上 海 交 通 大 学 试 卷（ A 卷）

（ 2011 至 2012 学年 第 一 学期 ）

班级号________________ 学号____________ 姓名 ____________

课程名称 概 率 统 計 成绩 ________________

题 号	一	二	13～16	17～20	总 分
得 分					
评 阅 人					

一．单项选择题 （每题 3 分，共 18 分）

1．设总体 $X \sim B(1,p)$，$(X_1, X_2, \cdots, X_n)$ 为来自总体 X 的样本，$\bar{X}$ 为样本的均值。

则 $P(\bar{X}=\frac{k}{n})$ 等于 （ ）

（A） p；（B） $p^k(1-p)^{n-k}$；

（C） $C_n^k p^k (1-p)^{n-k}$；（D） $C_n^k (1-p)^k p^{n-k}$。

2．设 X，Y 为随机变量，则 $D(X-Y)=D(X+Y)$ 是 X 与 Y 的 （ ）

（A）不相关的充分条件，但不是必要条件；（B）不相关的必要条件，但不是充分条件；

（C）独立的必要条件，但不是充分条件；（D）独立的充分必要条件。

3．设存在常数 a，b（$a \neq 0$），使得概率 $P(Y=aX+b)=1$，则必有 （ ）

（A） $\rho_{XY}=\frac{a}{|a|}$；（B） $\rho_{XY}=-1$；

（C） $\rho_{XY}=1$；（D） $-1<\rho_{XY}<1$。

4．设随机变量 X 的概率密度函数为 $f(x)$，且 $f(x)=f(-x)$，又设 $F(x)$ 为 X 的分布函数。

则对任意实数 a，有 （ ）

（A） $F(-a)=1-\int_0^a f(x)dx$；（B） $F(-a)=1-\int_{-\infty}^a f(x)dx$；

（C） $F(-a)=F(a)$；（D） $F(-a)=2F(a)-1$。

5．设 X 为随机变量，已知 $E(X)=1$，$D(X)=0.1$。由切比雪夫不等式，可得 （　　　　）

（A）$P(-1<X<1)\ge 0.9$；　　　　（B）$P(0<X<2)\ge 0.9$；

（C）$P(|X+1|\ge 1)\ge 0.9$；　　　　（D）$P(|X|\ge 1)\ge 0.1$。

6．设 $(X_1,X_2,\cdots,X_n)$ 为取自总体 X 的样本，$\overline{X}$ 为样本的均值。

则 $E(X^2)$ 的距估计量为 （　　　　）

（A）$S_1^2=\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\overline{X})^2$；　　　　（B）$S_2^2=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\overline{X})^2$；

（C）$S_1^2+\overline{X^2}$；　　　　（D）$S_2^2+\overline{X^2}$。

二．填空题 （每题 3 分，共 18 分）

7．袋中有 40 个球，其中 10 个是红球，30 个是白球，今有两人依次随机地从袋中各取一球，取后不放回，

则第二个人取得红球的概率是____________。

8．设随机变量 X 的概率密度函数为 $f_X(x)=\begin{cases}2x, & 0<x<1,\\ 0, & x\le 0.\end{cases}$， 以随机变量 Y 表示对 X 的三次独立重

复观察中，事件 $(X\le\frac{1}{2})$ 出现的次数。 则 $P(Y=2)=$______________。

9．设总体 $X\sim N(0,\sigma^2)$，$(X_1,X_2,\cdots,X_9)$ 是取自总体 X 的样本，已知 $Y=k(\sum_{i=1}^{9}X_i)^2$ 服从 χ^2 分布。

则常数 $k=$______________ 。

10．设二维随机变量 (X,Y) 在区域 $\mathrm{D}=\{(x,y)\,|\,0<x<1,\ |y|<1\}$ 内服从均匀分布。

则随机变量 $Z=2X+1$ 的方差 $D(Z)=$______________。

11．设 $(X_1,X_2,\cdots,X_n)$ 为来自总体 $X\sim N(\mu,\sigma^2)$ 的样本, 其中 μ,σ^2 均未知，设 $\overline{X}$ 为样本均值，

S^2 为样本方差，则 μ 的置信度为 $1-\alpha$ $(0<\alpha<1)$ 的单侧置信区间的上限是 $\hat{\mu}_U=$____________。

12．设总体 $X\sim N(\mu,\sigma^2)$，待检的原假设 $H_0:\sigma^2=\sigma_0^2$，对于给定的显著性水平 α $(0<\alpha<1)$，

如果拒绝域为 $W=[0,\ \chi^2_{1-\alpha}(n-1)]$，则相应的备择假设 H_1 是____________。

三．解答题 （每题 8 分，共 64 分）

13. 有甲，乙，丙三个箱子，其中甲箱中有 4 个白球，3 个黑球；乙箱中有 2 个白球，3 个黑球；丙箱中没有球。现从甲，乙箱中分别任取出 2 球和 1 球放入丙箱中。

（1）求丙箱中有 2 个白球的概率；

（2）若从丙箱中任取出 1 球，发现是白球，求丙箱中有 2 个白球的概率。

14. 对一批镉的熔点（单位：^{o}C）做 5 次测定，结果为

$$1269, 1267, 1271, 1263，1265$$

若镉的熔点服从正态分布 $N(\mu,\sigma^2)$，其中 μ 和 σ^2 为未知常数。对给定的检验水平 $\alpha=0.05$，做如下假设检验：（1）总体均值 μ 与标准均值 $\mu_0=1266$ 是否有显著差异；

（2）总体方差 σ^2 是否比标准方差 $\sigma_0^2=4$ 偏大。

15. 设二维随机变量 (X,Y) 的联合密度函数为 $f(x,y)=\begin{cases}1, & |y|<x, 0<x<1\\ 0, & \text{其他}\end{cases}$

试求：（1）边缘密度函数 $f_X(x)$；（2）条件密度函数 $f_{Y|X}(y\,|\,x)$。

16. 设二维随机变量 (X,Y) 在单位园 $D=\{(x,y)\,|\,x^2+y^2\le 1\}$ 上服从均匀分布，

（1）求相关系数 ρ_{XY}；（2）问 X 与 Y 是否独立？

17. 设某车间有同型号的机床 200 部，每台机床的开工的概率为 $p=0.7$。假设各机床是否开工是相互独立的，每台机床开工时每小时耗电 15 度。

问：要保证车间以 95.99%的概率正常生产，需要变电站每小时供应该车间多少度电？

18. 设总体 $X\sim U(0,\theta)$，其中 $\theta>0$ 未知。$(X_1,X_2,\cdots,X_n)$ 为来自总体 X 的一个样本，

（1）求未知参数 θ 的矩估计量 $\hat{\theta}_1$ 和最大似然估计量 $\hat{\theta}_2$；（2）分别评价 $\hat{\theta}_1$ 与 $\hat{\theta}_2$ 的无偏性。

19. 设随机变量 $X\sim N(0,1)$，试求：（1）$Y=X^2$ 的密度 $f_Y(y)$；（2）数学期望 $E(2X^4)$。

20. 设 μ_n 是 n 重伯努利试验中成功的次数，p 为每次成功的概率，（1）求出 μ_n 的分布律；

（2）证明：当 n 充分大时，有 $P\left(\left|\dfrac{\mu_n}{n}-p\right|<\varepsilon\right)\approx 2\Phi\left(\varepsilon\sqrt{\dfrac{n}{pq}}\right)-1$，

其中，$p+q=1$，$\Phi(x)$ 是标准正态分布的分布函数。

附：数表

$\Phi(1.645)$ C，$\Phi(1.96)=0.975$，$\Phi(1.75)=0.9599$

$t_{0.025}(4)=2.77$，$t_{0.05}(4)=2.1318$，$t_{0.025}(5)=2.5706$，$t_{0.05}(5)=2.0150$

$\chi^2_{0.025}(4)=11.1$，$\chi^2_{0.05}(4)=9.488$，$\chi^2_{0.025}(5)=12.832$，$\chi^2_{0.05}(5)=11.070$

概 率 統 計 参 考 答 案

一　单项选择题　1.（C）；　2.（A）；　3.（C）；　4.（B）；　5.（B）；　6（D）。

二　填空题

7．1/4；8．9/64；9．$\dfrac{1}{9\sigma^2}t(9)$；10．1/3；　11．$\hat{\mu}_U=\bar{X}+t_\alpha(n-1)\dfrac{S}{\sqrt{n}}$；12．$\sigma^2<\sigma_0{}^2$。

三　解答题

13.（1）设 A_i ={丙箱中有 i 个白球}，$i=0,1,2,3.$

$$P(A_0)=\frac{C_3^2}{C_7^2}\times\frac{3}{5}=\frac{3}{35},\qquad P(A_1)=\frac{C_4^1C_3^1}{C_7^2}\frac{3}{5}+\frac{C_4^2}{C_7^2}\frac{2}{5}=\frac{14}{35},$$

$$P(A_2)=\frac{C_4^2}{C_7^2}\frac{3}{5}+\frac{C_4^1C_3^1}{C_7^2}\frac{2}{5}=\frac{42}{105}=\frac{14}{35},\quad P(A_3)=\frac{C_4^2}{C_7^2}\frac{2}{5}=\frac{4}{35}。$$ （2 分）

（2）设 B ={从丙箱中取出一球为白球}，则

$$P(B)=\sum_{i=0}^{3}P(A_i)P(B\,|\,A_i)$$

$$=\frac{3}{35}\times0+\frac{14}{35}\times\frac{1}{3}+\frac{14}{35}\times\frac{2}{3}+\frac{4}{35}\times1=\frac{18}{35}$$ （4 分）

$$P(A_2\,|\,B)=\frac{P(A_2)P(B\,|\,A_2)}{P(B)}=\frac{\frac{14}{35}\times\frac{2}{3}}{\frac{18}{35}}=\frac{14}{27}$$ （2 分）

14．由已知条件算得，$\bar{x}=\dfrac{1}{5}\sum_{i=1}^{5}x_i=1267$，$s^2=\dfrac{1}{4}\sum_{i=1}^{5}(x_i-\bar{x})^2=10$，$s=\sqrt{10}$.

（1）提出假设 $H_0:\mu=1266$，$H_1:\mu\neq1266$；（2 分）

当 H_0 为真时，检验统计量　$T=\dfrac{\bar{X}-\mu_0}{S/\sqrt{n}}\sim t(n-1)$

拒绝域$W=(-\infty,-2.7764]\cup[2.7764,+\infty)$　　计算$T_0=\dfrac{\overline{x}-\mu_0}{s/\sqrt{n}}\approx 0.7071\notin W$．

故接受$H_0:\mu=1266$　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　（2 分）

(2)．提出 $H_0:\sigma^2=4$，$H_0:\sigma^2>4$．　　　　　　　　　　　　　（2 分）

当 H_0 **为真**时，检验统计量　$\chi^2=\dfrac{(n-1)S^2}{\sigma_0^2}\sim\chi^2(n-1)$

拒绝域$W=[9.488,+\infty)$，计算$\chi_0^2=\dfrac{(n-1)s^2}{\sigma_0^2}=10\in W$．

故拒绝$H_0:\sigma^2=4$　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　（2 分）

15．（1）　$f_X(x)=\begin{cases}2x, & 0\le x<1\\ 0, & 其他\end{cases}$　。　　　　　　　　　　　（4 分）

（2）　$f_{Y|X}(y\,|\,x)=\dfrac{f(x,y)}{f_X(x)}=\begin{cases}\dfrac{1}{2x}, & |y|<x\\ 0, & 其他\end{cases}$，其中$0<x<1$。　　（4 分）

16．（1）(X,Y)的联合分布密度函数为：　　$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{1}{\pi}, & x^2+y^2\le 1,\\ 0, & 其他.\end{cases}$

其边缘密度函数分别为：

$f_X(x)=\begin{cases}\dfrac{2}{\pi}\sqrt{1-x^2}, & -1\le x\le 1,\\ 0, & 其他.\end{cases}$　　$f_Y(y)=\begin{cases}\dfrac{2}{\pi}\sqrt{1-y^2}, & -1\le y\le\\ 0, & 其他.\end{cases}$　　（2 分）

$E(X)=E(Y)=0$ **错误!未找到引用源。**，且

$$E(XY)=\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}xyf(x,y)dxdy=\iint_{x^2+y^2\le 1}xy\frac{1}{\pi}dxdy=0.$$

从而　$\operatorname{cov}(X,Y)=E(XY)-E(X)E(Y)=0$

故相关系数$\rho_{XY}=0$。　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　（4 分）

（2）显然，$f(x,y)\neq f_X(x)f_Y(y)$ **错误！未找到引用源。**，故 X 与 Y 不独立。（2 分）

17．设X为同时开工的机床数，则 $X\sim B(200,0.7)$，$E(X)=140$ **错误!未找到引用源。错误!未找到**

引用源。，$D(X)=42$ 错误!未找到引用源。。 （4 分）

X 台机床同时开工每小时消耗电能 $15X$ 度。设发电站每小时供应车间 a 度电，

要求该车间正常生产的概率 $P(0\le 15X\le a)$，而

$$0.9599\le P(0\le X\le a/15)\approx\Phi\left(\frac{(a/15)-140}{\sqrt{42}}\right)$$

查表，可得 $\Phi(1.75)=0.9599$ 错误!未找到引用源。，故 $\frac{(a/15)-140}{\sqrt{42}}\ge 1.75$ 错误!未找到引用源。，

从而 $a\ge 2271$ 错误!未找到引用源。。 （4 分）

18．（1） $\mu=E(X)=\frac{\theta}{2}$，$\theta=2\mu$，未知参数 θ 的矩估计量 $\hat{\theta}_1=2\bar{X}$。 （2 分）

似然函数为: $L(\theta)=\begin{cases}\frac{1}{\theta^n}, & 0\le x_i\le\theta,\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}\quad i=1,2,\cdots,n.$

未知参数 θ 的最大似然估计量 $\hat{\theta}_2=X_{(n)}$。 （2 分）

（2）由于 $E(\hat{\theta}_1)=E(2\bar{X})=\frac{2}{n}\sum_{i=1}^{n}E(X_i)=\frac{2}{n}\sum_{i=1}^{n}\frac{\theta}{2}=\theta$,

所以 $\hat{\theta}_1$ 是 θ 的无偏估计。 （2 分）

因为 $\hat{\theta}_2=X_{(n)}$ 的密度函数为: $f(z)=\begin{cases}\frac{nz^{n-1}}{\theta^n}, & z\in[0,\theta],\\ 0, & z\notin[0,\theta].\end{cases}$

所以 $E(\hat{\theta}_2)=\int_{-\infty}^{+\infty}zf(z)dz=\int_0^{\theta}\frac{znz^{n-1}}{\theta^n}dz=\frac{n}{n+1}\theta\ne\theta$

即 $\hat{\theta}_2$ 不是.θ 的无偏估计。 （2 分）

19．（1）由 $y=x^2,-\infty<x<+\infty$ 得 $y\ge 0$。当 $y\ge 0$ 时，有

$$P(Y\le y)=P(X^2\le y)=P(-\sqrt{y}\le X\le\sqrt{y})=\int_{-\sqrt{y}}^{\sqrt{y}}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}}dx,$$ （2 分）

所以，Y 的密度函数为: $f_Y(y)=\begin{cases}\dfrac{1}{\sqrt{2\pi}\sqrt{y}}e^{-\frac{y}{2}}, & y\ge 0,\\ 0, & y<0.\end{cases}$ （4 分）

（2） $X^2=\chi^2\sim\chi^2(1)$，

$E(2X^4)=2E(\chi^2)^2=2(D(\chi^2)+E^2(\chi^2))=2(2+1)=6$。 （2 分）

20.（1） $\mu_n\sim B(n,p)$； （4 分）

（2）提示： 用德莫佛-拉普拉斯定理

$$\lim_{n\to\infty}P\left(\frac{\sum_{k=1}^{n}x_k-np}{\sqrt{npq}}<x\right)=\int_{-\infty}^{x}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{t^2}{2}}dt=\Phi(x).$$ （4 分）