

第17章 机械波

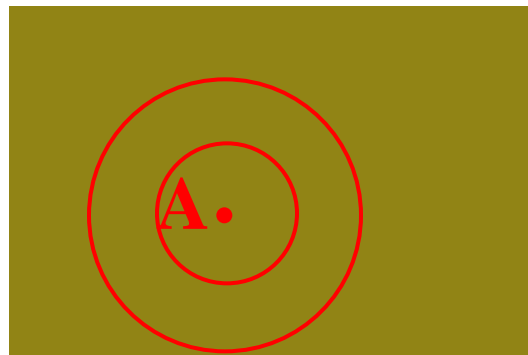
振动在空间的传播过程叫做波动

常见的波有：机械波，电磁波，...

§ 7.1 机械波的产生条件和传播

一、机械波的产生条件：

1. 波源
2. 媒质

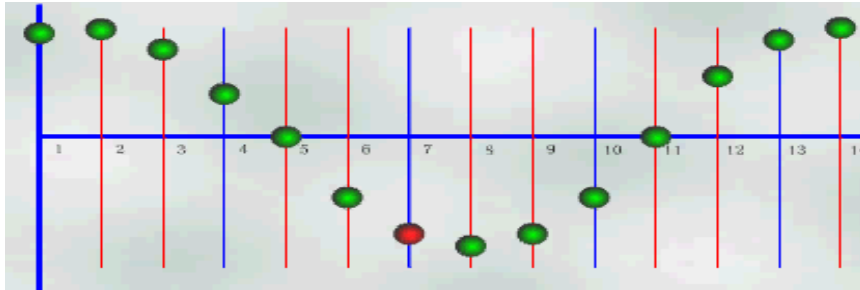


弹性波：机械振动在弹性媒质中的传播



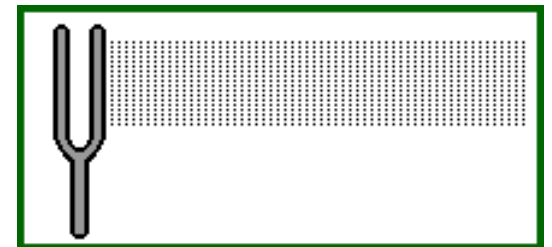
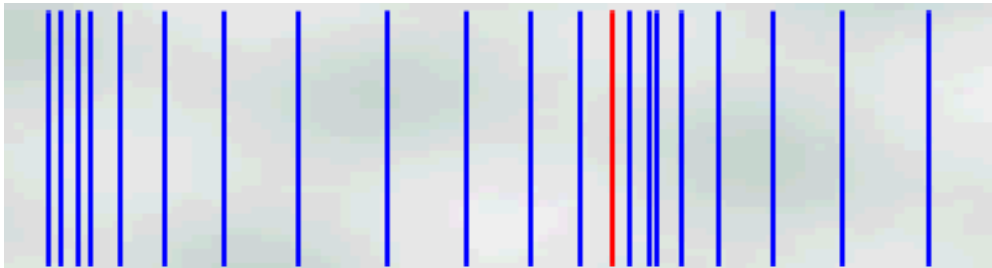
二、分类

横波： 质点的振动方向和波动的传播方向垂直



有波峰和波谷

纵波： 质点的振动方向和波动的传播方向相平行



存在相间的 稀疏和稠密区域。

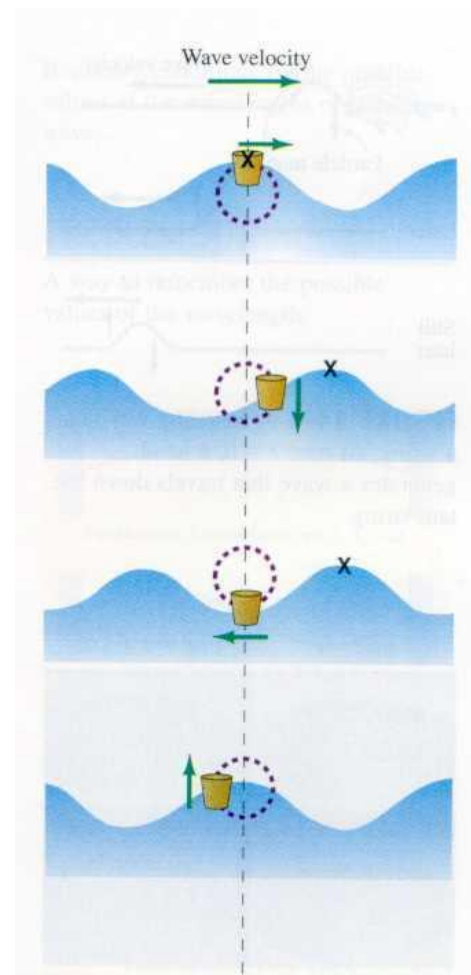
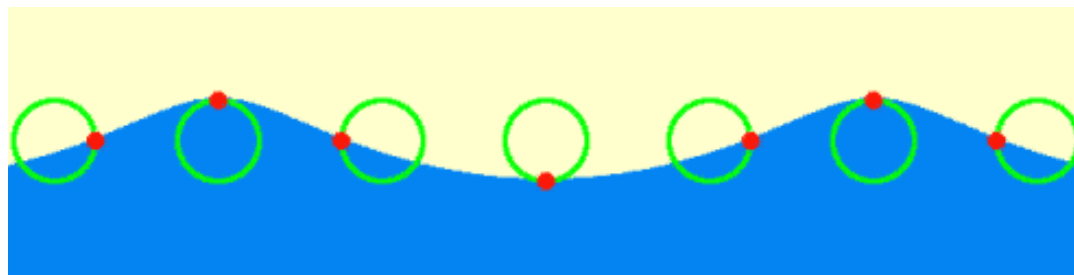
注：

■ 振动状态（相位）的传播

质元并未“随波逐流”。

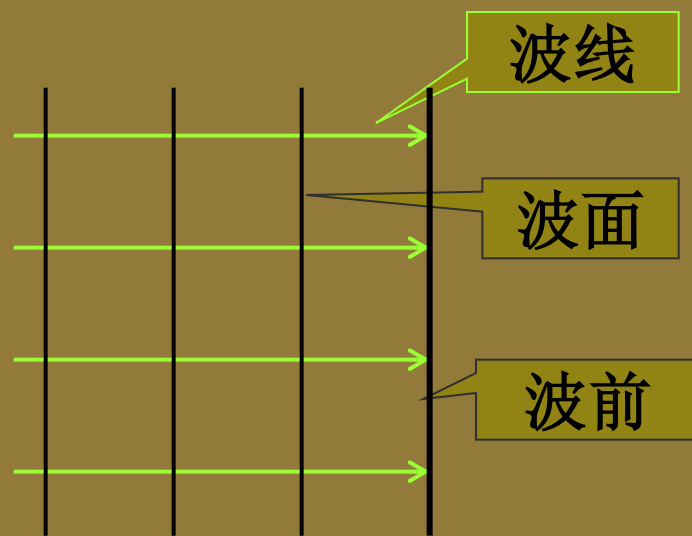
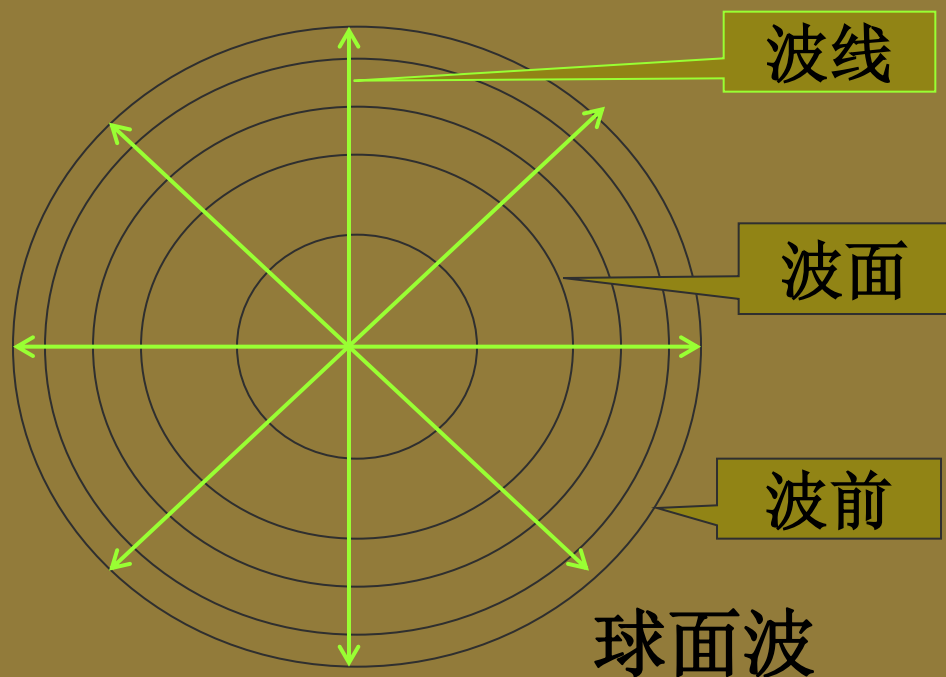
■ 有的波既非横波又非纵波

例：水波是纵波还是横波？



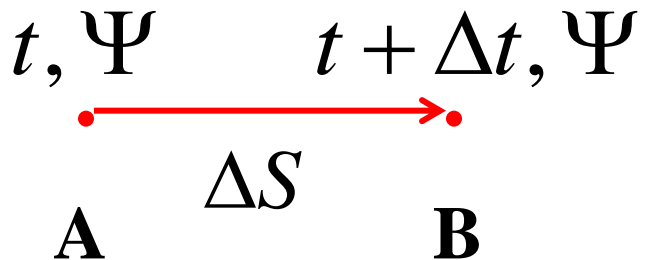
三、波的几何描述

1. 波线 2. 波前(波阵面) 平面波 球面波 柱面波



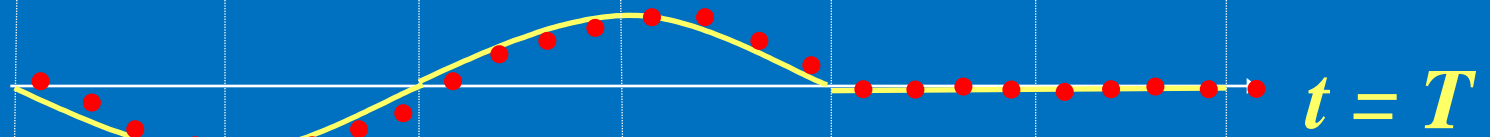
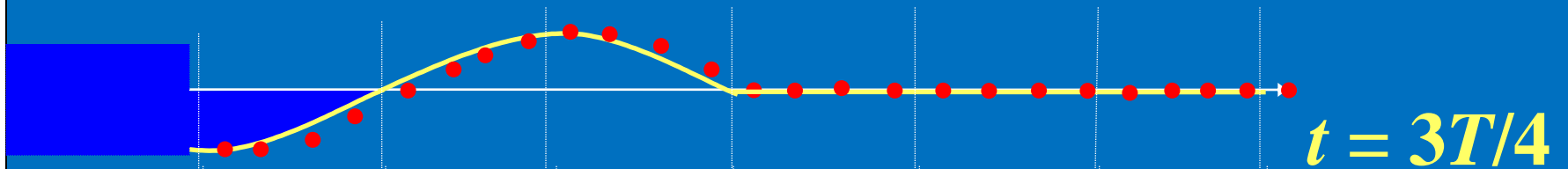
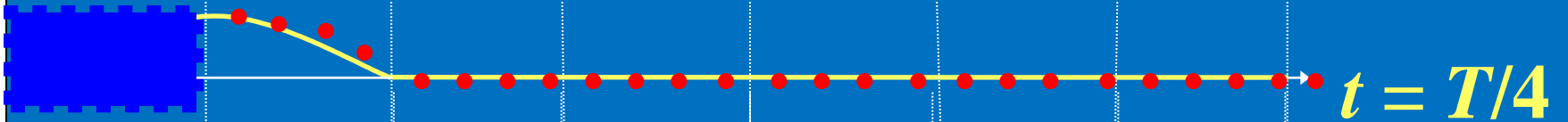
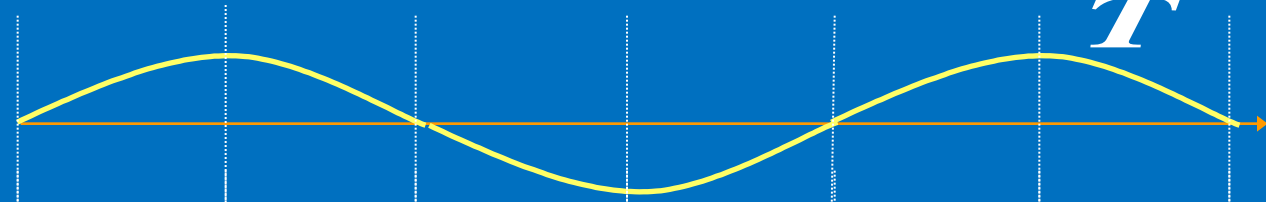
3. 简谐波：波源作简谐振动，在波传到的区域，媒质中的质元均作简谐振动。

四、波速、频率和波长


$$\boldsymbol{u} = \frac{\Delta S}{\Delta t}$$

波速 u 又称相速度(相位传播速度)

$$u = \frac{\lambda}{T} = v\lambda$$



角波数: $k = \frac{2\pi}{\lambda}$

角频率: $\omega = \frac{2\pi}{T}$

$$\Rightarrow u = \frac{\lambda}{T} = \frac{\omega}{k}$$

§ 17.2 平面简谐行波

一、简谐行波的运动学方程（波动式）

问题： $y_o = y(0, t)$ & u 给定， 求 $y = y(x, t)$

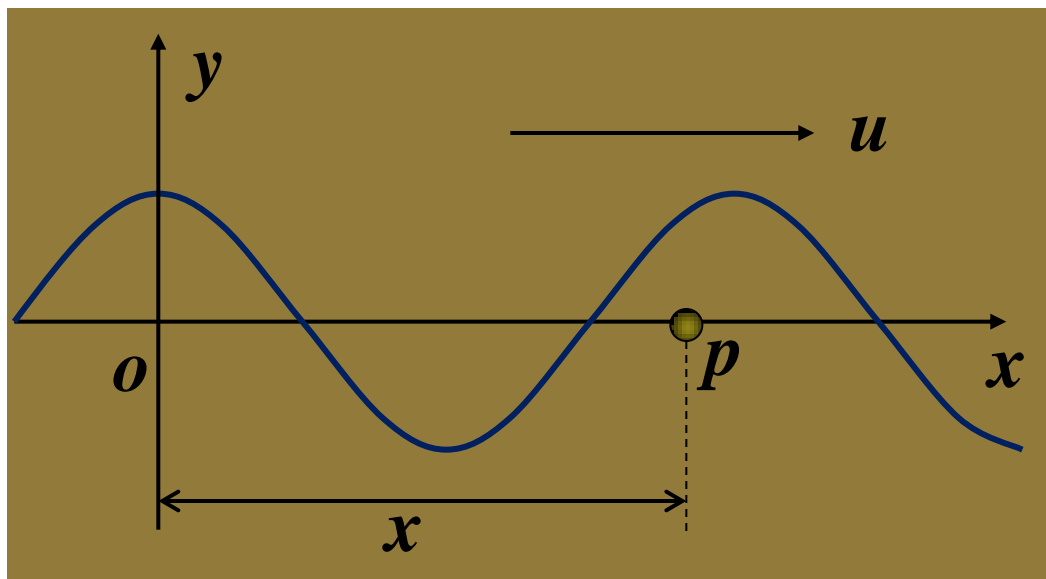
（假设：媒质无吸收，所有质元振幅均为 A ）

O 点的振动方程：

$$y_o = A \cos(\omega t + \varphi)$$

x 点的振动状态在时间上落后于 O 点：

$$\Delta t = \frac{x}{u}$$

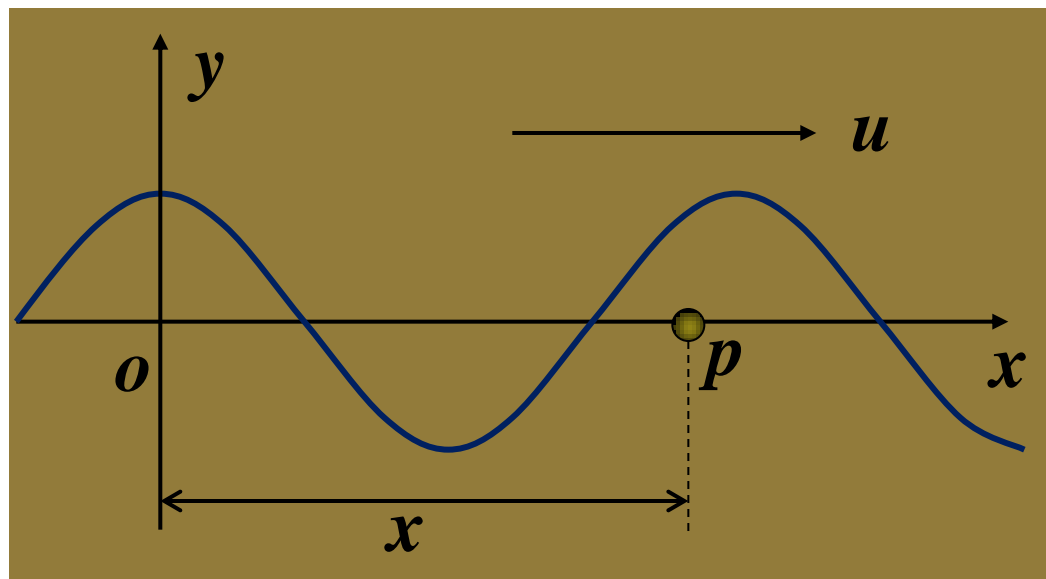


或：在 t 时刻 x 点的振动状态
与 O 点在 $(t-x/u)$ 时刻的振动状态相同

$$y_p(t) = y_O\left(t - \frac{x}{u}\right) = A \cos\left[\omega\left(t - \frac{x}{u}\right) + \varphi\right]$$

$$y(x, t) = A \cos\left[\omega\left(t - \frac{x}{u}\right) + \varphi\right]$$

平面简谐波的波动式



其它形式:

$$y = A \cos(\omega(t - \frac{x}{u}) + \varphi)$$

$$y = A \cos\left[2\pi\nu(t - \frac{x}{u}) + \varphi\right] \quad (\omega = 2\pi\nu)$$

$$= A \cos\left[2\pi(\frac{t}{T} - \frac{x}{\lambda}) + \varphi\right] \quad (\nu = \frac{1}{T}, \lambda = uT)$$

$$= A \cos[k(ut - x) + \varphi] \quad (k = \frac{2\pi}{\lambda}, u = \frac{\lambda}{T})$$

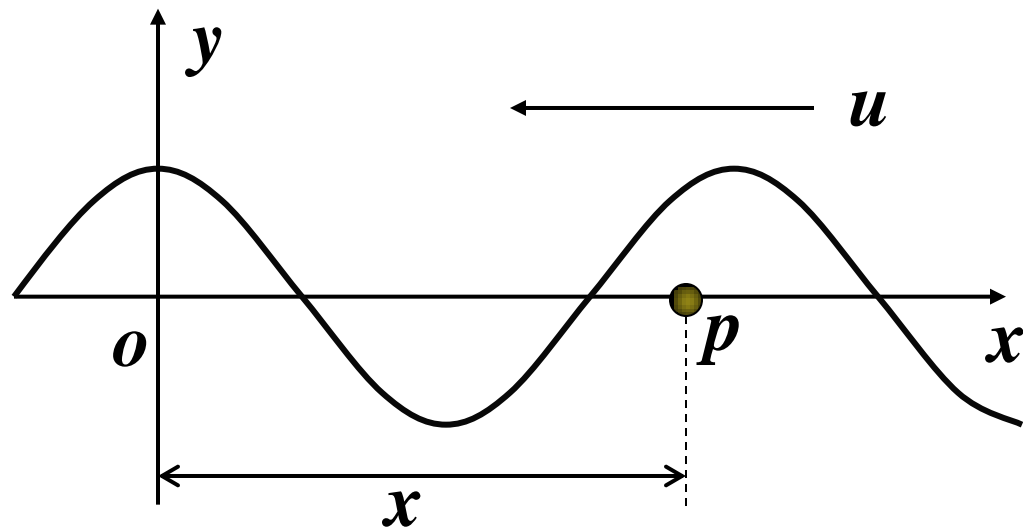
$$= A \cos[\omega t - kx + \varphi] \quad (ku = \frac{2\pi}{\lambda} u = \frac{2\pi}{T})$$

若平面简谐波沿 x 负方向传播:

O 点的振动方程:

$$y_o = A \cos(\omega t + \varphi)$$

在 t 时刻 P 点的振动
状态与 O 点在 $(t+x/u)$
时刻的振动状态相同



$$y(x, t) = A \cos \left[\omega \left(t + \frac{x}{u} \right) + \varphi \right] = A \cos \left[2\pi \left(\frac{t}{T} + \frac{x}{\lambda} \right) + \varphi \right]$$

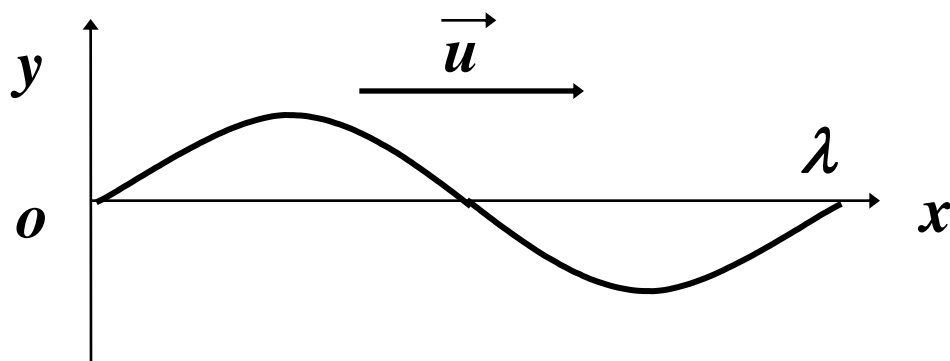
二、波动式的物理意义

双变量函数 $y = f(t - \frac{x}{u})$

1. 固定 x , ($x = x_0$) $y = A \cos(\omega(t - \frac{x_0}{u}) + \varphi)$

相距 $\Delta x = x_2 - x_1$ 相位差 $\Delta \varphi = \frac{2\pi}{\lambda} \Delta x$

2. 固定 t , ($t = t_0$) $y = A \cos(\omega(t_0 - \frac{x}{u}) + \varphi)$

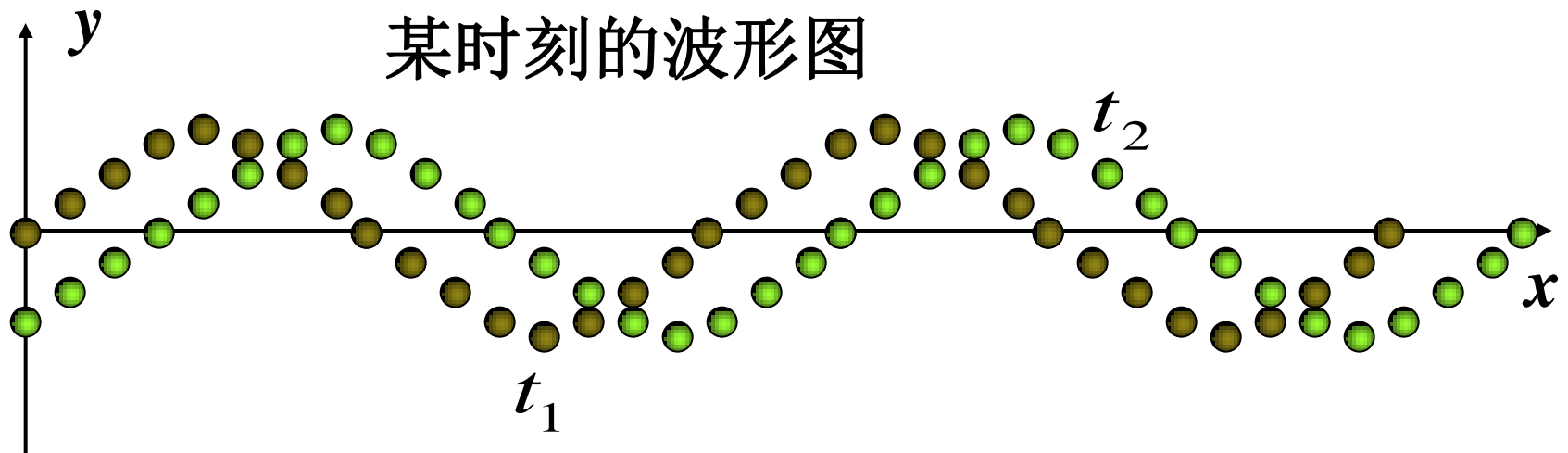


波形图

$$y = A \cos(\omega(t - \frac{x}{u}) + \varphi)$$

3. 表达式反映了波是振动状态的传播

$$y(x, t) = y(x + \Delta x, t + \Delta t) \quad \text{其中} \Delta x = u \Delta t$$



4、媒质质元振动的速度加速度

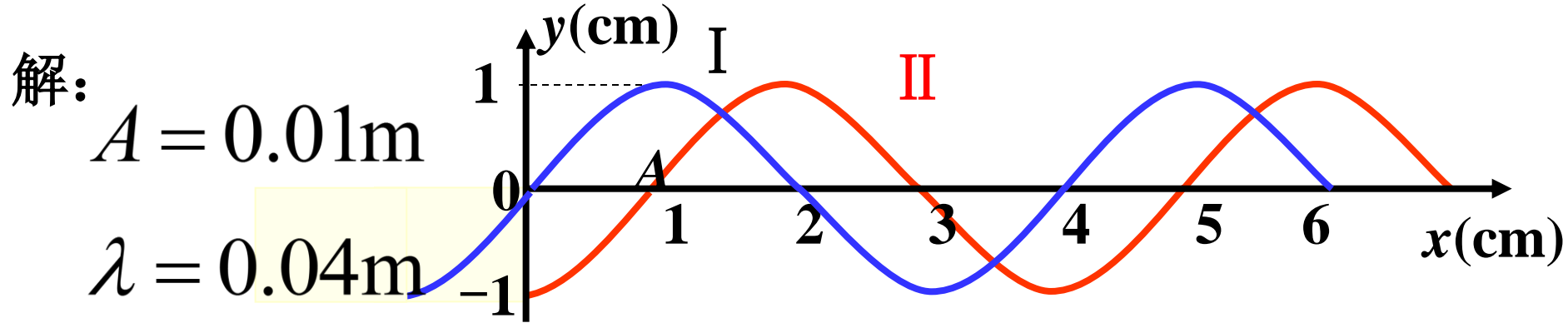
$$y = A \cos(\omega(t - \frac{x}{u}) + \varphi)$$

$$V = \frac{\partial y}{\partial t} = -A\omega \sin(\omega(t - \frac{x}{u}) + \varphi)$$

$$a = \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = -A\omega^2 \cos(\omega(t - \frac{x}{u}) + \varphi)$$

$$a = -\omega^2 y$$

例： 已知 $t=0$ 时的波形曲线为 I， 波沿 ox 方向传播， 经 $t=1/2\text{s}$ 后波形变为曲线 II。 已知波的周期 $T>1\text{s}$ ， 试根据图中绘出的条件求出波的表达式， 并求 A 点的振动式。



波速：

$$u = \frac{x_1 - x_0}{t} = \frac{0.01}{1/2} = 0.02\text{m} \cdot \text{s}^{-1}$$

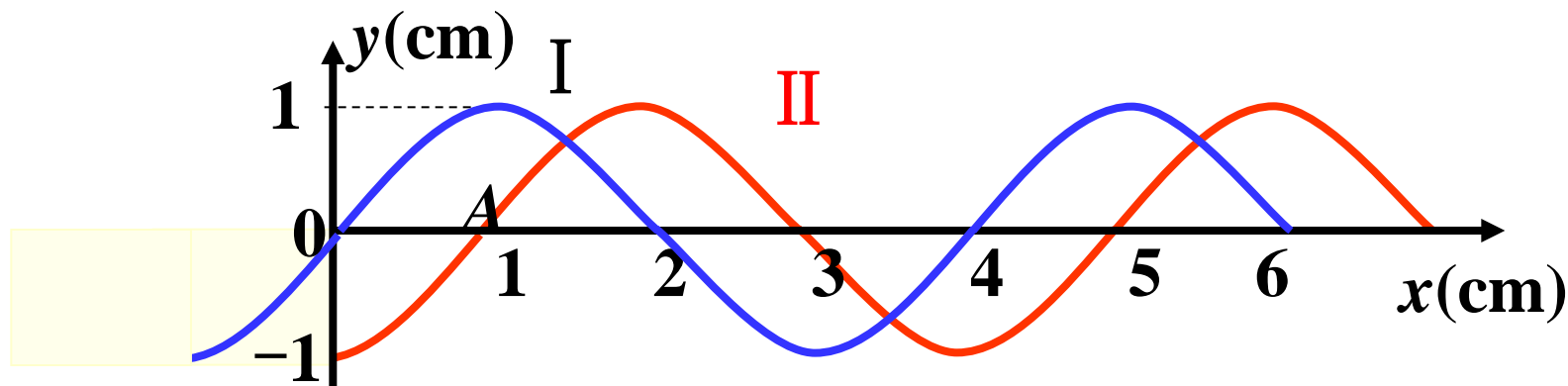
$$T = \frac{\lambda}{u} = \frac{0.04}{0.02} = 2\text{s} \qquad \omega = \frac{2\pi}{T} = \pi \text{ s}^{-1}$$

原点振动: $y_0 = A \cos(\omega t + \varphi)$

初始条件: $0 = A \cos \varphi \rightarrow \varphi = \pm \frac{\pi}{2}$

$v = -\omega A \sin \varphi < 0 \quad \sin \varphi > 0 \rightarrow \varphi = \frac{\pi}{2}$

$$y_0 = 0.01 \cos\left(\pi t + \frac{\pi}{2}\right)$$



$$y_0 = 0.01 \cos(\pi t + \frac{\pi}{2})$$

波动式:

$$y = 0.01 \cos[\pi (t - \frac{x}{0.02}) + \frac{\pi}{2}]$$

A点振动式:

$$y_A = 0.01 \cos[\pi (t - \frac{0.01}{0.02}) + \frac{\pi}{2}]$$

$$y_A = 0.01 \cos \pi t$$

[例]一平面简谐波在介质中以速度 $u = 20\text{m/s}$ ，沿 x 轴的负向传播。已知 A 点的振动式为 $y = 3\cos 4\pi t$ ，则 (1) 以 A 点为坐标原点求波动式； (2) 以距 A 点 5m 处的 B 为坐标原点求波动式。

解：

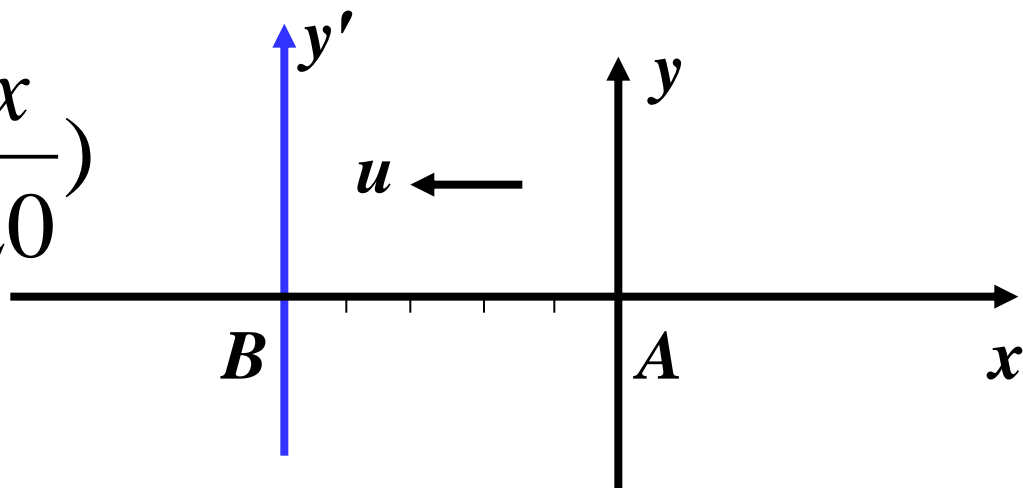
$$y = 3\cos 4\pi \left(t + \frac{x}{20} \right)$$

B 点振动式：

$$y_B = 3\cos(4\pi t - \pi)$$

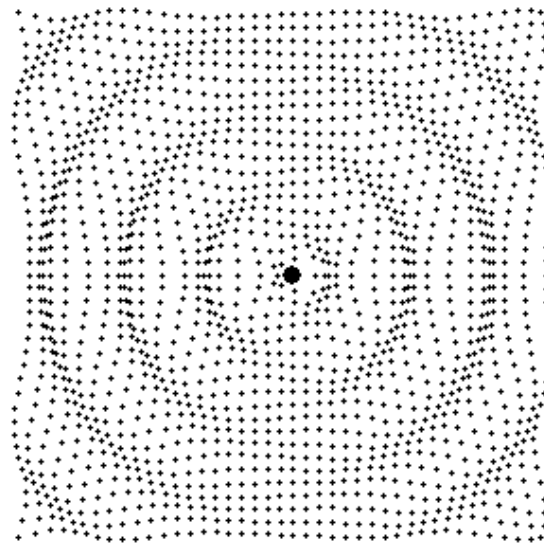
波动式：

$$y = 3\cos\left[4\pi \left(t + \frac{x}{20} \right) - \pi\right]$$



三、波动方程与波速

波在介质中如何传播，
是由介质的性质决定的。



当介质的形变较小时，介质可当作弹性介质：
介质中各点的相对位移与力成正比

介质的弹性行为由弹性模量描述，根据形变类型的不同，
弹性模量分为：**杨氏模量**、**切变模量**和**体积弹性模量**。

弹性介质的基本性质

杨氏模量 E

$$\frac{F}{S} = E \frac{\Delta l}{l}$$

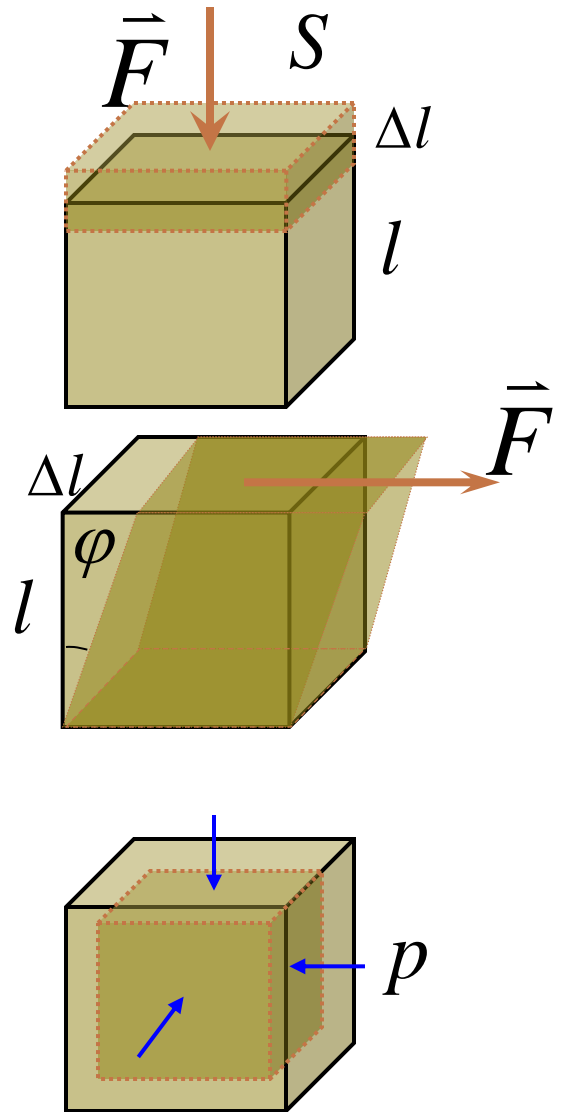
剪切模量 G

$$\frac{F}{S} = G \frac{\Delta l}{l}$$

一般情况下, $E > 2G$

体积模量 K

$$p = -K \frac{\Delta V}{V}$$

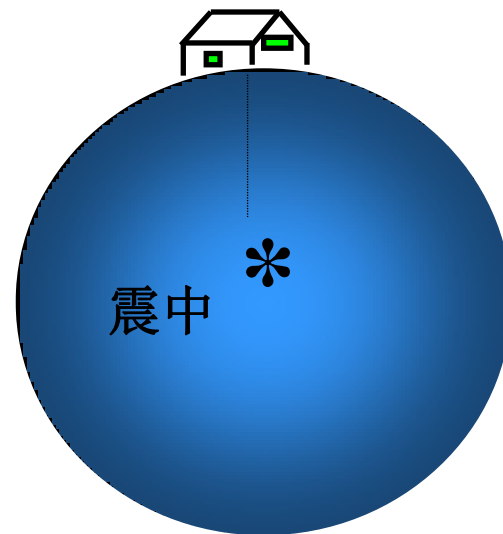


纵波波速 $\Rightarrow u_{//} = \sqrt{\frac{E}{\rho}}$

横波波速 $\Rightarrow u_{\perp} = \sqrt{\frac{G}{\rho}}$

一般情况下, $E > 2G$

$$u_{//} > u_{\perp}$$

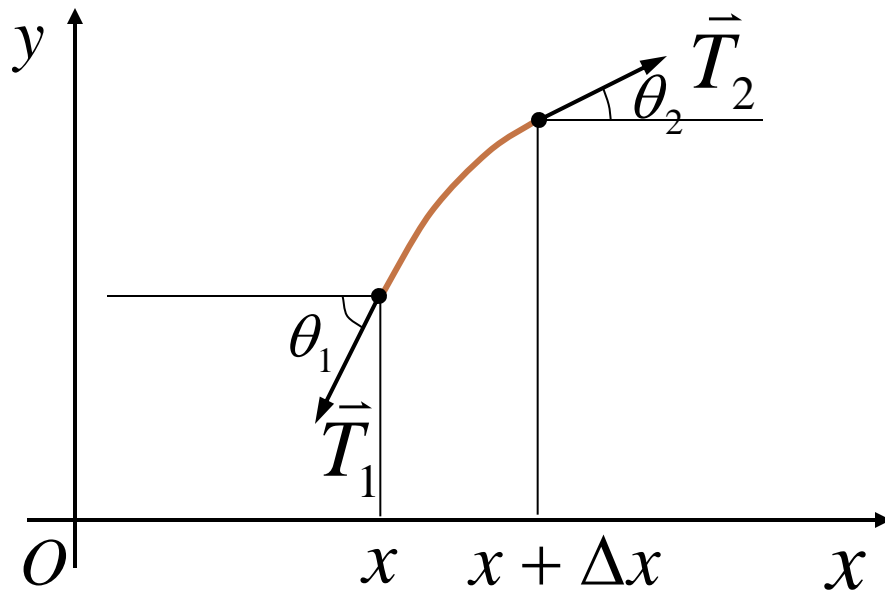


地震时纵波先到达

弦的波动方程

弦的张力 T ，密度 ρ_l

分析一小段弦的受力

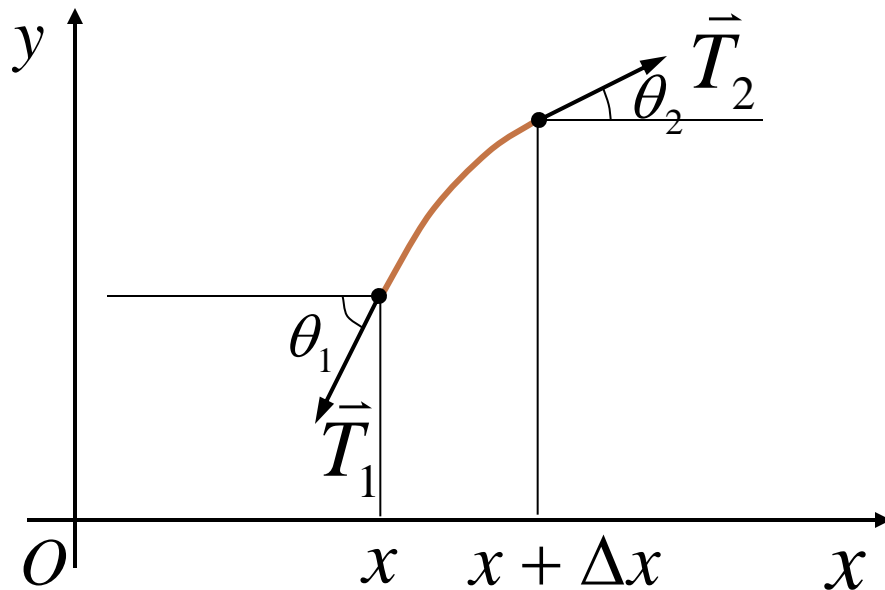


弦在 x 位置，偏离平衡位置的位移 $y = y(x, t)$

弦沿 x 方向无位移 $T_1 \cos \theta_1 = T = T_2 \cos \theta_2$

$$T_1 \cos \theta_1 = T = T_2 \cos \theta_2$$

弦所受合力



$$\Delta F = T_2 \sin \theta_2 - T_1 \sin \theta_1 = T_2 \cos \theta_2 \tan \theta_2 - T_1 \cos \theta_1 \tan \theta_1$$

$$= T \tan \theta_2 - T \tan \theta_1 = T \left. \frac{\partial y}{\partial x} \right|_{x+\Delta x} - T \left. \frac{\partial y}{\partial x} \right|_x = T \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} \Delta x$$

牛顿第二定律 $\Delta F = \rho_l \Delta x \frac{\partial^2 y}{\partial t^2}$

弦的波动方程 $\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} - \frac{T}{\rho_l} \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = 0$

简谐行波的运动学方程

$$y(x, t) = A \cos \left[\omega \left(t - \frac{x}{u} \right) + \varphi \right]$$

$$\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = -\omega^2 y \quad \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = -\frac{\omega^2}{u^2} y \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = u^2 \frac{\partial^2 y}{\partial x^2}$$

波沿弦线传播的速度 $u = \sqrt{\frac{T}{\rho_l}}$

弦的波动方程 $\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} - \frac{T}{\rho_l} \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = 0$

波的色散现象

为什么水波向外传播时，波纹会变宽？

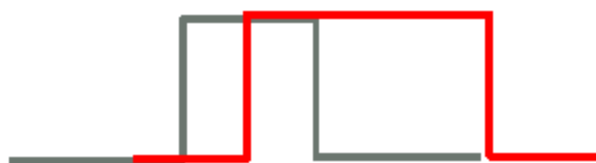


为什么水波向外传播时，波纹会变宽？

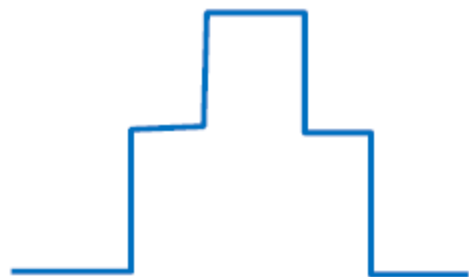
- 从下面一个简化的例子来看其中蕴含的原理



从波源发出两个波，
其中一个波长稍长



波长较长的波波速
较快，超过了短波

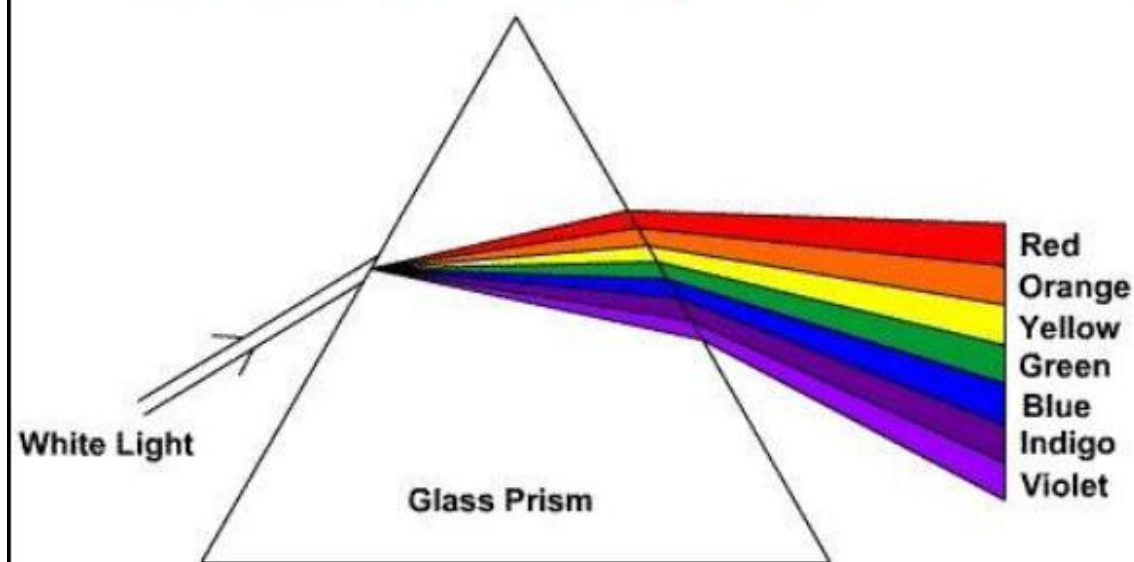


两个波叠加在一起，
形成观察到的波纹



两个波叠加形成的
波纹宽度增加

玻璃的色散(dispersion)



棱镜为什么可以出现色散？

因为不同波长（颜色）的光波在玻璃中的折射率 n 不一样

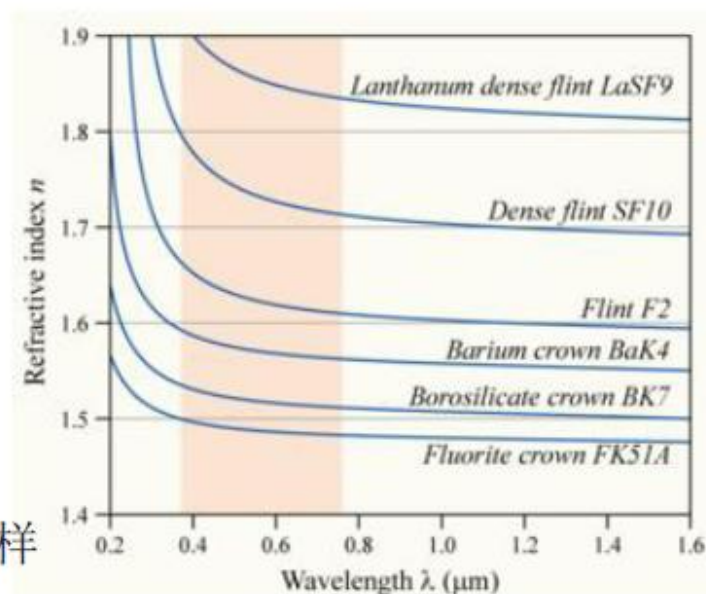
光波在玻璃中的速度 $v = c/n$ ，折射率 n 是波长的函数

→ 光速是波长的函数

→ 波速与波长之间的关系被称为“色散关系”

问题：

从左图中推测，哪种波长的光在玻璃中的速度最慢？



水波的色散

- 当水波波长远小于水深时，称为深水波，其色散关系为：

$$u = \sqrt{\frac{g\lambda}{2\pi}}$$

- ➔ 波长越长，波速（相速度）越快
- 从而水波波纹随时间变宽就可以理解了。

色散现象在机械波中不常见，
但在电磁波中十分普遍。

§ 17.3 波的能量和强度

随着波的传播, 能量也在传播

波在弹性媒质中传播时, 各质元都在振动

波的能量 = 振动动能 + 形变势能

一、机械波的能量密度

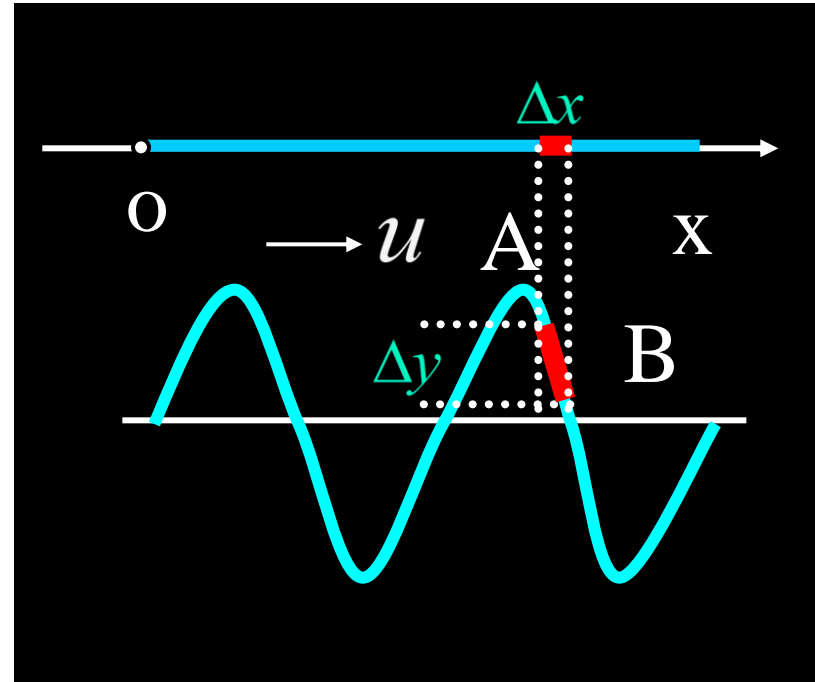
1. 线元 Δx 的动能

以横波为例，设

$$y = A \cos(\omega t - kx)$$

弦上 x 处质元 $\Delta m = \rho_l \Delta x$ 的动能：

$$\Delta E_k = \frac{1}{2} \rho_l \Delta x \left(\frac{\partial y}{\partial t} \right)^2$$



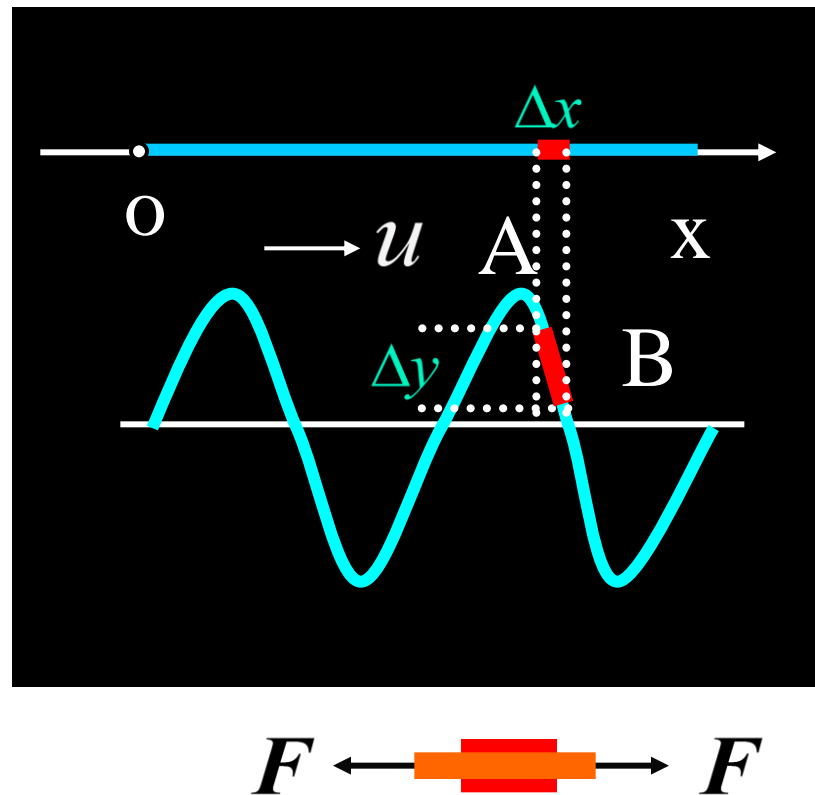
2. 线元 Δx 的形变势能

线元的长度从静止时的
 Δx 变为:

$$\left[(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2 \right]^{\frac{1}{2}} = \Delta x \left[1 + \left(\frac{\partial y}{\partial x} \right)^2 \right]^{\frac{1}{2}}$$

线元 Δx 的形变势能近似等于
在形变过程中（弦静止）张力 F 做的功:

$$\Delta E_p = F \left\{ \Delta x \left[1 + \left(\frac{\partial y}{\partial x} \right)^2 \right]^{\frac{1}{2}} - \Delta x \right\} \approx \frac{1}{2} F \Delta x \left(\frac{\partial y}{\partial x} \right)^2$$



3. 线元 Δx 的机械能

$$y = A \cos(\omega t - kx)$$

$$\Delta E_k = \frac{1}{2} \rho_l \Delta x \left(\frac{\partial y}{\partial t} \right)^2 \quad \Delta E_p = \frac{1}{2} F \Delta x \left(\frac{\partial y}{\partial x} \right)^2$$

$$\Delta E_k = \frac{1}{2} \rho_l \Delta x \omega^2 A^2 \sin^2(\omega t - kx)$$

$$\Delta E_p = \frac{1}{2} F \Delta x k^2 A^2 \sin^2(\omega t - kx)$$

$$\because u = \frac{\omega}{k} = \sqrt{\frac{F}{\rho_l}} \Rightarrow \rho_l \omega^2 = F k^2$$

$$\Delta E_k = \Delta E_p = \frac{1}{2} \Delta x \rho_l \omega^2 A^2 \sin^2(\omega t - kx)$$

4. 波的能量密度

$$\Delta E = \Delta x \rho_l \omega^2 A^2 \sin^2(\omega t - kx)$$

$$\rho_l = \rho S$$

$$\varepsilon = \varepsilon_p + \varepsilon_k = \frac{\Delta E}{S \Delta x} = \rho \omega^2 A^2 \sin^2(\omega t - kx)$$

$$\varepsilon_p = \varepsilon_k = \frac{1}{2} \varepsilon = \frac{1}{2} \rho \omega^2 A^2 \sin^2(\omega t - kx)$$

$$\bar{\varepsilon} = \frac{1}{T} \int_0^T \varepsilon dt = \frac{1}{2} \rho \omega^2 A^2$$

讨论:

$$\varepsilon_p = \varepsilon_k = \frac{1}{2} \rho \omega^2 A^2 \sin^2(\omega t - kx)$$

$$y = A \cos(\omega t - kx)$$

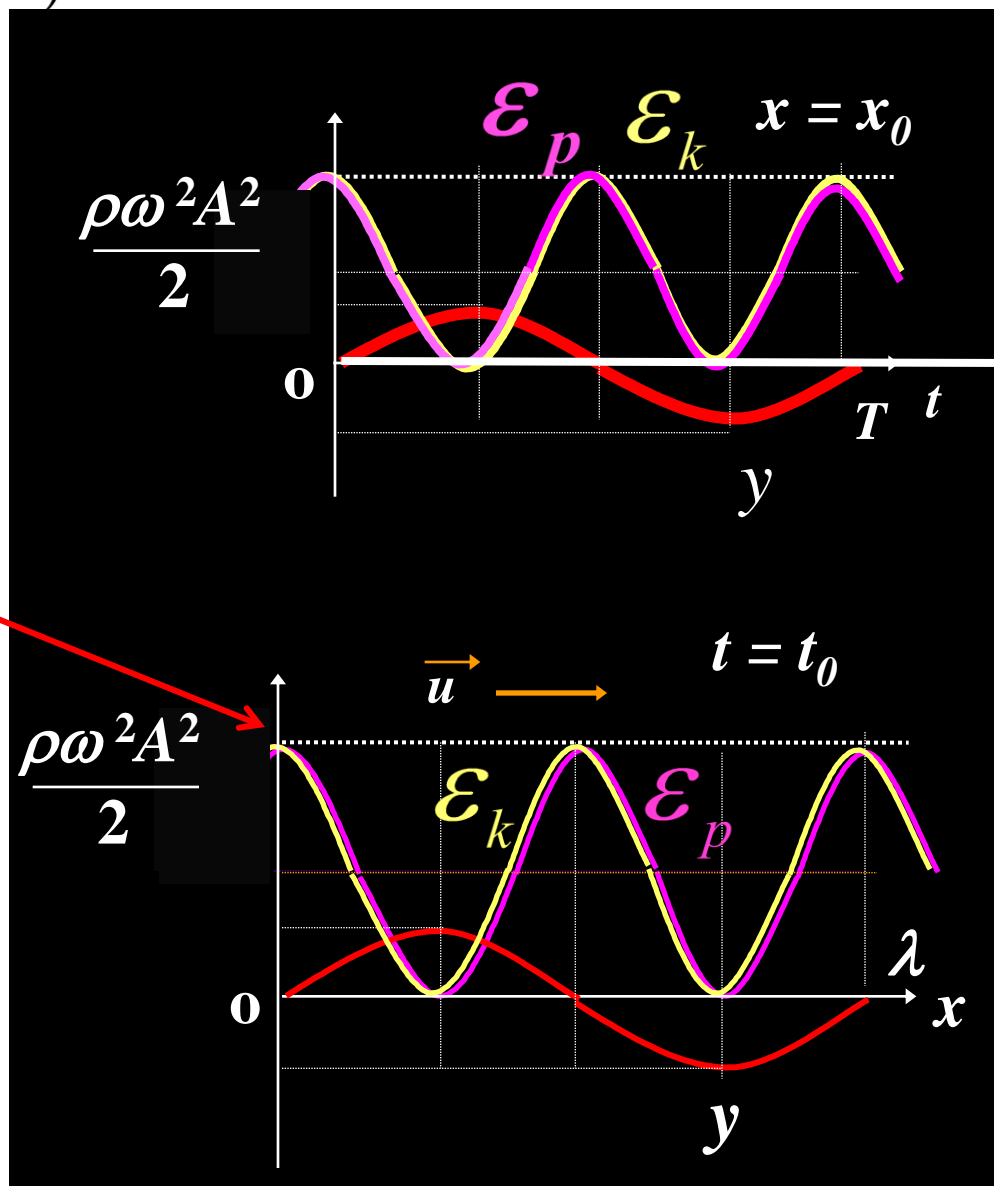
1. 时间变化:

固定 x : ε_k 、 ε_p 均随 t 周期性变化

能量“一堆一堆”地传播。

2. 空间变化:

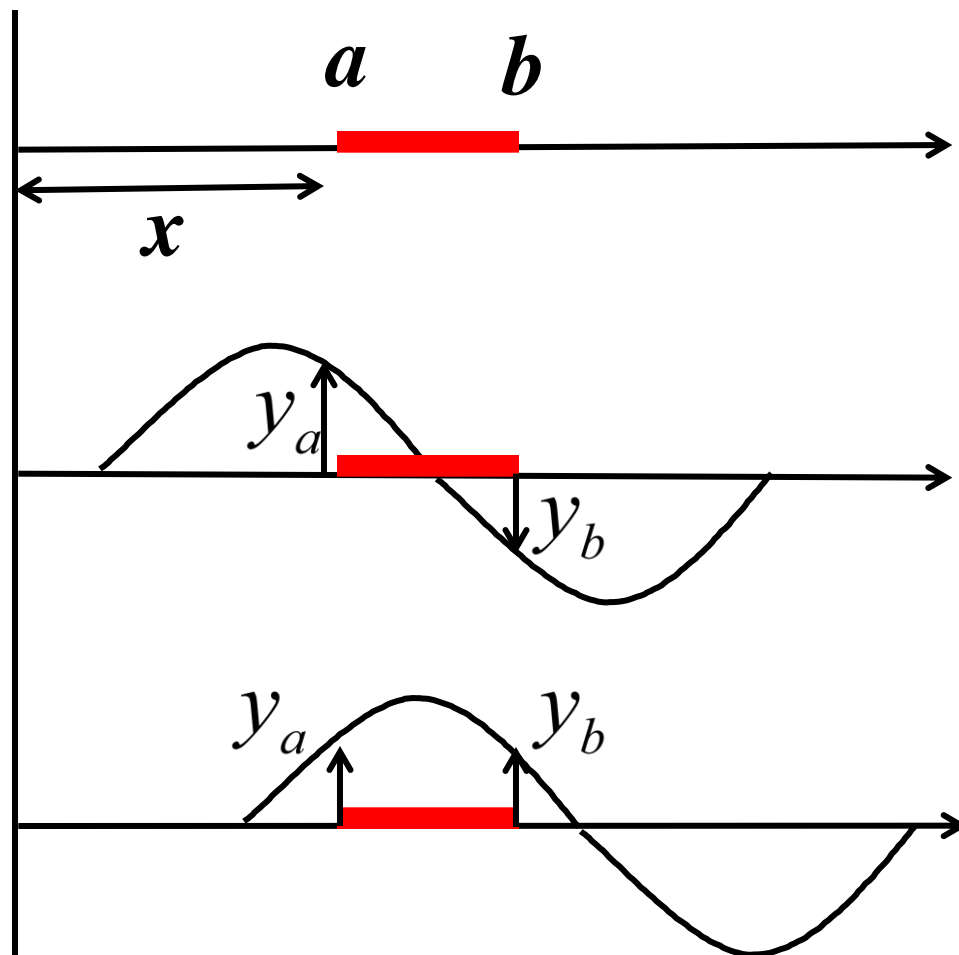
固定 t : ε_k 、 ε_p 均随 x 周期分布



3. ε_k 、 ε_p 均随 t 周期性变化, 两者同步变化。

横波能量图

原因：同步的原因：
速度大时
形变亦大

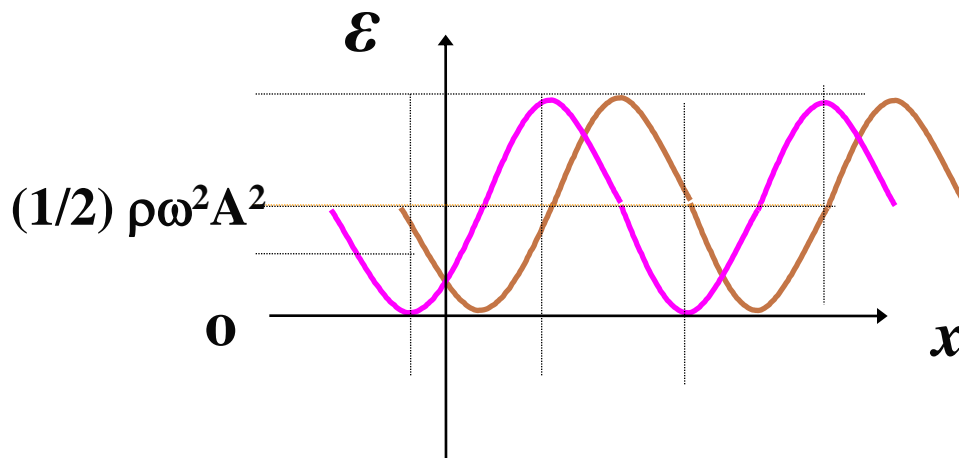


二、波的能量密度 波的强度

1. 能量的传播

$$\begin{aligned}\varepsilon &= \rho \omega^2 A^2 \sin^2(\omega t - kx) \\ &= \frac{1}{2} \rho \omega^2 A^2 - \frac{1}{2} \rho \omega^2 A^2 \cos 2\omega \left(t - \frac{x}{u} \right)\end{aligned}$$

ε 的圆频率为 2ω ，传播速度也是波速 u 。



2. 能流密度 (energy flux density)

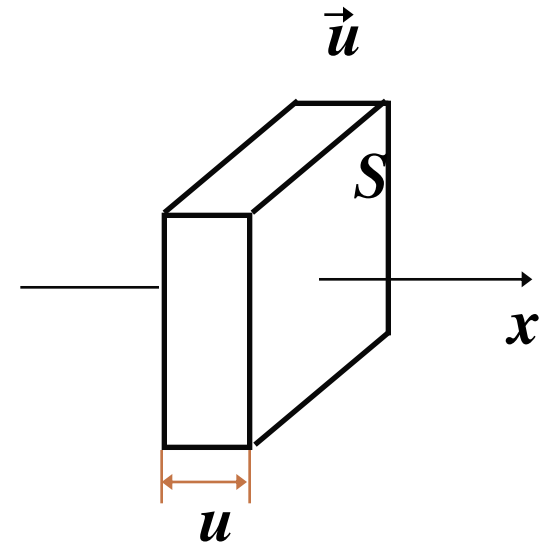
S 面的能流:

$$P = \epsilon u S$$

能流密度:

$$i = \frac{P}{S} = \epsilon u$$

$$\vec{i} = \epsilon \vec{u}$$

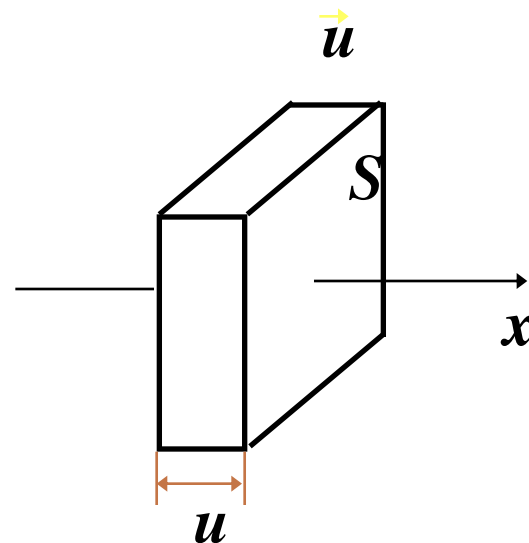


3. 波的强度

$$i = \frac{P}{S} = \epsilon u$$

波的强度：能流密度的时间平均值

$$I = \bar{i} = \frac{1}{T} \int_0^T i dt = \frac{u}{T} \int_0^T \epsilon dt = u \bar{\epsilon}$$



平面简谐波：

$$I = \frac{1}{2} \rho \omega^2 A^2 u = \frac{1}{2} z \omega^2 A^2$$

SI : $\text{W} \cdot \text{m}^{-2}$

$z = \rho u$ — 介质 “波阻抗”

$$I \propto \omega^2, I \propto A^2$$

例：对无吸收媒质：利用 $I = \frac{1}{2} \rho \omega^2 A^2 u$

可以证明：

平面波 $A = \text{const.}$

球面波 $Ar = \text{const.}, A \propto \frac{1}{r}$

柱面波 $A\sqrt{r} = \text{const.}, A \propto \frac{1}{\sqrt{r}}$

r —— 场点到波源的距离

例：点波源，各向同性媒质中的波速为 u ，媒质无吸收，求球面简谐波的波动式 $y(r, t)$

解：能量守恒

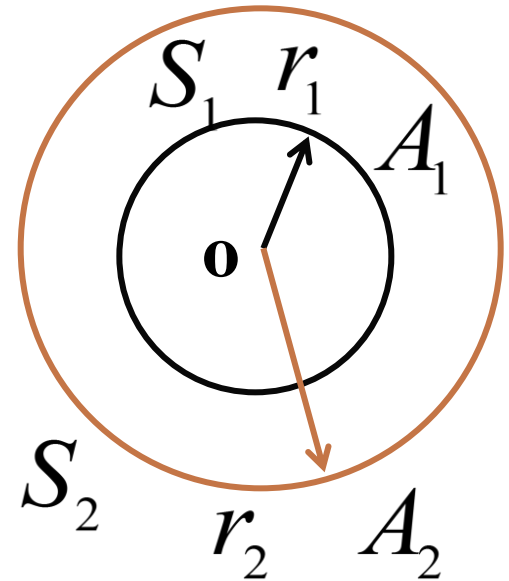
$$I_1 = \frac{1}{2} \rho \omega^2 A_1^2 u \quad I_2 = \frac{1}{2} \rho \omega^2 A_2^2 u$$

$$I_1 \cdot 4\pi r_1^2 = I_2 \cdot 4\pi r_2^2$$

$$A_1^2 \cdot 4\pi r_1^2 = A_2^2 \cdot 4\pi r_2^2$$

$$\frac{A_1}{A_2} = \frac{r_2}{r_1}$$

$$y = \frac{A_0}{r} \cos \omega \left(t - \frac{r}{u} \right)$$



点波源 各向同性介质

三、声波 声强级

声强:
$$I = \frac{1}{2} \rho u \omega^2 A^2$$

人耳听觉与声强和频率有关

人的耳朵对空气中 1 kHz 的声音:

$$I_{\text{下}} = 10^{-12} \text{ W/m}^2 \quad \text{-----闻阈}$$

$$I_{\text{上}} = 1 \text{ W/m}^2 \quad \text{-----痛阈}$$

正常人耳的听觉范围:

$$20 < \nu < 20000 \text{ Hz}$$

$$I_{\text{下}} < I < I_{\text{上}}$$

声强级： 人耳听觉与声强的对数成正比，定义声强 I 的声强级为

$$L = 10 \cdot \lg \frac{I}{I_0}$$

单位：分贝(dB)

$I_0 = 10^{-12} \text{ W/m}^2$ 作为基准声强，与1 k Hz时的
闻阈接近

例：	树叶沙沙响：	10 dB.
	耳 语：	20 dB.
	正常谈话：	60 dB.
	繁忙街道：	70 dB.
	摇滚乐：	120 dB.
	聚焦超声波：	210 dB.

例：一平面简谐波，频率为300 Hz，波速为340 m/s，在截面面积为 $3.00 \times 10^{-2} \text{ m}^2$ 的管内空气中传播，若在10 s内通过截面的能量为 $2.70 \times 10^{-2} \text{ J}$ ，求

- (1) 通过截面的平均能流；
- (2) 波的平均能流密度；
- (3) 波的平均能量密度。

解：

$$P = W / t = 2.70 \times 10^{-3} \text{ J/s}$$

$$I = P / S = 9.00 \times 10^{-2} \text{ J / (s m}^2\text{)}$$

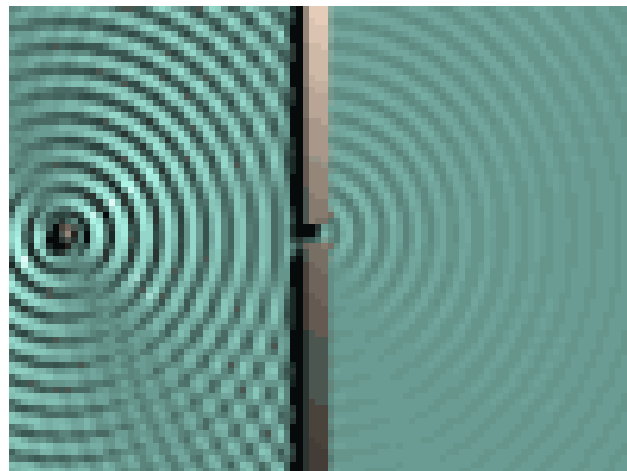
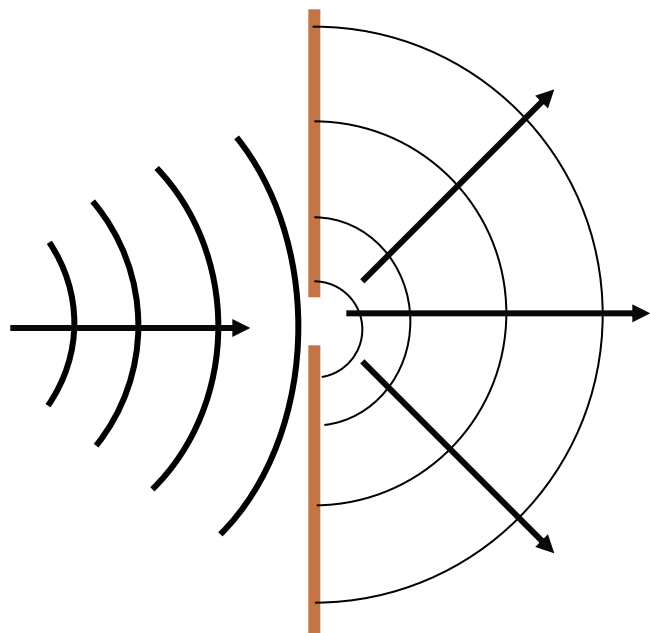
$$I = \bar{\varepsilon} \cdot u$$

$$\bar{\varepsilon} = I / u = 2.65 \times 10^{-4} \text{ J/m}^3$$

§ 17.4 惠更斯原理

一、惠更斯原理

现象：水面波的传播如图，小孔后的波形如同是位于小孔处有一个新的波源发出的波。

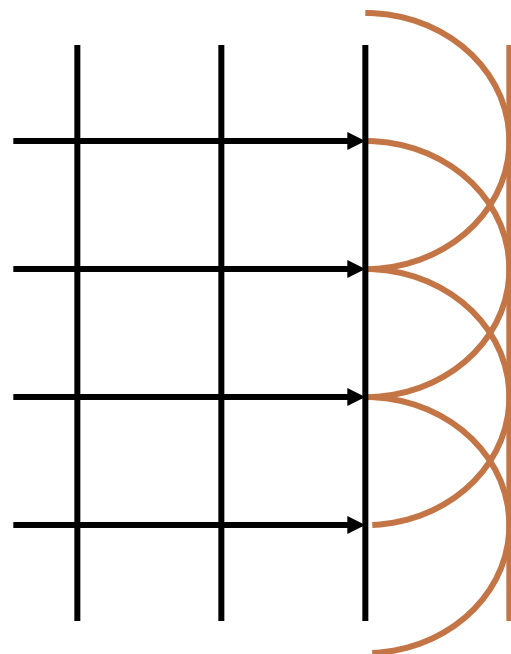
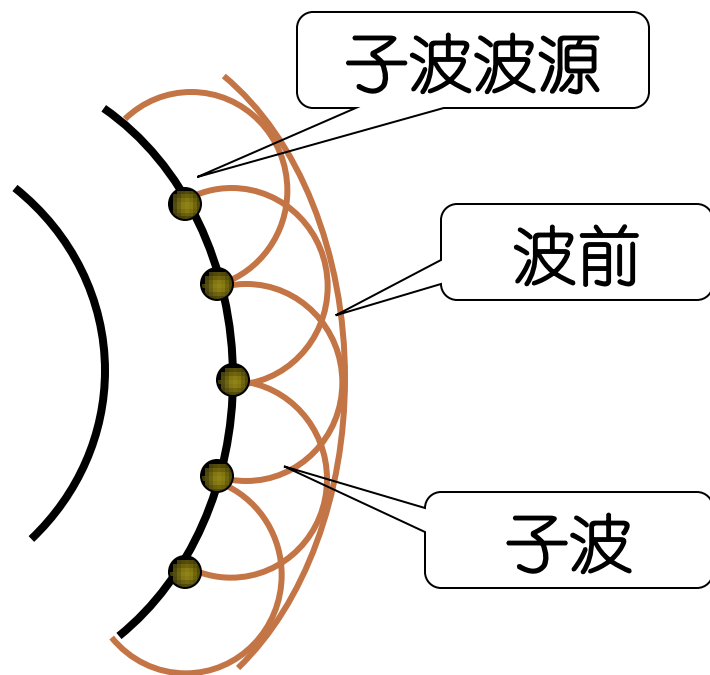


1. 惠更斯原理

波面上每一点都可以看作是发射子波的波源，在其后的任一时刻，这些子波波面的包迹决定了原波动的新的波前。

2. 应用

t 时刻波面 \rightarrow $t+\Delta t$ 时刻波面 \rightarrow 波的传播方向

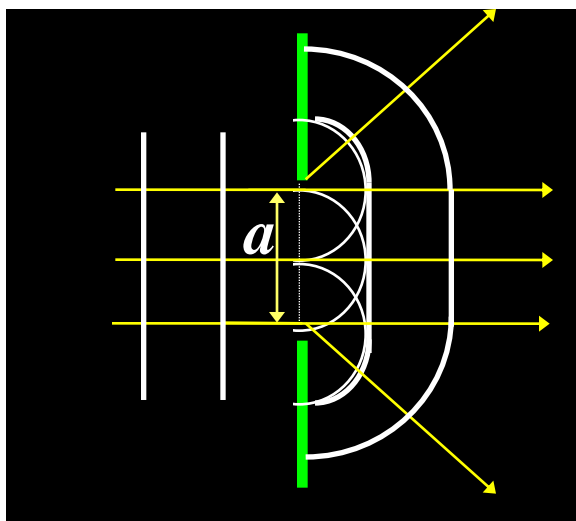


3. 不足（惠更斯-菲涅耳原理）

二、波的衍射

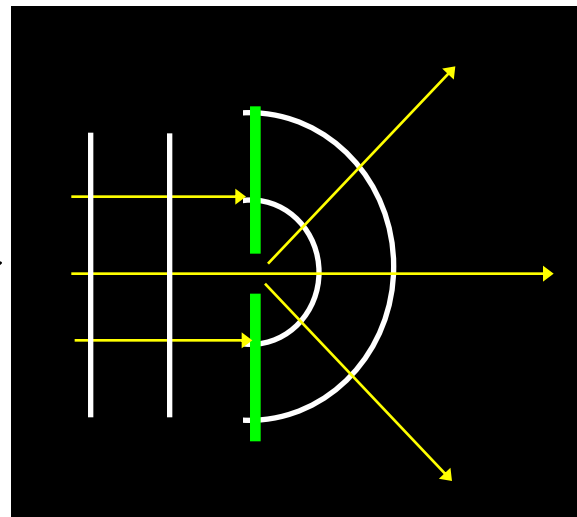
1. 现象：波在传播的过程中遇到障碍物或小孔后，能够绕过障碍物的边缘继续传播的现象。

2. 可用惠更斯原理作图解释波的衍射现象



$a \sim \lambda$:

波 可 以 到
达 阴 影 区



$a \ll \lambda$

长波衍射现象明显，方向性不好；
短波衍射现象不明显，方向性好。

(长波、短波是以波长与障碍物的线度相比较而言的)

三、波的反射和折射

$$BC = u_1 \Delta t$$

$$= AC \sin i$$

$$AD = u_2 \Delta t$$

$$= AC \sin \gamma$$

$$\frac{AC \sin i}{AC \sin \gamma} = \frac{u_1 \Delta t}{u_2 \Delta t}$$

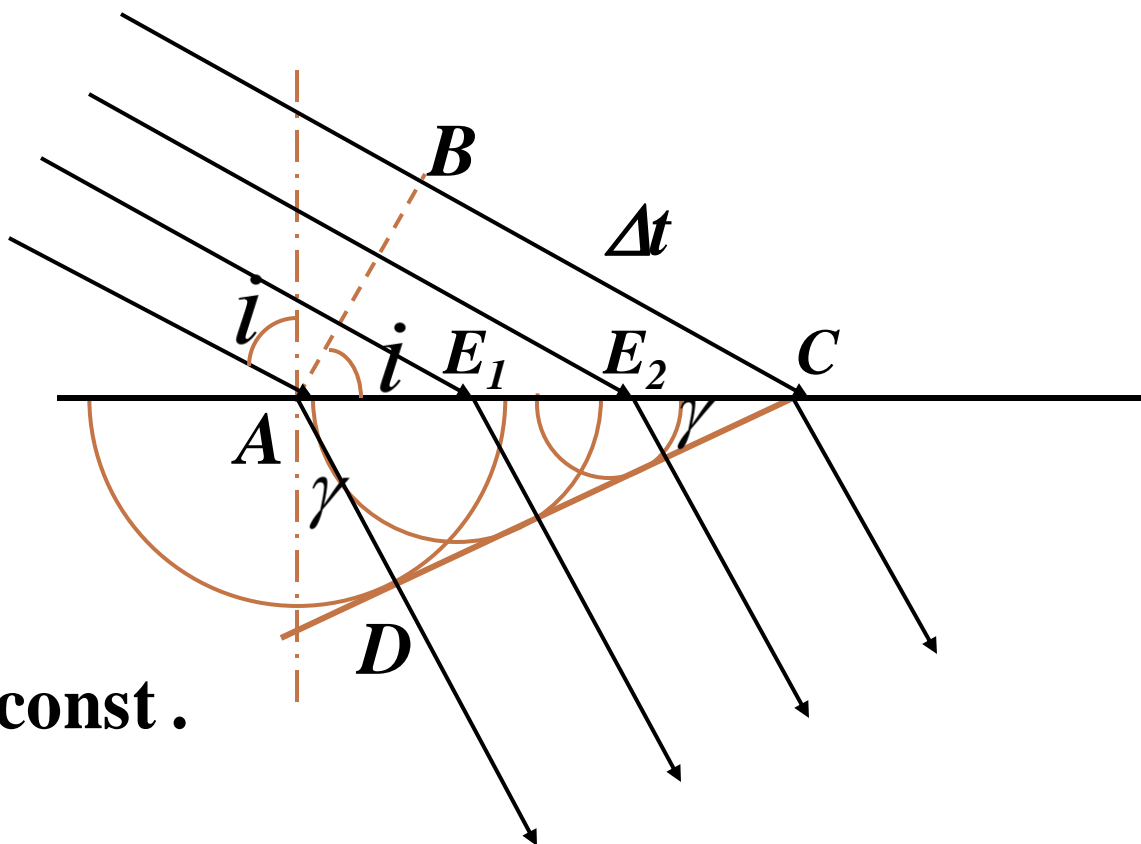
$$\frac{\sin i}{\sin \gamma} = \frac{u_1}{u_2}$$

$$\therefore \frac{\sin i}{\sin \gamma} = \frac{u_1}{u_2} = \frac{n_2}{n_1} = \text{const.}$$

光波 $u_1 = \frac{c}{n_1}, u_2 = \frac{c}{n_2}$

1. 波的反射 (略)

2. 波的折射



得到

$$n_1 \sin i = n_2 \sin r$$

—— 折射定律

§ 17.5 波的叠加 波的干涉

一、 波的叠加原理

媒质中同时有几列波时, 每列波都将保持自己原有的特性(传播方向、振动方向、频率等), 不受其它波的影响。在波的相遇区域中, 某点的振动是各列波单独传播时在该点引起的振动的合成。

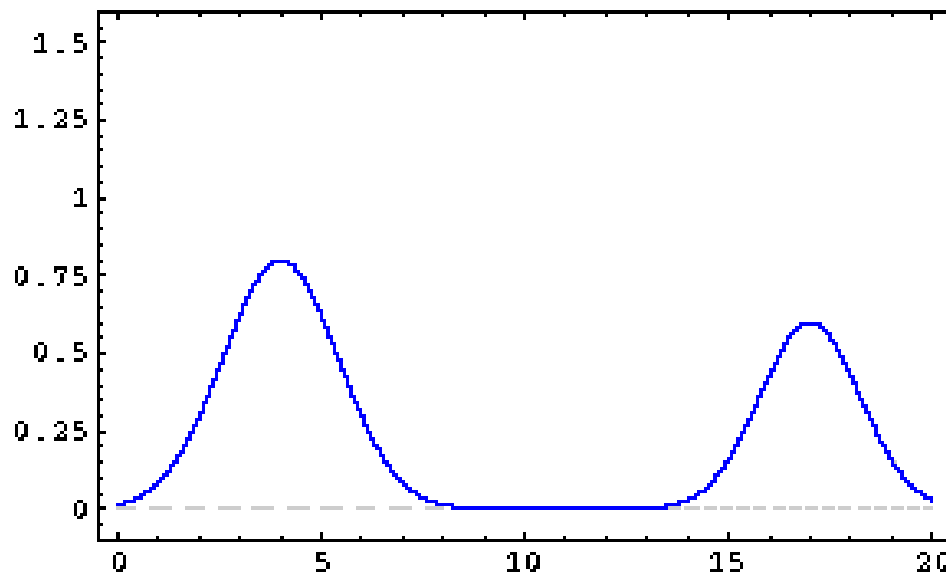
- * 乐队演奏
- * 空中无线电波
- * 彩色光束空间交叉相遇

验证波的叠加原理

两列波 $y_1(x,t)$, $y_2(x,t)$ 分别满足波动方程

$$\frac{\partial^2 y_1}{\partial t^2} = u^2 \frac{\partial^2 y_1}{\partial x^2}$$

$$\frac{\partial^2 y_2}{\partial t^2} = u^2 \frac{\partial^2 y_2}{\partial x^2}$$

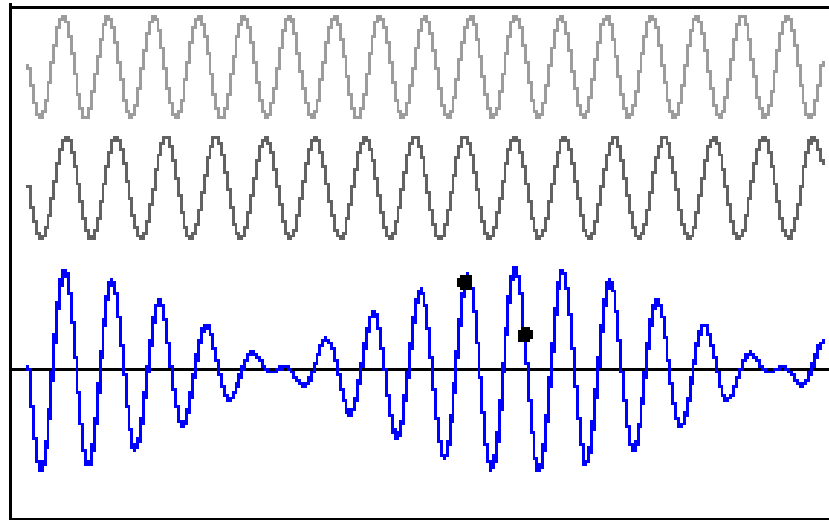


➡
$$\frac{\partial^2 (y_1 + y_2)}{\partial t^2} = u^2 \frac{\partial^2 (y_1 + y_2)}{\partial x^2}$$

叠加原理的成立是建立在波动方程是线性的这个性质上

- 波的强度过大 → 介质形变与弹力的关系不呈线性 → 波动方程非线性 → 叠加原理不成立

波的叠加



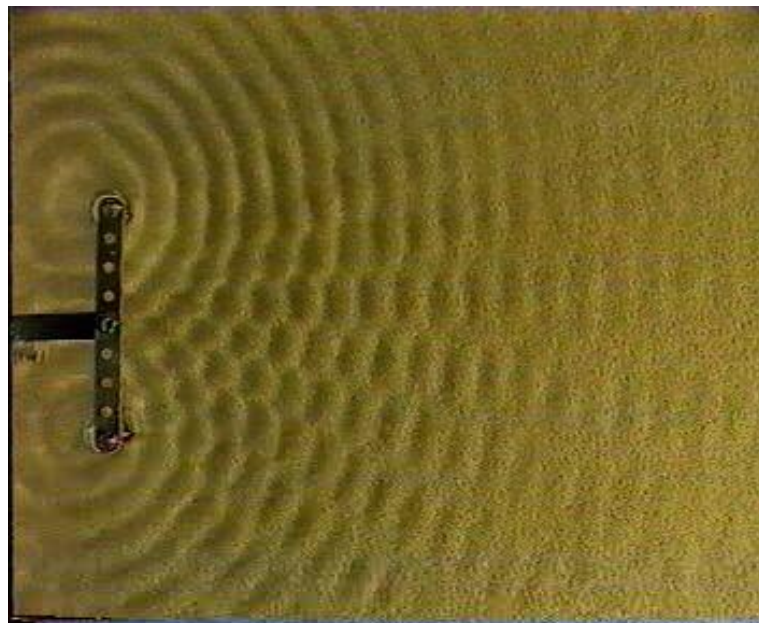
二、 波的干涉

1. 干涉现象

当两列满足一定条件的波叠加时在空间出现稳定的振动加强和减弱的分布称为波的干涉现象*[link](#)

2. 相干条件

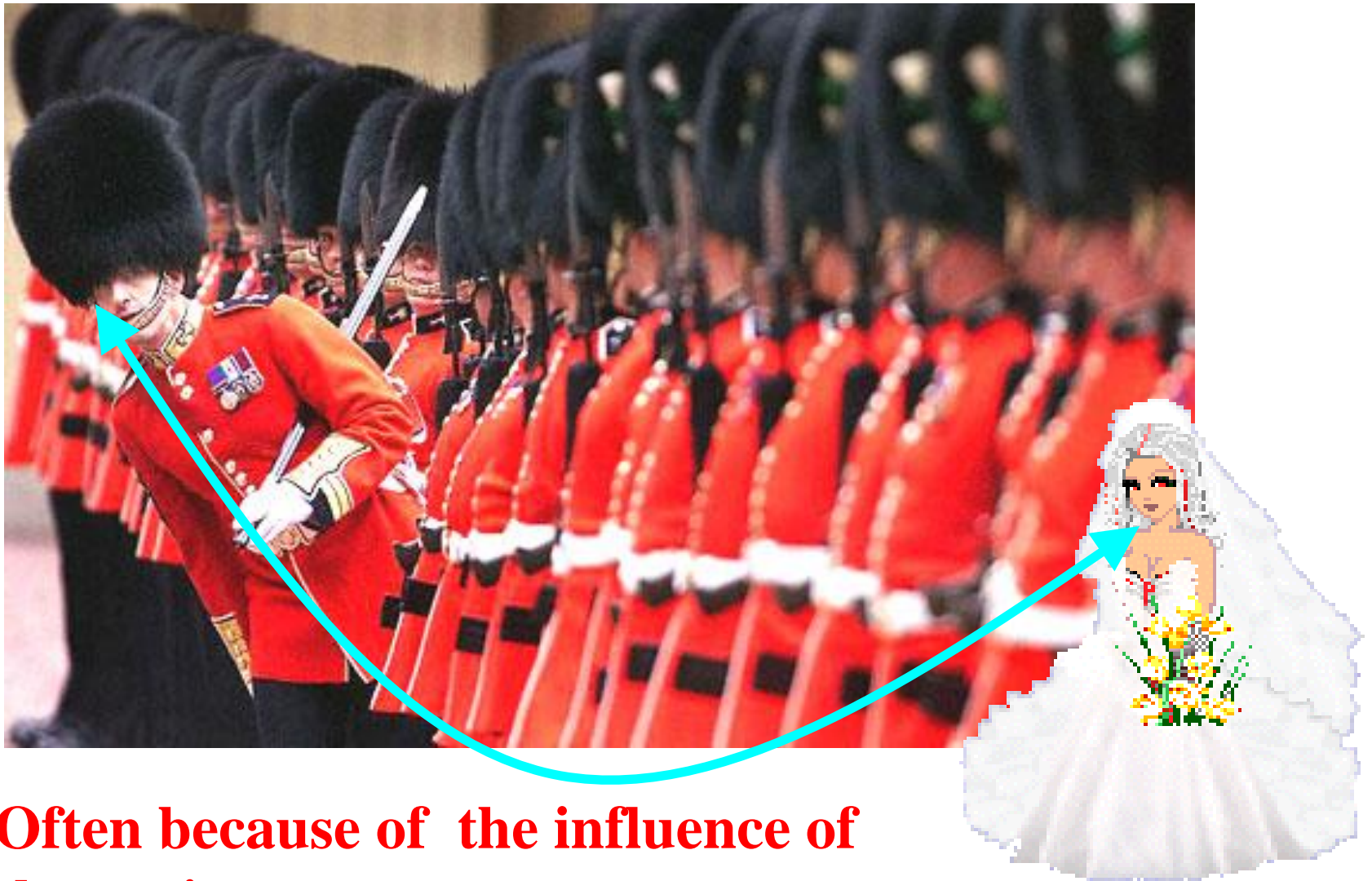
- (1) 频率相同
- (2) 有恒定的相位差
- (3) 振动方向相同



Coherence, constant phase difference in two or more waves over time (Columbia Electronic Encyclopedia 2003)



Decoherence, some one is out of phase

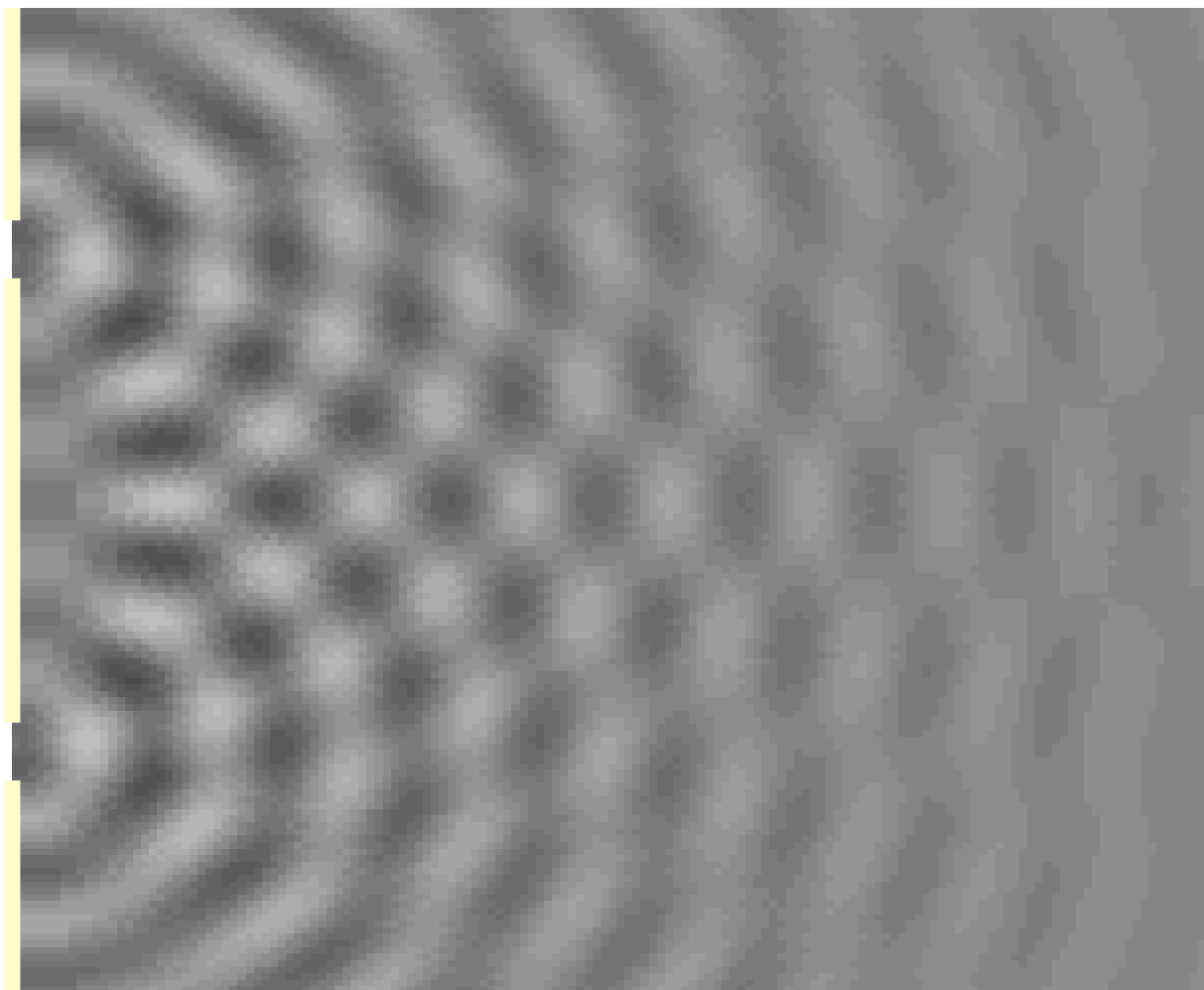


Often because of the influence of the environment

Recoherence, by a little control



为什么有稳定的振幅分布？



3. 相长、相消干涉

1) 波场中任一点的合振动

设振动方向 \perp 屏面

$$S_1 \quad y_{10} = A_{10} \cos(\omega t + \varphi_{10})$$

$$S_2 \quad y_{20} = A_{20} \cos(\omega t + \varphi_{20})$$

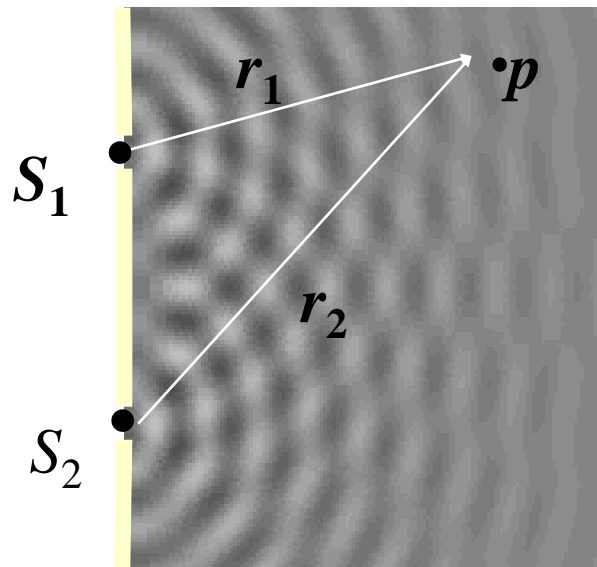
p 点处两分振动为

$$y_1 = A_1 \cos(\omega t + \varphi_{10} - kr_1)$$

$$y_2 = A_2 \cos(\omega t + \varphi_{20} - kr_2)$$

相位差:

$$\Delta\varphi = (\varphi_{20} - \varphi_{10}) - k(r_2 - r_1)$$



p 点合振动

位移:

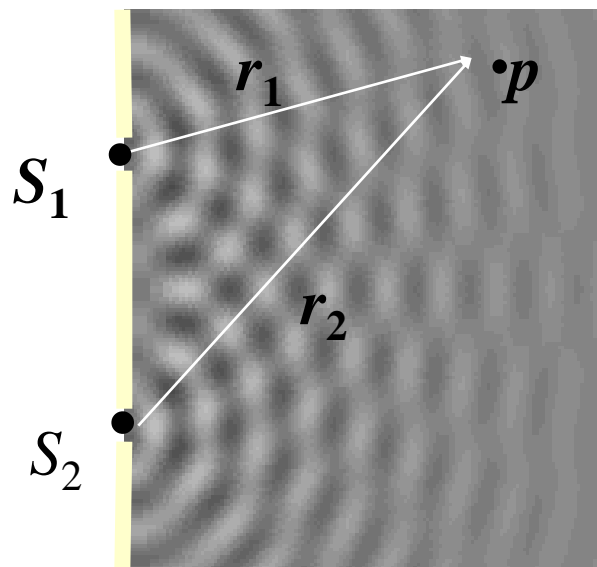
$$y = y_1 + y_2 = A \cos(\omega t + \varphi)$$

合振幅

$$A = (A_1^2 + A_2^2 + 2A_1A_2 \cos \Delta \varphi)^{1/2}$$

波的强度

$$I = I_1 + I_2 + 2\sqrt{I_1 I_2} \cos \Delta \varphi$$



$$I = I_1 + I_2 + 2\sqrt{I_1 I_2} \cos \Delta\varphi$$

2) 加强、减弱条件

■ 相长干涉

$$\Delta\varphi = (\varphi_{20} - \varphi_{10}) - k(r_2 - r_1) = \pm 2m\pi \quad (m=0,1,2,\dots)$$

$$I_{\max} = I_1 + I_2 + 2\sqrt{I_1 I_2} \quad \text{若 } A_1 = A_2, \text{ 则 } I_{\max} = 4 I_1$$

■ 相消干涉

$$\Delta\varphi = (\varphi_{20} - \varphi_{10}) - k(r_2 - r_1) = \pm (2m+1)\pi$$

$$I_{\min} = I_1 + I_2 - 2\sqrt{I_1 I_2} \quad \text{若 } A_1 = A_2, \text{ 则 } I_{\min} = 0$$

$$\Delta\varphi = (\varphi_{20} - \varphi_{10}) - k(r_2 - r_1)$$

特例: $\varphi_{20} = \varphi_{10}$

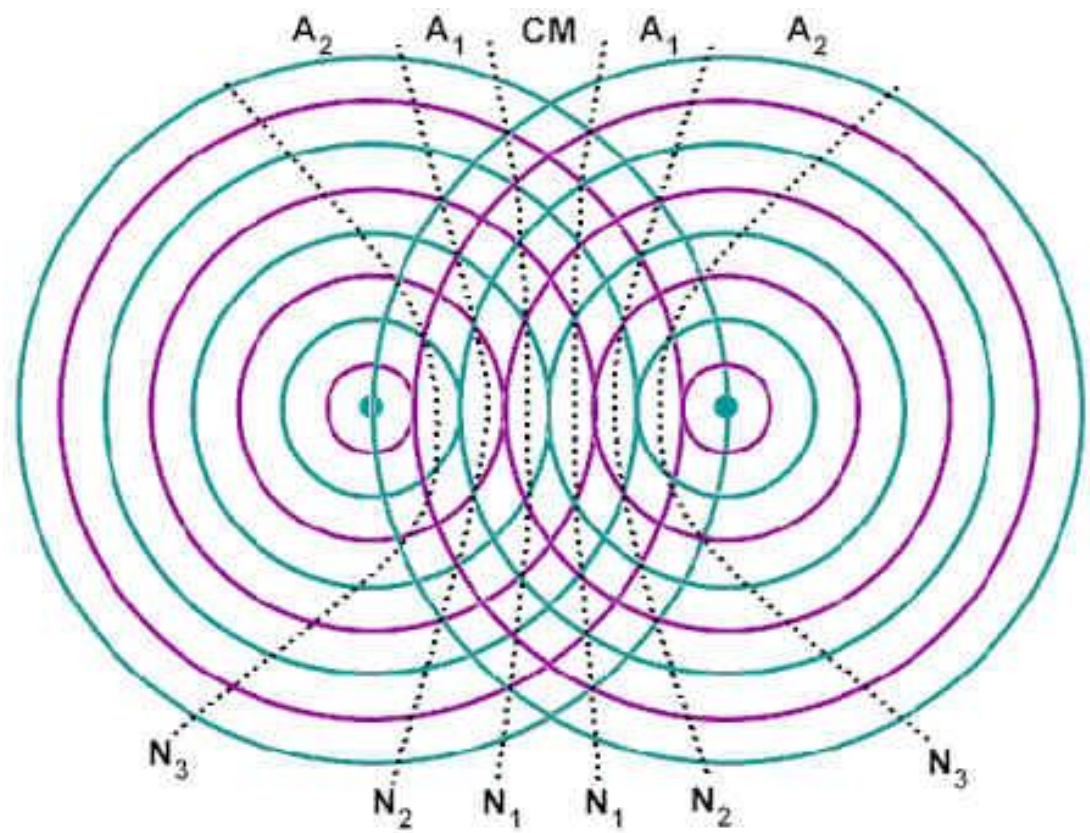
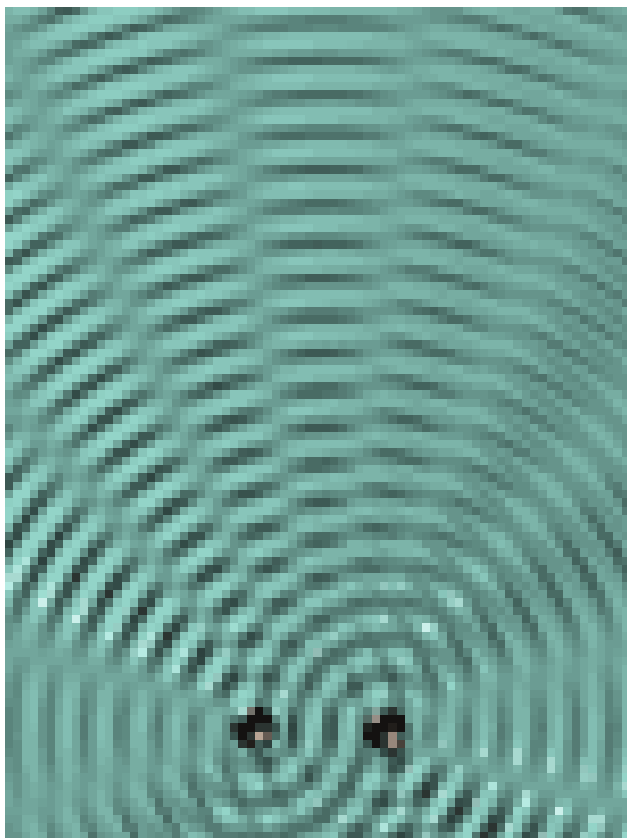
✓ 加强条件 $r_2 - r_1 = \pm m\lambda \quad (m = 0, 1, 2, \dots)$

波程差

✓ 减弱条件 $r_2 - r_1 = \pm(2m + 1)\frac{\lambda}{2} \quad (m = 0, 1, 2, \dots)$

- 非相干波叠加，由于相位的无规性没有干涉现象

$$\overline{\cos \Delta\varphi} = 0 \quad I = I_1 + I_2 + 2\sqrt{I_1 I_2} \cos \Delta\varphi \quad I = I_1 + I_2$$

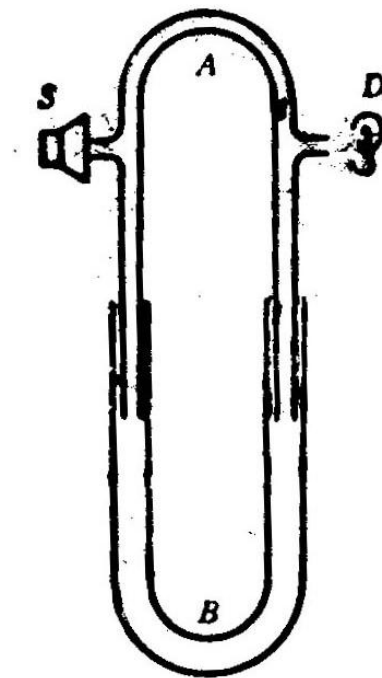


相长和相消干涉都形成双曲线

$$r_2 - r_1 = \text{常量}$$

例：图中所示为声音干涉仪，用以演示声波的干涉。 S 为声源， D 为声音探测器，如耳或话筒。路径 SBD 的长度可以变化，但路径 SAD 是固定的。干涉仪内有空气，且知声音强度在 B 的第一位置时为极小值100单位，而渐增至 B 距第一位置为1.65cm的第二位置时，有极大值900单位。求：

- (1) 声波的波长；
- (2) 抵达探测器的两波的振幅之比。



解：

$$SBD - SAD = k\lambda - \frac{\lambda}{2}$$

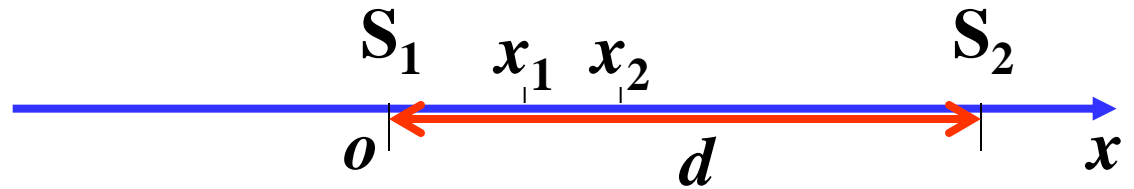
$$SB'D - SAD = k\lambda$$

$$SB'D - SBD = 2 \times 1.65 = \frac{\lambda}{2}$$

$$\Rightarrow \lambda = 4 \times 1.65 = 6.6(\text{cm})$$

$$\left(\frac{A-B}{A+B} \right)^2 = \frac{1}{9} \quad \Rightarrow \quad \frac{A}{B} = 2$$

[例题]两相干波源 S_1 和 S_2 的间距为 $d=30\text{m}$ ，且都在 x 轴上， S_1 位于原点 o 。设由两波源分别发出两列波沿 x 轴传播，强度保持不变。 $x_1=9\text{m}$ 和 $x_2=12\text{m}$ 处的两点是相邻的两个因干涉而静止的点。求波长和两波源间最小相位差。



解：设 S_1 和 S_2 的振动相位分别为： φ_1 、 φ_2

两波源发出的波在 x_1 点引起的振动相位差：

$$[\varphi_2 - \frac{2\pi}{\lambda}(d - x_1)] - [\varphi_1 - \frac{2\pi}{\lambda}x_1] = (2k + 1)\pi \quad (1)$$

两波源发出的波在 x_2 点引起的振动相位差：

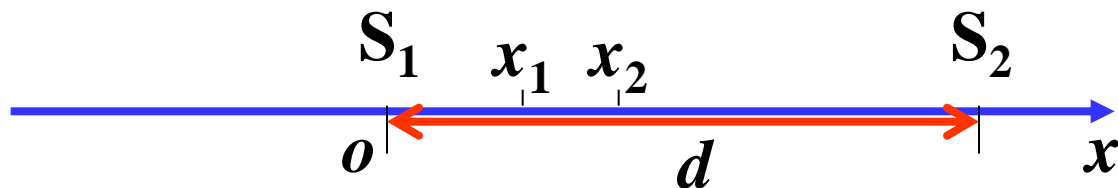
$$[\varphi_2 - \frac{2\pi}{\lambda}(d - x_2)] - [\varphi_1 - \frac{2\pi}{\lambda}x_2] = (2k + 3)\pi \quad (2)$$

$$\therefore \frac{4\pi}{\lambda}(x_2 - x_1) = 2\pi \quad [\varphi_2 - \frac{2\pi}{\lambda}(d - x_1)] - [\varphi_1 - \frac{2\pi}{\lambda}x_1] = (2k + 1)\pi \quad (1)$$

$$\lambda = 2(x_2 - x_1) = 2(12 - 9) = 6\text{m}$$

$$\begin{aligned} \text{由 (1) 式 } \varphi_2 - \varphi_1 &= (2k + 1)\pi + \frac{2\pi}{\lambda}(d - 2x_1) \\ &= (2k + 5)\pi \end{aligned}$$

$$k = -2, -3 \text{ 时相位差最小 } \varphi_2 - \varphi_1 = \pm\pi$$



三、驻波

两列相干波沿相反方向传播而叠加而形成驻波。 设 $x = 0$ 处两波初相均为零

$$y_1 = A \cos(\omega t - \frac{x}{\lambda} 2\pi) \quad \rightarrow x$$

$$y_2 = A \cos(\omega t + \frac{x}{\lambda} 2\pi) \quad \leftarrow x$$

$$y = y_1 + y_2 = 2A \cos \frac{x}{\lambda} 2\pi \cdot \cos \omega t$$

驻波特点:

$$y = 2A \cos \frac{x}{\lambda} 2\pi \cdot \cos \omega t$$

1. 振幅

$$\left| 2A \cos \frac{x}{\lambda} 2\pi \right|$$

各处不等大, 出现了波腹和波节

波腹处

$$|\cos \frac{x}{\lambda} 2\pi| = 1 \rightarrow x = \pm k \frac{\lambda}{2}, \quad k = 0, 1, 2, \dots$$

波节处

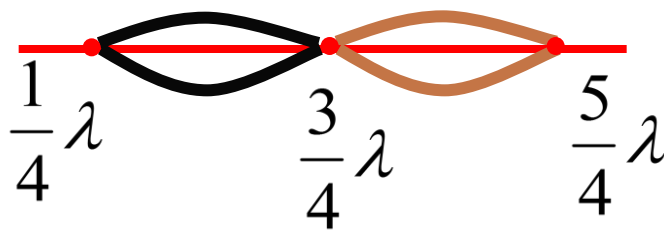
$$|\cos \frac{x}{\lambda} 2\pi| = 0 \rightarrow x = \pm (2k + 1) \frac{\lambda}{4}$$

2. 相位: $y = \left(2A \cos \frac{x}{\lambda} 2\pi \right) \cdot \cos \omega t$

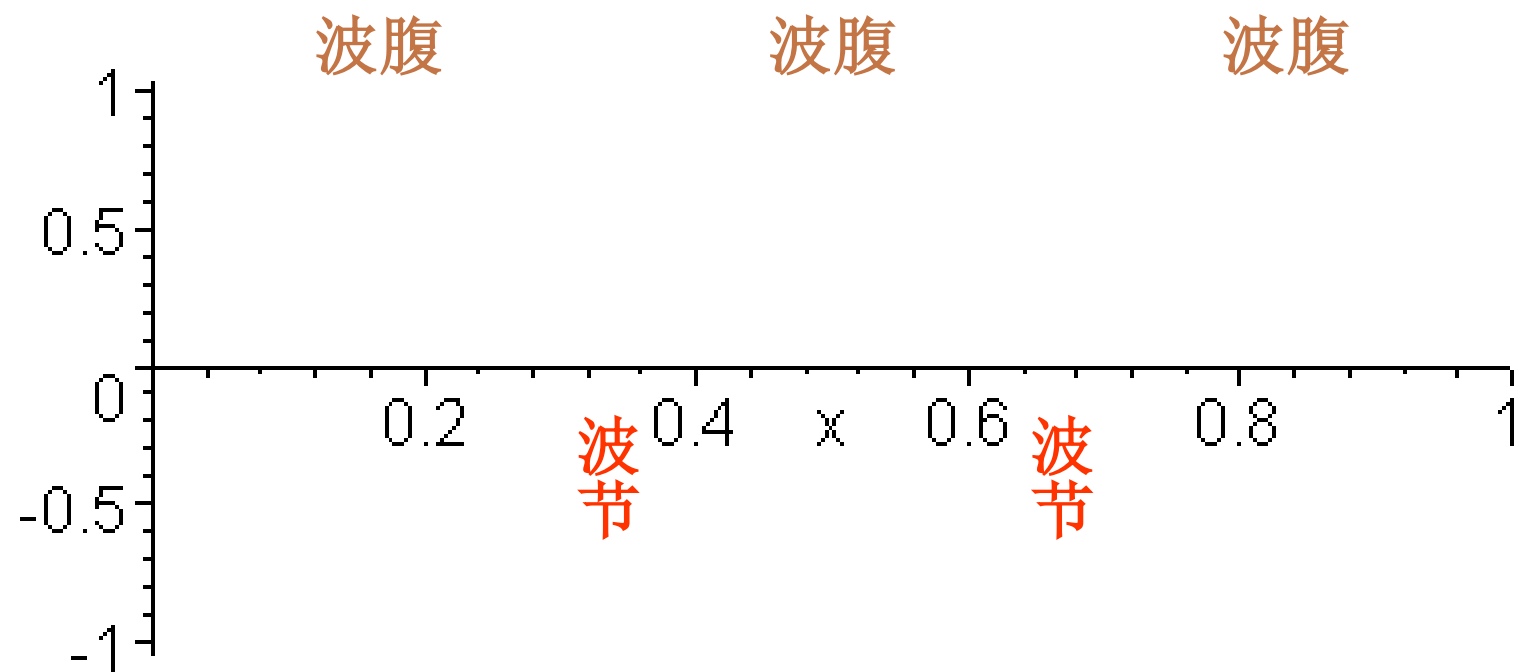
相位中没有 x 坐标, 故没有相位的传播 —— 驻波。

$$x_0 = \frac{1}{4}\lambda \rightarrow x_1 = \frac{3}{4}\lambda: \cos \frac{x}{\lambda} 2\pi < 0$$

$$x_1 = \frac{3}{4}\lambda \rightarrow x_2 = \frac{5}{4}\lambda: \cos \frac{x}{\lambda} 2\pi > 0$$

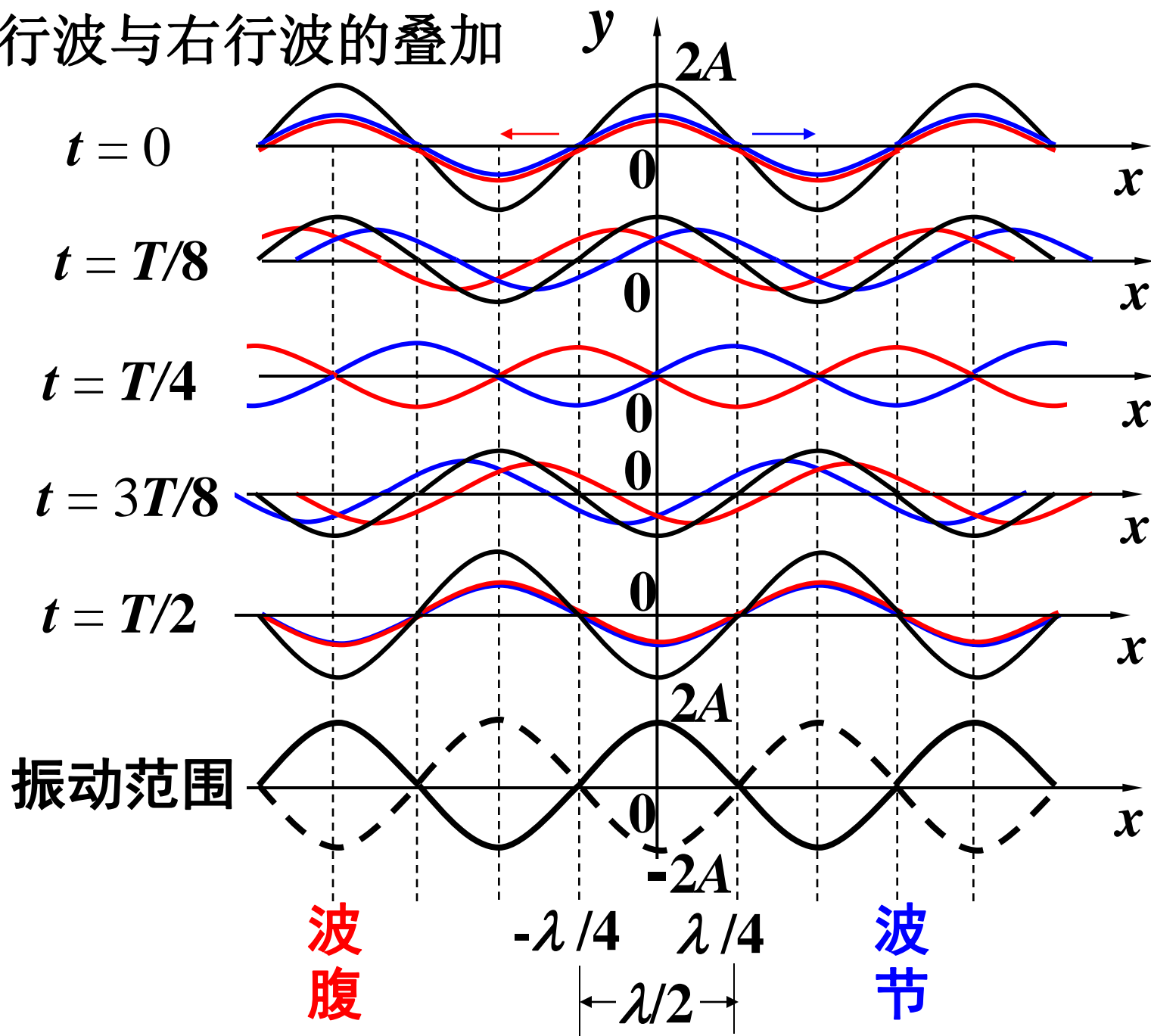


驻波是分段地振动。相邻波节间振动相位相同；
波节两侧振动相位相反。

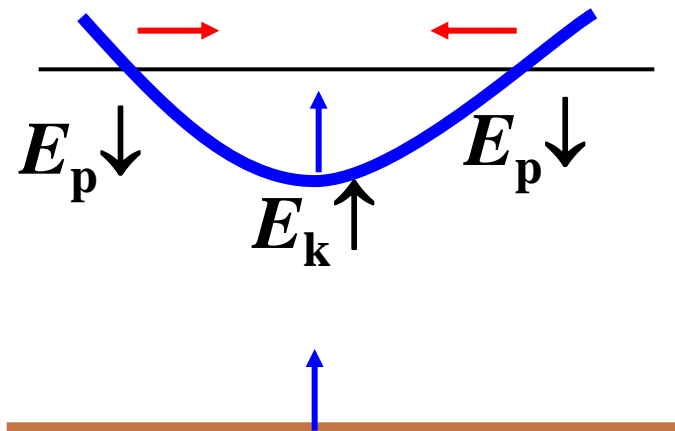


相邻波节或波腹的间距为半波长

左行波与右行波的叠加



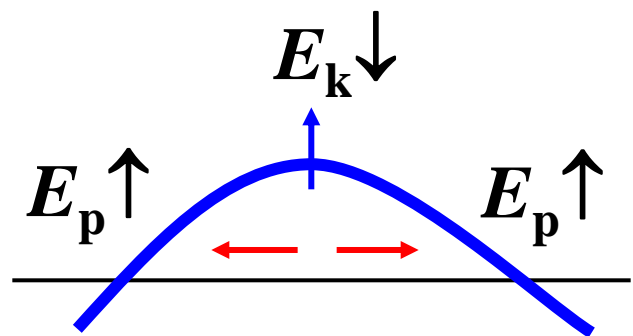
3. 能量:



势能 \rightarrow 动能

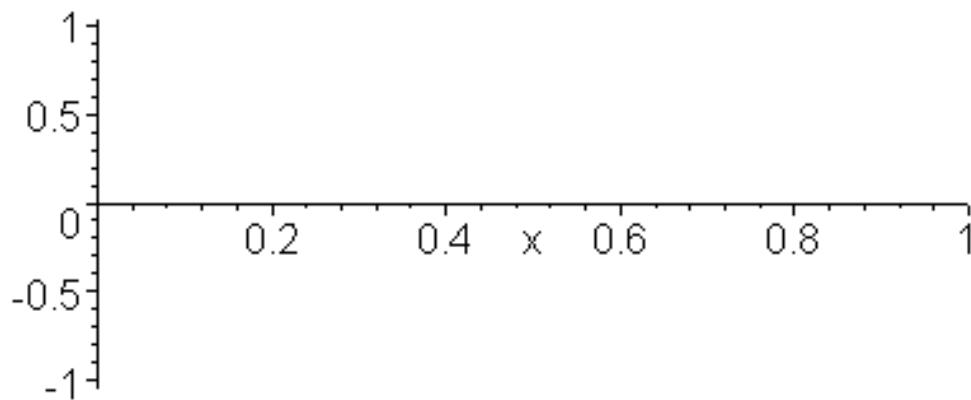
能量由波节向波腹流动

瞬时位移为0, 势能为0,
动能最大。

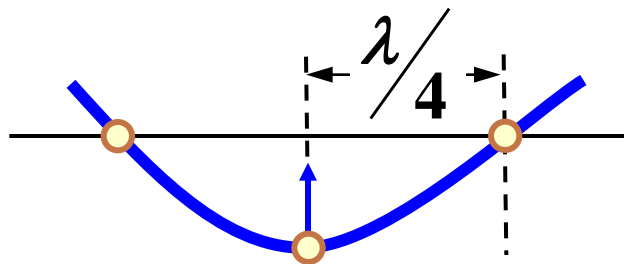


动能 \rightarrow 势能

能量由波腹向波节流动

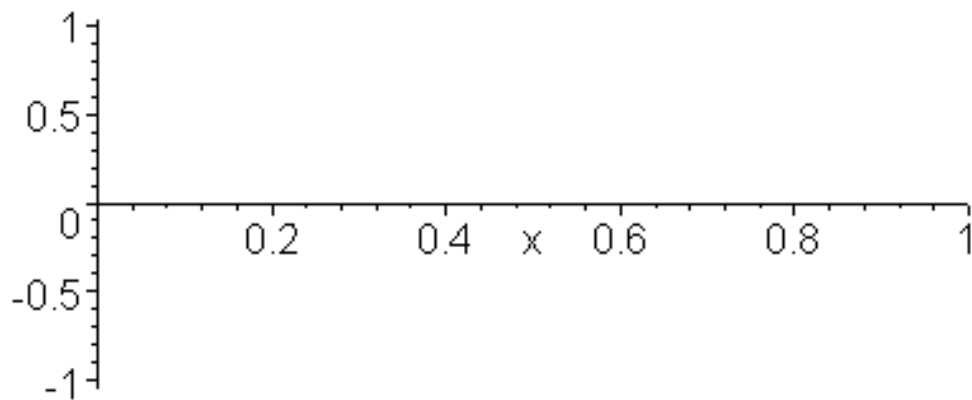


3. 能量:

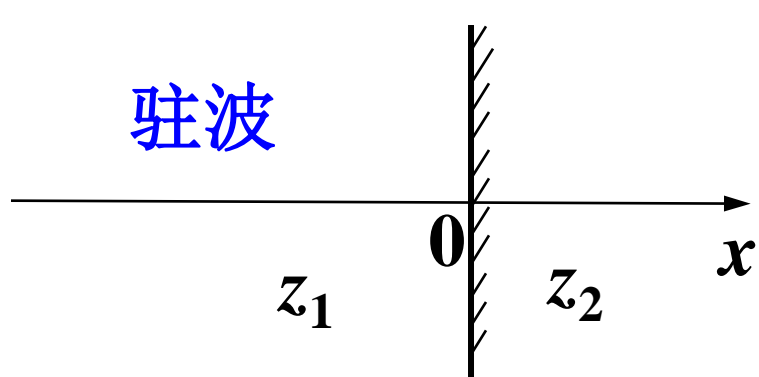


波节（波腹）的两边，不发生能量交换。能量只在 $\lambda/4$ 区域内流动。

平均说来没有能量的传播。



4、驻波的界面情况



$z_1 < z_2$: 波疏→波密介质

界面上总是波节

$z_1 > z_2$: 波密→波疏介质

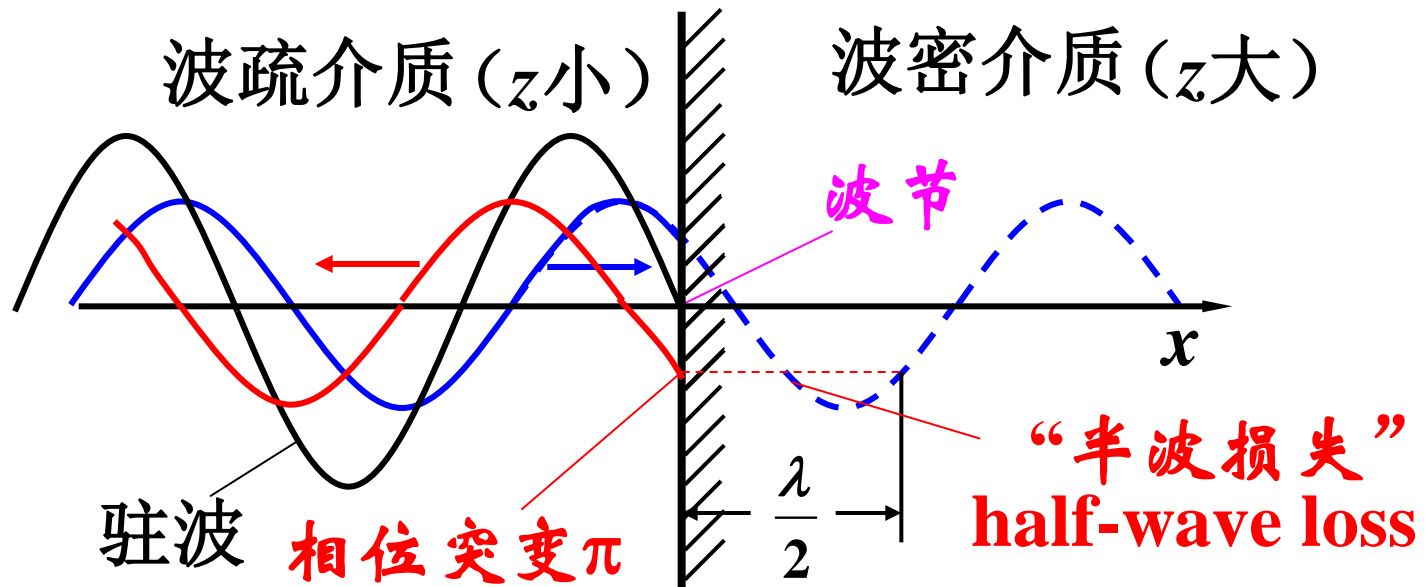
$z = \rho u$ — 波阻抗

界面上总是波腹

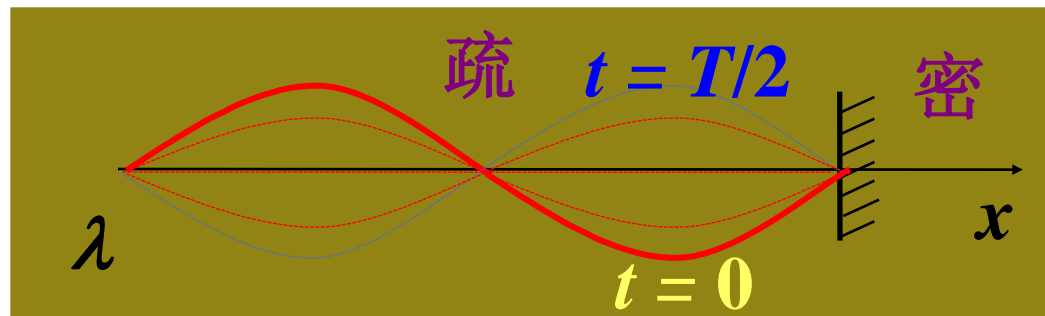
机械波垂直界面入射，利用界面关系：

- (1) 界面两侧质元位移相同（接触）
- (2) 界面两侧应力相等（牛顿第三定律）

入射波和反射波的波形

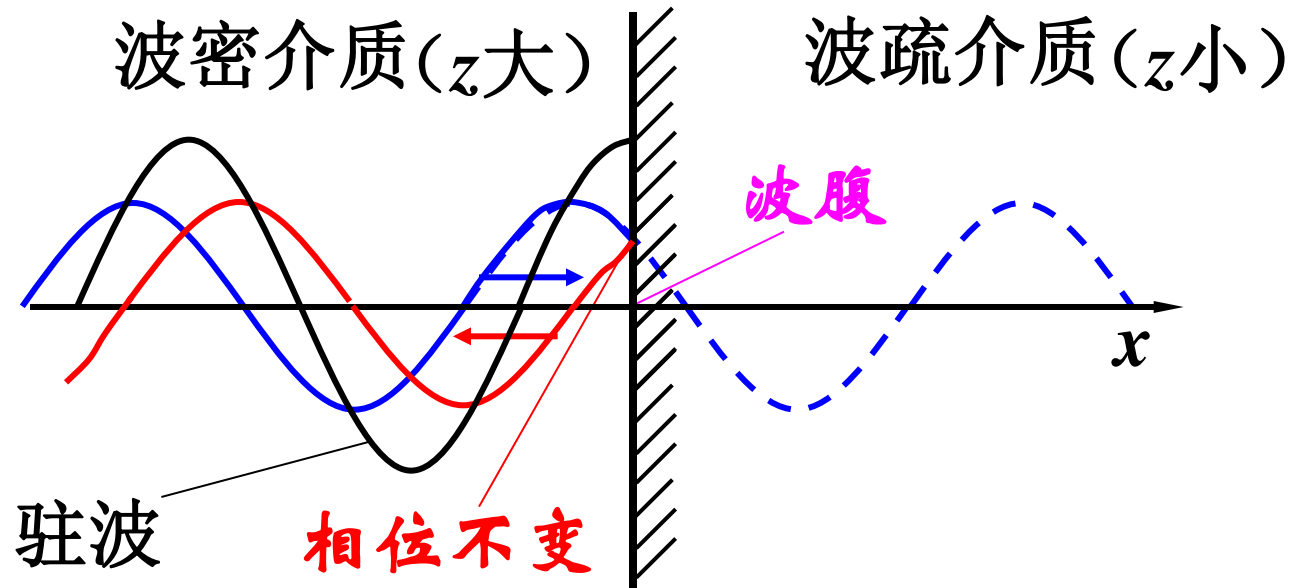


在界面处, 两波的振动反相, 反射波有相位突变 π !
或波在反射时有半波损失! 反射点为波节

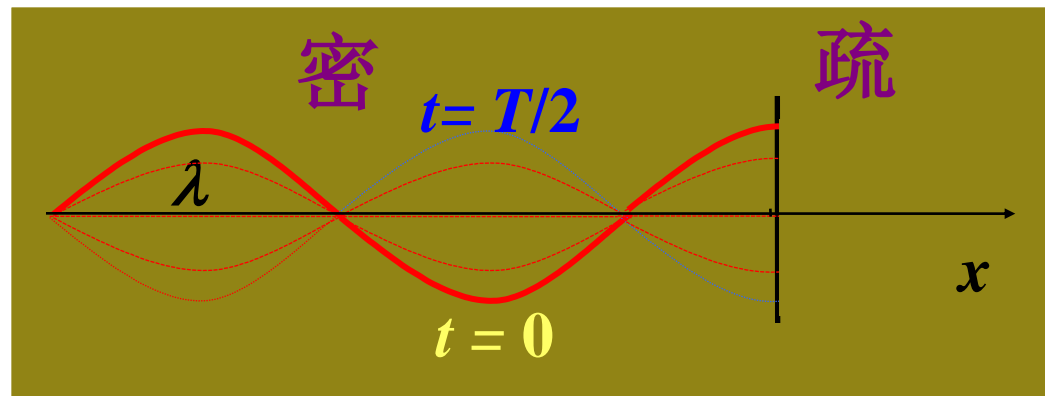


半波反射

入射波和反射波的波形



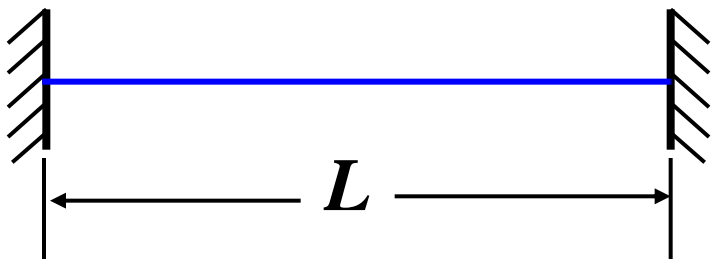
在界面处，反射波和入射波的振动同相。反射波无相位突变（无相位损失）！



四、简正模式 (normal mode)

波在一定边界内传播时就会形成各种驻波。

如两端固定的弦， 形成驻波必须满足以下条件：



$$n \frac{\lambda_n}{2} = L, \quad n = 1, 2, 3 \dots$$

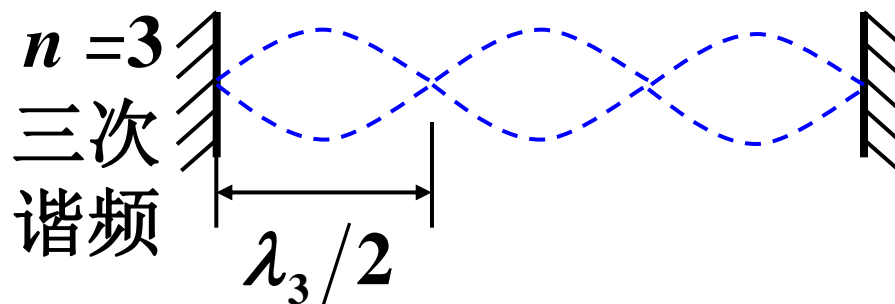
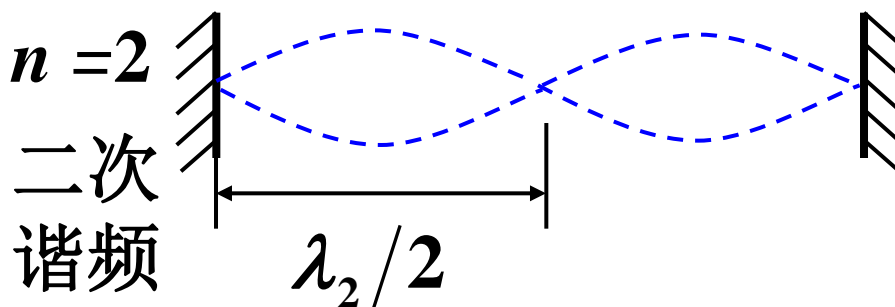
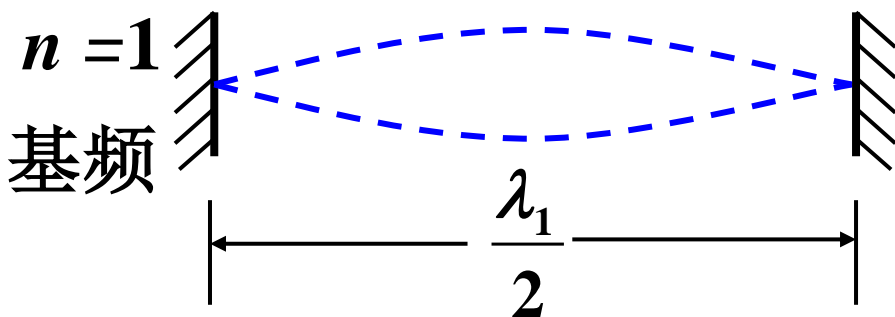
$$\text{或} \quad \lambda_n = \frac{2L}{n}$$

$$\nu_n = \frac{u}{\lambda_n} = n \frac{u}{2L} \quad \text{—系统的固有频率}$$

$$\text{波速} \quad u = \sqrt{\frac{F}{\rho_l}} \quad \begin{array}{l} F \text{ —弦中的张力} \\ \rho_l \text{ —弦的线密度} \end{array}$$

每种可能的**稳定振动方式**称作系统的一个**简正模式**，对应的频率称作**简正频率**。

两端固定的弦：

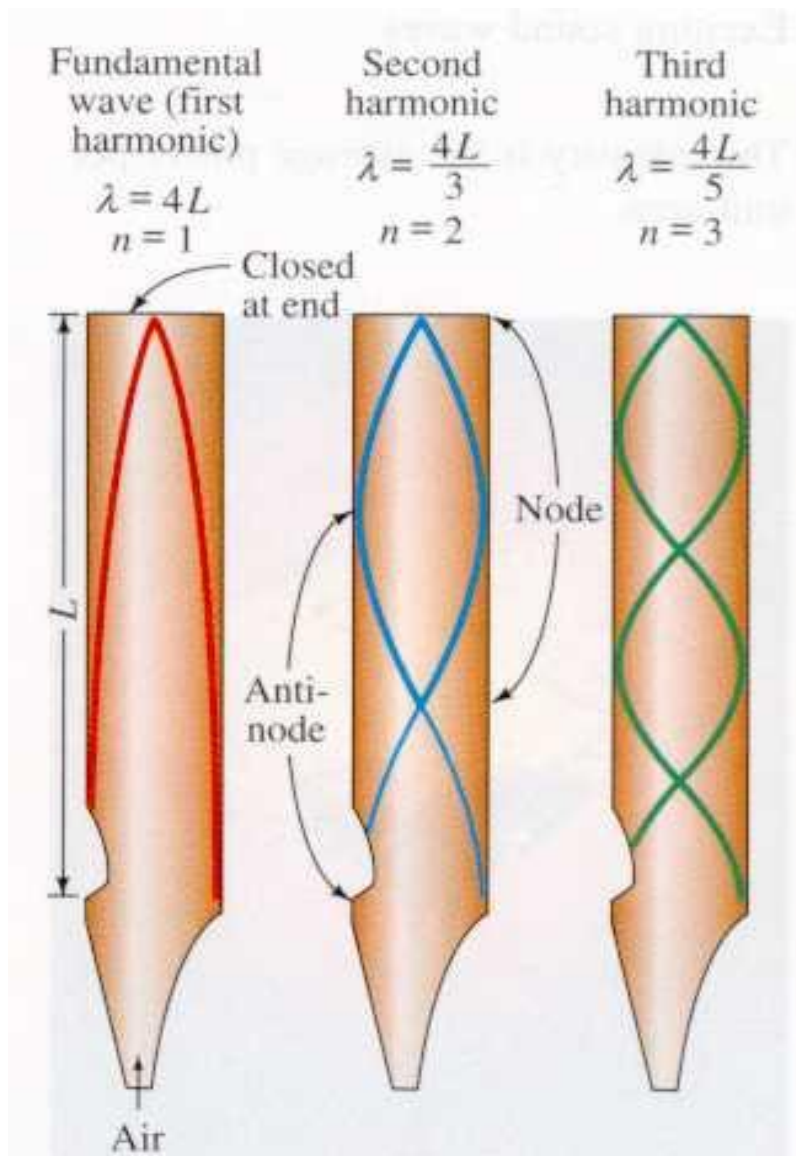


$$n \frac{\lambda_n}{2} = L$$

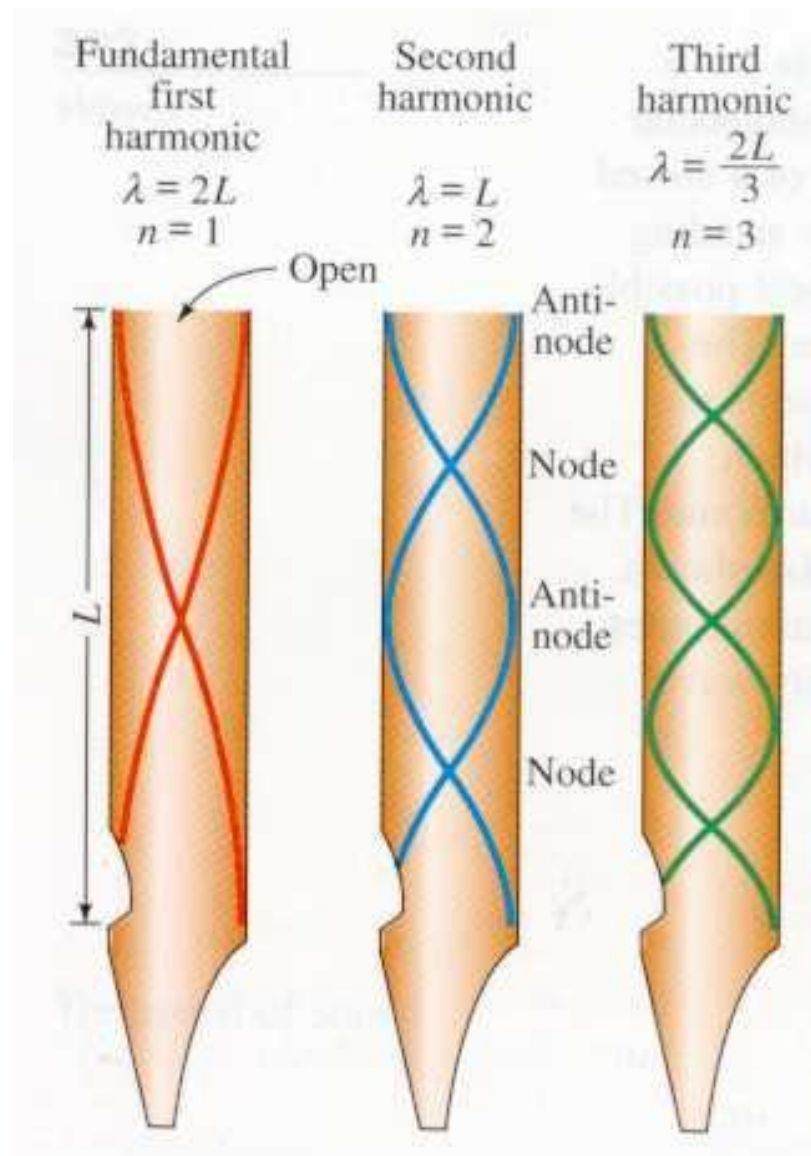
$$n = 1, 2, 3 \dots$$

$$\lambda_n = \frac{2L}{n}$$

$$v_n = \frac{u}{\lambda_n} = n \frac{u}{2L}$$

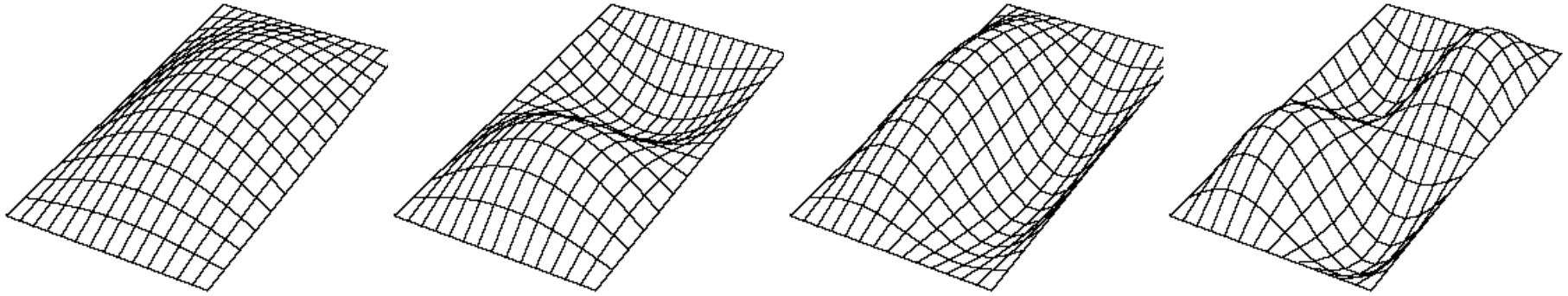


末端封闭的笛中的驻波

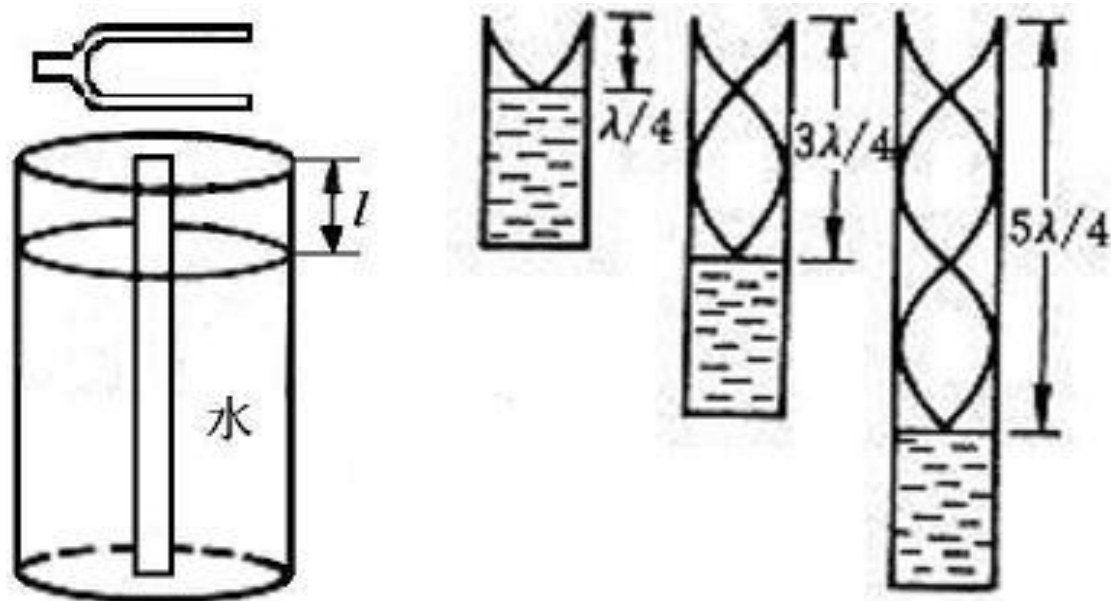


末端开放的笛中的驻波

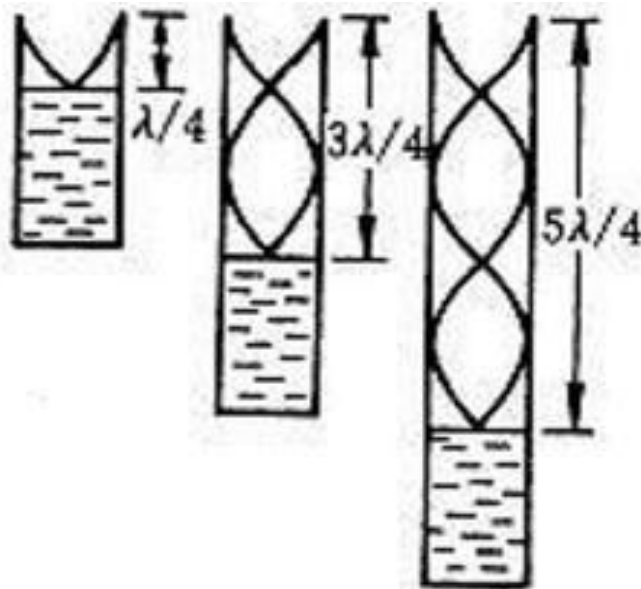
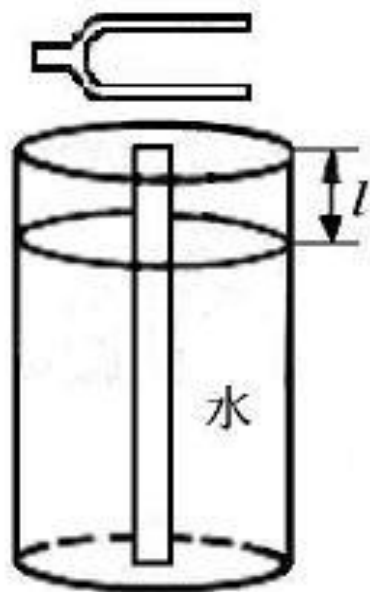
二维驻波



一般地说，对于一个驻波体系存在无限多个简正频率和简正模式。当周期性驱动力的频率与驻波体系的某一简正频率相同时，就会使该频率驻波的振幅变得最大，这种现象也称为共振。利用共振方法可以测量空气中的声速。



水槽插入两端开口玻璃管，音叉置于管上端，音叉频率为 ν ，管中空气柱长度 l 通过水面高低调节。水面由管顶端下降到 $l=a$ 时，声强第一次达到最大；下降到 $l=d+a$ 和 $l=2d+a$ 时，声强第二、三次最大。声强出现极大，表示音叉频率与管内空气柱固有频率相同而发生共振。



$$a = \frac{1}{4}\lambda, a + d = \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{2}\right)\lambda, a + 2d = \left(\frac{1}{4} + 1\right)\lambda$$

$$d = \lambda/2, v = u/\lambda, u = 2dv$$

设 $v=1080 \text{ Hz}$, $d=15.3 \text{ cm}$, 则空气中声速为

$$u = 2dv = 2 \times 0.153 \times 1080 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1} = 330 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$$

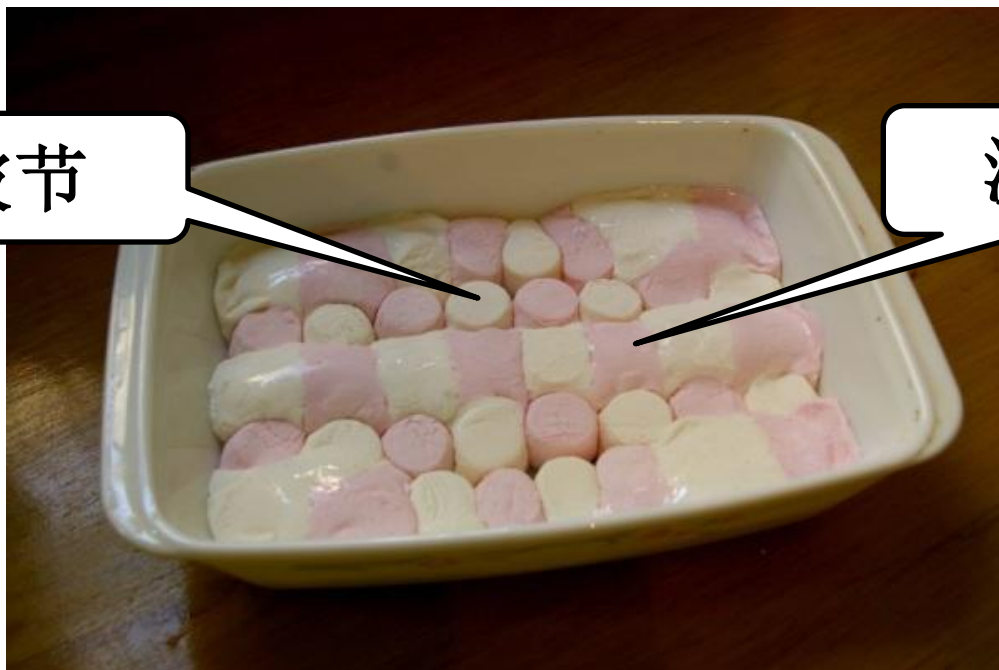
用微波炉测光速

材料：棉花糖、一台微波炉、一个微波炉加热的大盘子以及一把尺。



波节

波腹





波的速度 = 频率 × 波长

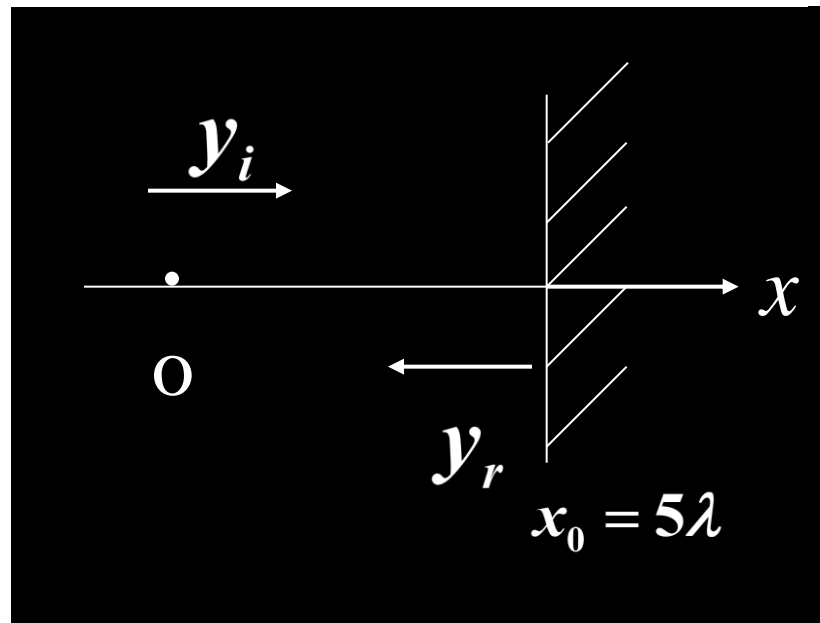
两块相邻融化棉花糖之间的距离其实是驻波波长的一半。如果你测量到的距离是6厘米，微波炉的工作频率是2450兆赫兹，那么光速就是 $2450 \times 1000,000/\text{秒} \times 6\text{厘米} \times 2 = 294,000,000\text{米/秒}$ 。

真空中的光速为299,792,458米/秒，两者非常接近。

例：如图，入射波 $y_i = A \cos 2\pi(\frac{t}{T} - \frac{x}{\lambda})$ 在 $x_0 = 5\lambda$ 处被反射（反射面固定），求驻波波动式及波节与波腹的坐标

解： $y_{io} = A \cos \frac{2\pi}{T} t$

反射波在o点的振动较入射波在o点的振动落后：



$$\frac{2\pi(2x_0)}{\lambda} + \pi = 21\pi$$

$$y_r = A \cos(\frac{2\pi}{T} t + kx - 21\pi)$$

$$y = y_i + y_r = 2A \sin \frac{2\pi x}{\lambda} \sin \frac{2\pi t}{T}$$

驻波的波动式 $y = 2A \sin \frac{2\pi x}{\lambda} \sin \frac{2\pi t}{T}$

波腹 $\frac{2\pi x}{\lambda} = (2n+1)\frac{\pi}{2} \quad n = 0, 1, 2, \dots, 9$

$$x = (2n+1)\frac{\lambda}{4} : \quad \frac{\lambda}{4}, \frac{3\lambda}{4}, \frac{5\lambda}{4}, \dots, \frac{19\lambda}{4}$$

波节 $\frac{2\pi x}{\lambda} = n\pi \quad n = 0, 1, 2, \dots, 10$

$$x = n\frac{\lambda}{2} : \quad 0, \frac{\lambda}{2}, \lambda, \frac{3\lambda}{2}, \dots, 5\lambda$$

例：在弦线上有一简谐波，其表达式为：

$$y_1 = 2.0 \times 10^{-2} \cos[2\pi(\frac{t}{0.02} - \frac{x}{20}) + \frac{\pi}{3}] \quad (\text{SI})$$

为了在此弦线上形成驻波，并且在 $x=0$ 处为一波节，此弦上还应有一简谐波，求其表达式。

解：反向波 $y_2 = 2.0 \times 10^{-2} \cos[2\pi(\frac{t}{0.02} + \frac{x}{20}) + \varphi]$

$$y = 4.0 \times 10^{-2} \cos[\frac{1}{2}(\frac{4\pi x}{20} + \varphi - \frac{\pi}{3})] \cos[\frac{1}{2}(\frac{4\pi t}{0.02} + \varphi + \frac{\pi}{3})]$$

因为 $x=0$ 处为波节 $\frac{1}{2}(\varphi - \frac{\pi}{3}) = \pm \frac{\pi}{2} \rightarrow \varphi = \frac{4\pi}{3} \text{ or } -\frac{2\pi}{3}$

$$y_2 = 2.0 \times 10^{-2} \cos[2\pi(\frac{t}{0.02} + \frac{x}{20}) + \frac{4\pi}{3}] \quad \text{或} \quad y_2 = 2.0 \times 10^{-2} \cos[2\pi(\frac{t}{0.02} + \frac{x}{20}) - \frac{2\pi}{3}]$$

§ 17.6 多普勒效应 (Doppler Effect)

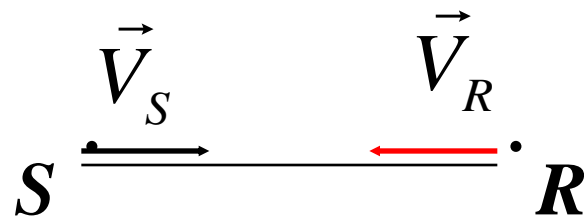
当波源 S 和接收器 R 有运动时，接收器所测得的频率 ν_R 不等于波源振动频率 ν_S 的现象

Doppler, Christian Johann
(1803—53)，奥地利物理学家，
于1842年预言了现在称为多普勒
效应的现象。1845年在荷兰检验
并证实了这个预言，检验用的工
具是由一辆蒸汽机车牵引的载着
几名喇叭手的敞蓬车厢。



一、机械波的多普勒效应

- 参考系：媒质



- 符号规定：S和R相互靠近时 V_S , V_R 为正
- ν_S :波源振动频率， ν :波的频率， ν_R :接收频率

1. 波源和接收器都静止 ($V_S=0, V_R=0$)

$$\nu_R = \nu = \nu_S$$

2. 波源静止, 接收器运动 ($V_S = 0$, 设 $V_R > 0$)

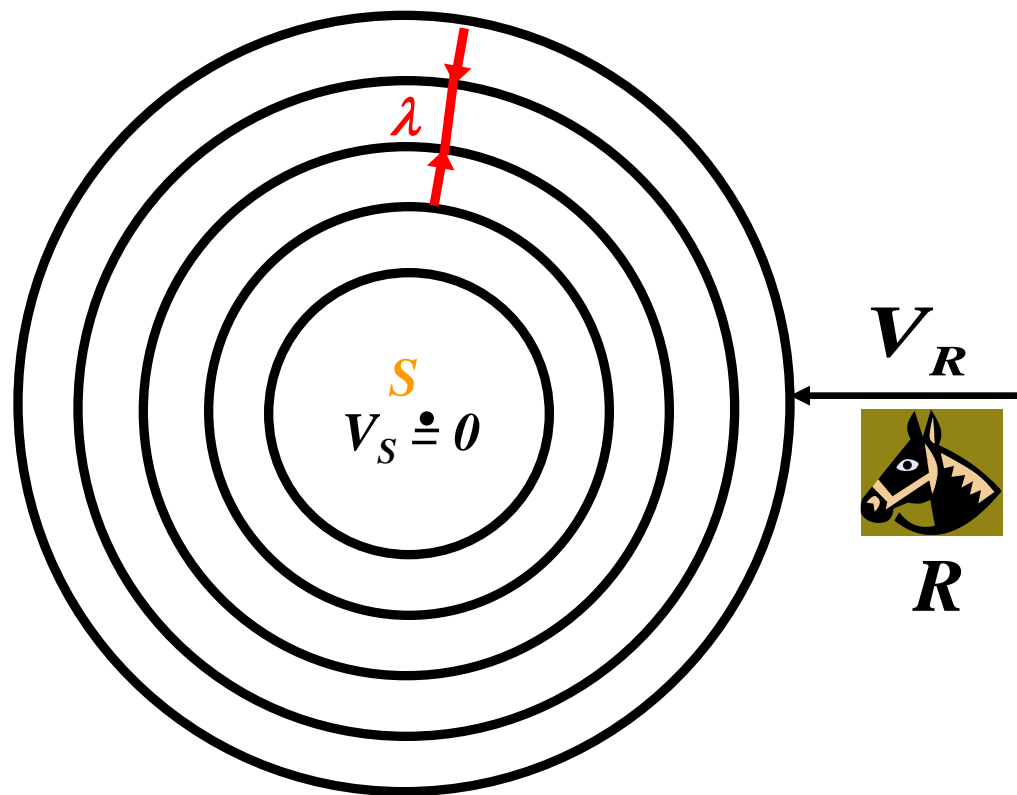
$v = v_S$, 但 $v_R \neq v$

$$v_R = v + \Delta v$$

$$= v + \frac{V_R}{\lambda}$$

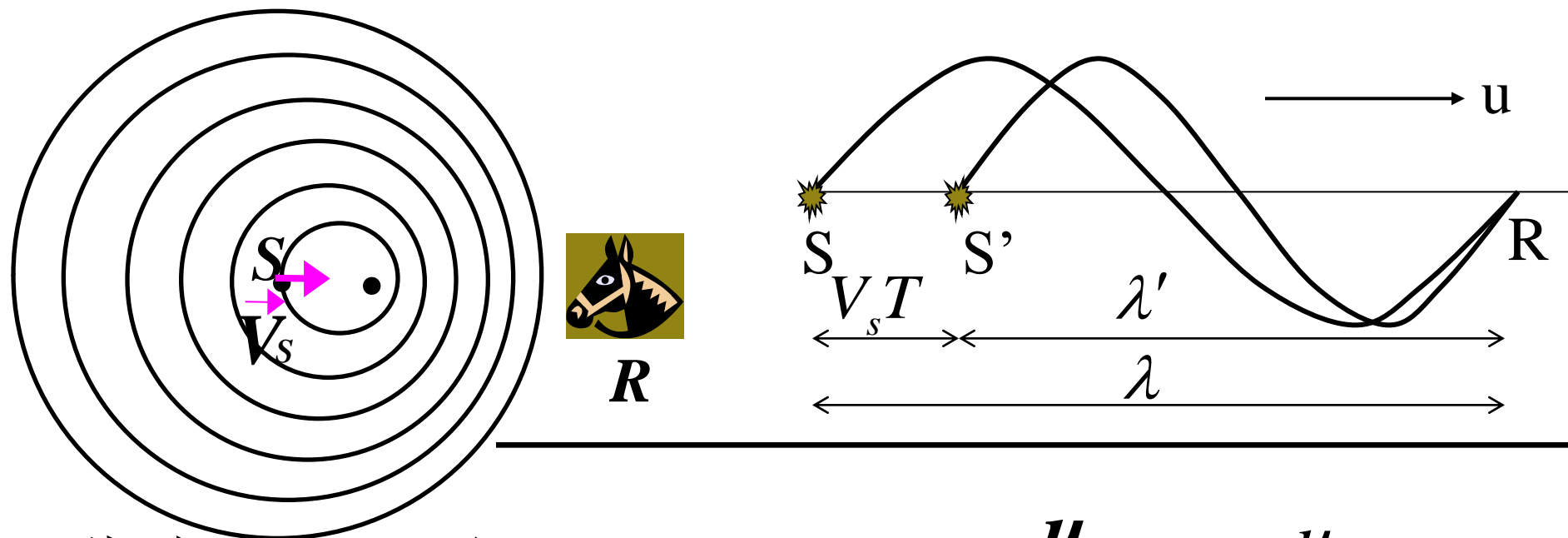
$$= v + \frac{V_R}{u/v}$$

$$= \frac{u + V_R}{u} v$$



$$v_R = \frac{u + V_R}{u} v_S$$

3. 接收器静止, 波源运动 ($V_R=0$, 设 $V_S>0$)



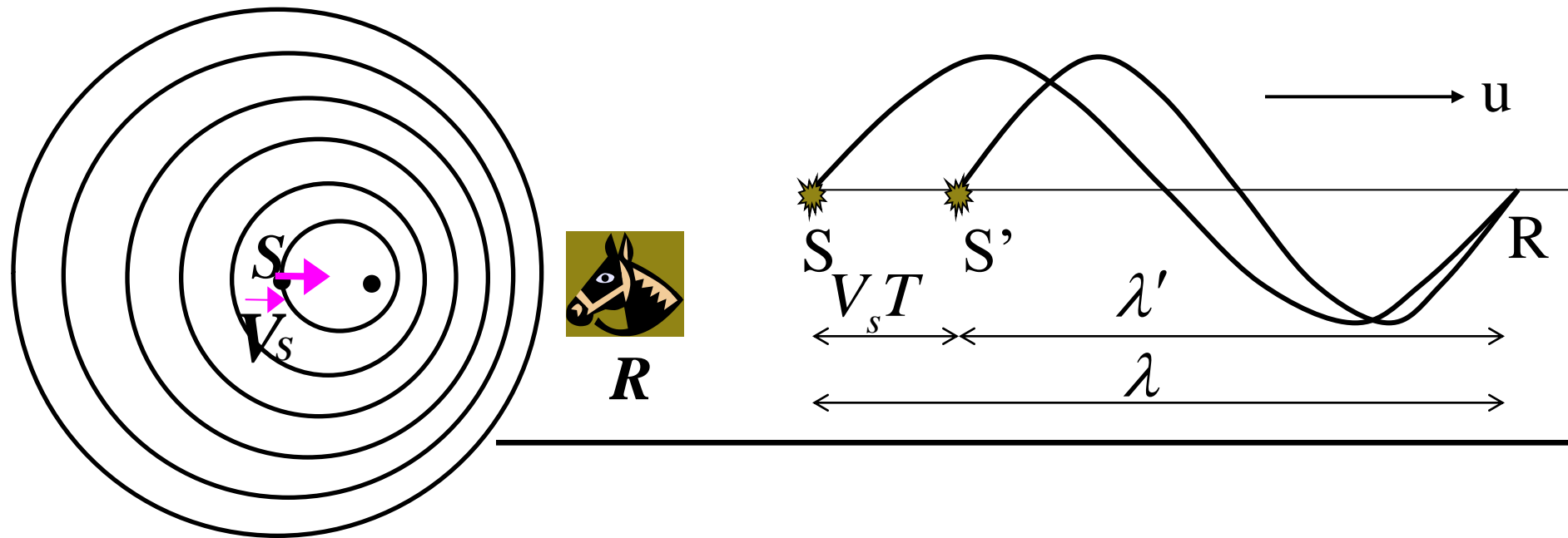
此时, $v_R = v$, 但 $v \neq v_S$

$$\lambda' = \lambda - V_S T$$

$$v = \frac{u}{\lambda'} = \frac{u}{uT - V_S T} = \frac{u}{u - V_S} v_S$$

$$\longrightarrow v_R = v = \frac{u}{u - V_S} v_S$$

3. 接收器静止, 波源运动 ($V_R=0$, 设 $V_S>0$)



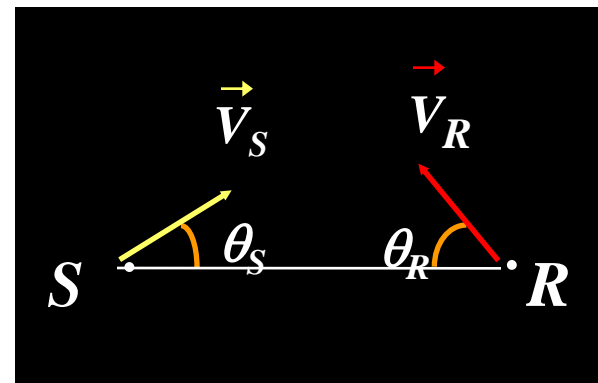
4. 接收器、波源都运动(设 V_S 、 V_R 均 >0)

$$V_S \neq v \neq V_R$$

$$v_R = \frac{u + V_R}{u - V_S} v_S$$

5. 若S和R的运动不在二者连线上

分析表明，波源或接收器的横向运动，不影响接收器测得的频率 ν_R 。



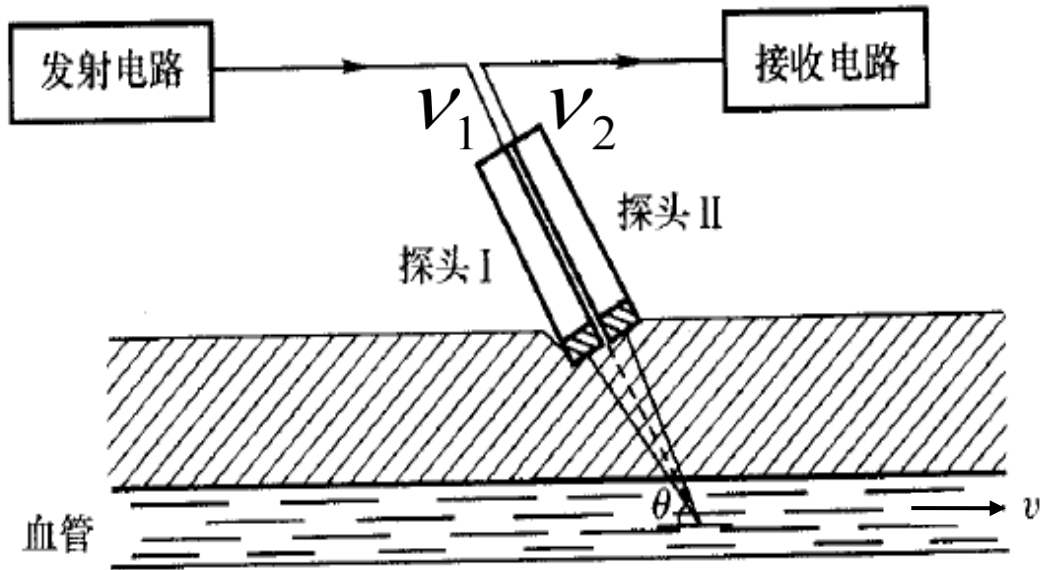
机械波无横向多普勒效应

所以，对一般的运动，只要把上式中的 V_S 、 V_R 换为它们在SR连线上的分量即可：

$$\nu_R = \frac{u + V_R \cos \theta_R}{u - V_S \cos \theta_S} \nu_S$$

$$v_2 = \frac{u - v \cos \theta}{u + v \cos \theta} v_1$$

$$\Rightarrow v = \frac{(v_1 - v_2)u}{(v_1 + v_2) \cos \theta}$$



多普勒效应测血流速度

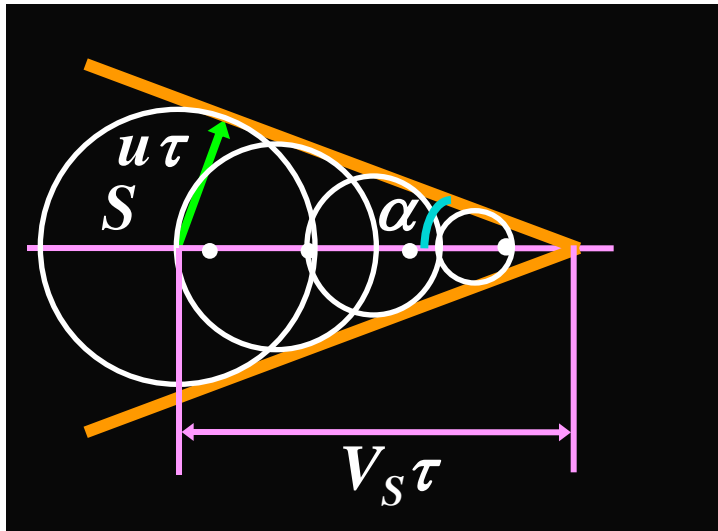
6. 冲击波

当波源运动的速度接近波速时，在波源前产生声垒（sound barrier）和轰声（sonic boom）。



当波源运动的速度大于波速时，波前的包络面呈锥形，这种形式的波称为冲击波（shock wave）。

马赫锥 (Mach cone)



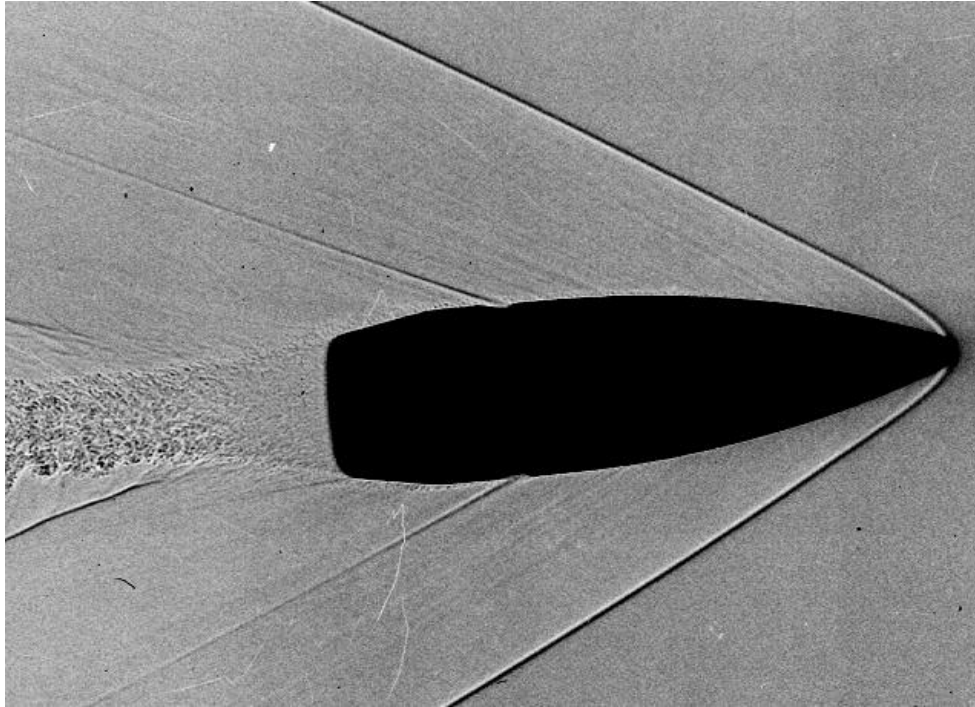
马赫数 $\frac{V_s}{u}$

马赫角 $\sin \alpha = \frac{u}{V_s}$

波源的运动从亚音速到超音速



当物体在介质中运动的速度大于声速时，就会形成冲击波且发出声音。



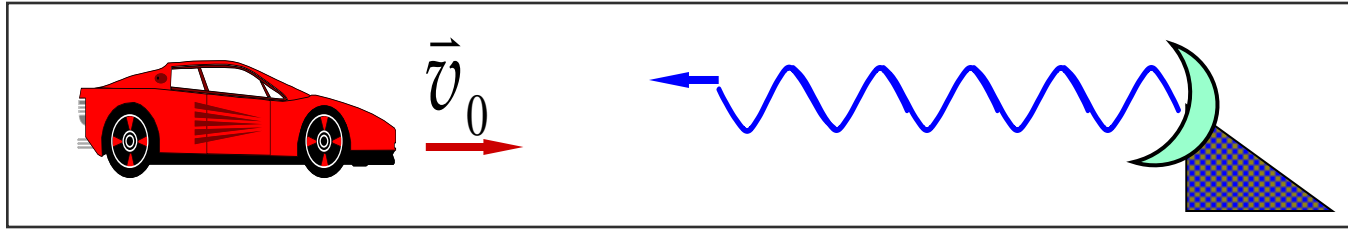
电磁波同样存在这种现象。玻璃中光的速度仅为真空中光速的 $\frac{2}{3}$ ，高能粒子以接近光速的速度穿过这种介质时，就会产生辐射——切伦科夫（Cerenkov）辐射。

汽艇激起的V-形波

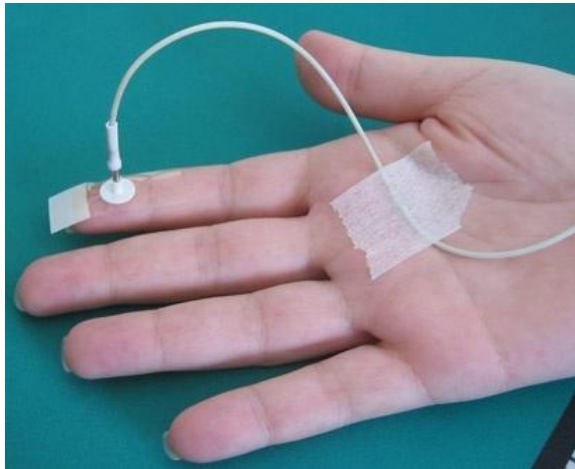


三、多普勒效应的应用

1. 测速、定位

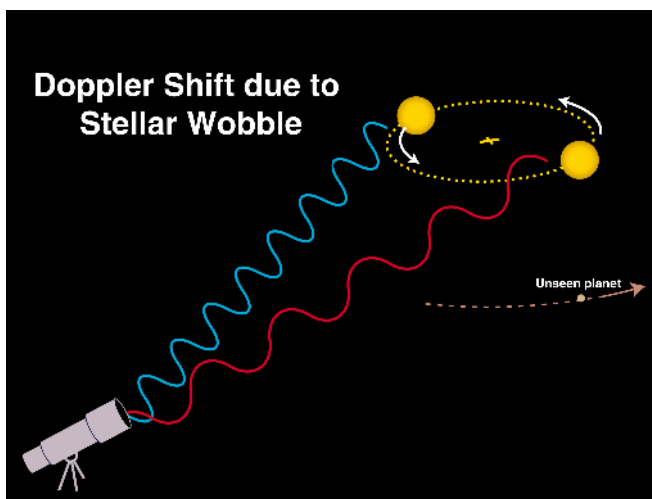
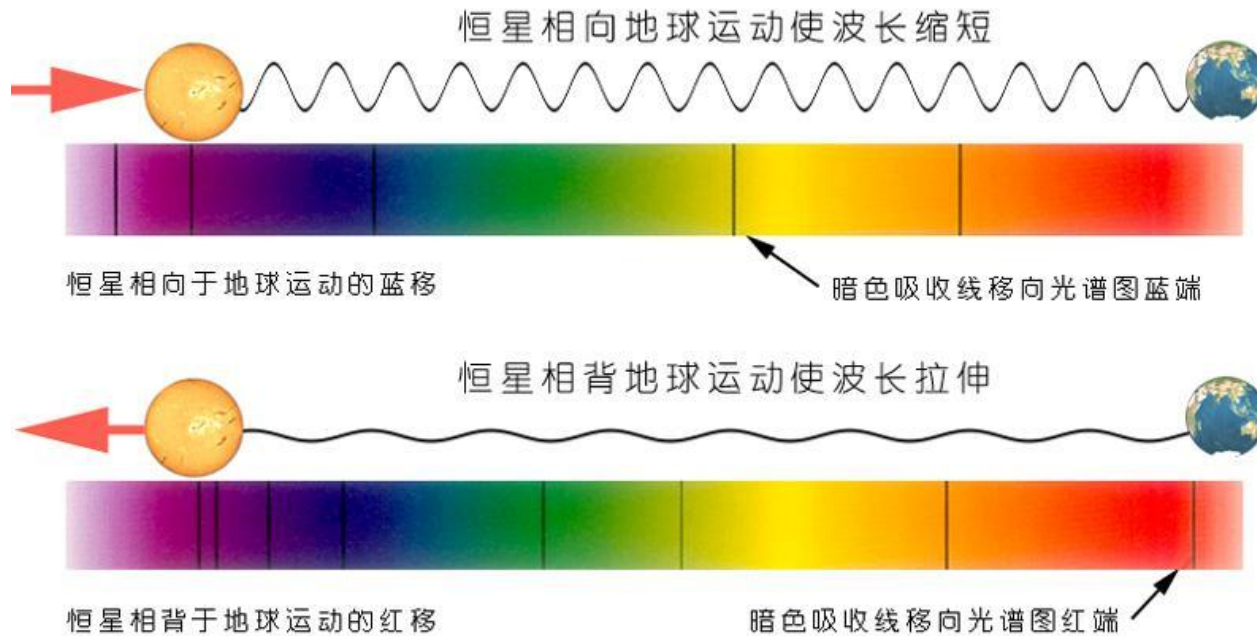


交通上测量车速



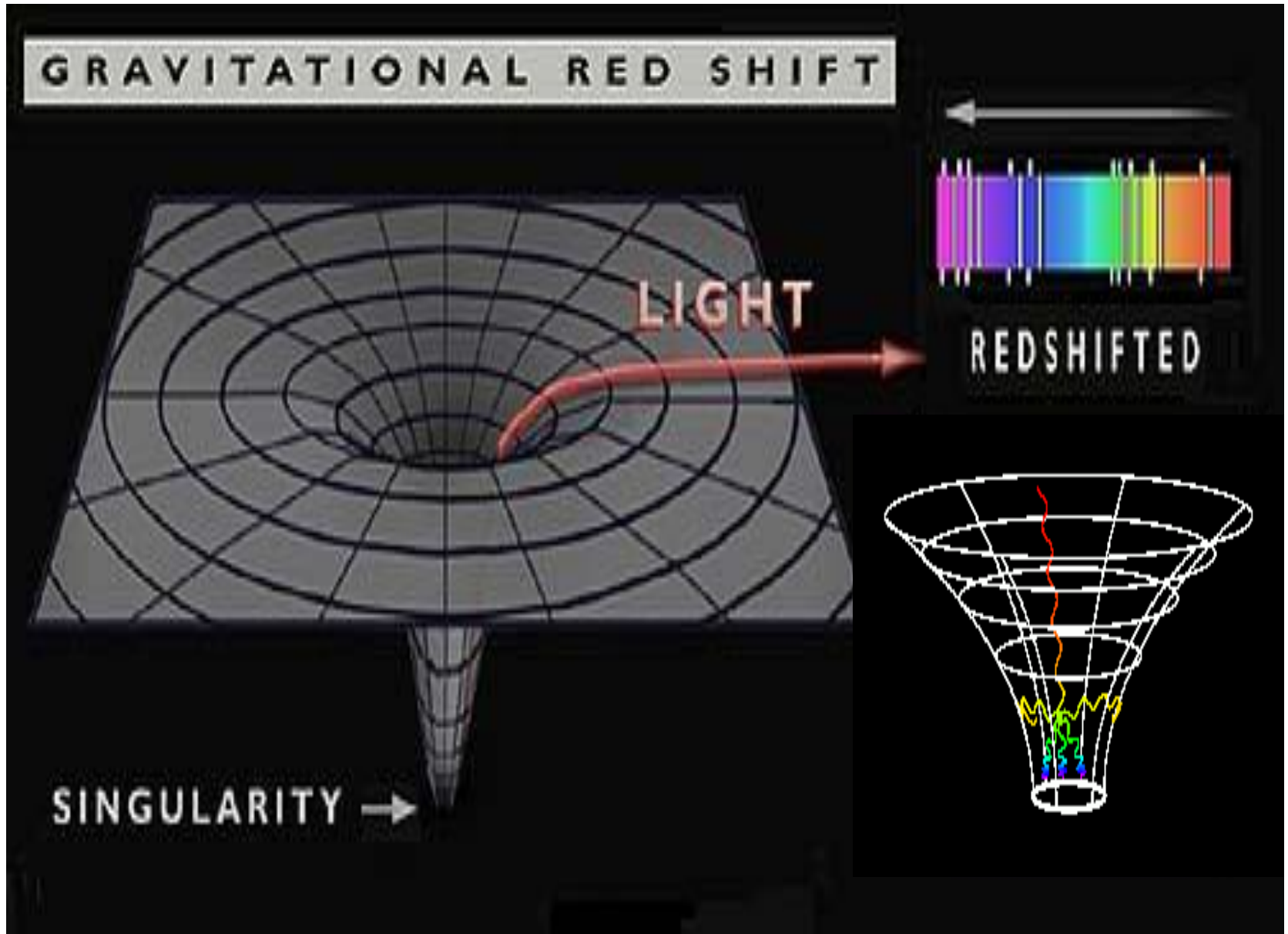
激光多普勒血流监测系统

2. 多普勒红移



观测太阳系外行星

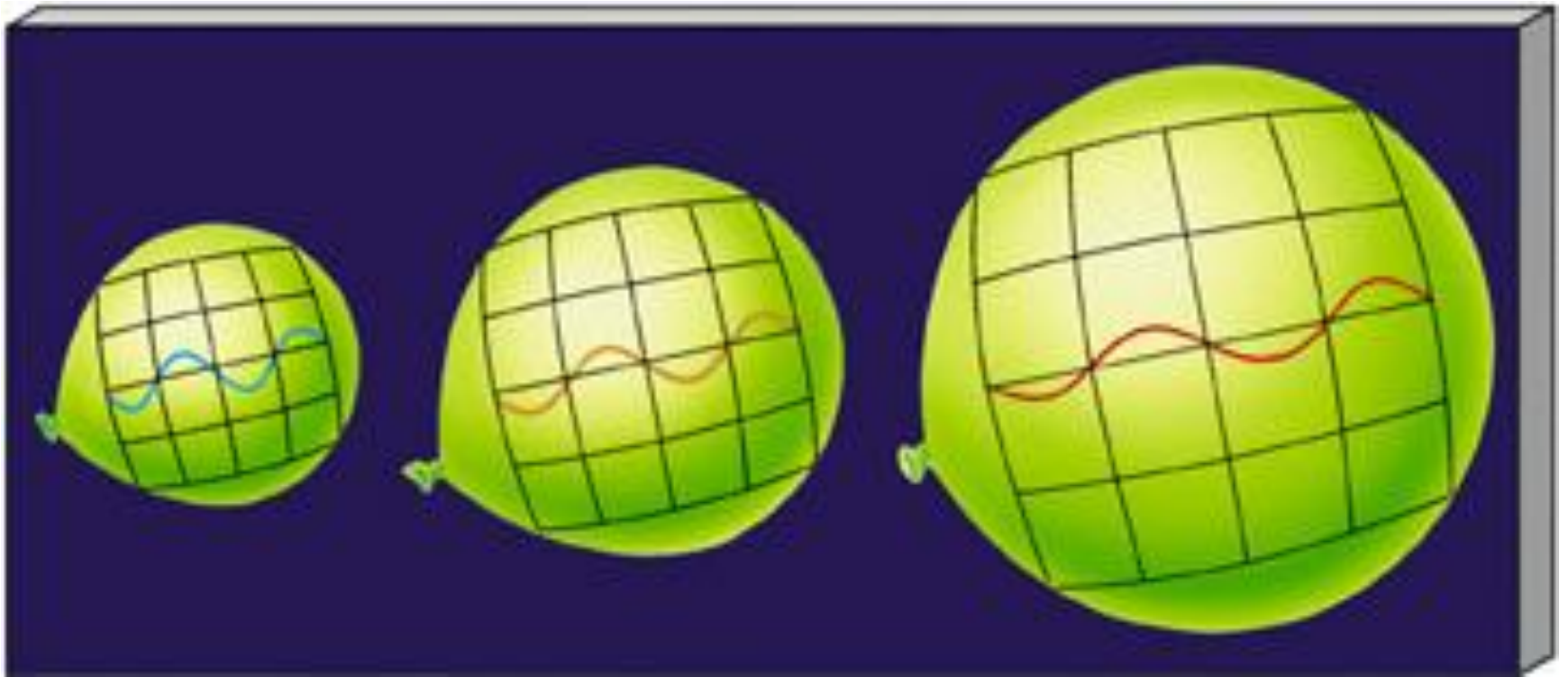
3. 引力红移



Tested by : white dwarf 1924, solar 1960s, earthbound 1960, and neutron stars

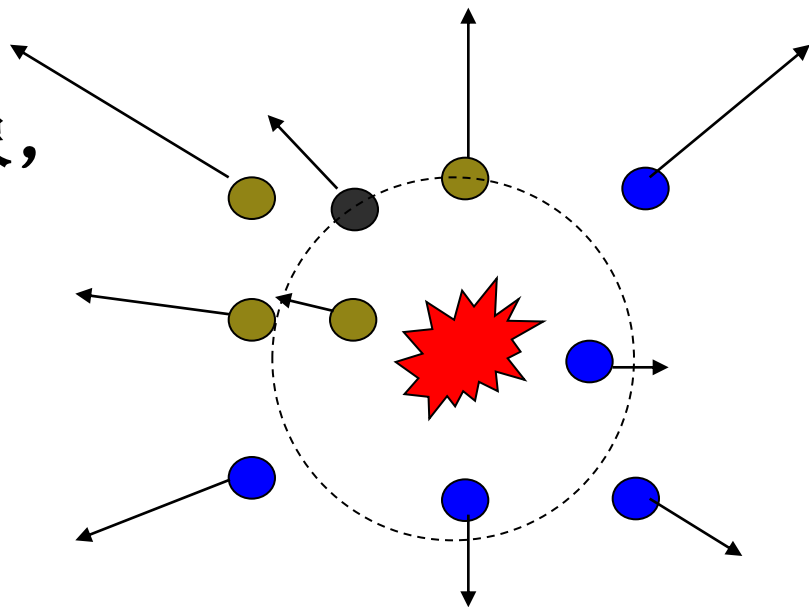
4. 宇宙学红移

宇宙膨胀导致的红移



哈勃发现星系光谱都有红移现象，
即星系正在远离我们。

----宇宙在膨胀

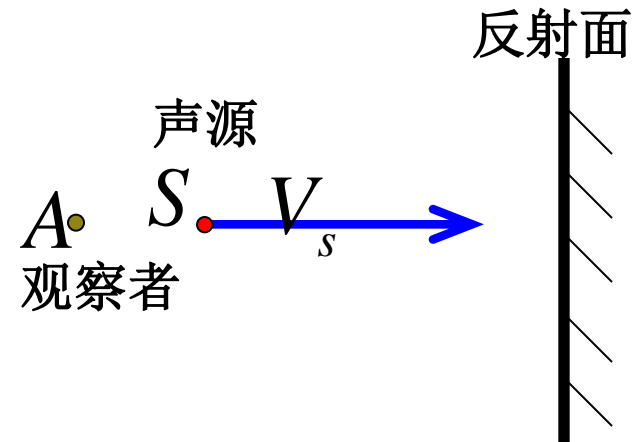


越远的星系退行速度越高， $V=H \times D$
(其中H是哈勃常数) -----哈勃定律。

例： 一声源振动的频率为2040赫兹，以速度 V_s 向一反射面接近，观察者在A处测得拍音的频率 $\Delta \nu = 3$ 赫兹，如声速为340米/秒，

求：波源移动的速度？如果波源不动，反射面以速度 $V=0.20$ 米/秒向观察者接近，测得拍频 $\Delta \nu = 4$ 赫兹，求波源的频率？

解：1. 观察者接收到的频率有：直接从远离它的波源来的声音和经反射面反射后的频率，两者形成拍。



反射面接收到的是向它接近的波源的频率；

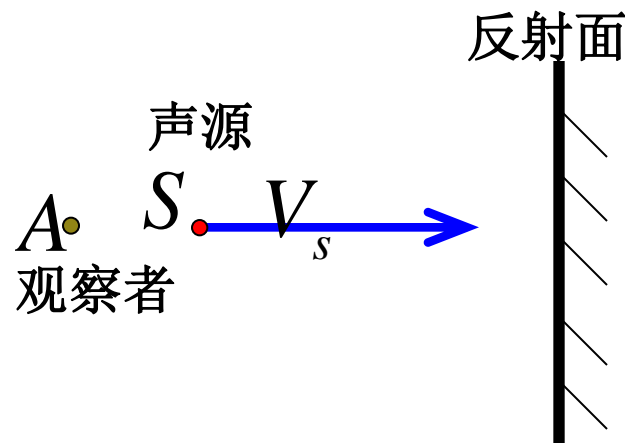
反射面不动所以反射面入射频率等于反射频率。

$$\Delta \nu = \frac{u \nu_s}{u - V_s} - \frac{u \nu_s}{u + V_s}$$

拍频

由反射面

来自波源



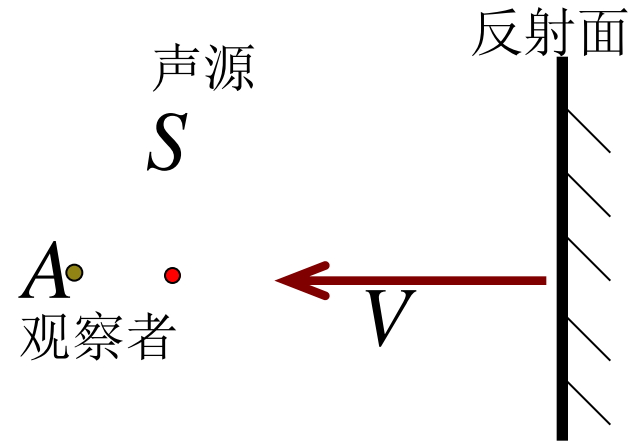
解出：

$$\Delta \nu V_s^2 + 2u \nu_s V_s - \Delta \nu u^2 = 0$$

$$V_s = \frac{-2u \nu_s \pm \sqrt{4u^2 \nu_s^2 + 4u^2 \Delta \nu^2}}{2\Delta \nu}$$

$$= 0.25 \text{ m/s}$$

2. 若波源不动，反射面运动，观察者接收到的频率有：直接从静止的波源来的声音和经相向运动的反射面反射后的频率，两者形成拍。



反射面是“观察者”，接收到的频率：

$$\longrightarrow \nu_{\text{反射面}} = \frac{u + V}{u} \nu_s$$

又是运动波源， A 观察者接收到的反射频率：

$$\longrightarrow \nu_R = \frac{u}{u - V} \nu_{\text{反射面}}$$

波源不动
反射面运动

拍频

$$\Delta \nu = \frac{u+V}{u-V} \nu_s - \nu_s = \frac{2V\nu_s}{u-V}$$

来自反射面

来自波源

由此可解出波源的频率。

$$\nu_s = \frac{u-V}{2V} \Delta \nu = \frac{(340-0.2) \times 4}{2 \times 0.2} = 3398 \text{ Hz}$$

