理论力学 CAI

刚体平面运动学

- 前言
- 刚体的连体基 刚体位形的描述
- 刚体的平面运动
- 刚体的姿态及其变化
- 基点的位置、速度与加速度
- 刚体上给定点的位置、速度与加速度
- 相对刚体运动的任意点的位置、速度与加速度

刚体的连体基

刚体位形的描述

刚体的连体基 刚体位形的描述

- **刚体的连体基与刚体的位形**
- **刚体平面运动的位形**

刚体的连体基 刚体位形的描述

- 刚体的连体基与刚体的位形
- 刚体平面运动的位形

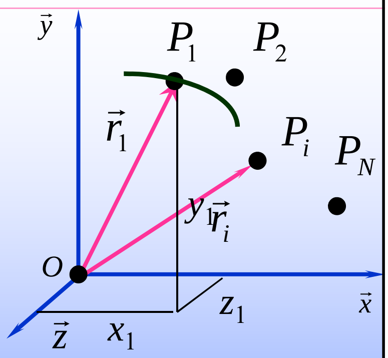
刚体的连体基与刚体的位形

- 理论力学的研究对象
  - 质点，质点系，刚体，刚体系
- 运动学的任务
  - 如何描述质点、质点系、刚体与刚体系的运动
    - 研究对象的空间与时间的关系
  - 重点：刚体（系）

- 质点运动的描述
  - 质点在参考系的矢径或坐标

$$P_1 \quad \vec{r}_1 \xrightarrow{\vec{e}} \boldsymbol{r}_1 = (x_1 \quad y_1 \quad z_1)^{\mathrm{T}}$$

质点的运动 $\boldsymbol{r}_1(t)$



- 质点系运动的描述
  - 每个质点在参考系的矢径或坐标

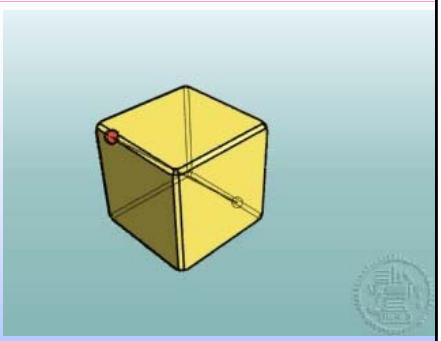
$$(P_1, P_2, \cdots, P_N)$$

$$P_i \quad \vec{r}_i \xrightarrow{\vec{e}} \boldsymbol{r}_i = (x_i \quad y_i \quad z_i)^{\mathrm{T}} \qquad i = 1, \cdots, N$$

质点系的运动 $\boldsymbol{r}_i(t)$

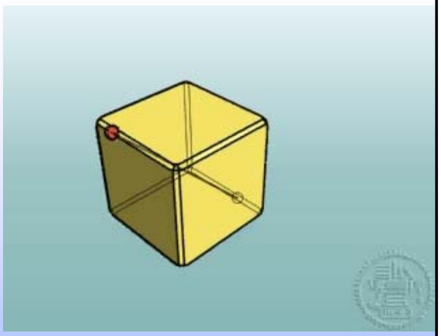
- 刚体运动如何描述
  - 按质点系描述 ？

需要无限多个坐标！！



- 刚体是特殊的质点系
  - 在运动过程中物体内任意两点的距离保持不变
  - **刚体中每个质点的运动相互有一定的关系**

- 考察刚体运动的方法
  - “远看”
    宏观上考察刚体的运动
    - 位置
    - 姿态
  - “近看”
    考察刚体上点的运动

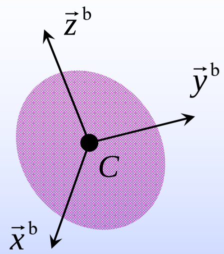


刚体运动 ➡ 刚体上点的运动

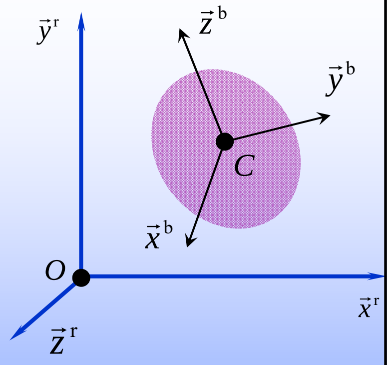
关系

描述刚体以及其上点的运动的关键：刚体运动的描述

- 描述刚体运动的方法
  - 以刚体上一点C为**基点**
  - 构造一个正交基与该刚体相**固结**
    - 称为该刚体的**连体基** $\vec{\boldsymbol{e}}^{b}$
    - **基矢量** $\vec{x}^{b}$ $\vec{y}^{b}$ $\vec{z}^{b}$

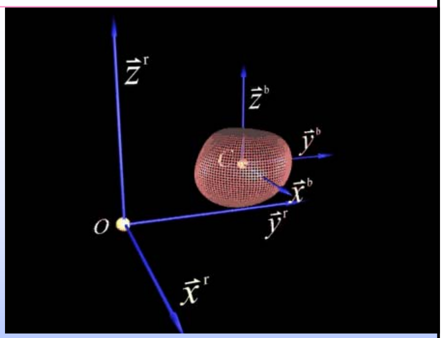


- 描述刚体（连体基）位置与姿态的参考物
  - “绝对”空间
  - 其邻近的其他刚体
- 参考物的描述
  - 固结于参考空间的坐标系
  - 固结于邻近刚体的连体基
  - **参考基**
    - **基点** O
    - **基矢量** $\vec{x}^{\mathrm{r}} \quad \vec{y}^{\mathrm{r}} \quad \vec{z}^{\mathrm{r}}$



$$\vec{\boldsymbol{e}}^{\mathrm{r}} = \left(\vec{x}^{\mathrm{r}} \quad \vec{y}^{\mathrm{r}} \quad \vec{z}^{\mathrm{r}}\right)^{\mathrm{T}}$$

- 刚体位形
  - 刚体在参考基上的位置与相对于该基的姿态
  - 称为**刚体相对该基的位形**
- **刚体位形与该刚体连体基的位形一致**
  - 连体基: 骨架
  - 外形：相对骨架不变的外壳



刚体连体基位形的描述 ➡ 刚体位形描述

- 刚体(连体基)位形的描述

位置的描述

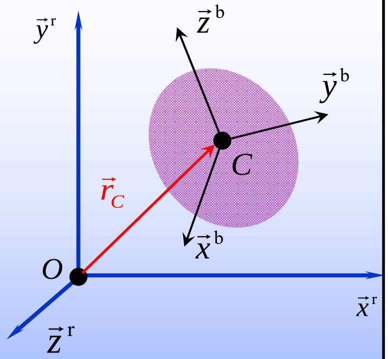
基点*C*在参考基的位置

$\vec{r}_C$ $\quad$ $r_C=(x_C \quad y_C \quad z_C)^{\mathrm{T}}$

姿态的描述

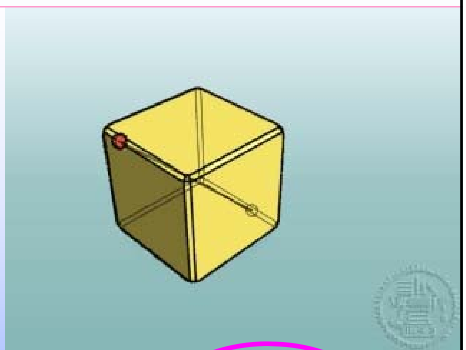
连体基相对于参考基的方向余弦阵

$\boldsymbol{A}^{\mathrm{rb}}$ $\quad$ $\boldsymbol{A}^{\mathrm{rb}}=\begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} \end{pmatrix}$



刚体(连体基)的运动 $\quad$ $\vec{r}_C(t)$ $\quad$ $\boldsymbol{A}^{\mathrm{rb}}(t)$

- 考察刚体运动的方法
  - “远看”
    宏观上考察刚体的运动
    - 位置
    - 姿态
  - “近看”
    考察刚体上点的运动



运动学研究的策略

刚体运动

连体基的位形

$\vec{r}_C(t)$ $\quad$ $\boldsymbol{A}^{\mathrm{rb}}(t)$

有限个坐标

关系 ➡

刚体上点的运动

无限个坐标

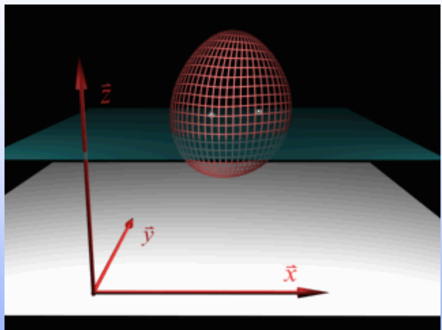
任意点的坐标

首先解决

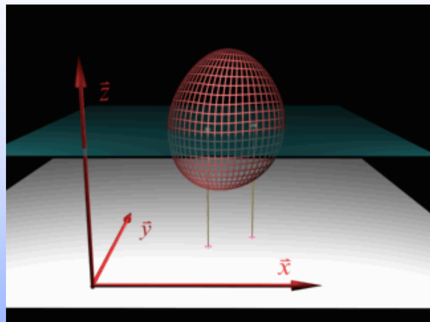
刚体的连体基 刚体位形的描述

- 刚体的连体基与刚体的位形
- 刚体平面运动的位形

- 刚体的运动的分类



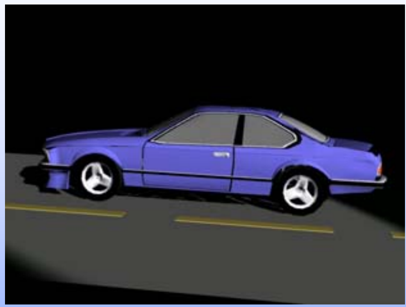
刚体的一般运动

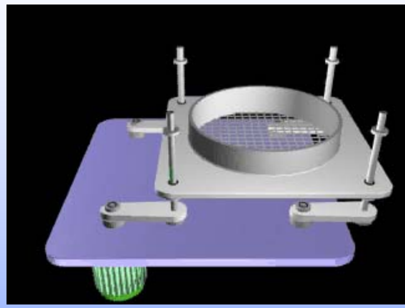


刚体的平面运动

在运动的过程中，刚体内部任意点与某固定的参考平面的距离始终保持不变

- 刚体运动的分类





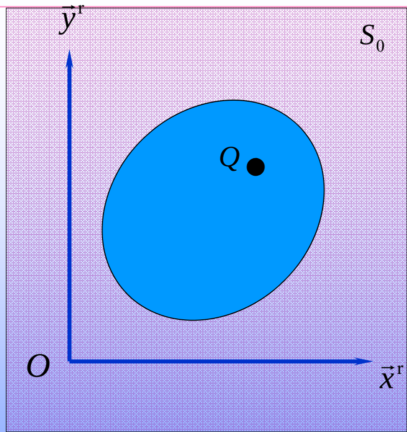
汽车直行　汽车拐弯　　　　**茶叶筛**

刚体的一般运动

刚体的平面运动

- 刚体平面运动的力学模型

作平面运动的刚体在参考平面上的投影面可简称为**平面刚体**



- 刚体平面运动的描述

刚体连体基(基点*C*)

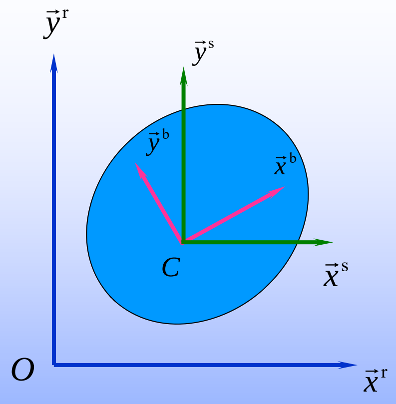
$$\vec{e}^{\mathrm{b}} = (\vec{x}^{\mathrm{b}} \quad \vec{y}^{\mathrm{b}})^{\mathrm{T}}$$

参考基(基点*O*)

$$\vec{e}^{\mathrm{r}} = (\vec{x}^{\mathrm{r}} \quad \vec{y}^{\mathrm{r}})^{\mathrm{T}}$$

平面平动参考基

$$\vec{e}^{\mathrm{s}} = (\vec{x}^{\mathrm{s}} \quad \vec{y}^{\mathrm{s}})^{\mathrm{T}}$$



基点为*C*: 与刚体一起运动

基矢量与参考基平行：与刚体不固结

$$\vec{z}^{\mathrm{r}} = \vec{z}^{\mathrm{s}} = \vec{z}^{\mathrm{b}}$$

- 平面运动刚体的位形

位置的描述

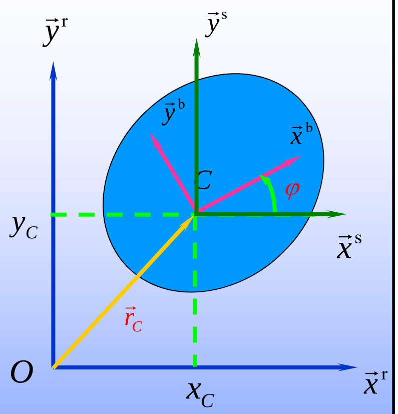
基点*C*在参考基的位置

$\vec{r}_C$ $\qquad \boldsymbol{r}_C = (x_C \quad y_C)^{\mathrm{T}}$

姿态的描述

连体基相对于参考基的方向余弦阵

$\boldsymbol{A}^{\mathrm{rb}}$ $\qquad \boldsymbol{A}^{\mathrm{rb}} = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix}$



定义姿态角 φ

基矢量 $\vec{x}^{\mathrm{b}}$ 与 $\vec{x}^{\mathrm{r}}$ ($\vec{x}^{\mathrm{s}}$)的夹角

旋转的正向与基矢量 $\vec{z}^{\mathrm{b}}$ 一致

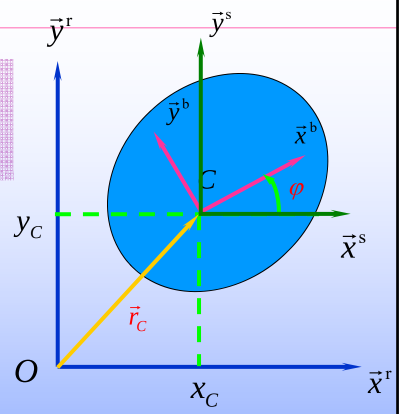
$$\boldsymbol{A}^{\mathrm{rb}} = \begin{pmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix}$$

平面刚体的位形 $\vec{r}_C \quad A^{\mathrm{rb}}$ ⟷ 三个标量 $r_C = (x_C \quad y_C)^{\mathrm{T}} \quad \varphi$

定义列阵

$$q = \left(r_C^{\mathrm{T}} \quad \varphi\right)^{\mathrm{T}} = \left(x_C \quad y_C \quad \varphi\right)^{\mathrm{T}}$$

刚体位形坐标阵



$$A^{\mathrm{rb}} = \begin{pmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix}$$

刚体运动

$$q(t) = \left(x_C(t) \quad y_C(t) \quad \varphi(t)\right)^{\mathrm{T}}$$

⇕

$\vec{r}_C(t) \quad A^{\mathrm{rb}}(t)$

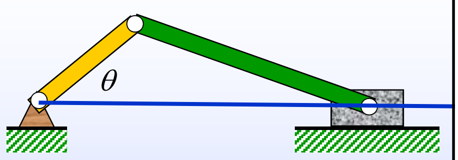
[例]

图示一曲柄-滑块机构，分别由机座、曲柄、连杆与滑块等四个构件组成。

令曲柄与连杆的长度分别为 $r = 0.5$ m与$l = 2$ m

当曲柄与水平的夹角$\theta = 45$度时，

确定四个构件的位形与关于公共基的方向余弦阵



[解]

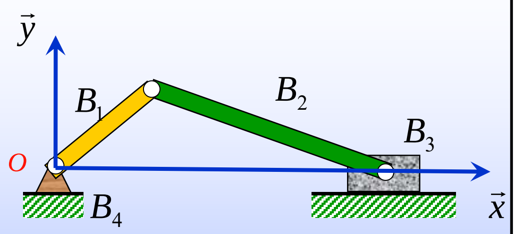
对四个构件进行编号

B_1： 曲柄

B_2： 连杆

B_3： 滑块

B_4： 机座



建立公共参考基： $O-\vec{e}$

- 曲柄$\mathbf{B_1}$

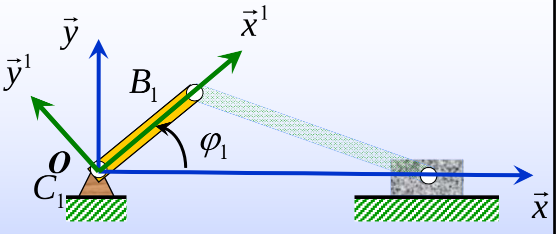
建立连体基 $C_1-\vec{e}^{\,1}$

连体基基点C_1的矢径

$$\vec{r}_1=\overrightarrow{OC_1}=\vec{0}$$

坐标阵： $\boldsymbol{r}_1=(0 \quad 0)^{\mathrm{T}}$

连体基姿态角： $\varphi_1=\pi/4=0.785$



瞬时位形坐标 $\boldsymbol{q}_1=(\boldsymbol{r}_1^{\mathrm{T}} \quad \varphi_1)^{\mathrm{T}}=(0 \quad 0 \quad 0.785)^{\mathrm{T}}$

方向余弦阵 $\boldsymbol{A}^1=\begin{pmatrix}0.707 & -0.707\\ 0.707 & 0.707\end{pmatrix}$

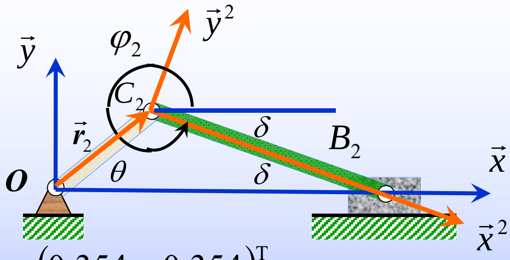
$$=\begin{pmatrix}\cos\varphi_1 & -\sin\varphi_1\\ \sin\varphi_1 & \cos\varphi_1\end{pmatrix}$$

- **连杆B_2**

建立连体基 $C_2 - \vec{e}^{\,2}$

连体基基点C_2的矢径

$$\vec{r}_2 = \overrightarrow{OC_2}$$



坐标阵：

$$\boldsymbol{r}_2 = (0.5\cos\theta \quad 0.5\sin\theta)^{\mathrm{T}} = (0.354 \quad 0.354)^{\mathrm{T}}$$

连体基姿态角： ?

$$\varphi_2 = 2\pi - \delta = 6.105 \qquad 2\sin\delta = 0.5\sin\theta$$

瞬时位形坐标 $\boldsymbol{q}_2 = (\boldsymbol{r}_2^{\mathrm{T}} \quad \varphi_2)^{\mathrm{T}} = (0.354 \quad 0.354 \quad 6.105)^{\mathrm{T}}$

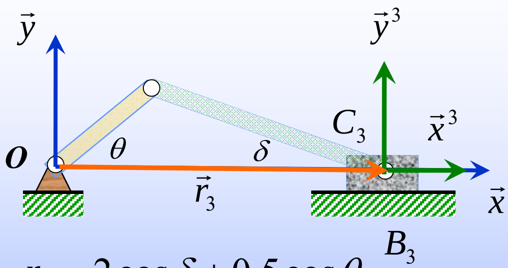
方向余弦阵 $\boldsymbol{A}^2 = \begin{pmatrix} \cos\varphi_2 & -\sin\varphi_2 \\ \sin\varphi_2 & \cos\varphi_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.984 & 0.177 \\ -0.177 & 0.984 \end{pmatrix}$

- **滑块B_3**

建立连体基 $C_3 - \vec{e}^{\,3}$

连体基基点C_3的矢径

$$\vec{r}_3 = \overrightarrow{OC_3} \quad ?$$



坐标阵：$\boldsymbol{r}_3 = (2.322 \quad 0)^{\mathrm{T}}$

连体基姿态角： $\varphi_3 = 0$

$$r_3 = 2\cos\delta + 0.5\cos\theta$$

瞬时位形坐标 $\boldsymbol{q}_3 = (\boldsymbol{r}_3^{\mathrm{T}} \quad \varphi_3)^{\mathrm{T}} = (2.322 \quad 0 \quad 0)^{\mathrm{T}}$

方向余弦阵 $\boldsymbol{A}^3 = \begin{pmatrix} \cos\varphi_3 & -\sin\varphi_3 \\ \sin\varphi_3 & \cos\varphi_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

- 机座$\mathbf{B_4}$

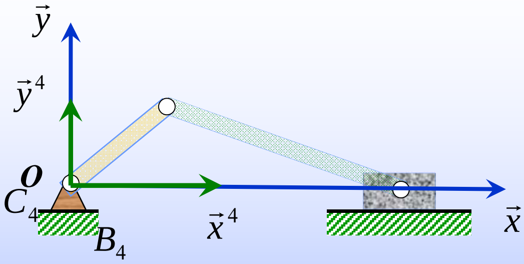
建立连体基 $C_4-\vec{e}^{\,4}$

连体基基点C_4的矢径

$$\vec{r}_4=\overrightarrow{OC_4}=\vec{0}$$

坐标阵： $\boldsymbol{r}_4=(0\quad 0)^{\mathrm{T}}$

连体基姿态角： $\varphi_4=0$



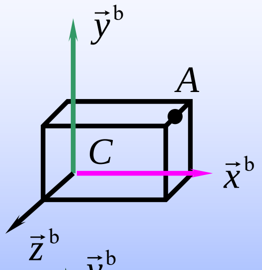
瞬时位形坐标 $\boldsymbol{q}_4=(\boldsymbol{r}_4^{\mathrm{T}}\quad \varphi_4)^{\mathrm{T}}=(0\quad 0\quad 0)^{\mathrm{T}}$

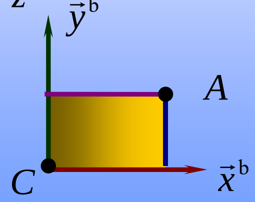
方向余弦阵 $$\boldsymbol{A}^4=\begin{pmatrix}\cos\varphi_4 & -\sin\varphi_4\\ \sin\varphi_4 & \cos\varphi_4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$$

[例] 图示一正方体与连体基的关系。已知各时刻连体基的位形坐标为

t(s)	x_C(m)	y_C(m)	φ(deg)
0.0	0	0	0
1.0	1	1	-45
2.0	2	1	-90

求： 每一时刻正方体的位形与点A的位置

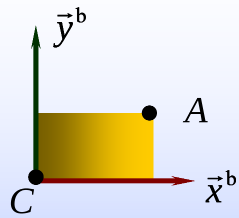


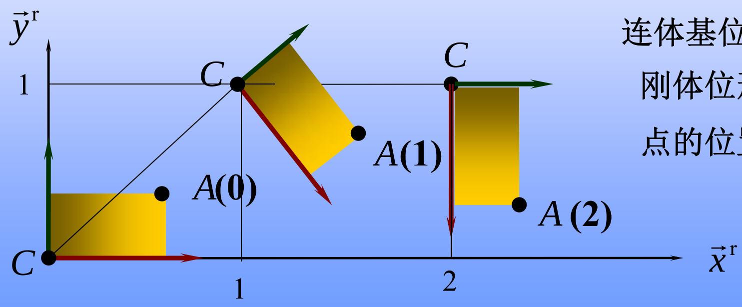


平面刚体模型

[解]

t(s)	x_C (m)	y_C (m)	φ (deg)
0.0	0	0	0
1.0	1	1	-45
2.0	2	1	-90





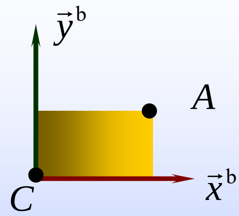
连体基位形

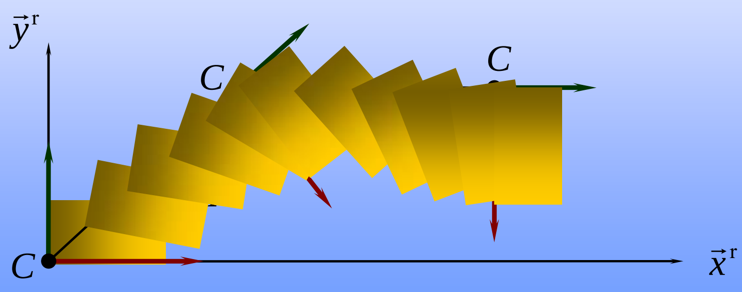
刚体位形

点的位置

刚体位形一定，点的位置确定

t(s)	x_C (m)	y_C (m)	φ (deg)
0.0	0	0	0
1.0	1	1	-45
2.0	2	1	-90





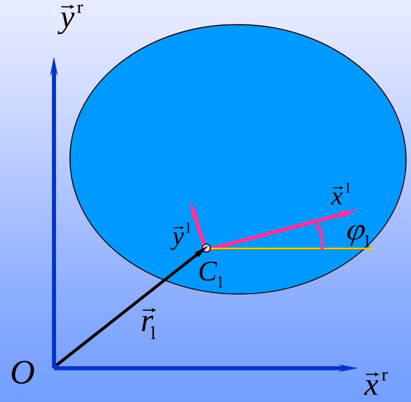
刚体的运动过程

- 不同的连体基描述同一刚体位形的关系

参考基 $O-\vec{\boldsymbol{e}}$

连体基1 $C_1-\vec{e}^1$

$$\boldsymbol{q}_1=(\boldsymbol{r}_1^{\mathrm{T}} \quad \varphi_1)^{\mathrm{T}}=(x_1 \quad y_1 \quad \varphi_1)^{\mathrm{T}}$$



刚体的连体基 刚体位形的描述

- 不同的连体基描述同一刚体位形的关系

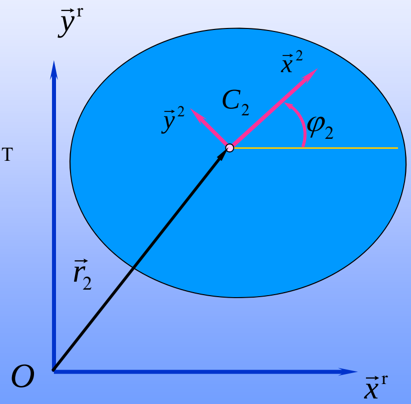
参考基 $O-\vec{\boldsymbol{e}}$

连体基1 $C_1-\vec{e}^1$

$$\boldsymbol{q}_1=(\boldsymbol{r}_1^{\mathrm{T}} \quad \varphi_1)^{\mathrm{T}}=(x_1 \quad y_1 \quad \varphi_1)^{\mathrm{T}}$$

连体基2 $C_2-\vec{\boldsymbol{e}}^2$

$$\boldsymbol{q}_2=(\boldsymbol{r}_2^{\mathrm{T}} \quad \varphi_2)^{\mathrm{T}}=(x_2 \quad y_2 \quad \varphi_2)^{\mathrm{T}}$$



- 不同的连体基描述同一刚体位形的关系

参考基 $O-\vec{e}$

连体基**1** $C_1-\vec{e}^1$

$$\boldsymbol{q}_1=(\boldsymbol{r}_1^{\mathrm{T}}\quad \varphi_1)^{\mathrm{T}}=(x_1\quad y_1\quad \varphi_1)^{\mathrm{T}}$$

连体基**2** $C_2-\vec{e}^2$

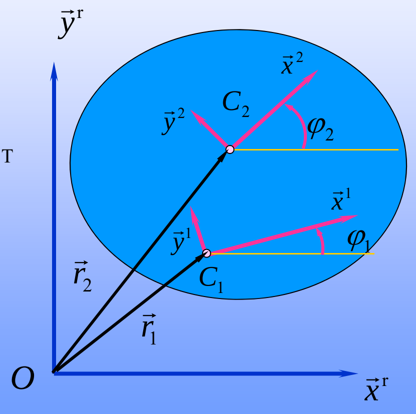
$$\boldsymbol{q}_2=(\boldsymbol{r}_2^{\mathrm{T}}\quad \varphi_2)^{\mathrm{T}}=(x_2\quad y_2\quad \varphi_2)^{\mathrm{T}}$$

$$\boldsymbol{q}_1 \neq \boldsymbol{q}_2$$

两连体基相对关系给定的条件下

两位形坐标的关系？

$$\boldsymbol{q}_1 \sim \boldsymbol{q}_2$$



- 两连体基的相对关系

参考基	连体基**1**	连体基**2**
$O-\vec{e}$	$C_1-\vec{e}^1$	$C_2-\vec{e}^2$

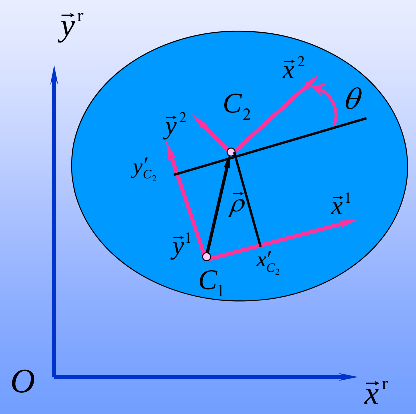
C_2相对于C_1的矢径 $\vec{\rho}$ 连体矢量

在 $\vec{e}^1$ 坐标阵

$\boldsymbol{\rho}^1=\left(x'_{C_2}\quad y'_{C_2}\right)^{\mathrm{T}}$ 常值阵

连体基 $\vec{e}^2$ 相对 $\vec{e}^1$ 姿态角

$\theta=$常数



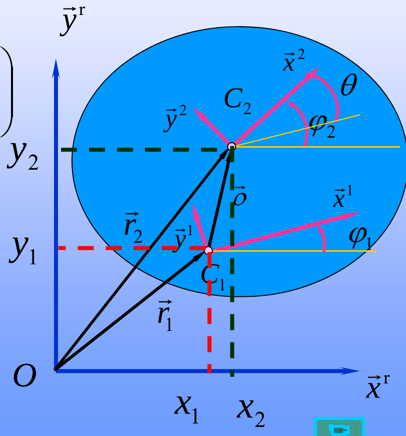
- 两连体基基点矢径间的关系

$$\vec{r}_2 = \vec{r}_1 + \vec{\rho}$$

$\vec{\boldsymbol{e}}$： $\boldsymbol{r}_2 = \boldsymbol{r}_1 + \boldsymbol{A}^1 \boldsymbol{\rho}^1$

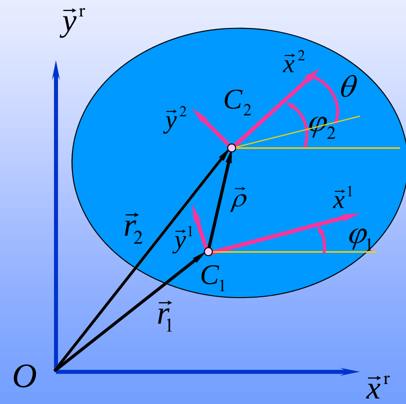
$$\begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \cos\varphi_1 & -\sin\varphi_1 \\ \sin\varphi_1 & \cos\varphi_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x'_{C_2} \\ y'_{C_2} \end{pmatrix}$$

基点2坐标　基点1坐标　基点2相对坐标



- 两连体基姿态角的关系

$\varphi_2 = \varphi_1 + \theta = \varphi_1 + 常数$



- 不同的连体基描述同一刚体位形的关系

参考基	连体基1	连体基2
$O-\vec{e}$	$C_1-\vec{e}^1$	$C_2-\vec{e}^2$

两连体基相对关系给定的条件下

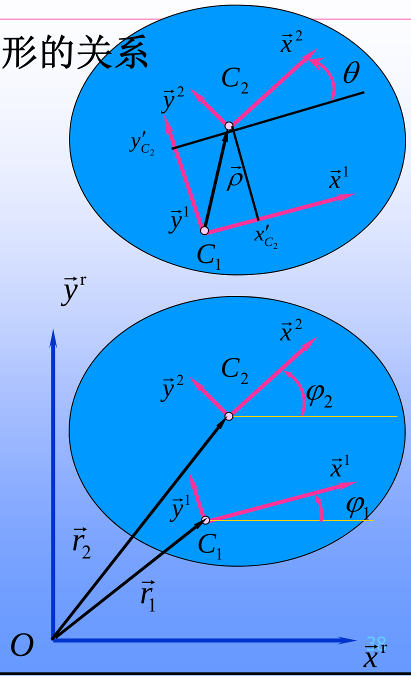
$\boldsymbol{\rho}^1=\left(x'_{C_2} \quad y'_{C_2}\right)^{\mathrm{T}}$ 常值阵

$\theta=$ 常数

两位形坐标的关系 $\boldsymbol{q}_1 \sim \boldsymbol{q}_2$

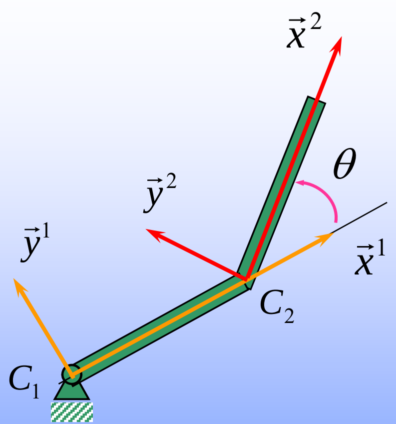
$\boldsymbol{r}_2=\boldsymbol{r}_1+\boldsymbol{A}^1\boldsymbol{\rho}^1$

$\varphi_2=\varphi_1+\theta=\varphi_1+$ 常数



[例] 如图所示的一构件，在C_2处有一拐角。按图示分别在端部与点C_2建立两个连体基。

$$\overline{C_1C_2}=l \qquad \theta=\pi/4$$



求两个连体基位形坐标的关系

[解] 建立公共参考基 $\vec{e}$

连体基 $\vec{e}^{\,1}$ 的位形坐标

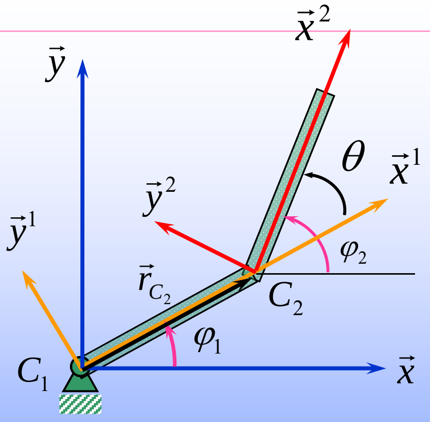
$$\boldsymbol{q}_1 = \begin{pmatrix} \boldsymbol{r}_{C_1}^{\mathrm{T}} & \varphi_1 \end{pmatrix}^{\mathrm{T}} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \varphi_1 \end{pmatrix}^{\mathrm{T}}$$

连体基 $\vec{e}^{\,2}$ 的位形坐标

$$\boldsymbol{q}_2 = \begin{pmatrix} \boldsymbol{r}_{C_2}^{\mathrm{T}} & \varphi_2 \end{pmatrix}^{\mathrm{T}}$$

$$\boldsymbol{r}_{C_2} = \begin{pmatrix} l\cos\varphi_1 & l\sin\varphi_1 \end{pmatrix}^{\mathrm{T}}$$

$$= \left(l\cos\left(\varphi_2 - \frac{\pi}{4}\right) \quad l\sin\left(\varphi_2 - \frac{\pi}{4}\right) \right)^{\mathrm{T}} \qquad \varphi_2 = \varphi_1 + \theta = \varphi_1 + \frac{\pi}{4}$$



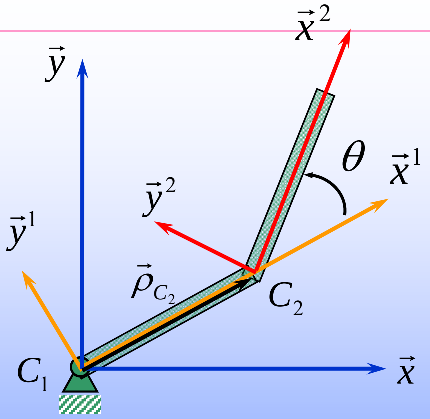
$$\boldsymbol{q}_2 = \left(l\cos\left(\varphi_2 - \frac{\pi}{4}\right) \quad l\sin\left(\varphi_2 - \frac{\pi}{4}\right) \quad \varphi_2 \right)^{\mathrm{T}}$$

连体基 $\vec{e}^{\,1}$ 的位形坐标

$$\boldsymbol{q}_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \varphi_1 \end{pmatrix}^{\mathrm{T}}$$

连体基 $\vec{e}^{\,2}$ 的位形坐标

$$\boldsymbol{q}_2 = \left(l\cos\left(\varphi_2 - \frac{\pi}{4}\right) \quad l\sin\left(\varphi_2 - \frac{\pi}{4}\right) \quad \varphi_2 \right)^{\mathrm{T}}$$



两个连体基的相对关系

$$\vec{\rho}_{C_2} \qquad \theta$$

$$\boldsymbol{q}_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \varphi_1 \end{pmatrix}^{\mathrm{T}}$$

$$\boldsymbol{q}_2 = \begin{pmatrix} l\cos\left(\varphi_2 - \frac{\pi}{4}\right) & l\sin\left(\varphi_2 - \frac{\pi}{4}\right) & \varphi_2 \end{pmatrix}^{\mathrm{T}}$$

两个连体基的相对关系 $\vec{\rho}_{C_2}$　θ

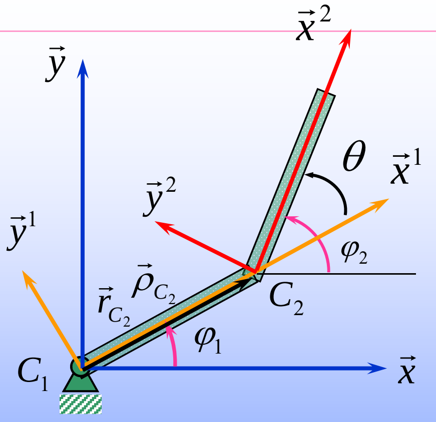
两个位形坐标关系

$$\vec{r}_{C_2} = \vec{r}_{C_1} + \vec{\rho}_{C_2}$$

$$\boldsymbol{r}_{C_2} = \boldsymbol{r}_{C_1} + \boldsymbol{\rho}_{C_2} \quad = \boldsymbol{A}^1 \boldsymbol{\rho}_{C_2}^1$$

$$= \begin{pmatrix} \cos\varphi_1 & -\sin\varphi_1 \\ \sin\varphi_1 & \cos\varphi_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} l \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} l\cos\varphi_1 \\ l\sin\varphi_1 \end{pmatrix}$$

$$\varphi_2 = \varphi_1 + \theta$$



$\vec{e}^{\,2}$ 的基点C_2在 $\vec{e}^{\,1}$ 的位置 $\vec{\rho}_{C_2}$

$$\boldsymbol{\rho}_{C_2}^1 = \begin{pmatrix} l & 0 \end{pmatrix}^{\mathrm{T}}$$

哪一种连体基比较理想？

结论

- **刚体位形与该刚体连体基的位形一致，刚体上连体基的选取是任意的**
- **不同的连体基描述同一个刚体的位形坐标的表达式不同，但相互有一定的关系**
- **合理设定连体基可得到比较简洁的位形坐标的时间历程表达式**