Resolução – Lista 6 (Física I – 4302111)

Isabella B. – 11810773

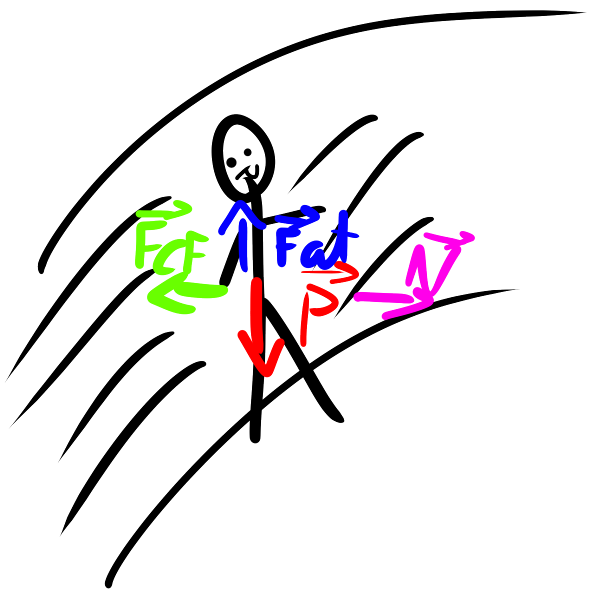
Questão 1

Em um parque de diversões um brinquedo conhecido como *Spinning Terror* consiste de um grande cilindro vertical que gira tão rápido que todo mundo que está dentro fica grudado na parece quando o piso do cilindro é removido.

1. Desenhe o diagrama de forças sobre um indivíduo de massa M que está grudado à parede do cilindro de raio R girando com velocidade angular ω.
2. Admitindo que o coeficiente de atrito é μ, determine qual o valor mínimo da velocidade angular ω que permite que o brinquedo seja seguro.
3. Estime quantas voltas por segundo corresponde a essa velocidade angular mínima.

Resolução:

(1)



(2)

Adotando o referencial acelerado, temos uma força fictícia (centrífuga) $\mathbf{F_{cf}}$ que pressiona o indivíduo na parede do cilindro. Além dessa, temos $\mathbf{N}$ que é a reação normal do cilindro no indivíduo, o peso $\mathbf{P}$ e a força de atrito para cima, que o mantém estático verticalmente.
Para que o indivíduo permaneça "grudado" na parede do cilindro, devemos ter o módulo do peso igualando o módulo da força de atrito para que este não caia, portanto

$$|\mathbf{P}| = |\mathbf{F_{at}}| \implies M\,g = \mu\,|\mathbf{N}|, \tag{1.1}$$

onde g é o módulo da aceleração da gravidade.
Como o indivíduo se move numa trajetória circular, sabemos que a normal tem a forma de uma força centrípeta, dessa forma, substituímos $|\mathbf{N}| = M\,\omega^2\,R$ em 1.1:

$$M\,g = \mu\,M\,\omega^2\,R \implies \omega = \sqrt{\frac{g}{\mu\,R}} \tag{1.2}$$

que é a velocidade angular mínima para que o indivíduo não caia.

(3) Estimando uma capacidade de 60 pessoas, cada qual tomando 0,7 m (largura de uma porta comum), temos

$$\frac{2\pi\,R}{0{,}7} = 60 \implies R \approx 6{,}68\,\mathrm{m}$$

Adotando $g = 9{,}81\,\mathrm{m/s^2}$, $\mu = 0{,}7$ e $\pi = 3{,}14$, temos

$$f = \frac{1}{T} = \frac{\omega}{2\pi} = \frac{\sqrt{9{,}81/(0{,}7\cdot 6{,}68)}}{2\cdot 3{,}14} \approx 0{,}23\,\mathrm{Hz}$$

Questão 2

Uma corda de densidade uniforme, massa total M e comprimento L presa em uma das extremidades roda com velocidade angular constante ω em um movimento horizontal segundo a Fig. 1. Desconsidere a força gravitacional.

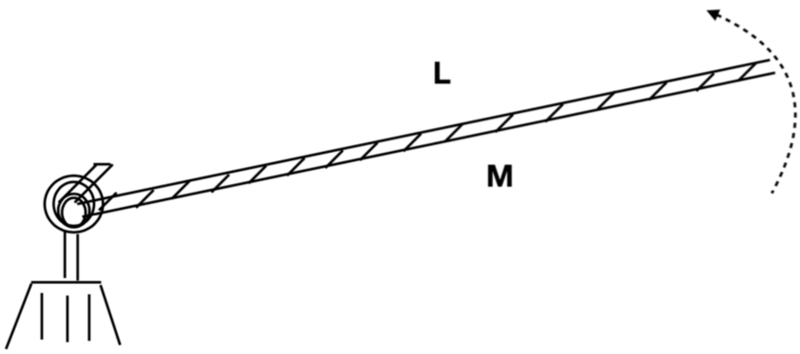


Figura 1: Corda girando com velocidade angular ω.

1. Considere uma porção da corda entre os pontos r e $r + \Delta r$. Qual a massa dessa porção?
2. Escreva a equação de movimento para a porção da corda do item 1.
3. Tome o limite de $\Delta r \to 0$ para encontrar uma equação diferencial.
4. Resolva a equação diferencial para encontrar $T(r)$. Lembre-se que uma das extremidades da corda está livre!

Resolução:

(1) Como a densidade da corda ρ é uniforme, $\rho = M/L = m/\Delta r$, onde m é uma porção de massa no trecho $r \to r + \Delta r$. Dessa forma, $m = M\,\Delta r/L$.

(2) Sendo a tensão da corda num ponto r dada por $T(r)$, pela segunda lei de Newton sabemos que

$$T(r + \Delta r) - T(r) = \Delta T = m\,a_{cp}, \tag{2.1}$$

onde a_{cp} é a aceleração centrípeta do trecho. Isso se dá pois a corda executa um movimento rotacional em toda a sua extensão.

(3) Tomando o limite de $\Delta r \to 0$, temos

$$\lim_{\Delta r \to 0} \Delta T = \mathrm{d}T = \mathrm{d}m\,a_{cp}$$

dessa forma, $\mathrm{d}m = M\ \mathrm{d}r/L$ e $a_{cp} = -\omega^2 r$ (veja a nota[1]). Substituindo, temos

$$\mathrm{d}T = -\frac{M}{L}\omega^2\,r\ \mathrm{d}r \tag{2.2}$$

(4) Resolvendo 2.2, temos:

$$\int_{T(0)}^{T(r)} \mathrm{d}T = \int_0^r -\frac{M}{L}\omega^2\, r'\ \mathrm{d}r'$$

$$T(r) - T(0) = -\frac{M}{L}\omega^2 \left(\frac{1}{2}r'^2\right)\Bigg|_0^r$$

$$T(r) = T(0) - \frac{M\,\omega^2\, r^2}{2L}$$

Sabendo que a extremidade da corda está livre, $T(L) = 0$, portanto:

$$T(L) = 0 \implies T(0) = \frac{M\,\omega^2\, L}{2}$$

Dessa forma, temos

$$T(r) = \frac{M\,\omega^2}{2L}\left(L^2 - r^2\right)$$

Questão 3

Uma mesa com atrito desprezível tem um furo no seu centro como na Fig. 2. Um bloco A sobre a mesa está conectado por um fio a um bloco B pendurado pelo fio que passa pelo furo do centro da mesa. O fio tem comprimento ℓ e massa desprezível. Inicialmente B está parado e A rodando desenvolvendo uma trajetória circular de raio constante r_0 e velocidade angular uniforme ω_0. B é solto em $t = 0$.

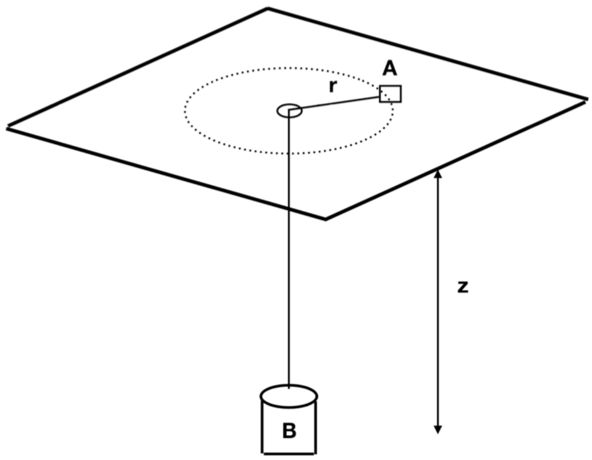


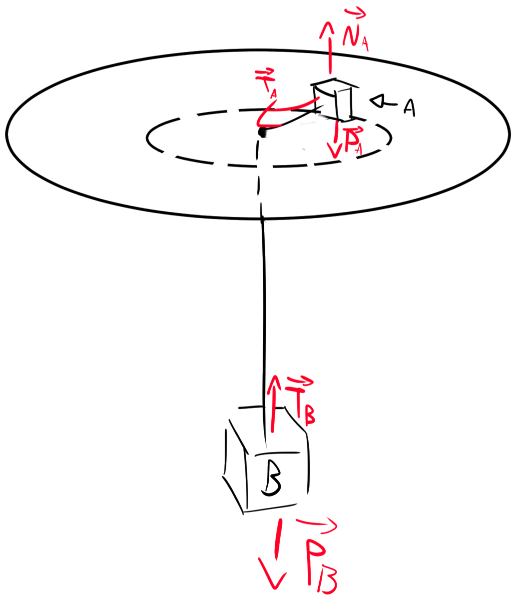
Figura 2: Mesa com um furo no centro.

1. Desenhe os diagramas de forças para os blocos A e B.
2. Escreva as equações de movimento para os blocos A e B.
3. Determine a aceleração do bloco B imediatamente após ser liberado em $t = 0$.
4. O bloco B pode subir depois de liberado? Em que condições?

[1]Repare que, no limite $\Delta r \to 0$, a diferença na aceleração em r e $r + \mathrm{d}r$ torna-se desprezível: sejam $a_{cp} = -\omega^2\,(r + \mathrm{d}r)$ e $a'_{cp} = -\omega^2\, r$, tomando o produto $\mathrm{d}m\, a_{cp} = -(M/L)\,\mathrm{d}r\,\omega^2\,(r + \mathrm{d}r) = -(M/L)\omega^2\left(r\ \mathrm{d}r + \cancelto{0}{\mathrm{d}r^2}\right) = -(M/L)\omega^2\, r\ \mathrm{d}r = \mathrm{d}m\, a'_{cp}$.
♦ (Kleppner, p. 96)

Resolução:

(1)



(2) Definindo a origem no furo da mesa, o sentido positivo como para baixo no eixo vertical, e o vetor $\widehat{\mathbf{r}}$ apontando para fora do bloco A, que gira.
Sejam m_i a massa dos blocos $i \in \{A, B\}$, $\mathbf{P_i}$ o peso deles, $\mathbf{a_i}$ sua aceleração, $\mathbf{T}$ a tensão do fio atuando em ambos e $\mathbf{N_A}$ a normal da mesa sobre A. Pela segunda lei de Newton, temos

$$\mathbf{P_B} + \mathbf{T_B} = m_B\,\mathbf{a_B} \tag{3.1}$$

$$\mathbf{P_A} + \mathbf{N_A} + \mathbf{T_A} = m_A\,\mathbf{a_A} \tag{3.2}$$

(3) Adotemos a notação do módulo de um vetor qualquer $|\mathbf{v}| = v$. Sendo $\mathbf{r}$ o vetor posição do bloco A e $\mathbf{z}$ o vetor posição do bloco B, temos:

$$\mathbf{a_A} = \ddot{\mathbf{r}} = \left(\ddot{r} - r\,\dot{\theta}\right)\widehat{\mathbf{r}} + \left(r\,\ddot{\theta} + 2\dot{r}\,\dot{\theta}\right)\widehat{\boldsymbol{\theta}}$$

$$\mathbf{a_B} = \ddot{\mathbf{z}}$$

Dessa forma, podemos escrever o módulo de 3.1 como

$$|\mathbf{P_B} + \mathbf{T_B}| = P_B - T = m_B\,\ddot{z}, \tag{3.3}$$

igualmente, o módulo de 3.2 pode ser escrito como

$$|\mathbf{T_A}| = -T = m_A\left(\ddot{r} - r\,\dot{\theta}^2\right), \tag{3.4}$$

$$|\mathbf{P_A} + \mathbf{N_A}| = 0 = m_A\left(r\,\ddot{\theta} + 2\dot{r}\,\dot{\theta}\right). \tag{3.5}$$

Nota: $T = |\mathbf{T_A}| = |\mathbf{T_B}|$.

Subtraindo 3.4 de 3.3, temos

$$P_B = m_B\,\ddot{z} - m_A\left(\ddot{r} - r\,\dot{\theta}^2\right)$$

e, como $r + z = \ell \implies \ddot{z} = -\ddot{r}$

$$P_B = m_B\,\ddot{z} + m_A\left(\ddot{z} + r\,\dot{\theta}^2\right)$$

isolando $\ddot{z}$ ficamos com

$$\ddot{z} = \frac{P_B - m_A\,r\,\dot{\theta}^2}{m_B + m_A}. \tag{3.6}$$

Sendo $P_B = m_B\,g$ (g é o módulo da aceleração da gravidade) e $r = r_0, \dot{\theta} = \omega_0$ no momento inicial, temos

$$\ddot{z} = \frac{m_B\,g - m_A\,r_0\,\omega_0^2}{m_B + m_A}$$

(4) Caso $\ddot{z} < 0$, o bloco B subirá, dessa forma, pela equação 3.6, temos

$$\ddot{z} < 0 \implies \underbrace{m_A\,r\,\dot{\theta}^2}_{=F_{cp}} > P_B$$

onde F_{cp} é a força centrípeta.

Questão 4

O pêndulo cônico é um sistema no qual um pêndulo é posto em movimento na direção tangente à uma circunferência, de acordo com a Fig. 3. Supondo que o movimento seja circular uniforme com velocidade v_0, determine:

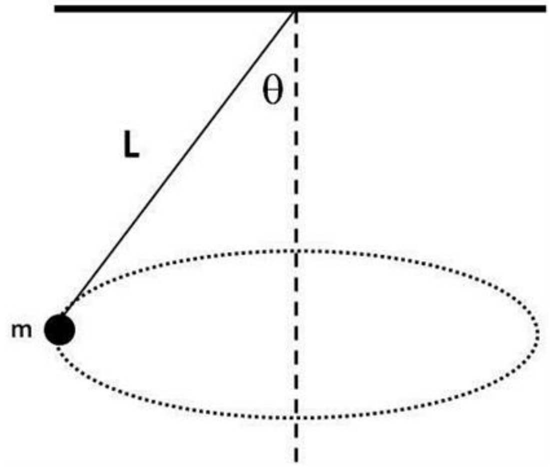


Figura 3: Pêndulo cônico.

(a) o ângulo θ;

Resolução:

Sendo as forças no sistema o peso $\mathbf{P}$ da massa m e $\mathbf{T}$ a tensão na corda, pela segunda lei de Newton, temos:

$$\mathbf{P} + \mathbf{T} = m\,\mathbf{a} \tag{4.1}$$

onde $\mathbf{a}$ é a aceleração da massa.

Adotemos a notação $|\mathbf{v}| = v$, e o sentido positivo como para cima na vertical, e para o centro na horizontal ($\widehat{\mathbf{r}}$).

Dessa forma, tomando o módulo de 4.1, temos

$$|\mathbf{P} + \mathbf{T}| = -P + T\cos\theta = 0 \tag{4.2}$$

$$T\sin\theta = m\,a_{cp} \tag{4.3}$$

onde a_{cp} é a aceleração centrípeta.

Sendo $T = P/\cos\theta$ (de 4.2), e sabendo que o raio do movimento circular é $r = L\sin\theta$, de 4.3 temos

$$\frac{P}{\cos\theta}\sin\theta = m\,\omega^2\,L\sin\theta$$

$$\cos\theta = \frac{\omega^2\,L}{g}$$

$$\theta = \arccos\left(\frac{\omega^2\,L}{g}\right)$$

(b) quanto vale o trabalho feito no sistema? Você espera que a energia cinética seja conservada na ausência de atrito com o ar?

Resolução:

Supondo a ausência de forças dissipativas, a energia é conservada no sistema. E como não há mudança de energia cinética ou potencial não há trabalho realizado no sistema.

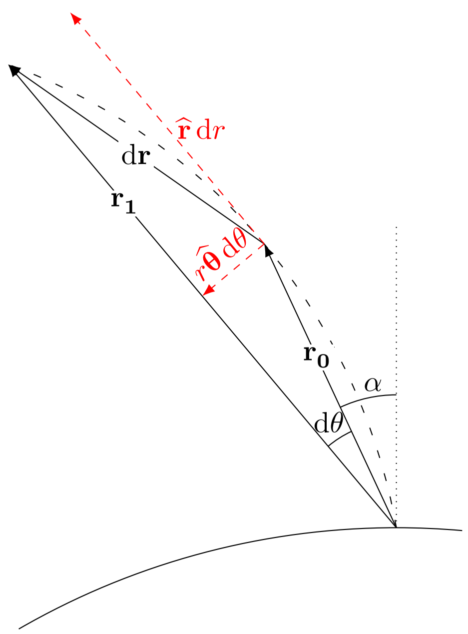
Questão 5

Considere um foguete na superfície da Terra. O foguete está tentando alcançar a *velocidade de escape*, ou seja, a velocidade inicial mínima que permite chegar com velocidade nula a uma distância infinita da Terra. Calcule a velocidade de escape no caso em que a velocidade inicial do foguete faça um ângulo α com a linha vertical.

Resolução:

Para encontrar a velocidade de escape, denotada por v_{esc}, podemos utilizar o teorema trabalho-energia, considerando o trabalho realizado pela força gravitacional $\mathbf{F_g}$, que é dado pela expressão

$$W_{\mathbf{F_g}} = \int_{r_0}^{r} \mathbf{F_g}(r) \cdot \mathrm{d}\mathbf{r}. \tag{5.1}$$



Sendo a força gravitacional dada por

$$\mathbf{F_g} = -G\frac{M_T\, m}{r^2}\widehat{\mathbf{r}} \tag{5.2}$$

onde G é a constante gravitacional, M_T é a massa do planeta Terra e r é a distância do corpo a partir do centro da Terra.
Tomando o diferencial $\mathrm{d}\mathbf{r} = \widehat{\mathbf{r}}\,\mathrm{d}r + r\widehat{\boldsymbol{\theta}}\,\mathrm{d}\theta$ (que podemos derivar pelo rascunho da situação, ao lado), podemos tomar a integral do trabalho:

$$W_{\mathbf{F_g}} = \int_{r_0}^{r} \mathbf{F_g}(r) \cdot \mathrm{d}\mathbf{r} = \int_{r_0}^{r} -G\frac{M_T\, m}{r^2}\widehat{\mathbf{r}} \cdot \left(\widehat{\mathbf{r}}\,\mathrm{d}r + r\widehat{\boldsymbol{\theta}}\,\mathrm{d}\theta\right)$$

como $\widehat{\boldsymbol{\theta}}$ é perpendicular à $\widehat{\mathbf{r}}$, somente a componente $\widehat{\mathbf{r}}$ permanece após a realização do produto escalar,

$$W_{\mathbf{F_g}} = -G\,M_T\,m \int_{r_0}^{r} \frac{1}{r^2}\,\mathrm{d}r$$

consideremos o movimento saindo da superfície da Terra, de raio R_T, e indo até um ponto r,

$$= -G\,M_T\,m \int_{R_T}^{r} r^{-2}\,\mathrm{d}r$$

$$= -G\,M_T\,m\,(-r^{-1})\Big|_{R_T}^{r}$$

$$W_{\mathbf{F_g}} = -G\,M_T\,m\left(\frac{1}{R_T} - \frac{1}{r}\right)$$

que deve ser igual à variação de energia cinética do sistema.

Adotando a velocidade final $v = 0$, e o ponto final $r \to \infty$, teremos, pelo teorema trabalho-energia:

$$\lim_{r\to\infty} -G\,M_T\,m\left(\frac{1}{R_T} - \frac{1}{r}\right) = \cancelto{0}{\frac{1}{2}m\,v^2} - \frac{1}{2}m\,v_{esc}^2$$

$$2G\,M_T \cdot \frac{1}{R_T} = v_{esc}^2$$

$$v_{esc} = \sqrt{\frac{2G\,M_T}{R_T}}$$

como $g = F_g/m = G\,M_T/R_T^2$, temos

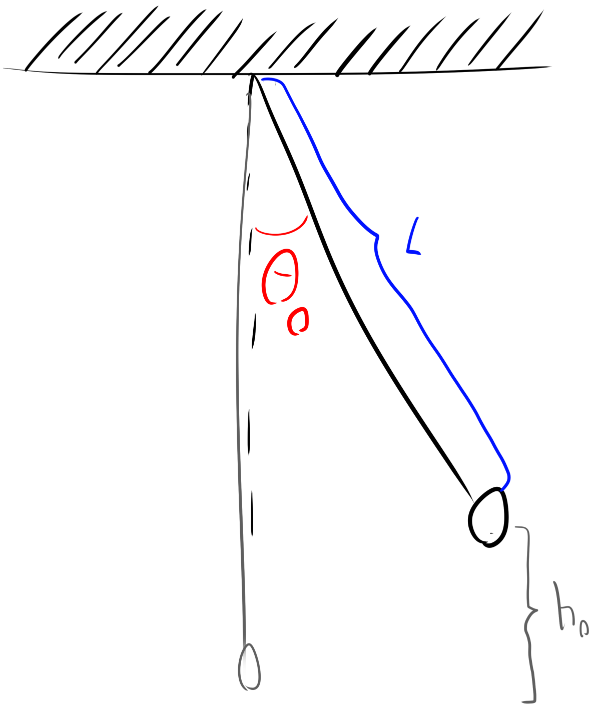
$$v_{esc} = \sqrt{2g\,R_T}$$

Questão 6

Considere um pêndulo simples, de comprimento L e massa M. Inicialmente, o pêndulo se encontra a um ângulo θ_0 em relação à vertical. O ângulo θ_0 *não é pequeno.*

(a) Calcule a velocidade do pêndulo quando o ângulo com a vertical é $\theta = 0$ na ausência de atrito;

Resolução:



Considerando o sistema livre de forças dissipativas, sabemos que há conservação de energia, e, portanto

$$K_0 + U_0 = K + U \implies$$
$$\frac{1}{2} M\, v_0^2 + M\, g\, h_0 = \frac{1}{2} M\, v^2 + M\, g\, h \qquad (6.1)$$

onde o índice 0 indica que a quantidade se refere a um momento inicial.
Adotando o referencial $U(\theta = 0) = 0$ (que é o ponto mais baixo da trajetória), e considerando que o pêndulo parte do repouso no ângulo θ_0, de 6.1, temos

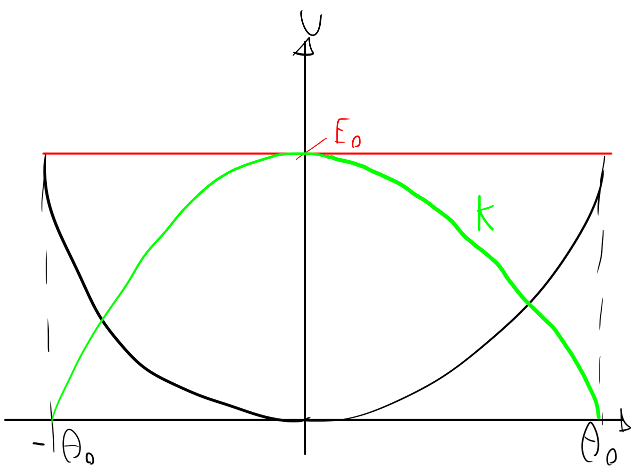
$$M\, g\, h_0 = \frac{1}{2} M\, v^2$$

sabemos que $h_0 = L - L\cos\theta_0$, portanto

$$v = \sqrt{2g\, L\, (1 - \cos\theta_0)}$$

(b) Esboce o *diagrama da energia* do sistema, ou seja, o gráfico da energia do pêndulo em função do ângulo θ (sempre supondo ausência de atrito).

Resolução:



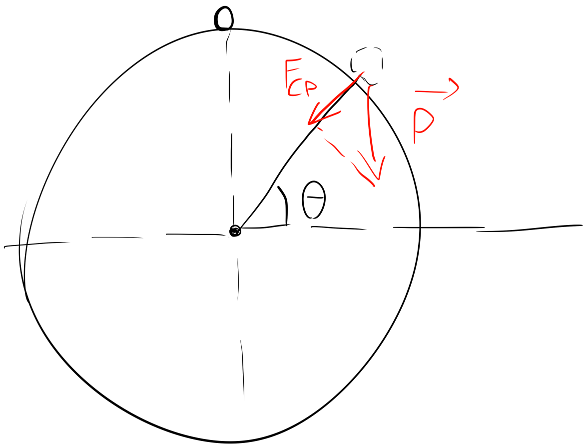
Questão 7

Considere um corpo puntiforme de massa m inicialmente no topo de uma esfera de raio R sem atrito. O corpo começa a deslizar na superfície da esfera até perder contato com a mesma. Calcule a altura do corpo no momento em que perde contato com a esfera.

Resolução:

Aproximando a posição inicial do corpo como exatamente no topo da esfera (o que a faria ficar lá para sempre), e sabendo que o corpo executa uma trajetória contida num plano, definimos sua posição inicial como origem, no eixo horizontal a direita como sentido positivo, e, no eixo vertical, positivo para baixo.

Definindo um ângulo θ do corpo com uma reta horizontal que passa pelo centro da esfera, denotando valores iniciais pelo índice 0, temos, por conservação de energia[2]



$$K_0 + U_0 = K + U \implies \tag{7.1}$$
$$m\,g\,2R = \frac{1}{2} m\,v^2 + m\,g\,h \tag{7.2}$$
$$v^2 = 2g\,(2R - h) \tag{7.3}$$

Sabemos que, enquanto o corpo permanece grudado à superfície da esfera, temos um movimento circular, o que exige uma força centrípeta $\mathbf{F_{cp}}$. No caso, tal força centrípeta corresponde à uma das componentes do peso $\mathbf{P}$, que aponta para o centro da esfera. Dessa forma

$$P \sin\theta = F_{cp} \implies$$
$$m\,g \sin\theta = m\,\frac{v_E^2}{R}$$
$$v_G^2 = R\,g \sin\theta \tag{7.4}$$

onde v_G é a velocidade enquanto o corpo está grudado à esfera.

Quando o corpo se desgruda da esfera, temos $v > v_G$, portanto, no momento em que perdem contato,

$$v = v_G \implies v^2 = v_D^2$$

já que ambas quantidades são positivas. substituindo 7.3 e 7.4, temos

$$2g\,(2R - h) = R\,g \sin\theta$$

sendo $h = R + R\sin\theta \implies \sin\theta = (h - R)/R$, ficamos com

$$2\,(2R - h) = R\left(\frac{h - R}{R}\right)$$
$$h = \frac{5}{3} R$$

[2]Não há forças dissipativas no sistema.

Questão 8

Um bloco de massa m desliza sobre uma mesa horizontal, com coeficientes de atrito cinético, μ_c, e estático, μ_e, respectivamente, colide com uma mola de massa desprezível e de constante de mola k, inicialmente na posição relaxada. O bloco atinge a mola com velocidade $\mathbf{v_0}$. (a) Qual a deformação máxima da mola? (b) Que acontece depois que a mola atinge sua deformação máxima? (c) Que fração da energia inicial é dissipada pelo atrito nesse processo? Discuta as situações possíveis.

Resolução:

(a) Supondo que a colisão da massa com o bloco se dá em uma dimensão, vamos definir um sistema de coordenadas com origem na ponta da mola, de tal forma que o movimento anterior do bloco se dava na região negativa do eixo, e após, no sentido positivo[3].

Como não há conservação de energia no sistema, temos que a energia inicial E_0 será igual à energia final E, acrescida do trabalho realizado pela força dissipativa $W_{F_{at}\,0\to r}$, no caso, a força de atrito F_{at}, que atua da origem até o ponto de deformação máxima da mola, r. Equacionando, temos

$$E_0 = E + W_{F_{at}\,0\to r} \implies K_0 = K + U_s(r) + \int_0^r F_{at}, \tag{8.1}$$

onde K, K_0 são as energias cinéticas do bloco nos momentos final e inicial, respectivamente, e $U_s(r)$ é a energia potencial da mola na posição r.

Dessa forma, temos, por 8.1

$$\frac{1}{2} m\, v_0^2 = \frac{1}{2} m\, v^2 + \frac{1}{2} k\, r^2 + \int_0^r \mu_c\, N\, \mathrm{d}r'$$

onde $v = 0$ é a velocidade final do bloco e N é a normal do bloco com o plano

$$r^2 + 2\frac{\mu_c\, m\, g}{k} r - \frac{m}{k}\, v_0^2 = 0.$$

De tal forma que

$$r = \frac{-2\mu_c\, m\, g/k \pm \sqrt{\left(2\mu_c\, m\, g/k\right)^2 + 4m\, v_0^2/k}}{2} \overset{!}{>} 0$$

$$r = \frac{-\mu_c\, m\, g + \sqrt{\left(\mu_c\, m\, g\right)^2 + m\, k\, v_0^2}}{k}$$

(b) Após atingir sua deformação máxima, a mola só voltará a se mover caso sua força seja superior à força máxima de atrito estático $F_{at\,e}$, proporcionada pela mesa. Sendo a força elástica na ocasião $F_{el}(r) = -\frac{\mathrm{d}U_s}{\mathrm{d}x}(r)$, temos a condição:

$$F_{at\,e} \leqslant F_{el}(r) = -\frac{\mathrm{d}U_s}{\mathrm{d}x}\,(r)$$

$$\mu_e\, m\, g \leqslant -\left(k\, x\right)\Big|_{x=r} = -k\left(\frac{-\mu_c\, m\, g + \sqrt{\left(\mu_c\, m\, g\right)^2 + m\, k\, v_0^2}}{k}\right)$$

$$\mu_e \leqslant \mu_c\left(1 - \sqrt{1 + k\, v_0^2/(\mu_c\, m\, g^2)}\right)$$

E, como $\mu_c < \mu_e$, e $1 - \sqrt{1 + k\, v_0^2/(\mu_c\, m\, g^2)} < 1$, já que o termo na raiz é positivo, a mola permanece estática, pois a condição nunca será satisfeita na presença de atrito.

Questão 9

Um oscilador harmônico tridimensional isotrópico é definido como uma partícula que se move sob a ação de forças associadas à energia potencial

$$U(x, y, z) = \frac{1}{2}k(x^2 + y^2 + z^2),$$

onde k é uma constante positiva. Mostre que a força correspondente é uma força central e calcule-a. De que tipo é a força obtida?

Resolução:

Questão 10

Mostre que o trabalho necessário para remover um objeto da atração gravitacional da Terra é o mesmo que seria necessário para elevá-lo ao topo de uma montanha de altura igual ao raio da Terra, caso a força gravitacional permanecesse constante e igual ao seu valor na superfície da Terra, durante a escalada da montanha.

Resolução:

[3] Note que, como o movimento se dá em uma dimensão, utilizaremos somente o módulo das grandezas discutidas ($|\mathbf{v_0}| = v_0$).