

# **Lógica *Fuzzy***

*Huei Diana Lee e Newton Spolaôr*

Universidade Estadual do Oeste do Paraná (UNIOESTE)  
Foz do Iguaçu, Brasil

# Motivação para Lógica *Fuzzy* (Difusa)

- Se definirmos que uma pessoa jovem tem idade entre 10 e 20 anos, uma pessoa com 20 anos e um dia não é mais jovem...



20 anos completos



20 anos e um dia

# Motivação para Lógica *Fuzzy* (Difusa)

- Se definirmos que uma pessoa jovem tem idade entre 10 e 20 anos, uma pessoa com 20 anos e um dia não é mais jovem...
- Se dissermos que uma pessoa é alta se tiver mais de 1,75m, uma pessoa que tem 1,749m não é alta...

# Motivação para Lógica *Fuzzy* (Difusa)

- Se definirmos que uma pessoa jovem tem idade entre 10 e 20 anos, uma pessoa com 20 anos e um dia não é mais jovem...
- Se dissermos que uma pessoa é alta se tiver mais de 1,75m, uma pessoa que tem 1,749m não é alta...
- Assim, são criadas barreiras não naturais quando definimos certos conceitos
- A teoria de conjuntos *fuzzy* permite lidar naturalmente com conceitos como:
  - alto, pouco alto, muito alto, baixo
  - muito quente, muito rápidoe cria uma transição natural entre esses conceitos

# Histórico da Lógica *Fuzzy*

- Preocupação com o Problema da Incerteza no início do Séc. XX
  - Física quântica: exemplo no gato de Schrödinger
  - Redes telefônicas: perda em canal ruidoso
  - Entre outros
- Surgimento de modelos que tentavam representar a incerteza
- Teoria da Probabilidade

# Histórico da Lógica *Fuzzy*

- Artigo de Lofti A. Zadeh → Universidade da Califórnia em Berkley, EUA, 1965
- Desenvolvimento da Lógica *Fuzzy*
  - Representação mais realista de medidas incertas
  - Suporte à associação entre medidas e números
- Ruptura com a Lógica Aristotélica/*Crisp*

# Tipos de Incerteza e seus Modelos

**Incerteza estocástica (probabilística):**

**✠ A probabilidade de acertar o alvo é 0.8**

# Tipos de Incerteza e seus Modelos

**Incerteza estocástica (probabilística):**

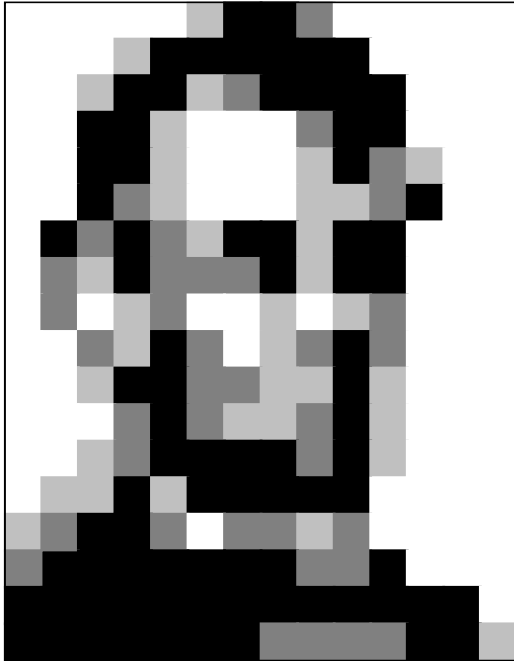
- ✠ A probabilidade de acertar o alvo é 0.8

**Incerteza léxica (linguística):**

- ✠ "Homens Altos", "Dias Quentes", "Moeda Estável"
- ✠ Nós provavelmente teremos um bom ano de negócios
- ✠ A experiência do especialista A mostra que B está quase para ocorrer, porém, o especialista C está convencido de que não é verdade



# Tipos de Incerteza e seus Modelos



**Incerteza estocástica (probabilística):**


- ✘ A probabilidade de acertar o alvo é 0.8

**Incerteza léxica (linguística):**

- ✘ "Homens Altos", "Dias Quentes", "Moeda Estável"
- ✘ Nós provavelmente teremos um bom ano de negócios
- ✘ A experiência do especialista A mostra que B está quase para ocorrer, porém, o especialista C está convencido de que não é verdade

**Muitas palavras e estimativas que nós usamos em nosso raciocínio diário não são facilmente definidas de forma matemática. Isso permite ao homem raciocinar em um nível abstrato!**

# Lógica Aristotélica (*Crisp*)

- Emprega o preceito da dualidade, ou seja, somente admite valores verdadeiro ou falso para uma dada proposição  
 Valor verdade de uma afirmação
- Raciocínio baseado em premissas e conclusões

# Conjuntos Convencionais (*Crisp*)

- Definido como um subconjunto de um universo qualquer (conjunto universo  $X$ ), que possui elementos desse universo
- Ex:
  - Conjunto Universo: {aranha, abelha, baleia, galinha, cachorro, elefante, mosca, jacaré}
  - Conjunto dos Animais Mamíferos: {baleia, cachorro, elefante}
    - Apenas uma parcela dos animais formam os mamíferos
    - Somente eles representam mamíferos com 100% de certeza
    - Sem suporte para representar imprecisão

# Conjuntos Convencionais (*Crisp*)

- Função Característica  $fc$

$$fc : A \rightarrow \{0,1\}$$

$fc(x) = 0$  se e somente se  $x \notin A$

$fc(x) = 1$  se e somente se  $x \in A$

- Assim,  $x$  possui 0% de pertinência para  $A$  se  $x \notin A$ ; caso contrário,  $x$  possui 100%

# Conjuntos *Fuzzy*

- Não empregam valores verdade indicando pertinência
- Contudo, um elemento pode pertencer, com um certo grau em  $[0,1]$ , a um determinado conjunto
- Expressa valores linguísticos/usa variáveis linguísticas

# Conjuntos *Fuzzy*

- Não empregam valores verdade indicando pertinência
- Contudo, um elemento pode pertencer, com um certo grau em  $[0,1]$ , a um determinado conjunto
- Expressa valores linguísticos/usa variáveis linguísticas
- Suporta modos de raciocínio aproximado/impreciso
- O raciocínio exato corresponde a um caso limite do raciocínio aproximado

# Conjuntos *Fuzzy*

- Não empregam valores verdade indicando pertinência
- Contudo, um elemento pode pertencer, com um certo grau em  $[0,1]$ , a um determinado conjunto
- Expressa valores linguísticos/usa variáveis linguísticas
- Suporta modos de raciocínio aproximado/impreciso
- O raciocínio exato corresponde a um caso limite do raciocínio aproximado
- O elemento de um conjunto *fuzzy* é representado por  $\mu_i/\chi_i$ , o que denota que o elemento  $\chi_i$  pertence ao conjunto *fuzzy* com grau de pertinência  $\mu_i$

# Função de Pertinência

- É a função que define os graus de pertinência de cada elemento em um conjunto *fuzzy*

$$fp : A \rightarrow [0,1]$$

- Assim,  $fp(x) = \mu_x$ , *i.e.*,  $x$  possui um grau de pertinência  $\mu_x$  ao conjunto  $A$ , com  $\mu_x$  sendo um valor no intervalo  $[0,1]$
- Esse elemento é representado então como  $\mu_x/x$  dentro do conjunto *fuzzy*  $A$



# Exemplo de Uso de Função

- Seja  $A \subseteq U$ , com  $U$  sendo o conjunto Universo,  $A = \{2,4,6,8,10\}$ , e  $fp$  sendo a função de pertinência para cada elemento  $x$  de  $A$  ao conjunto *fuzzy*  $R$ , com  $fp$  definida como segue:

$$fp(x) = \frac{x}{10}$$

# Exemplo de Uso de Função

- Seja  $A \subseteq U$ , com  $U$  sendo o conjunto Universo,  $A = \{2,4,6,8,10\}$ , e  $fp$  sendo a função de pertinência para cada elemento  $x$  de  $A$  ao conjunto *fuzzy*  $R$ , com  $fp$  definida como segue

$$fp(x) = \frac{x}{10}$$

- Conjunto *fuzzy*  $R$ :

$$R = \{0.2/2 + 0.4/4 + 0.6/6 + 0.8/8 + 1/10\}$$

⇒ o símbolo “+” indica a união dos elementos e não soma algébrica

# Outro Exemplo de Conjunto *Fuzzy*

Adulto =  $\{0/5+0/10+0.5/16+0.7/17+0.8/20+0.9/22+1/30+1/40\}$

cada elemento tem o formato  $\mu_i/\chi_i$ , sendo  $\mu_i$  o grau de pertinência de  $\chi_i$  ao conjunto *fuzzy* Adulto

elementos de 5 a 10  $\rightarrow$  pertinência com grau 0

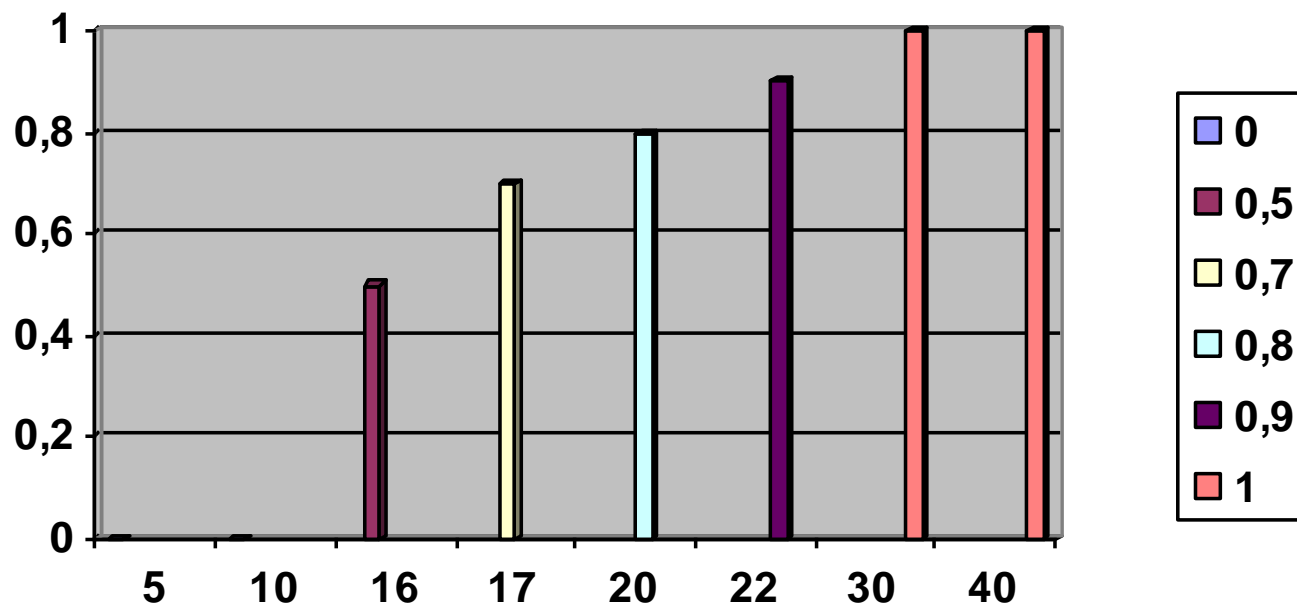
elementos de 30 a 40  $\rightarrow$  pertinência com grau 1

imprecisão



elementos 16,17,20,22  $\rightarrow$  graus de pertinência variando entre 0.5 e 0.9

# Representação Gráfica



**Representação Gráfica do Conjunto Fuzzy Adulto**

# Conjuntos *Fuzzy* do Tipo 2

- Os graus de pertinência definem conjuntos *fuzzy* do tipo 1

\* Conjunto *fuzzy* representando medidas personalizadas, como de aptidão:

0/15	0/1.0	0/2.0	formato $\mu_i/\chi_i$
0.3/16	0.5/1.5	0.3/1.75	
0.8/20	0.9/1.75	0.1/1.3	
Média	Alta	Baixa	

Conjuntos *Fuzzy* do tipo 1 representando os valores linguísticos: Alta, Média, Baixa

# Conjuntos *Fuzzy* do Tipo 2

- Os graus de pertinência definem conjuntos *fuzzy* do tipo 1
  - Conjunto *fuzzy* do tipo 2: grau de pertinência de um elemento desse conjunto corresponde a um conjunto *fuzzy* do tipo 1
- \* Conjunto *fuzzy* representando medidas personalizadas, como de aptidão:

Alta/João	0/15	0/1.0	0/2.0	formato $\mu_i/\chi_i$
Média/José	0.3/16	0.5/1.5	0.3/1.75	
Baixa/Maria	0.8/20	0.9/1.75	0.1/1.3	
Conjunto <i>Fuzzy</i> do tipo 2	Média	Alta	Baixa	

Conjuntos *Fuzzy* do tipo 1 representando os valores linguísticos: Alta, Média, Baixa

# Operações Sobre Conjuntos *Fuzzy*

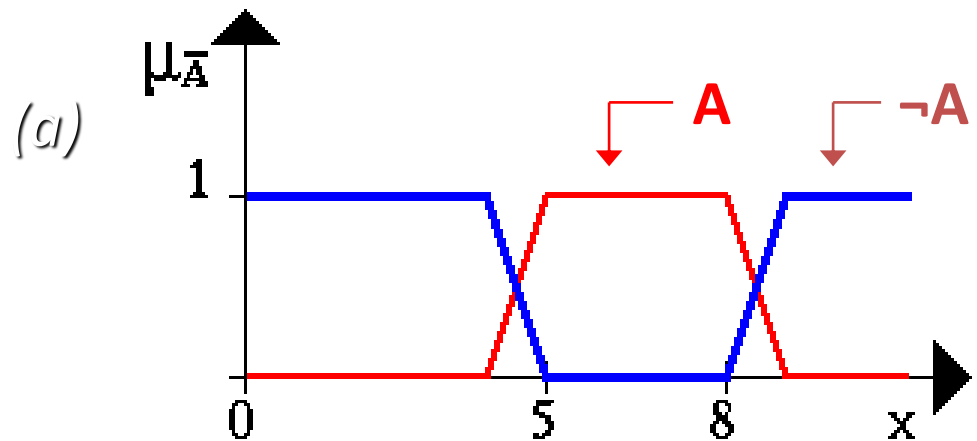
- Pode-se destacar as operações de complemento (negação), união e intersecção
- Para tanto, sejam  $A$  e  $B$  conjuntos *fuzzy* do universo  $U$
- Além disso, sejam:
  - $fpa(x)$ : função de pertinência de  $x$  ao conjunto  $A$
  - $fpb(x)$ : função de pertinência de  $x$  ao conjunto  $B$

# Operações Sobre Conjuntos *Fuzzy*

## - Complemento/negação de $A$ ( $\neg A$ ): $1 - \mu_A(x)$

A linha azul  
representa o  
complemento  
(negação) do  
conjunto *fuzzy*  $A$

Os pontos no eixo  $x$   
correspondem a  
elementos do  
conjunto *fuzzy*  $A$  –  
vide exemplos



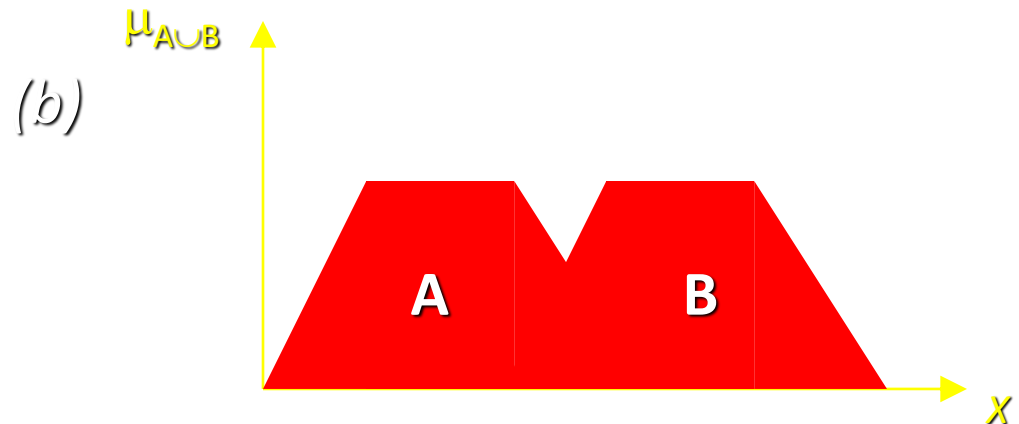


# Operações Sobre Conjuntos *Fuzzy*

## - União de A com B: $\max[\text{fpa}(x), \text{fpb}(x)]$

O gráfico auxilia no entendimento da operação

Dado um ponto P no eixo x, sua pertinência à união é igual à pertinência de P ao conjunto em que P “mais se identifica”

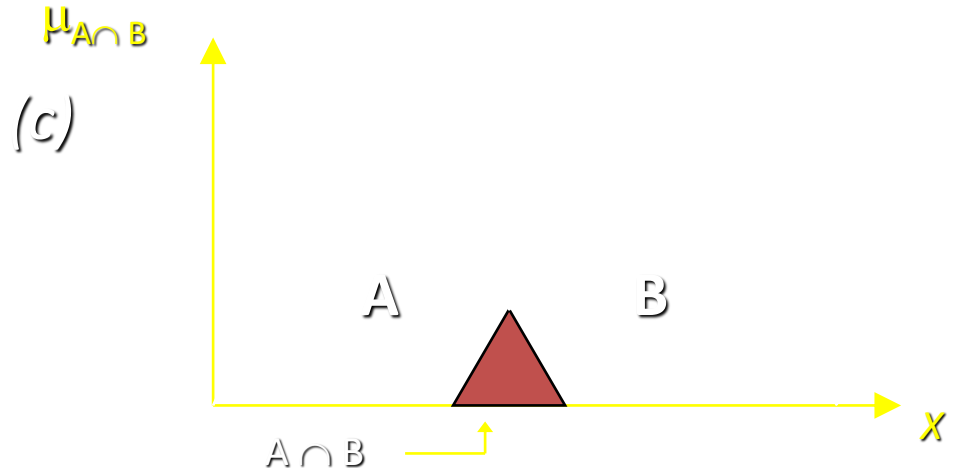


# Operações Sobre Conjuntos *Fuzzy*

## - Intersecção de A com B: $\min[fpa(x), fpb(x)]$

O gráfico auxilia no entendimento da operação

Dado um ponto P no eixo x, sua pertinência à intersecção é igual à pertinência de P comum aos dois conjuntos



# Exemplo de Uso de *Fuzzy*

Notas didáticas do prof. Mário Benevides, UFRJ

## Compra de uma casa:

- Uma família com quatro membros deseja comprar uma casa
- Uma indicação do conforto de uma casa se refere ao número de dormitórios
- Eles também desejam comprar uma casa grande
- Seja  $u = (1, 2, \dots, 10)$  um conjunto *crisp* de casas descritas pelo número de quartos de dormir, ou seja, a casa  $u_j$  possui  $j$  dormitórios

# Exemplo de Uso de *Fuzzy*

Notas didáticas do prof. Mário Benevides, UFRJ

## Compra de uma casa:

- O conjunto *fuzzy*  $c$  que caracteriza conforto, do ponto de vista da família de quatro membros, pode ser descrito para os elementos do conjunto  $u$  como:

$$c = \{0.2/1 + 0.5/2 + 0.8/3 + 1/4 + 0.7/5 + 0.3/6 + 0/7 + 0/8 + 0/9 + 0/10\}$$

# Exemplo de Uso de *Fuzzy*

Notas didáticas do prof. Mário Benevides, UFRJ

## Compra de uma casa:

- Seja  $g$  o conjunto *fuzzy* caracterizando a noção de grande do ponto de vista da família
- O conjunto pode ser caracterizado para os elementos do conjunto  $u$  por:

$$g = \{0/1 + 0/2 + 0.2/3 + 0.4/4 + 0.6/5 + 0.8/6 + 1/7 + 1/8 + 1/9 + 1/10\}$$

# Exemplo de Uso de *Fuzzy*

Notas didáticas do prof. Mário Benevides, UFRJ

## Compra de uma casa:

- A interseção entre os conjuntos *fuzzy* conforto e grande é dada pelo conjunto  $c \cap g$ :

$$c = \{0.2/1 + 0.5/2 + 0.8/3 + 1/4 + 0.7/5 + 0.3/6 + 0/7 + 0/8 + 0/9 + 0/10\}$$

$$g = \{0/1 + 0/2 + 0.2/3 + 0.4/4 + 0.6/5 + 0.8/6 + 1/7 + 1/8 + 1/9 + 1/10\}$$

# Exemplo de Uso de *Fuzzy*

Notas didáticas do prof. Mário Benevides, UFRJ

## Compra de uma casa:

- A interseção entre os conjuntos *fuzzy* conforto e grande é dada pelo conjunto  $c \cap g$ :

$$c = \{0.2/1 + 0.5/2 + 0.8/3 + 1/4 + 0.7/5 + 0.3/6 + 0/7 + 0/8 + 0/9 + 0/10\}$$

$$g = \{0/1 + 0/2 + 0.2/3 + 0.4/4 + 0.6/5 + 0.8/6 + 1/7 + 1/8 + 1/9 + 1/10\}$$

$$c \cap g = \{0/1 + 0/2 + 0.2/3 + 0.4/4 + 0.6/5 + 0.3/6 + 0/7 + 0/8 + 0/9 + 0/10\}$$

# Exemplo de Uso de *Fuzzy*

Notas didáticas do prof. Mário Benevides, UFRJ

## Compra de uma casa:

- A interseção entre os conjuntos *fuzzy* conforto e grande é dada pelo conjunto  $c \cap g$ :  
$$c \cap g = [0/1 + 0/2 + 0.2/3 + 0.4/4 + 0.6/5 + 0.3/6 + 0/7 + 0/8 + 0/9 + 0/10]$$
- Interpretando o conjunto *fuzzy*  $c \cap g$ , concluimos que uma casa com 5 dormitórios é a mais satisfatória, com grau de pertinência 0.6
- A segunda melhor solução é a casa com 4 dormitórios



# Exemplo de Uso de *Fuzzy*

Notas didáticas do prof. Mário Benevides, UFRJ

## Compra de uma casa:

– Ainda sobre os conjuntos do exemplo, responda:

$$c = \{0.2/1 + 0.5/2 + 0.8/3 + 1/4 + 0.7/5 + 0.3/6 + 0/7 + 0/8 + 0/9 + 0/10\}$$

$$g = \{0/1 + 0/2 + 0.2/3 + 0.4/4 + 0.6/5 + 0.8/6 + 1/7 + 1/8 + 1/9 + 1/10\}$$

– Qual é a união de conforto e grande?

– Qual é o complemento de grande? E qual é a interpretação desse complemento?

– Cite outro exemplo que poderia se beneficiar do uso de *fuzzy*

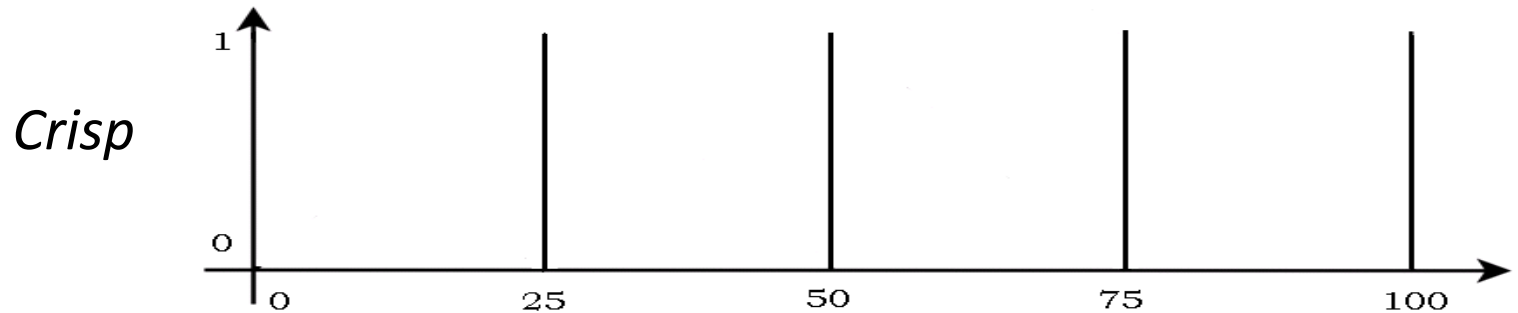
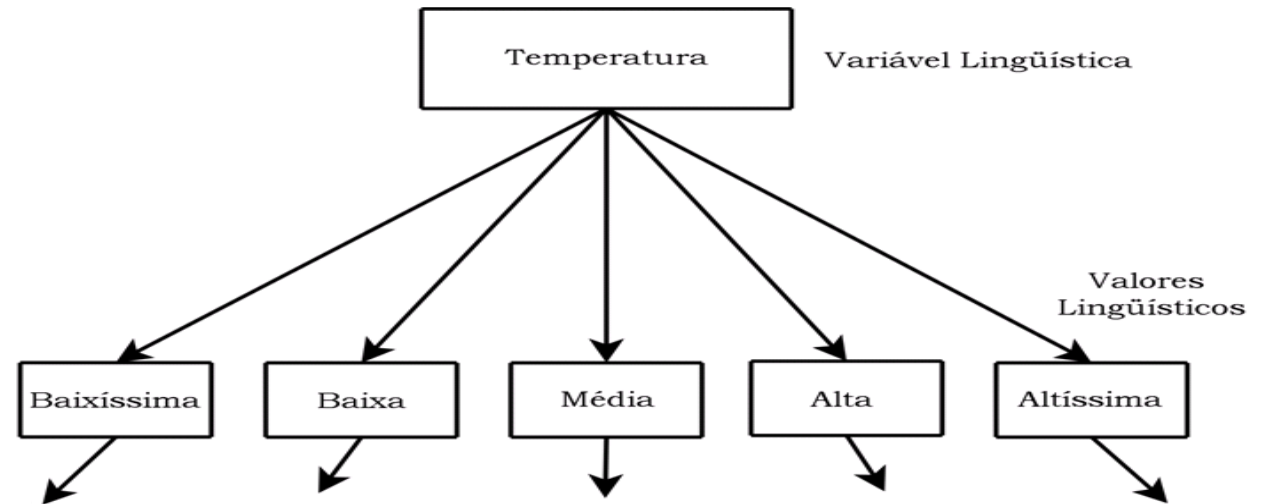
# Sistemas *Fuzzy*

- Definição: qualquer sistema que incorpore algum mecanismo derivado da lógica *fuzzy* e que tenha pelo menos uma variável que possa assumir valores lingüísticos definidos por conjuntos *fuzzy*

# Sistemas *Fuzzy*

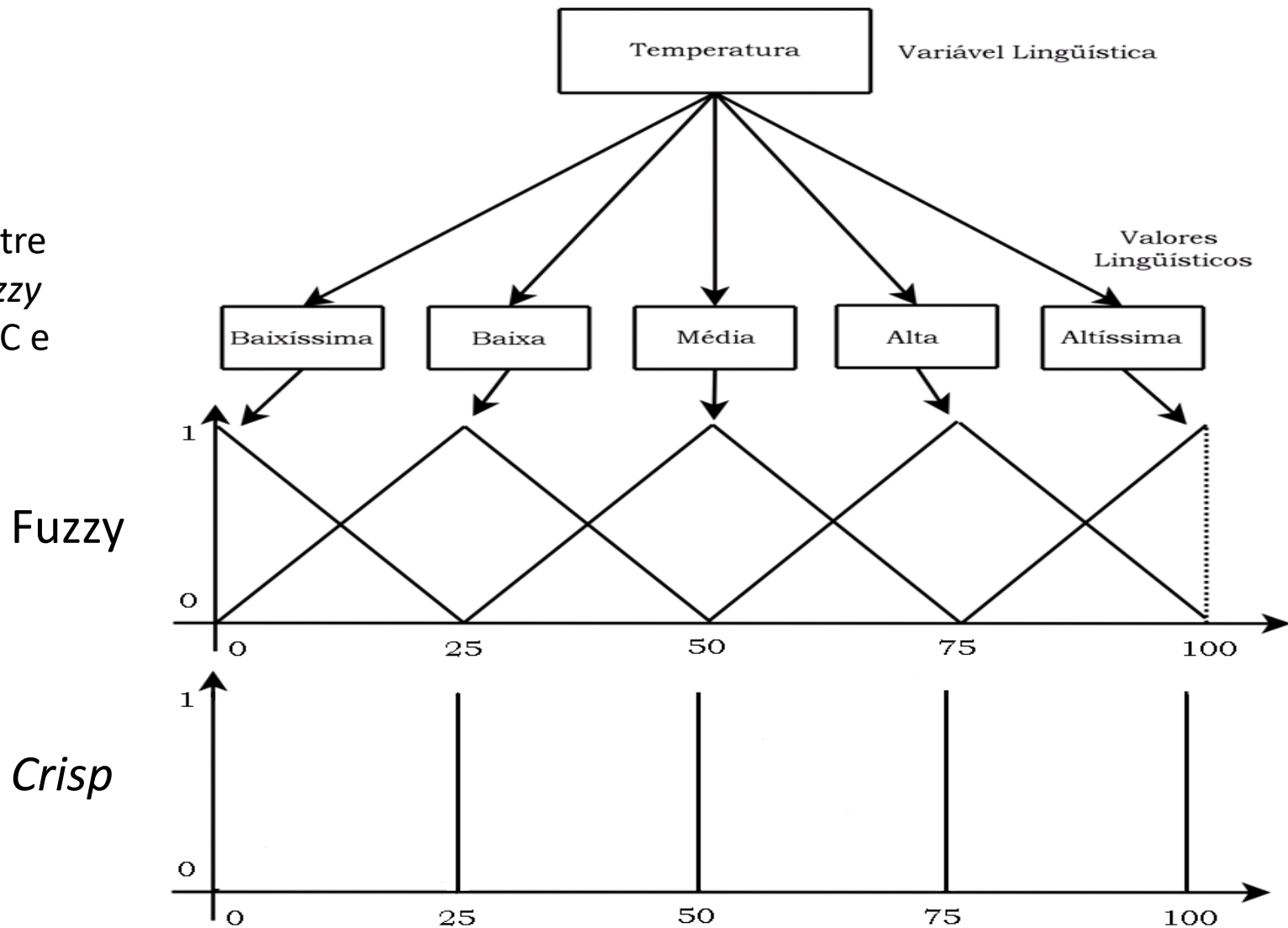
- Variáveis lingüísticas:
  - Seus valores são palavras ou sentenças em linguagem natural, e não números
    - Pessoa é ALTA, ao invés de 1,80
    - Água está QUENTE, ao invés de 40 °C
  - Tratamento de imprecisão e incerteza
  - Transição gradual entre conjuntos

# Sistemas *Fuzzy*



# Sistemas *Fuzzy*

Obs.: note as transições entre Conjuntos *fuzzy* (exemplo: 5° C e 20 °C)



# Aplicação: controladores *Fuzzy*

[http://en.wikipedia.org/wiki/Fuzzy\\_logic](http://en.wikipedia.org/wiki/Fuzzy_logic)

<http://www.sae.org/technical/papers/952673>

<https://ieeexplore.ieee.org/document/481947>

<https://iopscience.iop.org/article/10.1088/1742-6596/1833/1/012005/pdf>

[https://abcm.org.br/symposium-series/SSM\\_Vol5/Section\\_III\\_Emerging\\_Technologies\\_and\\_AI\\_Applications/26122.pdf](https://abcm.org.br/symposium-series/SSM_Vol5/Section_III_Emerging_Technologies_and_AI_Applications/26122.pdf)

<http://dx.doi.org/10.1109/TFUZZ.2006.883415>

- **Sistemas de frenagem em automóveis usam Inteligência Artificial**

- Variáveis linguísticas como distância carro-obstáculo
- Auxílio do controlador na decisão sobre intensidade da frenagem



- **Identificação e adaptação aos padrões de solicitação de um elevador**

- Variáveis linguísticas como tempo de espera pelo elevador
- Aplicabilidade para um ou mais elevadores



# Aplicação: controladores *Fuzzy*

[http://en.wikipedia.org/wiki/Fuzzy\\_logic](http://en.wikipedia.org/wiki/Fuzzy_logic)

<http://www.sae.org/technical/papers/952673>

[http://cobnitz.codeen.org:3125/citeseer.ist.psu.edu/cache/papers/cs/12585/http:zSzzSzwww.cairo.utm.myzSzpublicationszSzkktan\\_Elevator.pdf/intelligent-elevator-control-by.pdf](http://cobnitz.codeen.org:3125/citeseer.ist.psu.edu/cache/papers/cs/12585/http:zSzzSzwww.cairo.utm.myzSzpublicationszSzkktan_Elevator.pdf/intelligent-elevator-control-by.pdf)

<http://dx.doi.org/10.1109/TFUZZ.2006.883415>

- **Máquinas de lavar roupas** usam sistemas inteligentes para detectar e adaptar padrões como movimento da água durante o ciclo de lavagem, temperatura, buscando aumentar a eficiência e reduzir o consumo de água
- Simulador de piloto automático de **aviões** com aceleração definida de modo a economizar combustível



# Considerações sobre *Fuzzy*

A teoria dos conjuntos *fuzzy* e a aplicação da lógica nebulosa representam um grande avanço científico, no sentido de que, por tratarem de incerteza, produzem soluções mais próximas do mundo natural, para sistemas de diversos tipos, do que outros métodos



- Alguns slides foram baseados em apresentações de:
  - Profa. Huei Diana Lee
  - Prof. E. Keogh
  - Prof. João L. G. Rosa
  - Profa. Maria C. Monard
  - Profa. Solange Oliveira Rezende
  - Prof. Mário Benevides
  - Prof. Simon Coupland