Resolução – Lista 7 (Física I – 4302111)

Isabella B. – 11810773

Questão 1

Considere um triângulo equilátero, da lado L e densidade superficial de massa $\sigma = \sigma_0$ constante. Calcule a posição do centro de massa.

Resolução:

Sendo o centro de massa dado por

$$\mathbf{R} = \frac{1}{M}\int_V \mathbf{r}\,\mathrm{d}m, \tag{1.1}$$

primeiro devemos encontrar a massa que, para esse caso específico, é dada por $M = \sigma\,A$, $A = \sqrt{3}L^2/4$, pela relação de densidade superficial.

Posicionando o triângulo de tal forma que $L/2$ de sua base esteja de cada lado do plano, com a base paralela à horizontal, pela equação de reta, sabemos que, para o lado negativo, y assume a forma $\sqrt{3}\,(L+2x)\,/2$, e para o lado positivo, $y = \sqrt{3}\,(L-2x)\,/2$. Além disso, $\mathrm{d}m = \sigma\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x$ e $\mathbf{r} = \langle x, y, 0\rangle$, dessa forma, temos

$$\begin{aligned}
\mathbf{R} &= \frac{1}{M}\int_V \mathbf{r}\,\mathrm{d}m \\
&= \frac{1}{\sigma\,A}\left(\int_{-L/2}^{0}\int_{0}^{\sqrt{3}(L+2x)/2}[x\,\hat{\imath} + y\,\hat{\jmath}]\,\sigma\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x + \int_{0}^{L/2}\int_{0}^{\sqrt{3}(L-2x)/2}[x\,\hat{\imath} + y\,\hat{\jmath}]\,\sigma\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x\right)
\end{aligned}$$

sabemos que, sendo a densidade constante e o objeto simétrico em relação à vertical, sua componente horizontal deve ser nula, portanto

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{A}\left(-\int_{0}^{-L/2}\left[\frac{1}{2}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\,(L+2x)\right)^2\hat{\jmath}\right]\mathrm{d}x + \int_{0}^{L/2}\left[\frac{1}{2}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\,(L-2x)\right)^2\hat{\jmath}\right]\mathrm{d}x\right) \\
&= \frac{3}{8A}\hat{\jmath}\left(-\int_{0}^{-L/2}\left[L^2 + 4L\,x + 4x^2\right]\mathrm{d}x + \int_{0}^{L/2}\left[L^2 - 4L\,x + 4x^2\right]\mathrm{d}x\right) \\
&= \frac{3}{8A}\hat{\jmath}\left(-\left(L^2\,x + 4L\,\frac{x^2}{2} + 4\frac{x^3}{3}\right)\Bigg|_0^{-L/2} + \left(L^2\,x - 4L\frac{x^2}{2} + 4\frac{x^3}{3}\right)\Bigg|_0^{L/2}\right) \\
&= \frac{3}{8A}\hat{\jmath}\left(-\left(\cancel{-L^2\frac{L}{2}} + \cancel{2L\frac{L^2}{4}} - 4\frac{L^3}{24}\right) + \left(\cancel{L^2\frac{L}{2}} - \cancel{2L\frac{L^2}{4}} + 4\frac{L^3}{24}\right)\right) \\
&= \frac{3}{8\left(\sqrt{3}L^2/4\right)}\frac{L^3}{3}\hat{\jmath} \\
&= \frac{L}{2\sqrt{3}}\hat{\jmath}
\end{aligned}$$

Questão 2

Considere uma barra de comprimento L, com densidade linear de massa dada por $\lambda(x) = xf$, com f constante de dimensões adequadas.

(a) Quais as dimensões físicas de f?

Resolução:

(b) Qual a posição do centro de massa da barra?

Resolução:

(c) Suponha que a barra seja lançada da superfície da Terra na direção vertical. Desprezando o atrito do ar, descreva a equação do movimento do centro de massa e escreva a solução supondo que a velocidade inicial seja $v(t = 0) = v_0$.

Resolução:

(d) Nas mesmas condições do item c, suponha que no momento do lançamento a barra seja colocada em rotação. O que muda na trajetória do centro de massa?

Resolução:

Questão 3

Considere o sistema Sol-Lua-Terra, em movimento sob a ação das forças gravitacionais mútuas. Como vocês verão mais para a frente, no caso de um sistema de dois corpos que interage gravitacionalmente, a trajetória de cada um dos corpos é elíptica. Ao contrário, não existe uma solução geral analítica para um sistema de três corpos que interage gravitacionalmente. Apesar disso, o movimento do sistema Sol-Lua-Terra que está sendo considerado pode ser analisado em termos relativamente simples da forma seguinte:

(a) Considerando que $M_{\text{Sol}} \ll M_{\text{Terra}} \ll M_{\text{Lua}}$, mostre que é uma boa aproximação identificar o centro de massa do sistema com o centro do Sol. Qual o erro cometido nesta identificação?

Resolução:

(b) Considerando que as forças externas que agem no sistema são desprezíveis, qual a trajetória do Sol no espaço?

Resolução:

(c) Considerando agora que a distância média entre Terra e Sol é da ordem de $1 \cdot 10^{11}$ m, enquanto a distância média entre Terra e Lua é de $1 \cdot 10^{8}$ m, calcule a equação do movimento do centro de massa Terra-Lua no referencial do Sol (é um referencial inercial?), e mostre que o problema é reconduzido àquele de um sistema de dois corpos;

Resolução:

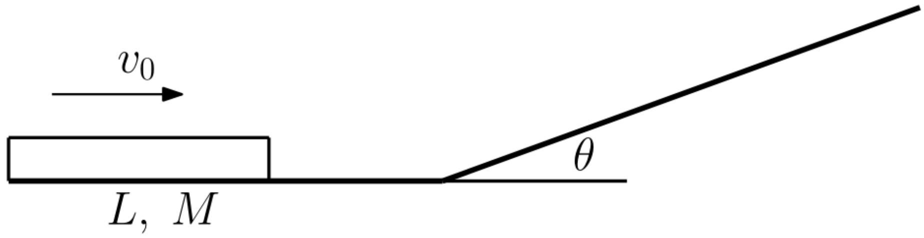


Figura 1: Trem de comprimento L.

(d) Em termos de quais movimentos é portanto possível descrever o sistema?

Resolução:

Questão 4

Calcule a expressão para a energia cinética de um sistema de N corpos no referencial do centro de massa.

Resolução:

Questão 5

Considere um trem de comprimento L, massa total M e densidade uniforme, em movimento com velocidade v_0 num plano horizontal sem atrito (veja a figura 1). No instante $t = 0$, o trem encontra uma subida retilínea que faz um ângulo θ em relação ao plano horizontal e começa subir até parar.

(a) Mostre explicitamente que, no cálculo da energia potencial de um corpo não puntiforme, é possível considerar um corpo puntiforme de massa igual à massa total do corpo;

Resolução:

(b) Quais as três posições possíveis nas quais o trem pode parar?

Resolução:

(c) Calcule a posição do centro de massa do trem quando o trem estiver parado nas três situações do item b;

Resolução:

(d) Considere agora o caso $L = 180\,\mathrm{m}$, $M = 200\,\mathrm{kg} \times 103\,\mathrm{kg}$, $\theta = 2°$ e $v_0 = 180\,\mathrm{km/h}$. Qual a altura final do centro de massa do sistema?

Resolução:

(e) Escreva as equações do movimento do trem nas várias fases da subida.

Resolução:

Questão 6

Considere um foguete que se movimenta na vertical *sob a ação de um campo gravitacional.* Qual a velocidade final do foguete após ter queimado uma parte do combustível? é melhor queimar o combustível rapidamente ou devagar?

Resolução:

Questão 7

Um foguete com N estágios tenta alcançar a velocidade de escape da Terra.

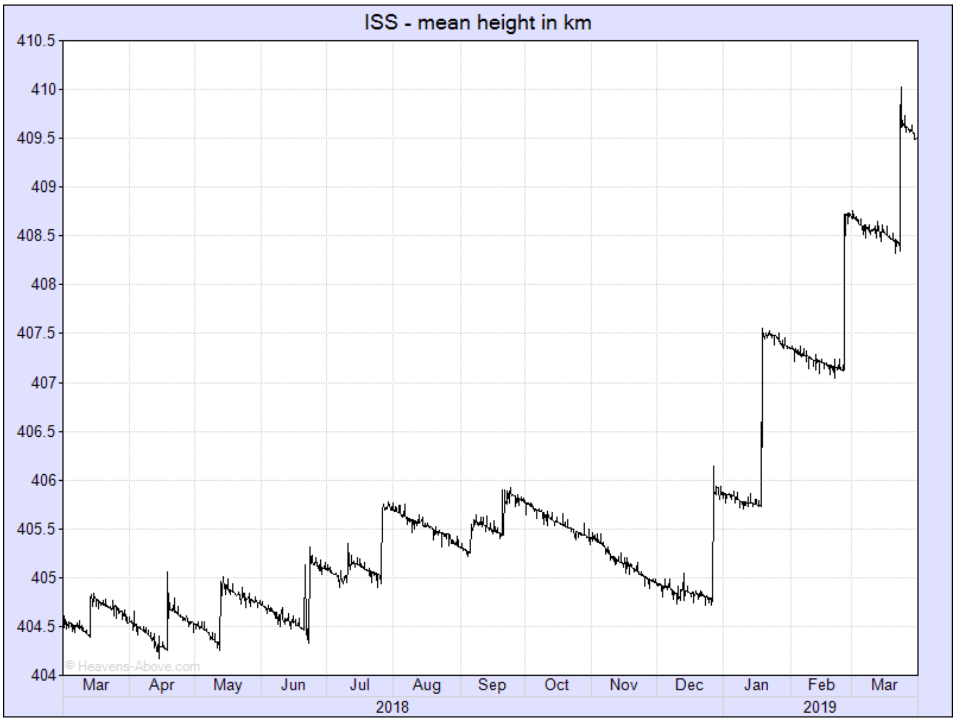


Figura 2: International Space Station.

(a) Suponha que a razão entre a massa de combustível e a massa de cada um dos tanques seja de 10%, e que a massa útil represente 1% da massa total. Qual a velocidade final de um foguete com 3 estágios? E de um foguete com 5 estágios?

Resolução:

(b) Para obter velocidades finais maiores *a parte o número de estágios*, é mais eficiente diminuir a massa da carga útil em relação à massa total ou é melhor modificar a razão entre a massa do combustível e a massa dos tanques?

Resolução:

Questão 8

Num satélite em órbita baixa ao redor da Terra atua uma força de atrito devida à atmosfera do planeta. Essa força de atrito se opõe ao movimento, causando uma diminuição do raio da órbita do satélite. Por exemplo, a Figura 2 mostra a altura da *International Space Station* (ISS) em função do tempo, onde podemos claramente identificar os períodos de queda e os períodos (rápidos) onde uma parte do combustível é usada para aumentar a altura. Dado que o atrito é fraco, em cada instante a órbita do satélite é *quase circular*. Relacione a energia cinética à energia potencial do satélite e mostre que (i) a diminuição da energia devido à força de atrito corresponde a uma diminuição da altura da órbita, e (ii) que, apesar da força de atrito estar presente, a velocidade do satélite aumenta com o tempo.

Resolução:

Questão 9

Considere o sistema de polias na figura 3. As mesas que sustentam os corpos M_1 e M_2 geram atrito de contato, ambas com coeficiente de atrito μ.

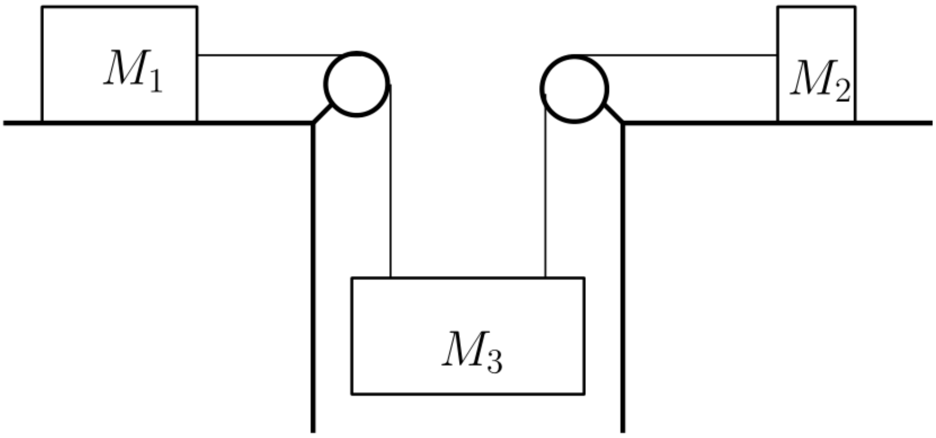
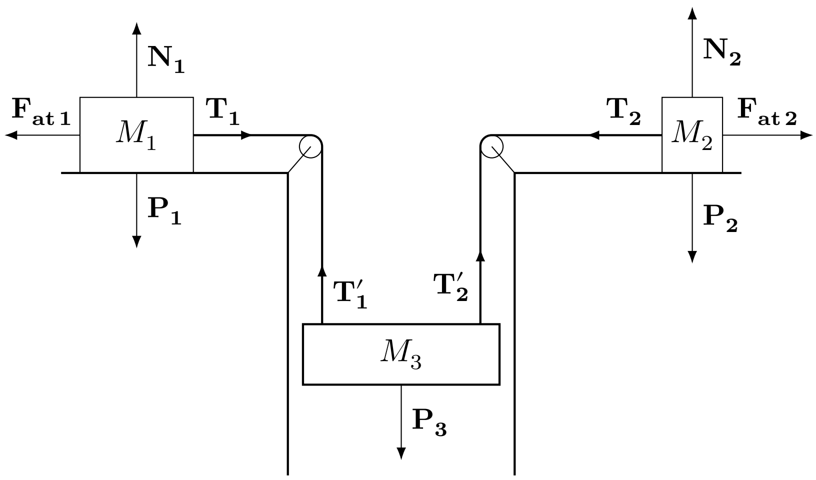


Figura 3: Sistema de Polias.

(a) Desenhe o diagrama das forças que atuam em cada um dos corpos;

Resolução:



(b) Como você pode escrever de forma matemática o vínculo entre os corpos devido às cordas?

Resolução:

Somando as forças em cada corpo, encontramos as expressões para a força resultante:

$$\mathbf{F_{r\,1}} = \mathbf{P_1} + \mathbf{N_1} + \mathbf{T_1} + \mathbf{F_{at\,1}} \tag{9.1}$$
$$\mathbf{F_{r\,2}} = \mathbf{P_2} + \mathbf{N_2} + \mathbf{T_2} + \mathbf{F_{at\,2}} \tag{9.2}$$
$$\mathbf{F_{r\,3}} = \mathbf{P_3} + \mathbf{T'_1} + \mathbf{T'_2} \tag{9.3}$$

Assumindo que as polias transferem o movimento e as forças perfeitamente, pela terceira lei de Newton, temos que $\mathbf{T_1} = -\mathbf{T'_1}$ e $\mathbf{T_2} = -\mathbf{T'_2}$, portanto, por 9.1, 9.2 e 9.3, temos:

$$\begin{cases} \mathbf{T_1} = \mathbf{F_{r\,1}} - (\mathbf{P_1} + \mathbf{N_1} + \mathbf{F_{at\,1}}) \\ \mathbf{T_2} = \mathbf{F_{r\,2}} - (\mathbf{P_2} + \mathbf{N_2} + \mathbf{F_{at\,2}}) \end{cases} \implies$$
$$\mathbf{F_{r\,3}} = \mathbf{P_3} + (\mathbf{P_1} + \mathbf{N_1} + \mathbf{F_{at\,1}}) - \mathbf{F_{r\,1}} + (\mathbf{P_2} + \mathbf{N_2} + \mathbf{F_{at\,2}}) - \mathbf{F_{r\,2}}$$

assumindo que os planos são horizontais, os pesos se cancelam com as forças normais, e ficamos com

$$\mathbf{F_{r\,3}} = \mathbf{P_3} + \mathbf{F_{at\,1}} - \mathbf{F_{r\,1}} + \mathbf{F_{at\,2}} - \mathbf{F_{r\,2}}$$

Sendo $\mathbf{a_i}$ a aceleração de um corpo i, pela segunda lei de Newton, temos:

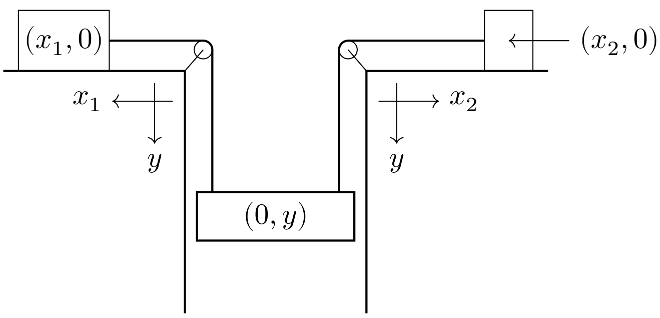
$$\begin{gathered} M_3\,\mathbf{a_3} = M_3\,\mathbf{g} + \mathbf{F_{at\,1}} - M_1\,\mathbf{a_1} + \mathbf{F_{at\,1}} - M_2\,\mathbf{a_2} \implies \\ M_1\,\mathbf{a_1} - \mathbf{F_{at\,1}} + M_2\,\mathbf{a_2} - \mathbf{F_{at\,1}} + M_3\,(\mathbf{a_3} - \mathbf{g}) = 0 \end{gathered} \tag{9.4}$$

Nota: Perceba que não podemos escrever $\mathbf{F_{at\,i}} = -\mu\,\mathbf{N_i}$ e nem $\mathbf{F_{at\,i}} = -\mu\,N_i\,\hat{\mathbf{\imath}}$, pois **não há** eixos definidos em nossa resolução[1].

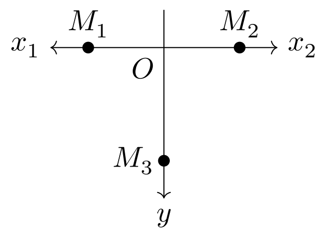
(c) Escreva as equações do movimento para cada um dos corpos.

Resolução:

Sejam $(x_1, 0)$ as coordenadas do centro de massa do corpo 1, tomadas a partir do canto superior da polia esquerda, com o eixo x_1 positivo para a esquerda, $(x_2, 0)$ as coordenadas do centro de massa do corpo 2, tomadas a partir do canto superior da polia direita, com o eixo x_2 positivo para a direita, e $(0, y)$ as coordenadas do centro de massa do corpo 3, tomadas a partir do centro do diagrama.



Esse centro pode ser tido como a intercessão das duas polias, num diagrama simplificado utilizando os centros de massa, somente.



Tomando as mesmas suposições do item anterior, por 9.1, 9.2 e 9.3, temos:

$$\mathbf{F_{r\,1}} = \mathbf{T_1} + \mathbf{F_{at\,1}} \tag{9.5}$$
$$\mathbf{F_{r\,2}} = \mathbf{T_2} + \mathbf{F_{at\,2}} \tag{9.6}$$
$$\mathbf{F_{r\,3}} = \mathbf{P_3} - (\mathbf{T_1} + \mathbf{T_2}) \tag{9.7}$$

Sendo $\mathbf{r_i}$ o vetor posição de um corpo i, pela segunda lei de Newton, temos:

$$M_1\,\ddot{\mathbf{r}}_\mathbf{1} = \mathbf{T_1} + \mathbf{F_{at\,1}} \tag{9.8}$$
$$M_2\,\ddot{\mathbf{r}}_\mathbf{2} = \mathbf{T_2} + \mathbf{F_{at\,2}} \tag{9.9}$$
$$M_3\,\ddot{\mathbf{r}}_\mathbf{3} = \mathbf{P_3} - (\mathbf{T_1} + \mathbf{T_2}) \tag{9.10}$$

Adotemos a notação $|\mathbf{v}| = v$.

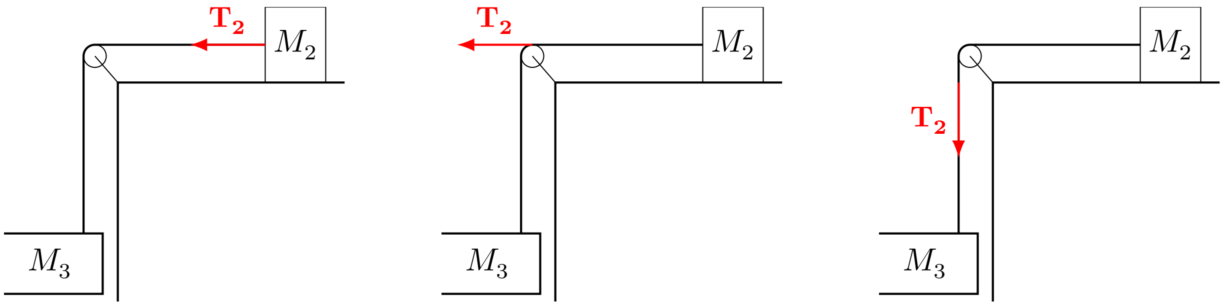
Como os corpos 1 e 2 tem seu movimento restrito à horizontal, e o corpo 3 tem seu movimento somente

[1]Note, porém, que é possível escrever $\mathbf{F_{at\,i}} = -\mu\,N_i\,\dot{\hat{\mathbf{r}}}$, onde $\hat{\mathbf{r}}$ é o vetor unitário do deslocamento (fonte).

na vertical, de 9.8, 9.9 e 9.10, temos:

$$M_1\,\ddot{x}_1 = -T_1 + F_{at\,1} \tag{9.11}$$
$$M_2\,\ddot{x}_2 = -T_2 + F_{at\,2} \tag{9.12}$$
$$M_3\,\ddot{y} = P_3 - (T_1 + T_2) \tag{9.13}$$

Nota: Apesar de $\mathbf{T_1'}$ e $\mathbf{T_2'}$ estarem opostos a trajetória do corpo 3, seguindo o princípio de que em cada ponto de uma corda ideal temos a mesma tensão em cada lado, podemos ver que $\mathbf{T_1}$ e $\mathbf{T_2}$ estão apontando no sentido positivo do eixo y:



Sendo o comprimento das cordas constante, igual a ℓ_1 para a corda entre 1 e 3, e igual a ℓ_2 para a corda entre 2 e 3, temos:

$$\ell_1 = x_1 + y \implies \quad \ddot{x}_1 + \ddot{y} = 0 \implies \quad \ddot{y} = -\ddot{x}_1 \tag{9.14}$$
$$\ell_2 = x_2 + y \implies \quad \ddot{x}_2 + \ddot{y} = 0 \implies \quad \ddot{y} = -\ddot{x}_2 \tag{9.15}$$

Seja a força total $\mathbf{F_{r\,t}} = \mathbf{F_{r\,1}} + \mathbf{F_{r\,2}} + \mathbf{F_{r\,3}}$, por 9.5, 9.6 e 9.7, temos:

$$|\mathbf{F_{r\,t}}| = |\mathbf{F_{r\,1}}| + |\mathbf{F_{r\,2}}| + |\mathbf{F_{r\,3}}| = |\mathbf{T_1} + \mathbf{F_{at\,1}}| + |\mathbf{T_2} + \mathbf{F_{at\,2}}| + |\mathbf{P_3} - (\mathbf{T_1} + \mathbf{T_2})\,| \tag{9.16}$$

substituindo 9.11, 9.12, 9.13

$$M_3\,\ddot{y} - M_1\,\ddot{x}_1 - M_2\,\ddot{x}_2 = P_3 - (T_1 + T_2) - (-T_1 + F_{at\,1}) - (-T_2 + F_{at\,2})$$

substituindo 9.14 e 9.15

$$(M_1 + M_2 + M_3)\,\ddot{y} = P_3 - (F_{at\,1} + F_{at\,2}) = F_{r\,t} \tag{9.17}$$

(d) A energia é conservada no sistema?

Resolução:

Não, pois há ação de forças dissipativas, nomeadamente, o atrito entre os corpos e a superfície.

(e) Considerando o sistema $M_1 + M_2 + M_3$, o momento linear é conservado? Por quê?

Resolução:

Sendo $\mathbf{F} = \dfrac{\mathrm{d}\mathbf{p}}{\mathrm{d}t}$, para o caso em que $\mathbf{F} = \mathbf{0}$, o momento linear do sistema é conservado, já que uma derivada nula implica que a quantidade é constante.

Analisando 9.17, podemos ver que essa expressão só é nula para $P_3 = F_{at\,1} + F_{at\,2}$, portanto, o momento linear não é conservado no caso geral.

De forma genérica, podemos dizer que, como há forças externas atuando no sistema, o momento linear não é conservado.

Nota: O momento linear seria conservado caso incluíssemos as superfícies em nossa análise, já que o atrito é resultado da interação entre os blocos e as superfícies[2].

[2]Fonte: https://physics.stackexchange.com/questions/79884/conservation-of-momentum-when-friction-is-present.

Questão 10

Um caminhão-tanque cheio de água, de massa total M, utilizado para limpar ruas com um jato de água, trafega por uma via horizontal, com coeficiente de atrito cinético μ. Ao atingir a velocidade v_0, o motorista coloca a marcha no ponto morto e liga o jato de água, que é enviada para trás com velocidade ve relativa ao caminhão, com uma vazão de λ litros por segundo. Ache a velocidade $v(t)$ do caminhão depois de um tempo t.

Resolução: