Resolução – Lista 3 (Física I – CM0112)

Isabella B. – 11810773

Questão 1

Uma arma está formada por uma mola que inicialmente está em repouso sobre uma superfície horizontal e lança uma bola fazendo um ângulo de elevação θ. A massa da arma é M, a massa da bola é m e a velocidade de saída da bola é v_0. Qual é a velocidade inicial da arma? Quais são as velocidades inicial e final do centro de massa do sistema arma-bola?

Resolução:

Adotando o referencial com origem na posição inicial da bola (imediatamente antes de ser lançada), considerando os sentidos vertical e horizontal crescentes para cima e para a esquerda, respectivamente, e considerando que o momento do sistema é conservado — pois mesmo sob o efeito gravitacional a força exercida pela mola nesse instante é muito maior —, temos, por diferença de momento linear, que

$$\Delta \mathbf{p} = \mathbf{v_0}\, m + \mathbf{v_0'}\, M \implies \mathbf{v_0'} = -\frac{m}{M}\mathbf{v_0},$$

onde $\Delta \mathbf{p}$ é a variação de momento (que é nula) e $\mathbf{v_0'}$ é a velocidade inicial da arma.

A partir disso podemos encontrar a velocidade inicial do centro de massa $\mathbf{V_{CM\,0}}$:

$$(M+m)\,\mathbf{V_{CM\,0}} = M\,\mathbf{v_0'} + m\,\mathbf{v_0} \iff \mathbf{V_{CM\,0}} = \frac{\cancel{M}\left(-m\mathbf{v_0}/\cancel{M}\right) + m\,\mathbf{v_0}}{M+m} = \mathbf{0},$$

e também sua função de velocidade no tempo:

$$\mathbf{V_{CM}}(t) = \frac{M\,\mathbf{v}'(t) + m\,\mathbf{v}(t)}{M+m},$$

onde $\mathbf{v}(t)$ e $\mathbf{v}'(t)$ indicam as funções horárias das velocidades da bola e da arma, respectivamente.

Adotemos a notação $a = |\mathbf{a}|$ para o resto das resoluções na lista.

Na ausência de atrito e de forças externas, podemos considerar a velocidade da arma constante, e sua componente na vertical nula, sobrando somente $\mathbf{v}'(t) = -\dfrac{m}{M}v_0\cos\theta\,\hat{\imath}$, onde $(\hat{\imath},\hat{\jmath})$ são os versores da base canônica e θ é o ângulo da velocidade inicial com a horizontal.

Da mesma forma, vale que

$$\mathbf{v}(t) = \mathbf{v_0} - g\,t\,\hat{\jmath} = \underbrace{(v_0\sin\theta - g\,t)}_{=v_y(t)}\hat{\jmath} + \underbrace{v_0\cos\theta}_{=v_x(t)}\,\hat{\imath},$$

pois existe uma aceleração não nula atuando sobre a bola $-g$ (aceleração da gravidade). Considerando o momento final do movimento da bola quando ela toca o chão após ser lançada, podemos encontrar a velocidade final vertical da bola $v_{f\,y}$ pelo teorema trabalho energia

$$\frac{1}{2}m\left(v_{f\,y}^2 - v_{0\,y}^2\right) = \int_0^{-h} -m\,g\,\mathrm{d}x$$

onde $v_{0\,y}$ é a decomposição vertical da velocidade inicial da bola e $-h$ é a diferença de altura entre a origem do referencial e o chão. Portanto, temos

$$v_{f\,y} = \sqrt{\left(v_0\sin\theta\right)^2 + 2g\,h}. \tag{1.1}$$

substituindo 1.1 em $v_y(t)$, ficamos com a velocidade final da bola $\mathbf{v_f} = \hat{\jmath}\sqrt{(v_0 \sin\theta)^2 + 2g\,h} + v_0\cos\theta\,\hat{\imath}$ e $\mathbf{v_f'} = -\frac{m}{M}v_0\cos\theta\,\hat{\imath}$. Substituindo na equação da velocidade do centro de massa, podemos encontrar sua velocidade final:

$$\begin{aligned}\mathbf{V_{CM\,f}} &= \frac{M\left(-\frac{m}{M}v_0\cos\theta\,\hat{\imath}\right) + m\left(\sqrt{(v_0\sin\theta)^2 + 2g\,h}\,\hat{\jmath} + v_0\cos\theta\,\hat{\imath}\right)}{M+m} \\ &= \frac{m}{M+m}\hat{\jmath}\sqrt{(v_0\sin\theta)^2 + 2g\,h}\end{aligned}$$

Questão 2

Uma pequena bola de massa m é colocada no topo de uma "super bola" de massa M e as dois bolas são soltadas de uma altura h do chão. Qual é a altura da massa m depois do choque? Assuma que os choques são elásticos, $m \ll M$ e que as massas estão separadas por uma distância muito pequena ao momento da super bola chocar com o chão.

Resolução:

Considerando as esferas puntiformes, temos, por energia, devido à gravidade, uma velocidade final de $v = -\sqrt{g\,h}$ no referencial do chão (adotando o sentido positivo na vertical para cima). Por conservação de momento linear e de energia (colisão elástica), temos que, sendo a massa do chão muito maior do que a massa das bolas, ele não tem sua velocidade alterada durante a colisão e, portanto, a bola mais pesada retorna com velocidade $-v$ após a colisão. Da mesma forma, a bola mais leve colide com a bola maior que tem massa muito superior do que ela (pelo enunciado) e retorna com velocidade $-v$ em relação à ela. Por transformações de Galileu temos, então, que a bola mais leve terá velocidade $-2v = 2\sqrt{g\,h}$ em relação ao chão.

Pelo teorema trabalho energia, adotando a velocidade inicial da bola mais leve como $v_i = -2v$ e a força peso $P = m\,g$ sofrida por ela, temos que sua velocidade final será $v_f = 0$ (momento em que para de subir), e sua altura final h_f será dada por

$$\frac{1}{2}m\left(v_f^2 - v_i^2\right) = \int_0^{h_f} -m\,g\,\mathrm{d}y \implies h_f = 2h.$$

Questão 3

N homens cada um de massa m estão sobre um carro de massa M. Eles saltam de um extremo do carro com velocidade u relativa ao carro. O carro recua na direção oposta sem atrito.

(a) Qual é a velocidade final do carro se todos os homens saem ao mesmo tempo?

Resolução:

Adotando o referencial do carro, considerando a ausência de forças externas ao sistema carro-homens temos, por conservação de momento linear

$$\Delta p = -N\,u\,m + M\,\Delta v \implies \Delta v = \frac{N\,m}{M}u, \tag{3.1}$$

onde adotei o sentido positivo na direção do deslocamento do carro, Δv a velocidade adquirida pelo carro e Δp a variação no momento durante o movimento (nula).

(b) Qual é a velocidade final do carro se os homens saem um por um em diferentes tempos?

Resolução:

Adotando as mesmas considerações da questão anterior quanto à notação e referencial, dessa vez teremos N passos discretos em que os homens pulam do carro e, portanto, podemos considerar N alterações de velocidade do carro:

$$\cancelto{0}{\Delta p_1} = -u\,m + (M + (N-1)m)\,\Delta v \implies \Delta v = \frac{m}{M + (N-1)m}u \tag{3.2}$$

$$\cancelto{0}{\Delta p_2} = -u\,m + (M + (N-2)m)\,\Delta v \implies \Delta v = \frac{m}{M + (N-2)m}u \tag{3.3}$$

$$\vdots \tag{3.4}$$

$$\cancelto{0}{\Delta p_i} = -u\,m + (M + (N-i)m)\,\Delta v \implies \Delta v = \frac{m}{M + (N-i)m}u. \tag{3.5}$$

E, somando todas, temos a variação total Δv_t da velocidade do carro:

$$\Delta v_t = \sum_{i=1}^{N} \frac{m}{M + (N-i)m}u. \tag{3.6}$$

(c) Qual velocidade dos casos 3.a e 3.b é maior?

Resolução:

Subtraindo as equações 3.1 e 3.6, temos

$$\Delta v_t - \Delta v = \sum_{i=1}^{N} \left(\frac{m}{M + (N-i)m}u \right) - \frac{N\,m}{M}u$$

note que $\sum_{i=1}^{N}(m/M)u = N(m/M)u$

$$\begin{aligned} &= \sum_{i=1}^{N} \frac{m}{M + (N-i)m}u - \frac{m}{M}u = \sum_{i=1}^{N} \frac{\cancel{M} - \cancel{M} - (N-i)m}{M + (N-i)m}m\,u \\ &= \sum_{i=1}^{N} \left(\frac{M}{i-N} - m \right)^{-1} m^2\,u < 0. \end{aligned}$$

Logo, podemos conferir que $\Delta v > \Delta v_t$, o que confere com nossa intuição física, pois para cada pequeno incremento quando uma pessoa pula, a massa do carro com as pessoas que restaram é menos sensível à uma mudança de velocidade (as pessoas que restaram aceleram junto com ele).