

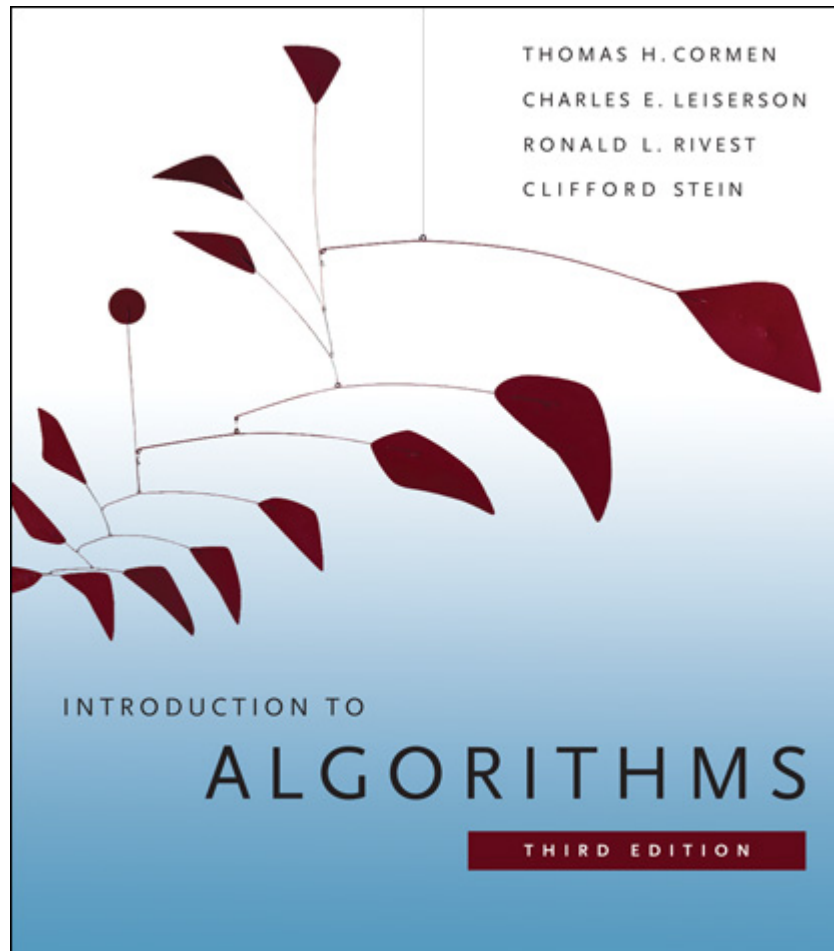
Matemática Discreta

Grafos – Algoritmo de Dijkstra

Daniel Hasan Dalip
hasan@decom.cefetmg.br

Bibliografia de Hoje Principal

- Cormen T. et al., Introduction to Algorithms.
 - Capítulo 24



Algoritmo de Dijkstra

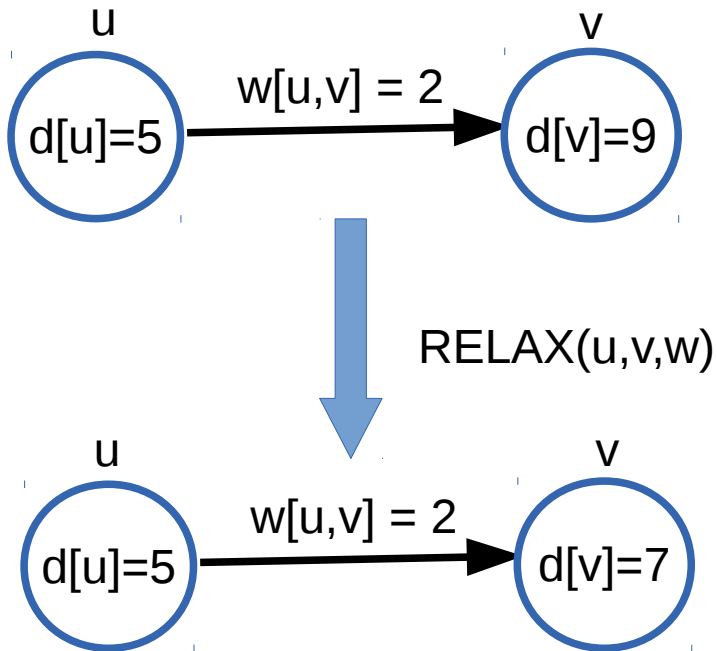
- Encontra o menor caminho a partir de um vértice **s** para todos os vértices para um grafo direcionado **G(V,E)**
- As arestas possuem pesos (não negativos)
- Considere:
 - matriz **w[u,v]** com o custo (peso) da aresta **(u,v)**
 - Vetor **d[u]** que armazena a distancia de **s** até **u**
 - Vetor **p[u]** representa o vértice pai de **u**
 - Neste caso, armazenará o vértice anterior ao vértice **u** com objetivo de caminhar do vértice origem **s** ao vértice **u**.

Algoritmo de Dijkstra

- Selecione o vértice **u** que possui um caminho (de **s** até **u**) de menor custo
 - Caso ainda não tenha passado por nenhum vértice, $u \leftarrow s$
- Para cada vértice adjacente **v**:
 - verifica se o caminho entre **s** e **v** passando pela aresta **(u,v)** tem um custo menor do que o caminho de **s** até **v** atual
 - Custo do caminho até **u**: **d[u]**
 - Custo do caminho entre **s** e **v** passando por **(u,v)**: **d[u]+w[u,v]**
 - Custo do caminho até **v**: **d[v]**
 - Caso possua, atualize **d[v]** e **p[v]** para passar por **u**
- Repita este procedimento até passar por todos os vértices do grafo

Algoritmo de Dijkstra

- Função $\text{RELAX}(u, v, w)$



$d[v]$: custo do caminho de s até v

$w[u,v]$: peso da aresta (u,v)

Verifica se, passando por u , conseguimos um caminho de s até v melhor do que o atual custo $d[v]$

$\text{RELAX}(u,v,w)$:

SE $d[v] > d[u] + w[u,v]$

ENTÃO $d[v] \leftarrow d[u] + w[u,v]$

$p[v] \leftarrow u$

Dijkstra(G, w, s)

para cada $u \in V[G]$ **faça:**

$p[u] \leftarrow \text{NULL}$

$d[u] \leftarrow \infty$

$Q \leftarrow V[G]$

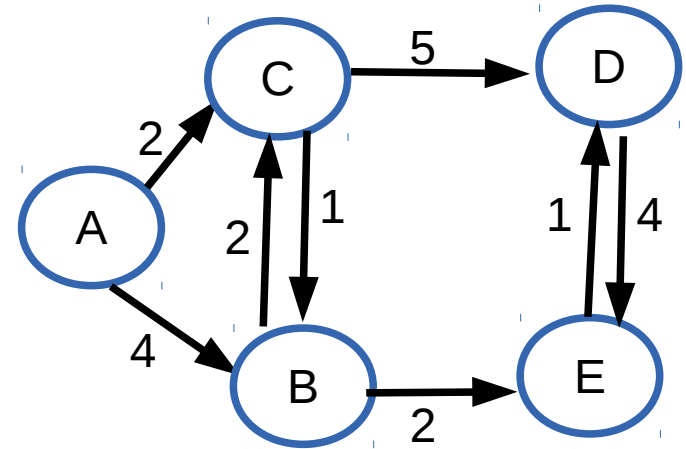
$d[s] \leftarrow 0$

enquanto $Q \neq \emptyset$ **faça:**

$u \leftarrow \text{Extrai-Min}(Q)$

para cada $v \in \text{adj}[u]$ **faça:**

RELAX(u, v, w)



Vetor **p**:



A B C D E

Vetor **d**:



A B C D E

s:

u:

v:

Fila Q

Dijkstra(G, w, s)

para cada $u \in V[G]$ **faça:**

$p[u] \leftarrow \text{NULL}$

$d[u] \leftarrow \infty$

→ $Q \leftarrow V[G]$

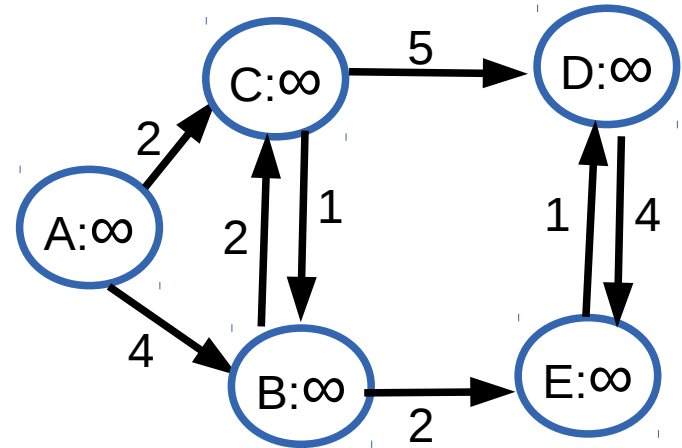
$d[s] \leftarrow 0$

enquanto $Q \neq \emptyset$ **faça:**

$u \leftarrow \text{Extrai-Min}(Q)$

para cada $v \in \text{adj}[u]$ **faça:**

RELAX(u, v, w)



Vetor **p**:

null	null	null	null	null
------	------	------	------	------

A B C D E

Vetor **d**:

∞	∞	∞	∞	∞
---	---	---	---	---

A B C D E

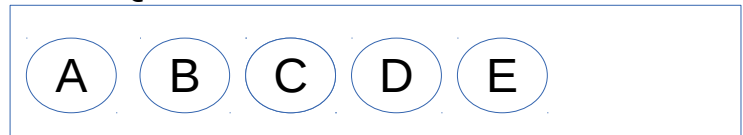
A

s: A

u:

v:

Fila Q



Dijkstra(G, w, s)

para cada $u \in V[G]$ **faça:**

$p[u] \leftarrow \text{NULL}$

$d[u] \leftarrow \infty$

$Q \leftarrow V[G]$

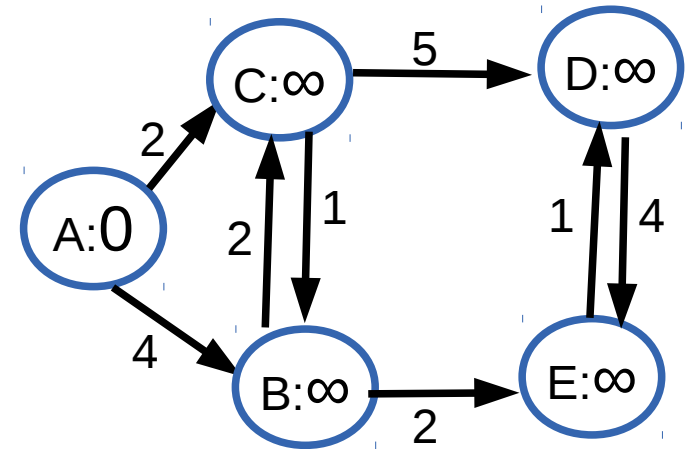
→ $d[s] \leftarrow 0$

enquanto $Q \neq \emptyset$ **faça:**

$u \leftarrow \text{Extrai-Min}(Q)$

para cada $v \in \text{adj}[u]$ **faça:**

RELAX(u, v, w)



Vetor p:

null	null	null	null	null
A	B	C	D	E

Vetor d:

0	∞	∞	∞	∞
A	B	C	D	E

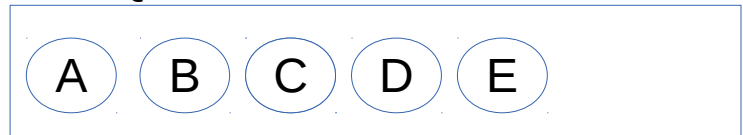
A

s: A

u:

v:

Fila Q



Dijkstra(G, w, s)

para cada $u \in V[G]$ **faça:**

$p[u] \leftarrow \text{NULL}$

$d[u] \leftarrow \infty$

$Q \leftarrow V[G]$

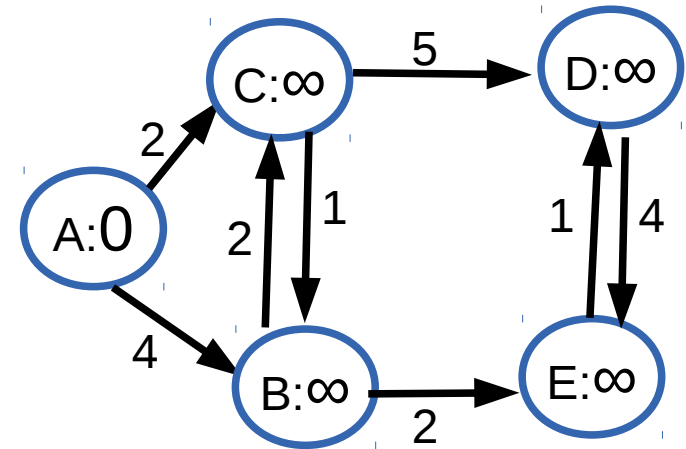
$d[s] \leftarrow 0$

enquanto $Q \neq \emptyset$ **faça:**

➡ $u \leftarrow \text{Extrai-Min}(Q)$

para cada $v \in \text{adj}[u]$ **faça:**

RELAX(u, v, w)



Vetor **p**:

null	null	null	null	null
A	B	C	D	E

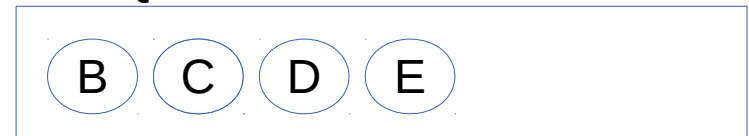
Vetor **d**:

0	∞	∞	∞	∞
A	B	C	D	E

A

s: A u: A v:

Fila Q



Dijkstra(G, w, s)

para cada $u \in V[G]$ **faça:**

$p[u] \leftarrow \text{NULL}$

$d[u] \leftarrow \infty$

$Q \leftarrow V[G]$

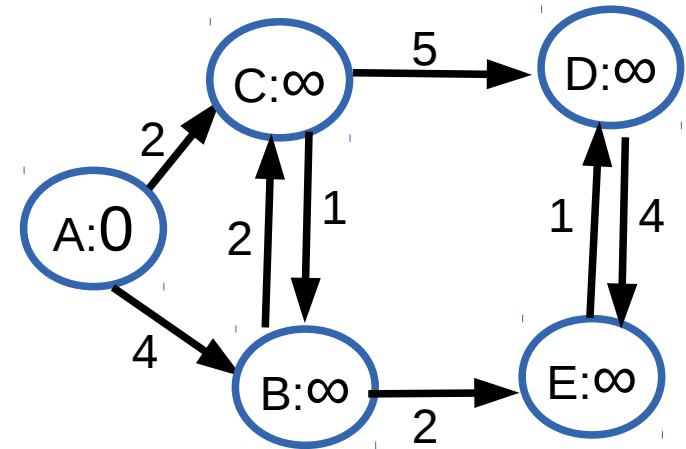
$d[s] \leftarrow 0$

enquanto $Q \neq \emptyset$ **faça:**

$u \leftarrow \text{Extrai-Min}(Q)$

➡ **para cada** $v \in \text{adj}[u]$ **faça:**

RELAX(u, v, w)



Vetor **p**:

null	null	null	null	null
A	B	C	D	E

Vetor **d**:

0	∞	∞	∞	∞
A	B	C	D	E

A

s: A u: A v: B

Fila Q



Dijkstra(G, w, s)

para cada $u \in V[G]$ **faça:**

$p[u] \leftarrow \text{NULL}$

$d[u] \leftarrow \infty$

$Q \leftarrow V[G]$

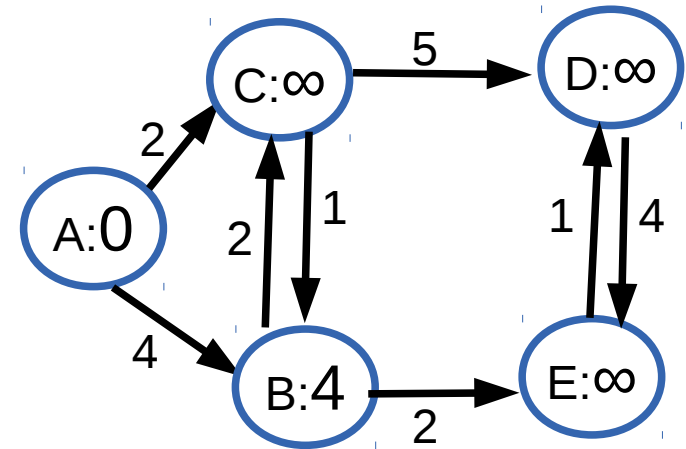
$d[s] \leftarrow 0$

enquanto $Q \neq \emptyset$ **faça:**

$u \leftarrow \text{Extrai-Min}(Q)$

para cada $v \in \text{adj}[u]$ **faça:**

➡ $\text{RELAX}(u, v, w)$



Vetor **p**:

null	A	null	null	null
A	B	C	D	E

Vetor **d**:

0	4	∞	∞	∞
A	B	C	D	E

s: A u: A v: B

Fila Q



Dijkstra(G, w, s)

para cada $u \in V[G]$ **faça:**

$p[u] \leftarrow \text{NULL}$

$d[u] \leftarrow \infty$

$Q \leftarrow V[G]$

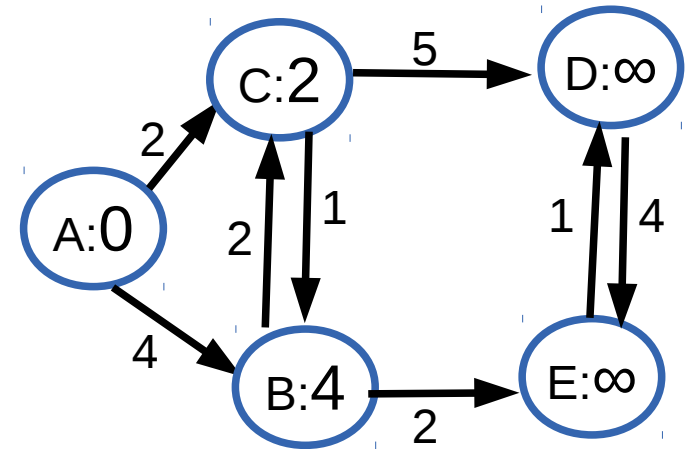
$d[s] \leftarrow 0$

enquanto $Q \neq \emptyset$ **faça:**

$u \leftarrow \text{Extrai-Min}(Q)$

para cada $v \in \text{adj}[u]$ **faça:**

➡ $\text{RELAX}(u, v, w)$



Vetor **p**:

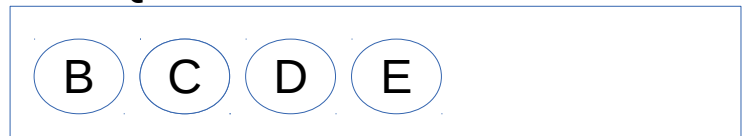
null	A	A	null	null
A	B	C	D	E

Vetor **d**:

0	4	2	∞	∞
A	B	C	D	E

s: A u: A v: C

Fila Q



Dijkstra(G, w, s)

para cada $u \in V[G]$ **faça:**

$p[u] \leftarrow \text{NULL}$

$d[u] \leftarrow \infty$

$Q \leftarrow V[G]$

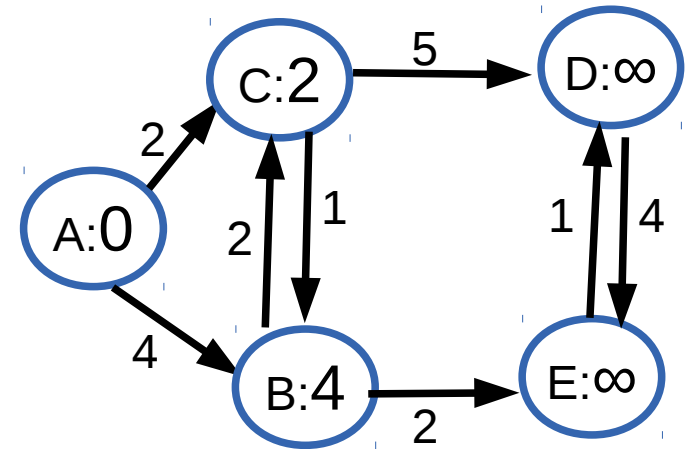
$d[s] \leftarrow 0$

enquanto $Q \neq \emptyset$ **faça:**

➡ $u \leftarrow \text{Extrai-Min}(Q)$

para cada $v \in \text{adj}[u]$ **faça:**

RELAX(u, v, w)



Vetor **p**:

null	A	A	null	null
A	B	C	D	E

Vetor **d**:

0	4	2	∞	∞
A	B	C	D	E

s: A u: C v:

Fila Q



Dijkstra(G, w, s)

para cada $u \in V[G]$ **faça:**

$p[u] \leftarrow \text{NULL}$

$d[u] \leftarrow \infty$

$Q \leftarrow V[G]$

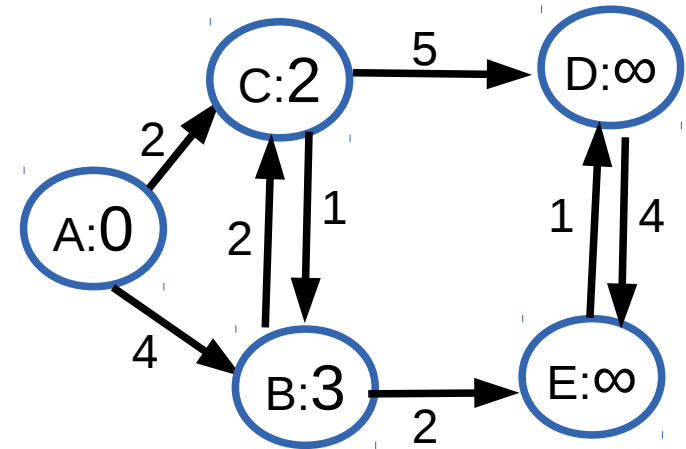
$d[s] \leftarrow 0$

enquanto $Q \neq \emptyset$ **faça:**

$u \leftarrow \text{Extrai-Min}(Q)$

para cada $v \in \text{adj}[u]$ **faça:**

➡ $\text{RELAX}(u, v, w)$



Vetor **p**:

null	C	A	null	null
A	B	C	D	E

Vetor **d**:

0	3	2	∞	∞
A	B	C	D	E

s: A

u: C

v: B

Fila Q



Dijkstra(G, w, s)

para cada $u \in V[G]$ **faça:**

$p[u] \leftarrow \text{NULL}$

$d[u] \leftarrow \infty$

$Q \leftarrow V[G]$

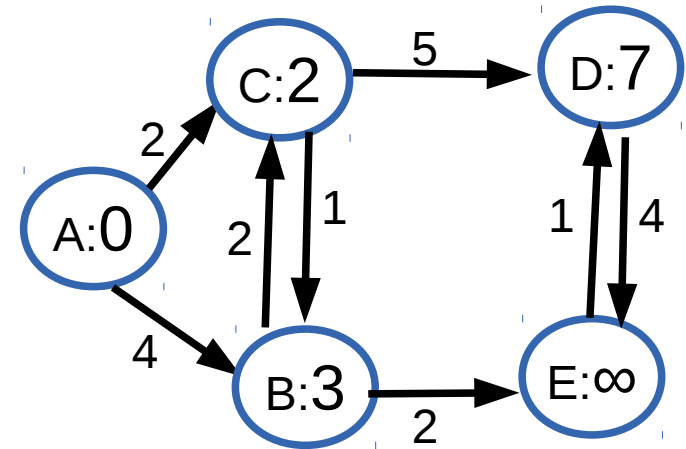
$d[s] \leftarrow 0$

enquanto $Q \neq \emptyset$ **faça:**

$u \leftarrow \text{Extrai-Min}(Q)$

para cada $v \in \text{adj}[u]$ **faça:**

➡ $\text{RELAX}(u, v, w)$



Vetor **p**:

null	C	A	C	null
A	B	C	D	E

Vetor **d**:

0	3	2	7	∞
A	B	C	D	E

s: A

u: C

v: D

Fila Q



Dijkstra(G, w, s)

para cada $u \in V[G]$ **faça:**

$p[u] \leftarrow \text{NULL}$

$d[u] \leftarrow \infty$

$Q \leftarrow V[G]$

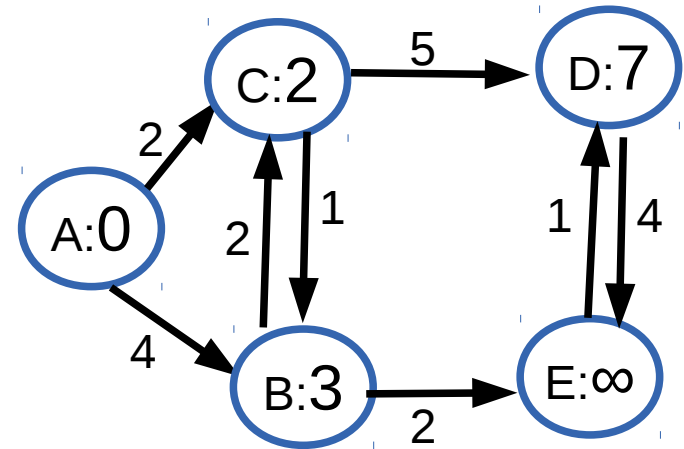
$d[s] \leftarrow 0$

enquanto $Q \neq \emptyset$ **faça:**

$u \leftarrow \text{Extrai-Min}(Q)$

para cada $v \in \text{adj}[u]$ **faça:**

$\rightarrow \text{RELAX}(u, v, w)$



Vetor **p**:

null	C	A	C	null
A	B	C	D	E

Vetor **d**:

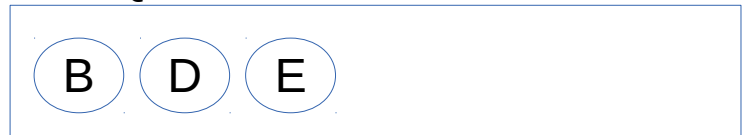
0	3	2	7	∞
A	B	C	D	E

s: A

u: C

v: D

Fila Q



Dijkstra(G, w, s)

para cada $u \in V[G]$ **faça:**

$p[u] \leftarrow \text{NULL}$

$d[u] \leftarrow \infty$

$Q \leftarrow V[G]$

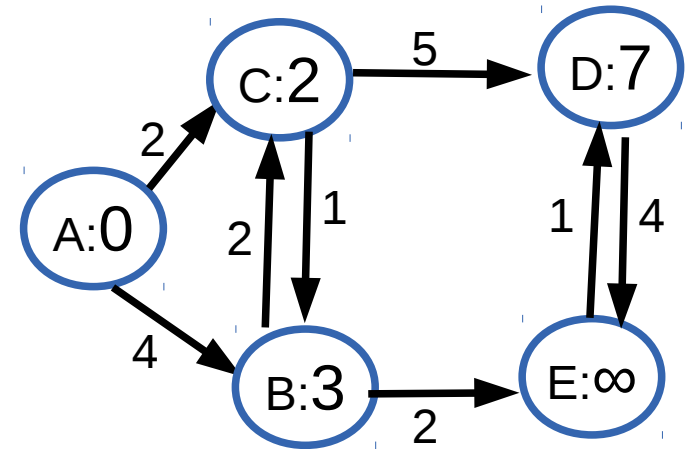
$d[s] \leftarrow 0$

enquanto $Q \neq \emptyset$ **faça:**

→ $u \leftarrow \text{Extrai-Min}(Q)$

para cada $v \in \text{adj}[u]$ **faça:**

RELAX(u, v, w)



Vetor **p**:

null	C	A	C	null
A	B	C	D	E

Vetor **d**:

0	3	2	7	∞
A	B	C	D	E

s: A u: B v:

Fila Q

D E

Dijkstra(G, w, s)

para cada $u \in V[G]$ **faça:**

$p[u] \leftarrow \text{NULL}$

$d[u] \leftarrow \infty$

$Q \leftarrow V[G]$

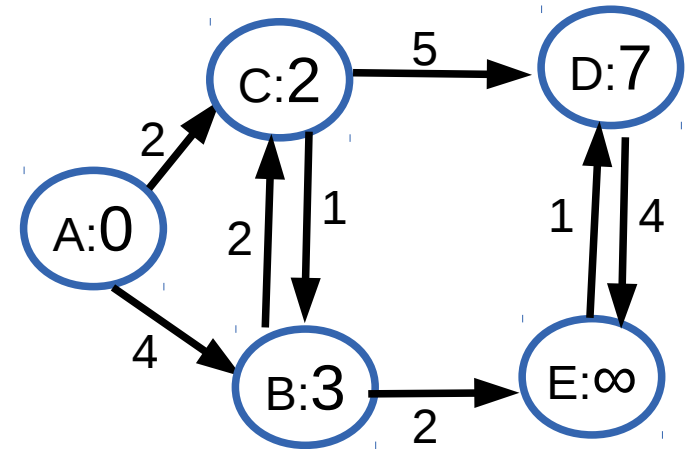
$d[s] \leftarrow 0$

enquanto $Q \neq \emptyset$ **faça:**

$u \leftarrow \text{Extrai-Min}(Q)$

para cada $v \in \text{adj}[u]$ **faça:**

➡ $\text{RELAX}(u, v, w)$



Vetor **p**:

null	C	A	C	null
A	B	C	D	E

Vetor **d**:

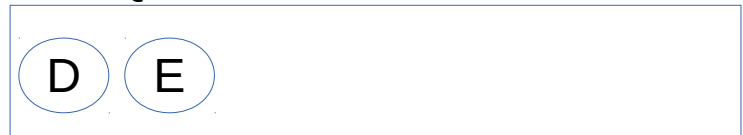
0	3	2	7	∞
A	B	C	D	E

s: B

u: B

v: C

Fila Q



Dijkstra(G, w, s)

para cada $u \in V[G]$ **faça:**

$p[u] \leftarrow \text{NULL}$

$d[u] \leftarrow \infty$

$Q \leftarrow V[G]$

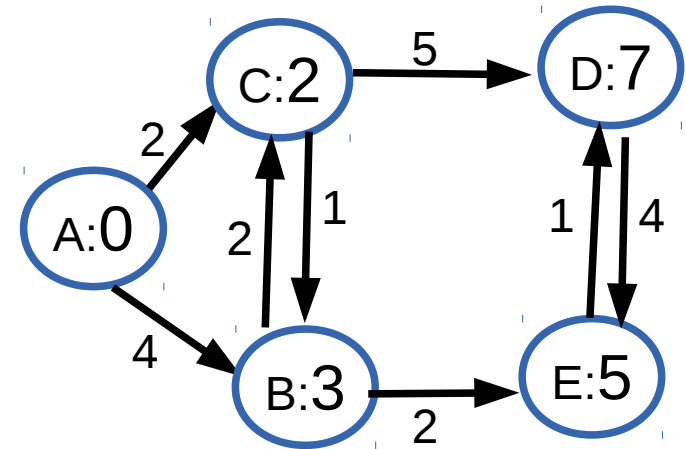
$d[s] \leftarrow 0$

enquanto $Q \neq \emptyset$ **faça:**

$u \leftarrow \text{Extrai-Min}(Q)$

para cada $v \in \text{adj}[u]$ **faça:**

➡ $\text{RELAX}(u, v, w)$



Vetor **p**:

null	C	A	C	B
A	B	C	D	E

Vetor **d**:

0	3	2	7	5
A	B	C	D	E

s: B

u: B

v: E

Fila Q

D E

Dijkstra(G, w, s)

para cada $u \in V[G]$ **faça:**

$p[u] \leftarrow \text{NULL}$

$d[u] \leftarrow \infty$

$Q \leftarrow V[G]$

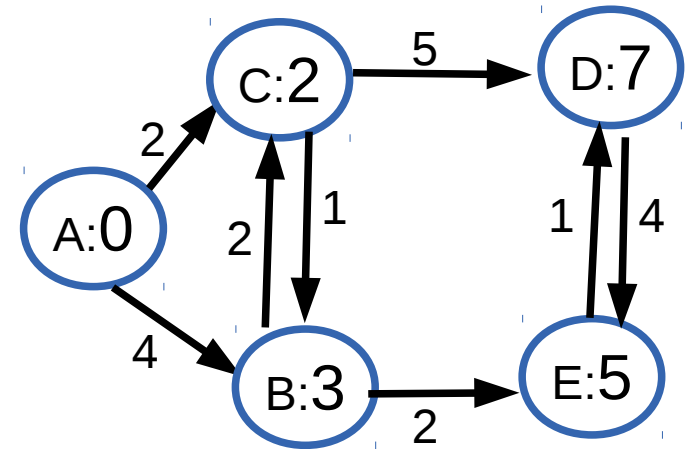
$d[s] \leftarrow 0$

enquanto $Q \neq \emptyset$ **faça:**

→ $u \leftarrow \text{Extrai-Min}(Q)$

para cada $v \in \text{adj}[u]$ **faça:**

RELAX(u, v, w)



Vetor **p**:

null	C	A	C	B
A	B	C	D	E

Vetor **d**:

0	3	2	7	5
A	B	C	D	E

s: B

u: E

v:

Fila Q

D

Dijkstra(G, w, s)

para cada $u \in V[G]$ **faça:**

$p[u] \leftarrow \text{NULL}$

$d[u] \leftarrow \infty$

$Q \leftarrow V[G]$

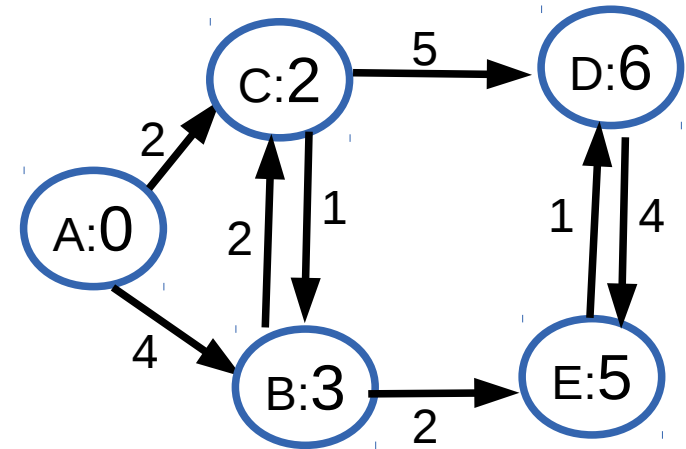
$d[s] \leftarrow 0$

enquanto $Q \neq \emptyset$ **faça:**

$u \leftarrow \text{Extrai-Min}(Q)$

para cada $v \in \text{adj}[u]$ **faça:**

→ RELAX(u, v, w)



Vetor **p**:

null	C	A	E	B
A	B	C	D	E

Vetor **d**:

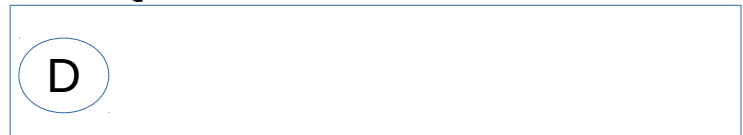
0	3	2	6	5
A	B	C	D	E

s: B

u: E

v: D

Fila Q



Dijkstra(G, w, s)

para cada $u \in V[G]$ **faça:**

$p[u] \leftarrow \text{NULL}$

$d[u] \leftarrow \infty$

$Q \leftarrow V[G]$

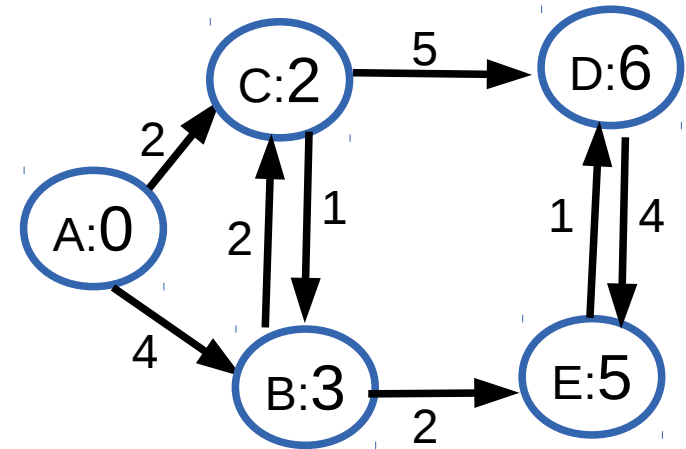
$d[s] \leftarrow 0$

enquanto $Q \neq \emptyset$ **faça:**

→ $u \leftarrow \text{Extrai-Min}(Q)$

para cada $v \in \text{adj}[u]$ **faça:**

RELAX(u, v, w)



Vetor **p**:

null	C	A	E	B
A	B	C	D	E

Vetor **d**:

0	3	2	6	5
A	B	C	D	E

s: B

u: D

v:

Fila Q

Dijkstra(G, w, s)

para cada $u \in V[G]$ **faça:**

$p[u] \leftarrow \text{NULL}$

$d[u] \leftarrow \infty$

$Q \leftarrow V[G]$

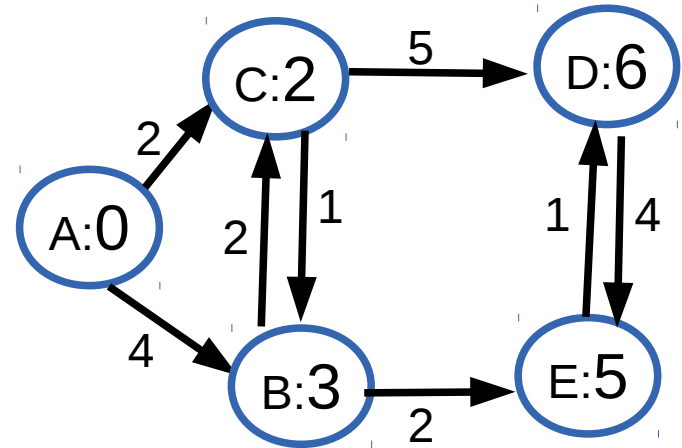
$d[s] \leftarrow 0$

enquanto $Q \neq \emptyset$ **faça:**

$u \leftarrow \text{Extrai-Min}(Q)$

para cada $v \in \text{adj}[u]$ **faça:**

$\rightarrow \text{RELAX}(u, v, w)$



Vetor **p**:

null	C	A	E	B
A	B	C	D	E

Vetor **d**:

0	3	2	6	5
A	B	C	D	E

s: B

u: D

v: E

Fila Q

--

Dijkstra(G, w, s)

para cada $u \in V[G]$ **faça:**

$p[u] \leftarrow \text{NULL}$

$d[u] \leftarrow \infty$

$Q \leftarrow V[G]$

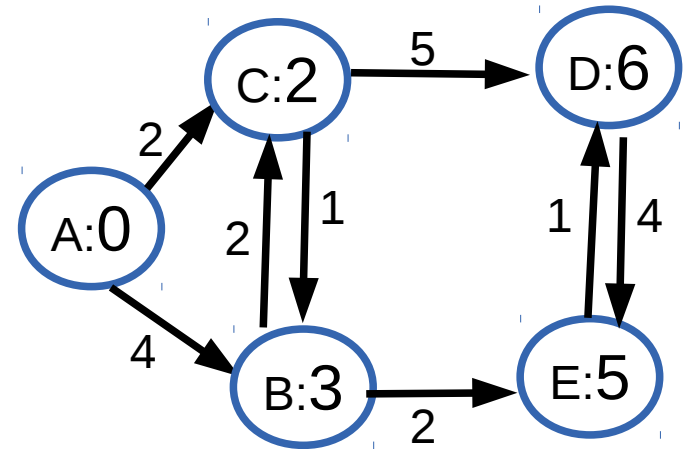
$d[s] \leftarrow 0$

enquanto $Q \neq \emptyset$ **faça:**

$u \leftarrow \text{Extrai-Min}(Q)$

para cada $v \in \text{adj}[u]$ **faça:**

RELAX(u, v, w)



Vetor **p**:

null	C	A	E	B
A	B	C	D	E

Vetor **d**:

0	3	2	6	5
A	B	C	D	E

s: B

u: D

v: E

Fila Q

--

1) Considere a malha aérea da companhia aérea CEFETAir:

- Belo Horizonte → São Paulo: R\$ 150,00
- Belo Horizonte → Campinas: R\$ 50,00;
- Belo Horizonte → Rio de Janeiro: R\$ 300,00
- Campinas → São Paulo: R\$ 40,00
- São Paulo → Rio de Janeiro: R\$ 90,00;

Modele o grafo (indicando inclusive o peso das arestas) e indique quais algoritmos (dentre os que aprendemos) são possíveis utilizar caso deseje-se saber:

- (a) como ir de Belo Horizonte para as demais cidades com o mínimo de escalas possíveis.
- (b) como ir de Belo Horizonte para as demais cidades gastando o mínimo possível.
- (c) o que seria alterado no algoritmo de Dijkstra caso voos diretos possuam um desconto de 10%?

2) Execute o algoritmo de Dijkstra para o grafo a seguir tendo B como vértice de origem. Apresente passo-a-passo (após a extração de cada vértice, na ordem correta): a fila de prioridade e o grafo junto com os vetores **p** e **d**. Além disso, para cada passo, explicitite qual vértice **u** foi extraído. Mostre também o resultado final do algoritmo por meio dos vetores **p** e **d**.

Dijkstra(G, w, s)

para cada $u \in V[G]$ **faça:**

$p[u] \leftarrow \text{NULL}$

$d[u] \leftarrow \infty$

$Q \leftarrow V[G]$

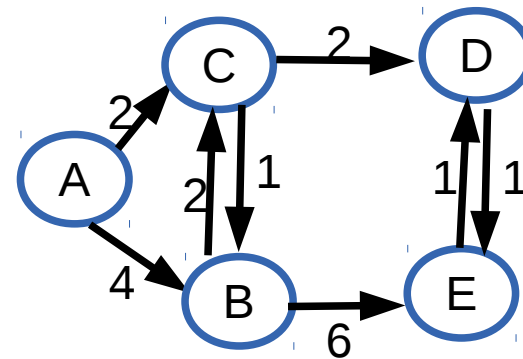
$d[s] \leftarrow 0$

enquanto $Q \neq \emptyset$ **faça:**

$u \leftarrow \text{Extrai-Min}(Q)$

para cada $v \in \text{adj}[u]$ **faça:**

$\text{RELAX}(u, v, w)$



RELAX(u,v,w):

SE $d[v] > d[u] + w[u,v]$

ENTÃO $d[v] \leftarrow d[u] + w[u,v]$

$p[v] \leftarrow u$