Matrizes, Determinantes e Sistemas lineares

uma apostila para o ensino médio

Isabella B.
14 de agosto de 2020

Sumário

I Matrizes

Página

II Determinantes

Página

III Sistemas lineares

Parte I

Matrizes

Capítulo 1 – Introdução

I. Um pouco de contexto

Historicamente, as matrizes foram utilizadas para a resolução de sistemas lineares (a Part III é inteiramente dedicada a este tópico) que são, basicamente, conjuntos de equações com uma ou mais incógnitas.

Eram conhecidas como *tabelas* (do francês *tableau*), nome (aparentemente) dado por *Cauchy*, em 1826. O nome *matriz* (derivado do latim *mater* - *mãe*, que também tem a conotação de *útero*) surgiu depois, em 1850, quando o matemático inglês *James Joseph Sylvester* veio a nomeá-las com a ideia de que matrizes seriam *úteros* de determinantes (ele estava se referindo aos *cofatores*, que serão discutidos no chapter 2 da Part II), pois "dariam luz" à vários desses.

Quem primeiro deu vida às matrizes como entidades matemáticas independentes foi *Arthur Cayley*, que definiu operações básicas com matrizes (que serão discutidas nos Capítulos 3 e 4). Antes de *Cayley* as matrizes eram meros ingredientes dos determinantes (que serão discutidos na Part II), que eram o tópico de estudo até então.

No início do século passado, as matrizes se estabeleceram como ferramentas fundamentais para o estudo da álgebra linear (que é um ramo da matemática que estuda os sistemas de equações lineares).

II. Definição

Uma *matriz* consiste em uma estrutura organizada em **linhas** e **colunas**, composta de elementos que podem ser **números**, **símbolos** ou **expressões**. Representamos o **tamanho** da matriz por $m \times n$, onde m se refere ao número de **linhas** e n ao número de **colunas**.

Podemos ver na matriz ao lado o uso de **índices** para indicar a *posição* de seus elementos.
O índice mn de um elemento a da matriz A indica que o elemento a se encontra na linha m e na coluna n. Esse índice abstrato pode ser dado por quaisquer letras de escolha, um caso comum é usarmos as letras i e j para indicar linha e coluna respectivamente.

$$A_{2\times 2} = \begin{array}{ll} \downarrow \textit{1}^a\ \textit{coluna} & \\ \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} & \begin{array}{l} \leftarrow \textit{1}^a\ \textit{linha} \\ \end{array} \end{array}$$

representação de uma matriz 2×2

Nota: Geralmente usamos alguma **letra maiúscula** do nosso alfabeto para representar uma matriz $(A, B, C, \ldots Z)$.

a. Representação

Uma matriz qualquer pode ser representada por:

$$A_{m\times n} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

Repare que para a indicação de matriz podemos usar tanto:

$$\text{(I) parênteses: } A_{m\times n} = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

quanto:

$$\text{(II) colchetes: } A_{m\times n} = \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

Capítulo 2 – Matrizes Notáveis

Temos alguns tipos de matrizes com propriedades especiais, as quais vamos destacar nesta seção.

I. Matriz Quadrada

Denominamos *quadrada* uma matriz onde o **número de linhas** é **igual** ao **número de colunas**. Nesse caso, ao invés de denotar seu tamanho pelos comprimentos $m \times n$ usamos somente uma de suas dimensões (dizemos então que a matriz é *quadrada de ordem* m).

$$B = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$$

Uma matriz 2×2 é quadrada, dizemos então que ela é *quadrada de ordem* 2.

Em toda matriz quadrada teremos duas **diagonais especiais**, chamadas *principal* e *secundária*.

a. Diagonal principal

A *diagonal principal* será formada pelos elementos a_{mn} onde $m = n$.

$$C = \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} \\ c_{21} & c_{22} & c_{23} \\ c_{31} & c_{32} & c_{33} \end{bmatrix}$$

b. Diagonal secundária

A *secundária* será formada pelos elementos a_{mn} tais que $m + n = \mathcal{O} + 1$ onde $\mathcal{O}$ é a ordem da matriz quadrada.

$$C = \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} \\ c_{21} & c_{22} & c_{23} \\ c_{31} & c_{32} & c_{33} \end{bmatrix}$$

Podemos ver a diagonal secundária grifada, onde os elementos obedecem a relação $m + n = 3 + 1\,(\mathcal{O} = 3)$

II. Matriz identidade

As matrizes *identidade* são outro tipo especial que consiste em uma matriz quadrada que possui 1's em sua diagonal principal e 0's em todas as outras posições. Denominamos *matriz identidade de ordem* n (denotada por I_n) uma matriz quadrada dessa ordem que satisfaz essas condições.

Veremos mais a frente que essa matriz será equivalente ao número 1 na operação de multiplicação de matrizes.

$$I_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

A matriz acima é uma *matriz identidade de ordem* 2

III. Matriz nula

Temos também as matrizes denominadas *nulas*, as quais possuem todos os seus elementos igualando 0 (nulos).

Uma matriz $m \times n$ que satisfaça essa condição é denotada por $0_{m\times n}$. Caso essa matriz seja quadrada podemos denotá-la por 0_n, onde n é a ordem da matriz (a qual vamos chamar de *matriz nula de ordem n*).

$$0_{3\times 2} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Acima temos uma *matriz nula* 3×2

IV. Matriz linha/coluna

Podemos ter também matrizes *linha* ou *coluna*, as quais são matrizes que se resumem a uma **linha** ou **coluna**, respectivamente.

$$A = \begin{bmatrix} a & b \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}$$

A matriz A é uma *matriz linha*, pois todos os seus elementos se encontram em uma única linha, já a matriz B é uma *matriz coluna*

V. Matriz triangular

Dizemos que uma matriz é *triangular* se esta, além de se quadrada, tiver todos os elementos acima ou abaixo da diagonal principal **nulos**.

a. Superior

Uma matriz triangular é dita *superior* se a parte **abaixo** da diagonal principal for nula.

$$A_3 = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ 0 & a_{22} & a_{23} \\ 0 & 0 & a_{33} \end{bmatrix}$$

A matriz acima é triangular superior de ordem 3, pois todos os elementos abaixo da diagonal principal são nulos

b. Inferior

Uma matriz triangular é dita *inferior* se a parte **acima** da diagonal principal for nula.

$$A_3 = \begin{bmatrix} a_{11} & 0 & 0 \\ a_{21} & a_{22} & 0 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$$

A matriz acima é triangular superior de ordem 3, pois todos os elementos abaixo da diagonal principal são nulos

VI. Matriz diagonal

Chamamos de *diagonal* uma matriz quadrada onde todos os elementos que não pertencem à diagonal principal são nulos.

$$A_4 = \begin{bmatrix} a_{11} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a_{22} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a_{33} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a_{44} \end{bmatrix}$$

A matriz acima é diagonal de ordem 4

Nota: Repare que se uma matriz triangular for **simultaneamente** superior e inferior, esta será uma matriz chamada *diagonal*.

VII. Matriz de Vandermonde

Vamos analisar um pequeno exemplo:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 3 & 5 & 2 \\ 9 & 25 & 4 \end{bmatrix}$$

Repare como a matriz acima pode ser escrita como:

$$\begin{bmatrix} 3^0 & 5^0 & 2^0 \\ 3^1 & 5^1 & 2^1 \\ 3^2 & 5^2 & 2^2 \end{bmatrix}$$

As matrizes que têm essa propriedade são chamadas *matrizes de Vandermonde*.

Definição: A matriz de *Vandermonde* é aquela onde cada **linha** ou **coluna** representa um **termo** de uma **progressão geométrica** de base a_n.

A matriz de *Vandermonde* ao lado possui PG's em suas **linhas**. Podemos ver que os expoentes começam em 0 e vão até $n-1$, aumentando para a direita.

$$V_{m\times n} = \begin{bmatrix} a_1^0 & a_1^1 & \cdots & a_1^{n-1} \\ a_2^0 & a_2^1 & \cdots & a_2^{n-1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_m^0 & a_m^1 & \cdots & a_m^{n-1} \end{bmatrix} \begin{array}{l} \longleftarrow \text{PG de base } a_1 \\ \longleftarrow \text{PG de base } a_2 \\ \\ \longleftarrow \text{PG de base } a_m \end{array}$$

A matriz de *Vandermonde* ao lado possui PG's em suas **colunas**. Podemos ver que os expoentes começam em 0 e vão até $n-1$, aumentando para baixo.

$$\begin{array}{cccc} \text{PG de base } a_1 & \text{PG de base } a_2 & & \text{PG de base } a_m \\ \downarrow & \downarrow & & \downarrow \end{array}$$

$$V_{n\times m} = \begin{bmatrix} a_1^0 & a_2^0 & \cdots & a_m^0 \\ a_1^1 & a_2^1 & \cdots & a_m^1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_1^{n-1} & a_2^{n-1} & \cdots & a_m^{n-1} \end{bmatrix}$$

Capítulo 3 – Operações com matrizes

I. Transposta

Definição Dada a matriz A, a *matriz transposta* de A (dentoada por A^t) é a matriz que encontramos trocando as **linhas** da matriz A por suas **colunas** e vice-versa (ordenadamente).

Exemplo 1

$$\text{Se } A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -3 \\ -1 & 7 & 2 \end{bmatrix} \Rightarrow A^t = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 7 \\ -3 & 2 \end{bmatrix}$$

II. Igualdade

Definição: Dadas duas matrizes A e B, dizemos que $A = B$ se, e somente se, A e B possuírem as **mesmas dimensões** e se, para todo elemento a_{mn} da matriz A tivermos um elemento b_{mn} da matriz B tal que $a_{mn} = b_{mn}$.

Exemplo 1

$$\text{Dados } A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \text{ e } B = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{bmatrix}, \text{ se } A = B \text{ segue que:}$$

$$a_{11} = b_{11}$$
$$a_{12} = b_{12}$$
$$a_{21} = b_{21}$$
$$a_{22} = b_{22}$$

Exemplo 2

$$\text{Se } A = B, \text{ então, se } A = \begin{bmatrix} -1 & 3 \\ 5 & 4 \end{bmatrix} \text{ sabemos que } B = \begin{bmatrix} -1 & 3 \\ 5 & 4 \end{bmatrix} \text{ também.}$$

Repare que todos os elementos são iguais, em suas respectivas posições

III. Adição

Definição: A adição de matrizes é a operação onde, dadas duas matrizes A e B com as mesmas dimensões, conseguimos uma matriz soma $(A + B)$ que será a matriz obtida adicionando-se os elementos correspondentes das matrizes A e B.

Exemplo 1

$$\text{Dadas } A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \text{ e } B = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{bmatrix}, \text{ a matriz } A + B \text{ será dada por:}$$

$$A + B = \begin{bmatrix} a_{11} + b_{11} & a_{12} + b_{12} \\ a_{21} + b_{21} & a_{22} + b_{22} \end{bmatrix}$$

Exemplo 2

$$\text{Se } A = \begin{bmatrix} -1 & 3 \\ -4 & 7 \end{bmatrix} \text{ e } B = \begin{bmatrix} 9 & 2 \\ -4 & 5 \end{bmatrix}, \text{ segue que}$$

$$A + B = \begin{bmatrix} -1+9 & 3+2 \\ -4-4 & 7+5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8 & 5 \\ -8 & 12 \end{bmatrix}$$

A soma de matrizes pode ser realizada em qualquer ordem ($A + B = B + A$ ou *"A ordem dos tratores não altera o viaduto"*), pode também ser realizada sem prioridade específica ($A + (B + C) = (A + B) + C$ ou *"tanto faz somar A com B e depois com C ou fazer B com C primeiro"*).

IV. Oposta

Definição: Dada uma matriz A, sua *matriz oposta* X é a que satisfaz a condição:

$$X + A = 0 \Rightarrow X = -A$$

Encontramos a *oposta* de A (denotada por $-A$) **trocando os sinais de todos os elementos** da matriz A original.

Exemplo 1

$$\text{Se } A = \begin{bmatrix} -1 & 3 \\ 5 & 8 \\ -5 & -2 \end{bmatrix} \Rightarrow -A = \begin{bmatrix} 1 & -3 \\ -5 & -8 \\ 5 & 2 \end{bmatrix}$$

V. Subtração

A *subtração* de matrizes funciona de forma similar a adição, bastando apenas **trocar os sinais** da matriz que estamos subtraindo.

$$\text{Dadas } A = \begin{bmatrix} -1 & 7 \\ -3 & 2 \end{bmatrix} \text{ e } B = \begin{bmatrix} 5 & -5 \\ -2 & 3 \end{bmatrix}, \text{ a matriz } A - B \text{ será dada por}$$

$$A - B = \begin{bmatrix} -1-5 & 7-(-5) \\ -3-(-2) & 2-3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -6 & 12 \\ -1 & -1 \end{bmatrix}$$

Repare que primeiro trocamos os sinais dos elementos da matriz B para depois somá-los.

VI. Multiplicação por constante

Na multiplicação de uma matriz por um número real basta multiplicarmos cada um de seus elementos pelo número.

$$\text{Dada a matriz } A = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ -1 & 6 \end{bmatrix} \Rightarrow 2A = \begin{bmatrix} 2\cdot 3 & 2\cdot 2 \\ 2\cdot(-1) & 2\cdot 6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 & 4 \\ -2 & 12 \end{bmatrix}$$

Capítulo 4 – Multiplicação de matrizes

I. Definição:

Dadas duas matrizes $A_{(m \times n)}$ e $B_{(n \times j)}$, a *multiplicação* de A por B, escrita como $A \cdot B$ vai se dar em algumas etapas:

a. Condição de existência

A *multiplicação de matrizes* só vai ser possível se o **número de colunas** da primeira for **igual** ao **número de linhas** da segunda ($A_{(m \times n)}$ e $B_{(n \times j)}$).

b. Formato

Após checada a condição de existência podemos prosseguir para o cálculo da multiplicação. O resultado dessa multiplicação terá dimensões $m \times j$, ou seja, terá **tantas linhas** quanto a matriz A e **tantas colunas** quanto a matriz B.

c. Cálculo

A matriz $C = A \cdot B$ terá seus elementos c_{ik} obtidos tomando-se a **linha** i da matriz A e a **coluna** k da matriz B **multiplicando-se** seus elementos **respectivos** (1º com 1º, 2º com 2º, em diante...) e **somando os produtos**.

Nota: A matriz $A \cdot B$ será **diferente** da matriz $B \cdot A$, não só por conta da **condição de existência** e do **formato**, mas também porque o cálculo de $A \cdot B$ tomará as **linhas** de A e as **colunas** de B, e o cálculo de $B \cdot A$ tomará as **linhas** de B e as **colunas** de A, o que é um processo **completamente** diferente.

Exemplo 1

$$\text{Dados } A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \text{ e } B = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{bmatrix}, \text{ seja } C = A \cdot B$$

Calculamos C fazendo:

$$C = \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{bmatrix}, \text{ onde}$$

$$c_{11} = a_{11} \cdot b_{11} + a_{12} \cdot b_{21}$$

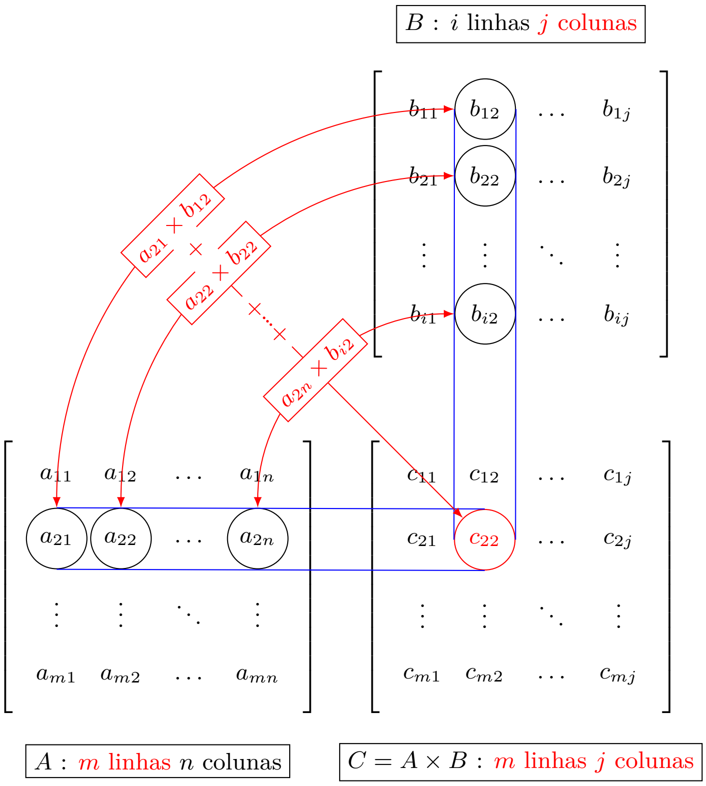
$$c_{12} = a_{11} \cdot b_{12} + a_{12} \cdot b_{22}$$

$$c_{21} = a_{21} \cdot b_{11} + a_{22} \cdot b_{21}$$

$$c_{22} = a_{21} \cdot b_{12} + a_{22} \cdot b_{22}$$

$$\text{resultando em } C = \begin{bmatrix} a_{11} \cdot b_{11} + a_{12} \cdot b_{21} & a_{11} \cdot b_{12} + a_{12} \cdot b_{22} \\ a_{21} \cdot b_{11} + a_{22} \cdot b_{21} & a_{21} \cdot b_{12} + a_{22} \cdot b_{22} \end{bmatrix}$$

d. Ilustrado



II. Na prática

$$\text{Dadas as matrizes } A = \begin{bmatrix} 1 & -5 & 7 \\ 12 & 3 & -9 \end{bmatrix} \text{ e } B = \begin{bmatrix} 4 & -2 \\ -3 & 1 \\ 2 & 7 \end{bmatrix}$$

calculamos $C = A \cdot B$ pelos seguinte passos:

1. Primeiro devemos checar a condição de existência do produto:

   Podemos ver que $A_{2\times3} \cdot B_{3\times2}$ obedece à condição de existência.

2. Agora vamos determinar as dimensões do produto $A \cdot B$:

   Tomando a quantidade de linhas de A (2) e a quantidade de colunas de B (2) temos $C_{2\times2}$.

3. Agora preencheremos a matriz resultante:

a. Usando a definição

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -5 & 7 \\ 12 & 3 & -9 \end{bmatrix} \text{ e } B = \begin{bmatrix} 4 & -2 \\ -3 & 1 \\ 2 & 7 \end{bmatrix}, \text{ logo } C = \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{bmatrix}, \text{ onde}$$

$$\begin{aligned} c_{11} &= 1 \cdot 4 + (-5) \cdot (-3) + 7 \cdot 2 \\ c_{12} &= 1 \cdot (-2) + (-5) \cdot 1 + 7 \cdot 7 \\ c_{21} &= 12 \cdot 4 + 3 \cdot (-3) + (-9) \cdot 2 \\ c_{22} &= 12 \cdot (-2) + 3 \cdot 1 + (-9) \cdot 7 \end{aligned}$$

$$\text{resultando em } C = \begin{bmatrix} 4 + 15 + 14 & (-2) + (-5) + 49 \\ 48 + (-9) + (-18) & (-24) + 3 + (-63) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 34 & 42 \\ 21 & -80 \end{bmatrix}$$

b. Uma visão alternativa

Vamos preencher a matriz C num ziguezague, conforme a figura abaixo.

$$C = \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{bmatrix}$$

Começamos, então, pelo elemento c_{11}. O digito vermelho se refere ao número da **linha** da primeira matriz e o digito azul ao número da **coluna** da segunda matriz.

Nesse caso pegaremos a primeira **linha** da matriz B e a primeira **coluna** da matriz A e vamos multiplicá-las.

$$c_{11} = \begin{bmatrix} 1 & -5 & 7 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 4 \\ -3 \\ 2 \end{bmatrix}$$

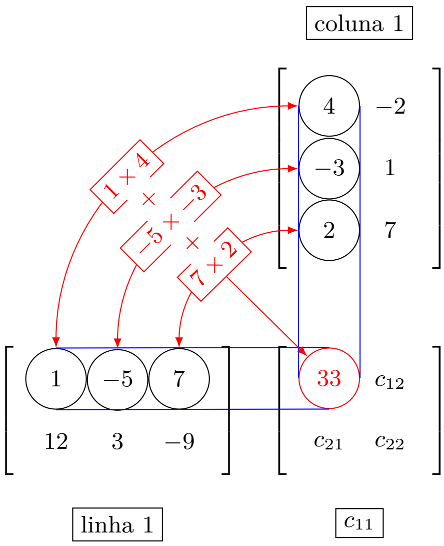
Agora podemos ter uma visão mais clara do processo. Se fizermos a *transposta* da linha de B ficamos com:

$$c_{11} = \begin{bmatrix} 1 \\ -5 \\ 7 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 4 \\ -3 \\ 2 \end{bmatrix}$$

A operação pode, então, ser feita facilmente agora. Vamos multiplicar os elementos correspondentes e somar todos no final, conforme é mostrado abaixo:

$$c_{11} = \begin{array}{rr} & 1 \cdot 4 \\ & (-5) \cdot (-3) \\ + & 7 \cdot 2 \\ \hline & 33 \end{array} \qquad \text{OU} \qquad \begin{aligned} c_{11} &= 1 \cdot 4 + (-5) \cdot (-3) + 7 \cdot 2 \\ &= 4 + 15 + 14 = 33 \end{aligned}$$

Essa operação seria o equivalente a preencher o primeiro elemento do diagrama:

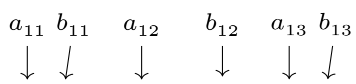


Podemos fazer o mesmo com os outros elementos da matriz C:

$$c_{12} = 1 \cdot (-2) + (-5) \cdot 1 + 7 \cdot 7 = 42$$
$$c_{21} = 12 \cdot 4 + 3 \cdot (-3) + (-9) \cdot 2 = 21$$
$$c_{22} = 12 \cdot (-2) + 3 \cdot 1 + (-9) \cdot 7 = -84$$

Preenchendo a matriz C, temos:

$$C = \begin{bmatrix} 33 & 42 \\ 21 & -84 \end{bmatrix}$$



Capítulo 5 – Matriz inversa

I. Definição

Dada uma matriz quadrada A, chamamos de *inversa* de A (escreve-se A^{-1}) a matriz que obedece a relação:

$$A \cdot A^{-1} = I_n \text{ onde } n \text{ é a dimensão da matriz quadrada } A.$$

II. Na prática

Exemplo 1

Dada a matriz $A = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}$, acharemos sua inversa resolvendo: $\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ -2 & 1 \end{bmatrix} \cdot A^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

Sabemos que A^{-1} será **quadrada também** (com as mesmas dimensões da matriz original A), sabemos que ela terá quatro elementos, aos quais vamos denominar a, b, c e d.

Nota: Os nomes de escolha pouco importam.

Ficamos, então, com a equação:

$$\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ -2 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Sabemos, por multiplicação de matrizes, que o produto $A \cdot A^{-1}$ resultará em:

$$\begin{bmatrix} 2 \cdot a + 3 \cdot c & 2 \cdot b + 3 \cdot d \\ (-2) \cdot a + 1 \cdot c & (-2) \cdot b + 1 \cdot d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

E, por igualdade de matrizes, ficamos com:

$$2 \cdot a + 3 \cdot c = 1 \tag{5.1}$$
$$2 \cdot b + 3 \cdot d = 0 \tag{5.2}$$
$$(-2) \cdot a + 1 \cdot c = 0 \tag{5.3}$$
$$(-2) \cdot b + 1 \cdot d = 1 \tag{5.4}$$

Agora basta resolver o sistema de equações para encontrar os valores de A^{-1}.

De 5.3 temos que $c = 2a$, substituindo em 5.1 temos que:

$$2a + 3 \cdot (2a) = 1 \Rightarrow 2a + 6a = 1 \Rightarrow a = \frac{1}{8}$$

Como $a = \frac{1}{8}$ segue que:

$$c = 2 \cdot \frac{1}{8} = \frac{1}{4}$$

Podemos encontrar b e d de forma similar:

De 5.2 temos que:

$$2b = -3d \Rightarrow b = -\frac{3d}{2}$$

substituindo em 5.4 temos:

$$-2 \cdot \left(-\frac{3d}{2}\right) + d = 1 \Rightarrow 3d + d = 1 \Rightarrow d = \frac{1}{4}$$

voltando a 5.2 temos que:

$$b = -\frac{3}{2}\left(\frac{1}{4}\right) \Rightarrow b = -\frac{3}{8}$$

Substituindo na matriz A^{-1} temos:

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} 1/8 & -3/8 \\ 1/4 & 1/4 \end{bmatrix}$$

Parte II

Determinantes

Capítulo 1 – Introdução

I. Um pouco de contexto

Historicamente, os determinantes eram usados muito anteriormente em relação às matrizes, e eram considerados uma propriedade dos sistemas lineares (abordados na Part III). Os determinantes "determinam" se um sistema linear qualquer tem ou não solução única.

O japonês *Seki Takakazu* ( ) leva o crédito da descoberta da resultante e do determinante (1683-1710) e, na Europa, depois que *Leibniz* introduziu o estudo dos determinantes, *Gabriel Cramer* expandiu a teoria relacionando-a à conjuntos de equações.

Vandermonde foi o primeiro a tratar os determinantes como funções independentes de sistemas lineares e *Laplace* contribuiu com o método geral para escrever um determinante através de seus cofatores. *Lagrange* e *Gauss*, utilizando os determinantes na teoria dos números, fizeram avanços importantes na teoria, e *Gauss* foi o primeiro a usar o nome *determinante*, embora não no sentido atual.

Foi *Cauchy* quem primeiro introduziu o termo *determinante* no sentido aceito atualmente, num trabalho publicado em 1812, anteriormente o termo *resultante* havia sido utilizado por *Laplace*.

Quem mais contribuiu para a teoria de determinantes foi *Carl G. J. Jacobi* (1804-1851). A simplicidade atual da apresentação dessa teoria se deve a ele.

II. Definição e resolução para $n \leqslant 3$

Podemos dizer que o *determinante* de uma matriz quadrada é o seu **valor numérico**.

Denotamos o *determinante* de uma matriz quadrada qualquer A por

$$\text{(I) } \det A \text{ , ou (II) } |A|$$

Exemplo 1

Seja a matriz $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$, denotamos seu determinante por $\det A = \det \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{vmatrix}$

a. Caso $n = 1$

Quando temos uma matriz com um único elemento seu determinante será esse elemento.

Exemplo 2

$$\text{Dada a matriz } A = [-2],\ \det A = -2$$

b. Caso $n = 2$

Quando temos uma matriz quadrada de ordem 2 basta tomar o produto dos elementos da **diagonal principal** e **subtraí-lo** pelo produto dos elementos da **diagonal secundária**.

Exemplo 3

$$\text{Dada a matriz } A = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ -3 & 1 \end{bmatrix}, \ \det A = 2 \cdot 1 - 3 \cdot (-3) \Rightarrow \det A = 2 + 9 = 11$$

c. Caso $n = 3$

Com uma matriz quadrada de grau 3 o processo é bastante similar ao do grau 2 (descrito logo acima).

Primeiro devemos **repetir** a primeira e a segunda colunas da matriz à sua direita (como mostrado em vermelho):

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} \Rightarrow$$

$$\det A = \left| \begin{matrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{matrix} \right| \begin{matrix} \color{red}{a_{11}} & \color{red}{a_{12}} \\ \color{red}{a_{21}} & \color{red}{a_{22}} \\ \color{red}{a_{31}} & \color{red}{a_{32}} \end{matrix}$$

Em seguida devemos calcular o **produto** das diagonais formadas:

$$\left[\begin{matrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{matrix} \right] \begin{matrix} \color{red}{a_{11}} & \color{red}{a_{12}} \\ \color{red}{a_{21}} & \color{red}{a_{22}} \\ \color{red}{a_{31}} & \color{red}{a_{32}} \end{matrix}$$

Ficamos com:

$$\det A =$$
$$a_{11} \cdot a_{22} \cdot a_{33} + a_{12} \cdot a_{23} \cdot a_{31} + a_{13} \cdot a_{21} \cdot a_{32}$$
$$-a_{13} \cdot a_{22} \cdot a_{31} - a_{22} \cdot a_{23} \cdot a_{32} - a_{31} \cdot a_{21} \cdot a_{33}$$

Note que as diagonais na direção da principal devem ser **somadas** e as contrárias devem ser **subtraídas**.

Nota: Esse método é chamado de *Regra de Sarrus*.

Capítulo 2 – Cofator

I. Definição

Dada uma matriz quadrada A, o cofator de A_{ij} é definido como o determinante (com sinal característico) da matriz A obtido **suprimindo-se** a linha i e a coluna j da matriz original A.

Basicamente, um cofator é definido como o **determinante** de um *recorte* da matriz original, com um sinal específico.

II. Na prática

Esse recorte se dá da seguinte forma:

Se $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$, fazendo o recorte do cofator A_{11} ficamos com

$$A_{11} = \det \begin{bmatrix} \cancel{a_{11}} & \cancel{a_{12}} & \cancel{a_{13}} \\ \cancel{a_{21}} & a_{22} & a_{23} \\ \cancel{a_{31}} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} \Rightarrow A_{11} = \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

Agora que o recorte está feito, basta tirar o determinante da matriz que sobrou e colocar um sinal nele para conseguir o cofator.

O sinal será explicado em detalhe no próximo capítulo, mas consiste em multiplicar o determinante por $(-1)^{i+j}$ onde i e j são o número da linha e da coluna que suprimimos.

Capítulo 3 – Teorema de Laplace

I. Introdução

Podemos encontrar o determinante de uma matriz quadrada de **qualquer** grau através desse teorema. Primeiro vamos escolher uma **coluna** ou **fileira** dessa matriz, uma boa prática é escolher baseando-se na que possuir **mais zeros** (veremos a razão para isso mais a frente).

Exemplo 1

$$\text{Dada a matriz } A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

seu determinante pode ser obtido pela fórmula:

$$\det A = a_{k1} \cdot A_{k1} + a_{k2} \cdot A_{k2} + \cdots + a_{kn} \cdot A_{kn}$$

OU

$$\det A = a_{1k} \cdot A_{1k} + a_{2k} \cdot A_{2k} + \cdots + a_{nk} \cdot A_{nk}$$

onde k é uma linha ou coluna qualquer da matriz A.

II. Passo a passo

1. Usando a coluna/fileira escolhida como referência (no exemplo vamos usar a 1ª coluna), multiplicar os elementos dessa fileira/coluna pelos cofatores da sua posição.

2. Em seguida devemos somá-los ou subtraí-los dependendo da soma $i+j$, caso seja par, somamos, caso seja ímpar devemos subtrair. (Isso vem da definição do cofator).

Exemplo 1

$$\text{Dada a matriz } A = \begin{bmatrix} 4 & 3 & -5 & 4 \\ 2 & 1 & 7 & 14 \\ 1 & -9 & 6 & 9 \\ 7 & 2 & -12 & -1 \end{bmatrix} \text{ tomamos sua 1ª coluna: } \begin{bmatrix} 4 \\ 2 \\ 1 \\ 7 \end{bmatrix}$$

Pegamos elemento a elemento e **multiplicamos** pelo *cofator* de sua posição. O primeiro elemento da coluna é o 4, sua posição é 11, então fazemos:

$$4 \cdot A_{11}$$

Repetimos isso para todos os elementos dessa fileira:

$2 \cdot A_{11}$ $1 \cdot A_{31}$ $7 \cdot A_{41}$

Agora devemos determinar o **sinal** de cada um desses produtos. A regra diz, se a soma dos dígitos da posição for **par**, o sinal vai ser **positivo** e se for **ímpar** o sinal deverá ser **negativo**.

Para o elemento a_{11} (4) ficamos com $+\ 4 \cdot A_{11}$, pois $1 + 1 = 2$ que é **par**.

Somando todos os elementos conseguimos o determinante:

$$\det A = +"4 \cdot A_{11} - 2 \cdot A_{11} + 1 \cdot A_{31} - 7 \cdot A_{41}$$

Para encontrar os cofatores podemos aplicar o método **novamente** (isso se chama **recursão**).

Como cada cofator é multiplicado por um elemento da matriz, no caso de algum desses elementos ser 0 não precisaremos calcular esse cofator. Por isso é boa prática selecionar a coluna/fileira com a **maior quantidade de zeros**.

Capítulo 4 – Teorema de Jacobi

I. Introdução

O teorema diz que, se tomarmos uma matriz quadrada qualquer A podemos **somar** uma coluna c dessa matriz à uma outra coluna c' qualquer (também da matriz) multiplicada por uma **constante** k de escolha, e esse processo **não altera** o valor do determinante dessa matriz.

Exemplo 1

$$\text{Dada a matriz } A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}, \text{ podemos fazer}$$

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} + k \cdot a_{11} \\ a_{21} & a_{22} + k \cdot a_{22} \end{bmatrix}, \text{ onde } \det B = \det A$$

II. Aplicação

A utilidade desse teorema não é clara à primeira vista, mas vamos discorrer uma técnica que esclarece seu uso:

1. Primeiro devemos tomar uma **coluna de referência**, vamos usar a primeira coluna (em vermelho).

$$A = \begin{bmatrix} 4 & -2 & 8 \\ 3 & 7 & -2 \\ 5 & 1 & -1 \end{bmatrix}$$

2. Agora temos que escolher uma linha. Para o exemplo vamos usar a primeira (em verde).

$$\begin{bmatrix} -2 & 8 \\ 7 & -2 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$$

3. Vamos aplicar o teorema de *Jacobi* de modo a **zerar** essa linha. Para facilitar podemos usar uma equação. Para zerar o -2 podemos fazer:

$$-2 + 4 \cdot k_1 = 0 \Rightarrow k_1 = 1/2$$

4. Repare o que ocorre:
   (a) Pegamos a coluna de referência e vamos usá-la com *Jacobi* nas duas outras.
   (b) Escolhemos alguma linha e vamos usar o teorema com o objetivo de zerá-la.

5. Continuando. Para zerar o 8 segue:

$$8 + 4 \cdot k_2 = 0 \Rightarrow k_2 = -2$$

Nota: Repare que para cada coluna podemos usar uma constante **diferente** (k_1 e k_2 nesse caso).

Aplicando o teorema na segunda coluna (em azul) ficamos com:

$$A = \begin{bmatrix} 4 & -2 + {}^{1}\!/_{2} \cdot 4 & 8 \\ 3 & 7 + {}^{1}\!/_{2} \cdot 3 & -2 \\ 5 & 1 + {}^{1}\!/_{2} \cdot 5 & -1 \end{bmatrix}$$

A coluna de referência é **multiplicada** pela **constante** e **somada** à segunda coluna, realizando a operação ficamos com:

$$A = \begin{bmatrix} 4 & -2 + 2 & 8 \\ 3 & 7 + {}^{3}\!/_{2} & -2 \\ 5 & 1 + {}^{5}\!/_{2} & -1 \end{bmatrix} \Rightarrow A = \begin{bmatrix} 4 & 0 & 8 \\ 3 & {}^{17}\!/_{2} & -2 \\ 5 & {}^{7}\!/_{2} & -1 \end{bmatrix}$$

Agora vamos aplicar o teorema à terceira coluna usando a outra constante (-2):

$$A = \begin{bmatrix} 4 & 0 & 8 + (-2) \cdot 4 \\ 3 & {}^{17}\!/_{2} & -2 + (-2) \cdot 3 \\ 5 & {}^{7}\!/_{2} & -1 + (-2) \cdot 5 \end{bmatrix} \Rightarrow$$

$$A = \begin{bmatrix} 4 & 0 & 8 - 8 \\ 3 & {}^{17}\!/_{2} & -2 - 6 \\ 5 & {}^{7}\!/_{2} & -1 - 10 \end{bmatrix} \Rightarrow A = \begin{bmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 3 & {}^{17}\!/_{2} & -8 \\ 5 & {}^{7}\!/_{2} & -11 \end{bmatrix}$$

Agora podemos ver como esse teorema pode ser útil, se quisermos usar o *teorema de Laplace* para encontrar o determinante da matriz A faremos pouquíssimas operações pois temos uma fileira quase toda zerada.

Capítulo 5 – Regra de Chió (abaixamento de grau)

I. Introdução

A *regra de Chió* tem como base os teoremas de *Laplace* e *Jacobi*. Basicamente, quando uma matriz tem seu elemento $a_{11} = 1$, usando a **primeira coluna** como referência e aplicando o teorema de *Jacobi* **sucessivamente** poderemos usar *Laplace* facilmente.

II. Aplicação (com variáveis)

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -3 & 12 & 5 \\ 5 & 9 & -1 & 2 \\ -2 & 4 & 4 & -1 \\ 7 & 1 & 2 & 0 \end{bmatrix}$$

Repare que o elemento a_{11} (em azul claro) tem valor 1, como desejamos. Usaremos a **primeira coluna** (em vermelho) como **referência** para aplicar o teorema de *Jacobi*, com o objetivo de **zerar** a **primeira linha** (em verde). Fazendo o passo a passo para o teorema de *Jacobi* podemos notar que por conta do elemento $a_{11} = 1$ as constantes vão ser o **oposto** dos números da primeira linha. Por exemplo:

$$-3 + 1 \cdot k_1 = 0 \Rightarrow k_1 = 3$$

Que é o oposto de -3. Aplicando *Jacobi*, temos:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -3+3\cdot 1 & 12+(-12)\cdot 1 & 5+(-5)\cdot 1 \\ 5 & 9+3\cdot 5 & -1+(-12)\cdot 5 & 2+(-5)\cdot 5 \\ -2 & 4+3\cdot(-2) & 4+(-12)\cdot(-2) & -1+(-5)\cdot(-2) \\ 7 & 1+3\cdot 7 & 2+(-12)\cdot 7 & 0+(-5)\cdot 7 \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & -3+3 & 12-12 & 5-5 \\ 5 & 9+15 & -1-60 & 2-25 \\ -2 & 4-6 & 4+24 & -1+10 \\ 7 & 1+21 & 2-84 & 0-35 \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 5 & 24 & -61 & -23 \\ -2 & -2 & 28 & 9 \\ 7 & 22 & -82 & -35 \end{bmatrix}$$

Agora podemos aplicar o teorema de *Laplace* usando a **primeira linha** da matriz A (em azul):

$$\det A = 1 \cdot A_{11} - 0 \cdot_{12} - 0 \cdot A_{13} - 0 \cdot A_{14} \Rightarrow \det A = A_{11}$$

Podemos ver que utilizando o método descrito podemos reduzir o determinante de uma matriz à apenas **um** de seus cofatores.

III. Uma visão alternativa

Outra forma de ver esse método é memorizando a seguinte receita:

$$\text{Dada a matriz } A = \begin{bmatrix} 1 & -3 & 12 & 5 \\ 5 & 9 & -1 & 2 \\ -2 & 4 & 4 & -1 \\ 7 & 1 & 2 & 0 \end{bmatrix}$$

1. Verificamos se o primeiro elemento da matriz (a_{11}) é igual à 1.

2. Prosseguimos com o seguinte método:

Pegamos os elementos da **primeira linha** e da **primeira coluna**, multiplicamos eles **ordenadamente** um pelo outro e **subtraímos** do elemento que se encontra na junção deles.

No exemplo abaixo nós vamos começar multiplicando -3 (2º elemento da 1ª linha) por 5 (2º elemento da 1ª coluna) e, então, vamos subtrair de 9 (que é o elemento que encontramos seguindo as linhas laranjas).

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -3 & 12 & 5 \\ 5 & 9 & -1 & 2 \\ -2 & 4 & 4 & -1 \\ 7 & 1 & 2 & 0 \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & -3 & 12 & 5 \\ 5 & 9-(-3)\cdot 5 & -1 & 2 \\ -2 & 4 & 4 & -1 \\ 7 & 1 & 2 & 0 \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & -3 & 12 & 5 \\ 5 & 24 & -1 & 2 \\ -2 & 4 & 4 & -1 \\ 7 & 1 & 2 & 0 \end{bmatrix}$$

Agora realizamos o mesmo procedimento para os outros elementos da matriz:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -3 & 12 & 5 \\ 5 & 24 & -1 & 2 \\ -2 & 4 & 4 & -1 \\ 7 & 1 & 2 & 0 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & -3 & 12 & 5 \\ 5 & 24 & -1-12\cdot 5 & 2-5\cdot 5 \\ -2 & 4-(-3)\cdot(-2) & 4-12\cdot(-2) & -1-5\cdot(-2) \\ 7 & 1-(-3)\cdot 7 & 2-12\cdot 7 & 0-5\cdot 7 \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & -3 & 12 & 5 \\ 5 & 24 & -61 & -23 \\ -2 & -2 & 28 & 9 \\ 7 & 22 & -82 & -35 \end{bmatrix}$$

A regra de Chió nos diz que, após aplicar a receita descrita, o cofator A_{11} é **igual** ao determinante da matriz A.

$$A_{11} = \begin{vmatrix} 24 & -61 & -23 \\ -2 & 28 & 9 \\ 22 & -82 & -35 \end{vmatrix} = \det A$$

Capítulo 6 – Casos interessantes

I. Matriz transposta

O determinante de uma matriz quadrada qualquer A_n será **igual** ao determinante de sua **transposta**.

$$\det A_n = \det A_n^t$$

II. Fila nula

Caso haja qualquer **linha** ou **coluna nula** em uma matriz seu determinante será **zero**.

Dada a matriz $A_n = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & 0 & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & 0 & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & 0 & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$, $\det A_n = 0$ pois sua 3ª coluna é nula.

III. Multiplicação de uma fila por uma constante

Se toda uma **linha** ou **coluna** de uma matriz quadrada qualquer A_n for **multiplicada** por um valor, podemos **reescrever** o determinante como sendo multiplicado por aquele valor (e retirá-lo da matriz).

Exemplo 1

$$\text{Dado o } \det A_n = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & k \cdot a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & k \cdot a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & k \cdot a_{n3} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

podemos reescrever esse determinante como

$$k \cdot \det A_n = k \cdot \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

Exemplo 2

$$\text{Dada a matriz } A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 8 \\ 7 & -9 & 1 \\ -2 & 4 & -6 \end{bmatrix}, \text{ que pode ser reescrita como:}$$

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 8 \\ 7 & -9 & 1 \\ -1 \cdot 2 & 2 \cdot 2 & -3 \cdot 2 \end{bmatrix} \text{ temos que } \det A = 2 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 3 & 8 \\ 7 & -9 & 1 \\ -1 & 2 & -3 \end{vmatrix}$$

IV. Multiplicação da matriz inteira por uma constante

Se uma matriz quadrada A_n **inteira** for **multiplicada** por uma constante k podemos **retirá-la** da matriz e seu determinante será **igual** a constante **elevada** a ordem da matriz (k^n) **multiplicado** pelo determinante da matriz **sem a constante**.

$$\text{Se } k \cdot A_n = \begin{bmatrix} k \cdot a_{11} & k \cdot a_{12} & \cdots & k \cdot a_{1n} \\ k \cdot a_{21} & k \cdot a_{22} & \cdots & k \cdot a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ k \cdot a_{m1} & k \cdot a_{m2} & \cdots & k \cdot a_{mn} \end{bmatrix} \text{, então, segue que}$$

$$\det(k \cdot A_n) = k^n \cdot \det A_n$$

Exemplo 1

$$\text{Dada a matriz } A = \begin{bmatrix} 3 & -6 & -3 \\ 12 & 15 & 0 \\ 9 & -9 & 2 \end{bmatrix} \text{, que pode ser reescrita como:}$$

$$A = \begin{bmatrix} 1 \cdot 3 & -2 \cdot 3 & -1 \cdot 3 \\ 4 \cdot 3 & 5 \cdot 3 & 0 \cdot 3 \\ 3 \cdot 3 & -3 \cdot 3 & 2/3 \cdot 3 \end{bmatrix} = 3 \cdot \begin{bmatrix} 1 & -2 & -1 \\ 4 & 5 & 0 \\ 3 & -3 & 2/3 \end{bmatrix} \text{ temos que } \det A = 3^3 \cdot \begin{vmatrix} 1 & -2 & -1 \\ 4 & 5 & 0 \\ 3 & -3 & 2/3 \end{vmatrix}$$

V. Troca de filas paralelas

Caso **troquemos** duas **linhas** ou duas **colunas distintas** de uma matriz quadrada A_n, criamos uma nova matriz B_n tal que:

$$\det B_n = -\det A_n$$

Exemplo 1

$$\text{Dada a matriz } A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$$

trocando a 1ª coluna pela 2ª coluna temos uma nova matriz B tal que:

$$B = \begin{bmatrix} b & a \\ d & c \end{bmatrix} \text{ onde } \det B = -\det A$$

VI. Filas paralelas iguais ou proporcionais

Caso duas **linhas** ou **colunas distintas** sejam **múltiplas** uma da outra em uma matriz quadrada A_n seu determinante será igual a 0.

Exemplo 1

$$\text{Dada a matriz } A = \begin{bmatrix} 1 & -4 & 1 \\ 2 & 5 & 2 \\ 3 & 12 & 3 \end{bmatrix}$$

Como a primeira coluna é múltipla da terceira (multiplicada por 1):

$$\det A = 0$$

Exemplo 2

$$\text{Dada a matriz } A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & -5 \\ 7 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 15 \end{bmatrix}$$

Como a segunda coluna é múltipla da terceira (multiplicada por -5):

$$\det A = 0$$

VII. Matriz inversa

Dada uma matriz quadrada A_n, o determinante de sua **inversa** obedece à relação:

$$\det A_n^{-1} = \frac{1}{\det A_n}$$

VIII. Matriz triangular

O determinante de uma matriz triangular A_n onde n é a ordem dessa matriz será o produto dos elementos de sua diagonal principal. Isso é válido para todo n.

Exemplo 1

$$\det A = \begin{vmatrix} a_{11} & 0 & 0 \\ a_{21} & a_{22} & 0 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11} \cdot a_{22} \cdot a_{33}$$

IX. Matriz identidade

O determinante de uma matriz identidade I_n onde n é a ordem dessa matriz será igual a 1 para qualquer valor possível de n.

$$\det I_n = 1$$

Nota: Repare que a matriz identidade é meramente um caso específico de uma matriz triangular, e, portanto, como o determinante de uma matriz triangular qualquer será o produto de sua diagonal principal, segue que $\det I_n = 1 \cdot 1 \cdot 1 \ldots 1 = 1$ sempre.

X. Multiplicação de matrizes

O determinante de uma matriz $C = A \cdot B$ vai ser igual ao produto dos determinantes das matrizes A e B.

$$\det C = \det(A \cdot B) = \det A \cdot \det B$$

XI. Matriz de Vandermonde

O determinante de uma matriz de *Vandermonde* quadrada V_n de ordem n será dado pelo produto de todas as diferenças possíveis entre os elementos da linha/coluna onde estão as bases das PG's da matriz. As diferenças devem ser de um elemento qualquer (que não será o primeiro da linha/coluna) subtraído de algum que vem antes dele (e que não será o último da linha/coluna).

Exemplo 1

$$\text{Dada a matriz de } \textit{Vandermonde } V = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 16 \\ 1 & 9 & 81 \\ 1 & 5 & 25 \end{bmatrix}$$

vamos, primeiro, isolar a coluna dessa matriz onde estão as bases das PG's:

$$\begin{bmatrix} 4 \\ 9 \\ 5 \end{bmatrix}$$

as diferenças possíveis entre dois elementos dessa coluna que respeitam a condição de o *minuendo* (termo que vem primeiro, da qual se subtrai) estar em uma posição posterior ao *subtraendo* (termo que vem depois, que é subtraído) são:

$$9 - 4$$
$$5 - 4$$
$$5 - 9$$

podemos calcular o determinante de V fazendo:

$$\det V = (5 - 9) \cdot (9 - 4) \cdot (5 - 4) = (-4) \cdot 5 \cdot 1 = -20$$

Parte III

Sistemas lineares

Capítulo 1 – Introdução

Os sistemas lineares tem sua história emendada aos determinantes e às matrizes, sendo um tópico amplamente estudado e desenvolvido no ramo da álgebra linear, do qual é base e parte fundamental.

I. Definição

Um *sistema linear* consiste em um tipo de equação onde temos diferentes incógnitas (x, y, z ...), **multiplicadas** por valores **reais** (chamados *coeficientes*) e **igualados** à um número que **não multiplica** nenhuma incógnita (chamado *termo independente*) e que **também** é real.

Exemplo 1

coeficientes termo independente

$$2x + 3y = 4$$

incógnitas

Repare que o mesmo sistema pode ser reescrito como:

$$2x + 3y - 4 = 0$$

Se alguma das incógnitas estiver sendo multiplicada por **outra coisa** que **não seja** um número real, nosso sistema **não será** mais linear e, portanto, não nos interessa mais.

Exemplo 2

1. O sistema $x^2 + 2y = 0$ não é linear, pois $x \cdot x$ foge da nossa definição.
2. O sistema $x \cdot y + y = 3$ não é linear, pois $x \cdot y$ foge da nossa definição.
3. O sistema $x + \sqrt{y} = 2$ não é linear, pois $\sqrt{y}$ foge da nossa definição.

Para resolver um sistema linear dispomos de alguns métodos já estudados previamente, como, por exemplo:

(I) Substituição

(II) Adição

(III) Escalonamento

Aqui focaremos no terceiro método, juntamente de outros que nos permitem classificar um sistema de forma útil.

Capítulo 2 – Forma matricial

Todo sistema linear pode ser escrito na *forma matricial*, realizando alguns passos...

I. Passo a passo

1. É necessário avaliar se nosso sistema é ou não linear.
2. É necessário organizar o sistema de forma adequada.

Exemplo 1

Dado o sistema $S_1 \begin{cases} 2x + 3y - 4 = 0 \\ -\,y + x = 2 \end{cases}$, podemos reescrevê-lo como:

$$S_1 \begin{cases} 2x + 3y = 4 \\ x + (-\,y) = 2 \end{cases}$$

Note que:

(a) **Separamos** as incógnitas (junto com seus coeficientes) do **termo independente**.

(b) Colocamos incógnitas **correspondentes** na mesma **coluna** (verde em baixo de verde e vermelho em baixo de vermelho).

3. Vamos **identificar** os coeficientes e escrevê-los:

Exemplo 2

Dado o sistema $S_2 \begin{cases} x - 3y + 2z = 2 \\ 2y - z = 1 \end{cases}$, podemos reescrevê-lo como:

$$S_2 \begin{cases} 1x - 3y + 2z = 2 \\ 0x + 2y - z = 1 \end{cases}$$

O passo a passo pode ser descrito como:

(a) **Identificamos** quais são as incógnitas (no caso, x, y e z).

(b) **Reescrevemos a equação** (similar ao passo anterior), mas agora colocando os coeficientes **explicitamente** (sem omitir 0's ou 1's).

4. Vamos escrever os **coeficientes** em **colunas** de uma matriz (cada sistema será **uma linha**).

Exemplo 3

$$S_3 \begin{cases} 2x - 1y + 1z = 0 \\ 0x + 1y - 1z = 3 \\ 5x + 2y - 3z = -2 \end{cases}$$

$$\begin{bmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 5 & 2 & -3 \end{bmatrix}$$

5. Vamos reescrever a matriz do passo anterior sendo **multiplicada** por uma matriz com as incógnitas.

   A partir do último exemplo:

$$\begin{bmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 5 & 2 & -3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$$

   Repare que elas estão escritas na **mesma ordem**, porém de cima pra baixo.

6. Por fim, basta **igualar** esse produto aos termos independentes, também em forma de matriz.

   Continuando o exemplo dos passos anteriores:

$$\begin{bmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 5 & 2 & -3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 3 & -2 \end{bmatrix}$$

Capítulo 3 – Soluções de um sistema linear

I. O que são?

As **soluções** para um dado sistema linear devem ser escritas organizadamente em uma **ênupla** (coordenada com n posições, a palavra vem de *n-upla*) **ordenada** (pois tem uma ordem específica) **de reais**. Uma solução de um sistema linear consiste em uma série de valores que deverá resolver o sistema de igualdades proposto.

Exemplo 1

No sistema

$$S_1 \begin{cases} 2x + y = 1 \\ 2x - y = 3 \end{cases}$$

temos como solução a ênupla $(1, -1)$, pois se substituirmos x e y por esses números respectivamente, teremos as igualdades

$$S_1 \begin{cases} 2 \cdot 1 + (-1) = 1 \\ 2 \cdot 1 - (-1) = 3 \end{cases}$$

Repare que na ênupla o primeiro número substitui a incógnita x e o segundo, y. A posição de cada valor na ênupla nos dirá qual incógnita cada valor deverá substituir (daí vem o termo *ordenada*).

Capítulo 4 – Teorema de Cramer

I. O que é?

Esse teorema nos diz que, dado um sistema linear S que tenha o **mesmo número** de incógnitas e expressões, se o colocarmos na forma matricial poderemos tomar seu determinante D, e, caso esse seja diferente de 0, poderemos **determinar** os valores da **única solução possível** desse sistema.

II. Passo a passo

$$\text{Dado o sistema } S_1 \begin{cases} 2x - 3y = 0 \\ x + 2y = 2 \end{cases}$$

1. Primeiro devemos checar se o número de **incógnitas** é **igual** ao número de **expressões**.

   No sistema acima isso é verdadeiro, pois temos x e y (duas incógnitas) e temos duas expressões (duas linhas).

   Nota: Caso o sistema tenha mais expressões do que incógnitas podemos ignorar algumas das expressões a fim de realizar os cálculos necessários com esse sistema.

2. Agora podemos escrever o sistema em *forma matricial*, para a realização desse teorema basta escrever a **primeira parte**, formada pelos **coeficientes**. Chamaremos essa matriz de A.

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -3 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$$

3. Devemos, então, tomar o **determinante** desse sistema.

   Chamaremos esse determinante de D.

$$D = \det A = 2 \cdot 2 - (-3) \cdot 1 \Rightarrow D = 4 + 3 = 7$$

4. Se o determinante D for **diferente** de zero, podemos prosseguir com o teorema.

   No sistema que estamos utilizando isso se verifica.

III. Encontrando a única solução possível

1. Para encontrar o **valor** de uma incógnita i qualquer (valor esse que **resolverá** o sistema) devemos **repetir** a matriz dos coeficientes (A) e trocar a coluna representada por essa incógnita de escolha por uma coluna feita **a partir** dos termos independentes. O determinante da nova matriz será chamado D_i.

Continuando com o mesmo exemplo, vamos resolver para x:

$$D_x = \begin{vmatrix} 0 & -3 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} \Rightarrow D_x = 0 \cdot 2 - (-3) \cdot 2 = 6$$

Repare que substituímos os termos da coluna que representa os coeficientes de x por uma coluna formada pelos termos independentes (em verde), que devem estar na **mesma ordem** do sistema.

2. O valor solução α_i da incógnita escolhida (i) será encontrado pela equação:

$$\alpha_i = \frac{D_i}{D}$$

Seguindo com o exemplo, fazemos:

Substituíndo $\alpha_x = \dfrac{D_x}{D}$ pelos valores que possuímos, encontramos $\alpha_x = \dfrac{6}{7}$

3. Agora devemos repetir o processo para as outras incógnitas.

Fazendo para y temos:

$$D_y = \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} \Rightarrow D_y = 2 \cdot 2 - 0 \cdot 2 = 4$$

$$\alpha_y = \frac{D_y}{D} \Rightarrow \alpha_y = \frac{4}{7}$$

4. Por fim, escrevemos a solução encontrada em forma de ênupla.

$$\left({}^{6}/_{7},\ {}^{4}/_{7}\right)$$

5. **(Extra)** Caso ache necessário, basta substituir os valores da ênupla nas expressões do sistema para **testar** a solução.

$$S_1 \begin{cases} 2 \cdot \dfrac{6}{7} - 3 \cdot \dfrac{4}{7} = 0 \\ \dfrac{6}{7} + 2 \cdot \dfrac{4}{7} = 2 \end{cases} \Rightarrow S_1 \begin{cases} \dfrac{12 - 12}{7} = 0 \\ \dfrac{6 + 8}{7} = 2 \end{cases} \Rightarrow S_1 \begin{cases} \dfrac{0}{7} = 0 \\ \dfrac{14}{7} = 2 \end{cases}$$

Capítulo 5 – Escalonamento

I. Introdução

Para resolver e diferenciar os sistemas lineares dispomos da técnica chamada *escalonamento*. Essa técnica consiste em um **algoritmo** (outra palavra para *receita*) onde vamos, através de soma e multiplicação, **zerar** coeficientes das expressões de um sistema linear, um por um.

II. Algoritmo (ou receita)

1. Devemos escolher alguma das expressões de um sistema para usar como **referência**. É boa prática escolher uma expressão onde os coeficientes são **menores**. **Exemplo 1**

$$S_1 \begin{cases} x + y - z = 2 \\ 3x - 4y + 2z = 1 \\ 5x + 2y - z = 7 \end{cases}$$

Vamos usar a primeira expressão (em vermelho). Vamos chamá-la de S_a.

2. Agora vamos **escolher** alguma incógnita com o objetivo de **zerar** seu **coeficiente**. Nessa etapa podemos organizar as expressões colocando a escolhida **em cima** das outras.

Continuação:

$$S_1 \begin{cases} x + y - z = 2 & (S_a) \\ 3x - 4y + 2z = 1 & (S_b) \\ 5x + 2y - z = 7 & (S_c) \end{cases}$$

A expressão referência se encontra **acima** das que pretendemos mexer (S_a acima de S_b e S_c).

3. Através de equação podemos encontrar valores que, **multiplicados** à primeira equação, vão **zerar** o **coeficiente** da incógnita de escolha nas outras.

A expressão S_a multiplicada por uma constante k_1 e somada à expressão S_b deverá zerar o coeficiente que multiplica x:

$$S_a \times k_1 + S_b = 0$$

Porém, como é **absurdo** fazer contas para n valores ao mesmo tempo, vamos focar no que nos interessa, o valor de x nas expressões S_a e S_b. Para isso basta **substituir as expressões** S_a e S_b por seus **respectivos coeficientes** de x:

$$1 \cdot k_1 + 3 = 0$$

Resolvendo, temos:

$$1 \cdot k_1 + 3 = 0 \Rightarrow k = -3$$

Fazendo o mesmo para S_a e S_c, temos:

$$S_a \times k_2 + S_c \Rightarrow 1 \cdot k_2 + 5 = 0 \Rightarrow k = -5$$

Nota: O valor k_1 (que zera o coeficiente de x em S_b) **não necessariamente** é o mesmo que k_2 (que zera o coeficiente de x em S_c).

4. Agora basta **multiplicar** a expressão de **referência** pelo valor encontrado e **somar** às outras expressões.

Como os valores que zeram cada uma são **diferentes**, executamos esse passo **independentemente**.

Sabemos que $k_1 = -3$ zera a expressão S_b, então faremos:

$$\begin{array}{c}
(x + y - z = 2) \times (-3) + S_b \Rightarrow \\
(-3x - 3y + 3z = -6) + S_b \Rightarrow \\
\begin{array}{rr}
 & -3x - 3y + 3z = -6 \\
+ & 3x - 4y + 2z = 2 \\
\hline
 & 0x - 7y + 5z = -4
\end{array}
\end{array}$$

Colocando a nova expressão no lugar de S_b, ficamos com:

$$S_1 \begin{cases} x + y - z = 2 \\ 0x - 7y + 5z = -4 \\ 5x + 2y - z = 7 \end{cases}$$

Nota: a expressão de referência (S_a) **não se altera**, e nem a expressão S_c. No escalonamento só alteramos **uma expressão de cada vez**.

Vamos fazer a mesma coisa para S_a e S_c. Sabemos que $k = -5$ zera a expressão S_c, então fazemos:

$$\begin{array}{c}
(x + y - z = 2) \times (-5) + S_c \Rightarrow \\
(-5x - 5y + 5z = -10) + S_c \Rightarrow \\
\begin{array}{rr}
 & -5x - 5y + 5z = -10 \\
+ & 5x + 2y - z = 7 \\
\hline
 & 0x - 3y + 4z = -3
\end{array}
\end{array}$$

Colocando a nova expressão no lugar de S_c, temos:

$$S_1 \begin{cases} x + y - z = 2 \\ 0x - 7y + 5z = -4 \\ 0x - 3y + 4z = -3 \end{cases}$$

5. Por fim, devemos repetir os passos 1 a 4 escolhendo **outra incógnita** para "zerar" e outra expressão como referência, **sem mexer** na referência anterior.

Usando S_b como referência para zerar o coeficiente y em S_c temos:

$$S_b \times k_3 + S_c = 0 \Rightarrow -7 \cdot k + (-3) = 0 \Rightarrow k_3 = {}^3\!/_7$$

Como não devemos alterar as referências anteriores (expressão S_a), basta encontrar o valor k_3 para zerar o coeficiente y em S_c.

Fazendo a conta ficamos com:

$$
\begin{gathered}
(-7 + 5z = -4) \times \left(-{}^{3}/_{7}\right) + S_c \Rightarrow \\
\left(3y - \frac{15}{7} = -\frac{12}{7}\right) + S_c \Rightarrow \\
\begin{array}{rr}
 & 3y - \dfrac{15}{7} = -\dfrac{12}{7} \\
+ & -3y + 4z = -3 \\
\hline
 & 0y + \dfrac{13}{7}z = -\dfrac{33}{7}
\end{array}
\end{gathered}
$$

Colocando a nova expressão no lugar de S_c temos:

$$
S_1 \begin{cases}
x + y - z = 2 \\
0x - 7y + 5z = -4 \\
0x + 0y + \dfrac{13}{7} = -\dfrac{33}{7}
\end{cases}
$$

Podemos ver que a cada vez que **repetimos** o algoritmo zeramos os coeficientes de **outra incógnita**.

Agora que não há mais expressões para mexer, pois devemos ter pelo menos uma nova referência e uma outra expressão para mexer (e no momento só teríamos uma referência e mais nada), podemos, então, interromper o algoritmo.

Capítulo 6 – Classificação dos sistemas lineares

I. Introdução

A partir do teorema de *Cramer* e da técnica do *escalonamento* podemos **classificar** os sistemas lineares em **três** tipos:

(I) S.P.D. $\Rightarrow$ Sistema Possível Determinado

(II) S.P.I. $\Rightarrow$ Sistema Possível Indeterminado

(III) S.I. $\Rightarrow$ Sistema Impossível

O primeiro já foi abordado anteriormente (veja o chapter 4). Todo sistema onde o determinante dos coeficientes (chamado D) for diferente de 0 será S.P.D.

O segundo e terceiro tipos ocorrerão quando $D = 0$. No segundo teremos **infinitas soluções possíveis** e no terceiro, **nenhuma** (daí o nome *impossível*).

II. Classificação

No exemplo do chapter 5 usamos um sistema onde $D \neq 0$ e, então, caímos no caso S.P.D., porém se fosse o caso $D = 0$ a classificação em S.P.I. ou S.I. se faria necessária.

(I) O caso **S.P.I.** ocorre quando:

(a) após o escalonamento, ocorrer uma expressão do tipo:

$0a + 0b + 0c + \cdots + 0z = 0$ onde $(a, b, c, \ldots, z)$ representam incógnitas.

Repare que nesse caso temos **incógnitas** do sistema com coeficiente **igual à 0 igualadas à 0**.

(b) os determinantes D_i para as incógnitas do sistema forem iguais à zero.

(II) O caso **S.I.** ocorre quando:

(a) após o escalonamento ocorrer uma expressão do tipo:

$0a + 0b + 0c + \cdots + 0z \neq 0$ onde $(a, b, c, \ldots, z)$ representam incógnitas.

Repare que nesse caso temos incógnitas do sistema com coeficientes **iguais à 0**, porém igualadas à um valor **diferente de 0**, o que é **impossível**, afinal $\mathbf{0x = 0}$ para **qualquer valor de x**, e o **contrário** disso é **absurdo!**

(b) os determinantes D_i para as incógnitas do sistema forem diferentes de zero.

Nota: Os dois casos para S.I. e S.P.I. são equivalentes, portanto podemos testá-los tanto por determinantes quanto por escalonamento.

III. Resolvendo sistemas S.P.I. e S.I. com variáveis a e b

Podemos nos deparar com sistemas lineares onde algum ou alguns de seus coeficientes são representados por uma variável a, e talvez algum de seus termos independentes seja representado por outra variável, b.

Nota: as variáveis não necessariamente tem que ser representadas por a e b, podendo ser quaisquer letras de escolha (frequentemente são m e k).

Para resolver esse tipo de sistema devemos dividi-lo em **casos**. O enunciado geralmente pede para que *discutamos* o sistema.

$$\text{Seja o sistema } S_1 \begin{cases} 2x + y = 1 \\ 2x - ay = -3 \end{cases}$$

Podemos começar resolvendo-o pelo teorema de *Cramer*:

$$D = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 2 & -a \end{vmatrix} \Rightarrow D = 2 \cdot (-a) - 1 \cdot 2 \Rightarrow D = -2 \cdot a - 2$$

Para que o sistema seja S.P.D. devemos ter $D \neq 0$, então, para que **não** seja S.P.D. devemos ter $D = 0$, ou, substituindo:

$$-2 \cdot a - 2 = 0 \Rightarrow a = -1$$

Agora que achamos o valor de a para que o sistema não seja S.P.D., basta descobrirmos se ele será S.P.I. ou S.I.
Vamos substituir a por -1 no sistema.

$$S_1 \begin{cases} 2x + y = 1 \\ 2x - (-1)y = -3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2x + y = 1 \\ 2x + y = -3 \end{cases}$$

Usando a primeira expressão como referência, por escalonamento temos:

$$S_a \times k + S_b = 0$$

Para zerar o coeficiente de x na segunda expressão temos:

$$2 \cdot k + 2 = 0 \Rightarrow k = -1$$

Multiplicando a primeira expressão por -1 e somando à segunda, temos:

$$\begin{aligned} (2x + y = 1) \times (-1) + S_b &\Rightarrow \\ -2x - y = -1 + S_b &\Rightarrow \end{aligned}$$

$$\begin{array}{r} -2x - y = -1 \\ + \ \ 2x + y = -3 \\ \hline 0x + 0y = -4 \end{array}$$

Claramente, para $D = 0$ o sistema é **impossível**.

A discussão desse sistema, então, será:

Caso (I) quando $a \neq -1$ teremos $D \neq 0$ e o sistema será S.P.D.

Caso (II) quando $a = -1$ o sistema será S.I.

Outra possibilidade de sistema é:

$$S_2 \begin{cases} x - y = 2 \\ 2x + ay = b \end{cases}$$

Onde temos as variáveis a e b.

Novamente, dividiremos em casos, começando pela aplicação do teorema de *Cramer*.

$$D = \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 2 & a \end{vmatrix} \Rightarrow D = 1 \cdot a - (-1) \cdot 2 \Rightarrow D = a + 2$$

Para que o sistema seja S.P.D. segue que $D \neq 0$, substituindo, temos:

$$a + 2 \neq 0 \Rightarrow a \neq -2$$

Para que o sistema não seja S.P.D. temos que $D = 0$, ou, substituindo, $a = -2$. Substituindo a no sistema ficamos com

$$S_2 \begin{cases} x - y = 2 \\ 2x + (-2)y = b \end{cases} \Rightarrow S_2 \begin{cases} x - y = 2 \\ 2x - 2y = b \end{cases}$$

Usando a primeira expressão como referência, por escalonamento, temos:

$$S_a \times k + S_b = 0$$

Para zerar o coeficiente de x na segunda expressão temos

$$1 \cdot k + 2 = 0 \Rightarrow k = -2$$

Multiplicando a primeira expressão por -2 e somando à segunda, temos

$$\begin{aligned} (x - y = 2) \times (-2) + S_b &\Rightarrow \\ -2x + 2y = -4 + S_b &\Rightarrow \\ -2x + 2y &= -4 \\ + \quad 2x - 2y &= b \\ \hline 0x + 0y &= b - 4 \end{aligned}$$

Agora temos dois casos, um onde o termo independente é igual a zero e, portanto, o sistema será S.P.I. e outro onde o termo independente é diferente de zero e o sistema será S.I.

Basta, por fim, discuti-los junto ao caso $D \neq 0$.

Caso (I) quando $a \neq -2$ teremos $D \neq 0$ e o sistema será S.P.D.

Caso (II) quando $a = -2$ e $b - 4 = 0$ (portanto, $b = 4$) segue que o sistema será S.P.I

Caso (III) quando $a = -2$ e $b - 4 \neq 0$ (logo $b \neq 4$) segue que o sistema será S.I