# Resolução – Prova II (Matemática II)

20 de junho / Isabella B. Amaral – 11810773

## Questão 1

Demonstre que $e^2$ é irracional.

**Resolução:**

Primeiro mostraremos que e é irracional, como segue:

Seja

$$S_n := \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}.$$

**Lema 1.1.** *Para todo $n > 0$ vale que* $e - S_n < 1/n!$.

*Demonstração.* Pela expansão de Taylor do número de euler, temos que

$$\begin{aligned} e - S_n &= \frac{1}{(n+1)!} + \frac{1}{(n+2)!} + \cdots \\ &= \frac{1}{n! \cdot (n+1)} + \frac{1}{n! \cdot (n+1)(n+2)} + \cdots \\ &= \frac{1}{n!}\left(\frac{1}{(n+1)} + \frac{1}{(n+1)(n+2)} + \cdots\right) \end{aligned}$$

o que, definitivamente, é menor do que $1/n!$ vezes a série geométrica

$$\begin{aligned} &< \frac{1}{n!}\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2 \cdot 2} + \cdots\right) \\ &< \frac{1}{n!}\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{2^k} \\ &< \frac{1}{n!}. \end{aligned}$$

□

Agora, suponha que e é racional, isto é, podemos escrevê-lo como $p/q$ para $p, q \in \mathbb{Z}$, dessa forma, pelo lema acima

$$\frac{p}{q} - S_q < \frac{1}{q!},$$

porém, fazendo

$$\begin{aligned} \frac{p}{q} - S_q &= \frac{p}{q} - \left(1 + 1 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \cdots\right) \\ &= \frac{p(q-1)!}{q!} - \frac{q!}{q!} - \frac{q!}{q!} - \frac{q(q-1)\cdots 4 \cdot 3}{q!} - \frac{q(q-1)\cdots 4}{q!} - \cdots - \frac{q}{q!} - \frac{1}{q!} \\ \frac{p}{q} - S_q &= \frac{C}{q!}, \quad C \in \mathbb{Z} \end{aligned}$$

o que implica em

$$\frac{p}{q} - S_q = \frac{C}{q!} < \frac{1}{q!} \implies C \leqslant 0 \implies e \leqslant S_n,$$

o que contradiz nosso lema e nossa intuição.

Agora, seguindo disso, notamos que a expansão de Taylor de $\mathrm{e}^2$ nos dá

$$\mathrm{e}^2 = 1 + \frac{2^1}{1!} + \frac{2^2}{2!} + \cdots + \frac{2^n}{n!} + \frac{2^{n+1}}{(n+1)!} + \cdots$$

de tal forma que, se $\mathrm{e}^2 = p/q$ teremos que

$$n!p = n!q\,\mathrm{e}^2 = n!q\left(1 + \frac{2^1}{1!} + \frac{2^2}{2!} + \cdots + \frac{2^n}{n!}\right) + q\left(\frac{2^{n+1}}{(n+1)} + \cdots\right) \implies n!p = qS + qR$$

onde $R$ e $S$ denotam as respectivas parcelas da soma.

Podemos notar que na formulação acima $n!p$ e $S$ são inteiros, o que implica que $R$ também o seja, porém, para $n > 1$ temos

$$R = 2^{n+1}\left(\frac{1}{(n+1)} + \frac{1}{(n+1)(n+2)} + \cdots\right) < 2^{n+1}\left(\frac{1}{(n+1)} + \frac{1}{(n+1)^2} + \cdots\right) = 2^{n+1}\cdot\frac{\frac{1}{n+1}}{1 - \frac{2}{n+1}} = \frac{2^{n+1}}{n-1}$$

de tal forma que

$$\frac{2^{n+1}}{n+1} < R < \frac{2^{n+1}}{n-1}.$$

Agora, analisando $S$ temos

$$S = n!\left(1 + \frac{2}{1!} + \frac{2^2}{2!} + \cdots + \frac{2^n}{n!}\right) = \sum_{k=0}^{n} 2^k \cdot \frac{n!}{k!}.$$

Analisando agora as potências de 2 presentes em $n!$ temos a soma

$$\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{n}{2^2} \right\rfloor + \cdot + 1 \leqslant \frac{n}{2} + \frac{n}{2^2} + \cdots = n$$

**Note que:** cada termo $n/2^\ell$ da soma representa os a quantidade de números $< n$ que possuem $2^\ell$ em sua fatoração.

Dessa forma, nota-se que a maior potência de 2 em $n!$ seria $n$, o que de fato só ocorre quando o próprio $n$ é potência de 2. Tomando $n = 2^m$, temos

$$\left\lfloor \frac{2^m}{2} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{2^m}{2^2} \right\rfloor + \cdot + 2 + 1 = 2^m - 1 = n - 1$$

de tal forma que a maior potência de 2 em $2^k \cdot n!/k!$ é pelo menos $k + n - 1 - k = n - 1$. Sendo assim $2^{n-1}|S$, assim como $2^{n-1}|n!p$, portanto, podemos analisar

$$\frac{n!p}{2^{n-1}} = q \cdot \frac{S}{2^{n-1}} + q \cdot \frac{R}{2^{n-1}} \implies A = q \cdot S' + q \cdot R'$$

onde todos os termos permanecem inteiros.

Retomando os limites derivados anteriormente para $R$, temos, pelo raciocínio acima, que

$$0 < \frac{1}{2^{n-1}}\frac{2^{n+1}}{n+1} < \frac{1}{2^{n-1}}R < \frac{1}{2^{n-1}}\frac{2^{n+1}}{n-1} \implies 0 < \frac{4q}{n+1} < qR' < \frac{4q}{n-1}$$

e, se $n > 4q - 1$, segue que $0 < qR' < 1$ o que nos mostra que $qR'$ não pode ser inteiro e, por consequência, $b$ não o pode ser. Contradição!

$\square$

# Questão 2

Calcule os limites abaixo:

(a)

$$\lim_{x\to\pi}\frac{\log|\sin x|}{\log|\sin 2x|}.$$

**Resolução:**

Como $\sin x$ e $\sin 2x$ tendem à zero conforme $x$ tende à $\pi$, e $\log g(x)$ com $g(x)$ tendendo à zero tende à $-\infty$, temos uma indeterminação de $0/0$, e podemos usar l'hôpital:

$$\lim_{x\to\pi}\frac{\log|\sin x|}{\log|\sin 2x|}=\lim_{x\to\pi}\frac{\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left[\log|\sin x|\right]}{\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left[\log|\sin 2x|\right]}.$$

sendo o valor absoluto um operador que gera descontinuidades, devemos modificar o formato da função para poder derivá-la:

$$|f(x)|=\frac{f(x)}{|f(x)|}f(x)$$

note que: a razão agora é apenas uma forma de extrair o sinal da função, de tal forma que se $f(x)<0$, a razão também é negativa e os sinais se cancelam no produto das duas. Se o sinal for positivo ele é mantido.

Dessa forma, temos:

$$\lim_{x\to\pi}\frac{\log|\sin x|}{\log|\sin 2x|}=\lim_{x\to\pi}\frac{\dfrac{\sin x}{|\sin x|}\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left[\sin x\right]/|\sin x|}{\dfrac{\sin 2x}{|\sin 2x|}\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left[\sin 2x\right]/|\sin 2x|}$$

$$=\lim_{x\to\pi}\frac{\dfrac{\sin x}{|\sin x|}\dfrac{\cos x}{|\sin x|}}{\dfrac{\sin 2x}{|\sin 2x|}\dfrac{2\cos 2x}{|\sin 2x|}}$$

agora, notamos que a multiplicação de módulos iguais nos dá $|f(x)|^2=|(f(x))^2|=(f(x))^2$, dessa forma, temos

$$=\lim_{x\to\pi}\frac{\sin x\cos x}{2\sin 2x\cos 2x}$$
$$=\lim_{x\to\pi}\frac{\sin 2x}{2\sin 4x}$$

novamente, temos uma indeterminação de $0/0$ e, portanto, aplicamos l'hôpital novamente

$$=\lim_{x\to\pi}\frac{\cos 2x}{4\cos 4x}$$

é fácil notar que $\lim\limits_{x\to\pi}\cos 2n\,x=-1, x\in\mathbb{Z}$ de tal forma que temos

$$\lim_{x\to\pi}\frac{\log|\sin x|}{\log|\sin 2x|}=\frac{1}{4}$$

(b)

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\sin \dfrac{1}{ax}}{\arctan \dfrac{1}{bx}}, \quad \text{em que } a > 0 \text{ e } b > 0.$$

**Resolução:**

Sabemos que $1/(\alpha\, x) \overset{x\to\infty}{\longrightarrow} 0$ de tal forma que avaliamos a razão de $\sin x/ \arctan x$ com $x \to 0$, o que nos dá uma indeterminação de $0/0$, de tal forma que podemos aplicar l'hôpital:

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\sin \dfrac{1}{ax}}{\arctan \dfrac{1}{bx}} = \lim_{x\to+\infty} \frac{\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} \sin \dfrac{1}{ax}}{\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} \arctan \dfrac{1}{bx}}$$

Agora, utilizando a propriedade da inversa podemos calcular a derivada de $\arctan x$:

$$\tan \arctan x = x \implies \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} [\tan \arctan x] = 1 \implies (\arctan x)' = \frac{1}{\tan' \arctan x}$$

fazendo a derivada da $\tan x$, temos

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} \left[\frac{\sin x}{\cos x}\right] = \frac{\cos^2 x - \left(-\sin^2 x\right)}{\cos^2 x} = 1 + \tan^2 x$$

dessa forma:

$$\arctan' x = \frac{1}{1 + (\tan \arctan x)^2} = \frac{1}{1 + x^2}.$$

Portanto:

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to+\infty} \frac{\sin \dfrac{1}{ax}}{\arctan \dfrac{1}{bx}} &= \lim_{x\to+\infty} \frac{\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} \sin \dfrac{1}{ax}}{\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} \arctan \dfrac{1}{bx}} \\
&= \lim_{x\to+\infty} \frac{-x^{-2}/a \cos(1/ax)}{-x^{-2}/b \left(1 + 1/(bx)^2\right)^{-1}} \\
&= \lim_{x\to+\infty} \frac{b \cos(1/ax)((bx)^2 + 1)}{a(bx)^2} \\
&= \lim_{x\to+\infty} \frac{b}{a} \cos\left(\frac{1}{ax}\right) + \frac{b}{a} \frac{\cos(1/ax)}{(bx)^2} \\
&= \lim_{x\to+\infty} \frac{b}{a} \cos\left(\frac{1}{ax}\right) + \lim_{x\to+\infty} \frac{b}{a} \cos\left(\frac{1}{ax}\right) \frac{1}{(bx)^2}
\end{aligned}$$

como $1/x$ tende à zero conforme $x$ tende ao infinito, temos dois limites nulos

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\sin \dfrac{1}{ax}}{\arctan \dfrac{1}{bx}} = 0.$$

(c)

$$\lim_{x\to 0^-} (1 - 4^x)^{\sin 2x}.$$

**Resolução:**

Tomando a exponencial, podemos então fazer

$$\lim_{x\to 0^-}(1-4^x)^{\sin 2x} = \lim_{x\to 0^-}\exp\left(\ln(1-4^x)^{\sin 2x}\right)$$

agora avaliamos o limite do expoente:

$$\lim_{x\to 0^-}\sin 2x \ln 1 - 4^x = 0$$

dessa forma, temos

$$\lim_{x\to 0^-}(1-4^x)^{\sin 2x} = \mathrm{e}^0 = 1.$$

(d)

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{\log(x+\sqrt{1+x^2})} - \frac{1}{\log(1+x)}\right)$$

**Resolução:**

Tomando o mínimo denominador comum da subtração, temos

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{\log(x+\sqrt{1+x^2})} - \frac{1}{\log(1+x)}\right) = \lim_{x\to 0}\frac{\log(1+x) - \log\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)}{\log(x+\sqrt{1+x^2})\log(1+x)}$$

dessa forma, temos um limite indeterminado de 0/0 e, por l'hôpital, temos

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to 0}\frac{\log(1+x) - \log\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)}{\log(x+\sqrt{1+x^2})\log(1+x)} &= \lim_{x\to 0}\frac{\dfrac{1}{1+x} - \left(\dfrac{\sqrt{1+x^2}+x}{\sqrt{1+x^2}}\right)\dfrac{1}{x+\sqrt{1+x^2}}}{\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left[\log(x+\sqrt{1+x^2})\log(1+x)\right]} \\
&= \lim_{x\to 0}\frac{\dfrac{1}{1+x} - \dfrac{1}{\sqrt{1+x^2}}}{\dfrac{\log(1+x)}{\sqrt{1+x^2}} + \dfrac{\log(x+\sqrt{1+x^2})}{1+x}} \\
&= \lim_{x\to 0}\frac{\dfrac{\sqrt{1+x^2}-(1+x)}{(x+1)\sqrt{1+x^2}}}{\dfrac{\log(1+x)(x+1) + \log(x+\sqrt{1+x^2})\sqrt{1+x^2}}{(x+1)\sqrt{1+x^2}}} \\
&= \lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+x^2}-(1+x)}{\log(1+x)(x+1) + \log(x+\sqrt{1+x^2})\sqrt{1+x^2}}
\end{aligned}$$

o que ainda nos dá um limite indeterminado da forma 0/0, portanto, aplicamos l'hôpital novamente

$$= \lim_{x\to 0}\frac{\dfrac{x}{\sqrt{1+x^2}} - 1}{1 + \log(x+1) + 1 + \log(x+\sqrt{1+x^2})\dfrac{x}{\sqrt{1+x^2}}}$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{\log(1+x) - \log\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)}{\log(x+\sqrt{1+x^2})\log(1+x)} = -\frac{1}{2}.$$

(e)

$$\lim_{x\to 0^-} \frac{1}{x\sqrt{x}} \left( a \arcsin \frac{\sqrt{x}}{a} + b \arcsin \frac{\sqrt{x}}{b} \right), \quad \text{com } a > b > 0.$$

**Resolução:**

Como a função é indefinida para $x \leqslant 0$, podemos dizer com segurança que o limite é indefinido, no entanto, avaliamos o limite para $x \to 0^+$ por motivos de completude:

Sendo o limite indeterminado $(0/0)$, podemos aplicar l'hôpital, porém primeiro precisamos da derivada do arco seno. Pela propriedade da inversa, temos que:

$$\sin \arcsin x = x \implies \arcsin' x = \frac{1}{\cos \arcsin x}$$

pela identidade fundamental da trigonometria, temos

$$\sin \arcsin x = \frac{1}{\sqrt{1 - (\sin \arcsin x)^2}} = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}.$$

Dessa forma, podemos derivar o numerador e denominador do limite em questão:

$$\begin{aligned} \lim_{x\to 0^+} \frac{1}{x\sqrt{x}} \left( a \arcsin \frac{\sqrt{x}}{a} + b \arcsin \frac{\sqrt{x}}{b} \right) &= \lim_{x\to 0^+} \frac{\frac{1}{2\sqrt{x}} \left( \frac{1}{1 - \left(\sqrt{x}/a\right)^2} + \frac{1}{1 - \left(\sqrt{x}/b\right)^2} \right)}{\frac{3}{2}\sqrt{x}} \\ &= \lim_{x\to 0^+} \frac{1}{3x} \left( \frac{a^2}{a^2 - x} + \frac{b^2}{b^2 - x} \right) = \infty \end{aligned}$$

# Questão 3

Seja $A > 1$, determine, se existe tal elemento, $c \in \mathbb{R}$ tal que

$$\lim_{x\to +\infty} \left( \frac{x + c}{x - c} \right)^x = A.$$

**Resolução:**

Manipulando a expressão interna do limite, temos

$$\begin{aligned} \left( \frac{x + c}{x - c} \right)^x &= \left( \frac{1 + c/x}{1 - c/x} \right)^x = \frac{(1 + c/x)^x}{(1 - c/x)^x} \\ \left( \frac{x + c}{x - c} \right)^x &= \frac{\mathrm{e}^{\ln (1 + c/x)^x}}{\mathrm{e}^{\ln (1 - c/x)^x}} \end{aligned}$$

sendo a expressão dos expoentes da forma $\ln(g(x))/(1/x)$, o que é indeterminado conforme $x$ tende ao infinito, podemos aplicar l'hôpital:

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\ln (1 + c/x)}{1/x} = \lim_{x\to\infty} \frac{\left(-c/x^2\right) \left(x/(x + c)\right)}{-1/x^2} = \lim_{x\to\infty} \frac{c\, x}{x + c} = \lim_{x\to\infty} \frac{c}{1 + c/x} = c$$

de forma análoga, temos

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\ln (1 - c/x)}{1/x} = \lim_{x\to\infty} \frac{-c}{1 - c/x} = -c$$

portanto, ficamos com

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{x+c}{x-c}\right)^x = \lim_{x\to+\infty}\frac{\mathrm{e}^{\ln(1+c/x)^x}}{\mathrm{e}^{\ln(1-c/x)^x}} = \frac{\mathrm{e}^c}{\mathrm{e}^{-c}} = e^{2c} = A \implies c = \frac{\ln A}{2}.$$

e, sendo $A > 1$, podemos dizer que existe tal $c$ nos reais.

# Questão 4

Decida, justificando sua conclusão, se existem reais $a$ e $b$ tais que

$$\lim_{x\to 0}\frac{1}{x - a\tan x}\int_0^x \frac{t^2}{\sqrt{b+t}}\,\mathrm{d}t = 1.$$

**Resolução:**

Tomando a integral na expressão temos que

$$\begin{aligned}
\int_0^x \frac{t^2}{\sqrt{b+t}}\,\mathrm{d}t &= \int_b^{b+x}\frac{(u-b)^2}{\sqrt{u}}\,\mathrm{d}u, \quad \text{onde } u = b+t \\
&= \int_b^{b+x} u^{3/2} - 2b^2\sqrt{u} + \frac{b^2}{\sqrt{u}}\,\mathrm{d}u \\
&= \left(\frac{2}{5}(b+t)^{5/2} - \frac{4}{3}b(b+t)^{3/2} + 2b^2\sqrt{b+t}\right)\Bigg|_0^x \\
&= \left(\frac{2}{15}\sqrt{b+t}\left(3t^2 - 4b\,t + 8b^2\right)\right)\Bigg|_0^x \\
\int_0^x \frac{t^2}{\sqrt{b+t}}\,\mathrm{d}t &= \frac{2}{15}\left(\sqrt{b+x}\left(3x^2 - 4b\,x + 8b^2\right) - 8b^2\sqrt{b}\right)
\end{aligned}$$

Dessa forma, há

$$
\begin{aligned}
\lim_{x\to 0}\frac{1}{x-a\tan x}\int_0^x \frac{t^2}{\sqrt{b+t}}\,\mathrm{d}t &= \lim_{x\to 0}\frac{1/x}{1-(a/x)\tan x}\frac{2}{15}\left(\sqrt{b+x}\left(3x^2-4b\,x+8b^2\right)-8b^2\sqrt{b}\right)\\
&= \lim_{x\to 0}\frac{2}{15}\frac{\left(\sqrt{b+x}\left(3x^2-4b\,x+8b^2\right)-8b^2\sqrt{b}\right)}{1-(a/x)\tan x}\frac{1}{x}\\
&= \lim_{x\to 0}\frac{2}{15}\left(8b^2\frac{\dfrac{\sqrt{b+x}-\sqrt{b}}{x}}{1-(a/x)\tan x}+\frac{\sqrt{b+x}\,(3x-4b)}{1-(a/x)\tan x}\right)\\
&= \lim_{x\to 0}\frac{2}{15}\left(8b^2\frac{\dfrac{1}{\sqrt{b+x}+\sqrt{b}}}{1-(a/x)\tan x}+\frac{\sqrt{b+x}\,(3x-4b)}{1-(a/x)\tan x}\right)\\
&= \frac{2}{15}\left(8b^2\frac{\dfrac{1}{\sqrt{b}+\sqrt{b}}}{1-a}-\frac{4b\sqrt{b}}{1-a}\right)\\
&= \frac{2}{15}\left(\frac{8b\sqrt{b}-4b\sqrt{b}}{1-a}\right)\\
\lim_{x\to 0}\frac{1}{x-a\tan x}\int_0^x \frac{t^2}{\sqrt{b+t}}\,\mathrm{d}t &= \frac{8}{15}\frac{b\sqrt{b}}{1-a}.
\end{aligned}
$$

Fazendo

$$\frac{8}{15}\frac{b\sqrt{b}}{1-a}\overset{!}{=}1 \implies b^{3/2}=\frac{15}{8}(1-a),$$

o que nos mostra que há, de fato, infinitas soluções para o problema proposto.

# Questão 5

Considere funções $f$ e $g$ definidas em $(-1,1)$ com valores em $\mathbb{R}$, deriváveis em $(-1,1)\setminus\{0\}$, integráveis em qualquer intervalo $[a,b]\subset(-1,1)$, com $g(x)g'(x)\neq 0$ se $x\neq 0$ e suponha que $f(x)$ é o $o\,(g(x))$ para $x\to 0$.

Decida se as afirmações a seguir são verdadeiras ou falsas, no caso de ser verdadeira apresente uma demonstração disso, caso seja falsa exiba um contra exemplo (respostas “secas” apenas com o veredicto sobre a frase enunciada não valerão nota estritamente positiva).

(a) Se $F(x)=\int_0^x f(s)\,\mathrm{d}s$ e $G(x)=\int_0^x g(s)\,\mathrm{d}s$ então $F(x)$ é $o\,(G(x))$ para $x\to 0$.

**Resolução:**

Tome, por definição, que

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{g(x)}=0,$$

então, para todo $\varepsilon>0$ existe $0<|x|<\delta<1$ tal que

$$\left|\frac{f(x)}{g(x)}\right|<\varepsilon.$$

Considerando a desigualdade

$$|F(x)|\leqslant\int_0^x|f(s)|\,\mathrm{d}s$$

para $G(x) \neq 0$ temos que

$$\left|\frac{F(x)}{G(x)}\right| \leqslant \frac{\int_0^x |f(s)|\,\mathrm{d}s}{|G(x)|} < \frac{\varepsilon \int_0^x |g(s)|\,\mathrm{d}s}{|G(x)|}$$

e, no intervalo considerado, vale que $g'(x) \neq 0$, de tal forma que $g(x)$ tem sinal constante, portanto vale que

$$\left|\frac{F(x)}{G(x)}\right| < \frac{\varepsilon \int_0^x |g(s)|\,\mathrm{d}s}{|G(x)|} = \frac{\varepsilon \left|\int_0^x g(s)\,\mathrm{d}s\right|}{|G(x)|} = \varepsilon$$
$$\implies \lim_{x\to 0} \frac{F(x)}{G(x)} = 0.$$

□

(b) $f'(x)$ é $o\left(g'(x)\right)$ para $x \to 0$.

**Resolução:**

Seja $g(x)$ a função identidade, defina

$$f(x) = \begin{cases} x^2 \sin\left(\dfrac{1}{x}\right), & \text{para } x \neq 0 \\ 0, & \text{para } x = 0 \end{cases},$$

note que teremos $f(x) = o(g(x))$ com $x \to 0$, já que

$$\lim_{x\to 0} \frac{x\left(\dfrac{\sin(1/x)}{1/x}\right)}{x} = 0.$$

Derivando, temos

$$f'(x) = \begin{cases} 2x \sin\left(\dfrac{1}{x}\right) - \cos\left(\dfrac{1}{x}\right), & \text{para } x \neq 0 \\ 0, & \text{para } x = 0 \end{cases},$$

e, notamos que $f'(x) \neq o(g(x))$, já que

$$\lim_{x\to 0} 2x \sin\left(\frac{1}{x}\right) - \cos\left(\frac{1}{x}\right)$$

é indefinido.

□

# Questão 6

Seja $f\colon (-1,1) \longrightarrow \mathbb{R}$ com $n+1$ derivadas contínuas e considere $\theta\colon (-1,1) \longrightarrow (0,1)$ uma função tal que, se $x \in (-1,1)$, tem-se

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k + \frac{f^{(n)}(x\,\theta(x))}{n!} x^n.$$

Prove que existe pelo menos uma função $\theta$ com essa propriedade e mostre que, se $f^{(n+1)}(0) \neq 0$, então

$\lim_{x \to 0} \theta(x) = \dfrac{1}{n+1}$.

**Resolução:**

# Questão 7

Sejam $f\colon [a,b] \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ contínua e $x_0 \in [a,b]$. Mostrar que $\varphi\colon [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ é solução do problema de Cauchy $y' = f(x,y), y(x_0) = y_0$ se, e somente se, $\varphi(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(u, \varphi(u))\, \mathrm{d}u$, para todo $x \in [a,b]$.

**Resolução:**

# Questão 8

Considere a equação diferencial

$$x(x-1)y' + y = x^2 - 1.$$

Determine todas as soluções dessa equação definidas, respectivamente em $(-\infty, 0)\,, (0,1)$ e $(1,\infty)$. Analise os limites dessas soluções para $x$ tendendo a 0 ou a 1, nos casos em que isso fizer sentido.

**Resolução:**

# Questão 9

Uma cultura de bactérias é atacada por toxinas produzidas a partir do instante $t = 0$. O total de toxinas cresce numa razão constante $a > 0$.

Na ausência de toxinas o número de bactérias, $x(t)$, cresce com taxa $k > 0$ diretamente proporcional a $x(t)$, com a presença de toxinas essa taxa diminui num número diretamente proporcional ao total de bactérias nesse instante.

(a) Justifique porque a equação $x' = x(k - a\,t)$ para algum $k > 0$, descreve de forma adequada a evolução de $x(t), t \geqslant 0$.

**Resolução:**

Sendo a taxa de crescimento da população de bactérias $(x')$ diretamente proporcional à quantidade de bactérias no mesmo instante $(x)$, podemos escrever $x' \propto x \implies x' = k\,x$ onde $k > 0$. Porém como temos a introdução de uma toxina que afeta negativamente esse crescimento, e cuja quantidade é proporcional ao tempo $t$ e à quantidade atual de bactérias $x$, temos a quantidade de toxinas $To \propto x\,t \implies T = a\,x\,t$ com $a > 0$ e, dessa forma, $x'$ pode ser escrito como a soma do ganho + perda:

$$x' = k\,x - To = k\,x - a\,x\,t = x\,(k - a\,t)\,.$$

(b) **Sem resolver a equação diferencial determinada em (i)**, determine o instante de tempo $T > 0$ em que $x(t)$ é máximo (justifique).

**Resolução:**

Pela equação diferencial temos que

$$x' = x\,(k - a\,t) \implies x = \frac{x'}{k - a\,t}$$

e quando $k - a\,t \to 0$, $x \to \infty$ (considerando que $x'$ é positiva, já que não já população negativa).

Dessa forma queremos que $T$ aproxime $k/a$.

(c) Suponha que em $t = 0$ o número de bactérias é $x_0 > 0$, determine $x(t)$ para $t > 0$, calcule $x(T)$, em que $T$ foi determinado no item anterior, e faça o gráfico dessa função.

**Resolução:**

Fazendo $x' = \dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}$, temos

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = x(k - a\,t) \implies \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x = (x - a\,t)\,\mathrm{d}t$$

onde $\mathrm{d}x$ e $\mathrm{d}t$ são diferenciais, integrando, temos

$$\int \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x = \int (k - a\,t)\,\mathrm{d}t \implies \log|x| = k\,t - \frac{a}{2}t^2 + C \implies x(t) = \exp\left(k\,t - \frac{a}{2}t^2 + C\right)$$

pela condição inicial, temos que

$$x(0) = x_0 = \exp(C) \implies C = \log x_0$$

de tal forma que

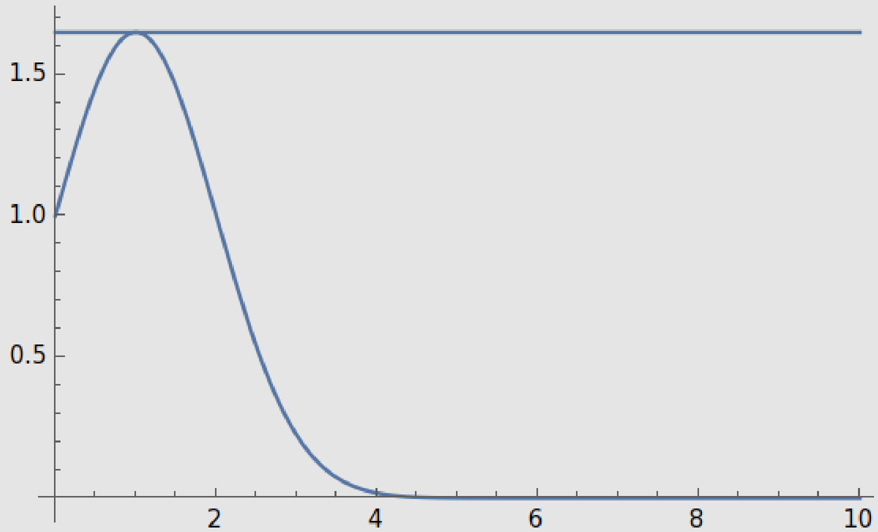
$$x(t) = x_0 \exp\left(k\,t - \frac{a}{2}t^2\right) \implies x\left(T = \frac{k}{a}\right) = x_0 \exp\left(\frac{k^2}{a} - \frac{k^2}{2a}\right) = x_0 \exp\left(\frac{k^2}{2a}\right).$$

Plotando, temos

```
In[4]:= x[a_, k_, x0_, t_] := x0 Exp[k t - a/2 t*t]

In[8]:= Plot[{x[a, k, x0, t], x[a, k, x0, k/a]} /. {
            a → 1,
            k → 1,
            x0 → 1}, {t, 0, 10}]
```

Out[8]=




onde a reta superior (que tangencia o gráfico) representa $x(T)$.