Modelagem de Sistemas Dinâmicos

Notas de aula

Prof. Yago Pessanha Corrêa

Grupo de Pesquisa e Desenvolvimento em Laboratórios de Automação e Controle
Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia Fluminense (IFFluminense)
Bacharelado em Engenharia de Controle e Automação

yago.correa@iff.edu.br

20 de Maio de 2021

Sumário

Sumário

Definições

Equação diferencial

Uma equação cuja incógnita é uma função e onde aparece alguma derivada desta função é uma equação diferencial (**ED**).

Definições

Equação diferencial ordinária

- Se a função incógnita é de uma variável, a ED é ordinária (**EDO**), pois nela só aparecem as derivadas "comuns" (derivadas ordinárias).
- Se a função incógnita é de várias variáveis, a ED é parcial (**EDP**), pois como a função tem mais de uma variável, aparecem derivadas parciais.

Definições

Ordem de uma EDO

- Chama-se **ordem** de uma EDO a "maior" derivada que aparece na equação.
- Exemplo #01: $x\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2} - \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = 2$ é de ordem dois (ou de segunda ordem).
- Exemplo #02: $x\mathrm{d}y - y\mathrm{d}x = 0$ é de ordem um (ou de primeira ordem).

Definições

EDO homogênea

- Uma EDO é **homogênea** quando não há termo independente nem da função incógnita nem de sua(s) derivadas(s).
- Exemplo #01: $x\mathrm{d}y - e^y\mathrm{d}x = 0$ é homogênea.
- Exemplo #02: $x^2 + x' = \cos(t)$ não é homogênea.

Definições

EDO linear

- Uma EDO é **linear** quando pode ser escrita como uma espécie de "polinômio" $a_0 y + a_1 y' + a_2 y'' + \cdots + a_n y^{(n)} = g(x)$, onde a função incógnita é $y(x)$, os coeficientes $a_0, a_1, a_2, \cdots, a_n$ são constantes ou funções de x, e $g(x)$ é uma função qualquer.
- Observe que nem a função nem suas derivadas aparecem como argumentos de funções trigonométricas, exponenciais, logarítmicas, etc.
- Exemplo #01: $y'' + t^2 y = e^t$ é linear.
- Exemplo #02: $\frac{\mathrm{d}^2 y}{\mathrm{d}x^2} + \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} + \cos(y) = 0$ não é linear $(\cos(y))$.
- Exemplo #03: $\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} - 2t^2 x + 2\cos(t)\frac{\mathrm{d}^2 x}{\mathrm{d}t^2} = 0$ é linear.
- Exemplo #04: $x^2 + x' = \cos(t)$ não é linear (x^2).

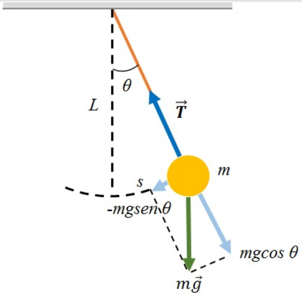
Definições - Exemplo #01

Pêndulo

O movimento de um pêndulo simples de massa m e comprimento L é descrito pela função $\theta(t)$ – função incógnita – que satisfaz a EDO

$$\frac{\mathrm{d}^2\theta}{\mathrm{d}t^2} + \frac{g}{L}\mathrm{sen}(\theta) = 0$$

- θ é a **variável dependente** e t é a **variável independente**.



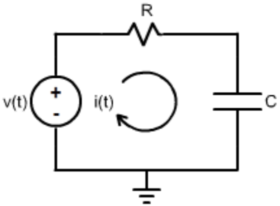
Definições - Exemplo #02

Circuito RC série

Um circuito RC é aquele que tem um resistor de resistência R, um capacitor de capacitância C, além de um gerador que cria uma diferença de potencial $V(t)$, ligados em série. A carga $Q(t)$ no capacitor – função incógnita – satisfaz a EDO

$$R\frac{\mathrm{d}Q}{\mathrm{d}t} + \frac{1}{C}Q = V(t)$$

- Q é a **variável dependente** e t é a **variável independente**.



Solução de uma EDO

Definição

- Resolver uma EDO significa determinar **todas as funções** que a satisfazem. Tais funções formam uma **família de soluções** da EDO (solução geral).
- O número de constantes que aparecem na expressão algébrica da família de soluções é igual à ordem da EDO.
- Para resolver uma EDO não homogênea devemos:
  1. Obter uma solução $y_h(t)$ da **equação homogênea**.
  2. Obter uma solução particular $y_p(t)$ da **equação não homogênea**.
  3. A **solução geral** da EDO é $\boxed{y(t) = y_h(t) + y_p(t)}$.

Problema de valor inicial

Definição

- Uma condição que deve ser satisfeita pela solução y de uma EDO em um valor t_0 é chamada de **condição inicial**. Uma EDO com uma condição inicial é chamada de **problema de valor inicial (PVI)**.

Exemplo #01 - EDO não homogênea

Problema

Resolver a EDO abaixo:

$$y'' - 2y' - 3y = e^{t}$$

Exemplo #01 - EDO não homogênea

Resolução - método tradicional

- O primeiro passo é encontrar a solução homogênea $y_h(t)$:

$y^2 - 2y - 3 = 0$ possui raízes em $y = -1$ e $y = 3$. Deste modo,

$$y_h(t) = C_1 e^{-t} + C_2 e^{3t}$$

Exemplo #01 - EDO não homogênea

Resolução - método tradicional

- O segundo passo é encontrar a solução particular $y_p(t)$:

Uma "candidata" a $y_p(t)$ é $g(t) = e^t$. Logo,

$$y_p(t) = Ae^t \;\therefore\; y_p' = y_p'' = Ae^t$$

Substituindo na EDO original, temos:

$$Ae^t - 2Ae^t - 3Ae^t = e^t \implies A = -\frac{1}{4}$$

Com isso,

$$y_p(t) = -\frac{1}{4}e^t$$

Exemplo #01 - EDO não homogênea

Resolução - método tradicional

- A solução geral da EDO é $y(t) = y_h(t) + y_p(t)$:

$$\boxed{y(t) = -\frac{1}{4}e^{t} + C_1 e^{-t} + C_2 e^{3t}}$$

Exemplo #01 - EDO não homogênea

Resolução - transformada de Laplace

- A transformada de Laplace também pode ser usada para resolver equações diferenciais ordinárias, não apenas PVIs. Lembre-se apenas que a equação diferencial ordinária tem que ser linear, de coeficientes constantes, e a transformada de Laplace da parte não homogênea tem que existir. Ao invés de valores numéricos para $y(0)$ e $y'(0)$, teremos constantes, por exemplo: $y(0) = K$ e $y'(0) = P$.

$$s^2 Y(s) - sy(0) - y'(0) - 2\big(sY(s) - y(0)\big) - 3Y(s) = \frac{1}{s-1}$$

$$s^2 Y(s) - Ks - P - 2sY(s) + 2K - 3Y(s) = \frac{1}{s-1}$$

$$Y(s) = \frac{1}{(s-1)(s^2-2s-3)} + \frac{Ks + P - 2K}{s^2 - 2s - 3}$$

Exemplo #01 - EDO não homogênea

Resolução - transformada de Laplace

- Invertendo o primeiro termo de $Y(s)$ temos:

$$\frac{1}{(s-1)(s+1)(s-3)} = \frac{A}{s-1} + \frac{B}{s+1} + \frac{C}{s-3}$$

$$A = F(s)(s-1)\Big|_{s=1} = \frac{1}{(s+1)(s-3)}\Big|_{s=1} = -1/4$$

$$B = F(s)(s+1)\Big|_{s=-1} = \frac{1}{(s-1)(s-3)}\Big|_{s=-1} = 1/8$$

$$C = F(s)(s-3)\Big|_{s=3} = \frac{1}{(s-1)(s+1)}\Big|_{s=3} = 1/8$$

- Deste modo, a transformada inversa de Laplace da primeira parte é dada por:

$$\mathscr{L}^{-1}\left\{-\frac{1/4}{s-1} + \frac{1/8}{s+1} + \frac{1/8}{s-3}\right\} = -\frac{1}{4}e^{t} + \frac{1}{8}e^{-t} + \frac{1}{8}e^{3t}$$

Exemplo #01 - EDO não homogênea

Resolução - transformada de Laplace

- Invertendo o segundo termo de $Y(s)$ temos:

$$\frac{Ks+P-2K}{(s+1)(s-3)} = \frac{D}{s+1} + \frac{E}{s-3}$$

$$D = F(s)(s+1)\Big|_{s=-1} = \frac{Ks+P-2K}{s-3}\Big|_{s=-1} = (3K-P)/4$$

$$E = F(s)(s-3)\Big|_{s=3} = \frac{Ks+P-2K}{s+1}\Big|_{s=3} = (K+P)/4$$

- Deste modo, a transformada inversa de Laplace da segunda parte é dada por:

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{(3K-P)/4}{s+1} + \frac{(K+P)/4}{s-3}\right\} = \frac{3K-P}{4}e^{-t} + \frac{K+P}{4}e^{3t}$$

Exemplo #01 - EDO não homogênea

Resolução - transformada de Laplace

- Aplicando a propriedade da superposição, obtemos:

$$y(t) = -\frac{1}{4}e^{t} + \frac{1}{8}e^{-t} + \frac{1}{8}e^{3t} + \frac{3K-P}{4}e^{-t} + \frac{K+P}{4}e^{3t}$$

$$y(t) = -\frac{1}{4}e^{t} + \left(\frac{1}{8} + \frac{3K-P}{4}\right)e^{-t} + \left(\frac{1}{8} + \frac{K+P}{4}\right)e^{3t}$$

$$\boxed{y(t) = -\frac{1}{4}e^{t} + C_1e^{-t} + C_2e^{3t}}$$

Exemplo #02 - EDO homogênea

Problema

Resolver a EDO abaixo:

$$y'' - 2y' - 3y = 0$$

Exemplo #02 - EDO homogênea

Resolução - método tradicional

- O primeiro passo é encontrar a solução homogênea $y_h(t)$:

$y^2 - 2y - 3 = 0$ possui raízes em $y = -1$ e $y = 3$. Deste modo,

$$y_h(t) = C_1 e^{-t} + C_2 e^{3t}$$

Exemplo #02 - EDO homogênea

Resolução - método tradicional

- Como essa EDO é homogênea, temos que $y_p(t) = 0$
- A solução geral da EDO é $y(t) = y_h(t) + y_p(t)$:

$$\boxed{y(t) = C_1 e^{-t} + C_2 e^{3t}}$$

Exemplo #02 - EDO homogênea

Resolução - transformada de Laplace

- A transformada de Laplace também pode ser usada para resolver equações diferenciais ordinárias, não apenas PVIs. Lembre-se apenas que a equação diferencial ordinária tem que ser linear, de coeficientes constantes, e a transformada de Laplace da parte não homogênea tem que existir. Ao invés de valores numéricos para $y(0)$ e $y'(0)$, teremos constantes, por exemplo: $y(0) = K$ e $y'(0) = P$.

$$s^2Y(s) - sy(0) - y'(0) - 2\big(sY(s) - y(0)\big) - 3Y(s) = 0$$

$$s^2Y(s) - Ks - P - 2sY(s) + 2K - 3Y(s) = 0$$

$$Y(s) = \frac{Ks + P - 2K}{s^2 - 2s - 3}$$

Exemplo #02 - EDO homogênea

Resolução - transformada de Laplace

- Invertendo $Y(s)$ temos:

$$\frac{Ks + P - 2K}{(s+1)(s-3)} = \frac{A}{s+1} + \frac{B}{s-3}$$

$$A = F(s)(s+1)\Big|_{s=-1} = \frac{Ks + P - 2K}{s-3}\Big|_{s=-1} = (3K - P)/4$$

$$B = F(s)(s-3)\Big|_{s=3} = \frac{Ks + P - 2K}{s+1}\Big|_{s=3} = (K + P)/4$$

- Deste modo, a transformada inversa de Laplace é dada por:

$$\mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{(3K-P)/4}{s+1} + \frac{(K+P)/4}{s-3}\right\} = \frac{3K-P}{4}e^{-t} + \frac{K+P}{4}e^{3t}$$

Exemplo #02 - EDO homogênea

Resolução - transformada de Laplace

- Logo,

$$y(t) = \frac{3K - P}{4}e^{-t} + \frac{K + P}{4}e^{3t}$$

$$\boxed{y(t) = C_1 e^{-t} + C_2 e^{3t}}$$

Exemplo #03 - EDO não homogênea com PVI

Problema

Resolver o PVI abaixo:

$$y'' - y = -2te^{-t} \qquad y(0) = 1,\ y'(0) = -1$$

Exemplo #03 - EDO não homogênea com PVI

Resolução - método tradicional

- O primeiro passo é encontrar a solução homogênea $y_h(t)$:

$y^2 - 1 = 0$ possui raízes em $y = 1$ e $y = -1$. Deste modo,

$$y_h(t) = C_1 e^{t} + C_2 e^{-t}$$

Exemplo #03 - EDO não homogênea com PVI

Resolução - método tradicional

- O segundo passo é encontrar a solução particular $y_p(t)$:

Uma "candidata" a $y_p(t)$ é $g(t) = (At^2 + Bt)e^{-t}$. Logo,

$$y_p' = (-At^2 + (2A - B)t + B)e^{-t}$$

$$y_p'' = (At^2 + (-4A + B)t + 2A - 2B)e^{-t}$$

Substituindo na EDO original, temos:

$$(-4At - 2B + 2A)e^{-t} = -2te^{-t} \implies A = \frac{1}{2}, B = \frac{1}{2}$$

Com isso,

$$y_p(t) = \frac{1}{2}t^2e^{-t} + \frac{1}{2}te^{-t}$$

Exemplo #03 - EDO não homogênea com PVI

Resolução - método tradicional

- A solução geral da EDO é $y(t) = y_h(t) + y_p(t)$:

$$y(t) = C_1 e^{t} + C_2 e^{-t} + \frac{1}{2} t^2 e^{-t} + \frac{1}{2} t e^{-t}$$

Exemplo #03 - EDO não homogênea com PVI

Resolução - método tradicional

- Aplicando o PVI, obtemos:

$$y(0) = 1 \implies C_1 + C_2 = 1$$

$$y'(0) = -1 \implies C_1 - C_2 = -\frac{3}{2}$$

Resolvendo este sistema de equações encontramos $C_1 = -\dfrac{1}{4}$ e $C_2 = \dfrac{5}{4}$

- Logo, a solução geral do PVI é:

$$\boxed{y(t) = -\frac{1}{4}e^{t} + \frac{5}{4}e^{-t} + \frac{1}{2}t^2e^{-t} + \frac{1}{2}te^{-t}}$$

Exemplo #03 - EDO não homogênea com PVI

Resolução - transformada de Laplace

- "Laplaceando" ambos os membros, e usando as propriedades, vem:

$$s^2Y(s) - sy(0) - y'(0) - Y(s) = -2\frac{1}{(s+1)^2}$$

$$s^2Y(s) - s - (-1) - Y(s) = -2\frac{1}{(s+1)^2}$$

$$Y(s)(s^2 - 1) = s - 1 + \frac{-2}{(s+1)^2}$$

$$Y(s) = \frac{1}{s+1} + \frac{-2}{(s+1)^3(s-1)}$$

- A transformada inversa de Laplace do primeiro termo é dada diretamente, via tabela, como e^{-t}

Exemplo #03 - EDO não homogênea com PVI

Resolução - transformada de Laplace

- Invertendo o segundo termo, temos:

$$\frac{-2}{(s+1)^3(s-1)} = \frac{A}{s+1} + \frac{B}{(s+1)^2} + \frac{C}{(s+1)^3} + \frac{D}{s-1}$$

$$\frac{-2}{(s+1)^3(s-1)} = \frac{A}{s+1} + \frac{B}{(s+1)^2} + \frac{2C}{(s+1)^3} + \frac{D}{s-1}$$

$$-2 = A(s+1)^2(s-1) + B(s+1)(s-1) + 2C(s-1) + D(s+1)^3$$

Resolvendo o sistema, temos $A = \frac{1}{4}$, $B = \frac{1}{2}$, $C = \frac{1}{2}$ e $D = -\frac{1}{4}$

- Deste modo, a transformada inversa de Laplace da segunda parte é dada por:

$$\mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{1/4}{s+1} + \frac{1/2}{(s+1)^2} + \frac{1/2 \cdot 2}{(s+1)^3} - \frac{1/4}{s-1}\right\} = \frac{1}{4}e^{-t} + \frac{1}{2}te^{-t} + \frac{1}{2}t^2e^{-t} - \frac{1}{4}e^{t}$$

Exemplo #03 - EDO não homogênea com PVI

Resolução - transformada de Laplace

- Logo, a solução geral do PVI é:

$$\boxed{y(t) = -\frac{1}{4}e^{t} + \frac{5}{4}e^{-t} + \frac{1}{2}t^{2}e^{-t} + \frac{1}{2}te^{-t}}$$

Exemplo #04 - EDO homogênea com PVI

Problema

Resolver o PVI abaixo:

$$y'' - 2y' - 3y = 0 \qquad y(0) = -1,\ y'(0) = 2$$

Exemplo #04 - EDO homogênea com PVI

Resolução - método tradicional

- O primeiro passo é encontrar a solução homogênea $y_h(t)$:

$y^2 - 2y - 3 = 0$ possui raízes em $y = -1$ e $y = 3$. Deste modo,

$$y_h(t) = C_1 e^{-t} + C_2 e^{3t}$$

Exemplo #04 - EDO homogênea com PVI

Resolução - método tradicional

- Como essa EDO é homogênea, temos que $y_p(t) = 0$
- A solução geral da EDO é $y(t) = y_h(t) + y_p(t)$:

$$y(t) = C_1 e^{-t} + C_2 e^{3t}$$

Exemplo #04 - EDO homogênea com PVI

Resolução - método tradicional

- Aplicando o PVI, obtemos:

$$y(0) = -1 \implies C_1 + C_2 = -1$$

$$y'(0) = 2 \implies -C_1 + 3C_2 = 2$$

Resolvendo este sistema de equações encontramos $C_1 = -\dfrac{5}{4}$ e $C_2 = \dfrac{1}{4}$

- Logo, a solução geral do PVI é:

$$\boxed{y(t) = -\frac{5}{4}e^{-t} + \frac{1}{4}e^{3t}}$$

Exemplo #04 - EDO homogênea com PVI

Resolução - transformada de Laplace

- "Laplaceando" ambos os membros, e usando as propriedades, vem:

$$s^2Y(s) - sy(0) - y'(0) - 2\big(sY(s) - y(0)\big) - 3Y(s) = 0$$

$$s^2Y(s) + s - 2 - 2sY(s) - 2 - 3Y(s) = 0$$

$$Y(s)(s^2 - 2s - 3) = -s + 4$$

$$Y(s) = \frac{-s+4}{s^2 - 2s - 3}$$

Exemplo #04 - EDO homogênea com PVI

Resolução - transformada de Laplace

- Invertendo $Y(s)$, temos:

$$\frac{-s+4}{(s+1)(s-3)} = \frac{A}{s+1} + \frac{B}{s-3}$$

$$A = F(s)(s+1)\Big|_{s=-1} = \frac{-s+4}{s-3}\Big|_{s=-1} = -5/4$$

$$B = F(s)(s-3)\Big|_{s=3} = \frac{-s+4}{s+1}\Big|_{s=3} = 1/4$$

- Deste modo, a transformada inversa de Laplace é dada por:

$$\mathscr{L}^{-1}\left\{-\frac{5/4}{s+1} + \frac{1/4}{s-3}\right\} = -\frac{5}{4}e^{-t} + \frac{1}{4}e^{3t}$$

Exemplo #04 - EDO homogênea com PVI

Resolução - transformada de Laplace

- Logo, a solução geral do PVI é:

$$\boxed{y(t) = -\frac{5}{4}e^{-t} + \frac{1}{4}e^{3t}}$$

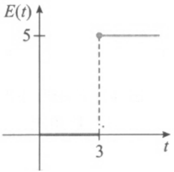
Exercícios

01. Encontre a solução do PVI $y'' - 3y' + 2y = 4e^{2t}; \quad y(0) = -3, y'(0) = 5$

02. A equação diferencial para a carga em um capacitor em um circuito em série RC é

$$R\dot{q}(t) + \frac{1}{C}q(t) = E(t),$$

onde R é a resistência, C é a capacitância e $E(t)$ é a força eletromotriz (f.e.m.). Determinar, usando as transformadas de Laplace, a carga do capacitor em um circuito RC série se $q(0) = 0$, $R = 2{,}5\,\Omega$, $C = 0{,}08\,\mathrm{F}$ e $E(t)$ é dado pelo gráfico abaixo.



Referências e exercícios complementares

- LATHI, Bhagwandas P. Sinais e Sistemas Lineares, 2 ed. Bookman, 2007.

Página 214 - **Capítulo 2**

Encerramento

Tais notas de aula consistem em um compilado de diversas fontes, inclusive do livro texto indicado.

Estas não substituem a leitura do livro e a presença em sala de aula.

Para quaisquer dúvidas e/ou informações:

yago.correa@iff.edu.br