

Questão 1

Considere um corpo de massa M que no referencial S têm velocidade \mathbf{u} , posição \mathbf{x} e energia $E = \frac{|\mathbf{P}|^2}{2M} + U_{int}(\mathbf{x})$, onde $\mathbf{P} = M\mathbf{u}$ é o seu momento total. Suponha que a energia potencial de interação $U_{int}(\mathbf{x})$ seja invariante por transformações de Galileu, isto é, $U_{int}(\mathbf{x} + \mathbf{V}t) = U_{int}(\mathbf{x})$ para qualquer velocidade \mathbf{V} e tempo t . Com isso em mente, responda as seguintes questões:

- (a) Em um referencial S' , se movendo com velocidade $-\mathbf{V}$ em relação a S , ache a velocidade \mathbf{u}' do corpo e prove que sua energia é dada por $E' = E + \frac{1}{2}M|\mathbf{V}|^2 + \mathbf{V} \cdot \mathbf{P}$.

(Ainda que não tenha derivado os resultados acima, é permitido utilizá-los nos itens a seguir)

Resolução:

Dado $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{u}$, sabemos, por transformações de Galileu, que

$$\mathbf{u} - \mathbf{u}' = -\mathbf{V} \Rightarrow \mathbf{u}' = \mathbf{u} + \mathbf{V} \quad (1.1)$$

multiplicando a eq. 1.1 por M

$$\mathbf{P}' = \mathbf{P} + M\mathbf{V} \quad (1.2)$$

integrando a eq. 1.1 com respeito a t

$$\mathbf{x}' = \mathbf{x} + \mathbf{V}t \quad (1.3)$$

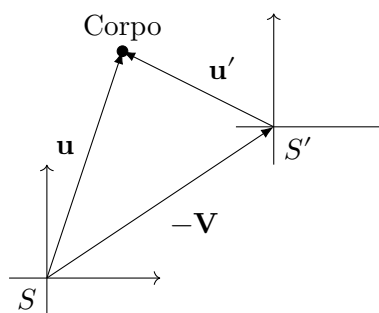
Tomando $E' = \frac{|\mathbf{P}'|^2}{2M} + U_{int}(\mathbf{x}')$ (dada no enunciado) e substituindo as equações 1.2 e 1.3, teremos:

$$\begin{aligned} E' &= \frac{|\mathbf{P} + M\mathbf{V}|^2}{2M} + U_{int}(\mathbf{x} + \mathbf{V}t) \\ &= \frac{(\sqrt{(\mathbf{P} + M\mathbf{V})(\mathbf{P} + M\mathbf{V})})^2}{2M} + U_{int}(\mathbf{x}) \\ &= \frac{|\mathbf{P} \cdot \mathbf{P} + (M\mathbf{V}) \cdot \mathbf{P} + \mathbf{P} \cdot (M\mathbf{V}) + (M\mathbf{V}) \cdot (M\mathbf{V})|}{2M} + U_{int}(\mathbf{x}) \\ &= \frac{|\mathbf{P} \cdot \mathbf{P} + M^2\mathbf{V} \cdot \mathbf{V} + 2M\mathbf{V} \cdot \mathbf{P}|}{2M} + U_{int}(\mathbf{x}) \end{aligned}$$

sabendo que $\mathbf{P} \cdot \mathbf{P} = |\mathbf{P}|^2 > 0$ e $\mathbf{V} \cdot \mathbf{V} = |\mathbf{V}|^2 > 0$, e assumindo $M > 0$, temos

$$\begin{aligned} E' &= \frac{|\mathbf{P}|^2 + M^2|\mathbf{V}|^2 + 2M\mathbf{V} \cdot \mathbf{P}}{2M} + U_{int}(\mathbf{x}) \\ &= \underbrace{\frac{|\mathbf{P}|^2}{2M} + U_{int}(\mathbf{x})}_{=E} + \frac{M^2|\mathbf{V}|^2}{2M} + \frac{2M\mathbf{V} \cdot \mathbf{P}}{2M} \\ &= E + \frac{M|\mathbf{V}|^2}{2} + \mathbf{V} \cdot \mathbf{P} \end{aligned}$$

□

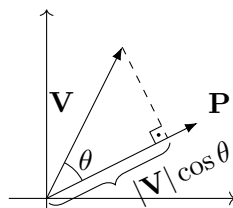


(b) Fixados $|\mathbf{V}|$ e $|\mathbf{P}|$, prove que o mínimo de $\mathbf{V} \cdot \mathbf{P}$ é $-|\mathbf{V}||\mathbf{P}|$.

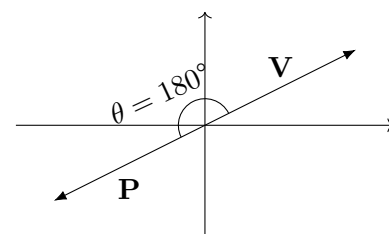
(Dica: Interprete $\mathbf{V} \cdot \mathbf{P}$ geometricamente.)

Resolução:

Dados os vetores \mathbf{V} e \mathbf{P} , que possuem módulos constantes, respectivamente $|\mathbf{V}|$ e $|\mathbf{P}|$, sendo $\mathbf{V} \cdot \mathbf{P}$ a multiplicação da projeção ortogonal de \mathbf{V} em \mathbf{P} pelo módulo de \mathbf{P} (ou vice-versa, pois $\mathbf{V} \cdot \mathbf{P} = \mathbf{P} \cdot \mathbf{V}$), pela equação $\mathbf{V} \cdot \mathbf{P} = |\mathbf{V}||\mathbf{P}| \cos \theta$, onde θ é o ângulo entre eles, temos que o valor mínimo de $\mathbf{V} \cdot \mathbf{P} = -|\mathbf{V}||\mathbf{P}|$, pois $-1 \leq \cos \theta \leq 1$ sendo, portanto, $\cos 180^\circ = -1$ seu valor mínimo, na situação onde \mathbf{V} e \mathbf{P} apontam em direções opostas.



Caso qualquer



Caso mínimo

□

Questão 2

Agora estamos em posição de entender o argumento de Landau. Para isso considere a Figura 1:

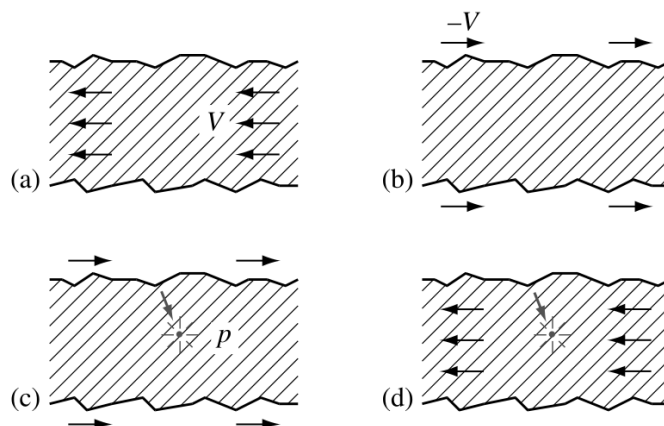


Figura 1: Diagramas das diferentes situações do fluido retratadas no texto.

Landau imaginou um fluido de massa M e velocidade \mathbf{V} (veja a Figura 1(a)) escoando em um tubo estreito. Para um fluido normal, com viscosidade, suas interações com o tubo seriam a causa primária do atrito viscoso e da dissipação de energia que as partículas no fluido sofrem.

Ele considerou que o mecanismo para a viscosidade seria a criação de excitações no fluido que se propagariam com momento \mathbf{p} e relação de dispersão $\epsilon(|\mathbf{p}|)^1$, por conta da interação com o tubo. As excitações não devem ser entendidas como partículas no sentido usual, pois elas são a combinação de complexos movimentos ocorrendo no fluido (exemplos serão dados mais a frente).

(a) Considere a situação da Figura 1(b). Ela representa a visão de um observador no **referencial de repouso** S do fluido. Suponha que, sem excitação, a energia do fluido nesse referencial seja E_0 , chamada *energia do estado fundamental*. Com a adição de uma excitação de energia $\epsilon(|\mathbf{p}|)$ e momento \mathbf{p} , qual será a nova energia E e o novo momento \mathbf{P} do fluido nesse mesmo referencial?

¹Lembre-se novamente de que aqui estamos assumindo uma forma geral dessa relação e não necessariamente que seja igual à $|\mathbf{p}|^2/2m$

Resolução:

E e \mathbf{P} devem ser $E = E_0 + \epsilon(|\mathbf{p}|)$ e $\mathbf{P} = \mathbf{p}$, respectivamente.

(b) Com base no exercício 1(a), faça uma transformação de Galileu para referencial de laboratório S' , no qual o fluido se move com velocidade \mathbf{V} (veja a Figura 1(d)), e encontre o momento \mathbf{P}' e energia E' do fluido nesse referencial.

(Ainda que não seja necessário, podemos assumir que $|\mathbf{p}|^2/2M \ll E'$ para simplificar as contas, pois se espera que o momento da excitação seja muito menor do que o momento do fluido $M\mathbf{V}$.)

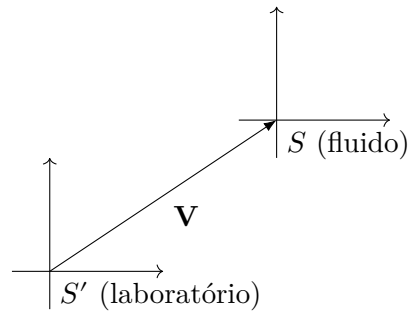
Resolução:

Pela transformação de Galileu, enquanto a velocidade do fluido no referencial anterior seria meramente $\mathbf{u} = \mathbf{0}$, agora será $\mathbf{u}' = \mathbf{V}$, e, portanto, pelos resultados da questão 1(a) a energia E' no novo referencial será

$$E' = E + \frac{M|\mathbf{V}|^2}{2} + \mathbf{V} \cdot \mathbf{P} \quad (2.1)$$

e

$$\mathbf{P}' = \mathbf{P} + M\mathbf{V} \quad (2.2)$$



(c) Qual seria a energia \tilde{E} e o momento $\tilde{\mathbf{P}}$ do fluido **sem excitação**, no referencial do laboratório? Prove que a diferença de energia é dada por $\Delta E = E' - \tilde{E} = \epsilon(|\mathbf{p}|) + \mathbf{p} \cdot \mathbf{V}$.

(Dica: Não é necessário refazer todas as contas. Tente adaptar o item anterior, porém não esqueça de dar justificativas)

(Ainda que não tenha derivado os resultados acima, é permitido utilizá-los nos itens a seguir)

Se o custo para criar a excitação ΔE for menor do que zero, então as excitações serão criadas espontaneamente. Portanto, para que o fluido perca energia pela dissipação induzida por essas excitações, é necessário e suficiente que $\Delta E < 0$.

Resolução:

Considerando o mesmo fluido sob transformação de Galileu, porém sem a excitação da questão 2(a). Adotando momento inicial nulo, teríamos

$$\tilde{E} = E_0 + \frac{M|\mathbf{V}|^2}{2} \quad (2.3)$$

e

$$\tilde{\mathbf{P}} = M\mathbf{V} \quad (2.4)$$

Fazendo $\Delta E = E' - \tilde{E}$, temos

$$\begin{aligned} \Delta E = E' - \tilde{E} &= \left(E + \frac{M|\mathbf{V}|^2}{2} + \mathbf{V} \cdot \mathbf{P} \right) - \left(E_0 + \frac{M|\mathbf{V}|^2}{2} \right) \\ &= \cancel{E_0} + \epsilon(|\mathbf{p}|) + \cancel{\frac{M|\mathbf{V}|^2}{2}} + \mathbf{V} \cdot \mathbf{p} - \cancel{E_0} - \cancel{\frac{M|\mathbf{V}|^2}{2}} \end{aligned}$$

pela comutatividade do produto escalar

$$\Delta E = \epsilon(|\mathbf{p}|) + \mathbf{p} \cdot \mathbf{V} \quad (2.5)$$



(d) Fixados $|\mathbf{p}|$ e $|\mathbf{V}|$, só pode haver $\Delta E < 0$ se o seu mínimo for menor que zero também. Usando o item 1(b), prove que o mínimo de ΔE nessas condições é $\epsilon(|\mathbf{p}|) - |\mathbf{p}||\mathbf{V}|$. Prove então que só pode haver $\Delta E < 0$ se $|\mathbf{V}| > \epsilon(|\mathbf{p}|)/|\mathbf{p}|$, com $\mathbf{p} \neq \mathbf{0}$.

No caso oposto, ou seja, supondo que tenhamos $\Delta E > 0$, é necessário dispêndio de energia para criar **qualquer excitação**. Logo um fluido no regime de velocidade

$$|\mathbf{V}| < \min_{\mathbf{p} \neq \mathbf{0}} \frac{\epsilon(|\mathbf{p}|)}{|\mathbf{p}|} \quad (2.6)$$

não apresentaria viscosidade, sendo então um **superfluido**!

Resolução:

Pelo item 1(b), temos

$$\min \mathbf{p} \cdot \mathbf{V} = -|\mathbf{p}||\mathbf{V}|$$

dado $|\mathbf{p}|$ fixado, admitimos $\epsilon(|\mathbf{p}|)$ fixado também, e daí segue, da eq. 2.5

$$\min \Delta E = \epsilon(|\mathbf{p}|) - |\mathbf{p}||\mathbf{V}| \quad (2.7)$$

e para que a eq. 2.7 seja menor que zero, precisamos que

$$\epsilon(|\mathbf{p}|) < |\mathbf{p}||\mathbf{V}|$$

assumindo $\mathbf{p} \neq \mathbf{0}$

$$|\mathbf{V}| > \frac{\epsilon(|\mathbf{p}|)}{|\mathbf{p}|}$$



(e) Imagine que as excitações sejam ondas de som, cuja energia é proporcional ao momento:

$$\epsilon(|\mathbf{p}|) = v_s |\mathbf{p}| \quad (2.8)$$

onde v_s é a velocidade do som. Usando a equação 2.6, mostre que existe uma velocidade crítica v_c , abaixo da qual ocorre superfluidez, e que seu valor é $v_c = v_s$. Excitações desse tipo são chamadas fônons.

Resolução:

Sendo v_c a velocidade crítica, estabelecida na equação 2.6, temos

$$|\mathbf{V}| < v_c = \min_{\mathbf{p} \neq \mathbf{0}} \frac{\epsilon(|\mathbf{p}|)}{|\mathbf{p}|}$$

Pela eq. 2.8, temos

$$\epsilon(|\mathbf{p}|) = v_s |\mathbf{p}| \xrightarrow{\mathbf{p} \neq \mathbf{0}} v_s = \frac{\epsilon(|\mathbf{p}|)}{|\mathbf{p}|} \quad (\text{constante})$$

daí, tiramos

$$v_c = v_s$$



(f) No caso “normal” de excitações massivas do tipo $\epsilon(|\mathbf{p}|) = \frac{|\mathbf{p}|^2}{2m}$, mostre que a velocidade crítica é $v_c = 0$, isto é, **não ocorre estado superfluido**.

Resolução:

Da equação 2.6, temos:

$$|\mathbf{V}| < \min_{\mathbf{p} \neq 0} \frac{\epsilon(|\mathbf{p}|)}{|\mathbf{p}|} = v_c$$

substituindo $\epsilon(|\mathbf{p}|) = |\mathbf{p}|^2/2m$

$$\begin{aligned} v_c &= \min_{\mathbf{p} \neq 0} \frac{|\mathbf{p}|^2/2m}{|\mathbf{p}|} \\ &= \min_{\mathbf{p} \neq 0} \frac{|\mathbf{p}|}{2m} \end{aligned}$$

como $\mathbf{p} \neq 0$, devemos tomar o limite $|\mathbf{p}| \rightarrow 0$

$$v_c = \lim_{|\mathbf{p}| \rightarrow 0} \frac{|\mathbf{p}|}{2m} = 0$$

□

(g) Existem excitações chamadas rótons que possuem relação de dispersão dada por

$$\epsilon(|\mathbf{p}|) = \Delta + \frac{(|\mathbf{p}| - p_0)^2}{2\mu}, \quad (2.9)$$

onde p_0, μ e Δ são constantes independentes de \mathbf{p} . Determine a velocidade crítica v_c nesse caso.

Resolução:

Derivando $\epsilon(|\mathbf{p}|)/|\mathbf{p}|$ com respeito a $|\mathbf{p}|$, temos

$$\begin{aligned} \frac{d\epsilon(|\mathbf{p}|)/|\mathbf{p}|}{d|\mathbf{p}|} &= \frac{d}{d|\mathbf{p}|} \left[\frac{\Delta}{|\mathbf{p}|} + \frac{(|\mathbf{p}|)^2 - 2p_0|\mathbf{p}| + p_0^2}{2\mu |\mathbf{p}|} \right] \\ &= \frac{d}{d|\mathbf{p}|} \left[\frac{|\mathbf{p}|}{2\mu} - \frac{p_0}{\mu} + \frac{2\mu \Delta + p_0^2}{2\mu |\mathbf{p}|} \right] \\ &= -\frac{2\mu \Delta + p_0^2}{|\mathbf{p}|^2} + \frac{1}{2\mu} \end{aligned}$$

igualando a zero, temos

$$\begin{aligned} 0 &= -\frac{2\mu \Delta + p_0^2}{2\mu |\mathbf{p}|^2} + \frac{1}{2\mu} \\ |\mathbf{p}| &= \sqrt{p_0^2 + 2\mu \Delta} \quad \text{pois } |\mathbf{p}| \stackrel{!}{>} 0. \end{aligned}$$

De tal forma que

$$\begin{aligned}
 v_c &= \frac{\epsilon(|\mathbf{p}|)}{|\mathbf{p}|} \bigg|_{|\mathbf{p}|=\sqrt{p_0^2+2\mu\Delta}} = \frac{\Delta}{\sqrt{p_0^2+2\mu\Delta}} + \frac{(\sqrt{p_0^2+2\mu\Delta})^2 - 2p_0\sqrt{p_0^2+2\mu\Delta} + p_0^2}{2\mu\sqrt{p_0^2+2\mu\Delta}} \\
 &= \frac{\Delta\sqrt{p_0^2+2\mu\Delta}}{p_0^2+2\mu\Delta} + \frac{(2p_0^2+2\mu\Delta - 2p_0\sqrt{p_0^2+2\mu\Delta})\sqrt{p_0^2+2\mu\Delta}}{2\mu(p_0^2+2\mu\Delta)} \\
 &= \frac{2\mu\Delta\sqrt{p_0^2+2\mu\Delta} + (2p_0^2+2\mu\Delta)\sqrt{p_0^2+2\mu\Delta} - 2p_0(p_0^2+2\mu\Delta)}{2\mu(p_0^2+2\mu\Delta)} \\
 &= \frac{2(p_0^2+2\mu\Delta)\sqrt{p_0^2+2\mu\Delta} - 2(p_0^2+2\mu\Delta)p_0}{2\mu(p_0^2+2\mu\Delta)} \\
 v_c &= \frac{\sqrt{p_0^2+2\mu\Delta}}{\mu} - \frac{p_0}{\mu}
 \end{aligned}$$

(h) Represente graficamente na Figura 2 a velocidade crítica para a relação de dispersão representada. Justifique.

(Dica: Qual o significado geométrico da equação 2.6?)

Resolução:

Pelo mesmo raciocínio do item anterior, podemos notar que v_c corresponde ao ponto onde a reta tangente à relação de dispersão (e que passa pela origem) tem coeficiente angular mínimo e, portanto, será a reta ao lado.

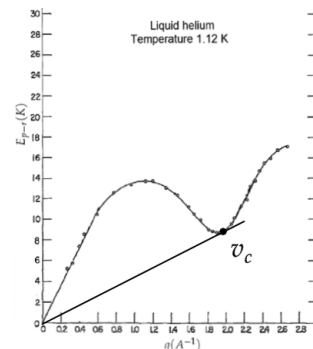


Figura 2: Relação de dispersão

- (i) A partir dos itens 2(e) e 2(g), indique na Figura 3 a região aproximada correspondente a excitações de fônons e a de rótons. Justifique sua escolha. Qual delas é a mais importante para a velocidade crítica e por quê?

Resolução:

Considerando a região em torno do ponto marcado na resolução do item 2(h) é semelhante a uma parábola com concavidade para cima e que está perto da origem, a região grifada de **vermelho** deve ser uma boa aproximação para a excitação dos rótons.

Já as excitações dos fônons, que podem ser descritas como retas com coeficiente angular alto e próximas da origem, podem ser aproximadas pela região grifada em **azul**.

Sendo as excitações dos rótons mais pontuais, são mais importantes como demarcação da velocidade crítica (as excitações dos fônons podem variar mais de valor crítico).

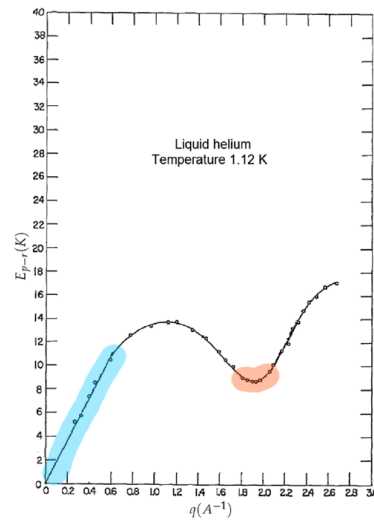


Figura 3: Relação de dispersão