Provinha XI

Considere uma bola de neve que rola **sem deslizar** em uma ladeira que faz um ângulo θ com a horizontal. Durante o percurso, devido à neve depositada na superfície, não só a velocidade, como também a **massa** da esfera variam no tempo.

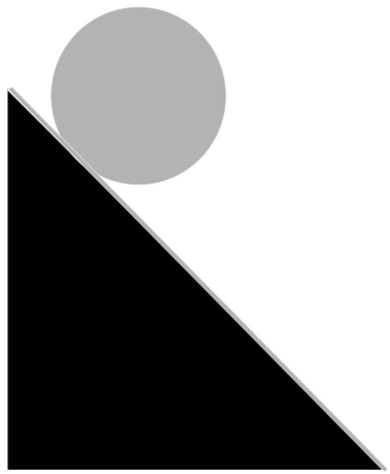

Figura 1: Representação do problema.

(a) Faça o desenho do diagrama de forças agindo na esfera e escreva as equações de movimento na direção paralela à ladeira.

Dica: Lembre-se que a massa da esfera é **variável**.

(b) Mostre que o momento de inércia de uma esfera rígida que gira ao redor do eixo que passa pelo seu centro é:

$$I = \frac{2mr^2}{5} \tag{1}$$

Obs: O resultado pode ser utilizado nos próximos exercícios mesmo que não consiga resolver este item.

(c) Considerando o centro como referência calcule o torque resultante na esfera. Utilize seu resultado para mostrar que a equação de movimento na direção paralela à ladeira pode ser reescrita como:

$$mg\sin\theta - \frac{I}{r}\frac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}t} - \frac{\omega}{r}\frac{\mathrm{d}I}{\mathrm{d}t} = m\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} + v\frac{\mathrm{d}m}{\mathrm{d}t} \tag{2}$$

(d) Substitua o momento de inércia encontrado em (b) e utilize o fato de que a esfera rola sem deslizar para reescrever (2) como:

$$mgr\sin\theta - \frac{7}{5}vr\frac{\mathrm{d}m}{\mathrm{d}t} - \frac{2}{5}mv\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t} = \frac{7}{5}mr\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} \tag{3}$$

(e) Assumindo que a densidade ρ da esfera seja constante. Encontre a taxa de variação da massa com o raio $\frac{\mathrm{d}m}{\mathrm{d}r}$. Substitua em (3) e mostre que a equação se torna:

$$gr\sin\theta - \frac{23}{5}v\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t} = \frac{7}{5}r\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} \tag{4}$$

(f) Assumindo que o raio aumenta no tempo à uma taxa constante por rotação da esfera:

$$\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t} = \frac{k}{2\pi/\omega} = \frac{kv}{2\pi r} \tag{5}$$

A equação (4) pode ser escrita como:

$$g\sin\theta - \frac{23v^2k}{10\pi r^2} = \frac{7}{5}\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} \tag{6}$$

Essa equação diferencial não pode ser resolvida analiticamente[1]. Porém podemos estudar o comportamento da aceleração da bola de neve tomando a derivada de (6) em relação ao tempo. Feito isso, encontre a aceleração terminal em termos de g e θ.

[1] É possível reescrever a equação de forma a achar a velocidade e aceleração como funções do raio. Nesse caso existe solução analítica.