Trigonometria, Relações e Funções trigonométricas

uma apostila para o ensino médio

Isabella B.
14 de agosto de 2020

Sumário

I Trigonometria no triângulo retângulo

II Trigonometria na circunferência

Página

III Funções trigonométricas

Introdução

Parte I

Trigonometria no triângulo retângulo

Capítulo 1 – Introdução

I. Um pouco de contexto

A trigonometria (do grego *trigōnon* ”triângulo” + *metron* ”medida”) é o ramo da matemática que se dedica ao estudo de relações envolvendo comprimentos e ângulos de triângulos, e é o foco dessa apostila.

Nosso estudo se inicia nos triângulos, na verdade, em um caso bem específico de triângulo, chamado *retângulo*, os triângulos chamados de retângulo são aqueles que têm um ângulo de 90°.

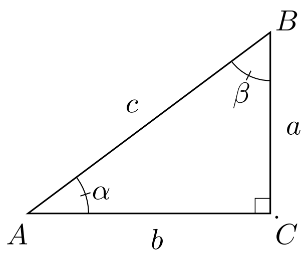
Nessa apostila vamos adotar a convenção de que:

(I) pontos serão representados por letras maiúsculas (A, B, ..., Z)

(II) segmentos serão representados pelos pontos que os determinam ($\overline{AB}$, $\overline{BC}$, ..., $\overline{XZ}$) ou por letras minúsculas (a, b, ...,z).

(III) ângulos serão representados pelo arco que determinam ($\angle ABC$, $A\widehat{\mathbf{B}}C$ ou, simplesmente $\widehat{\mathbf{B}}$) ou letras gregas (α, β, ..., θ).

Exemplo:



Capítulo 2 – Razões trigonométricas

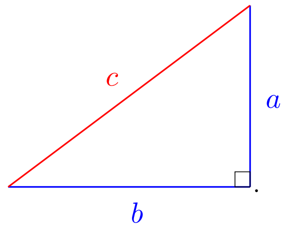
I. Revisão

Podemos identificar alguns elementos importantes num triângulo retângulo como, por exemplo, os catetos e a hipotenusa.

A hipotenusa é o lado que se opõe ao ângulo de 90° (também conhecido como ângulo ”reto”) no triângulo retângulo.

Os catetos são os lados que não são hipotenusa.

Na figura abaixo, b é hipotenusa e a e c são catetos.



II. Teorema de pitágoras

Vale lembrar também o teorema de pitágoras, que estabelece que a soma do quadrado dos catetos é igual ao quadrado da hipotenusa, ou, em notação:

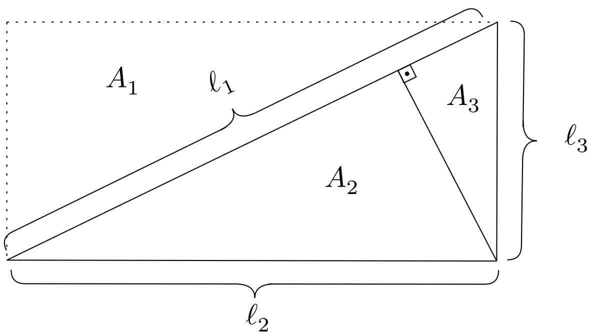
$$a^2 + b^2 = c^2$$

Abaixo seguem duas provas desse fato, junto de suas visualizações geométricas.

a. 1ª demonstração

Como os triângulos são semelhantes a razão entre a área de um deles e da sua hipotenusa ao quadrado é constante:

$$\frac{A_1}{\ell_1^2} = \frac{A_2}{\ell_2^2} = \frac{A_3}{\ell_3^2} = r$$



Reescrevendo em função de A_n temos que $A_n = r \cdot \ell_n^2$. Substituindo essa relação em $A_1 = A_2 + A_3$, temos que:

$$r \cdot \ell_1^2 = r \cdot \ell_2^2 + r \cdot \ell_3^2$$

$$\cancel{r} \cdot \ell_1^2 = \cancel{r} \cdot \ell_2^2 + \cancel{r} \cdot \ell_3^2$$

$$\boxed{\ell_1^2 = \ell_2^2 + \ell_3^2}$$

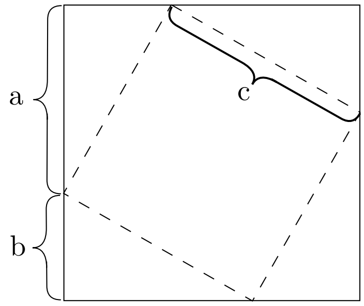
Outra maneira de demonstrar o teorema é apresentada a seguir:

b. 2ª demonstração

A área ao lado pode ser expressa de duas formas:

(I) Pela soma dos lados dos triângulos: $A = (a+b)^2$, ou

(II) Pela soma das áreas dos poligonos individuais (quatro trângulos e um quadrado no meio): $A = 4 \cdot \frac{1}{2} \cdot b \cdot a + c^2$



Como $A = A$ podemos igualar as duas expressões:

$$
\begin{gathered}
(a+b)^2 = \frac{4}{2} \cdot ab + c^2 \\
a^2 + 2ab + b^2 = 2ab + c^2 \\
a^2 + \cancel{2ab} + b^2 = \cancel{2ab} + c^2 \\
\boxed{a^2 + b^2 = c^2}
\end{gathered}
$$

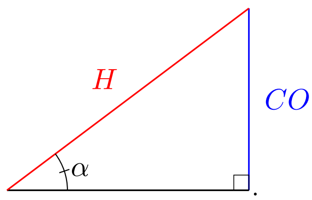
III. sen α e cos α

Se pegarmos um ângulo α de um triângulo retângulo (que não seja o ângulo reto), podemos definir duas medidas básicas a partir deste:

(I) O seno (denotado $\operatorname{sen}\alpha$) e (II) o cosseno (denotado $\cos\alpha$).

O seno do ângulo será definido como:

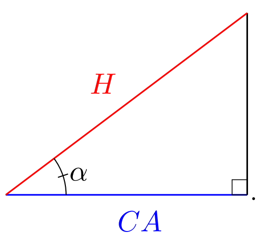
$$\operatorname{sen}\alpha = \frac{CO}{H}$$



Onde CO é o cateto oposto ao ângulo e H é a hipotenusa do triângulo.

O cosseno do ângulo será definido como:

$$\cos\alpha = \frac{CA}{H}$$



Onde CA é o cateto adjacente (próximo) ao ângulo e H é a hipotenusa do triângulo.

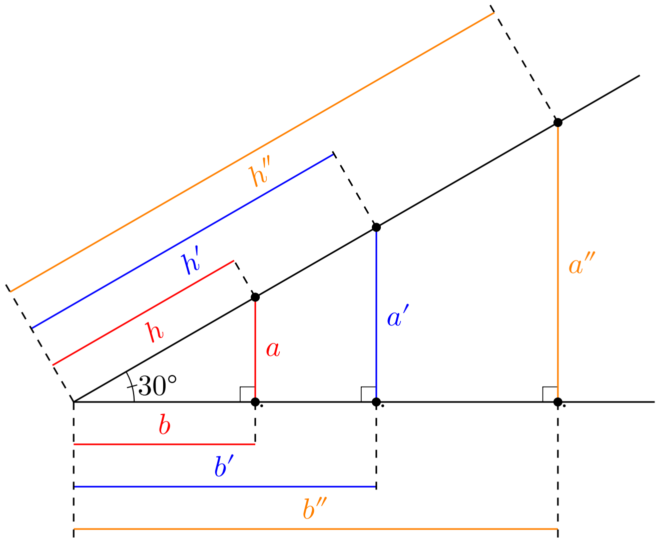
Podemos notar também que essas razões em função do ângulo não se alteram, independentemente do tamanho dos lados.

Exemplo:

$$\operatorname{sen} 30° = \frac{a}{h} = \frac{a'}{h'} = \frac{a''}{h''}$$

$$\cos 30° = \frac{b}{h} = \frac{b'}{h'} = \frac{b''}{h''}$$

O valor de $\operatorname{sen} 30°$ e $\cos 30°$ é o mesmo independente do tamanho do comprimento dos catetos ou da hipotenusa.



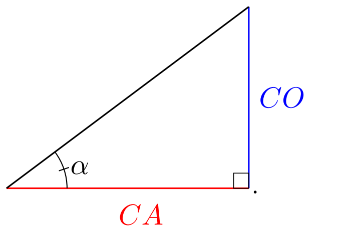
IV. $\operatorname{tg} \alpha$ e $\operatorname{cotg} \alpha$

Temos também a tangente (denotada $\operatorname{tg} \alpha$), que será a relação:

$$\begin{aligned} \operatorname{tg} \alpha &= \frac{\operatorname{sen} \alpha}{\cos \alpha} \\ &= \frac{\frac{CO}{H}}{\frac{CA}{H}} \\ &= \frac{\frac{CO}{\cancel{H}}}{\frac{CA}{\cancel{H}}} \\ \operatorname{tg} \alpha &= \frac{CO}{CA} \end{aligned}$$

E sua recíproca, a cotangente (denotada $\operatorname{cotg} \alpha$):

$$\operatorname{cotg} \alpha = \frac{1}{\operatorname{tg} \alpha} = \frac{\cos \alpha}{\operatorname{sen} \alpha} = \frac{CA}{CO}$$



V. Relações básicas entre razões

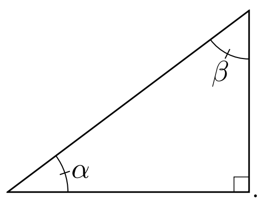
Dizemos que dois ângulos quaisquer α e β são complementares se sua soma resulta em 90°.

Sabemos que a soma dos ângulos de um triângulo qualquer é 180° (medida conhecida como "ângulo raso").

Como um triângulo retângulo sempre terá um ângulo reto, os que sobram devem somar 90°, e, portanto, serão sempre complementares.

Dado um triângulo retângulo ABC qualquer

$$\begin{aligned} \alpha + \beta + 90° &= 180° \\ \alpha + \beta &= 90° \end{aligned}$$



Dado que dois ângulos α e β são complementares, podemos verificar que

$$\operatorname{sen}\alpha = \frac{a}{b} = \cos\beta$$

e o contrário ($\cos\alpha = \operatorname{sen}\beta$) também se verifica.
Outra relação que surge dessa é que

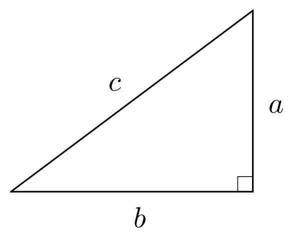
$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{\operatorname{sen}\alpha}{\cos\alpha} = \frac{\cos\beta}{\operatorname{sen}\beta} = \operatorname{cotg}\beta$$

naturalmente, também vale que $\operatorname{tg}\beta = \operatorname{cotg}\alpha$.

VI. Relação fundamental da trigonometria

Aplicando o teorema de pitágoras em um triângulo retângulo ABC qualquer, temos que:

$$a^2 + b^2 = c^2$$
$$\frac{a^2}{c^2} + \frac{b^2}{c^2} = \frac{\cancel{c^2}}{\cancel{c^2}}$$
$$\left(\frac{a}{c}\right)^2 + \left(\frac{b}{c}\right)^2 = 1$$
$$(\operatorname{sen}\alpha)^2 + (\cos\alpha)^2 = 1$$
$$\boxed{\operatorname{sen}^2\alpha + \cos^2\alpha = 1}$$



A relação fundamental da trigonometria vale para qualquer ângulo α.

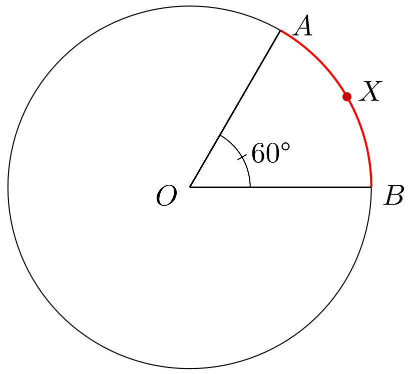
Parte II

Trigonometria na circunferência

Capítulo 1 – Arcos e ângulos

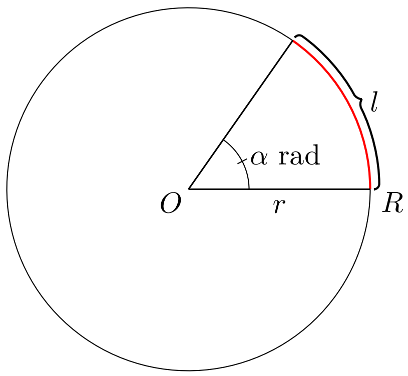
I. Radianos

Denotamos por $\widehat{AXB}$ o arco formado pelo ângulo $B\hat{\mathbf{O}}A$ passando pelo ponto X. Podemos medir arcos usando graus. O arco do exemplo mede 60°.

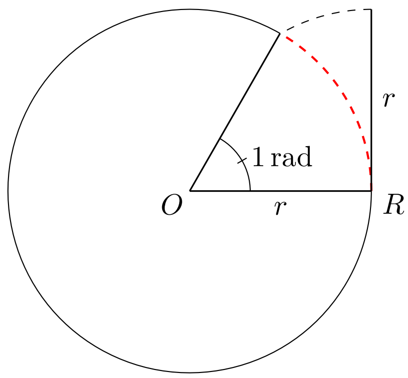


Podemos medir um arco usando uma outra medida muito prática chamada **radiano** (denotada rad).
O radiano é definido como a razão entre o comprimento do arco e o raio do círculo que o descreve:

$$\alpha \text{ rad} = \frac{l}{r}$$



A medida de 1 rad na circunferência é mostrada ao lado.
Repare que, independentemente do raio da circunferência, 1 rad equivale a um arco com a medida de um raio, pois só teremos 1 rad quando $l = r$, já que rad $= {}^{l}/_{r}$.



II. Medida da circunferência

Sabemos que a circunferência mede 360°, no total. Mas qual é esse valor em rad?

Primeiro, vamos nos lembrar que $\pi = \dfrac{c}{d}$ onde c é o comprimento da circunferência e d é seu diâmetro. Repare que a definição de π se assemelha à definição de rad, a única diferença sendo que π usa o diâmetro ao invés do raio.

Como $d = 2r$, podemos fazer:

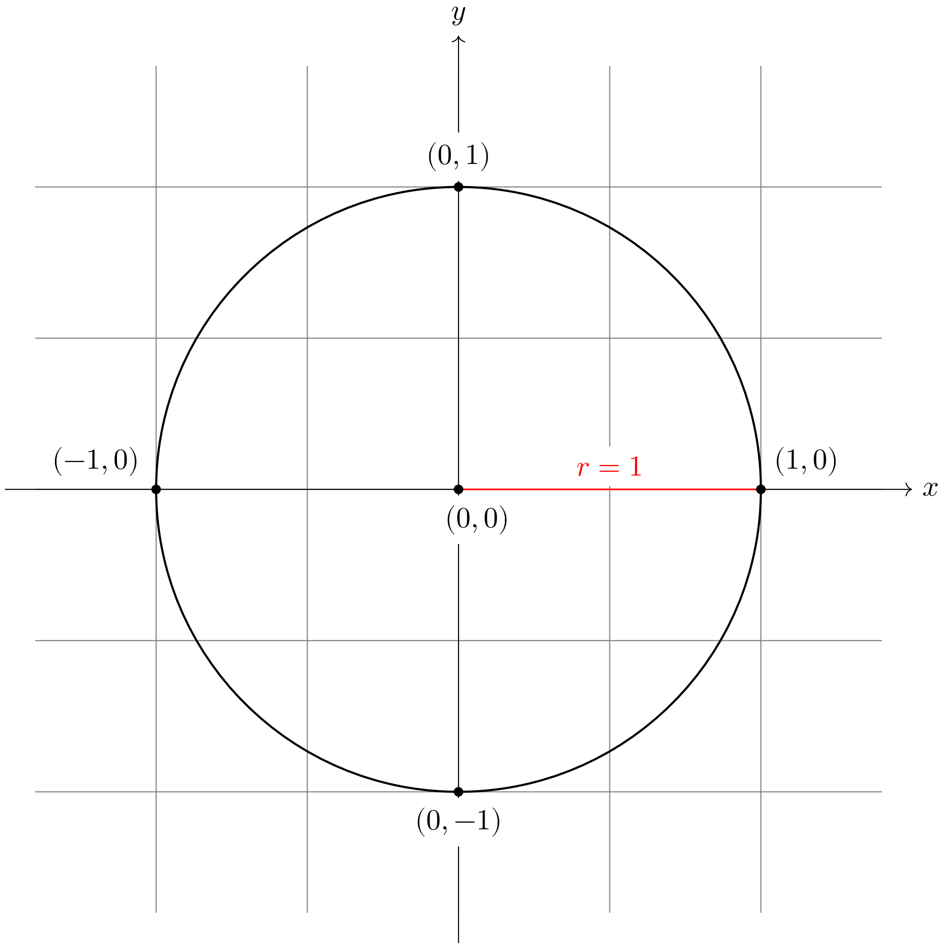
$$\pi = \frac{c}{d} = \frac{c}{2r} \Rightarrow 2\pi = \frac{c}{r}$$

Sabendo que queremos achar o valor de $\frac{c}{r}$ em rad, podemos fazer:

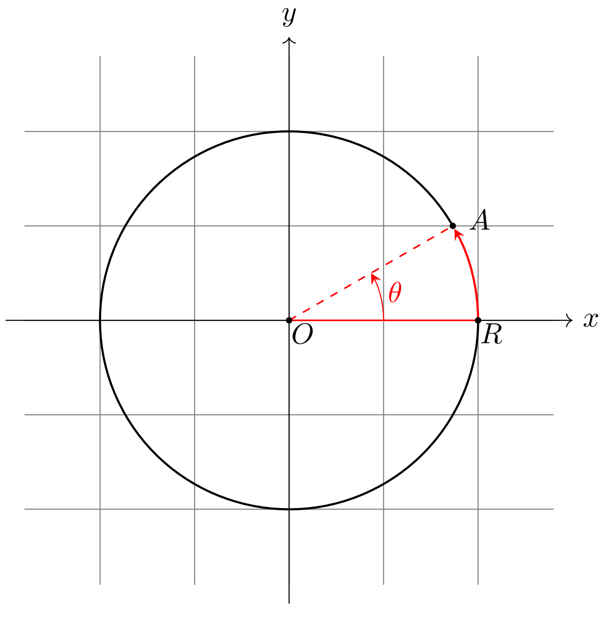
$$\alpha = \frac{l}{r} = \frac{c}{r} \Rightarrow \alpha = 2\pi \text{ rad}$$

Capítulo 2 – Ciclo trigonométrico

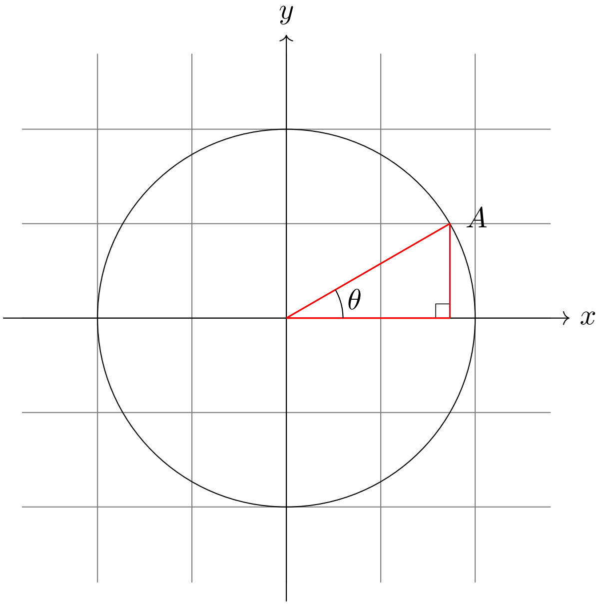
O ciclo trigonométrico é uma ferramenta muito útil para o estudo da trigonometria. Consiste em uma circunferência de raio 1 montada na origem de um plano cartesiano.



Se escolhermos um ponto qualquer A na circunferência e traçarmos o raio até esse ponto vamos ter um ângulo θ sendo formado entre o novo segmento $\overline{OA}$ e o antigo segmento $\overline{OR}$.
Uma idéia interessante é imaginar o segmento $\overline{OR}$ "rodando" em torno da circunferência ,e, conforme aumenta, θ também aumenta.



Podemos notar que esse existe um triângulo retângulo de hipotenusa igual ao segmento $\overline{OA}$.



Parte III

Funções trigonométricas