1.(a) Considerando $\vec{r}_{CM} = 0$, pois é a origem do nosso referencial, temos:

Nota: 9,2

$$\vec{0} = \frac{m_1\vec{r}_1 + m_2\vec{r}_2}{m_1+m_2}$$

Sendo $m_1 = m_2 = m$:

$$\vec{r}_1 = -\vec{r}_2 .$$

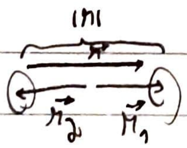
(b) Sendo a energia total a soma das energias cinéticas de cada partícula, mais a energia de interação, temos:

$$E = \frac{1}{2} m_1 \vec{v}_1^{\,2} + \frac{1}{2} m_2 \vec{v}_2^{\,2} + U(r)$$

Como $\vec{v} = \dot{\vec{r}}$, temos:

$$E = \frac{1}{2} m \left(\dot{\vec{r}}_1^{\,2} + \dot{\vec{r}}_2^{\,2}\right) + U(r)$$

(c) Pela figura 1:



$$\vec{r} = -\vec{r}_2 + \vec{r}_1 = 2\vec{r}_1$$

A energia cinética E_c será:

$$E_c = \frac{1}{2} m \dot{\vec{r}}_1^{\,2} + \frac{1}{2} m \dot{\vec{r}}_2^{\,2}$$

$$= \frac{1}{2} m \left(\dot{\vec{r}}_1^{\,2} + (-\dot{\vec{r}}_1)^2\right)$$

$$= \frac{1}{4} m \left(2\dot{\vec{r}}_1\right)^2$$

Como $\vec{r} = 2\vec{r}_1 \Rightarrow \dot{\vec{r}}_1 = \frac{\dot{\vec{r}}}{2}$,

$$E_c = \frac{1}{4} m \dot{\vec{r}}^{\,2}.$$

E a energia total será $E = \frac{1}{4} m (\dot{\vec{r}})^2 + U(|\vec{r}|)$ (1.1)

2. Para encontrar pontos extremos, devemos derivar (1) e igualar a zero, derivando, temos:

$$U'(r) = \frac{d}{dr}U(r) = A[(1-\exp(-a(r-b)))^2]'$$

$$= A2\left(-[a(-r+b)]'\exp(-a(r-b))\right)(1-\exp(-a(r-b)))$$

$$U'(r) = 2Aa\exp(-a(r-b))(1-\exp(-a(r-b))) \qquad (2.1)$$

Tomando $U'(r_e)=0$, temos:

$$2Aa\exp(-a(r_e-b))(1-\exp(-a(r_e-b)))=0 \Rightarrow$$

$$\underbrace{A=0}_{1}, \text{ ou } \underbrace{a=0}_{2}, \text{ ou } \underbrace{\exp(-a(r_e-b))=0}_{3} \text{ ou } \underbrace{1-\exp(-a(r_e-b))=0}_{4}.$$

Assumindo $A, a>0$, e sendo 3 impossível, tomemos 4:

$$\exp(-a(r_e-b)) = 1 \Rightarrow$$
$$-a(r_e-b) = 0 \Rightarrow$$
$$r_e = b$$

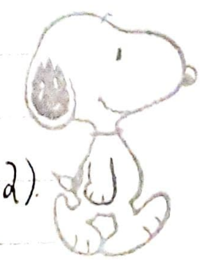
Podemos confirmar esse valor tomando $U''(r_e)$ e conferindo que é um valor positivo:

$$U''(r) = \frac{d}{dr}\left[\frac{d}{dr}U(r)\right] = [2Aa\,u(1-u)]', \quad u = \exp(-a(r-b))$$

$$= 2Aa[u'(1-u) + u(1-u)']$$
$$= 2Aa[-au(1-u) + u(+au)]$$
$$U''(r) = -2Aa^2\exp(-a(r-b))(1-2\exp(-a(r-b))) \qquad (2.2)$$

Tomando $U''(r_e=b)$,

$$U''(r_e=b) = -2Aa^2\cdot 1\cdot(1-2\cdot 1)$$
$$= 2Aa^2 > 0, \text{ QED.}$$



3. (a) Sendo a diferença da energia potencial o oposto do trabalho, temos:

$$\Delta V(r) = -W(r) \Rightarrow \Delta V(r) = -\int_a^b F(r)\,dr \Rightarrow F(r) = -\frac{dV}{dr}.$$

Por (2.1), temos

$$F(r) > 0 \Rightarrow -V'(r) > 0 \Rightarrow V'(r) < 0 \Rightarrow$$

$$2Aa\exp(-a(r-b))(1-\exp(-a(r-b))) < 0 \Rightarrow$$

Caso 1: $\exp(-a(r-b)) < 0$ e $1-\exp(-a(r-b)) > 0$:

Impossível!

Caso 2: $\exp(-a(r-b)) > 0$ e $1-\exp(-a(r-b)) < 0$:

Válido para todo $r \in \mathbb{R}$! ;

$$\exp(-a(r-b)) > 1$$
$$-a(r-b) > 0$$
$$\boxed{r < b}.$$

Fazendo $F(r) < 0$:

$$V'(r) > 0 \Rightarrow 2Aa\exp(-a(r-b))(1-\exp(-a(r-b))) > 0 \Rightarrow$$

Caso 1: $\exp(-a(r-b)) > 0$ e $1-\exp(-a(r-b)) > 0$:

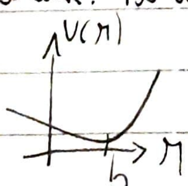
Válido para todo $r \in \mathbb{R}$;

$$\exp(-a(r-b)) < 1$$
$$-a(r-b) < 0$$
$$\boxed{r > b}$$

Caso 2: $\exp(-a(r-b)) < 0$ e $1-\exp(-a(r-b)) < 0$:

Impossível!

(b) Pelo resultado anterior, caso tenhamos $r<b$, $F(r)>0$, o que leva as massas a se afastarem, e $r>b \Rightarrow F(r)<0$, o que leva-as a se juntarem. Portanto, $V(b)$ é um ponto estável, e é um vale:



de tal forma que as massas tendem a permanecer com esse afastamento.

4.(a) Por (2), temos:

$$U(r) \approx U(r_e) + \frac{U'(r_e)}{1!}(r-r_e) + \frac{U''(r_e)}{2!}(r-r_e)^2$$

Substituindo (1), (2.1) e (2.2), e tendo $\exp(-a(r_e-b)) = u$, temos:

$$U(r) \approx A(1-u)^2 + 2Aau(1-u)(r-r_e) + (-2Aa^2u(1-2u))(r-r_e)^2$$

Sendo $u=1$ → (pois $r_e = b$), temos:

$$U(r) \approx A(\overset{0}{\cancel{1-1}})^2 + 2Aa\cdot 1(\overset{0}{\cancel{1-1}}) - 2a^2A\cdot 1(1-2\cdot 1)(r-r_e)^2$$

$$\approx 2Aa^2(r-r_e)^2$$

□

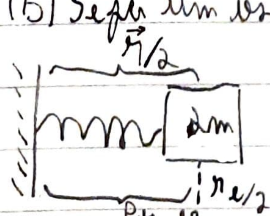
(b) É vantajoso utilizar essa expansão até o segundo termo, pois os outros não nulos, não permitiriam análise.

5.(a) Adotando a aproximação dada por (3), temos:

$$E = \frac{1}{4}m\dot{r}^2 + 2Aa^2(r-r_e)^2. \qquad (5.1)$$

(b) Seja um oscilador harmônico da forma:

$$E_h = \frac{1}{2}(2m)\left(\frac{\dot{r}}{2}\right)^2 + \frac{1}{2}k\left(\frac{|\vec{r}|}{2} - \frac{r_e}{2}\right)^2 \qquad (5.2)$$



Teremos, então:

Sabendo que o sistema que estamos considerando oscila nas proximidades de um ponto de equilíbrio, como o ilustrado, podemos modelá-lo como a um oscilador harmônico de energia E_h. Comparando (5.1) com (5.2), temos:

$$E = E_h \Rightarrow \frac{1}{4} m (\dot{\vec{r}})^2 + 2Aa^2 (r - r_e)^2 = \frac{1}{4} m \dot{\vec{r}}^2 + \frac{1}{2} \frac{k}{4} (r - r_e)^2 \Rightarrow$$

$$2Aa^2 (r - r_e)^2 = \frac{1}{8} k (r - r_e)^2 \Rightarrow k = 16Aa^2.$$

6. (a) Sendo o trabalho $w = \int_a^b F(r)\,dr$, e sabendo, por 3(a), que para $r > b \Rightarrow F(r) > 0$, o trabalho será negativo.

(b) Sendo o trabalho negativo, a energia potencial aumentará, e para manter E constante, a energia cinética deve diminuir.

(c) Podemos relacioná-las por:

$$\Delta U = -w_{r_e \to r} \Rightarrow$$

$$U_r - \cancel{U_e}^{0} = -\int_{r_e}^{r} F(r)\,dr \Rightarrow U(r) = -\int_{r_e}^{r} F(r)\,dr$$

$v \approx 0$, $E = \cancel{K} + U = U$

(d) Tendo a energia como, aproximadamente totalmente igual à potencial, temos:

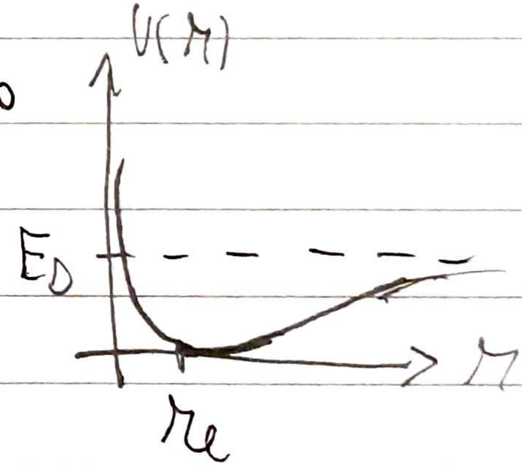
$E = U(r) \Rightarrow E_D = \lim_{r \to \infty} U(r)$. pois podemos considerá-los separados quando $r \to \infty$.

Por (1):

$$E_D = \lim_{r \to \infty} A(1 - \exp(-a(r-b))) = A.$$

7. (a)

$$r \to 0^+ \Rightarrow U(r) \to \infty$$
$$r \to \infty \Rightarrow U(r) \to E_D$$
$$U(r_e) = 0$$



(b) Os estados ligados estão abaixo da linha tracejada, e os estados não ligados, estão acima dela, para $r \to \infty$.