Resolução – Lista 1 (Física I – 4302111)

Isabella B. – 11810773

Questão 1

Suponha que você queira alinhar moedas de 10 centavos, uma do lado da outra, em linha reta até chegar ao comprimento de 1 km. Quantas moedas são necessárias? Qual a precisão da sua estimativa?

Resolução:

Estimando um diâmetro de 2 cm para a moeda, temos $\approx \dfrac{1\,\text{km}}{2\,\text{cm}} = \dfrac{1000}{2 \cdot 10^{-2}} = 50\,000$ moedas.

Questão 2

Estime:

(a) a massa total de água nos oceanos da Terra;

Resolução:

Estimando que o volume total de água nos oceanos é proporcional à área que cobrem na superfície terrestre ($\alpha \approx 2/3$), e que a profundidade média dos oceanos é metade da profundidade da crosta da Terra ($h/2 \approx 3{,}5\,\text{km}$), com uma densidade similar à da água destilada ($\rho = 1000\,\text{kg/m}^3$). Aproximando a Terra por uma esfera de raio $R = 6300\,\text{km}$ e considerando $\pi = 3$, temos

$$4\pi R^2\ \alpha\ \frac{h}{2}\ \rho = 4 \cdot \cancel{3} \cdot \left(6300 \cdot 10^3\right)^2 \cdot \frac{2}{\cancel{3}} \cdot 3{,}5 \cdot 10^3 \cdot 1000 \approx 1{,}11 \cdot 10^{21}\,\text{kg}$$

(b) o número médio de gotas de chuva que caem sobre a área de $1\,\text{km}^2$ para a precipitação de 1 cm de chuva;

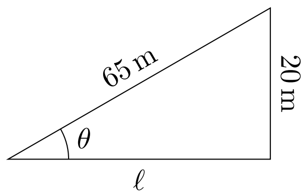
Resolução:

Estimando que uma gota tem 0,05 mL, o volume total da área analisadas é de $1 \cdot 10^6\,\text{m}^2 \times 10\,\text{L/m}^2 = 1 \cdot 10^7\,\text{L}$. Portanto, temos, aproximadamente, $\dfrac{1 \cdot 10^7}{0{,}05 \cdot 10^{-3}} = 2 \cdot 10^{11}$ gotas.

(c) o número de grãos de areia da praia de Copacabana (ou de outra que você conhecer melhor);

Resolução:

Copacabana tem 4 km de orla (aproximadamente). Estimando 65 m de comprimento médio da praia e 20 m de profundidade média da areia, temos (por pitágoras) $\ell = \sqrt{65^2 - 20^2} \approx 62\,\text{m}$.



Achando o volume de areia, temos $\approx \dfrac{62 \cdot 20}{2} \cdot 4000 = 2\,480\,000\,\text{m}^3$. Supondo que em cada centímetro cúbico de areia temos $1{,}5 \cdot 10^4$ grãos, há

$$\frac{1{,}5 \cdot 10^4 \cdot 2{,}5 \cdot 10^6}{1 \cdot 10^{-9}} \approx 3{,}75 \cdot 10^{19} \text{ grãos de areia}$$

(d) o número de átomos contidos num grão de areia.

Resolução:

Estimando que um átomo de silício tenha $D = 1 \cdot 10^{-10}$ m de diâmetro, se há 100 grãos de areia em $1\,\text{mm}^3$ de qualquer porção na praia, há $\sqrt[3]{100} \approx 4{,}6$ grãos de areia por milímetro (em fileira). Sendo assim, cada grão tem $d = 0{,}22$ mm de diâmetro. Aproximando um grão de areia e um átomo por esferas perfeitas, teremos

$$\frac{V_{\text{Areia}}}{V_{\text{Silício}}} = \frac{\cancel{\frac{4}{3}}\pi\left(\frac{D}{2}\right)^3}{\cancel{\frac{4}{3}}\pi\left(\frac{d}{2}\right)^3} = \frac{\frac{D^3}{\cancel{2^3}}}{\frac{d^3}{\cancel{2^3}}}$$
$$= \left(\frac{D}{d}\right)^3 = \left(\frac{0{,}22 \cdot 10^{-3}}{1 \cdot 10^{-10}}\right)^3 \approx 1{,}06 \cdot 10^{19}$$

átomos de silício por grão de areia.

Questão 3

A sonda cosmológica WMAP (*Wilkinson Microwave Anisotropy Probe*) determinou em 2014 que a densidade média de átomos no Universo é equivalente a 1 próton por $4\,\text{km}^3$.

(a) Estime a massa total contida dentro do raio do Universo;

Resolução:

Estimando o raio do Universo observável em $46 \cdot 10^9$ ly, sendo que a luz viaja no vácuo há $\approx 3 \cdot 10^8$ m/s. Como um ano tem $\approx \pi \cdot 10^7$ s, temos $3 \cdot 10^8 \cdot \pi \cdot 10^7 \cdot 46 \cdot 10^9 \approx 4{,}3 \cdot 10^{26}$ m de raio o Universo (em metros). Supondo um Universo esférico e homogêneo, temos

$$V = \frac{4}{3}\pi 4{,}3 \cdot 10^{26} \approx 3{,}33 \cdot 10^{80}\,\text{m}^3 \Rightarrow m = V \cdot d \cdot m_p = 3{,}33 \cdot 10^{80} \cdot 0{,}25 \cdot 1{,}67 \cdot 10^{-27} \approx 1{,}39 \cdot 10^{53}\,\text{kg}$$

onde $m_p = 1{,}67 \cdot 10^{-27}$ kg é a massa do próton

(b) Estime o número total de núcleons (nêutrons e prótons) contido nesse volume;

Resolução:

Estimando quantidades iguais de nêutrons e prótons, os quais possuem praticamente a mesma massa ($m_p = 1{,}67 \cdot 10^{-27}$ kg), temos, aproximadamente, $\frac{2{,}2 \cdot 10^{54}}{2 \cdot 1{,}67 \cdot 10^{-27}} \approx 6{,}6 \cdot 10^{80}$ nucleôns.

(c) Compare a densidade média de matéria no Universo com a densidade típica do interior do núcleo atômico.

Resolução:

Sendo a densidade média do núcleo atômico estimada em $2{,}4 \cdot 10^{17}\,\text{kg/m}^3$, ela é cerca de $5{,}7 \cdot 10^{44}$ vezes maior que a densidade média do Universo.

Questão 4

Considere uma estrela que sofre algum tipo de oscilação. Como a frequência ω da oscilação depende das propriedades da estrela? Como sempre o primeiro passo é identificar as variáveis físicas relevantes. Discuta porque aqui as variáveis relevantes são a densidade de massa ρ, o raio da estrela R e a constante G da lei da gravitação universal de Newton. Considere que a densidade de massa possa ser considerada aproximadamente constante. Use análise dimensional para encontrar a dependência de ω com as propriedades da estrela.

Resolução:

Fazendo $[\rho]^\alpha [R]^\beta [\mathrm{G}]^\gamma = [\omega]$, onde

$$[\rho] = \frac{M}{L^3}$$
$$[R] = L$$
$$[\mathrm{G}] = \frac{L^3}{MT^2}$$
$$[\omega] = T^{-1}$$

portanto:

$$\left(\frac{M}{L^3}\right)^\alpha (L)^\beta \left(\frac{L^3}{MT^2}\right)^\gamma = T^{-1}$$
$$M^{\alpha-\gamma} \cdot L^{-3\alpha+\beta+3\gamma} \cdot T^{-2\gamma} = T^{-1}$$

Daí, temos que

$$\begin{cases} \alpha - \gamma = 0 \\ \beta + 3(\gamma - \alpha) = 0 \\ -2\gamma = -1 \end{cases}$$

e, portanto

$$\begin{cases} \gamma = 1/2 \\ \alpha - 1/2 = 0 \implies \alpha = 1/2 \\ \beta + 3(1/2 - 1/2) = 0 \implies \beta = 0 \end{cases}$$

e, então, temos a expressão final $k\rho^{1/2}\,\mathrm{G}^{1/2} = \omega \implies \omega = k\sqrt{\rho\,\mathrm{G}}$ onde $k \in \mathbb{R}$ é uma constante.

Questão 5

Considere ondas na superfície da água, que são chamada de ondas de gravidade. Como a frequência ω dessas ondas depende do chamado número de onda k? Discuta porque as quantidades relevantes aqui são a densidade da água ρ, a aceleração da gravidade g e k. Use o fato que $[k] = L^{-1}$ e análise dimensional para encontrar $\omega(k)$.

Resolução:

Fazendo $[k]^\alpha [\rho]^\beta [g]^\gamma = [\omega]$, onde

$$[k] = L^{-1}$$
$$[\rho] = \frac{M}{L^3}$$
$$[g] = \frac{L}{T^2}$$
$$[\omega] = T^{-1}$$

portanto:

$$\left(L^{-1}\right)^\alpha \left(\frac{M}{L^3}\right)^\beta \left(\frac{L}{T^2}\right)^\gamma = T^{-1}$$
$$L^{-\alpha-3\beta+\gamma} \cdot M^\beta \cdot T^{-2\gamma} = T^{-1}$$

Daí, temos que

$$\begin{cases} -\alpha - 3\beta + \gamma = 0 \\ \beta = 0 \\ -2\gamma = -1 \end{cases}$$

e, portanto

$$\begin{cases} \gamma = 1/2 \\ \beta = 0 \\ -\alpha - 3 \cdot 0 + 1/2 = 0 \implies \alpha = 1/2 \end{cases}$$

e, então, temos a expressão final $c\,k^{1/2}\,g^{1/2} = \omega \implies \omega = c\sqrt{k\,g}$ onde $c \in \mathbb{R}$ é uma constante.

Questão 6

Em explosões nucleares há essencialmente uma liberação instantânea de energia E em uma pequena região do espaço. Isso produz uma onda de choque esférica, com a pressão dentro da onda de choque milhares de vezes maior que a pressão inicial do ar. Como o raio R da onda de choque cresce com o tempo t? Discuta por que as quantidades relevantes são E, t e a densidade do ar ρ. Use análise dimensional para obter $R(t)$. Em 1950 as fotografias do projeto Trinity foram divulgadas pelo governo americano e publicadas na revista *Life*. Usando essas fotografias (tiradas em tempos sucessivos após a explosão nuclear) e a mesma análise dimensional feita aqui, o físico britânico G. I. Taylor (Proc. Roy. Soc. London A 200, 235-247, 1950) estimou a energia liberada pela explosão em 22 quilotoneladas de TNT. Essa informação na época era considerada confidencial!

Resolução:

Fazendo $[E]^{\alpha}\,[t]^{\beta}\,[\rho]^{\gamma} = [R]$, onde

$$\begin{aligned} [E] &= \frac{ML^2}{T^2} \\ [t] &= T \\ [\rho] &= \frac{M}{L^3} \\ [R] &= L \end{aligned}$$

portanto:

$$\begin{aligned} \left(\frac{ML^2}{T^2}\right)^{\alpha} (T)^{\beta} \left(\frac{M}{L^3}\right)^{\gamma} &= L \\ M^{\alpha+\gamma} \cdot L^{2\alpha-3\gamma} \cdot T^{-2\alpha+\beta} &= L \end{aligned}$$

Daí, temos que

$$\begin{cases} \alpha + \gamma = 0 \\ 2\alpha - 3\gamma = 1 \\ -2\alpha + \beta = 0 \end{cases}$$

e, portanto

$$\begin{cases} \alpha = -\gamma \\ 2(-\gamma) - 3\gamma = 1 \implies \gamma = -1/5 \implies \alpha = 1/5 \\ \beta = 2 \cdot (1/5) = 2/5 \end{cases}$$

e, então, temos a expressão final $k\,E^{1/5}\,t^{2/5}\,\rho^{-1/5} = R(t) \implies R(t) = k\sqrt[5]{\frac{E\,t^2}{\rho}}$ onde $k \in \mathbb{R}$ é uma constante.

Questão 7

Dados os vetores: $\mathbf{A} = 2\hat{\imath} - 3\hat{\jmath} + 7\hat{\mathbf{k}}$ e $\mathbf{B} = 5\hat{\imath} + \hat{\jmath} + 2\hat{\mathbf{k}}$, encontre:

(a) $\mathbf{A} + \mathbf{B}$

Resolução:

$$\begin{aligned} \mathbf{A} + \mathbf{B} &= (2\hat{\imath} + 5\hat{\imath}) + (-3\hat{\jmath} + \hat{\jmath}) + \left(7\hat{\mathbf{k}} + 2\hat{\mathbf{k}}\right) \\ &= \hat{\imath}\,(2+5) + \hat{\jmath}\,(-3+1) + \hat{\mathbf{k}}\,(7+2) \\ &= 7\hat{\imath} - 2\hat{\jmath} + 9\hat{\mathbf{k}} \end{aligned}$$

(b) $\mathbf{A} - \mathbf{B}$

Resolução:

$$\begin{aligned}\mathbf{A} - \mathbf{B} &= (2\hat{\imath} - 5\hat{\imath}) + (-3\hat{\jmath} - \hat{\jmath}) + \left(7\hat{\mathbf{k}} - 2\hat{\mathbf{k}}\right) \\ &= \hat{\imath}\,(2-5) + \hat{\jmath}\,(-3-1) + \hat{\mathbf{k}}\,(7-2) \\ &= -3\hat{\imath} - 4\hat{\jmath} + 5\hat{\mathbf{k}}\end{aligned}$$

(c) $\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}$

Resolução:

$$\begin{aligned}\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} &= \langle (2,-3,7),(5,1,2) \rangle \\ &= 2 \cdot 5 + (-3) \cdot 1 + 7 \cdot 2 \\ &= 10 - 3 + 14 = 21\end{aligned}$$

(d) o valor de $|\mathbf{A}| \equiv A \equiv \sqrt{\mathbf{A} \cdot \mathbf{A}} = \sqrt{\mathbf{A}^2}$ e de $|\mathbf{B}| \equiv B \equiv \sqrt{\mathbf{B} \cdot \mathbf{B}} = \sqrt{\mathbf{B}^2}$

Resolução:

$$\langle \mathbf{A}, \mathbf{A} \rangle = \langle (2,-3,7),(2,-3,7) \rangle = 2^2 + (-3)^2 + 7^2 = 4 + 9 + 49 = 62 \implies \sqrt{\langle \mathbf{A}, \mathbf{A} \rangle} = \sqrt{62}$$
$$\langle \mathbf{B}, \mathbf{B} \rangle = \langle (5,1,2),(5,1,2) \rangle = 5^2 + 1^2 + 2^2 = 25 + 1 + 4 = 30 \implies \sqrt{\langle \mathbf{B}, \mathbf{B} \rangle} = \sqrt{30}$$

(e) o cosseno do ângulo entre **A** e **B**

Resolução:

Sendo $|\mathbf{A}| = \sqrt{62}$ e $|\mathbf{B}| = \sqrt{30}$, $\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = |\mathbf{A}||\mathbf{B}| \cos\theta = \langle (2,-3,7),(5,1,2) \rangle = 21$, onde θ é o ângulo entre os vetores. Resolvendo para θ, temos

$$21 = \sqrt{62}\,\sqrt{30} \cos\theta \implies \theta = \arccos\left(\frac{21}{2\sqrt{31 \cdot 5 \cdot 3}}\right)$$

(f) $\mathbf{A} \times \mathbf{B}$

Resolução:

$$\begin{aligned}\mathbf{A} \times \mathbf{B} &= \begin{vmatrix} \hat{\imath} & \hat{\jmath} & \hat{\mathbf{k}} \\ 2 & -3 & 7 \\ 5 & 1 & 2 \end{vmatrix} = \hat{\imath} \begin{vmatrix} -3 & 7 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} - \hat{\jmath} \begin{vmatrix} 2 & 7 \\ 5 & 2 \end{vmatrix} + \hat{\mathbf{k}} \begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 5 & 1 \end{vmatrix} \\ &= \hat{\imath}\,(-6-7) - \hat{\jmath}\,(4-35) + \hat{\mathbf{k}}\,(2+15) \\ &= (-13, 31, 17)\end{aligned}$$

Questão 8

Mostre

(a) que se $|\mathbf{C}-\mathbf{D}| = |\mathbf{C}+\mathbf{D}|$, então $\mathbf{C}$ é um vetor perpendicular a $\mathbf{D}$;

Resolução:

Fazendo $\sqrt{(\mathbf{C}-\mathbf{D})(\mathbf{C}-\mathbf{D})} = \sqrt{(\mathbf{C}+\mathbf{D})(\mathbf{C}-\mathbf{D})}$ temos

$$\begin{aligned}
\cancel{\mathbf{C}\cdot\mathbf{C}} - 2\mathbf{C}\cdot\mathbf{D} + \cancel{\mathbf{D}\cdot\mathbf{D}} &= \cancel{\mathbf{C}\cdot\mathbf{C}} + 2\mathbf{C}\cdot\mathbf{D} + \cancel{\mathbf{D}\cdot\mathbf{D}} \Leftrightarrow \\
-\cancel{2}\mathbf{C}\cdot\mathbf{D} &= \cancel{2}\mathbf{C}\cdot\mathbf{D} \Leftrightarrow \\
-\cancel{C\,D}\cos\theta &= \cancel{C\,D}\cos\theta \Leftrightarrow \\
-\cos\theta &= \cos\theta
\end{aligned}$$

Portanto,

$$\cos\theta = 0 \implies \theta = \pi/2\,\mathrm{rad} \text{ ou } \theta = 3\pi/2\,\mathrm{rad}$$

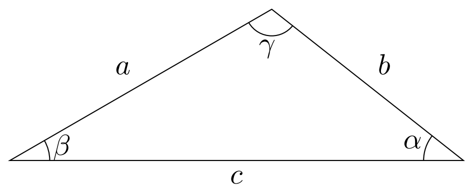
e então os vetores devem ser perpendiculares.

□

(b) a lei dos senos considerando a área de um triângulo formado pelos vetores $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ e $\mathbf{c}$, onde $\mathbf{a}+\mathbf{b}+\mathbf{c} = 0$;

Resolução:

Seja o triângulo de lados $a = |\mathbf{a}|, b = |\mathbf{b}|, c = |\mathbf{c}|$ e ângulos α, β, γ apostos aos lados a, b e c, respectivamente. Pelo produto vetorial, a área A desse triângulo é igual à:



$$A = \frac{1}{2}|\mathbf{a}\times\mathbf{b}| = \frac{1}{2}|\mathbf{b}\times\mathbf{c}| = \frac{1}{2}|\mathbf{c}\times\mathbf{a}|$$

Logo, valem as igualdades

$$\frac{1}{2}a\,b\sin\gamma = \frac{1}{2}b\,c\sin\alpha \implies \frac{a}{\sin\alpha} = \frac{c}{\sin\gamma} \tag{8.1}$$

$$\frac{1}{2}a\,b\sin\gamma = \frac{1}{2}c\,a\sin\beta \implies \frac{b}{\sin\beta} = \frac{c}{\sin\gamma} \tag{8.2}$$

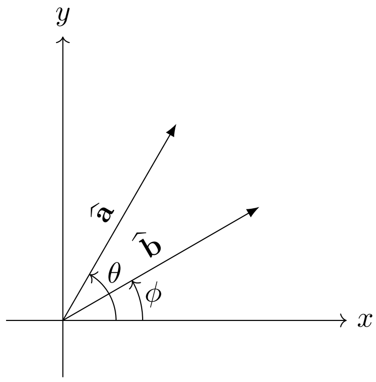
$$\frac{1}{2}b\,c\sin\alpha = \frac{1}{2}c\,a\sin\beta \implies \frac{b}{\sin\beta} = \frac{a}{\sin\alpha} \tag{8.3}$$

□

(c) que se $\widehat{\mathbf{a}}$ e $\widehat{\mathbf{b}}$ são vetores unitários (versores) no plano $x\,y$ fazendo um ângulo θ e ϕ com o eixo x, respectivamente, então esses versores podem ser representados como $\widehat{\mathbf{a}} = \cos\theta\widehat{\mathbf{\imath}}+\sin\theta\widehat{\mathbf{\jmath}}$ e $\widehat{\mathbf{b}} = \cos\phi\widehat{\mathbf{\imath}}+\sin\phi\widehat{\mathbf{\jmath}}$. Use isso para provar que $\cos(\theta-\phi) = \cos\theta\cos\phi + \sin\theta\sin\phi$.

Resolução:

Desenhando um diagrama genérico para a situação temos a figura ao lado.



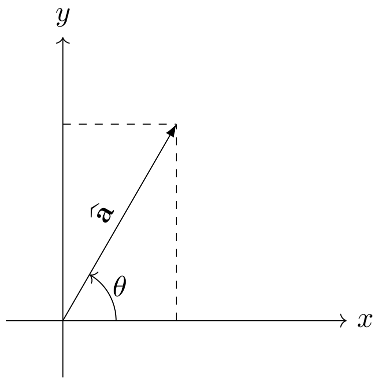
Podemos decompor o vetor $\widehat{\mathbf{a}}$ usando o ângulo θ formado com o eixo x:

$$\begin{cases} a_x = \widehat{\mathbf{a}}\cdot\widehat{\mathbf{\imath}} = 1\cdot 1\cdot\cos\theta = \cos\theta \\ a_y = \widehat{\mathbf{a}}\cdot\widehat{\mathbf{\jmath}} = 1\cdot 1\cdot\cos(90^\circ-\theta) = \sin\theta \end{cases}$$

Portanto, temos

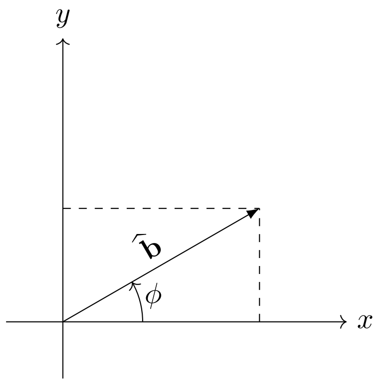
$$\widehat{\mathbf{a}} = \mathbf{a_x} + \mathbf{a_y} = \cos\theta\widehat{\mathbf{\imath}} + \sin\theta\widehat{\mathbf{\jmath}}$$

Nota: $\cos(90^\circ-\theta) = \sin\theta$ pela definição de $\sin\theta$ e $\cos\theta$ num triângulo retângulo.



Utilizando raciocínio análogo para $\widehat{\mathbf{b}}$, temos:

$$\widehat{\mathbf{b}} = \mathbf{b_x} + \mathbf{b_y} = \cos\phi\widehat{\mathbf{\imath}} + \sin\phi\widehat{\mathbf{\jmath}}$$



Retomando o primeiro diagrama da resolução, temos que

$$\widehat{\mathbf{a}}\cdot\widehat{\mathbf{b}} = a\cdot b\cdot\cos(\theta-\phi) = a_x\,b_x + a_y\,b_y \implies \cos(\theta-\phi) = \cos\theta\cos\phi + \sin\theta\sin\phi$$

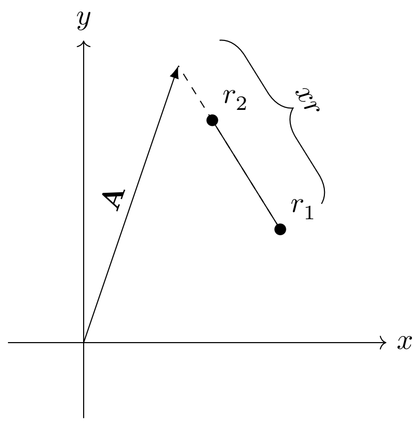
$\square$

Questão 9

Considere dois pontos localizados em r_1 e r_2 e separados pela distância $r = |r_1 - r_2|$. Encontre o vetor $\mathbf{A}$ da origem até um ponto na reta que liga r_1 a r_2 a uma distância xr do ponto r_1, onde x é algum número.

Resolução:

O vetor pode ser descrito por $\mathbf{A} = \overline{Or_1} + x\overline{r_1 r_2}$ que é o segmento da origem do plano O até r_1, e então somado ao segmento que vai de r_1 a r_2 multiplicado por $x \in \mathbb{R}$.



Questão 10

Seja $\mathbf{A}$ um vetor arbitrário e seja $\widehat{\mathbf{n}}$ um versor em alguma direção fixa. Mostre que sempre podemos escrever $\mathbf{A}$ como a soma de dois vetores: um na direção de $\widehat{\mathbf{n}}$ e outro na direção perpendicular. Ou seja, que

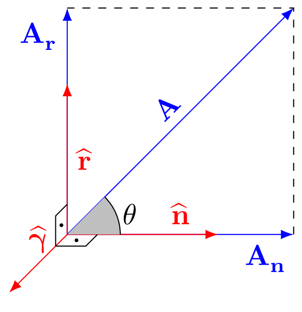
$$\mathbf{A} = (\mathbf{A} \cdot \widehat{\mathbf{n}})\widehat{\mathbf{n}} + (\widehat{\mathbf{n}} \times \mathbf{A}) \times \widehat{\mathbf{n}}$$

Resolução (Por Anahí):

Imaginemos a situação ao lado:

Como $|\mathbf{A_n}| = \mathbf{A} \cdot \widehat{\mathbf{n}}$ e $|\mathbf{A_r}| = \mathbf{A} \cdot \widehat{\mathbf{r}}$ então, teremos

$$\begin{aligned}
\mathbf{A} &= \mathbf{A_n} + \mathbf{A_r} \\
&= |\mathbf{A_n}|\widehat{\mathbf{n}} + |\mathbf{A_r}|\widehat{\mathbf{r}} \\
&= (\mathbf{A} \cdot \widehat{\mathbf{n}})\,\widehat{\mathbf{n}} + (\widehat{\mathbf{r}} \cdot \mathbf{A})\,\widehat{\mathbf{r}} \\
&= (\mathbf{A} \cdot \widehat{\mathbf{n}})\,\widehat{\mathbf{n}} + \left(\underbrace{|\widehat{\mathbf{r}}|}_{=|\widehat{\mathbf{n}}|}\ |\mathbf{A}|\ \underbrace{\cos(\pi/2 - \theta)}_{=\sin\theta} \right) \widehat{\mathbf{r}} \\
&= (\mathbf{A} \cdot \widehat{\mathbf{n}})\,\widehat{\mathbf{n}} + (|\widehat{\mathbf{n}}||\mathbf{A}|\sin\theta)\,\widehat{\mathbf{r}} \\
&= (\mathbf{A} \cdot \widehat{\mathbf{n}})\,\widehat{\mathbf{n}} + \left(|\widehat{\mathbf{n}} \times \widehat{\mathbf{A}}| \right) \widehat{\mathbf{r}}
\end{aligned}$$



Seja $\widehat{\gamma}$ um vetor saindo do plano do papel, no sentido de $\widehat{\mathbf{n}} \times \widehat{\mathbf{r}} = \widehat{\mathbf{n}} \times \widehat{\mathbf{A}}$. Podemos notar que $\widehat{\gamma} \times \widehat{\mathbf{n}}$ estará na mesma direção e sentido de $\widehat{\mathbf{r}}$ (pela regra da mão direita). Como o módulo $|\widehat{\mathbf{n}} \times \widehat{\mathbf{A}}|$ é preservado no produto vetorial, temos:

$$\mathbf{A} = (\mathbf{A} \cdot \widehat{\mathbf{n}})\,\widehat{\mathbf{n}} + (\widehat{\mathbf{n}} \times \mathbf{A}) \times \widehat{\mathbf{n}}$$