Resolução – Provinha VIII (Física I)

Isabella B. – 11810773

Questão 1

Nota: 9

Em 19 de janeiro de 2006, a NASA lançou a sonda *New Horizons* numa missão para estudar a geomorfologia de Plutão. No entanto, ela não foi lançada diretamente para o planeta-anão, mas numa trajetória de 23 km/s (em relação ao Sol) em direção a Júpiter, astro com que teve máxima aproximação no dia 28 de fevereiro de 2007, e cuja força de gravidade foi usada para acelerá-la, um processo conhecido como assistência gravitacional (ou estilingue gravitacional).

(a) Mostre que, considerando situações inicial e final em que a sonda está suficientemente distante de Júpiter, o processo de deflexão de sua trajetória pode ser considerado uma colisão elástica.

Resolução:

Considerando que a sonda viaja à uma distância R do centro de massa (CM) de Júpiter, teremos a conservação de energia e de momento do sistema se, e somente se, as únicas forças atuantes forem conservativas, o que é o caso para um R suficientemente grande, de tal forma que a sonda orbita o planeta numa região sem atmosfera e, portanto, sem forças dissipativas.

Como as forças que atuam no sistema são todas internas, pois a sonda e o planeta sofrem somente uma força gravitacional mútua, o momento é conservado¹:

$$\sum \mathbf{F_{int}} = \mathbf{0}, \quad \mathbf{F_{ext}} = \mathbf{0} \implies \sum rac{\mathrm{d}\mathbf{p}}{\mathrm{d}t} = \mathbf{0}$$



Dessa forma, a energia do sistema também é conservada e, portanto, podemos considerar que o problema trata de uma colisão elástica.

(b) O momento angular de um corpo na posição \mathbf{r} com momento \mathbf{p} é dado pela expressão $\mathbf{L} = \mathbf{r} \times \mathbf{p}$. Calcule a variação temporal de \mathbf{L} para um corpo sob ação da força gravitacional de um planeta (muito massivo em relação ao objeto) na origem.

Resolução:

Denotarei o módulo de um vetor α por $|\alpha| = \alpha$.

Para um corpo de massa m e posição ${\bf r}$ em relação a um corpo de massa $M\gg m$ que exerce sobre ele uma força gravitacional, temos $\ddot{r}=g_p$, que é a gravidade do planeta.

Nessa situação, podemos descrever seu vetor posição como

$$\mathbf{r} = r \left(\cos\theta \,\hat{\mathbf{i}} + \sin\theta \,\hat{\mathbf{j}}\right)$$

onde θ é o ângulo formado em relação a alguma reta bem definida que passa pelo centro de massa do planeta.

Dessa forma

$$\ddot{\mathbf{r}} = \frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}t^2} \left[r \left(\cos \theta \, \hat{\mathbf{i}} + \sin \theta \, \hat{\mathbf{j}} \right) \right]$$

$$= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \left[\dot{r} \left(\cos \theta \, \hat{\mathbf{i}} + \sin \theta \, \hat{\mathbf{j}} \right) + r \left(-\dot{\theta} \sin \theta \, \hat{\mathbf{i}} + \dot{\theta} \cos \theta \, \hat{\mathbf{j}} \right) \right]$$

 $^{^{1}\}sum\mathbf{F_{int}}$ representa as forças internas ao sistema, enquanto $\mathbf{F_{ext}}$ representa as forças externas, e $\sum\mathbf{p}$ é o momento total.

se a única força que atua no sistema é a gravitacional, $\dot{\theta} = 0$

$$\begin{split} &=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left[\dot{r}\left(\cos\theta\,\hat{\mathbf{i}}+\sin\theta\,\hat{\mathbf{j}}\right)\right]\\ &=\ddot{r}\left(\cos\theta\,\hat{\mathbf{i}}+\sin\theta\,\hat{\mathbf{j}}\right)+\dot{r}\,\dot{\theta}\left(-\sin\theta\,\hat{\mathbf{i}}+\cos\theta\,\hat{\mathbf{j}}\right)\\ \ddot{\mathbf{r}}&=g_{p}\left(\cos\theta\,\hat{\mathbf{i}}+\sin\theta\,\hat{\mathbf{j}}\right) \end{split} \tag{1.1}$$

Sendo $\mathbf{p} = m \mathbf{v} = m \dot{\mathbf{r}}$, e a derivada do produto vetorial

$$\frac{\mathrm{d}\mathbf{L}}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \left[\mathbf{r} \times \mathbf{p} \right] = \frac{\mathrm{d}\mathbf{r}}{\mathrm{d}t} \times \mathbf{p} + \mathbf{r} \times \frac{\mathrm{d}\mathbf{p}}{\mathrm{d}t}$$

substituindo $\mathbf{p} = m \, \dot{\mathbf{r}}$, temos

$$= \frac{\mathrm{d}\mathbf{r}}{\mathrm{d}t} \times m\,\dot{\mathbf{r}} + \mathbf{r} \times \frac{\mathrm{d}m\,\dot{\mathbf{r}}}{\mathrm{d}t}$$
$$= m\,\mathbf{r} \times \ddot{\mathbf{r}}$$

substituindo 1.1 e tomando o produto vetorial, temos

$$= m \begin{vmatrix} \widehat{\mathbf{i}} & \widehat{\mathbf{j}} & \widehat{\mathbf{k}} \\ r \cos \theta & r \sin \theta & 0 \\ g_p \cos \theta & g_p \sin \theta & 0 \end{vmatrix}$$

$$\frac{\mathrm{d} \mathbf{L}}{\mathrm{d} t} = m \widehat{\mathbf{k}} \left(r g_p \left(\cos \theta \sin \theta - \cos \theta \sin \theta \right) \right) = \mathbf{0}$$

Pelo item anterior, sabemos que o movimento ocorre num plano. Assim, estabeleçamos espertamente um referencial Oxy com origem inicialmente em Júpiter², e cujo eixo Ox seja paralelo a seu momento final.

(c) Calcule, nesse referencial, a velocidade final da sonda em termos das velocidades iniciais da sonda e de Júpiter. Considere que a massa da *New Horizons* é desprezível em relação à de um planeta.

Resolução:

Sejam m a massa da sonda, M a massa do planeta, e \mathbf{v}, \mathbf{p} e \mathbf{V}, \mathbf{P} suas respectivas velocidades e momentos em relação ao Sol.

Posicionamos o eixo de coordenadas de tal forma que Ox seja paralela ao momento final de Júpiter $\mathbf{P_f}$. Seu momento inicial $\mathbf{P_i}$, e os momentos inicial e final da sonda ($\mathbf{p_i}$ e $\mathbf{p_f}$) fazem ângulos θ , α e β , respectivamente, com Ox.

Por transformações de Galileu, sabemos que a velocidade inicial da sonda no referencial do planeta será $\mathbf{v_i'} = \mathbf{v_i} - \mathbf{V_i}$.

Considerando uma colisão elástica entre os corpos, como no item a, por conservação de momento, temos:

$$\mathbf{p_i} + \mathbf{P_i} = \mathbf{p_f} + \mathbf{P_f} \implies \mathbf{p_f} - \mathbf{p_i} = -M (\mathbf{V_f} - \mathbf{V_i})$$

E, como $M\gg m$ e o encontro é muito rápido, a sonda afeta a velocidade do planeta desprezivelmente,

Resolução Por Isabella B.

²A interação entre a sonda e Júpiter dura alguns dias, bastante pouco face à translação joviana de quase 12 anos. Assim, podemos considerar que, ao longo do processo de colisão, o referencial não estará acelerado pela gravidade do Sol.

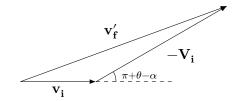
portanto, podemos considerar $\mathbf{p_f'} \approx \mathbf{p_i'}$ no referencial do planeta. Dessa forma



$$\mathbf{v_f'} = \mathbf{v_i'}$$
 $\mathbf{v_f'} = \mathbf{v_i} - \mathbf{V_i}$

Porém, como a sonda muda de direção no encontro, essas velocidades não são iguais em módulo, dessa forma

$$|\mathbf{v}_{\mathbf{f}}'| = v_i^2 + V_i^2 - 2v_i V_i \cos(\theta - \alpha) \tag{1.2}$$



(d) Júpiter percorre sua órbita a uma velocidade média de 13 km/s. Comente qual seria a situação mais favorável para a assistência gravitacional (e.g. em termos das velocidades dos corpos envolvidos) e diga, nesse caso hipotético, qual seria a variação da velocidade da New Horizons no referencial do Sol.

Resolução:

Como a velocidade final no referencial do Sol será

$$\begin{split} |\mathbf{v_f} - \mathbf{V_f}| &\approx |\mathbf{v_f} - \mathbf{V_i}| = v_i^2 + V_i^2 - 2v_i \, V_i \cos{(\theta - \alpha)} \\ v_f^2 + V_i^2 - 2v_f \, V_i \cos{(\beta - \theta)} &= v_i^2 + V_i^2 - 2v_i \, V_i \cos{(\theta - \alpha)} \\ \left(v_f - \left(V_i \cos{(\beta - \theta)} \right) \right)^2 &= v_i^2 - 2v_i \, V_i \cos{(\theta - \alpha)} + \left(V_i \cos{(\beta - \theta)} \right)^2 \\ v_f &= \sqrt{v_i^2 - 2v_i \, V_i \cos{(\theta - \alpha)} + \left(V_i \cos{(\beta - \theta)} \right)^2} + V_i \cos{(\beta - \theta)} \end{split}$$

Podemos ver que o valor máximo da raiz, em relação aos ângulos, se dá quando $\theta - \alpha = \pi$ e $\beta - \theta = 0$, o que corresponde à sonda entrar em contato com o planeta com velocidade contrária a sua, e sair no mesmo sentido e direção de viagem do planeta. Desse modo, sua variação de velocidade seria:

$$\begin{split} \Delta v &= v_{f\,max} - v_{i} \\ &= \sqrt{v_{i}^{2} + 2v_{i}\,V_{i} + V_{i}^{2}} + V_{i} - v_{i} \\ \Delta v &= v_{i} + V_{i} + V_{i} - v_{i} = 2V_{i} \\ &= 2 \cdot 13 = 26 \,\mathrm{km/s} \end{split} \tag{1.3}$$

(e) Sabendo que a New Horizons tem massa de 480 kg e tem velocidade de 4 km/s antes de utilizar a assistência gravitacional, estime quanto combustível seria necessário para que apenas a sonda³ ganhasse a mesma velocidade adquirida via assistência gravitacional no caso mais favorável. Considere que seria utilizado como combustível LOX/LH2 com 100% de eficiência (o que claramente não é possível).

Dados: A reação de combustão é dada por $2H_2 + O_2 \rightarrow 2H_2O + energia$, sendo que o calor específico de combustão da reação é de 141,8 MJ/kg.

Resolução:

Pelo item anterior, a sonda ganharia 26 km/s.

Por Isabella B. Resolução

³Como trata-se de uma estimativa, estamos desconsiderando que a New Horizons precisaria levar consigo a massa de combustível. Portanto a quantidade estimada de combustível é subestimada.

Considerando a variação de energia cinética da sonda onde ela ganharia essa velocidade, temos

$$\begin{split} \Delta K &= \frac{1}{2} m \left(v_f^2 - v_i^2 \right) \\ &= \frac{1}{2} 480 \left((26+4)^2 - 4^2 \right) \\ &= 240 (26+4-4) (26+4+4) = 212\,160\,\mathrm{MJ} \end{split}$$

portanto, precisaríamos de, aproximadamente

$$\frac{212\,160}{141,8}=1496,2\,\mathrm{kg}$$



de combustível.

Resolução Por Isabella B.