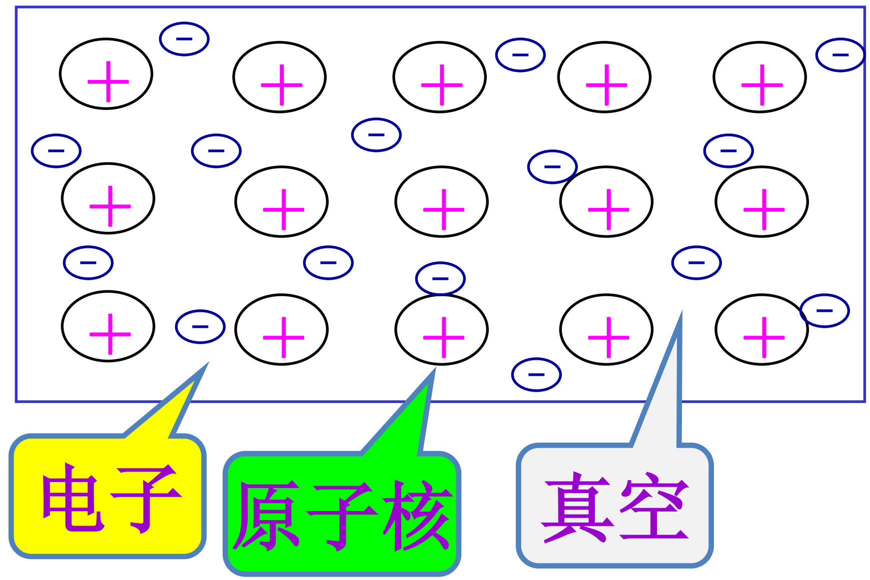
第 12 章 导体电学

第11章：真空中的静止电荷产生的电场

第12、13章：有宏观物质存在时静止电荷产生的电场

从微观角度看，宏观物质由真空中的原子组成的，即由真空中的电子和原子核组成的。



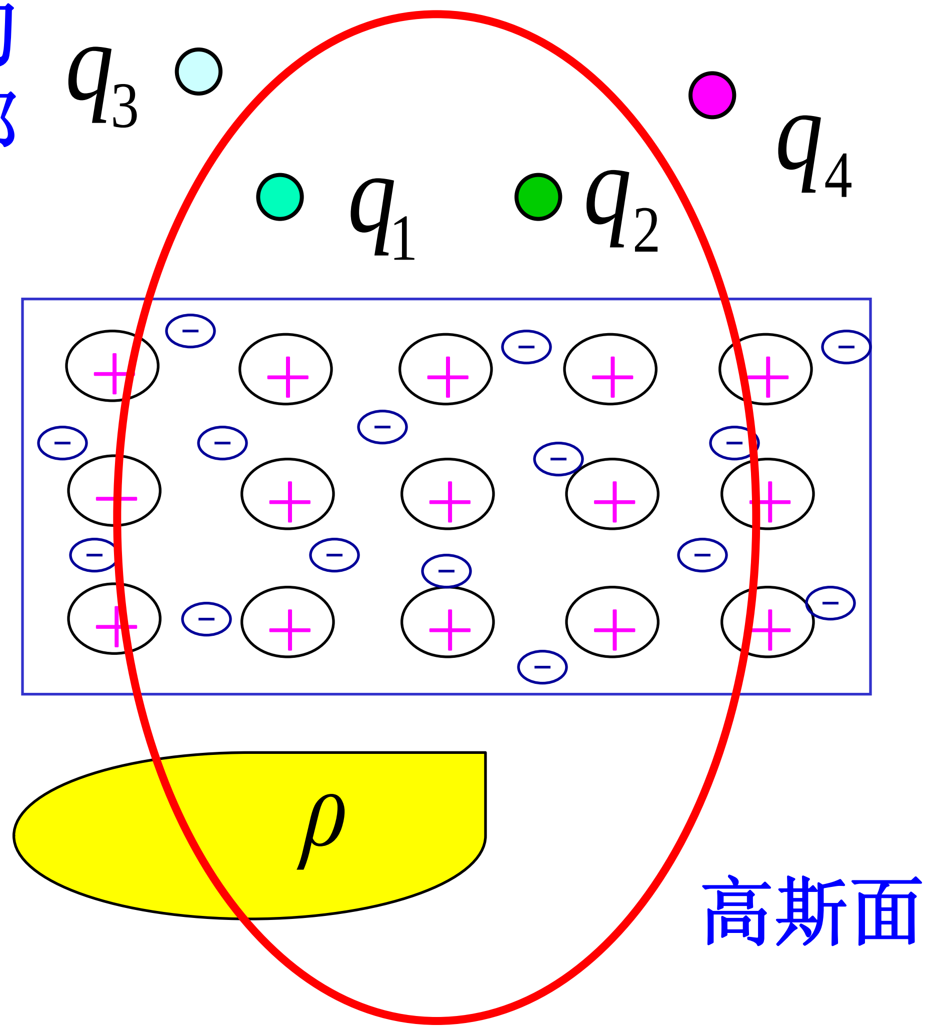
从微观角度看，所有电荷都是真空中的电子和原子核，高斯定理仍然成立。

$$\oiint_S \vec{E}\cdot d\vec{S} = \frac{1}{\varepsilon_0}\sum_i q_i$$

从微观角度看，所有电荷都是真空中的电子和原子核，高斯定理仍然成立。

$$\oiint_S \vec{E}\cdot d\vec{S}=\frac{1}{\varepsilon_0}\sum_i q_i$$

$\sum_i q_i$ ：高斯面包围的一切电荷（包括物质内部电子和原子核）。

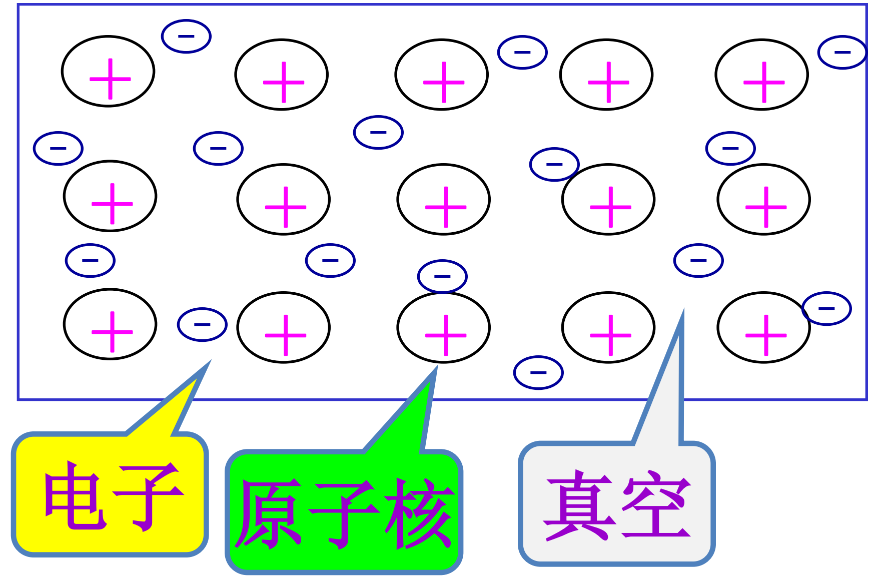


$\vec{E}$ ：所有电荷产生的电场。

静电场环路定理仍然成立 $\oint_L \vec{E}\cdot d\vec{l}=0$

可以引进电势能与电势。

$$\oint\!\!\oint_S \vec{E}\cdot d\vec{S}=\frac{1}{\varepsilon_0}\sum_i q_i$$



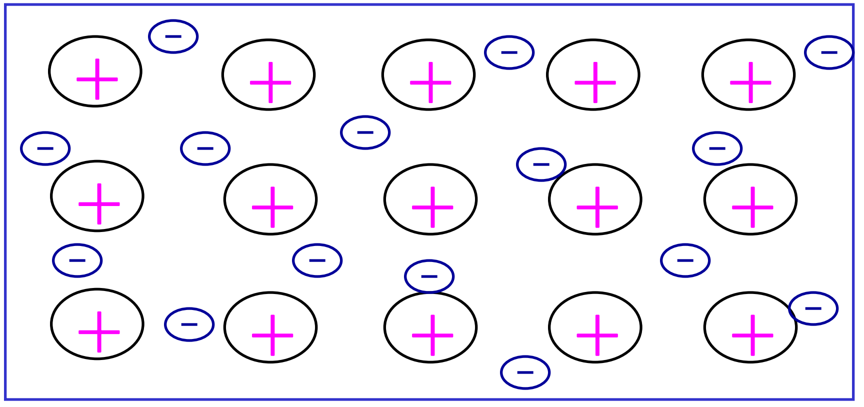
从宏观尺度上看，物质存在时的电场（宏观电场）=微观电场（真空中的电子和原子核产生的电场）的平均值

$$<\vec{E}>=\frac{1}{V}\int_V \vec{E}dv$$

第 12 章 导体电学

12.1 导体的静电平衡性质

一、导体的带电和静电感应

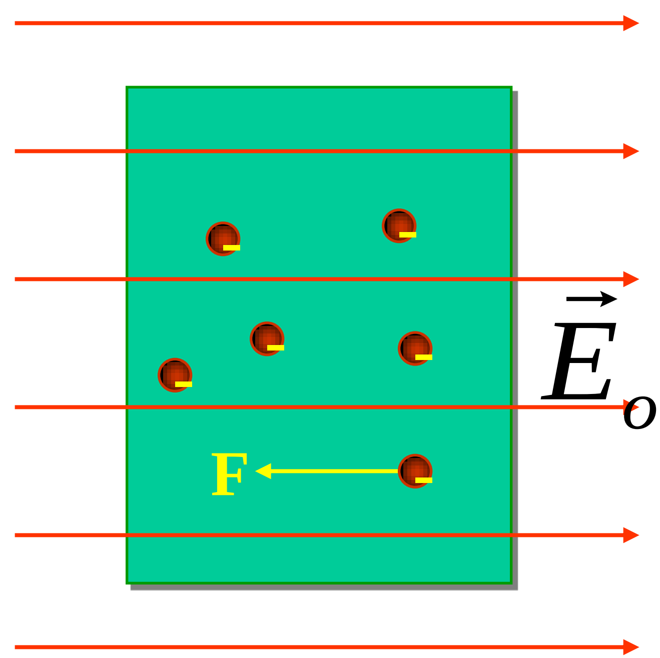


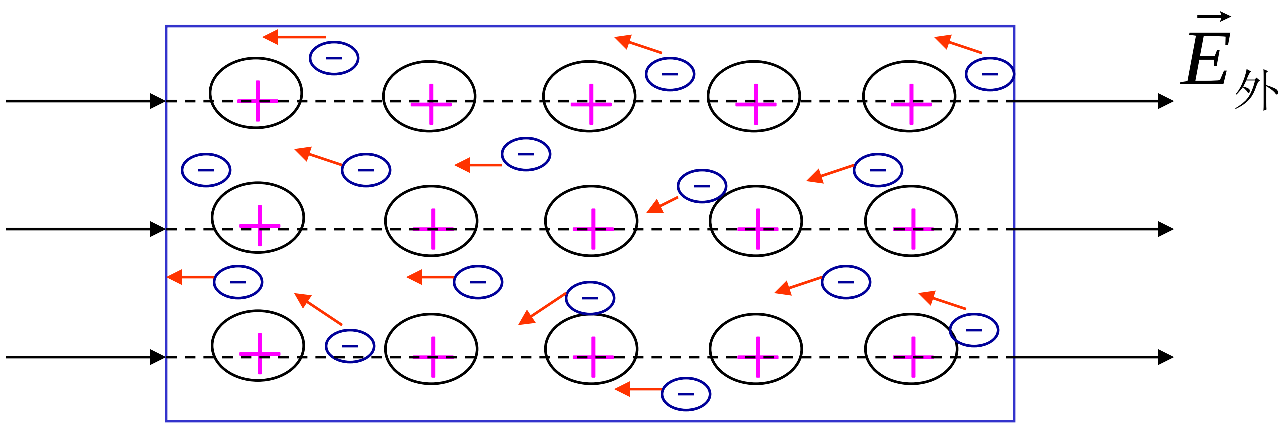
从微观上看：带正点离子+自由电子

自由电子在导体内部做永不停息的无规则热运动

未带电或无外场时导体的任何部分呈电中性

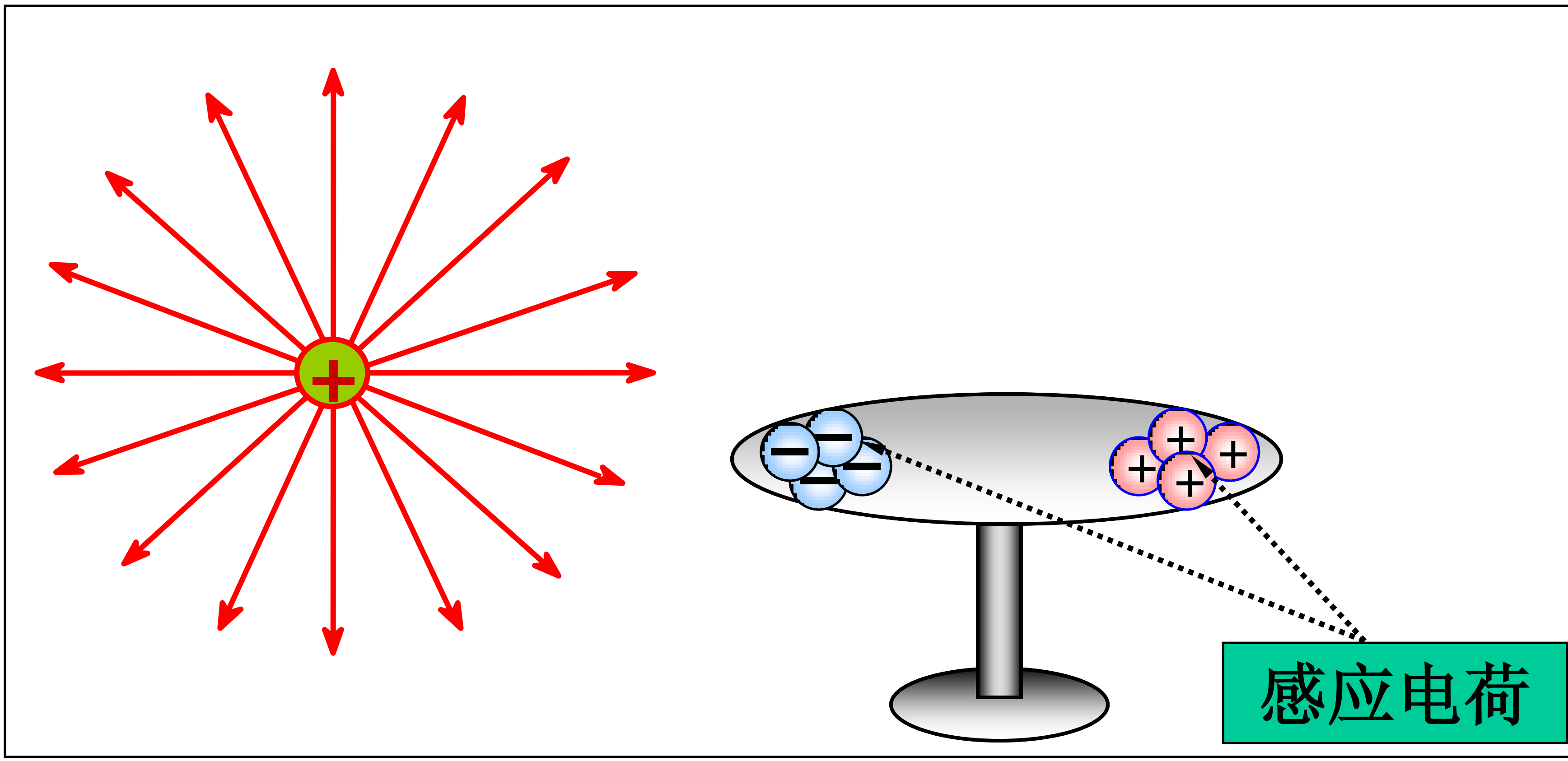
• 有外电场作用: 电子沿外电场反向作定向运动





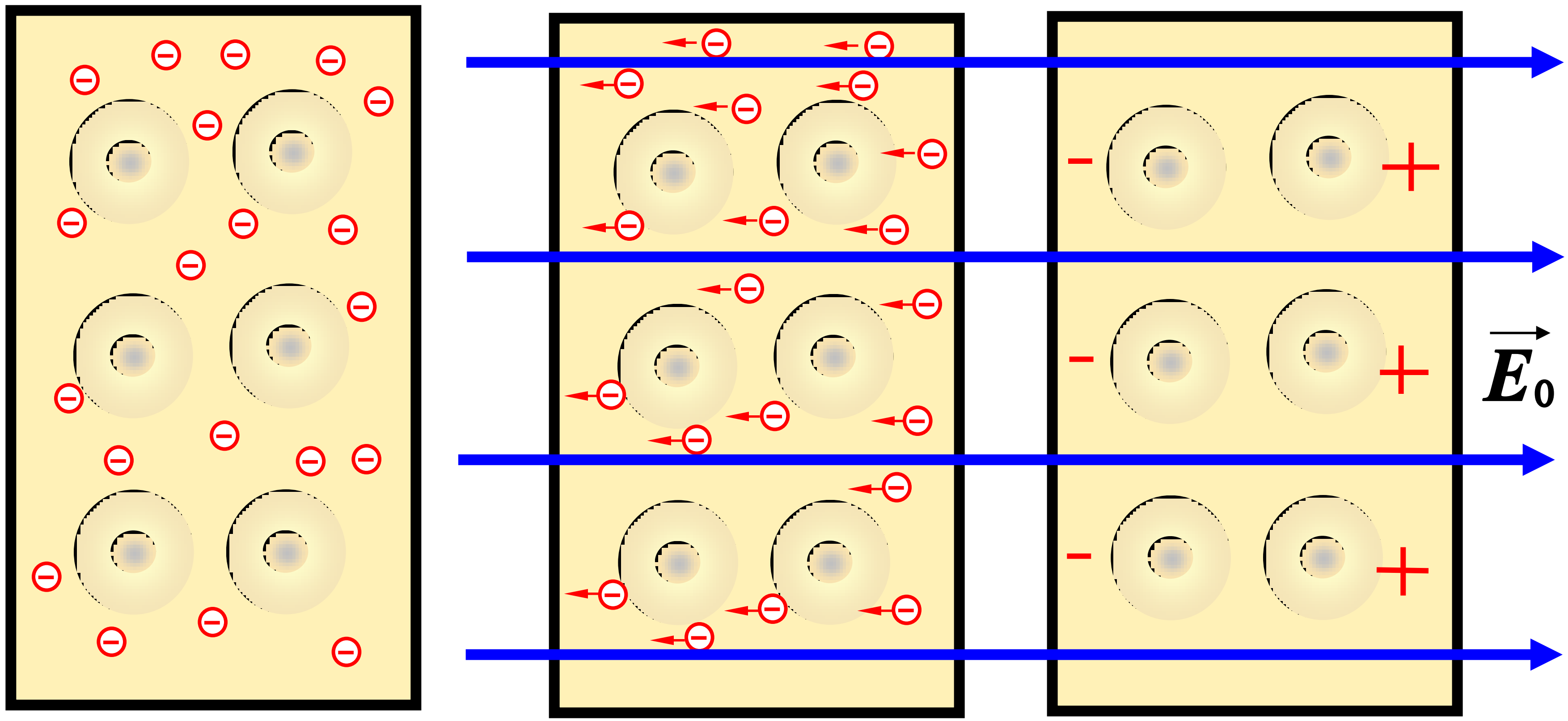
静电感应现象:

在外电场作用下，导体内自由电子有宏观移动，导体表面出现宏观电荷分布的现象。



导体的静电平衡

静电平衡：导体内部和表面没有电荷的宏观定向运动。



导体内有大量自由电子

它们不停地作热运动

无外电场时自由电子分布均匀

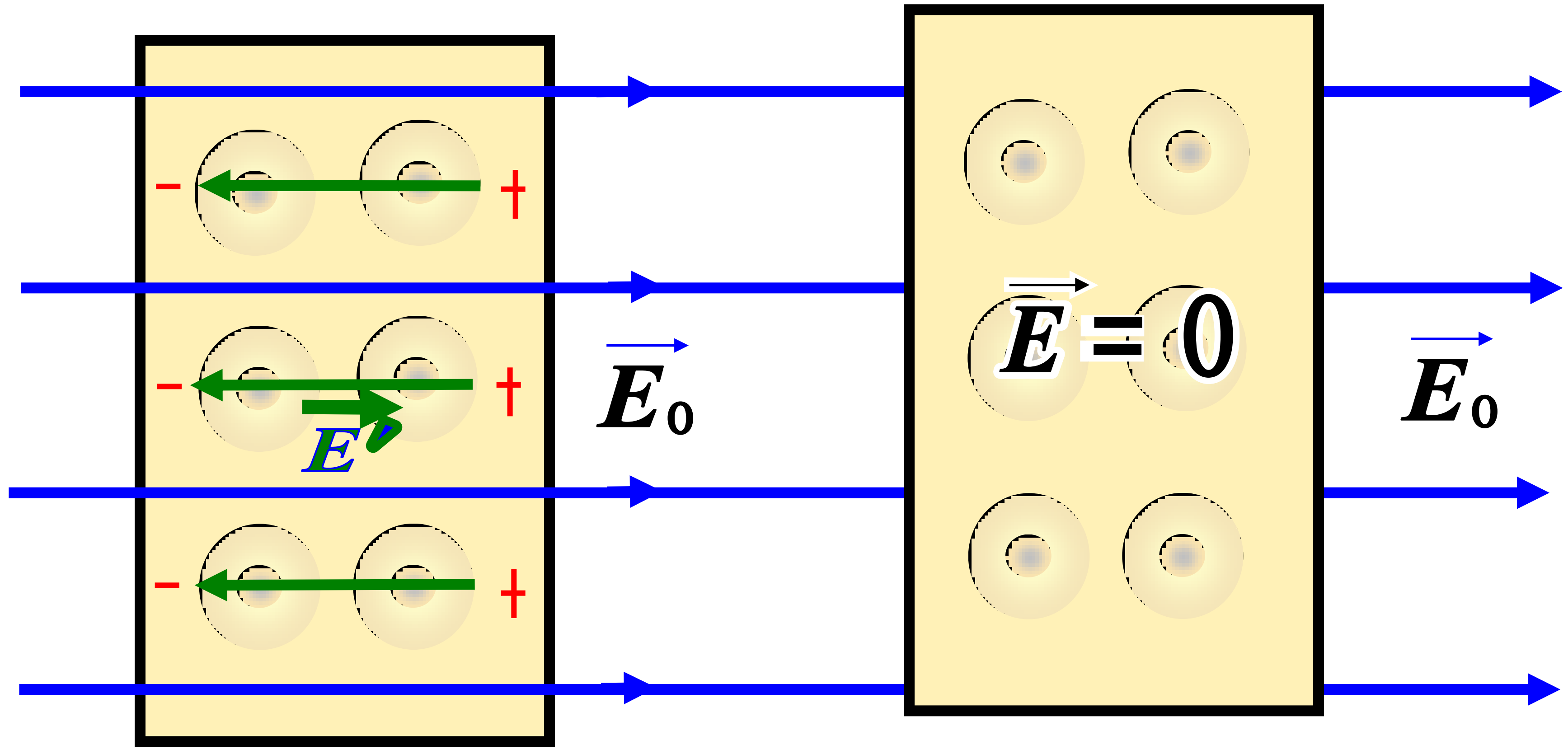
导体整体不显电性

若施以外电场 $\vec{E}_0$

自由电子定向漂移

电荷重新分布
导体两端出现
等量异号电荷

称为 **静电感应**



感应电荷产生一个

附加电场 $\vec{E'}$

导体内合电场为

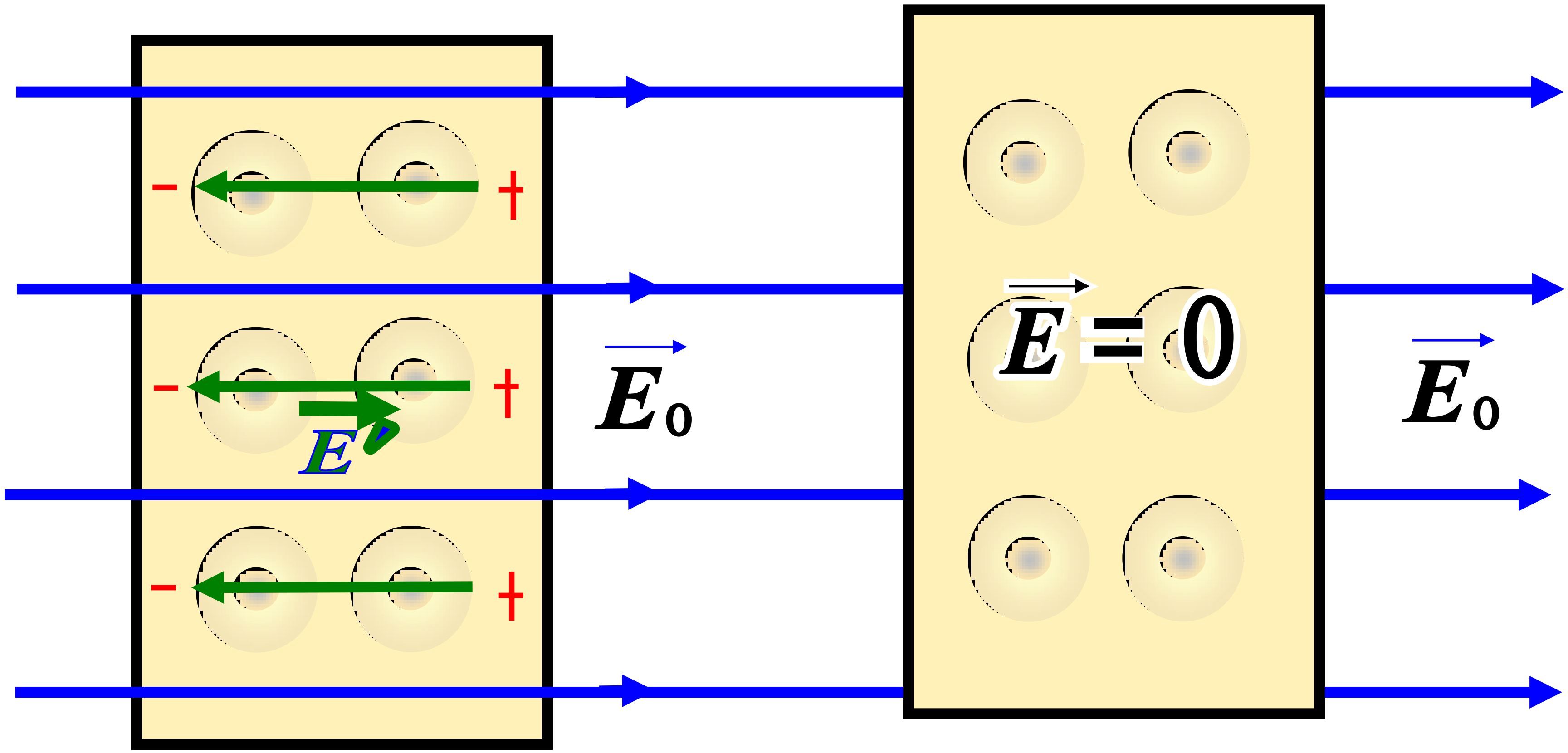
$$\vec{E} = \vec{E_0} + \vec{E'}$$

自由电子不断漂移 附加电场不断增大

当 $\vec{E'} = -\vec{E_0}$ 时 自由电子停止定向漂移

导体内合电场 $\vec{E} = \vec{E_0} + \vec{E'} = 0$

导体达到 **静电平衡**



静电平衡时，感应电荷产生的附加电场与外加电场在导体内部相抵消。

演示

二、导体静电平衡时的性质

1. 导体内部，场强处处为零。

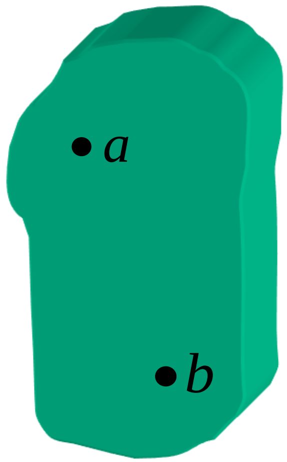
$$\vec{E} = \vec{E}_0 + \vec{E}' = 0$$

如导体内部电场强度不为零，自由电子就要受到电场力的作用而发生宏观运动！

2. 导体内各处电势相同,导体为等势体导体表面为等势面。

在导体上任意两点间的电势差为：

$$V_b - V_a = -\int_{(a)}^{(b)} \vec{E} \cdot \mathrm{d}\vec{l} = 0$$



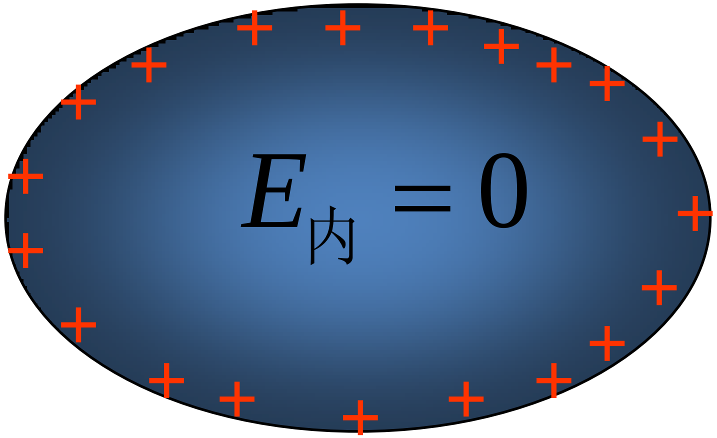
$$\Rightarrow \quad V_a = V_b$$

三、静电平衡时导体上电荷的分布(实心导体)

1. 电荷只分布在导体表面上，导体内部处处不带电

在导体内任取一高斯面 *S*，由高斯定理：

$$\oiint_S \vec{E}\cdot \mathrm{d}\vec{S} = 0$$



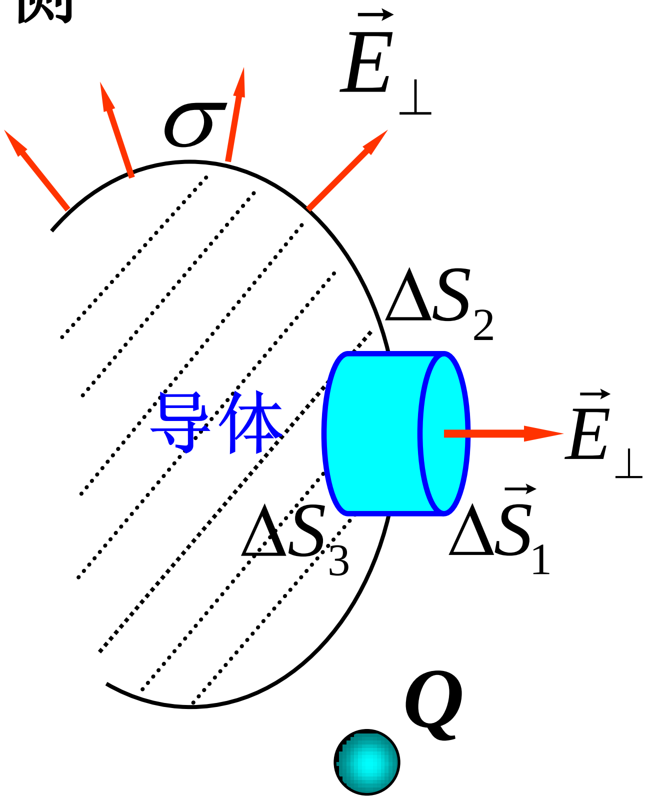
$$\Longrightarrow \sum_{S内} q = \int_V \rho \mathrm{d}V = 0$$

$\because$ 高斯面为任意 $\Longrightarrow$ $\rho = 0$（导体内部）

导体内部没有净电荷，电荷只能分布在导体表面。

2. 导体表面电荷与导体表面外侧电场的关系

设导体表面上的电荷面密度和表面外侧电场强度如图所示



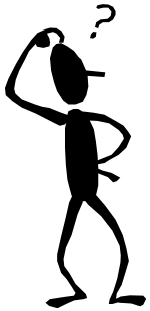
对如图所示高斯面，应用高斯定理：

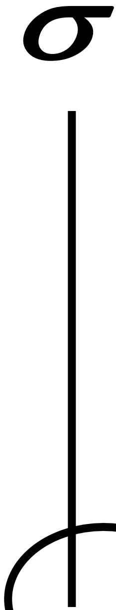
$$\oiint_S \vec{E}\cdot \mathrm{d}\vec{S} = \iint_{\Delta S_1} \vec{E}_{\perp}\cdot \mathrm{d}\vec{S} + \iint_{\Delta S_2+\Delta S_3} \vec{E}\cdot \mathrm{d}\vec{S}$$

$$= E_{\perp}\Delta S \equiv \frac{\sigma \Delta S}{\varepsilon_0}$$

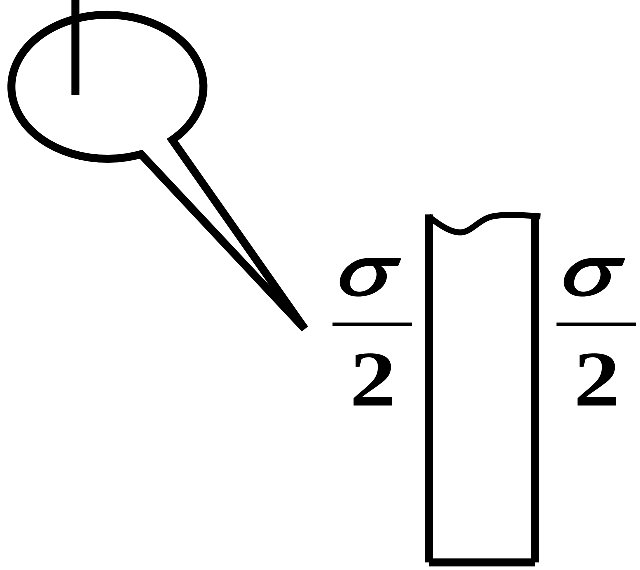
$$\vec{E}_{\perp} = \frac{\sigma}{\varepsilon_0}\vec{e}_{\mathrm{n}}$$

导体表面附近的场强与该表面的电荷面密度成正比





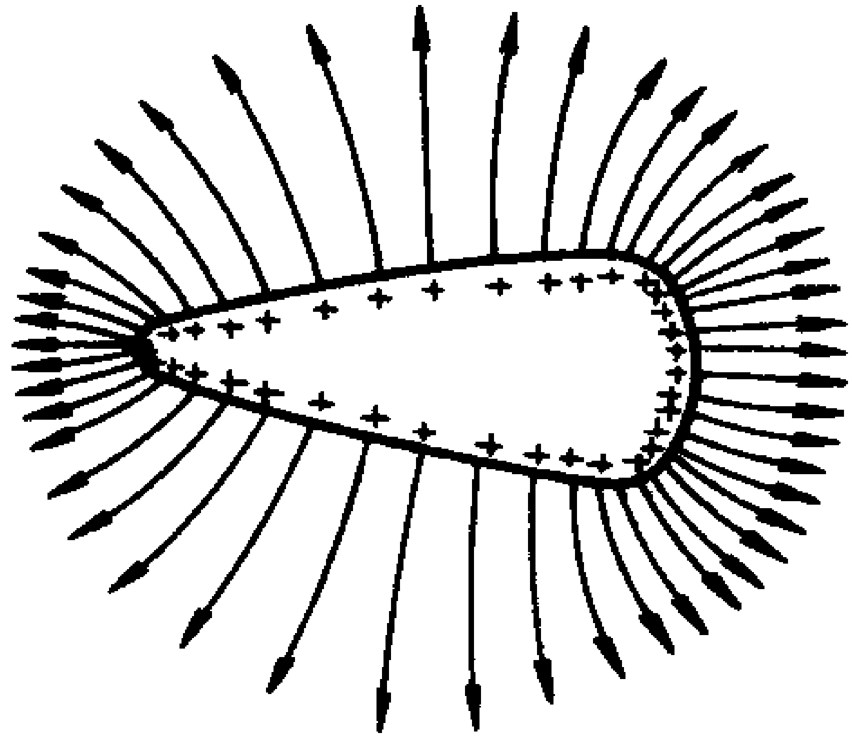
$$\vec{E}_{\perp} = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\vec{e}_{\mathrm{n}}$$



$$\vec{E}_{\perp} = \frac{\sigma'}{\varepsilon_0}\vec{e}_{\mathrm{n}} = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\vec{e}_{\mathrm{n}}$$

3. 静电平衡下的孤立导体

实验研究导体电荷的定性分布：其表面处面电荷密度σ与该表面曲率有关



（1）在导体表面曲率为正值且较大的地方电荷面密度较大，场强较大。

（2）在曲率较小部分电荷面密度较小，场强较小。

当表面凹进时，曲率为负值，电荷面密度更小。

演示

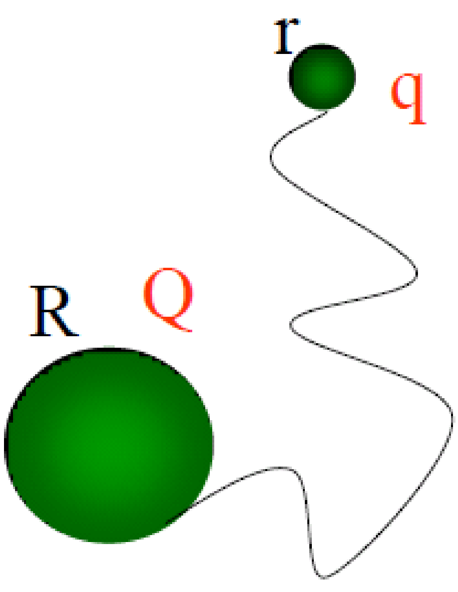
半径分别为R和r ($R>r$)导体球放置在相距无限远的两个地方，中间用细导线连接。导体球分别带电Q和q,求两球表面电荷面密度与曲率的关系。

[解]　两个导体所组成的整体可看成是一个孤立导体系,U相等，每个球可近似的看作为孤立导体，球表面电荷分布均匀，则两球的电势为：

$$U_R = U_r = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q}{R} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{r},$$

$$\frac{Q}{q} = \frac{R}{r}, \qquad \frac{4\pi R^2\sigma_R}{4\pi r^2\sigma_r} = \frac{R}{r},$$

$$\frac{\sigma_R}{\sigma_r} = \frac{r}{R}.$$ 电荷面密度与半径成反比



对于具有尖端的带电体，因为尖端的曲率很大，分布的面电荷密度也大，所以它周围的电场很强，当场强超过空气击穿场强时，就会发生空气被电离的放电现象，称为尖端放电。

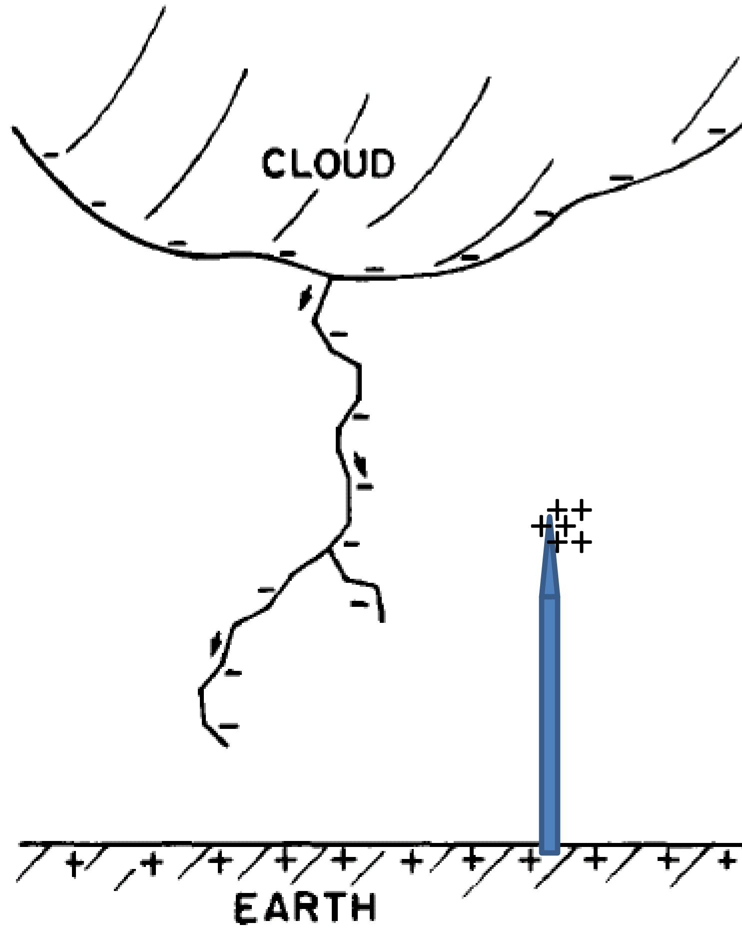
$$R\downarrow \Rightarrow \sigma\uparrow \Rightarrow E\uparrow$$

尖端放电

孤立导体

演示

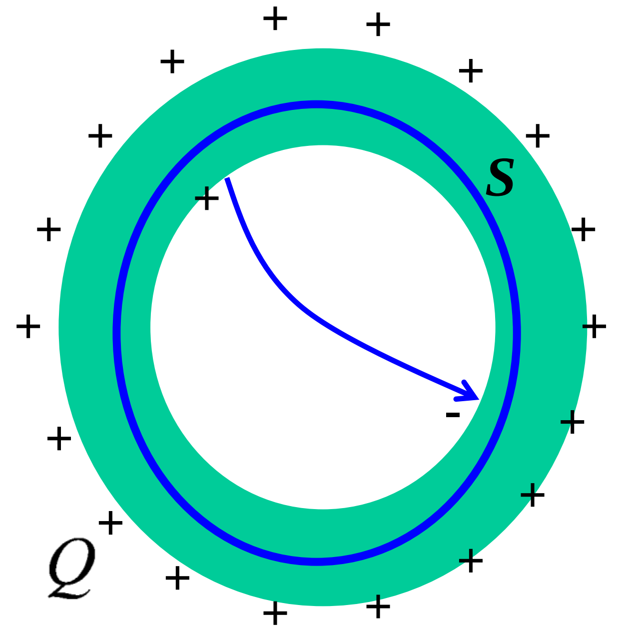
避雷针的原理



将地面电荷集中到尖端,并放出,与空中的相反电荷发生中和,从而避免雷电.

四、静电平衡时导体上电荷的分布

（腔中无电荷的空腔导体）



在导体内任取一高斯面 S

$$\oiint_S \vec{E}\cdot \mathrm{d}\vec{S} = 0$$

有一部分是正电荷，另一部分是等量的负电荷

这种情况也是不可能出现的

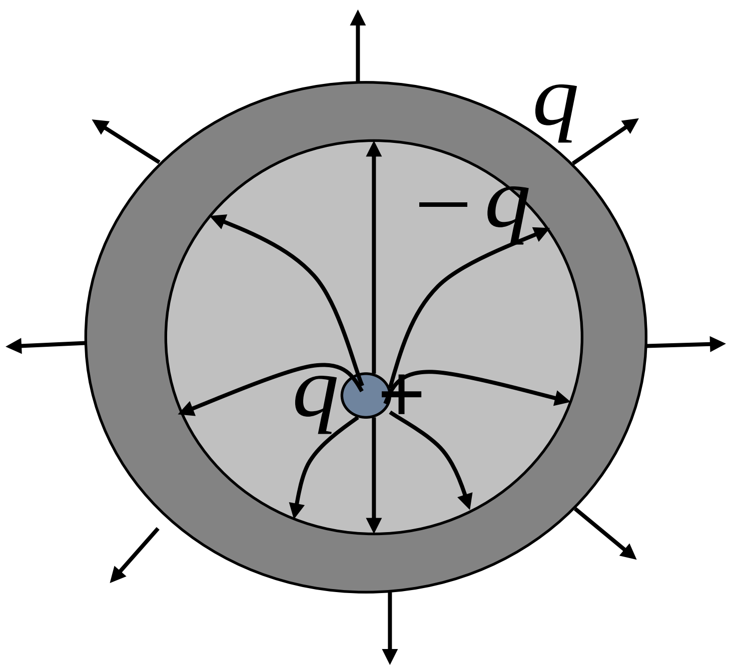
$$Q_{内表面} = 0$$

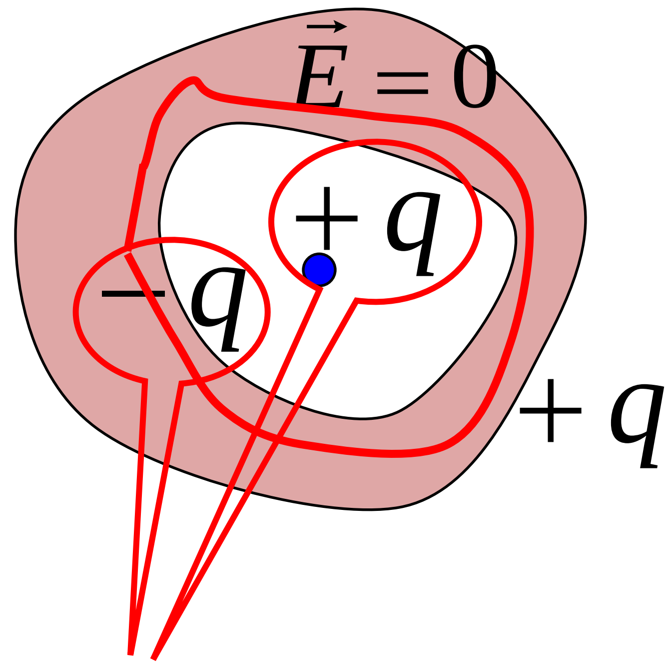
五、静电平衡时导体上电荷的分布

（腔中有电荷的空腔导体）

$$\oiint_S \vec{E}\cdot \mathrm{d}\vec{S} = \frac{q+x}{\varepsilon_0}$$

$$\oiint_S \vec{E}\cdot \mathrm{d}\vec{S} = 0, \therefore q+x=0, x=-q$$





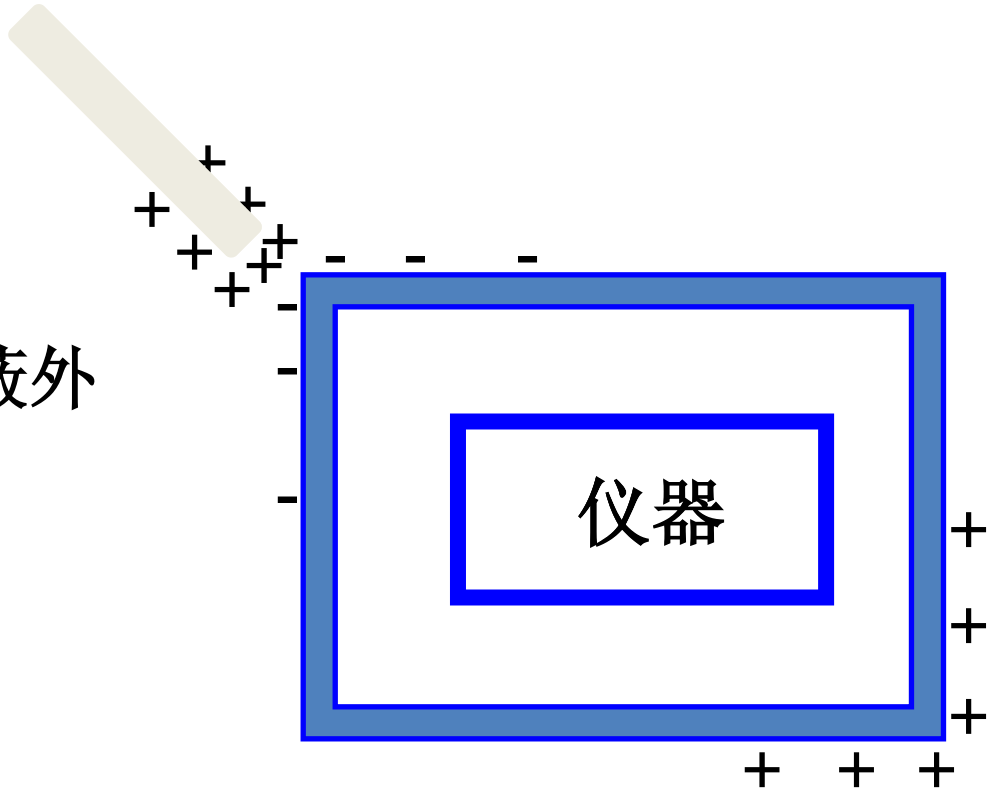
在腔外 +*q*, -*q*产生的$\vec{E}$抵消

证明：静电场唯一性定理

六、静电屏蔽的装置

根据导体腔的电学性质；可以利用空腔导体对腔内、外进行静电隔离。

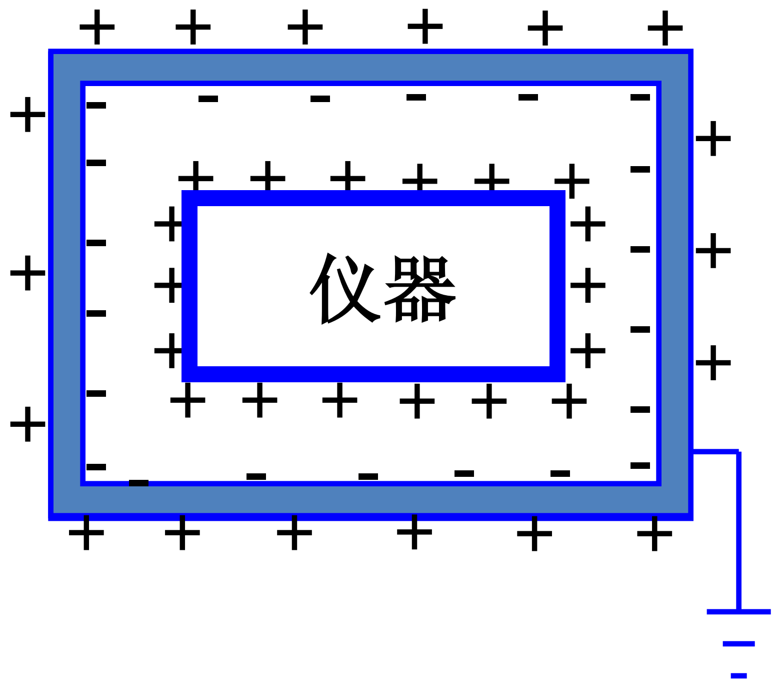
1. 空腔导体起到屏蔽外电场的作用。



根据导体腔的电学性质：可以利用空腔导体对腔内、外进行静电隔离。

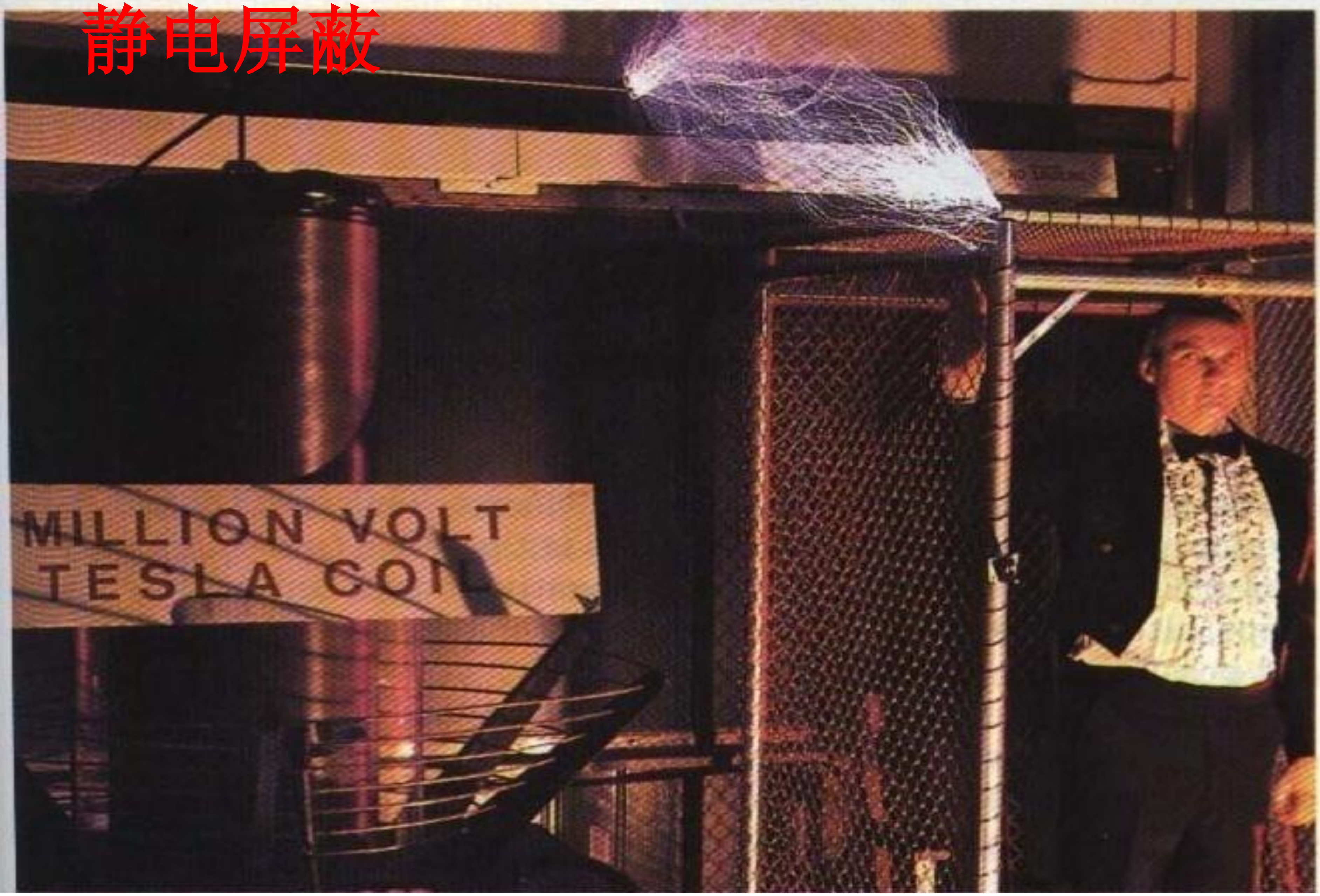
2. 接地的空腔导体

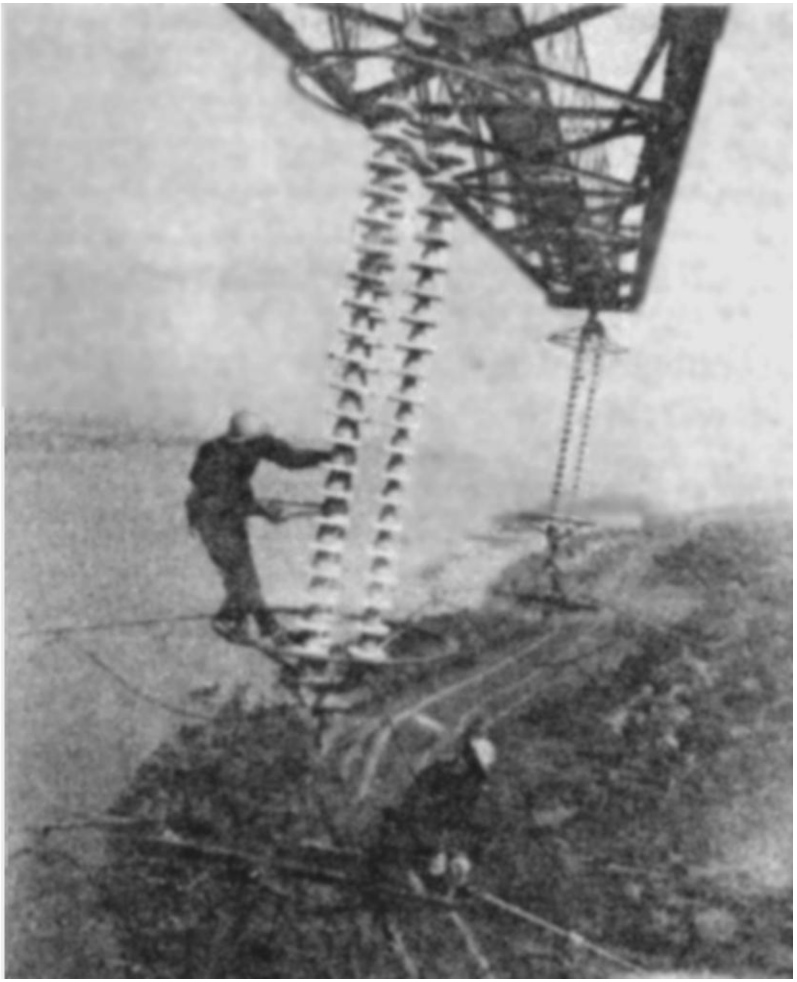
可以屏蔽内、外电场的影响。



演示

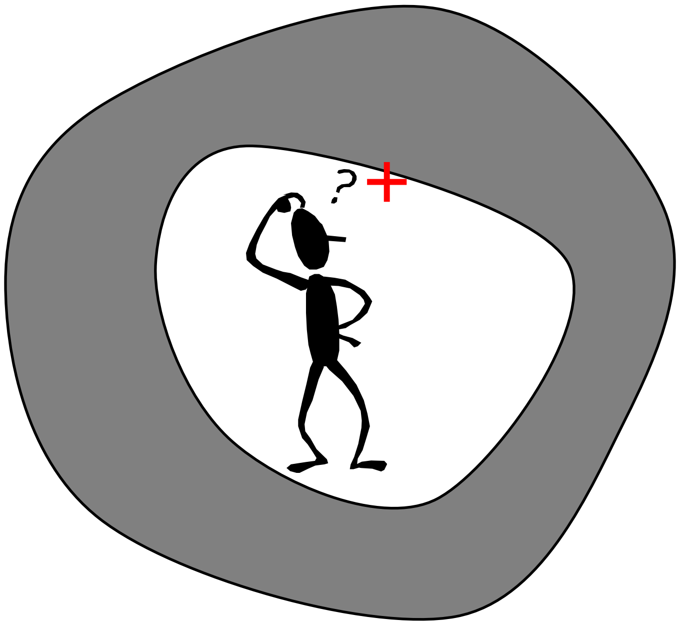
静电屏蔽





高压带电作业

穿上细铜线（导电纤维）编织成导电性能良好的屏蔽服（均压服），相当于把人体置于空腔导体内部。



$$F \propto \frac{1}{r^{2+\delta}}$$

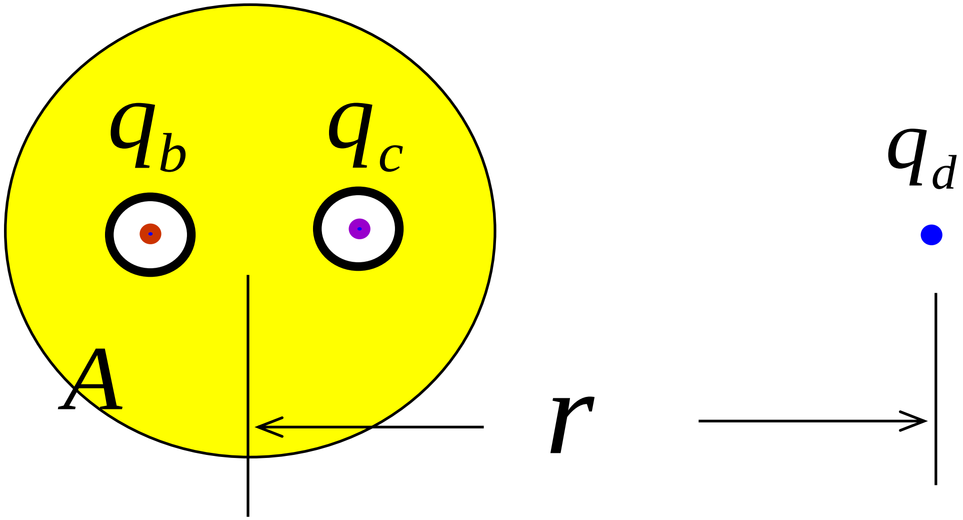
卡文迪许 $\delta < 0.02$

1971年 $\delta < 2.7 \times 10^{-16}$

光子静质量 $m_0 < 10^{-51}\,\mathrm{kg}$

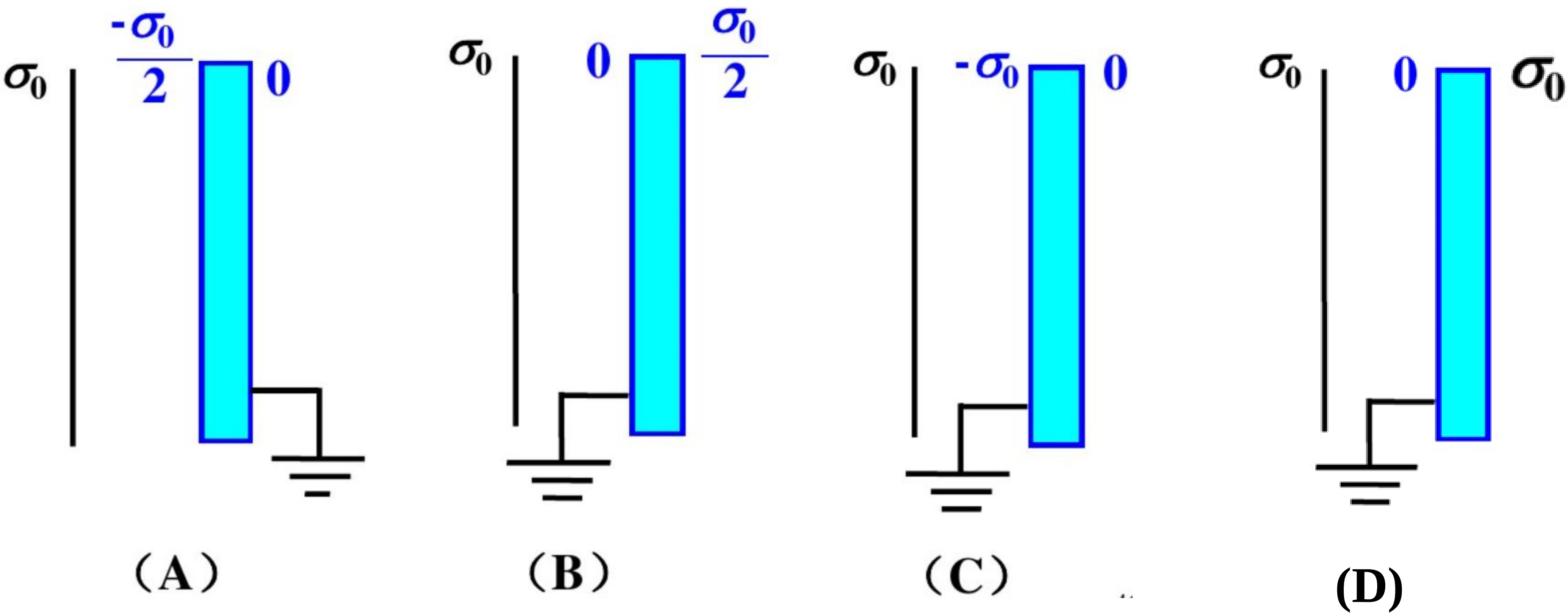
【例】导体球A含有两个球形空腔，在腔中心分别有q_b、q_c，导体球本身不带电。在距A中心r远处有另一电荷q_d。问q_b、q_c各受多大力？

腔内的电场仅由腔内q和腔内表面的感应电荷$(-q)$共同决定，与腔内电荷位置、腔体的几何结构有关。



解：两空腔内的电场都不受外界影响；内表面感应电荷均匀分布，故它们在腔内产生的场强处处为零，q_b、q_c受力为零。

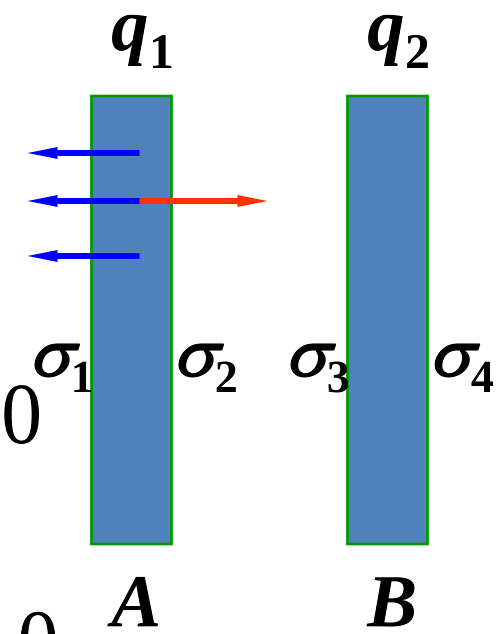
思考 导体板接地，下面结果哪个正确？（孤立系统）



[例题] 两块近距离放置的导体平板，面积均为S，分别带电q_1和q_2。求平板上的电荷分布。

解：电荷守恒：

$$\sigma_1 S+\sigma_2 S=q_1$$
$$\sigma_3 S+\sigma_4 S=q_2$$



由静电平衡条件，导体板内没有电场

$$E_A=\frac{\sigma_1}{2\varepsilon_o}-\frac{\sigma_2}{2\varepsilon_o}-\frac{\sigma_3}{2\varepsilon_o}-\frac{\sigma_4}{2\varepsilon_o}=0$$

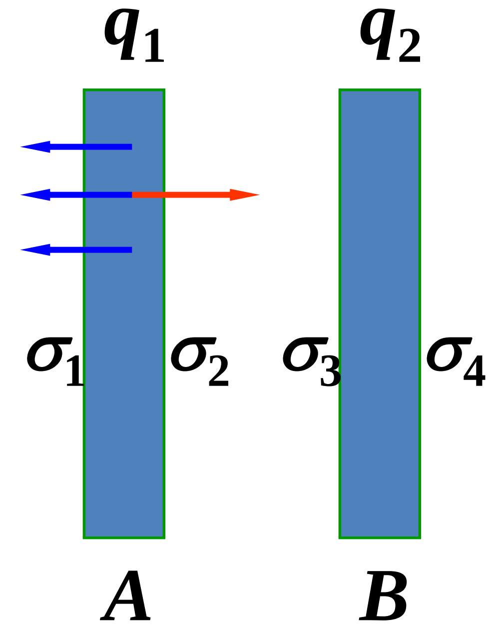
$$E_B=\frac{\sigma_1}{2\varepsilon_o}+\frac{\sigma_2}{2\varepsilon_o}+\frac{\sigma_3}{2\varepsilon_o}-\frac{\sigma_4}{2\varepsilon_o}=0$$

$$\begin{cases}\sigma_1=\sigma_4=\dfrac{q_1+q_2}{2S}\\[2ex] \sigma_2=-\sigma_3=\dfrac{q_1-q_2}{2S}\end{cases}$$

特例： 当两平板带等量的相反电荷时，

$$q_1 = -q_2 \equiv Q$$

$$\begin{cases} \sigma_1 = \sigma_4 = 0 \\ \sigma_2 = -\sigma_3 = \dfrac{Q}{S} = \sigma \end{cases}$$



电荷只分布在两个平板的内表面！

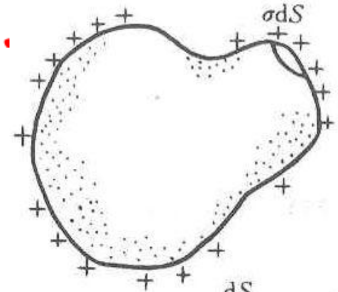
由此可知：两平板外侧电场强度为零，内侧

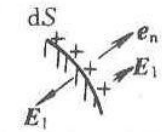
$$E = \frac{\sigma}{\varepsilon_0}$$

——这就是平板电容器。

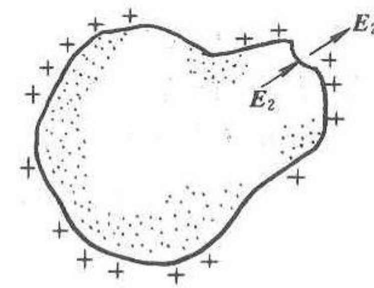
$$\begin{cases} \sigma_1 = \sigma_4 = \dfrac{q_1 + q_2}{2S} \\ \sigma_2 = -\sigma_3 = \dfrac{q_1 - q_2}{2S} \end{cases}$$

[例] 有任意形状的带电导体，其表面的面电荷密度为σ，求表面上某处电荷元$\sigma\mathrm{d}S$受到其余电荷作用的电场力.





$$\vec{E}_1=\begin{cases}-\dfrac{\sigma}{2\varepsilon_0}\vec{e}_{\mathrm{n}}(\text{内侧})\\[2ex] \dfrac{\sigma}{2\varepsilon_0}\vec{e}_{\mathrm{n}}(\text{外侧})\end{cases}$$



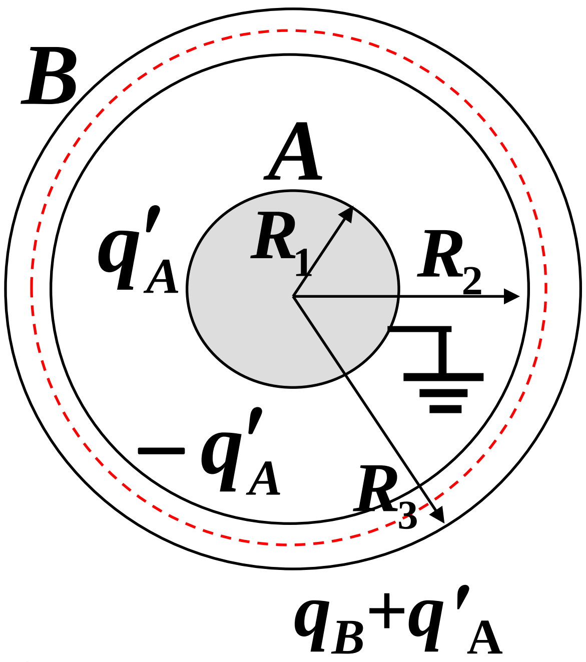
其余电荷产生的场

$$\vec{E}_2=\frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\vec{e}_{\mathrm{n}}$$

$$\vec{E}=\begin{cases}\vec{E}_1+\vec{E}_2=0\text{（内侧）}\\[2ex] \vec{E}_1+\vec{E}_2=\dfrac{\sigma}{\varepsilon_0}\vec{e}_{\mathrm{n}}(\text{外侧})\end{cases}$$

$$\vec{F}=E_2\sigma\mathrm{dS}\vec{e}_{\mathrm{n}}=\frac{\sigma^2}{2\varepsilon_0}\mathrm{dS}\vec{e}_{\mathrm{n}}$$

[例] 一个金属球A,带电 q_A, 同心金属球壳 B,
带电 q_B, 如图，试分析如果将A接地,它们的电荷如何分布?



答：A球外表面q'_A、B球壳内表面$-q'_A$、B球壳的外表面$q_B+q'_A$。

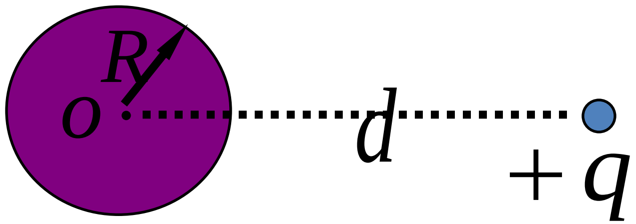
接地,电势为零:

$$U_{r<R_1}=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{q'_A}{R_1}-\frac{q'_A}{R_2}+\frac{q'_A+q_B}{R_3}\right)=0$$

$$q'_A=\frac{-q_B}{R_3}\Big/\left(\frac{1}{R_1}-\frac{1}{R_2}+\frac{1}{R_3}\right)$$

[例题] 原来不带电的导体球附近有一点电荷, 如图所示。求（1）导体球上的电势；（2）若导体球接地，导体上感应电荷的电量。

解:（1）导体是个等势体，若求出O点的电势，即为导体球的电势。



设：感应电荷面密度为σ

$$\Rightarrow Q=\int \sigma \mathrm{d}S = 0$$

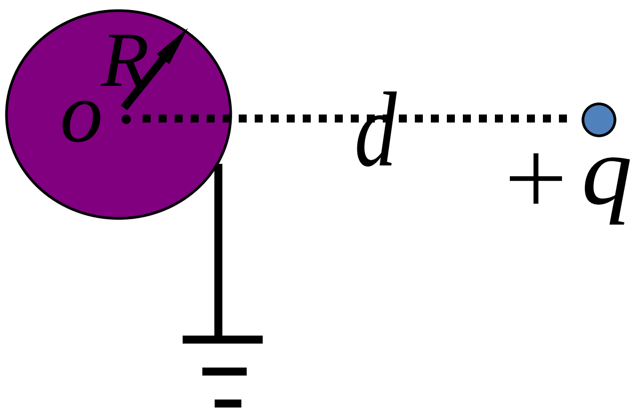
$$\Rightarrow V_o = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 d} + \int \frac{\sigma \mathrm{d}S}{4\pi\varepsilon_0 R} = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 d}$$

（2）导体球接地

$$V=0$$

设：感应电荷面密度为σ

$$Q=\int\sigma\mathrm{d}S$$



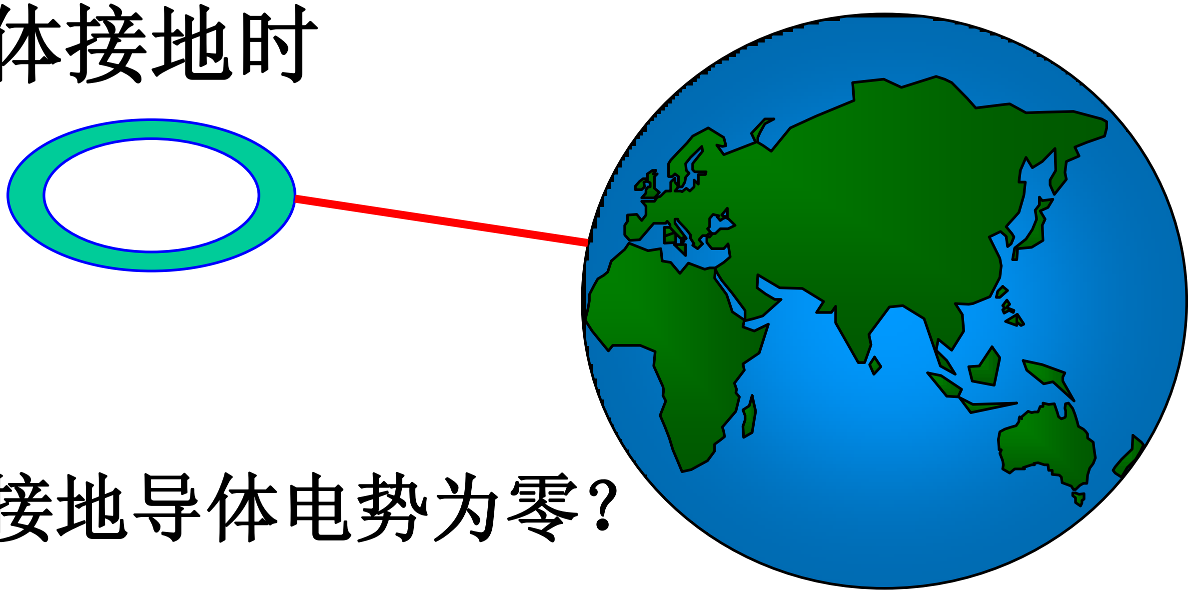
导体是个等势体，O点的电势为 0 ，则：

$$\int\frac{\sigma\mathrm{d}S}{4\pi\varepsilon_0 R}+\frac{q}{4\pi\varepsilon_0 d}=0$$

$$\frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 R}+\frac{q}{4\pi\varepsilon_0 d}=0$$

$$Q=-\frac{R}{d}q$$

当导体接地时



$$V(\infty)=0$$

为什么接地导体电势为零？

这是因为地球是一个导体，是一个等势体。

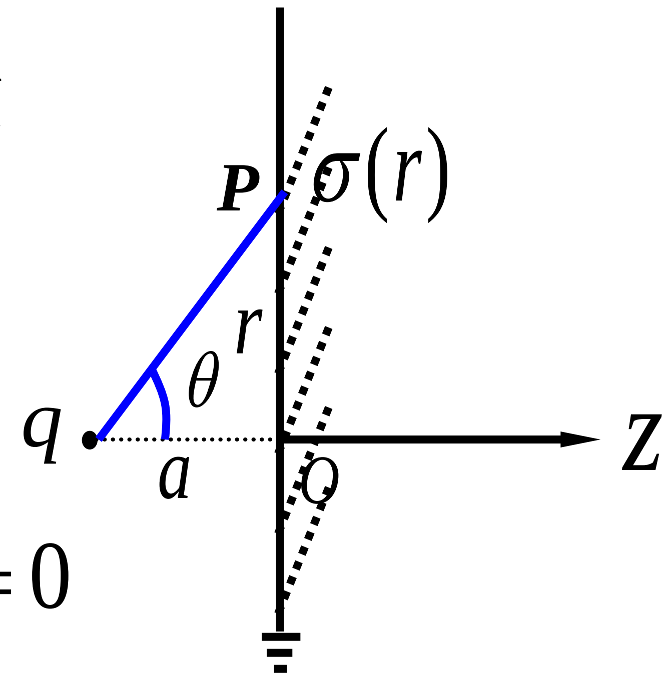
地球和接地导体都是有限带电体，取无穷远处为电势零点。

地球比接地导体大很多，延伸到很远处，那里电势近似为零。

所以接地导体电势为零。

[例题] 无限大接地导体附近有一点电荷q，求导体表面的感应电荷面密度。

解：在电荷q 的感应下，导体表面上将出现感应电荷分布，对O点对称，用 $\sigma(r)$ 表示。

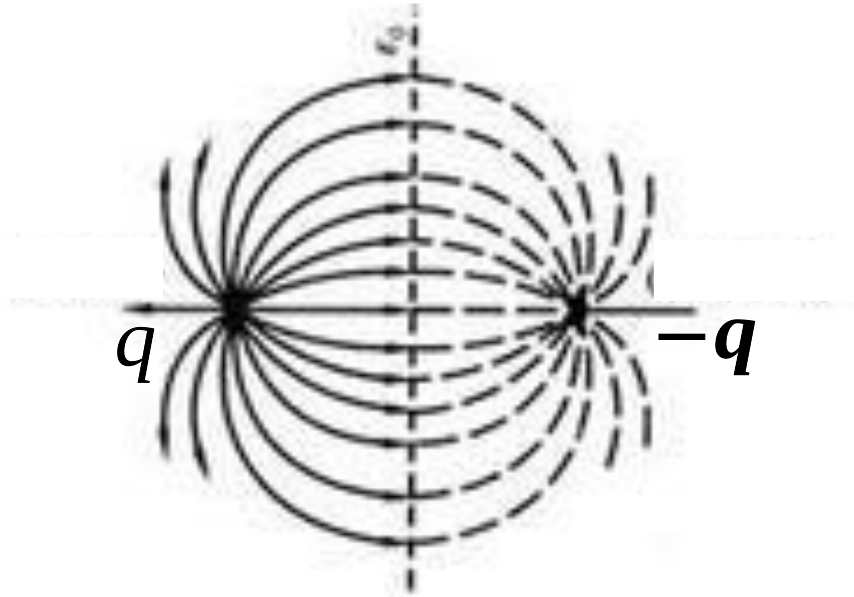


P点处导体表面内侧电场强度为零，则z方向的电场强度分量为：

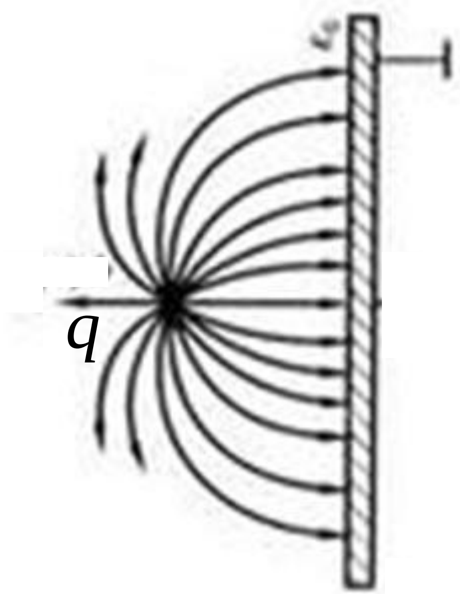
$$E_z = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0(r^2+a^2)}\cos\theta + \frac{\sigma(r)}{2\varepsilon_0} = 0$$

$$\Rightarrow \sigma(r) = -\frac{q\cos\theta}{2\pi(r^2+a^2)} = -\frac{qa}{2\pi(r^2+a^2)^{3/2}}$$

$$\Rightarrow Q = \int \sigma \mathrm{d}S = \int_0^{\infty} \sigma(r) 2\pi r \mathrm{d}r = -q$$



镜像法



电势与电场强度的关系

微分关系 $$\vec{E}=-\nabla V=-\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}l_n}\vec{e}_n=-\mathrm{grad}V$$

$$\vec{\boldsymbol{E}}=\boldsymbol{E}_x\vec{\boldsymbol{i}}+\boldsymbol{E}_y\vec{\boldsymbol{j}}+\boldsymbol{E}_z\vec{\boldsymbol{k}}=-\frac{\partial \boldsymbol{V}}{\partial \boldsymbol{x}}\vec{\boldsymbol{i}}-\frac{\partial \boldsymbol{V}}{\partial \boldsymbol{y}}\vec{\boldsymbol{j}}-\frac{\partial \boldsymbol{V}}{\partial \boldsymbol{z}}\vec{\boldsymbol{k}}$$

$$\frac{\partial E_x}{\partial x}+\frac{\partial E_y}{\partial y}+\frac{\partial E_z}{\partial z}=\frac{\rho}{\varepsilon_0}$$

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 V}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 V}{\partial z^2}=-\frac{\rho}{\varepsilon_0}$$

$$\nabla^2=\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}+\frac{\partial^2}{\partial z^2}$$

$$\nabla^2 V=-\frac{\rho}{\varepsilon_0}$$ 泊松方程

拉普拉斯算符

$$\rho=0$$

$$\nabla^2 V=0$$ 拉普拉斯方程

Poisson Equation

$$\nabla^2 V = -\frac{\rho}{\varepsilon_0}$$

Siméon Denis Poisson
(French: 21 June 1781 – 25 April 1840)

LAPLACE EQUATION

$$\nabla^2 V = 0$$

Pierre-Simon, marquis de Laplace
(French: 23 March 1749 – 5 March 1827)

静电场的唯一性定理

*针对特定体系：*边界S内只包围若干个静止导体，给定导体的几何形状、相互位置。

此外，再给定哪些条件，边界S内自由空间的电场才能唯一确定？

一、静电边值问题

自由空间：$\rho=0\ ,\nabla\cdot\vec{E}=\dfrac{\rho}{\varepsilon_0}=0$

$$\nabla\cdot\vec{E}=\nabla\cdot(-\nabla U)=-\nabla^2 U=0$$

静电边值问题：

$$\begin{cases}\nabla^2 U=0\\ \text{边值条件}\end{cases}$$

解出 $U(x,y,z)$ ，由 $\vec{E}=-\nabla U$ 求电场分布。

给定哪些边值条件，边界S内自由空间的电场才能唯一确定？

二、静电场的唯一性定理

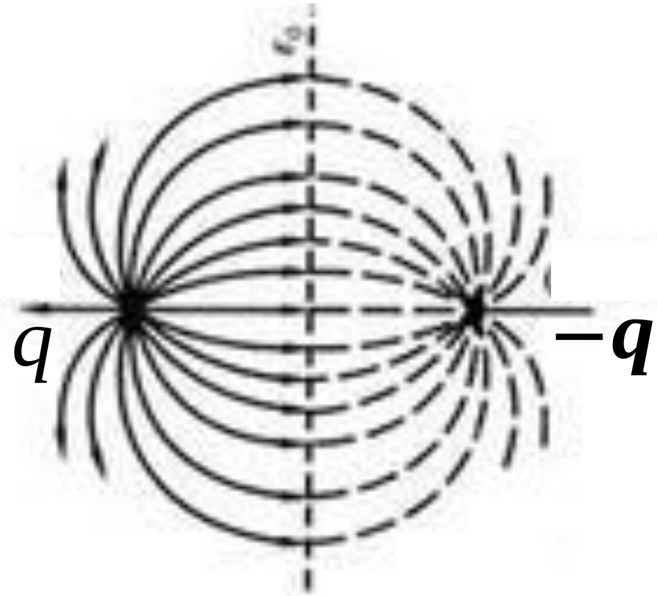
电势的法向导数

给定边界S上的电势分布 U_S，或 $\partial U_S/\partial n$，再给定下列条件之一，S内静电场分布唯一确定

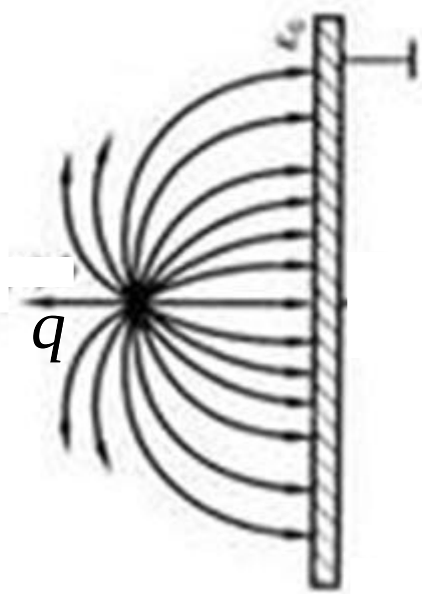
（1）给定每一个导体的电势。

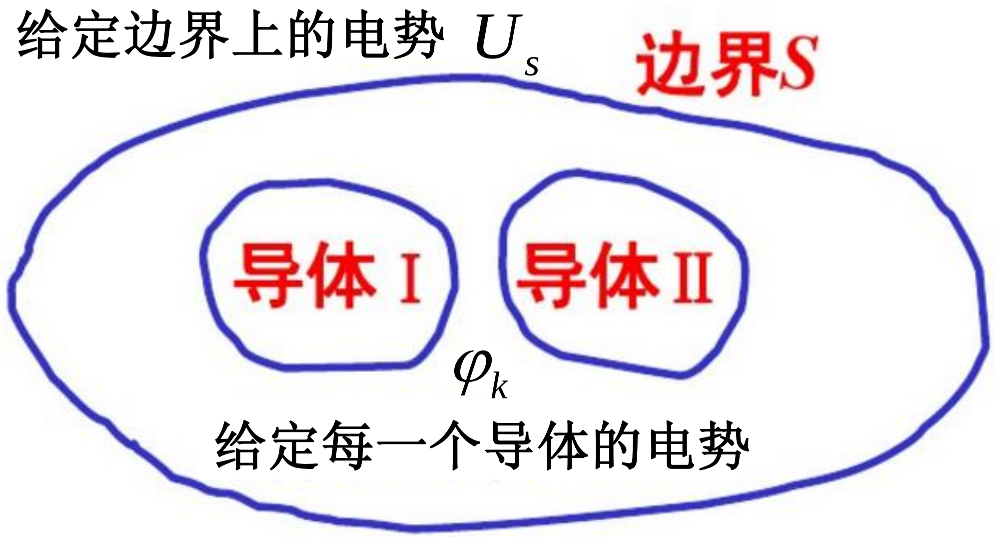
（2）给定每一个导体的电量。

（3）给定一些导体的电势和其余导体的电量。



镜像法





则S内电场分布唯一！-----静电场唯一性定理

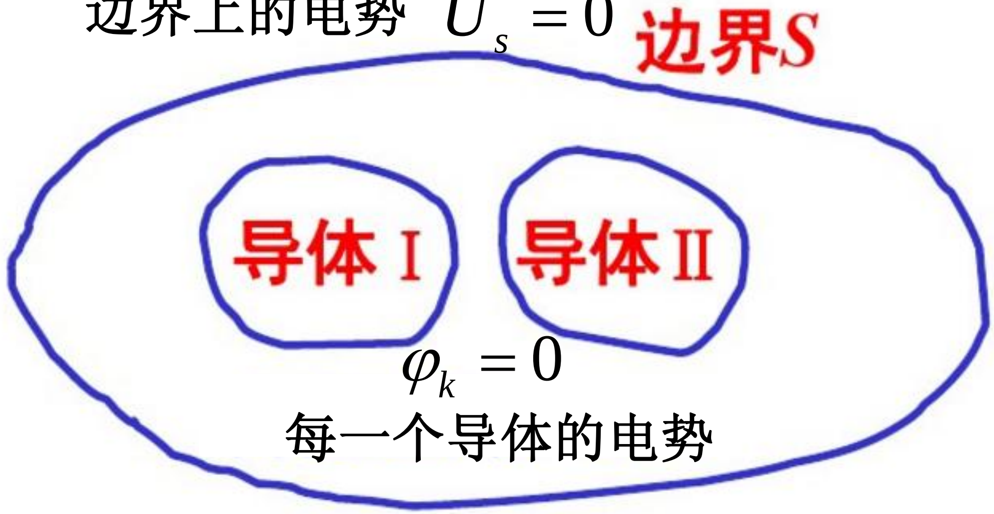
证明： $\nabla^2 V = 0$ +边界条件

$V_1(x,y,z), V_2(x,y,z)$ 都满足拉普拉斯方程及所有边界条件

$$\frac{\partial^2 V_1(x,y,z)}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 V_1(x,y,z)}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 V_1(x,y,z)}{\partial z^2}=0$$

$$\frac{\partial^2 V_2(x,y,z)}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 V_2(x,y,z)}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 V_2(x,y,z)}{\partial z^2}=0$$

边界上的电势 $U_s=0$



定义：$W(x,y,z)=V_1(x,y,z)-V_2(x,y,z)$

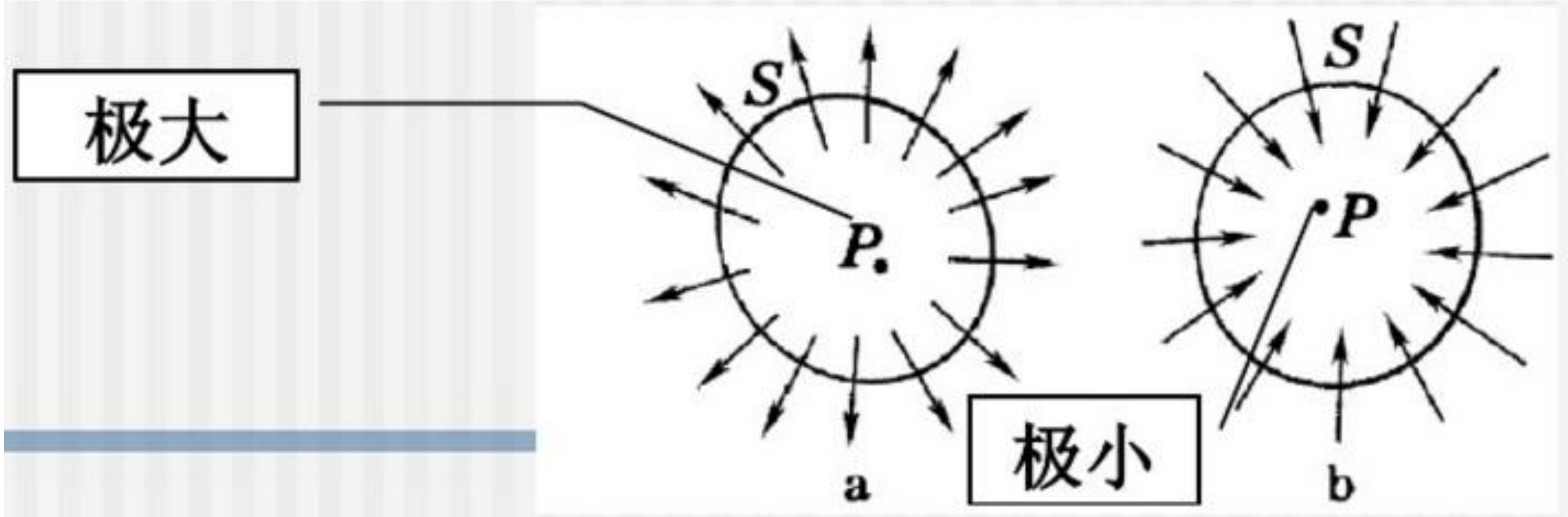
$W(x,y,z)$ 满足拉普拉斯方程

$$\frac{\partial^2 W(x,y,z)}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 W(x,y,z)}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 W(x,y,z)}{\partial z^2}=0$$

$\Rightarrow W(x,y,z)=0$ 如果不是这样，在其他地方（无电荷）电势必有极值点，这是不可能的！

则：$V_1(x,y,z)=V_2(x,y,z)$

证明：在无电荷的空间里电势不可能有极大值和极小值



12.2　电容器及电容

一、孤立导体的电容

孤立导体的电势与带电量有关；带电量相同时不同形状和大小的孤立导体电势不同，但是 $V \propto Q$

定义 $C \equiv \dfrac{Q}{V}$ ——孤立导体的电容

电容只与导体的几何因素（及周围介质）有关，反映导体带电多少的本领——固有的容电本领

SI：法拉 F

$$1\mathrm{F} = 10^{6}\mu\mathrm{F} = 10^{12}\mathrm{pF}$$

真空中孤立导体球的电容

设导体球半径为**R**，带电为**Q**

导体球电势为：
$$V=\frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 R}$$

导体球电容为：
$$C=\frac{Q}{V}=4\pi\varepsilon_0 R$$

对半径如地球一样的导体球，其电容为：

$$C_{\mathrm{E}}=4\pi\varepsilon_0 R_{\mathrm{E}}=7.11\times10^{-4}\,\mathrm{F}$$

电容为**1F** 的孤立导体球的半径

$$R=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}=8.99\times10^{9}\,\mathrm{m}\ \ \gg R_{\mathrm{E}}$$

二、电容器的电容

一般情况下，导体并不是孤立的，而是多个导体组成的导体组——电容器

基本单元：两导体组（***A***、***B***）电容器 $\left(\pm Q, \Delta V_{AB}\right)$

定义： $$C = \frac{Q}{\Delta V_{AB}}$$

电容器电容只与导体组的几何构形（及周围空间介质）有关，与带电多少无关。

三、几种常见电容器及其电容

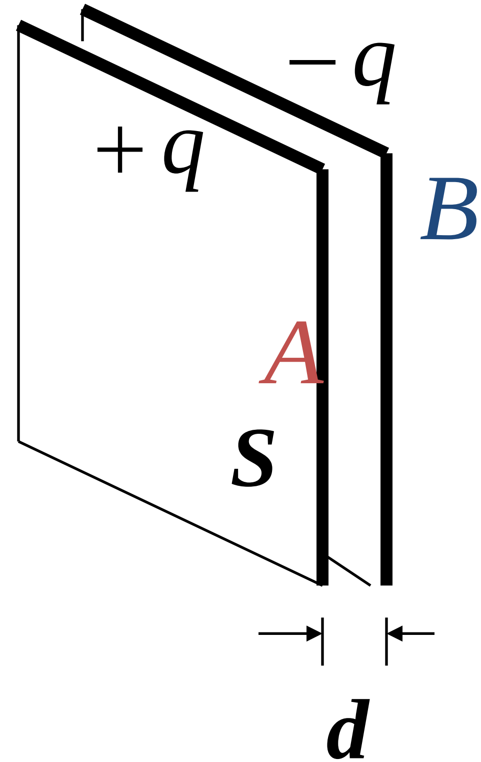
1. 平板电容器 $d << \sqrt{S}$ 为无限大

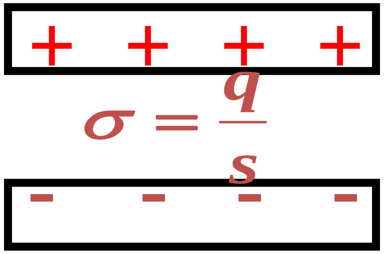
设***A***板带 $+q$ ***B***板带 $-q$

$$\sigma = \frac{q}{S} \qquad \boldsymbol{E = \frac{\sigma}{\varepsilon_0}}$$

$$\because V_A - V_B = \int_A^B \vec{E} \cdot \mathrm{d}\vec{l} = Ed = \frac{\sigma d}{\varepsilon_0}$$

$$\therefore C = \frac{q}{V_A - V_B} = \frac{\varepsilon_0 S}{d}$$





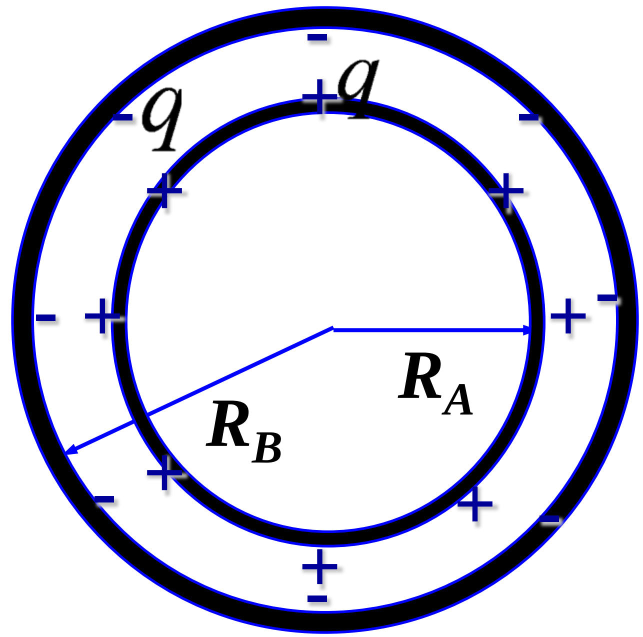
2. 球形电容器电容

$$\vec{E} = \frac{q}{4\pi\varepsilon_o r^2}\vec{e}_r$$

$$\Delta V = \int_{R_A}^{R_B} \frac{q\,\mathrm{d}r}{4\pi\varepsilon_o r^2}$$

$$= \frac{q}{4\pi\varepsilon_o}\left(\frac{1}{R_A} - \frac{1}{R_B}\right)$$

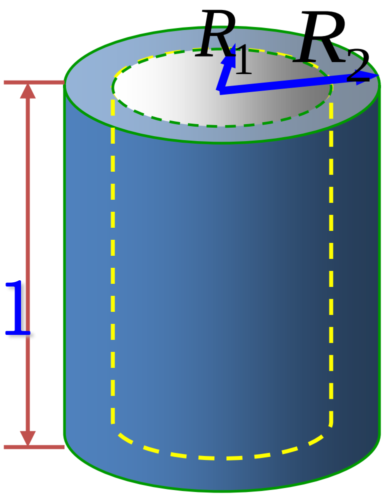
$$C = \frac{q}{\Delta V} = 4\pi\varepsilon_o \frac{R_A R_B}{R_B - R_A}$$



3. 求柱形电容器单位长度的电容

设单位长度带电量为 $\pm\lambda$

$$\vec{E} = \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0 r}\vec{e}_r \qquad R_1 < r < R_2$$



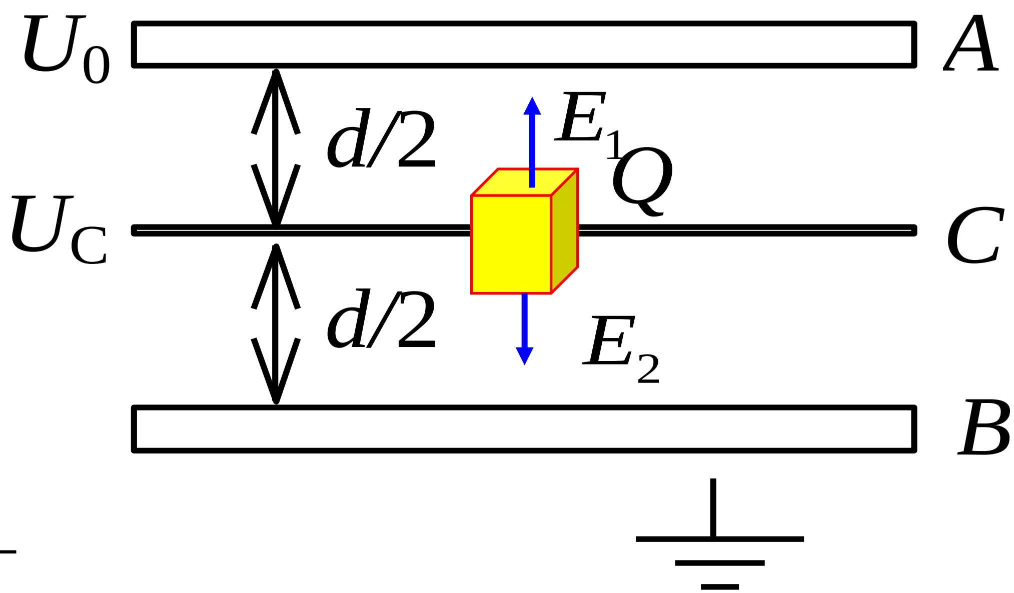
$$\Delta V = \int_{内}^{外} \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0 r}\vec{e}_r \cdot \mathrm{d}\vec{l}$$

$$= \int_{R_1}^{R_2} \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0 r}\mathrm{d}r$$

$$= \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0}\ln\frac{R_2}{R_1}$$

$$C = \frac{\lambda}{\Delta V} = \frac{2\pi\varepsilon_0}{\ln\dfrac{R_2}{R_1}}$$

[例]一平行板电容器，极板面积为S，相距为d。若B板接地，且保持A板的电势UA＝U0不变。如图，把一块面积相同的带有电荷为Q的导体薄板C平行地插入两板中间，则导体薄板C的电势UC＝____________



作高斯面

$$\oiint_S \vec{E}\cdot d\vec{S} = E_1\Delta S + E_2\Delta S = \frac{Q\Delta S}{S\varepsilon_0}$$

$$E_1 + E_2 = \frac{Q}{S\varepsilon_0}$$

$$E_1 = \frac{U_C - U_0}{d/2} \qquad E_2 = \frac{U_C - 0}{d/2} \qquad U_C = \frac{U_0}{2} + \frac{Qd}{4S\varepsilon_0}$$

12.4 传导电流

一、传导电流

1. 传导电流

（1）金属中的自由电子在外电场的作用下的宏观定向移动

（2）电解质溶液或电离气体中正、负离子的宏观定向移动

载流子

2. 运流电流

单个或多个电荷在空间的定向移动（或运动）

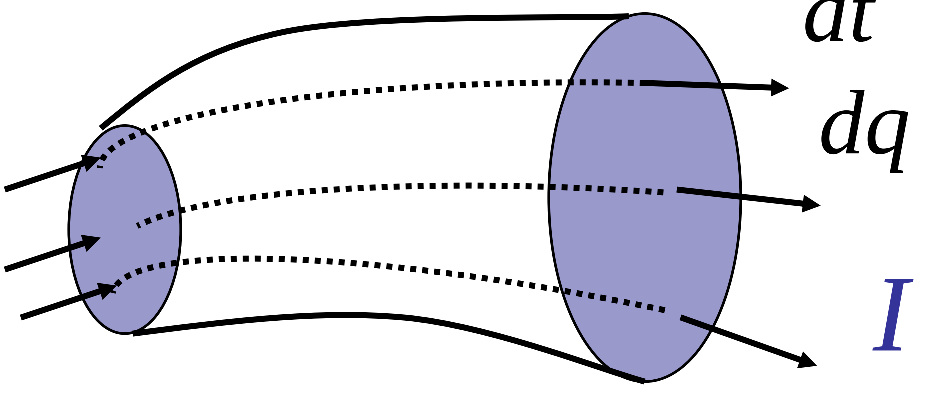
如：分子中电子绕核的运动，等效为圆电流。

分子的等效电流称为分子电流或安培电流。

二、电流强度

大小：单位时间内通过导体某一截面的电量

$$I = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta q}{\Delta t} = \frac{\mathrm{d}q}{\mathrm{d}t}$$

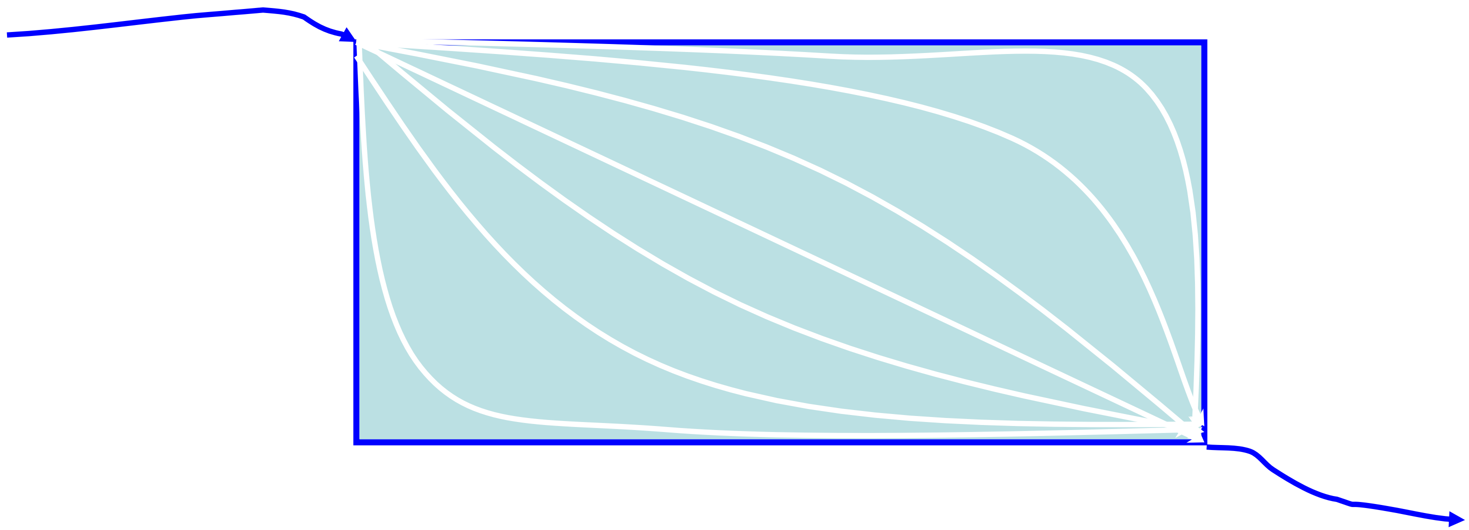


方向：正电荷运动的方向

单位：安培 **(A)**

若电流强度与时间无关——**稳恒电流**

三、电流密度



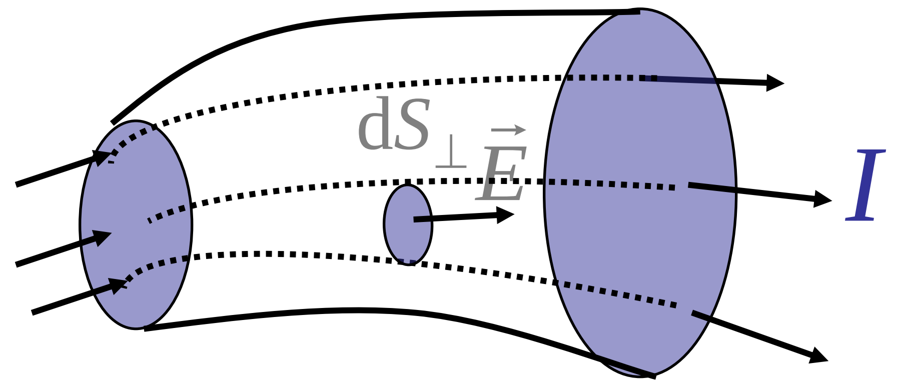
需要引入描述电流的空间分布的物理量——电流密度

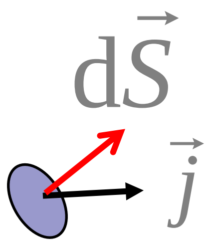
电流场：导体内每一点都有对应的 $\vec{j}(x, y, z)$

电流密度的大小等于从垂直于电场方向的单位截面上流过的电流强度。

$$\vec{j} = \frac{\mathrm{d}I}{\mathrm{d}S_{\perp}}\vec{e}_{\mathrm{n}}$$

单位：A/m^2





$$\mathrm{d}I = j\mathrm{d}S_{\perp} = \vec{j}\cdot\vec{e}_{\mathrm{n}}\mathrm{d}S = \vec{j}\cdot\mathrm{d}\vec{S}$$

$$I = \int_S \mathrm{d}I = \int_S \vec{j}\cdot\mathrm{d}\vec{S}$$

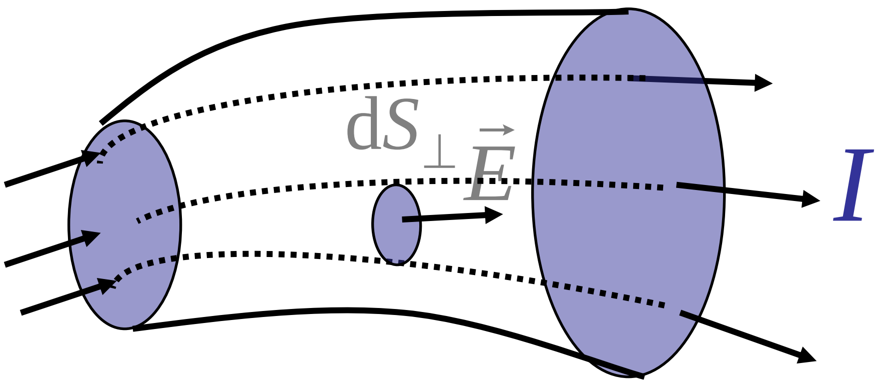
设每个载流子电量为 q　　载流子数密度为 n

平均漂移速度的大小 v_d

$$\mathrm{d}I = qnv_d \mathrm{d}S_\perp$$

$$j = \frac{\mathrm{d}I}{\mathrm{d}S_\perp} = nqv_d$$

矢量式　$\vec{j} = nq\vec{v}_d$



$q > 0$,　$\vec{j}$ 与 $\vec{v}_d$ 同向

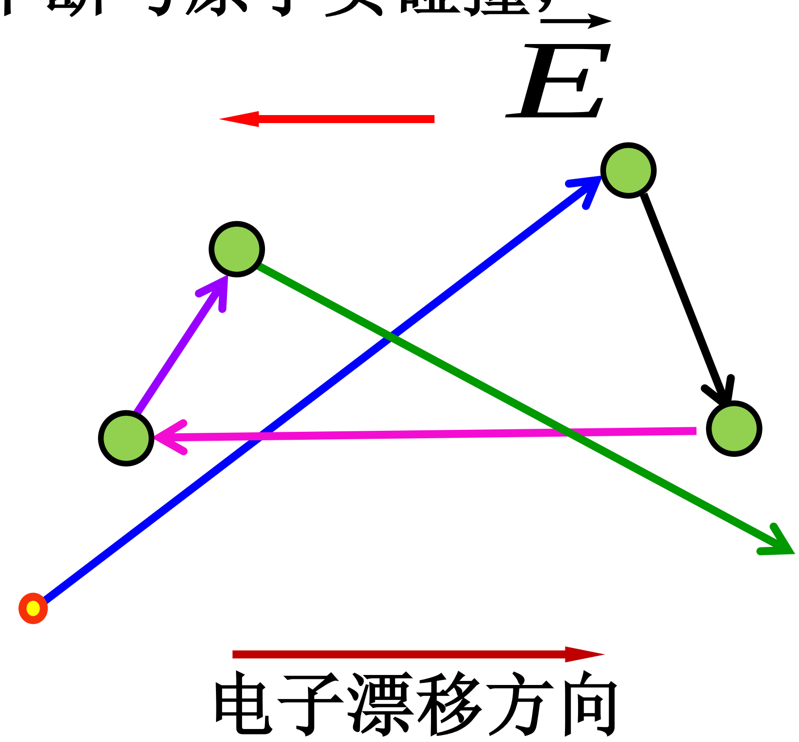
$q < 0$,　$\vec{j}$ 与 $\vec{v}_d$ 反向

四、欧姆定律的微分形式:德鲁德模型

考虑金属导体，则载流子为自由电子 $q=-e,\ \vec{j}=-en\vec{v}_d$

自由电子在导体中做热运动，且不断与原子实碰撞，

在这种电场作用下,自由电子将有定向漂移。



在相邻两次碰撞之间，自由电子的加速度为

$$\vec{a}=-\frac{e\vec{E}}{m}$$

速度 $\vec{v}=\vec{v}_0+\vec{a}t, 0\le t\le \Delta t$

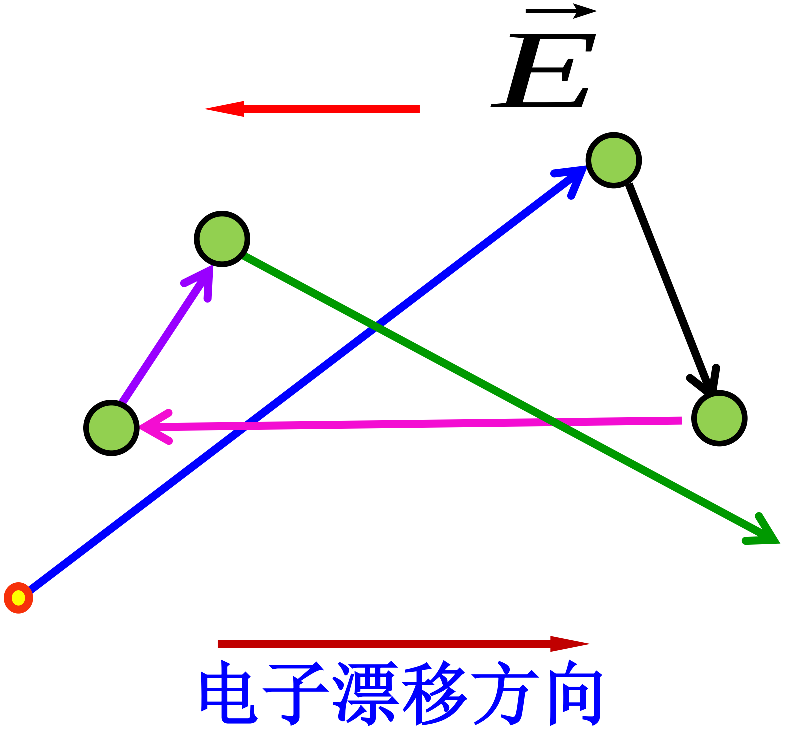
Δt为相邻两次碰撞之间的自由飞行时间

速度 $\vec{v}=\vec{v}_0+\vec{a}t, 0\le t\le \Delta t$

在相邻两次碰撞之间速度的平均值

$$\overline{\vec{v}}=\frac{\vec{v}_1+\vec{v}_2}{2}=\vec{v}_0+\frac{\vec{a}\Delta t}{2}$$

$$\vec{a}=-\frac{e\vec{E}}{m}$$



在相邻两次碰撞之间的平均速度 $\bar{\vec{v}} = \vec{v}_0 + \frac{\vec{a}\Delta t}{2}$

其统计平均值为 $<\bar{\vec{v}}>=<\vec{v}_0> + \frac{\vec{a}<\Delta t>}{2}$ $\vec{a} = -\frac{e\vec{E}}{m}$

由于碰撞的随机性，有 $<\vec{v}_0>=0$

$<\Delta t>=\tau$ 乃自由电子的相邻两次碰撞之间的自由飞行时间的统计平均值

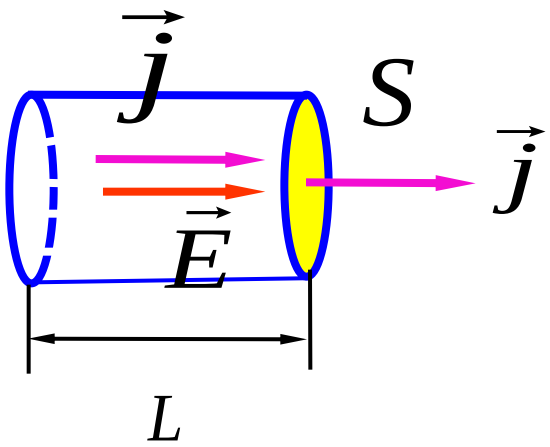
故得 $<\bar{\vec{v}}>=\vec{a}\tau/2=\vec{v}_d$

$$\vec{j} = -en\vec{v}_d = \frac{ne^2\tau}{2m}\vec{E} \equiv \gamma\vec{E}$$

导体的电导率 $\gamma = \frac{ne^2\tau}{2m}$

横截面面积为S, 长度为L的均匀导体的电阻

由于导体是均匀的，
导体内部各处的电流
密度是相同的



$$j = \gamma E = \gamma \frac{U}{L} \Rightarrow I = Sj = S\gamma \frac{U}{L} = \frac{U}{R}$$

$$\Rightarrow R = \frac{1}{\gamma}\frac{L}{S} = \rho \frac{L}{S}$$

欧姆定律

ρ :电阻率　　$\gamma = \frac{1}{\rho}$:电导率

七、焦耳定律的微分形式

焦耳定律 $P = I^2 R$

由于晶格离子对电子的碰撞，使电子损失能量，
晶格离子获得能量，并以热量的形式释放出来。

在平衡状态下，电场力作功与导体释放的热量相等。

电场力作功功率 $\vec{f} \cdot \vec{v}_d = nq\vec{E} \cdot \vec{v}_d = nq\vec{v}_d \cdot \vec{E}$

$$= \vec{j} \cdot \vec{E} = \gamma \vec{E} \cdot \vec{E} = \gamma E^2$$

则热功率密度： $w = \gamma E^2$

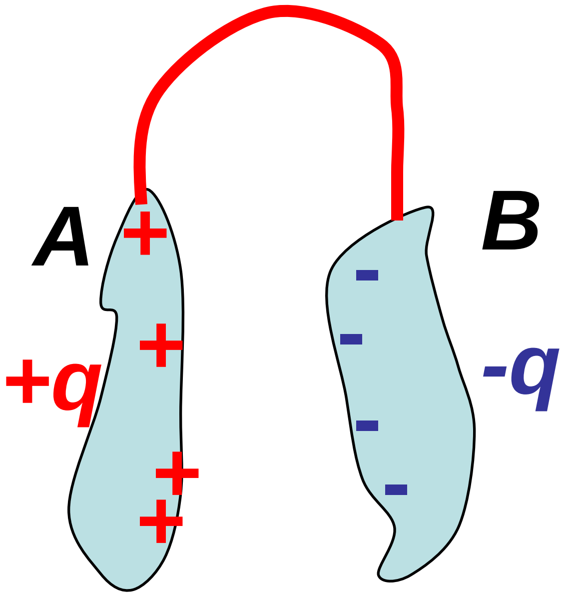
—焦耳定律的微分形式

12.5　电动势　稳恒电场

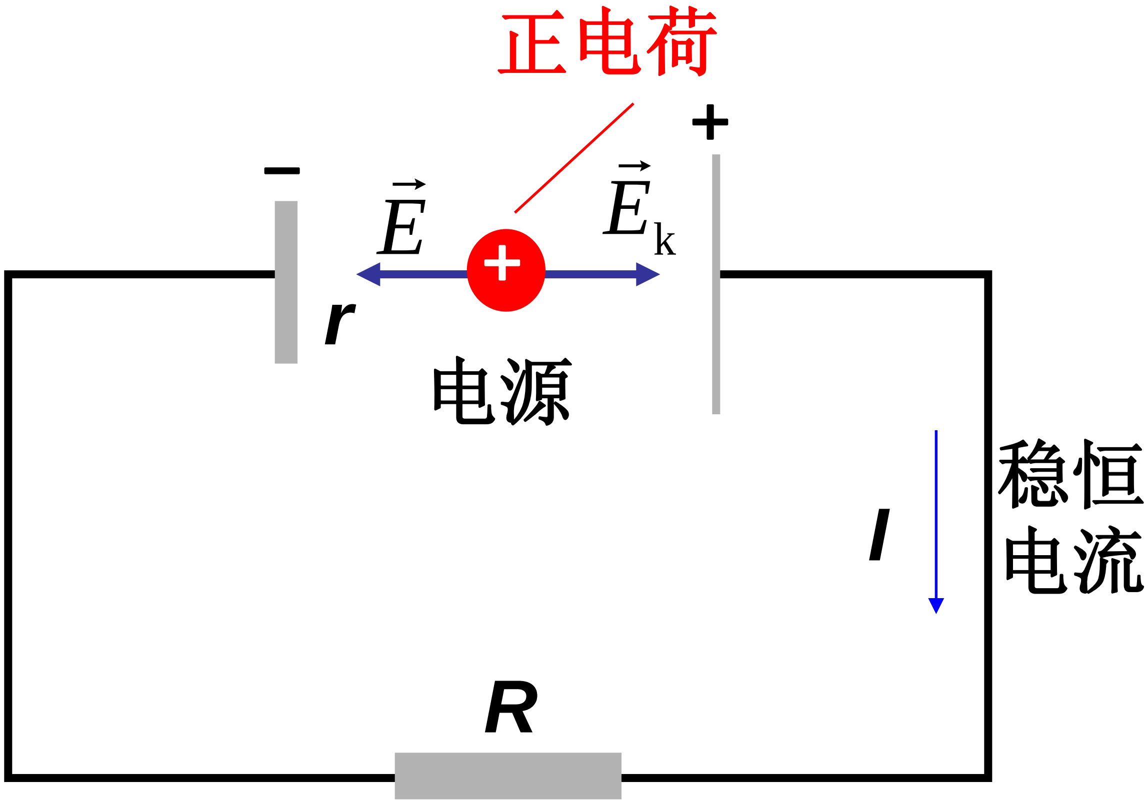
一、电源　电动势

$$\vec{j} = \gamma \vec{E}$$

非静电力

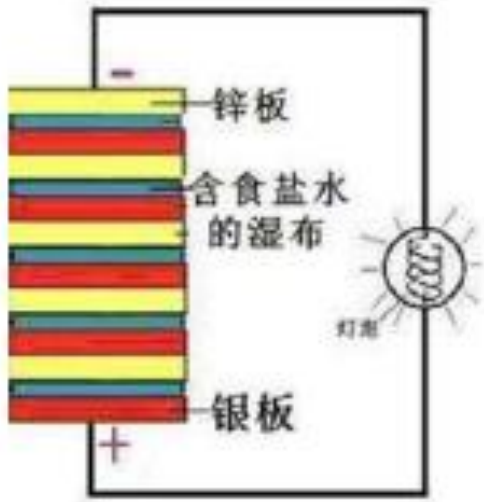


电源——提供非静电场力的装置，或称电泵。



$\vec{E}$ —静电场 $\vec{E}_k$—非静电场

非静电场反抗静电场移动电荷。

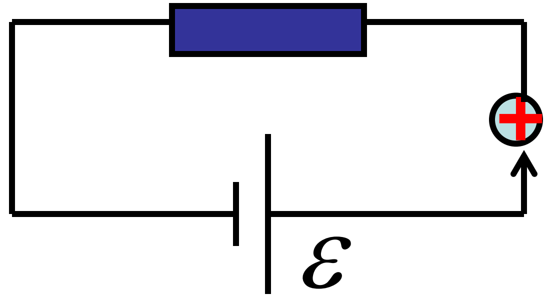


伏打电池

1800年伏打向拿破仑演示他的电池

电动势 $\mathcal{E}$

$\vec{E}_k$ 为非静电场场强

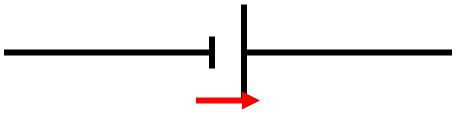


$$\vec{E}_k = \frac{\vec{F}_k}{q}$$

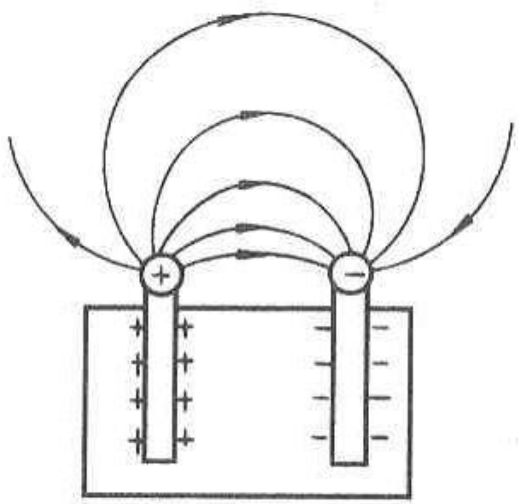
电动势：等于将单位正电荷从电源负极沿内电路移到正极过程中非静电场力做的功。

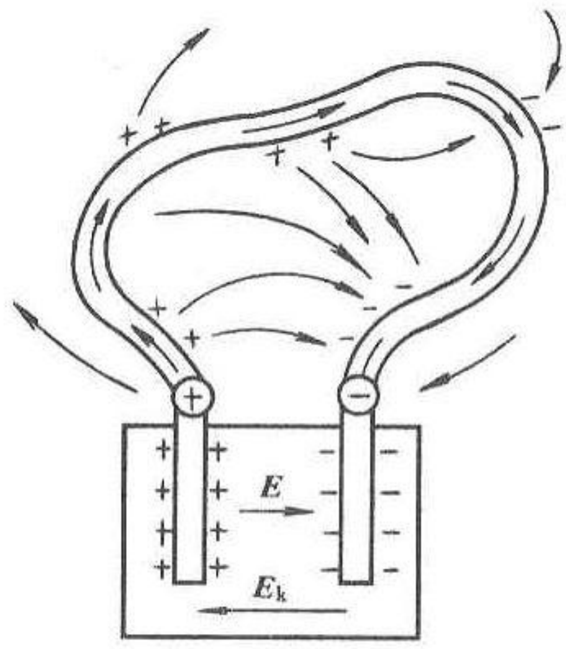
$$\varepsilon = \frac{\int_{-}^{+} q\vec{E}_k \cdot \mathrm{d}\vec{l}}{q} = \int_{-}^{+} \vec{E}_k \cdot \mathrm{d}\vec{l}$$

$$\varepsilon = \oint_l \vec{E}_k \cdot \mathrm{d}\vec{l}$$



二、稳恒电路中的稳恒电场





稳恒电场——由并非静止、只是空间分布保持恒定的电荷产生的。

演示

稳恒电场性质：

1、稳恒电场服从高斯定理（任何电场都服从高斯定理）

$$\oint\!\!\!\oint_S \vec{E}\cdot\mathbf{d}\vec{S} = \frac{1}{\varepsilon_0}\sum_{(S)} q_i$$

2、稳恒电场服从环流定理

$$\oint_l \vec{E}\cdot \mathrm{d}\vec{l} = 0 \qquad V_a - V_b = \int_a^b \vec{E}\cdot \mathrm{d}\vec{l}$$

稳恒电场与静电场的不同点：

静电场：

电荷静止，不激发磁场

静电平衡导体内部场强 $\vec{E} = 0$

维持静电场不需要能量的转换

稳恒电场：

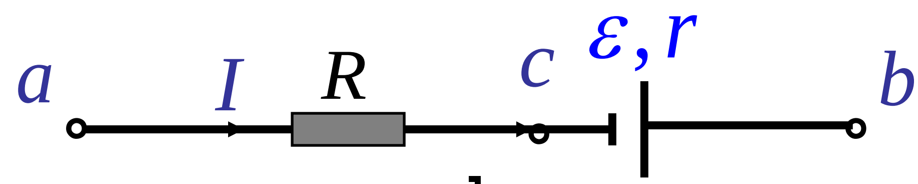
电荷运动，激发磁场（稳恒磁场）

导体内部稳恒电场 $\vec{E} \neq 0$，$\vec{E} \rightarrow \vec{j}$

伴随能量的转换

三、电路中两点的电势差

一段含源电路



计算 a、b 两端的电势差：$U_a - U_b = \int_a^b \vec{E}\cdot \mathrm{d}\vec{l}$

$$\int_a^b \vec{E}\cdot \mathrm{d}\vec{l} = \int_a^c \vec{E}\cdot \mathrm{d}\vec{l} + \int_c^b \vec{E}\cdot \mathrm{d}\vec{l}$$

$$(1)\ \int_a^c \vec{E}\cdot \mathrm{d}\vec{l} = \int_a^c \frac{\vec{J}}{\gamma} ?\mathrm{d}\vec{l} = \int_a^c \frac{J}{\gamma}\mathrm{d}l = \int_a^c \frac{Js}{\gamma s}\mathrm{d}l$$

$$(\vec{J} = \gamma \vec{E}) \qquad = I\int_a^c \frac{\mathrm{d}l}{\gamma s} = I\int_a^c \mathrm{d}R$$

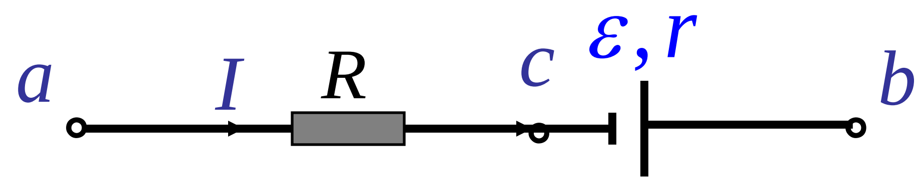
$$= IR$$

$$(2)\int_c^b \vec{E}\cdot \mathrm{d}\vec{l}$$

$$=\int_c^b \left(\frac{\vec{J}}{\gamma'}-\vec{E}_{\mathrm{K}}\right)?\mathrm{d}\vec{l}$$

$$=\int_c^b \frac{Js'}{\gamma' s'}dl-\int_c^b \vec{E}_{\mathrm{K}}\cdot \mathrm{d}\vec{l}$$

$$=I\int_c^b \mathrm{d}r-\varepsilon \quad = Ir-\varepsilon$$

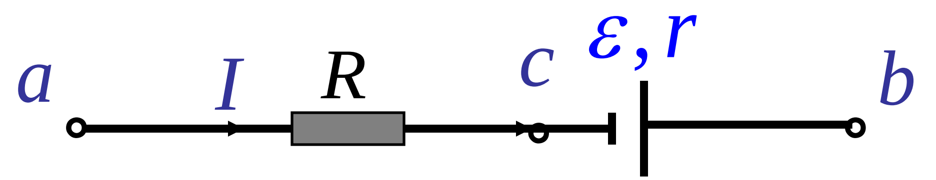


$$\vec{J}=\gamma'(\vec{E}+\vec{E}_{\mathrm{K}})$$

$$\vec{E}=\frac{\vec{J}}{\gamma'}-\vec{E}_{\mathrm{K}}$$

$$(1)\int_a^c \vec{E}\cdot \mathrm{d}\vec{l} = IR$$

$$U_a - U_b = \int_a^b \vec{E} \cdot \mathrm{d}\vec{l}$$



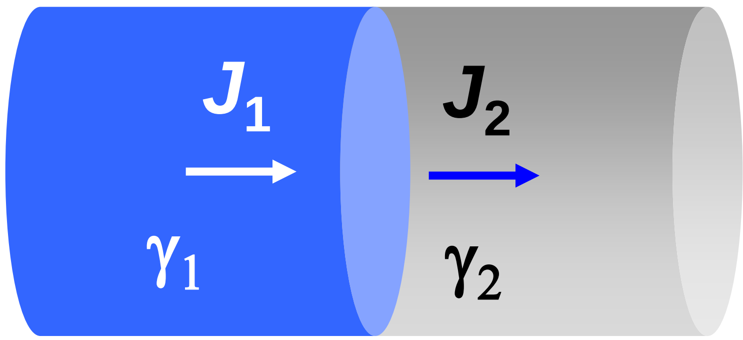
$$= \int_a^c \vec{E} \cdot \mathrm{d}\vec{l} + \int_c^b \vec{E} \cdot \mathrm{d}\vec{l}$$

$$= IR + Ir - \varepsilon$$

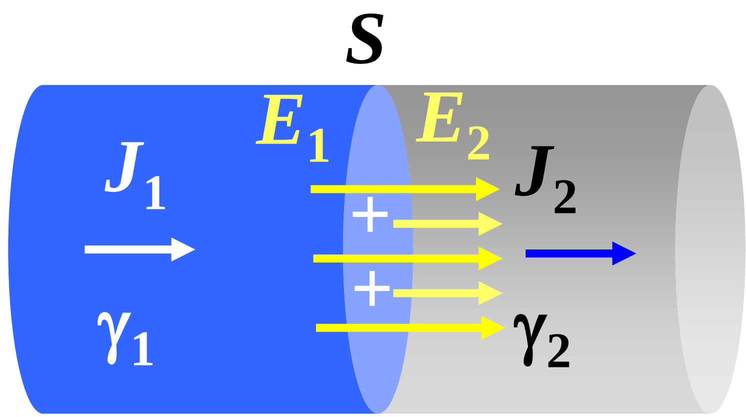
$$(2) \int_c^b \vec{E} \cdot \mathrm{d}\vec{l} = I \int_c^b \mathrm{d}r - \varepsilon = Ir - \varepsilon$$

$$(1) \int_a^c \vec{E} \cdot \mathrm{d}\vec{l} = IR$$

【例】在恒定电路中两柱状金属导体相接。分析交界面两侧电流密度和电场的分布。



$$\gamma_1 > \gamma_2$$



$\gamma_1 > \gamma_2 \qquad E_1 < E_2$

恒定电流： $-J_1 S + J_2 S = 0$， $J_1 = J_2$

电场分布： $\gamma_1 E_1 = \gamma_2 E_2$， $\gamma_1 > \gamma_2$， $E_1 < E_2$

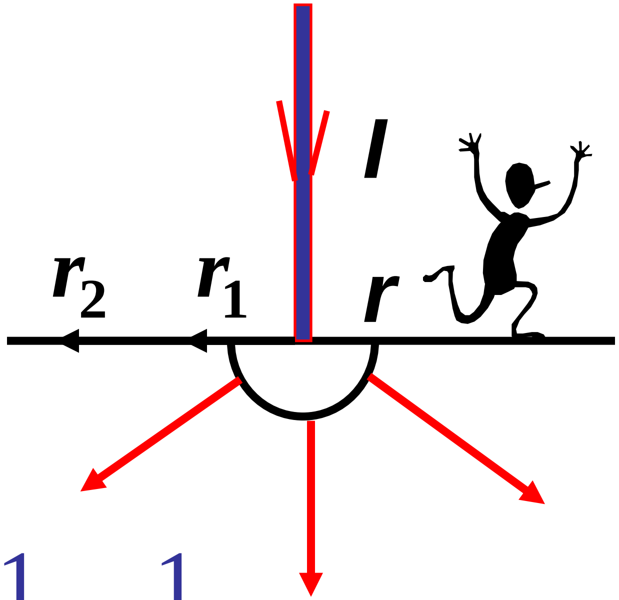
电场在界面不连续， 界面上有电荷积累。

【思考】你能算出界面上的电荷吗？

[例题]　一半径为 r 的半球形电极埋在大地里，大地视为均匀的导电介质，其电导率为 γ ，求接地电阻。

解：

$$R=\int_r^{\infty}\mathrm{d}R=\int_r^{\infty}\frac{\mathrm{d}r}{\gamma 2\pi r^2}=\frac{1}{\gamma 2\pi r}$$



$$R_{12}=\int_{r_1}^{r_2}\mathrm{d}R=\int_{r_1}^{r_2}\frac{\mathrm{d}r}{\gamma 2\pi r^2}=\frac{1}{\gamma 2\pi}\left(\frac{1}{r_1}-\frac{1}{r_2}\right)$$

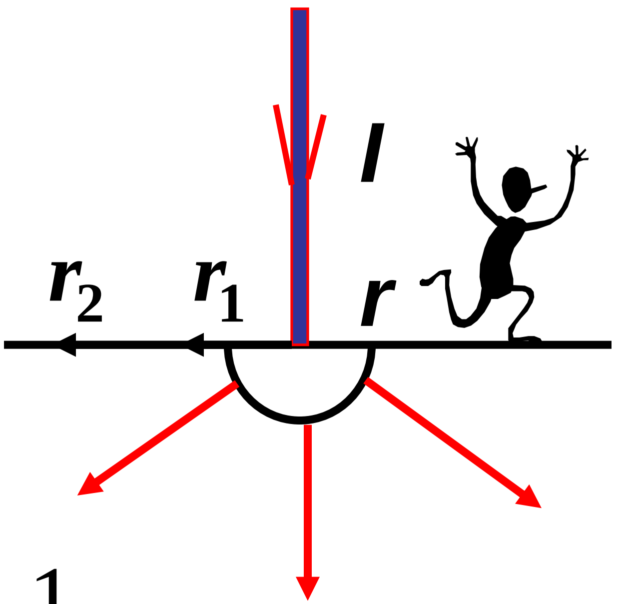
$$V_1-V_2=IR_{12}=\frac{I}{\gamma 2\pi}\left(\frac{1}{r_1}-\frac{1}{r_2}\right)$$

跨步电压

另一种解法：

$$j=\gamma E \qquad j=\frac{I}{2\pi r^{2}}$$

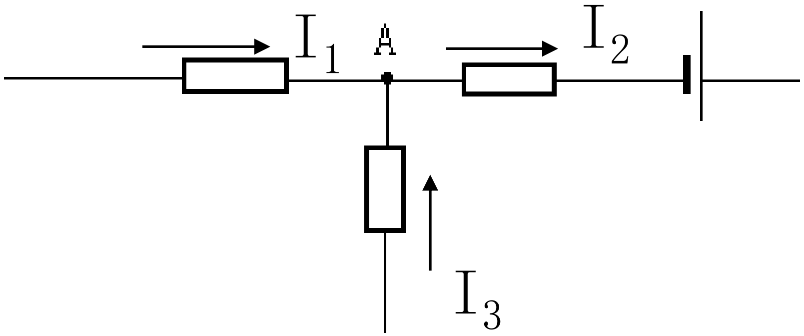
$$\Rightarrow E=\frac{I}{2\pi\gamma r^{2}}$$



$$V_1-V_2=\int_{r_1}^{r_2}E\mathrm{d}r=\frac{1}{\gamma 2\pi}\left(\frac{1}{r_1}-\frac{1}{r_2}\right)$$

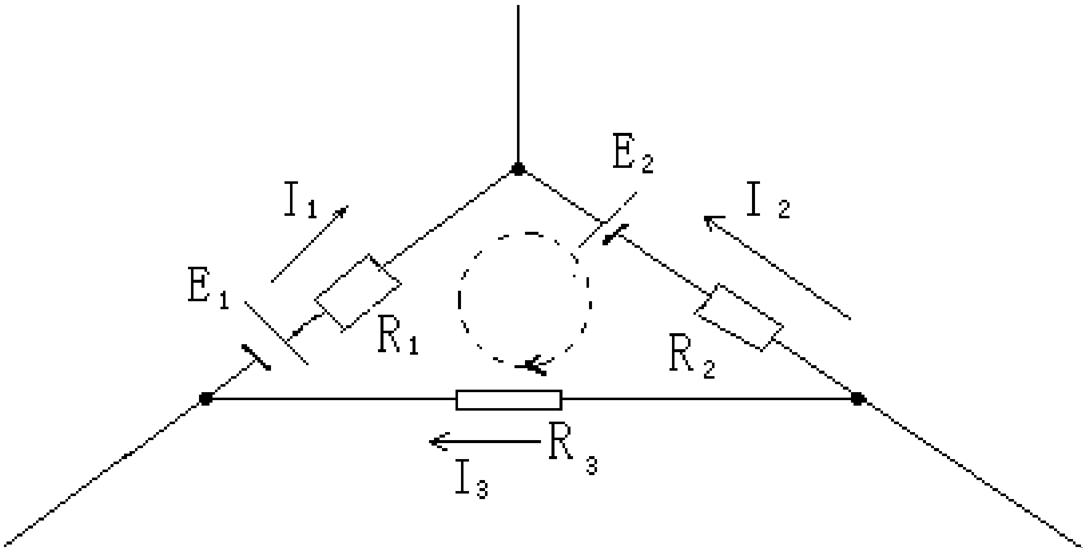
四、基尔霍夫定律

第一定律：节点定律 $\sum(\pm I_i) = o$



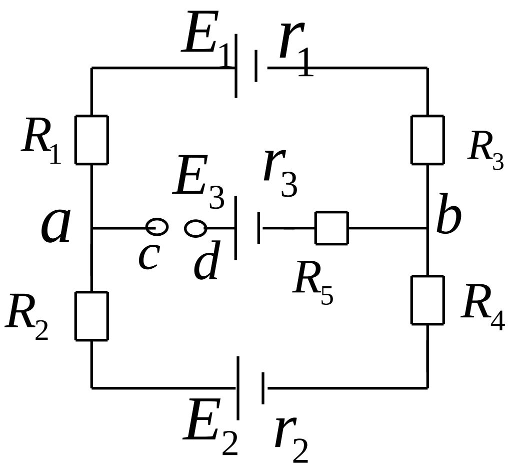
$$I_1 + I_3 - I_2 = 0$$

第二定律：回路定律



$$E_1 - I_1R_1 - E_2 + I_2R_2 - I_3R_3 = 0$$

[例] :一电路如图示



$E_1 = 12V \quad r_1 = 1\Omega \qquad R_5 = 3\Omega$

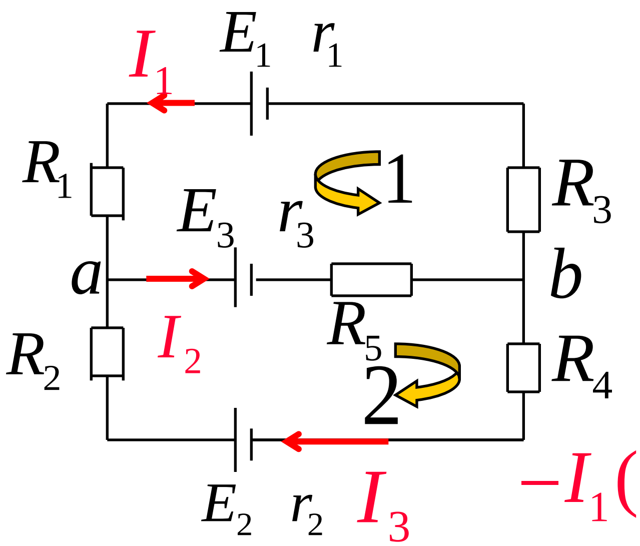
$E_2 = 8V \quad r_2 = 1\Omega$

$E_3 = 9V \quad r_3 = 1\Omega$

$R_1 = R_2 = R_3 = R_4 = 2\Omega$

如果***c***、***d***两点短路，则***a***、 ***b***两点间的电势差。

c、d两点短路，则电路如下图(为复杂电路）



$$E_1 = 12V \quad E_2 = 8V \quad E_3 = 9V$$

由基尔霍夫第一定律 $I_1 + I_3 - I_2 = 0$ (1)

由基尔霍夫第二定律 对回路1

$$-I_1(R_3 + R_1 + r_1) - I_2(R_5 + r_3) + E_1 - E_3 = 0 \quad (2)$$

对回路2 $-I_2(R_5 + r_3) - I_3(R_4 + R_2 + r_2) - E_3 + E_2 = 0$ (3)

由(1)、(2)、(3)得 $I_2 = 2/13\text{A}$

再对bE_3a支路应用一段含源电路欧姆定律

$$U_a - U_b = I_2(R_5 + r_3) + E_3 = 9.62\text{V}$$