

Questão 1

Considere uma bola de neve que rola **sem deslizar** em uma ladeira que faz um ângulo θ com a horizontal. Durante o percurso, devido à neve depositada na superfície, não só a velocidade, como também a **massa** da esfera variam no tempo.

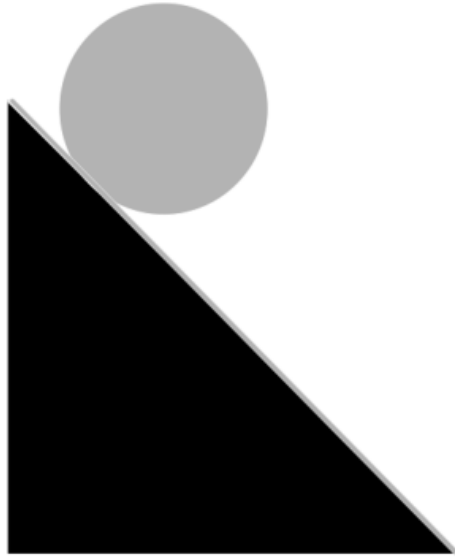


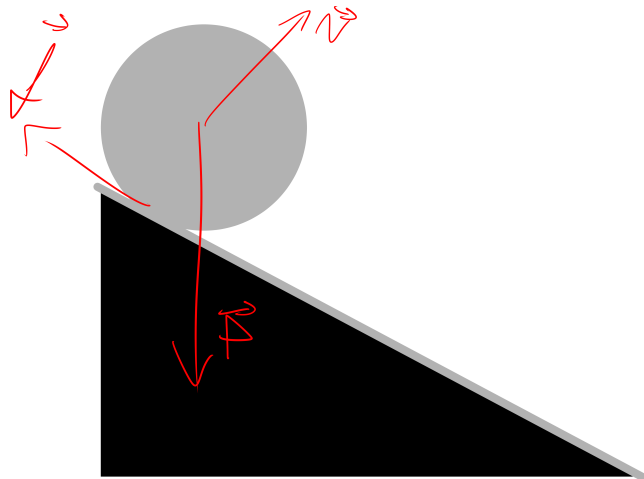
Figura 1: Representação do problema.

- (a) Faça o desenho do diagrama de forças agindo na esfera e escreva as equações de movimento na direção paralela à ladeira.

Dica: Lembre-se que a massa da esfera é **variável**.

Resolução:

Sabemos que a gravidade \mathbf{g} atua na bola de neve, assim como uma força de atrito \mathbf{f} (pois ela não desliza), portanto:



Dessa forma, a equação de movimento é

$$\mathbf{P} + \mathbf{N} + \mathbf{f} = \frac{d\mathbf{p}}{dt} \quad (1.1)$$

onde \mathbf{p} é o momento da bola e \mathbf{P} é seu peso.

Adotando um referencial onde o eixo x é paralelo ao plano que a bola rola, com o sentido positivo apontado para a descida, e o eixo y é perpendicular, na direção da normal, positivo para baixo, temos a equação simplificada

$$m g \sin \theta - f = \frac{d(mv)}{dt} \quad (1.2)$$

onde m é a massa em função do tempo, e os módulos dos vetores são denotados por $|\mathbf{a}| = a$.

(b) Mostre que o momento de inércia de uma esfera rígida que gira ao redor do eixo que passa pelo seu centro é:

$$I = \frac{2m r^2}{5} \quad (1.3)$$

Obs: O resultado pode ser utilizado nos próximos exercícios mesmo que não consiga resolver este item.

Resolução:

Para encontrar o momento de inércia da situação desejada, podemos considerar infinitos discos com momento de inércia dI .

Pela relação de densidade superficial, temos

$$dm_d = \frac{m_d}{A} dA = \frac{m_d 2\pi x dx}{\pi r^2} = \frac{2m_d x dx}{r^2}$$

onde, x e ρ são respectivamente a distância até o eixo de rotação e o raio de um disco à uma altura z do centro da esfera, e m_d é a massa do disco.

Dessa forma, podemos integrar o momento de inércia para um único disco pela relação

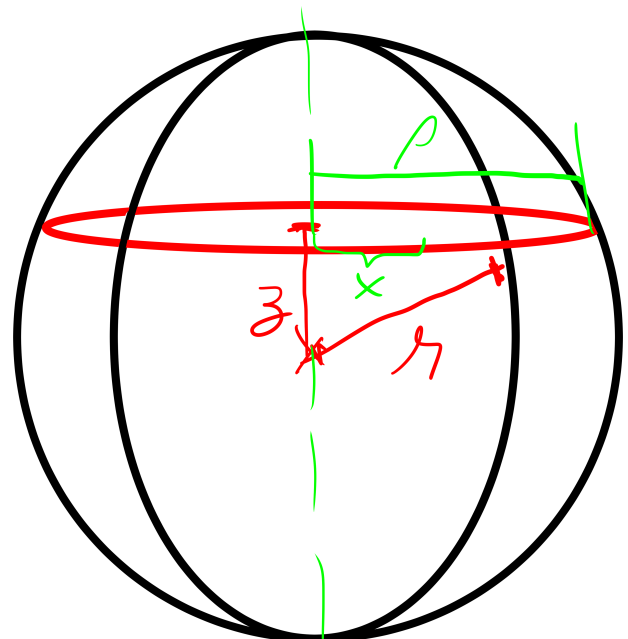
$$I_d = \int_0^\rho x^2 dm = \int_0^\rho \frac{2m_d x^3 dx}{r^2} = \frac{1}{2} m_d \rho^2.$$

Portanto, tomando o diferencial $dI = \rho^2 dm/2$, onde dm é o diferencial de massa da esfera, dado por

$$dm = \frac{m}{V} dV = \frac{m \pi \rho^2 dz}{4\pi r^3/3} = \frac{3m \rho^2 dz}{4r^3}$$

Por Pitágoras, sabemos que $\rho^2 = r^2 - z^2$, portanto

$$dI = \frac{1}{2} \rho^2 \frac{3m \rho^2 dz}{4r^3} = \frac{3m (r^2 - z^2)^2 dz}{8r^3}$$



e

$$\begin{aligned}
 I &= \int_{-r}^r \frac{3m (r^4 - 2r^2 z^2 + z^4)}{8r^3} dz \\
 &= \left(\frac{3m (r^4 z - 2r^2 z^3/3 + z^5/5)}{8r^3} \right) \Big|_{-r}^r \\
 &= \frac{3m (2r^5 - 4r^5/3 + 2r^5/5)}{8r^3} \\
 &= \frac{3m r^2 (30 - 20 + 6)}{8 \cdot 3 \cdot 5} \\
 I &= \frac{2m r^2}{5}
 \end{aligned}$$

(c) Considerando o centro como referência calcule o torque resultante na esfera. Utilize seu resultado para mostrar que a equação de movimento na direção paralela à ladeira pode ser reescrita como:

$$m g \sin \theta - \frac{I}{r} \frac{d\omega}{dt} - \frac{\omega}{r} \frac{dI}{dt} = m \frac{dv}{dt} + v \frac{dm}{dt} \quad (1.4)$$

Resolução:

Sabemos que a força que causa rotação é a força de atrito \mathbf{f} , sendo o momento angular $L = I \omega$, temos que o módulo do torque τ é dado por

$$\tau = r f = \frac{dL}{dt} = \frac{d(I \omega)}{dt} = I \frac{d\omega}{dt} + \omega \frac{dI}{dt}$$

portanto, substituindo em 1.1, temos

$$P \sin \theta - \left(\frac{I}{r} \frac{d\omega}{dt} + \frac{\omega}{r} \frac{dI}{dt} \right) = \frac{d(m v)}{dt}.$$

Sendo o peso $P = m g$, aplicando a regra da cadeia no momento, temos

$$m g \sin \theta - \frac{I}{r} \frac{d\omega}{dt} - \frac{\omega}{r} \frac{dI}{dt} = m \frac{dv}{dt} + v \frac{dm}{dt}.$$

□

(d) Substitua o momento de inércia encontrado em b e utilize o fato de que a esfera rola sem deslizar para reescrever 1.4 como:

$$m g r \sin \theta - \frac{7}{5} v r \frac{dm}{dt} - \frac{2}{5} m v \frac{dr}{dt} = \frac{7}{5} m r \frac{dv}{dt} \quad (1.5)$$

Resolução:

Substituindo 1.4 em 1.5, temos

$$m g \sin \theta - \frac{(2m r^2/5)}{r} \frac{d\omega}{dt} - \frac{\omega}{r} \frac{d(2m r^2/5)}{dt} = m \frac{dv}{dt} + v \frac{dm}{dt}$$

sendo $\omega = v/r$, temos

$$\begin{aligned}
 m g r \sin \theta - \frac{2 m r^2}{5} \frac{d(v/r)}{dt} - \frac{v}{r} \left(\frac{dm}{dt} \frac{d}{dm} \left[\frac{2 m r^2}{5} \right] + \frac{dr}{dt} \frac{d}{dr} \left[\frac{2 m r^2}{5} \right] \right) &= r \left(m \frac{dv}{dt} + v \frac{dm}{dt} \right) \\
 m g r \sin \theta - \frac{2 m r^2}{5} \left(\frac{dv}{dt} \frac{d}{dv} \left[\frac{v}{r} \right] + \frac{dr}{dt} \frac{d}{dr} \left[\frac{v}{r} \right] \right) - \frac{v}{r} \left(\frac{dm}{dt} \frac{2 r^2}{5} + \frac{dr}{dt} \frac{4 m r}{5} \right) &= r \left(m \frac{dv}{dt} + v \frac{dm}{dt} \right) \\
 m g r \sin \theta - \frac{2 m r^2}{5} \left(\frac{dv}{dt} \frac{1}{r} - \frac{dr}{dt} \frac{v}{r^2} \right) - v \left(\frac{dm}{dt} \frac{2 r}{5} + \frac{dr}{dt} \frac{4 m}{5} \right) &= r \left(m \frac{dv}{dt} + v \frac{dm}{dt} \right) \\
 m g r \sin \theta - v r \frac{dm}{dt} \left(1 + \frac{2}{5} \right) - m v \frac{dr}{dt} \left(\frac{4}{5} - \frac{2}{5} \right) &= m r \frac{dv}{dt} \left(1 + \frac{2}{5} \right) \\
 m g r \sin \theta - \frac{7}{5} v r \frac{dm}{dt} - \frac{2}{5} m v \frac{dr}{dt} &= \frac{7}{5} m r \frac{dv}{dt}
 \end{aligned}$$

(e) Assumindo que a densidade ρ da esfera seja constante. Encontre a taxa de variação da massa com o raio $\frac{dm}{dr}$. Substitua em 1.5 e mostre que a equação se torna:

$$g r \sin \theta - \frac{23}{5} v \frac{dr}{dt} = \frac{7}{5} r \frac{dv}{dt} \quad (1.6)$$

Resolução:

Pela relação da densidade, temos

$$m = \rho V = \rho \frac{4}{3} \pi r^3$$

derivando com respeito ao raio

$$\begin{aligned}
 \frac{dm}{dr} &= \rho 4 \pi r^2 \\
 \frac{dm}{dr} &= \frac{m}{4 \pi r^3 / 3} 4 \pi r^2 = \frac{3m}{r}.
 \end{aligned} \quad (1.7)$$

Retomando 1.6

$$g r \sin \theta - \frac{1}{m} \frac{7}{5} v r \frac{dm}{dr} \frac{dr}{dt} - \frac{2}{5} v \frac{dr}{dt} = \frac{7}{5} r \frac{dv}{dt}$$

substituindo 1.7

$$\begin{aligned}
 g r \sin \theta - \left(\frac{1}{m} \frac{7}{5} r \frac{3m}{r} + \frac{2}{5} \right) v \frac{dr}{dt} &= \frac{7}{5} r \frac{dv}{dt} \\
 g r \sin \theta - \frac{23}{5} v \frac{dr}{dt} &= \frac{7}{5} r \frac{dv}{dt}.
 \end{aligned}$$

□

(f) Assumindo que o raio aumenta no tempo à uma taxa constante por rotação da esfera:

$$\frac{dr}{dt} = \frac{k}{2\pi/\omega} = \frac{k v}{2\pi r} \quad (1.8)$$

A equação 1.6 pode ser escrita como:

$$g \sin \theta - \frac{23 v^2 k}{10 \pi r^2} = \frac{7}{5} \frac{dv}{dt} \quad (1.9)$$

Essa equação diferencial não pode ser resolvida analiticamente¹. Porém podemos estudar o comportamento da aceleração da bola de neve tomando a derivada de 1.9 em relação ao tempo. Feito isso, encontre a aceleração terminal em termos de g e θ .

Resolução:

Derivando 1.9 com relação ao tempo, temos

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt} \left[g \sin \theta - \frac{23v^2 k}{10\pi r^2} \right] &= \frac{d}{dt} \left[\frac{7}{5} \frac{dv}{dt} \right] \\ g \cos \theta - \frac{23k}{10\pi} \frac{d}{dt} \left[\left(\frac{v}{r} \right)^2 \right] &= \frac{7}{5} \frac{d^2 v}{dt^2} \\ g \cos \theta - \frac{23k}{10\pi} \left(2 \frac{v}{r} \left(\frac{dv}{dt} \frac{d}{dv} \left[\frac{v}{r} \right] + \frac{dr}{dt} \frac{d}{dr} \left[\frac{v}{r} \right] \right) \right) &= \frac{7}{5} \frac{d^2 v}{dt^2} \\ g \cos \theta - \frac{23k v}{5\pi r} \left(\frac{1}{r} \frac{dv}{dt} - \frac{k v}{2\pi r^2} \right) &= \frac{7}{5} \frac{d^2 v}{dt^2}\end{aligned}$$

a aceleração terminal se dá quando ela não varia mais, portanto, $\frac{d^2 v}{dt^2} = 0$

$$\begin{aligned}g \cos \theta - \frac{23k v}{5\pi r} \left(\frac{dv}{dt} - \frac{k v}{2\pi r^2} \right) &= 0 \\ \frac{23k v}{5\pi r} \frac{dv}{dt} &= g \cos \theta + \frac{23k v}{5\pi r} \frac{k v}{2\pi r^2} \\ \boxed{\frac{dv}{dt} = \frac{5\pi g r}{23k v} \cos \theta + \frac{k v}{2\pi r^2}}\end{aligned}$$

¹É possível reescrever a equação de forma a achar a velocidade e aceleração como funções do raio. Nesse caso existe solução analítica.