

# Resolução – Provinha VIII (Física I)

Isabella B. – 11810773

Nota: 9

## Questão 1

Em 19 de janeiro de 2006, a NASA lançou a sonda *New Horizons* numa missão para estudar a geomorfologia de Plutão. No entanto, ela não foi lançada diretamente para o planeta-anão, mas numa trajetória de 23 km/s (em relação ao Sol) em direção a Júpiter, astro com que teve máxima aproximação no dia 28 de fevereiro de 2007, e cuja força de gravidade foi usada para acelerá-la, um processo conhecido como assistência gravitacional (ou estilingue gravitacional).

- (a) Mostre que, considerando situações inicial e final em que a sonda está suficientemente distante de Júpiter, o processo de deflexão de sua trajetória pode ser considerado uma colisão elástica.

### Resolução:

Considerando que a sonda viaja à uma distância  $R$  do centro de massa (CM) de Júpiter, teremos a conservação de energia e de momento do sistema se, e somente se, as únicas forças atuantes forem conservativas, o que é o caso para um  $R$  suficientemente grande, de tal forma que a sonda orbita o planeta numa região sem atmosfera e, portanto, sem forças dissipativas.

Como as forças que atuam no sistema são todas internas, pois a sonda e o planeta sofrem somente uma força gravitacional mútua, o momento é conservado<sup>1</sup>:

$$\sum \mathbf{F}_{\text{int}} = \mathbf{0}, \quad \mathbf{F}_{\text{ext}} = \mathbf{0} \Rightarrow \sum \frac{d\mathbf{p}}{dt} = \mathbf{0}$$



Dessa forma, a energia do sistema também é conservada e, portanto, podemos considerar que o problema trata de uma colisão elástica.

- (b) O momento angular de um corpo na posição  $\mathbf{r}$  com momento  $\mathbf{p}$  é dado pela expressão  $\mathbf{L} = \mathbf{r} \times \mathbf{p}$ . Calcule a variação temporal de  $\mathbf{L}$  para um corpo sob ação da força gravitacional de um planeta (muito massivo em relação ao objeto) na origem.

### Resolução:

Denotarei o módulo de um vetor  $\boldsymbol{\alpha}$  por  $|\boldsymbol{\alpha}| = \alpha$ .

Para um corpo de massa  $m$  e posição  $\mathbf{r}$  em relação a um corpo de massa  $M \gg m$  que exerce sobre ele uma força gravitacional, temos  $\ddot{\mathbf{r}} = g_p$ , que é a gravidade do planeta.

Nessa situação, podemos descrever seu vetor posição como

$$\mathbf{r} = r (\cos \theta \hat{\mathbf{i}} + \sin \theta \hat{\mathbf{j}})$$

onde  $\theta$  é o ângulo formado em relação a alguma reta bem definida que passa pelo centro de massa do planeta.

Dessa forma

$$\begin{aligned} \ddot{\mathbf{r}} &= \frac{d^2}{dt^2} [r (\cos \theta \hat{\mathbf{i}} + \sin \theta \hat{\mathbf{j}})] \\ &= \frac{d}{dt} [\dot{r} (\cos \theta \hat{\mathbf{i}} + \sin \theta \hat{\mathbf{j}}) + r (-\dot{\theta} \sin \theta \hat{\mathbf{i}} + \dot{\theta} \cos \theta \hat{\mathbf{j}})] \end{aligned}$$

<sup>1</sup> $\sum \mathbf{F}_{\text{int}}$  representa as forças internas ao sistema, enquanto  $\mathbf{F}_{\text{ext}}$  representa as forças externas, e  $\sum \mathbf{p}$  é o momento total.



portanto, podemos considerar  $\mathbf{p}'_f \approx \mathbf{p}'_i$  no referencial do planeta. Dessa forma

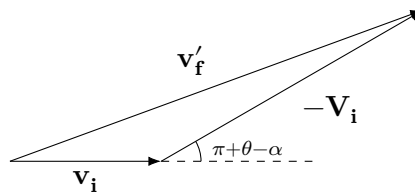


$$\mathbf{v}'_f = \mathbf{v}'_i$$

$$\mathbf{v}'_f = \mathbf{v}_i - \mathbf{V}_i$$

Porém, como a sonda muda de direção no encontro, essas velocidades não são iguais em módulo, dessa forma

$$|\mathbf{v}'_f| = v_i^2 + V_i^2 - 2v_i V_i \cos(\theta - \alpha) \quad (1.2)$$



(d) Júpiter percorre sua órbita a uma velocidade média de 13 km/s. Comente qual seria a situação mais favorável para a assistência gravitacional (e.g. em termos das velocidades dos corpos envolvidos) e diga, nesse caso hipotético, qual seria a variação da velocidade da *New Horizons* no referencial do Sol.

### Resolução:

Como a velocidade final no referencial do Sol será

$$\begin{aligned} |\mathbf{v}_f - \mathbf{V}_f| &\approx |\mathbf{v}_f - \mathbf{V}_i| = v_i^2 + V_i^2 - 2v_i V_i \cos(\theta - \alpha) \\ v_f^2 + V_i^2 - 2v_f V_i \cos(\beta - \theta) &= v_i^2 + V_i^2 - 2v_i V_i \cos(\theta - \alpha) \\ (v_f - (V_i \cos(\beta - \theta)))^2 &= v_i^2 - 2v_i V_i \cos(\theta - \alpha) + (V_i \cos(\beta - \theta))^2 \\ v_f &= \sqrt{v_i^2 - 2v_i V_i \cos(\theta - \alpha) + (V_i \cos(\beta - \theta))^2} + V_i \cos(\beta - \theta) \end{aligned}$$

Podemos ver que o valor máximo da raiz, em relação aos ângulos, se dá quando  $\theta - \alpha = \pi$  e  $\beta - \theta = 0$ , o que corresponde à sonda entrar em contato com o planeta com velocidade contrária a sua, e sair no mesmo sentido e direção de viagem do planeta. Desse modo, sua variação de velocidade seria:

$$\begin{aligned} \Delta v &= v_{f \max} - v_i \\ &= \sqrt{v_i^2 + 2v_i V_i + V_i^2} + V_i - v_i \\ \Delta v &= v_i + V_i + V_i - v_i = 2V_i \\ &= 2 \cdot 13 = 26 \text{ km/s} \end{aligned} \quad (1.3)$$



(e) Sabendo que a *New Horizons* tem massa de 480 kg e tem velocidade de 4 km/s antes de utilizar a assistência gravitacional, estime quanto combustível seria necessário para que apenas a sonda<sup>3</sup> ganhasse a mesma velocidade adquirida via assistência gravitacional no caso mais favorável. Considere que seria utilizado como combustível LOX/LH2 com 100% de eficiência (o que claramente não é possível).

**Dados:** A reação de combustão é dada por  $2\text{H}_2 + \text{O}_2 \rightarrow 2\text{H}_2\text{O} + \text{energia}$ , sendo que o calor específico de combustão da reação é de 141,8 MJ/kg.

### Resolução:

Pelo item anterior, a sonda ganharia 26 km/s.

<sup>3</sup>Como trata-se de uma estimativa, estamos desconsiderando que a *New Horizons* precisaria levar consigo a massa de combustível. Portanto a quantidade estimada de combustível é subestimada.

Considerando a variação de energia cinética da sonda onde ela ganharia essa velocidade, temos

$$\begin{aligned}\Delta K &= \frac{1}{2}m(v_f^2 - v_i^2) \\ &= \frac{1}{2}480((26 + 4)^2 - 4^2) \\ &= 240(26 + 4 - 4)(26 + 4 + 4) = 212\,160 \text{ MJ}\end{aligned}$$

portanto, precisaríamos de, aproximadamente

$$\frac{212\,160}{141,8} = 1496,2 \text{ kg}$$



de combustível.