Resolução – Lista 3 (Física I – 4302111)

Isabella B. – 11810773

Questão 1

Um jogador de futebol inexperiente chuta um pênalti a 9 m do gol, levantando a bola com velocidade inicial de 15 m/s. A altura da trave é de 2,4 m. Calcule:

(a) a que distância máxima da trave, através do gol, um apanhador de bola pode ficar agachado;

(b) a que distância mínima devem ficar os espectadores, para que não corram risco nenhum de levar uma bolada.

Resolução:

Montando o diagrama para a situação apresentada, temos

$$v_{0x} = v_0 \cos\theta$$
$$v_{0y} = v_0 \sin\theta$$

sendo, respectivamente, as velocidades iniciais em x e y.
Supondo que o jogador levantou a bola à altura da trave, temos, por Torricelli

$$0^2 = v_{0y}^2 - 2g\,2{,}4$$
$$(v_0 \sin\theta)^2 = 4{,}8g$$
$$|v_0 \sin\theta| = \left|\sqrt{4{,}8g}\right|$$

assumindo $v_0 \sin\theta > 0$

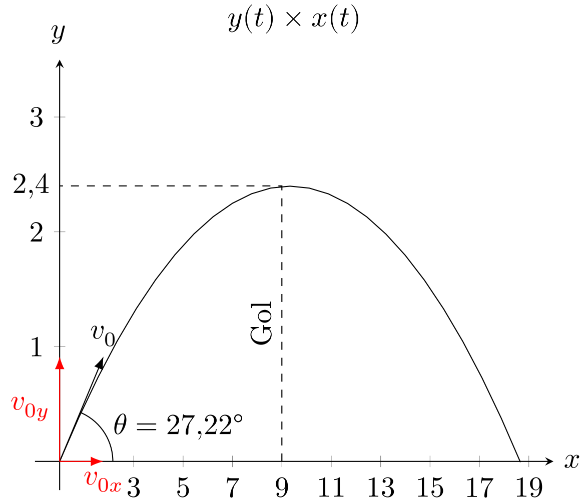
$$\sin\theta = \frac{\sqrt{4{,}8g}}{v_0}$$
$$\theta = \arcsin\left(\frac{\sqrt{4{,}8g}}{v_0}\right) = 27{,}22°$$

Integrando a aceleração da gravidade com respeito ao tempo, temos que:

$$\int -g\,\mathrm{d}t = v_y$$

fazendo $v_y = 0$ encontramos o tempo de subida, t_s

$$-g\,t_s + v_{0y} = 0$$
$$t_s = \frac{v_{0y}}{g}$$



Sendo $v_x(t)$ constante no tempo, temos:

$$v_x(t) = v_{0x} \implies$$
$$\int v_x(t)\,\mathrm{d}t = \int v_{0x}\,\mathrm{d}t \implies$$
$$x(t) = v_{0x}t + \cancel{x_0}^{\,0}$$

para $t = 2t_s$ teremos o tempo de queda, dada a simetria da parábola

$$x(2t_s) = v_0 \cos\theta\, 2\left(\frac{v_{0y}}{g}\right)$$
$$= v_0 2\cos\theta\left(\frac{v_0 \sin\theta}{g}\right)$$
$$= \frac{v_0^2 2\sin\theta\cos\theta}{g}$$
$$= \frac{v_0^2 \sin 2\theta}{g}$$

substituindo os valores

$$= \frac{15^2 \sin 2\cdot 27{,}22°}{9{,}81} \approx 18{,}66\,\mathrm{m}$$

Questão 2

Um canhão lança um projétil por cima de uma montanha de altura h, de forma a passar quase tangenciando o cume C no ponto mais alto de sua trajetória. A distância horizontal entre o canhão e o cume é R. Atrás da montanha há uma depressão de profundidade d (Fig. 1).

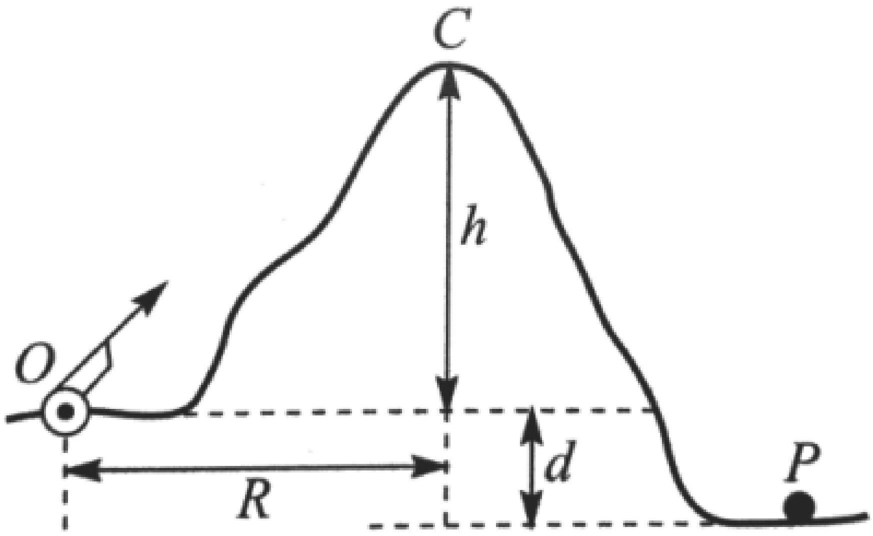


Figura 1: Canhão lançando um projétil por cima de uma montanha

Determine a distância horizontal entre o ponto de lançamento O e o ponto P onde o projétil atinge o solo, em função de R, d e h.

Resolução:

Consideramos a origem o ponto O de lançamento do projétil, onde posicionaremos um eixo de coordenadas com os eixos y orientado para cima e x para a direita.

Sendo o movimento parabólico uma função quadrática da forma

$$y(x) = a\,x^2 + b\,x + c$$

onde y é o deslocamento vertical e x é o deslocamento horizontal, derivando ambos os lados, temos

$$\begin{aligned}(y(x))' &= (a\,x^2 + b\,x + c)' \\ v_y(x) &= 2a\,x + b\end{aligned}$$

onde v_y é a projeção da velocidade no eixo y.

Seja v_{0y} a velocidade inicial projetada no eixo y, montando dois sistemas com os valores conhecidos para $v(x)$ e $y(x)$, respectivamente, temos

$$\begin{cases} v_y(0) = b = v_{0y} \\ v_y(R) = 0 \implies 2a\,R + v_{0y} = 0 \implies a = -\dfrac{v_{0y}}{2R} \end{cases}$$

$$\begin{cases} y(0) = 0 \implies c = 0 \\ y(R) = h \implies -\dfrac{v_{0y}}{2R}\,R^2 + v_{0y}\,R = h \end{cases}$$

Resolvendo a última equação para v_{0y}, temos

$$
\begin{aligned}
-\frac{v_{0y}}{2}\,R + v_{0y}\,R &= h \\
\frac{v_{0y}}{2}\,R &= h \\
v_{0y} &= \frac{2h}{R}
\end{aligned}
$$

Portanto, $y(x) = -\frac{v_{0y}}{2R}x^2 + v_{0y}\,x \implies y(x) = -\frac{h}{R^2}x^2 + 2\frac{h}{R}x$.
Resolvendo para $y(x) = -d$, temos

$$
\begin{aligned}
-\frac{h}{R^2}x^2 + 2\frac{h}{R}x &= -d \\
-\frac{h}{R^2}x^2 + 2\frac{h}{R}x + d &= 0
\end{aligned}
$$

por Bháskara

$$
\begin{aligned}
\Delta &= \left(2\frac{h}{R}\right)^2 - 4\left(-\frac{h}{R^2}\right)d \\
&= \frac{4}{R^2}h^2 + \frac{4}{R^2}h \cdot d \\
&= \frac{4}{R^2}\left(h^2 + h \cdot d\right)
\end{aligned}
$$

$$
x = \frac{-\frac{2h}{R} \pm \sqrt{\frac{4}{R^2}\left(h^2 + h \cdot d\right)}}{2\left(-\frac{h}{R^2}\right)}
$$

como $x > 0$

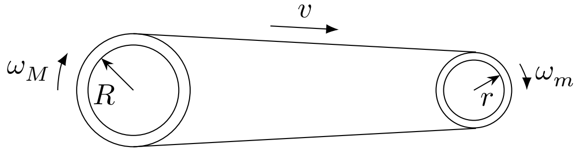
$$
\begin{aligned}
x &= \frac{\frac{\cancel{2}}{\cancel{R}}h + \frac{\cancel{2}}{\cancel{R}}\sqrt{h^2 + h \cdot d}}{\frac{\cancel{2}}{\cancel{R}} \cdot \frac{h}{R}} \\
&= \frac{R}{h}\left(h + \sqrt{h^2\left(1 + d/h\right)}\right) \\
&= R\left(1 + \sqrt{1 + \frac{d}{h}}\right)
\end{aligned}
$$

Questão 3

Uma roda maior, de 30 cm de raio, transmite seu movimento à uma menor, de 20 cm de raio, através de uma correia sem fim C, que permanece sempre bem esticada e sem deslizamento. A roda maior, partindo do repouso com aceleração angular uniforme, leva 1 min para atingir sua velocidade de regime permanente, e efetua um total de 540 rotações durante esse intervalo. Calcule a velocidade angular da roda menor e a velocidade linear da correia uma vez atingido o regime permanente.

Resolução:

Sendo v a velocidade linear, ω a velocidade angular, α a aceleração e θ uma posição angular[1] ($\theta = \theta + n\pi$, $n \in \mathbb{Z}$). Denotaremos pelo índice m as quantidades referentes à roda de raio menor, e usaremos M para as quantidades relativas à roda maior (por ex.: v_m é a velocidade linear da roda menor, e v_M é da roda maior). Sejam r e R os raios das rodas menor e maior, respectivamente.



Primeiro, devemos encontrar a velocidade angular da roda maior, ω_M. Para isso, basta integrarmos sua aceleração α_M (e depois a velocidade) para o intervalo de 0 s à 60 s e igualarmos ao deslocamento:

$$\int_0^{60} \left[\int \alpha_M \,\mathrm{d}t\right] \mathrm{d}t = 540 \cdot 2\pi$$
$$\int_0^{60} \alpha_M \, t \,\mathrm{d}t = 1080\pi$$
$$\frac{1}{2}\alpha_M \, t^2 \Big|_0^{60} = 1080\pi$$
$$\frac{1}{2}\alpha_M \cdot 60^2 = 1080\pi$$
$$\alpha_M = \frac{2160}{3600}\pi = 0{,}6\pi \,\mathrm{rad/s^2}$$

E, portanto, $\omega_M = 0{,}6\pi \cdot 60 = 36\,\mathrm{rad/s}$. Sendo a velocidade linear das correias igual, temos

$$v_m = v_M$$
$$\omega_m \, r = \omega_M \, R$$
$$\omega_m = \frac{R}{r}\omega_M$$
$$\omega_m = \frac{30}{20} 36\pi = 54\pi \,\mathrm{rad/s}$$

Logo, $v_m = 54\pi \cdot 0{,}2 = 10{,}8\,\mathrm{m/s} = v_M = v$.

Questão 4

Uma roda partindo do repouso é acelerada de tal forma que sua velocidade angular aumenta uniformemente para 180 rpm em 3 min. Depois de girar com essa velocidade por algum tempo, a roda é freada com desaceleração angular uniforme, levando 4 min para parar. O número total de rotações é 1080. Quanto tempo, ao todo, a roda ficou girando?

Resolução:

Sendo a aceleração α e a desaceleração β, encontramos a aceleração α fazendo:

$$\alpha \cdot 3 = 180 \implies \alpha = 60\,\mathrm{rpm/min}$$

E a desaceleração β por:

$$180 - \beta \cdot 4 = 0 \implies \beta = 45\,\mathrm{rpm/min}$$

Sendo a velocidade angular da roda

$$\omega(t) = \begin{cases} \displaystyle\int_0^t 60 \,\mathrm{d}\tau & \text{para } 0 \leqslant t < 3\,\mathrm{min} \\ 180 & \text{para } 3\,\mathrm{min} \leqslant t < t_c \\ \displaystyle 180 + \int_{t_c}^t -45 \,\mathrm{d}\tau & \text{para } t_c \leqslant t < t_c + 4\,\mathrm{min} \end{cases}$$

onde t_c é o tempo total em que a roda permanece em velocidade constante.

[1] Ambos problemas de movimento circular nessa lista não lidam com posições absolutas, somente deslocamentos e, portanto, só nos importamos com os $\Delta\theta$.

Temos que o deslocamento total será igual à integral da velocidade, com cada parcela tomada a parte:

$$\int_0^3 \left[\int_0^t 60\,\mathrm{d}\tau\right] \mathrm{d}t + \int_3^{t_c} 180\,\mathrm{d}t + \int_{t_c}^{t_c+4} 180 + \left[\int_{t_c}^{t} -45\,\mathrm{d}\tau\right] \mathrm{d}t = 1080$$

$$\int_0^3 60\,t\,\mathrm{d}t + 180t\Big|_3^{t_c} + \int_{t_c}^{t_c+4} 180 - 45\,(t - t_c)\,\mathrm{d}u = 1080$$

tomando $u = t - t_c \implies \mathrm{d}u = \mathrm{d}t$ na integral da direita, temos

$$\frac{1}{2}60\,t^2\Big|_0^3 + 180\,(t_c - 3) + \int_0^4 180 - 45u\,\mathrm{d}u = 1080$$

$$30 \cdot 3^2 + 180t_c - 540 + \left(180u - \frac{1}{2}45\,u^2\right)\Big|_0^4 = 1080$$

$$180t_c - 270 + 180 \cdot 4 - \frac{1}{2}45 \cdot 4^2 + = 1080$$

$$t_c = \frac{990}{180} = 5{,}5\,\mathrm{s}$$

E, portanto, o tempo total de rotação é $5{,}5 + 4 = 9{,}5\,\mathrm{min}$.

Questão 5

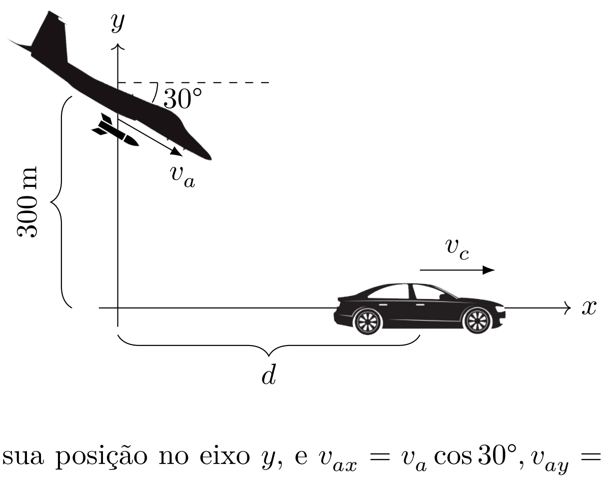
Um bombardeiro, a $300\,\mathrm{m}$ de altitude, voando a $180\,\mathrm{km/h}$, mergulha segundo um ângulo de $30°$ com a horizontal, em perseguição a um carro que viaja a $90\,\mathrm{km/h}$. A que distância horizontal do carro deve ser lançada uma bomba para que acerte o alvo?

Resolução:

Posicionamos nosso eixo de coordenadas com origem na intercessão da posição inicial do avião (na vertical), e da posição do carro (na horizontal), com o eixo y positivo para cima e o eixo x positivo para a direção do carro (direita).

Assumindo que o bombardeiro mergulha e solta a bomba em $t = 0$, podemos calcular o tempo de queda da bomba t_q, e a partir deste, encontrar a distância desejada d.

Sendo a velocidade da bomba v_b, a velocidade do avião v_a, a velocidade do carro v_c e a altura inicial do bombardeiro h, a bomba terá equações de movimento:



$$x_b(t) = \int_0^t v_{ax}\,\mathrm{d}\tau, \tag{5.1}$$

$$y_b(t) = h + \int_0^t -v_{ay} + \left[\int_0^\tau -g\,\mathrm{d}t'\right] \mathrm{d}\tau \tag{5.2}$$

onde 5.1 descreve sua posição no eixo x e 5.2 descreve sua posição no eixo y, e $v_{ax} = v_a \cos 30°, v_{ay} = v_a \sin 30°$ são as componentes horizontal e vertical velocidade do avião, respectivamente.

Resolvendo para $y_b(t) = 0$, temos:

$$h + \int_0^t -v_{ay} - g\,t'\Big|_0^{\tau} \mathrm{d}\tau = 0$$
$$h + \int_0^t -v_{ay} - g\,\tau\,\mathrm{d}\tau = 0$$
$$h + \left(-v_{ay}\,\tau - \frac{1}{2}g\,\tau^2\right)\Bigg|_0^t = 0$$
$$h - v_{ay}\,t - \frac{g}{2}\,t^2 = 0$$

Sendo [2] as raízes da parábola simétricas em relação à seu valor extremo (um máximo, no caso particular), temos:

$$\left(h - v_{ay}\,t - \frac{g}{2}\,t^2\right)' = 0 \implies -v_{ay} - g\,t_{max} = 0 \implies t_{max} = \frac{-v_{ay}}{g}$$

Sendo $y_b(t)$ um polinômio de segundo grau no formato $a\,x^2 + b\,x + c$, com fatoração equivalente $(x - r_1)(x - r_2)$, temos $c = -h/2g$. Escrevendo as raízes na forma $t_{max} + d_r$ e $t_{max} - d_r$s, temos que $-2h/g$ atende a igualdade

$$(t_{max} + d_r)(t_{max} - d_r) = -\frac{2h}{g} \implies \left(\frac{-v_{ay}}{g}\right)^2 - d_r^2 = -\frac{2h}{g} \implies d_r = \sqrt{\left(\frac{v_{ay}}{g}\right)^2 + \frac{2h}{g}}$$

Portanto, as raízes da função são

$$t_{max} \pm d_r = \frac{-v_{ay}}{g} \pm \sqrt{\left(\frac{v_{ay}}{g}\right)^2 + \frac{2h}{g}}$$

E a bomba intercepta o carro com tempo mínimo igual a menor raiz positiva raiz $(t_{max} + d_r)$. Sendo $x_c(t) = d + \int_0^t v_c\,\mathrm{d}\tau$ a posição do carro, resolvendo $x_b(t) = x_c(t)$, temos:

$$x_b(t) = x_c(t)$$
$$v_{ax}t = d + v_c\,t$$

isolando d e tomando $t = t_{max} + d_r$, temos

$$\begin{aligned}
d &= (t_{max} + d_r)\,(v_{ax} - v_c) \\
&= \left(\frac{-v_a \sin 30°}{g} + \sqrt{\left(\frac{v_a \cdot \sin 30°}{g}\right)^2 + \frac{2h}{g}}\right)(v_a\,\cos 30° - v_c) \\
&= \left(\frac{-50 \cdot 0{,}5}{9{,}81} + \sqrt{\left(\frac{50 \cdot 0{,}5}{9{,}81}\right)^2 + \frac{2 \cdot 300}{9{,}81}}\right)\left(50\frac{\sqrt{3}}{2} - 25\right) \quad \text{assumindo } g = 9{,}81\,\mathrm{m/s^2} \\
d &= 50\left(\frac{-25 + \sqrt{(25^2 + 5886)}}{9{,}81}\right)\left(\sqrt{3} - 1\right) \approx 155{,}123\,\mathrm{m}
\end{aligned}$$

[2] Caso tenha dificuldades em entender esse método, esse vídeo explica bem. Alternativamente, faça por Bháskara.

Questão 6

Um rio de 1 km de largura tem uma correnteza de velocidade 1,5 km/h. Um homem atravessa o rio de barco, remando a uma velocidade de 2,5 km/h em relação à água.

(a) Qual o tempo mínimo que leva para atravessar o rio? Onde desembarca nesse caso?

Resolução:

O tempo mínimo ocorre quando o homem viaja com velocidade v_b perpendicular à margem do rio e, portanto, leva $t = \dfrac{1}{2{,}5} = 0{,}4\,\mathrm{h}$. Nesse tempo, a corrente do rio o carrega por $d = 0{,}4 \cdot 1{,}5 = 0{,}6\,\mathrm{km}$.

(b) Suponha agora que o homem quer chegar a um ponto diametralmente oposto na outra margem, e tem duas opções: remar de forma a atingi-lo diretamente, ou remar numa direção perpendicular à margem, sendo arrastado pela correnteza até além do ponto onde quer chegar, e depois caminhar de volta até lá. Se ele caminha a 6 km/h, qual das duas opções é mais vantajosa, e quanto tempo leva?

Resolução:

Pela primeira opção, o homem vai ter q se locomover de tal forma a ter uma velocidade v_b' que forma um ângulo θ com a correnteza.

Temos, então

$$v'_{b\parallel} = v_b \cos(\theta) = v_c \implies \cos\theta = \frac{1{,}5}{2{,}5} = 0{,}6$$

Pela relação fundamental da trigonometria, $\sin\theta = \sqrt{1-\cos^2\theta} = 0{,}8$, e daí tiramos

$$t_1 = \frac{1}{v'_{b\perp}} = \frac{1}{v_b \sin\theta} = \frac{1}{2{,}5 \cdot 0{,}8} = 0{,}5\,\mathrm{h}$$

Como o tempo total t_2 na situação dois será dado pelo tempo mínimo (encontrado no item anterior) somado do tempo para o homem andar 0,6 m, temos

$$t_t = 0{,}4 + \frac{0{,}6}{6} = 0{,}5\,\mathrm{h}$$

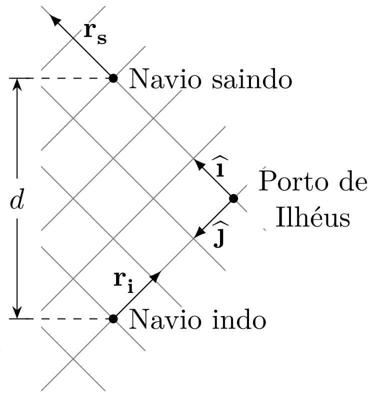
E, portanto, ambas opções levam ao mesmo tempo gasto.

Questão 7

As 8 h da manhã, um navio sai do porto de Ilhéus, rumando para 45°SO, à velocidade de 16 nós (1 nó = 1 milha marítima por = 1852 m/h). À mesma hora, outro navio está 45° NO de Ilhéus, a 40 milhas marítimas de distância, rumando em direção a Ilhéus, a uma velocidade de 12 nós. A que hora os dois navios passam à distância mínima um do outro? Qual é essa distância?

Resolução:

Sendo o ângulo entre os navios de 90°, podemos fixar nosso referencial com origem no porto, $\hat{\imath}$ no sentido do navio saindo de Ilhéus e $\hat{\jmath}$ no sentido do navio indo para Ilhéus, o que nos dá as seguintes equações de movimento:



$$\mathbf{r_s} = 16t\,\hat{\imath}$$
$$\mathbf{r_i} = 40 - 12t\,\hat{\jmath}$$

Sendo a distância entre eles dada por

$$d = \sqrt{|\mathbf{r_s}|^2 + |\mathbf{r_i}|^2} \tag{7.1}$$

podemos derivar 7.1 e igualar a zero para encontrar o ponto extremo desejado.

$$\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}[d] &= \left(\sqrt{|\mathbf{r_s}|^2 + |\mathbf{r_i}|^2}\right)' = \left(\sqrt{(16t)^2 + (40-12t)^2}\right)' \\
&= \left(\sqrt{256t^2 + 1600 - 960t + 144t^2}\right)' = \left(4\sqrt{5}\sqrt{20 - 12t + 5t^2}\right)' \\
&= 4\sqrt{5}u'\left(u^{1/2}\right)' \quad \text{onde } u = 20 - 12t + 5t^2 \\
&= 4\sqrt{5}\left(-12 + 2\cdot 5t\right)\left(\frac{1}{2}\left(20 - 12t + 5t^2\right)^{-1/2}\right) \\
&= 4\sqrt{5}\left(-6 + 5t\right)\left(20 - 12t + 5t^2\right)^{-1/2} \overset{!}{=} 0
\end{aligned}$$

Portanto, ou $-6 + 5t = 0 \implies t = 1{,}2$ ou, $\left(20 - 12t + 5t^2\right)^{-1/2} = 0$ (o que é impossível).

Para conferir o resultado $t = 1{,}2\,\mathrm{h}$, devemos tomar a segunda derivada de 7.1, portanto

$$\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}t^2}[d] &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}[d]\right) = \left(4\sqrt{5}\left(-6+5t\right)\left(20 - 12t + 5t^2\right)^{-1/2}\right)' \\
&= 4\sqrt{5}\left(\left(-6+5t\right)'\left(20 - 12t + 5t^2\right)^{-1/2} + \left(-6+5t\right)\left(\left(20 - 12t + 5t^2\right)^{-1/2}\right)'\right) \\
&= 4\sqrt{5}\left(5\left(20 - 12t + 5t^2\right)^{-1/2} + \left(-6+5t\right)u'\left(u^{-1/2}\right)'\right) \quad \text{onde } u = 20 - 12t + 5t^2 \\
&= 4\sqrt{5}\left(5\left(20 - 12t + 5t^2\right)^{-1/2} + \left(-6+5t\right)\left(-12 + 2\cdot 5t\right)\left(-\frac{1}{2}\left(20 - 12t + 5t^2\right)^{-3/2}\right)\right) \\
&= 4\sqrt{5}\left(5\left(20 - 12t + 5t^2\right)^{-1/2} - \left(-6+5t\right)^2\left(20 - 12t + 5t^2\right)^{-3/2}\right)
\end{aligned}$$

substituindo $t = 6/5$, temos

$$\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}t^2}[d]\left(t = \frac{6}{5}\right) &= 4\sqrt{5}\left(5\left(20 - 12\frac{6}{5} + 5\left(\frac{6}{5}\right)^2\right)^{-1/2} - \left(\cancel{-6+5\frac{6}{5}}^{\,0}\right)^2\left(20 - 12\frac{6}{5} + 5\left(\frac{6}{5}\right)^2\right)^{-3/2}\right) \\
&= 20\sqrt{5}\left(20 - \frac{72}{5} + \frac{36}{5}\right)^{-1/2} = 100\sqrt{5}\left(\frac{100-36}{5}\right)^{-1/2} \\
&= 20\sqrt{5}\frac{\sqrt{5}}{8} = 12{,}5
\end{aligned}$$

Como $\dfrac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}t^2}[d]\,(6/5) > 0$, $t = 1{,}2\,\mathrm{h}$ é tempo mínimo.

A distância entre os navios nesse momento é de

$$d\left(\frac{6}{5}\right) = 4\sqrt{100 - 60\frac{6}{5} + 25\left(\frac{6}{5}\right)^2} = 4\sqrt{100 - 72 + 36} = 4\sqrt{64} = 32 \,\text{milhas marítimas}$$

Questão 8

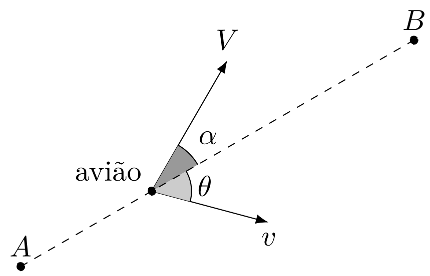
A distância entre as cidades A e B é ℓ. Um avião faz uma viagem de ida e volta entre A e B, voando em linha reta, com velocidade V em relação ao ar.

(a) Calcule o tempo total de voo, se o vento sopra com velocidade v, numa direção que forma uma ângulo θ com a direção AB. Este tempo depende do sentido em que o vento sopra?

Resolução:

Sejam θ e α os ângulo formados entre as velocidade v do vento e V do avião com a reta que liga A e B (como ilustrado ao lado). Para o avião se locomover numa reta, devemos ter

$$V \sin\alpha = v \sin\theta \tag{8.1}$$



De tal forma que o tempo de voo da ida será dado por

$$t_{\text{ida}} = \frac{\ell}{V\cos\alpha + v\cos\theta}$$

e o tempo de voo da volta, por

$$t_{\text{volta}} = \frac{\ell}{V\cos\alpha - v\cos\theta}$$

Somando-os, temos:

$$\begin{aligned}
t_{\text{total}} &= t_{\text{ida}} + t_{\text{volta}} \\
&= \frac{\ell}{V\cos\alpha + v\cos\theta} + \frac{\ell}{V\cos\alpha - v\cos\theta} \\
&= \frac{\ell\left(V\cos\alpha - v\cos\theta\right) + \ell\left(V\cos\alpha + v\cos\theta\right)}{\left(V\cos\alpha + v\cos\theta\right)\left(V\cos\alpha - v\cos\theta\right)} \\
&= \frac{\ell\left(V\cos\alpha - \cancel{v\cos\theta} + V\cos\alpha + \cancel{v\cos\theta}\right)}{\left(V\cos\alpha\right)^2 - \left(v\cos\theta\right)^2} \\
t_{\text{total}} &= \frac{2\ell\, V\cos\alpha}{\left(V\cos\alpha\right)^2 - \left(v\cos\theta\right)^2}
\end{aligned} \tag{8.2}$$

Retomando 8.1,

$$V\sin\alpha = v\sin\theta \implies \sin\alpha = \frac{v}{V}\sin\theta \tag{8.3}$$

pela relação fundamental, temos

$$\cos^2\alpha = 1 - \sin^2\alpha \implies \cos\alpha = \sqrt{1 - \left(\frac{v}{V}\sin\theta\right)^2}$$

substituindo em 8.2

$$t_{\text{total}} = \frac{2\ell\, V\sqrt{1-\left(\dfrac{v}{V}\sin\theta\right)^2}}{\left(V\sqrt{1-\left(\dfrac{v}{V}\sin\theta\right)^2}\right)^2-(v\cos\theta)^2}$$

$$= 2\ell\, V\frac{\sqrt{1-\left(\dfrac{v}{V}\sin\theta\right)^2}}{V^2-v^2\sin^2\theta-v^2\cos^2\theta}$$

$$= 2\ell\, V\frac{\sqrt{1-\left(\dfrac{v}{V}\sin\theta\right)^2}}{V^2-v^2\left(\sin^2\theta+\cos^2\theta\right)}\cdot\frac{V^2}{V^2}$$

$$= \frac{2\ell\, V}{V^2}\cdot\frac{\sqrt{1-\left(\dfrac{v}{V}\sin\theta\right)^2}}{\dfrac{V^2-v^2}{V^2}}$$

$$t_{\text{total}} = \frac{2\ell}{V}\cdot\frac{\sqrt{1-\left(\dfrac{v}{V}\sin\theta\right)^2}}{1-v^2/V^2} \tag{8.4}$$

Suponhamos uma alteração do ângulo θ para $\pi-\theta$ — o que inverte sua contribuição para a componente da velocidade do avião que é paralela à trajetória, porém deixa a componente perpendicular inalterada.

Isso faz com que os tempos de ida e volta se invertam, porém, como o tempo final é sua soma (e a soma é comutativa), não há alteração no tempo.

(b) Mostre que a viagem de ida e volta só é possível se $v < V$, e calcule a relação entre o tempo de voo $t_{\parallel}$ quando o vento sopra na direção de AB e o tempo $t_{\perp}$ quando sopra na direção perpendicular (este resultado é relevante na discussão da famosa experiência de Michelson e Morley para medir a velocidade da luz em relação ao éter);

Resolução:

Caso $v \geqslant V$, por mais que o vento sopre na direção AB, ele sempre estará contra o sentido do avião em algum dos dois trechos e, portanto, o avião não conseguirá completar a viagem inteira.

Tomando dois os dois casos particulares $t_{\parallel}$ e $t_{\perp}$ de 8.4, temos:

$$\frac{t_{\parallel}}{t_{\perp}} = \frac{\dfrac{2\ell}{V}\cdot\dfrac{\sqrt{1-\left(\dfrac{v}{V}\sin 0^\circ\right)^2}}{1-v^2/V^2}}{\dfrac{2\ell}{V}\cdot\dfrac{\sqrt{1-\left(\dfrac{v}{V}\sin 90^\circ\right)^2}}{1-v^2/V^2}}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{1-v^2/V^2}} = \frac{\sqrt{1-v^2/V^2}}{1-v^2/V^2}$$

(c) Mostre que, qualquer que seja sua direção, o vento sempre prolonga a duração da viagem de ida e volta.

Resolução:

Suponhamos uma viagem onde não há vento. Portanto, o tempo total será $t_{wl} = 2\ell/V$.

Sabendo que, para $0 \leqslant \theta \leqslant \pi/2$, temos

$$0 \leqslant \sin\theta \leqslant 1$$

assumindo $v \neq 0, \sin\theta \neq 0$ e tomando $v < V \neq 0$

$$\begin{gathered}
0 < v\sin\theta \leqslant v < V \implies \\
0 < \frac{v}{V}\sin\theta \leqslant \frac{v}{V} < 1 \implies \\
0 < \left(\frac{v}{V}\sin\theta\right)^2 \leqslant \left(\frac{v}{V}\right)^2 < 1 \implies \\
1 > 1 - \left(\frac{v}{V}\sin\theta\right)^2 \geqslant 1 - \left(\frac{v}{V}\right)^2 > 0 \implies \\
1 > \sqrt{1 - \left(\frac{v}{V}\sin\theta\right)^2} > 1 - \left(\frac{v}{V}\sin\theta\right)^2 \geqslant 1 - \left(\frac{v}{V}\right)^2 > 0 \implies \\
\frac{\sqrt{1 - \left(\frac{v}{V}\sin\theta\right)^2}}{1 - v^2/V^2} > 1
\end{gathered}$$

Portanto, de 8.4, temos que o tempo total de viagem com vento é

$$t_{\text{total}} = \frac{2\ell}{V} \cdot \frac{\sqrt{1 - \left(\frac{v}{V}\sin\theta\right)^2}}{1 - v^2/V^2} = t_{wl} \cdot \frac{\sqrt{1 - \left(\frac{v}{V}\sin\theta\right)^2}}{1 - v^2/V^2} > t_{wl}$$

Questão 9

A ionosfera é uma região de gás eletricamente neutro, composto de elétrons carregados negativamente e íons carregados positivamente, que circunda a Terra na altura de 200 km do solo. Se uma onda de rádio passa através da ionosfera o seu campo elétrico $\mathbf{E} = \mathbf{E_0}\sin\omega t$ (ω é a frequência de oscilação da onda dada em radianos por segundo) acelera as partículas carregadas nessa região. Para um elétron de carga $-e$ e massa m essa aceleração é

$$\mathbf{a} = -\frac{e}{m}\mathbf{E} = -\frac{e}{m}\mathbf{E_0}\sin\omega t,$$

onde $\mathbf{E_0}$ é um vetor constante. Escolha os eixos de coordenadas de forma conveniente e calcule

(a) a velocidade do elétron em função do tempo, admitindo que ele parta do repouso;

Resolução:

Sendo $\mathbf{E_0}$ constante, podemos encontrar a velocidade do elétron em função do tempo integrando a aceleração, portanto

$$\mathbf{v}(t) = \int \mathbf{a}(t)\,\mathrm{d}t = \int -\frac{e}{m}\mathbf{E_0}\sin\omega t\,\mathrm{d}t$$

fazendo $u = \omega t \implies \mathrm{d}u = \omega\,\mathrm{d}t$, temos

$$\begin{aligned}
&= -\frac{e}{m}\mathbf{E_0}\int \frac{1}{\omega}\sin u\,\mathrm{d}u \\
&= -\frac{e}{m\,\omega}\mathbf{E_0}\left(-\cos\omega t\right) + C \\
\mathbf{v}(t) &= \frac{e}{m\,\omega}\mathbf{E_0}\cos\omega t + C
\end{aligned}$$

Como, para $t = 0$, $\mathbf{v}(t) = \mathbf{0}$, temos:

$$\mathbf{v}(0) = \frac{e}{m\,\omega}\mathbf{E_0}\cos\omega\cdot 0 + C = \mathbf{0} \implies C = -\frac{e}{m\,\omega}\mathbf{E_0}$$

Portanto,

$$\mathbf{v}(t) = \frac{e}{m\,\omega}\mathbf{E_0}\left(\cos\omega t - 1\right).$$

(b) a posição do elétron em função do tempo, admitindo que ele parta da origem do sistema de coordenadas. Discuta o seu resultado.

Resolução:

De forma análoga ao item anterior, basta integrar-mos o vetor velocidade:

$$\mathbf{r}(t) = \int \mathbf{v}(t)\,\mathrm{d}t = \int \frac{e}{m\,\omega}\mathbf{E_0}\left(\cos\omega\tau - 1\right)\mathrm{d}t$$

fazendo $u = \omega t \implies \mathrm{d}u = \omega\,\mathrm{d}t$, temos

$$\begin{aligned}
&= \frac{e}{m\,\omega}\mathbf{E_0}\int \frac{1}{\omega}\left(\cos u - 1\right)\mathrm{d}u \\
\mathbf{r}(t) &= \frac{e}{m\,\omega^2}\mathbf{E_0}\left(\sin\omega t - \omega t\right) + C
\end{aligned}$$

Como, para $t = 0$, $\mathbf{r}(t) = \mathbf{0}$, temos:

$$\mathbf{r}(0) = \frac{e}{m\,\omega^2}\mathbf{E_0}\left(\sin\omega\cdot 0 - \omega\cdot 0\right) + C = \mathbf{0} \implies C = 0$$

Portanto,

$$\mathbf{r}(t) = \frac{e}{m\,\omega^2}\mathbf{E_0}\left(\sin\omega t - \omega t\right).$$

Questão 10

O chamado Modelo Padrão Solar, fornece além de várias outras propriedades do Sol a distribuição de elétrons em função do raio solar. Na tabela (click nesse link) temos na primeira coluna o raio da zona respectiva em unidades do raio solar e na segunda o logaritmo na base 10 da densidade de número de elétrons ($\text{cm}^{-3}N_A^{-1}$) onde N_A é o número de Avogadro. Com essas informações responda:

(a) Qual o número total de elétrons do Sol?

Resolução:

Utilizando o Python[3], podemos importar a tabela disponibilizada, utilizando a biblioteca `numpy` — a qual chamaremos de `np`.

Para importar um arquivo temporariamente, podemos utilizar o comando `with`, que realiza uma operação temporária, e com isso chamamos `with open('tabela.txt') as f:`, o que nos permite manipular o arquivo.

```
with open('tabela.txt') as f:
    lines = f.readlines()[6::]
    R_Rsun_ratio = \
        np.array([line.split()[0] for line in lines])\
        .astype(np.longdouble)
    norm_electron_density = \
        np.array([line.split()[1] for line in lines])\
        .astype(np.longdouble)
```

Primeiro nós importamos as linhas a partir da sexta, já que a tabela possui um pequeno cabeçalho.

Depois definimos a coluna correspondente às razões R/R_{Sol}, e cada entrada é convertida para um `longdouble` (basicamente, um número bastante preciso, para evitar erros de falta de memória — `overflow`). Fazemos a mesma coisa com a coluna dos logaritmos.

Após isso, vamos definir as constantes `A_N` e `S_R`, que são o número de Avogadro e o raio solar, respectivamente.

A partir destes, podemos tornar os dados adquiridos da tabela mais úteis:

```
electron_density = 10 ** norm_electron_density * A_N * 10 ** 6
r = R_Rsun_ratio * S_R
dr = np.array([r[i + 1] - r[i] for i in range(0, len(r) - 1)])
```

Primeiro definimos um novo `np.array` que corresponde à tomar cada valor da primeira coluna da tabela (a), tomar a sua exponencial de base 10 (10^a), e multiplicar pelo número de Avogadro e por 10^6, para transformar de cm^3 para m^3.

Depois definimos outro `np.array` multiplicando todas as razões de R/R_{Sol} pelo raio do sol, efetivamente encontrando cada raio.

Finalmente, vamos definir um `np.array` com intervalos infinitesimais $\mathrm{d}r$, correspondentes à diferenças entre valores sucessivos de raio da tabela — esses intervalos serão necessários para tomar uma integral.

Agora, vamos definir algumas funções úteis:

```
val_index = lambda array1, val: (np.abs(array1 - val)).argmin()

def electron_func(r_sun_frac):
    return np.sum(
        [electron_density[i] * 4 * np.pi * (r[i] ** 2) * dr[i]
        for i in range(0, val_index(r, r_sun_frac * S_R) - 1)])
```

Definimos uma função lambda, `val_index(array1, val)`, que vai nos entregar o índice do valor mais próximo de um valor desejado.

Além disso, definimos uma função que toma a integral da densidade de elétrons em função do raio ($e_d(R)$), com respeito ao volume (V), de 0 até uma porcentagem do raio total do Sol (p)

$$e_c(p) = \int_0^{p\,R_{\text{Sol}}} e_d(R)\,\mathrm{d}V.$$

Sendo

$$V = \frac{4}{3}\pi\,R^3 \implies \mathrm{d}V = 4\pi\,R^2\,\mathrm{d}R,$$

nossa integral é

$$e_c(p) = \int_0^{p\,R_{\text{Sol}}} e_d(R)(4\pi\,R^2)\,\mathrm{d}R,$$

o que se aproxima de um somatório, pela definição Riemmaniana da integral — e é isso que fazemos no código.

Sendo o total de elétrons no Sol $e_c(1)$, temos, pelo código, $e_c(1) = 1{,}005\,101\,679\,579\,159 \cdot 10^{57}$.

(b) Qual a fração do raio solar que contém metade desses elétrons?

Resolução:

Definindo um intervalo de amostragem `delta = 1/len(r)`, podemos formar uma lista com tantas integrais quanto houver valores de raio disponíveis.

Essa lista será dada por:

```
electron_count = \
    np.array([[i, electron_func(i)] for i in np.arange(0, 1, delta)])
```

E a fração de raio desejada pode ser encontrada por:

```
electron_count_half_rad = \
    electron_count[val_index(electron_count, 0.5 * total), 0]
```

O que nos dá $p = 0.5283417935702199$.

(c) Estime o número total de elétrons da Terra. Qual a fração do raio solar que contém essa quantidade de elétrons?

Resolução:

Vamos estimar esse valor através desses dados. Montando um `np.array` multidimensional com os valores de percentual em massa do elemento na Terra, de prótons do elemento, e da sua massa molar, temos:

```
percentage_mass_earth = np.array([
    [32.1, 26, 55.845],  # iron
    [30.1, 8, 15.999],  # oxygen
    [15.1, 14, 28.0855],  # silicon
    [13.9, 12, 24.305],  # magnesium
    [2.9, 16, 32.065],  # sulphur
    [1.8, 28, 58.6934],  # nickel
```

[3]Código disponível em https://colab.research.google.com/drive/10dxr7kuqpi_bbsrl21V4OKfaqFrhTWdW.

```
    [1.5, 20, 40.078], # calcium
    [1.4, 13, 26.981539]]) # aluminum
```

Também definiremos a massa da Terra M_E.

Supondo que os elementos utilizados representam 99% da quantidade de elétrons da Terra, e que quase todos se encontram neutros, naturalmente — ou que há igual distribuição de íons no interior do planeta, por exemplo — e descontando os elétrons na atmosfera, temos que a massa total de um elemento no planeta será

$$M_e = M_T \cdot \frac{p_e}{100}$$

onde M_T é a massa do planeta, e p_e é sua porcentagem (em massa).

Daí temos que o número de mols $N_m = M_e/M_m$, onde M_m é a massa molar do elemento.

Multiplicando o número de mols pelo número de Avogadro e pela quantidade de prótons do elemento, encontramos o total de elétrons desse elemento.

Agora podemos fazer isso para cada um dos elementos em nossa lista e somar os resultados:

```
electron_count_earth = np.sum([
    (M_E * percentage_mass_earth[i, 0]/100) /
    (percentage_mass_earth[i, 2]/1000) *
    percentage_mass_earth[i, 1] * A_N
    for i in range(1, len(percentage_mass_earth) - 1)])
```

Fazendo

```
equivalent_sun_rad = \
    electron_count[val_index(electron_count, electron_count_earth), 0]
```

encontramos o resultado desejado: $p = 0{,}005\,499\,153\,976\,311\,336$.