1. a) Por transf. de Galileu

$$\underset{(1.1)}{\vec{r}_1 = \vec{r}_1\,' + \vec{R}} \Rightarrow \underset{(1.2)}{\vec{v}_1 = \vec{v}_1\,' + \vec{V}}$$

b) Sendo o sistema considerado isolado, $\vec{F} = \vec{0} \Rightarrow \frac{d\vec{p}}{dt} = \vec{0} \Rightarrow \vec{p}_i = \vec{p}_f$ ("i" e "f" indicam "inicial" e "final", resp.), portanto:

$$m_1 \vec{v}_0 = m_1 \vec{v}_1 + m_2 \vec{v}_2 .$$

Sendo $\vec{R} = \dfrac{m_1 \vec{r}_1 + m_2 \vec{r}_2}{m_1 + m_2}$ (1.3) $\Rightarrow \vec{V} = \dfrac{m_1 \vec{v}_1 + m_2 \vec{v}_2}{m_1 + m_2}$ (1.4) $\therefore$

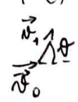
$$m_1 \vec{v}_0 = (m_1 + m_2)\vec{V} \Rightarrow \vec{V} = \frac{m_1}{m_1 + m_2}\vec{v}_0 .$$

Introduzindo $\mu = \dfrac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}$, temos

$$\vec{V} = \frac{\mu}{m_2}\vec{v}_0$$

As duas partículas se aproximam (C I). Antes do espalhamento, estão se aproximando, e depois se afastam com ângulo $\theta$ em relação à reta com que se aproximaram.

1. c) sabemos que:




e, por (1.2), temos:

$\boxed{\gamma = \vartheta}$

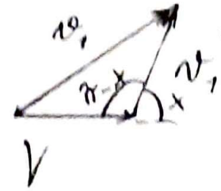

Por (1) sabemos que $\vec{V} \,//\, \vec{v}_0$, portanto, tomando $\vec{v}_1\,' \cdot \vec{V}$, temos:

$$\vec{v}_1\,' \cdot \vec{V} = v_1' V \cos x \Rightarrow (\vec{v}_1 - \vec{V}) \cdot \vec{V} = v_1' V \cos x$$

$$\vec{v}_1 \cdot \vec{V} - V^2 = v_1' V \cos x \Rightarrow \frac{v_1 \cos\vartheta - V}{v_1'} = \cos x$$

$$\theta = x = \arccos \frac{v_1 \cos\vartheta - V}{v_1'} \quad (1.5)$$

Pelo diagrama da fig 2.

Pela lei dos cossenos aplicada à 

$$v_1^2 = v_1'^2 + V^2 - 2v_1'V\cos(\pi - \chi)$$

Como $\cos \pi - \chi = -\cos\chi$ e, por (1.5) $\chi = \arccos\frac{v_1}{v_1'}\cos\vartheta$, temos:

$$v_1^2 = v_1'^2 + V^2 + 2v_1'V\cos\arccos\frac{v_1}{v_1'}\cos\vartheta$$

Pela prop. da inversa

$$v_1^2 = v_1'^2 + V^2 + 2Vv_1\cos\vartheta \qquad (1.6)$$

ou

$$v_1^2 = v_1'^2 + V^2 + 2(V\cdot v_1) \qquad (1.7)$$

1. d) Partindo de (2), temos

$$\frac{v_1^2}{v_0^2} = \frac{v_1'^2}{v_0^2} + \frac{V^2}{v_0^2} + 2\frac{v_1'V}{v_0^2}\cos\chi$$

Como:

$$\frac{v_1'^2}{v_0^2} = \left(\frac{v_0}{v_1'}\right)^{-2}\cdot\left(\frac{\mu}{m_2}\right)^{-2}\left(\frac{\mu}{m_2}\right)^2 = \left(\frac{\mu}{m_2\rho}\right)^2, \quad \rho = \frac{\mu}{m_2}\frac{v_0}{v_1'},$$ temos, substituindo (1):

$$\frac{v_1^2}{v_0^2} = \left(\frac{\mu}{m_2 \rho}\right)^2 + \left(\frac{\mu}{m_2}\right)^2 \left(\frac{v_1'}{v_0}\right)^2 \cdot \left(\frac{v_0}{v_1'}\right)^2 + 2\frac{v_1'}{v_0} \cos\chi \left(\frac{v_1'}{v_0} \cdot \frac{v_0}{v_1}\right)\frac{\mu}{m_2}$$

$$= \left(\frac{\mu}{m_2 \rho}\right)^2 \cdot 1 + \left(\frac{\mu}{m_2 \rho}\right)^2 \rho^2 + \left(\frac{\mu}{m_2 \rho}\right)^2 \cdot 2\cos\chi \cdot \rho$$

$$\frac{v_1^2}{v_0^2} = \left(\frac{\mu}{m_2 \rho}\right)^2 [1 + 2\rho\cos\overset{\theta}{\chi} + \rho^2]$$

$\square$

1.e) Sendo a colisão elástica, a energia cinética total e o momento total devem ser conservados, portanto:

$$\frac{1}{2} m_1 \vec{v}_0^2 = \frac{1}{2} m_1 \vec{v}_1^2 + \frac{1}{2} m_2 \vec{v}_2^2 \; (1.8) \quad \text{e} \quad m_1 \vec{v}_0 = m_1 \vec{v}_1 + m_2 \vec{v}_2 \quad (1.9)$$

Por (1.9):

$$m_1(\vec{v}_1 - \vec{v}_0) = -m_2 \vec{v}_2 \; (1.10)$$

Dividindo (1.8) por (1.10), temos:

$$\frac{m_1}{m_1(\vec{v}_1 - \vec{v}_0)}(\vec{v}_1^2 - \vec{v}_0^2) = \frac{-m_2 \vec{v}_2^2}{-m_2 \vec{v}_2}$$, como $\vec{r} = \vec{r}_1 - \vec{r}_2 \Rightarrow \vec{v} = \vec{v}_1 - \vec{v}_2$, e pela diferença de quadrados:

$$\vec{v}_1 + \vec{v}_0 = \vec{v}_2$$

$$\vec{v}_1 - \vec{v}_2 = -\vec{v}_0 \Rightarrow |\vec{v}_1 - \vec{v}_2| = |-\vec{v}_0| \Rightarrow v = v_0 \Rightarrow \frac{v_0}{v} = 1$$

Portanto, $\rho = \frac{m_1}{m_2}$

1.1) Sendo $E_1 = \frac{1}{2} m_1 v_1^2$ e $E_0 = \frac{1}{2} m_1 v_0^2$, temos

$$\frac{E_1}{E_0} = \frac{\frac{1}{2} m_1 v_1^2}{\frac{1}{2} m_1 v_0^2} = \frac{v_1^2}{v_0^2}$$

Por (3), temos:

$$\frac{E_1}{E_0} = \frac{v_1^2}{v_0^2} = \left(\frac{\mu}{m_2 \rho}\right)^2 [1 + 2\rho \cos X + \rho^2]$$

Como $\rho = m_1/m_2$ e $\mu = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}$, temos:

$$\frac{E_1}{E_2} = \frac{[1 + 2\rho \cos X + \rho^2]}{\left(\rho \cdot \frac{m_2 \cdot (m_1 + m_2)}{(m_1 \cdot m_2)}\right)^2} = \frac{[1 + 2\rho \cos X + \rho^2]}{\left(\rho\left(1 + \frac{1}{\rho}\right)\right)^2} = \frac{[1 + 2\rho \cos \overset{\theta}{X} + \rho^2]}{(\rho + 1)^2}$$

$\square$

1. g) Sendo $E_1 = 0$, temos:

$$\frac{1+2\rho\cos\theta+\rho^2}{1+2\rho+\rho^2} = 0 \Rightarrow \frac{1+2\cos\theta+1}{1+2+1} = 0 \Rightarrow \cos\theta = -1 \Rightarrow \theta = \pi$$

h) Se a energia doada for desprezível, $\frac{E_1}{E_0} \approx 1$, e $m_2 \ll m_1$, portanto:

$$\frac{1+2\rho\cos\theta+\rho^2}{1+2\rho+\rho^2} = 1 \overset{\frac{m_1}{m_2}\approx m_1}{\Rightarrow} 1+2m_1\cos\theta+m_1^2 = 1+2m_1+m_1^2 \Rightarrow$$

$\cos\theta = 1 \Rightarrow \theta = 0.$

5.

EXTRA:

a) momento inicial em y: $0$,

momento final em y: $-p_e \sin\phi + p' \sin\theta$

momento inicial em x: $p$

momento final em x: $p' \cos\theta + p_e \cos\phi$

igualando iniciais e finais de cada componente, temos:

X:

$$p = p'\cos\theta + p_e\cos\phi$$

Y:

$$-p_e\sin\phi + p'\sin\theta = 0 \Rightarrow p'\sin\theta = p_e\sin\phi$$

D

b) No início do movimento, temos o fóton se movendo, com energia $E = pc$, e o elétron parado, com energia $E_0$. Após o espalhamento, o fóton possui energia $E' = p'c$, e o elétron, $E_c + E_0$. Portanto, temos, por conservação de energia:

$$E + E_0 = E' + E_c + E_0 \Rightarrow E + mc^2 = E' + E_c + mc^2$$

$\square$

c) Somando os quadrados de (8) e (9), temos:

$$(p - p'\cos\theta)^2 + (p'\sin\theta)^2 = (p_e \cos\phi)^2 + (p_e \sin\phi)^2$$

$$p^2 - 2pp'\cos\theta + p'^2(\cos^2\theta + \sin^2\theta) = p_e^2(\sin^2\phi + \cos^2\phi)$$

Pela relação fundamental da trig.:

$$p^2 - 2pp'\cos\theta + p'^2 = p_e^2$$

$\square$

(d) Sustituindo (8) em pe em (12), temos:

$$p^2 - 2pp'\cos\theta + p'^2 = \frac{E_c^2}{c^2} + 2E_c m$$

Como $E_c = E - E' = c(p - p')$ (de 11), temos:

$$p^2 - 2pp'\cos\theta + p'^2 = \frac{c^2}{c^2}(p-p')^2 + 2(c(p-p'))m$$

$$2pp'(1-\cos\theta) = 2mc(p-p')$$

$$\frac{(1-\cos\theta)}{mc} = \frac{1}{p'} - \frac{1}{p}$$

sendo $m = m_0$, $\lambda_c = \frac{h}{m_0 c}$, temos:

$$\lambda' - \lambda = \lambda_c(1-\cos\theta) = \Delta\lambda$$