt' \Rightarrow$$

$$v(t) = \int_0^t -g\, dt' - v_e \int_0^t \frac{\dot{m}(t)}{m(t)}\, dt'$$

Sendo $dm = \left[\frac{dm}{dt}\right] dt$, temos:

$$v(t) = -gt - v_e \int_{m(0)=m_0}^{m(t)} \frac{dm}{m} = -gt - v_e \ln(m)\Big|_{m_0}^{m(t)}$$

$$v(t) = -gt - v_e \ln\left(\frac{m(t)}{m_0}\right) \qquad (2.1)$$

$\square$

(e) Integrando (2.1) no intervalo de 0 à t_I, temos:

$$H_I = \int_0^{t_I} v(t)\, dt = \int_0^{t_I} -gt - v_e \ln\left(\frac{m(t)}{m_0}\right) dt \Rightarrow$$

$$= -g\frac{t_I^2}{2} - v_e \int_0^{t_I} \ln\left(\frac{m(t)}{m_0}\right) dt. \qquad (2.2)$$

(f) Sendo a altura máxima H a soma de H_I com a altura Δh alcançada com a velocidade v_I sob efeito da gravidade, somente, temos, pela definição de velocidade:

$$v(t) = v(0) + at \Rightarrow$$

$$0 = v_I - g\,t_{h_{máx}} \Rightarrow t_{h_{máx}} = v_I / g$$

Pela equação horária sob aceleração constante, temos:

$$\Delta h = v_I\, t_{h_{máx}} - \frac{g}{2} t_{h_{máx}}^2$$

Substituindo $t_{h_{máx}}$, temos:

$$\Delta h = v_I \left(\frac{v_I}{g}\right) - \frac{g}{2}\left(\frac{v_I}{g}\right)^2 = \frac{v_I^2}{2g}$$

Portanto,

$$H = H_I + \Delta h$$

$$= H_I + \frac{v_I^2}{2g}$$

Sendo $v_I = v(t_I)$, de (2.1), temos:

$$v_I = v(t_I) = -g t_I - v_e \ln\left(\frac{m(t_I)}{m_0}\right)$$

de (1), temos:

$$v_I = -g t_I + \Delta v$$

e também, $m_0 = m_f \exp(\Delta v / v_e)$. Substituindo em H, temos:

$$H = -\frac{1}{2} g t_I^2 - v_e \int_0^{t_I} \ln\left(\frac{m(t)}{m_f \cdot \exp(\Delta v / v_e)}\right) dt + \frac{(\Delta v - g t_I)^2}{2g}$$

$$= \frac{\Delta v^2 - 2 g t_I \Delta v + (g \cancel{t_I})^2 - (g \cancel{t_I})^2}{2g} - v_e \left[\int_0^{t_I} \ln\left(\frac{m(t)}{m_f}\right) - \int_0^{t_I} \ln(\exp(\Delta v / v_e)) dt \right]$$

$$= \frac{\Delta v^2}{2g} - \Delta \cancel{v} t_I - v_e \int_0^{t_I} \ln\left(\frac{m(t)}{m_f}\right) dt + \Delta \cancel{v} t_I$$

$$= \frac{\Delta v^2}{2g} - v_e \int_0^{t_I} \ln\left(\frac{m(t)}{m_f}\right) dt$$

□

3. (a) Fazendo $m(t_I) = m_f$, temos:

$$-\frac{1}{\alpha} \ln\left(\frac{m_f}{m_0}\right) = t_I \qquad (3.1)$$

(b) Generalizando o resultado de (2.c) para (2), temos:

$$a(t) > 0 \Rightarrow$$

$$-g - v_e \frac{\dot{m}(t)}{m(t)} > 0 \Rightarrow$$

$$|\dot{m}(t)| > \frac{g}{v_e} m(t) \Rightarrow$$

$$\alpha \cancel{m_0} \cancel{e^{-\alpha t}} > \frac{g}{v_e} \cancel{m_0} \cancel{e^{-\alpha t}} \Rightarrow \alpha > \frac{g}{v_e}$$ para que haja aceleração positiva

□

(c) De (3), temos:

$$H = \frac{\Delta v^2}{2g} - v_e \int_0^{t_I} \ln\left(\frac{m(t)}{m_0} \cdot \frac{m_0}{m_f}\right) dt$$

$$= \frac{\Delta v^2}{2g} - v_e \left[\int_0^{t_I} \ln\left(\frac{m_0}{m_f}\right) + \ln(e^{-\alpha t})\, dt \right]$$

$$= \frac{\Delta v^2}{2g} - v_e \left[\ln\left(\frac{m_0}{m_f}\right) t_I + \left(-\frac{\alpha}{2} t_I^2\right) \right]$$

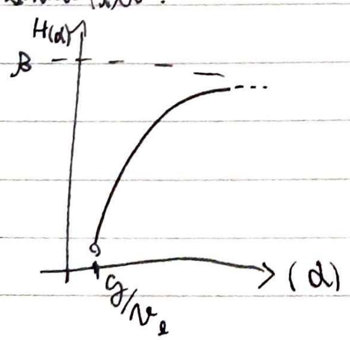
De (3.1) e (1), temos:

$$H = \frac{v_e^2}{2g}\left[\ln\left(\frac{m_0}{m_f}\right)\right]^2 - v_e \left[\frac{1}{\alpha}\left[\ln\left(\frac{m_0}{m_f}\right)\right]^2 - \frac{1}{2\alpha}\left[\ln\left(\frac{m_0}{m_f}\right)\right]^2 \right]$$

$$H = \frac{v_e^2}{2g}\left[\ln\left(\frac{m_0}{m_f}\right)\right]^2 \left(1 - \frac{g}{\alpha v_e}\right)$$

$\square$

(d) Sendo $\frac{v_e^2}{2g}\left[\ln\left(\frac{m_0}{m_f}\right)\right]^2 = \beta$ constante e $\frac{g}{v_e} = \gamma$ constante, $H(\alpha)$ é uma função no formato $H(\alpha) = \beta(1 - \gamma/\alpha)$, portanto temos um comportamento assintótico:



Como β ocorre quando $\alpha \to \infty$, temos

$$\lim_{\alpha \to \infty} H(\alpha) = \frac{v_e^2}{2g}\left[\ln\left(\frac{m_0}{m_f}\right)\right]^2 = H_{máx} > H(\alpha)$$

pois α jamais chega no infinito.

Sabemos que essa função não possui máximo pois $H'(\alpha) = -\frac{1}{\alpha^2}$, que nunca iguala 0, somente tende a 0.

(e) Como (3) nos dá a altura máxima, se $v_e \int_0^{t_I} \ln\left(\frac{m(t)}{m_f}\right) dt > 0$, H é máxima se a integral é mínima, o que ocorre para t_I mínimo, pois ln nunca mudará de sinal ~~enquanto~~ já que $m(t) \geq m_f$.

4(a) Sendo $m(t)$ a exponencial dada na questão 3, tomando o limite $\alpha \to \infty$, temos os casos:

$t > 0$:

$$m(t) \xrightarrow{\alpha \to \infty} 0$$

$t < 0$:

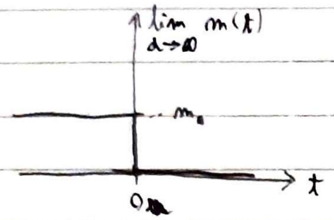
$$m(t) \xrightarrow{\alpha \to \infty} m_0$$

Portanto, temos

$$\lim_{\alpha \to \infty} m(t) = \begin{cases} 0, & \text{se } t \geq 0 \\ m_0, & \text{se } t < 0 \end{cases}$$

ou, utilizando $\theta(t) = \begin{cases} 1, & \text{se } t \geq 0 \\ 0, & \text{se } t < 0 \end{cases}$

Temos $\lim\limits_{\alpha \to \infty} m(t) = m_0(1 - \theta(t))$. □



(b) Sendo $|\dot{m}(t)| = |-\alpha m_0 e^{-\alpha t}| = \alpha m_0 e^{-\alpha t}$, tomando os limites

$$\lim_{t \to 0^+} \lim_{\alpha \to \infty} \alpha m_0 e^{-\alpha t} = 0 \quad \text{e} \quad \lim_{t \to 0^-} \lim_{\alpha \to \infty} \alpha m_0 e^{-\alpha t} = \infty$$

pois a exponencial cresce mais rápido que o fator linear $\left(\frac{1}{\infty} = 0\right)$

Como $\lim\limits_{t \to 0} \lim\limits_{\alpha \to \infty} |\dot{m}(t)|$ não converge, $\lim\limits_{\alpha \to \infty} |\dot{m}(t)|$ não está bem definida para $t = 0$, e, portanto, não está bem definida na reta. □

(c) Fazendo $\int_I \delta(t)\, dt$, temos:

$$\lim_{\alpha \to \infty} m_0^{-1} \int_I |-m_0 \alpha e^{-\alpha t}|\, dt \Rightarrow$$

$$\lim_{\alpha \to \infty} \frac{1}{m_0} \int_I |m_0 e^{+u}|\, du \quad , u = -\alpha t \Rightarrow du = -\alpha\, dt$$

$$- e^{-\alpha t}$$

(c) Sendo $|\dot{m}(t)| = -\dot{m}(t)$, temos:

$$\int_I \lim_{\alpha \to \infty} \frac{\alpha m_0 e^{-\alpha t}}{m_0} dt \Rightarrow$$

Sendo a integral um limite, podemos tirar o limite de dentro dela:

$$\lim_{\alpha \to \infty} \frac{m_0}{m_0} \int_I -e^u \, du, \quad u = -\alpha t \Rightarrow du = -\alpha \, dt$$

Função degrau

$$\lim_{\alpha \to \infty} \frac{m_0}{m_0}\left(-e^{-\alpha t}\right)\Big|_I = \frac{-\cancel{m_0}}{\cancel{m_0}}(1 - \Theta(t))\Big|_I$$

Como um intervalo aberto contendo o 0 contém infinitos pontos $t > 0$ e $t < 0$, podemos concluir que:

$$\int_I \delta(t) \, dt = -(1 - \Theta(t>0)) - [-(1 - \Theta(t<0))]$$

$$= -[(1-1) - (1-0)] = 1 \quad \forall I, 0 \in I.$$

$\square$

5. A força de propulsão não atua no intervalo $t > t_I$, e, portanto, o teorema trabalho energia deve ser aplicado à força gravitacional nesse intervalo.