Provinha III

AVISOS IMPORTANTES

1) Essa prova tem duração de **uma semana**, podendo ser entregue a qualquer momento nesse período;
2) Dito 1), não se preocupem com fazer o mais rápido possível, e sim com qualidade e usufruindo o máximo das questões abaixo;
3) Discussões entre os alunos são *permitidas e encorajadas*, porém qualquer atitude de plágio, cópias e ações desse tipo são **extremamente vergonhosas** para qualquer pessoa que pretende seguir na carreira científica. Tentem chegar às soluções de vocês e tenham a provinha como material de desafio e aprendizado;
4) Divirtam-se! vocês escolheram estar aqui e nós estamos tentando propor desafios que os tirem da zona de conforto e que os preparem para a carreira que escolheram.

A partir da experiência diária, vocês já devem ter se deparado com diversos tipos de fluidos. Uma diferença marcante entre eles é uma propriedade chamada viscosidade, que pode ser entendida como a resistência do fluido ao escoamento. Compare, por exemplo, mel e água. Uma questão relevante relacionada à essa propriedade é: seria possível um fluido escoar sem viscosidade? O intuito dessa provinha é discutir essa pergunta utilizando as ferramentas que vocês aprenderam até agora.

Um fluido que escoa sem viscosidade é chamado **superfluido**. Em 1941, o físico Russo Lev D. Landau [4] estabeleceu um critério para a existência de um superfluido que impõe restrições nas possíveis *excitações* que ele pode suportar. Excitações são perturbações em um material que têm várias propriedades de partícula, por isso também são chamadas de *quasipartículas*. Um exemplo de efeito coletivo de excitações em um sólido seria uma onda de som gerada quando batemos em uma mesa.

Assim como as partículas com que estamos acostumados, as excitações possuem energia $\epsilon(|\mathbf{p}|)$ e momento $\mathbf{p}$, os quais estão ligados por uma relação de dispersão $\epsilon(|\mathbf{p}|)$. Um exemplo seria a de uma quasipartícula massiva: $\epsilon(|\mathbf{p}|) = \frac{|\mathbf{p}|^2}{2m}$, mas há, como veremos, excitações com relações de dispersão mais exóticas.

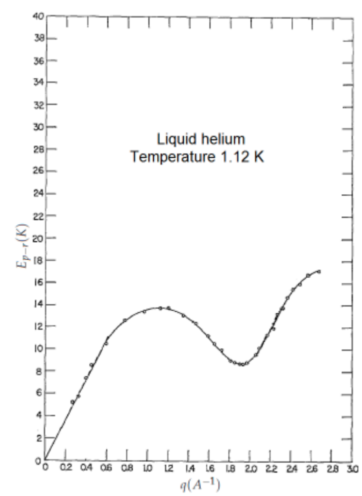

Figura 1: Relação de dispersão – dependência da energia com o momento (unidades arbitrárias) – do hélio líquido para a temperatura de 1.12 K. Retirado de [2]

O gráfico da Figura 1 mostra a relação de dispersão do hélio ^{4}He para uma temperatura abaixo de 2.17 K [1], na qual ele é líquido. O formato dessa curva é extremamente rico em conteúdo e, para lidar com o desafio de entendê-lo, vamos, antes do "exercício físico" intenso, fazer um aquecimento:

[1] K é uma unidade de medida de temperatura chamada Kelvin, relacionada numericamente com a temperatura em graus Celsius T_C por $T_C = T_K - 273.15$

① Considere um corpo de massa M que no referencial S têm velocidade $\mathbf{u}$, posição $\mathbf{x}$ e energia $E = \frac{|\mathbf{P}|^2}{2M} + U_{\text{int}}(\mathbf{x})$, onde $\mathbf{P} = M\mathbf{u}$ é o seu momento total. Suponha que a energia potencial[2] de interação $U_{\text{int}}(\mathbf{x})$ seja invariante por transformações de Galileu, isto é, $U_{\text{int}}(\mathbf{x}+\mathbf{V}t) = U_{\text{int}}(\mathbf{x})$ para qualquer velocidade $\mathbf{V}$ e tempo t. Com isso em mente, responda as seguintes questões:

(a) Em um referencial S', se movendo com velocidade $-\mathbf{V}$ em relação a S, ache a velocidade $\mathbf{u}'$ do corpo e prove que sua energia é dada por $E' = E + \frac{1}{2}M|\mathbf{V}|^2 + \mathbf{V}\cdot\mathbf{P}$.
(Ainda que não tenha derivado os resultados acima, é permitido utilizá-los nos itens a seguir)

(b) Fixados $|\mathbf{V}|$ e $|\mathbf{P}|$, prove que o mínimo de $\mathbf{V}\cdot\mathbf{P}$ é $-|\mathbf{V}||\mathbf{P}|$.
(Dica: Interprete $\mathbf{V}\cdot\mathbf{P}$ geometricamente.)

② Agora estamos em posição de entender o argumento de Landau. Para isso considere a Figura 2:

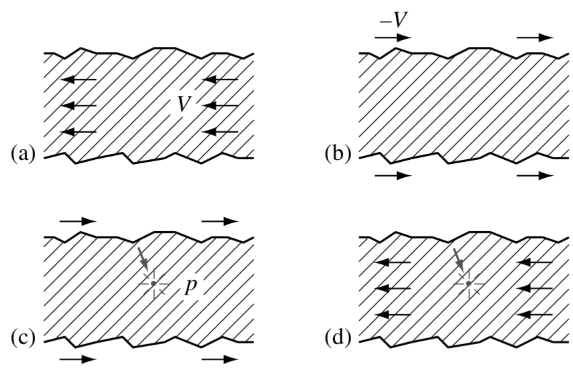

Figura 2: Diagramas das diferentes situações do fluido retratadas no texto. Retirado de [1].

Landau imaginou um fluido de massa M e velocidade $\mathbf{V}$ (veja a Figura 2(a)) escoando em um tubo estreito. Para um fluido normal, com viscosidade, suas interações com o tubo seriam a causa primária do atrito viscoso e da dissipação de energia que as partículas no fluido sofrem. Ele considerou que o mecanismo para a viscosidade seria a criação de excitações no fluido que se propagariam com momento $\mathbf{p}$ e relação de dispersão $\epsilon(|\mathbf{p}|)$ [3], por conta da interação com o tubo. As excitações não devem ser entendidas como partículas no sentido usual, pois elas são a combinação de complexos movimentos ocorrendo no fluido (exemplos serão dados mais a frente).

(a) Considere a situação da Figura 2(b). Ela representa a visão de um observador no **referencial de repouso** S do fluido. Suponha que, sem excitação, a energia do fluido nesse referencial seja E_0, chamada *energia do estado fundamental*. Com a adição de uma excitação de energia $\epsilon(|\mathbf{p}|)$ e momento $\mathbf{p}$, qual será a nova energia E e o novo momento $\mathbf{P}$ do fluido nesse mesmo referencial?

[2] O conceito de energia potencial e sua relação com forças conservativas é essencial na Física. Não perca as próximas aulas para aprender mais sobre isso!

[3] Lembre-se novamente de que aqui estamos assumindo uma forma geral dessa relação e não necessariamente que seja igual à $|\mathbf{p}|^2/2m$

(b) Com base no exercício 1(a), faça uma transformação de Galileu para referencial de laboratório S', no qual o fluido se move com velocidade $\mathbf{V}$ (veja a Figura 2(d)), e encontre o momento $\mathbf{P}'$ e energia E' do fluido nesse referencial.

(*Ainda que não seja necessário*, podemos assumir que $|\mathbf{p}|^2/2M \ll E'$ para simplificar as contas, pois se espera que o momento da excitação seja muito menor do que o momento do fluido $M\mathbf{V}$.)

(c) Qual seria a energia $\tilde{E}$ e o momento $\tilde{\mathbf{P}}$ do fluido **sem excitação**, no referencial do laboratório? Prove que a diferença de energia é dada por $\Delta E = E' - \tilde{E} = \epsilon(|\mathbf{p}|) + \mathbf{p} \cdot \mathbf{V}$.

(Dica: Não é necessário refazer todas as contas. Tente adaptar o item anterior, porém não esqueça de dar **justificativas**)

(Ainda que não tenha derivado os resultados acima, é permitido utilizá-los nos itens a seguir)

Se o custo para criar a excitação ΔE for menor do que zero, então as excitações serão criadas espontaneamente. Portanto, para que o fluido perca energia pela dissipação induzida por essas excitações, é necessário e suficiente que $\Delta E < 0$.

(d) Fixados $|\mathbf{p}|$ e $|\mathbf{V}|$, só pode haver $\Delta E < 0$ se o seu mínimo for menor que zero também. Usando o item 1(b), prove que o mínimo de ΔE nessas condições é $\epsilon(|\mathbf{p}|) - |\mathbf{p}||\mathbf{V}|$. Prove então que só pode haver $\Delta E < 0$ se $|\mathbf{V}| > \epsilon(|\mathbf{p}|)/|\mathbf{p}|$, com $\mathbf{p} \neq \mathbf{0}$.

No caso oposto, ou seja, supondo que tenhamos $\Delta E > 0$, é necessário dispêndio de energia para criar **qualquer excitação**. Logo um fluido no regime de velocidade

$$|\mathbf{V}| < \min_{\mathbf{p}\neq\mathbf{0}} \frac{\epsilon(|\mathbf{p}|)}{|\mathbf{p}|} \tag{1}$$

não apresentaria viscosidade, sendo então um **superfluido**!

(e) Imagine que as excitações sejam ondas de som, cuja energia é proporcional ao momento:

$$\epsilon(|\mathbf{p}|) = v_s|\mathbf{p}|, \tag{2}$$

onde v_s é a velocidade do som. Usando a equação (1), mostre que existe uma *velocidade crítica* v_c, abaixo da qual ocorre superfluidez, e que seu valor é $v_c = v_s$. Excitações desse tipo são chamada *fônons*.

(f) No caso "normal" de excitações massivas do tipo $\epsilon(|\mathbf{p}|) = \frac{|\mathbf{p}|^2}{2m}$, mostre que a velocidade crítica é $v_c = 0$, isto é, **não ocorre estado superfluido**.

(g) Existem excitações chamadas *rótons* que possuem relação de dispersão dada por

$$\epsilon(|\mathbf{p}|) = \Delta + \frac{(|\mathbf{p}| - p_0)^2}{2\mu}, \tag{3}$$

onde $\mathbf{p_0}$, μ e Δ são constantes independentes de $\mathbf{p}$. Determine a velocidade crítica v_c nesse caso.

Dica: O software Mathematica pode ser utilizado para fazer as substituições algébricas e cálculos nessa questão. Não é estritamente necessário, porém, alivia o trabalho braçal. Algumas funções que podem ajudar são `FullSimplify` e o `ReplaceAll` (é uma função muito utilizada e pode ser abreviada por `/.`). Na página do curso tem um tutorial para instalação e sobre as funções básicas. Escolha valores de Δ, p_0 e μ e utilize seu resultado para construir o gráfico da parábola e da reta associada a velocidade crítica e confirme que, de fato eles se tangenciam.

Observação: O aluno que fizer as contas utilizando o Mathematica deve enviar o arquivo `.nb` para o email do monitor correspondente.

(h) Represente graficamente na Figura 1 a velocidade crítica para a relação de dispersão representada. Justifique.

(Dica: Qual o significado geométrico da equação (1)?)

(i) A partir dos itens 2(e) e 2(g), indique na Figura 1 a região aproximada correspondente a excitações de fônons e a de rótons. Justifique sua escolha. Qual delas é a mais importante para a velocidade crítica e por quê?

Considerações finais: Na Figura 1, temos regiões nas quais a relação de dispersão se comporta de maneira distinta.

- Para momentos pequenos, pedaços adjacentes do fluido interagem fortemente entre si. Por isso, a relação de dispersão apresenta um comportamento linear e é chamada de *fônon* (veja equação (2)). Pictorialmente, a excitação é composta de um movimento ordenado ondular de muitos átomos (veja Figura 3).

- Para momentos muito grandes, as partículas que compõem o fluido são mais independentes e apresentam comportamento balístico. Assim, Sua relação de dispersão é dada pela energia cinética usual com uma massa efetiva que depende das interações.

- Para momentos intermediários, temos uma situação peculiar: o átomo ainda interage fortemente com seus vizinhos porém o momento é grande o suficiente para criar um fluxo efetivo para trás. Pictorialmente, enquanto parte do fluido vai para frente, ele força as camadas adjacentes à sua frente a ir para trás criando um movimento de rotação enquanto se propaga, por conta disso, esse tipo de excitação é denominada *róton* (veja Figura 3).

Vocês podem **ver** o comportamento do Hélio em seu estado superfluido no seguinte link: `https://www.youtube.com/watch?v=2Z6UJbwxBZI`.

Referências

[1] A. Altland e B.D. Simons. *Condensed Matter Field Theory*. Cambridge books online. Cambridge University Press, 2010. ISBN: 9780521769754.

[2] V. Bobrov, S. Trigger e D. Litinski. “Universality of phonon-roton spectrum in liquids and superfluidity of He II”. Em: *Zeitschrift für Naturforschung A* 71 (jul. de 2014). DOI: `10.1515/zna-2015-0397`.

[3] J. F e J.F. Annett. *Superconductivity, Superfluids and Condensates*. Oxford Master Series in Physics. OUP Oxford, 2004. ISBN: 9780198507567. URL: `https://books.google.com.br/books?id=WZcXmBrZIc8C`.

[4] L. Landau. “Theory of the Superfluidity of Helium II”. Em: *Phys. Rev.* 60 (4 ago. de 1941), pp. 356–358. DOI: `10.1103/PhysRev.60.356`.

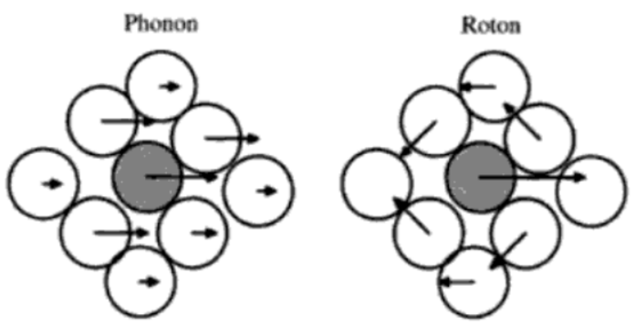

Figura 3: Diferentes tipo de excitações que acontecem em um fluido. Retirado de [3].