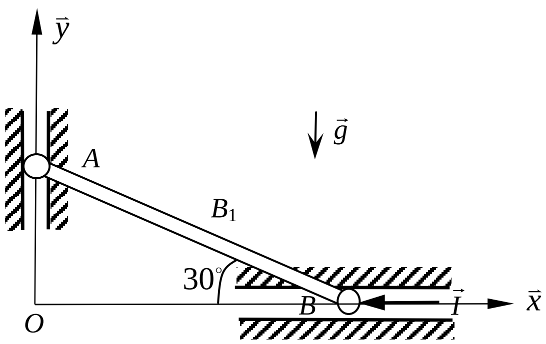
上海交通大学理论力学试卷答案

（ 20_11_ 至 20_12 学年 第 1 学期 ）



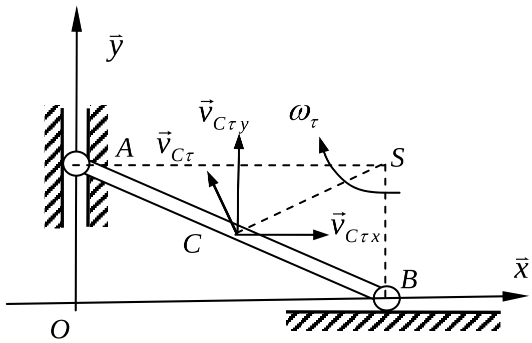
1． (20 分) 如图所示，匀质杆 B_1 的端点 A 可在光滑的铅垂滑槽中滑动，另一端点 B 在光滑的水平面上滑动。杆 B_1 的质量为 m，长为 $2l$。在图示瞬时，系统静止，杆 B_1 的端点 B 作用一水平冲量 $\vec{I}$ （图中 A-$\vec{\boldsymbol{e}}$ 为惯性基）。求碰撞后

（1） 杆的角速度；

（2） 滑槽作用于杆端点 A 的理想约束冲量.

解：

(a) 碰撞过程的速度分析（总共 7 分）



运动学分析图（2 分）

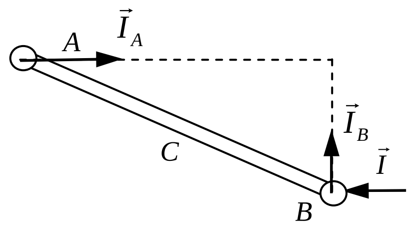
撞击前，系统静止，杆 B_1 的角速度 $\omega_0 = 0$，质心 C 的速度 $v_C = 0$，则 $v_{Cx0} = 0$，$v_{C0y} = 0$(1)。

（1 分）

设撞击后 B_1 的角速度为 ω_τ，此时，杆 B_1 作平面运动，S 为杆 B_1 的速度瞬心。 （1 分）

$$v_{C\tau} = l\omega_\tau，\quad v_{C\tau x} = -\frac{1}{2}l\omega_\tau，\quad v_{C\tau y} = \frac{\sqrt{3}}{2}l\omega_\tau \quad (1)$$ （3 分）

(b) 碰撞过程中动量定理和动量矩定理积分形式的应用（总共 13 分）



受力图（2 分）

取杆 B$_1$ 为研究对象：

$$m\left(v_{C\tau x}-0\right)=I_A-I \quad (2) \quad （3 分）$$

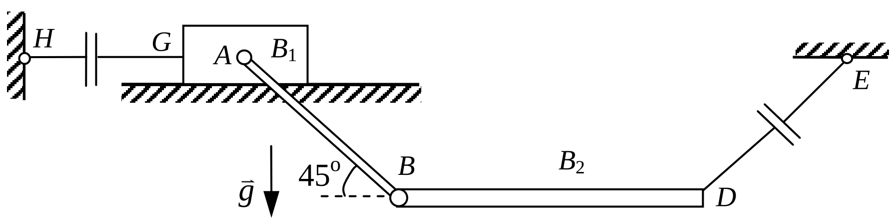
$$m\left(v_{C\tau y}-0\right)=I_B \quad (3) \quad （3 分）$$

$$\frac{1}{12}m(2l)^2\left(-\omega_\tau-0\right)=\frac{\sqrt{3}}{2}l\,I_B-\frac{1}{2}l\,I-\frac{1}{2}l\,I_A \quad (4) \quad （3 分）$$

附加方程为 $v_{C\tau x}=-\frac{1}{2}l\omega_\tau$，$v_{C\tau y}=\frac{\sqrt{3}}{2}l\omega_\tau$ (1)。

由(1)，(2) ，(3) ，(4)，解得：

$\omega_\tau=\frac{3I}{4ml}$ （1 分），$I_A=\frac{5}{8}I$ （1 分）



2. （20 分）图示系统，滑块 B_1 可以在光滑的水平面上滑动，均质杆 B_2 与滑块 B_1 分别与不计质量的细杆 AB 铰接，铰点 A 为滑块 B_1 的质心。滑块 B_1 和杆 B_2 的质量均为 m。杆 B_2 的长度为 $2l$，细杆 AB 长度为 $\sqrt{2}l$。图示杆 B_2 一端 D 由软绳 ED 悬挂，使其保持水平；滑块 B_1 一端 G 通过软绳 HG 与支座连接；细杆 AB 与水平线的夹角为 45°。当软绳 ED 和软绳 HG 被同时割断时，系统在重力作用下无初速开始运动，请用达朗贝尔原理求该瞬时

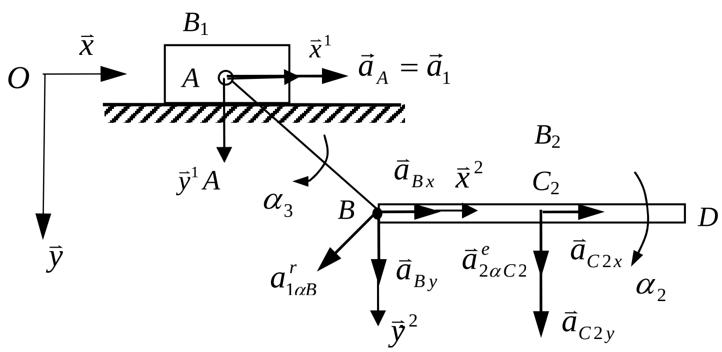
(1) 滑块 B_1 的加速度；

(2) 杆 B_2 的角加速度；

(3) 细杆 AB 的内力。

解：

(a) 运动学分析（总共 6 分）



运动学分析图（1 分）

建立惯性基 O-$\vec{\boldsymbol{e}}$，运动学分析如图所示。

设系统无初速开始运动时，滑块 B_1 质心的加速度为 $\vec{a}_A=\vec{a}_1$，以 A 为基点，建立 B_1 的连体基 A-$\vec{\boldsymbol{e}}^1$，点 B 为动点。由于连体基 A-$\vec{\boldsymbol{e}}^1$ 平动，点 B 的加速度为

$$\vec{a}_B=\vec{a}^e_{1tB}+\vec{a}^r_{1\alpha B}+\vec{a}^r_{1\omega B}\text{，}\quad a^e_{1tB}=a_A \quad \text{（1 分）}$$

设杆 AB 的角加速度为 α_3，由于系统无初速开始运动，杆 AB 的角速度为 0，

$$a^r_{1\omega B}=0\text{，}\quad a^r_{1\alpha B}=2\sqrt{2}l\alpha_3 \quad \text{（1 分），得到：}$$

$$a_{Bx}=a_A-\frac{\sqrt{2}}{2}a^r_{1B}=a_1-l\alpha_3\text{，}\quad a_{By}=\frac{\sqrt{2}}{2}a^r_{1B}=l\alpha_3 \quad \text{（1 分）}$$

以 B 为基点，建立杆 B_2 的连体基 B-$\vec{\boldsymbol{e}}^2$，如图所示。

设点 C_2 为杆 B_2 的质心，该点的加速度为

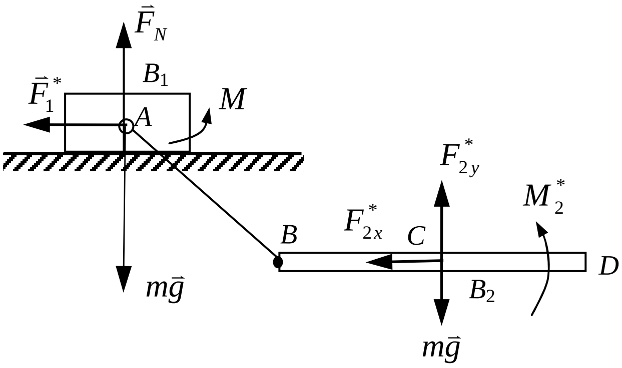
$$\vec{a}_{C2}=\vec{a}^e_{2tC2}+\vec{a}^e_{2\alpha C2}+\vec{a}^e_{2\omega C2}=\vec{a}_B+\vec{a}^e_{2\alpha C2}+\vec{a}^e_{2\omega C2}\text{，}\quad \text{（1 分）}$$

设杆 B_2 的角加速度为 α_2，$a^e_{2\alpha C2}=l\alpha_2$，由于系统无初速开始运动，杆 B_2 的角速度为 0，

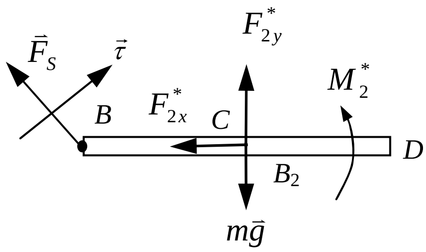
$a^e_{2\omega C2}=0$，得到：

$$a_{C2x}=a_{Bx}=a_1-l\alpha_3\text{，}\quad a_{C2y}=a_{By}+l\alpha_2=l(\alpha_3+\alpha_2) \quad \text{（1 分）}$$

(b) 受力图和惯性力系定义（总共 7 分）



系统受力图（1 分）



B_2 受力图（1 分）

画出系统受力图和 B_2 受力图。

由于细杆 AB 是两力杆，$\vec{F}_S$ 在 $\vec{\tau}$ 方向的分量为 0，即 $F_{S\tau}=0$ （1 分）

由于滑块 B_1 平动，以质心 A 为简化中心，惯性力系的合力为：

$F_1^* = ma_1$，（1 分）

由于杆 B_2 平面运动，以质心 C_2 为简化中心，惯性力系的主矢在 $\vec{x},\vec{y}$ 方向的分量为：

$\vec{F}_{2x}^* = ma_{C2x} = m(a_1 - l\alpha_3)$，（1 分）$\vec{F}_{2y}^* = ma_{C2y} = ml(\alpha_2+\alpha_3)$（1 分）

惯性力系关于质心 C_2 的主矩为：

$M_2^* = \dfrac{1}{2}m(2l)^2\alpha_2 = \dfrac{1}{3}ml^2\alpha_2$（1 分）

(c) 动静法，写平衡方程（总共 7 分）

取系统为研究对象，利用达朗贝尔原理，平衡方程为：

$$\sum_{i=1}^{n} F_{ix} = 0,\quad -F_1^* - F_{2x}^* = 0$$

得到：$2ma_1 - ml\alpha_3 = 0$， 即为 $a_1 = \dfrac{1}{2}l\alpha_3$ （1）（1 分）

取杆 B_2 为研究对象，利用达朗贝尔原理，平衡方程为：

$$\sum_{i=1}^{n} M_{Bz}(\vec{F}_i) = 0,\quad lF_{2y}^* + M_2^* - lmg = 0$$

得到： $\dfrac{4}{3}ml^2\alpha_2 + ml^2\alpha_3 - lmg = 0$ （2）（1 分）

由于 $\vec{F}_S$ 在 $\vec{\tau}$ 上分量为 0，

$\sum_{i=1}^{n} F_{i\tau} = 0$， $\frac{\sqrt{2}}{2} F_{2y}^{*} - \frac{\sqrt{2}}{2} F_{2x}^{*} - \frac{\sqrt{2}}{2} mg = 0$

得到：$ml(\alpha_2 + \alpha_3) - m(a_1 - l\alpha_3) - mg = 0$ （1 分）

将（1）代入上式，得到：$\frac{3}{2} ml\alpha_3 + ml\alpha_2 - mg = 0$ （3）

由（2）和（3）计算得到：

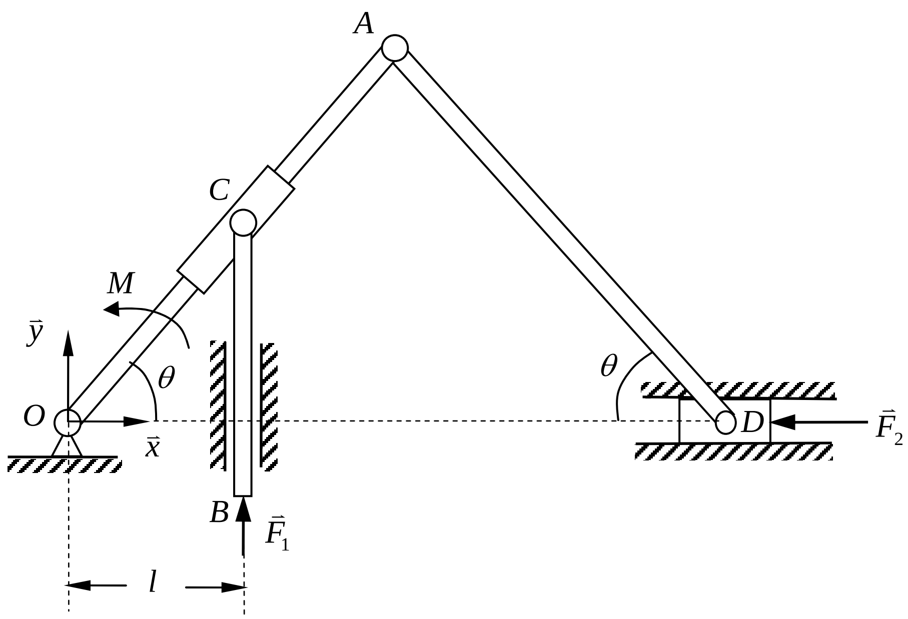
$\alpha_2 = \frac{1}{2}\frac{g}{l}$， （1 分）

$\alpha_3 = \frac{1}{3}\frac{g}{l}$，代入（2），得到：$a_1 = \frac{1}{6} g$ （1 分）

取杆 B_2 为研究对象，利用达朗贝尔原理，平衡方程为：

$\sum_{i=1}^{n} F_{ix} = 0$， $-\frac{1}{\sqrt{2}} F_S - F_{2x}^{*} = 0$， $\vec{F}_{2x}^{*} = m(a_1 - l\alpha_3) = -\frac{1}{6} mg$ （1 分）

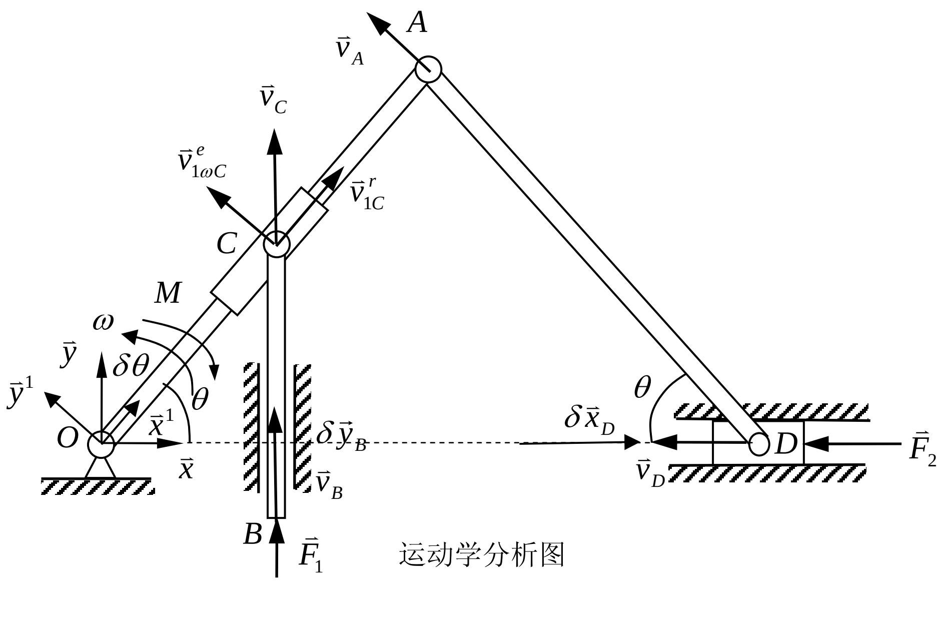
解得：$F_S = \frac{\sqrt{2}}{6} mg$ （1 分）



3．（20 分）图示系统由杆 *OA*、杆 *BC*、套筒 *C*、杆 *AD* 和滑块 *D* 组成。铰 *A*、*C*、*D* 为圆柱铰，铰 *O* 处为固定铰支座，套筒 *C* 可以相对杆 *OA* 滑动，杆 *BC* 可以在铅垂滑槽内滑动，滑块 *D* 可以在水平滑槽内滑动。杆 *OA* 和杆 *AD* 的长度均为 $2\sqrt{2}\,l$。铅垂力 $\vec{F}_1$ 作用于杆 *BC*，水平力 $\vec{F}_2$ 作用于滑块 *D*，力偶 *M* 作用于杆 *OA*，不计各物体的重量和摩擦。系统在图示位置 $\theta = 45^{\circ}$ 处于平衡。（图中 *D*-$\vec{\boldsymbol{e}}$ 为惯性基）用虚位移原理求系统平衡时

(1) 主动力（偶）间的关系；

(2) 铰点 *O* 沿 *x* 方向的约束力。



运动学分析图

解 1（速度法）：

（1）主动力（偶）间的关系计算（总共 15 分）

(a) 虚功表达式（总共 5 分）

系统为一个自由度问题，取θ为广义坐标，由虚位移原理：

$-M\delta\theta + F_1\delta y_B - F_2\delta x_D = 0$ (1) （5 分）

(b) 建立虚位移关系（总共 10 分）

运动学分析图（1 分）

设杆 OA 的角速度为ω， $\omega = \dot{\theta}$

$\vec{v}_C = \vec{v}_{1C} = \vec{v}_{1tC}^e + \vec{v}_{1\omega C}^e + \vec{v}_{1C}^r$ （1 分）， $\vec{v}_{1tC}^e = \vec{0}$

得到：$\vec{v}_C = \vec{v}_{1\omega C}^e + \vec{v}_{1C}^r$， $v_{1\omega C}^e = \sqrt{2}l\omega$ （1 分）

在$\vec{y}^1$上投影：$\dfrac{\sqrt{2}}{2}v_C = v_{1\omega C}^e$，解得：$v_C = \sqrt{2}v_{\omega C}^e = 2l\omega$ （1 分）

杆 BC 作直线平动，$v_B = v_C = 2l\omega$， $\dot{y}_B = v_B = 2l\omega = 2l\dot{\theta}$， 得到：$\delta y_B = 2l\delta\theta$（1 分）

由速度投影定理：$v_A = v_D\cos 45^{\circ} = \dfrac{\sqrt{2}}{2}v_D$ （1 分）， $v_A = 2\sqrt{2}\,\omega l$ （1 分）

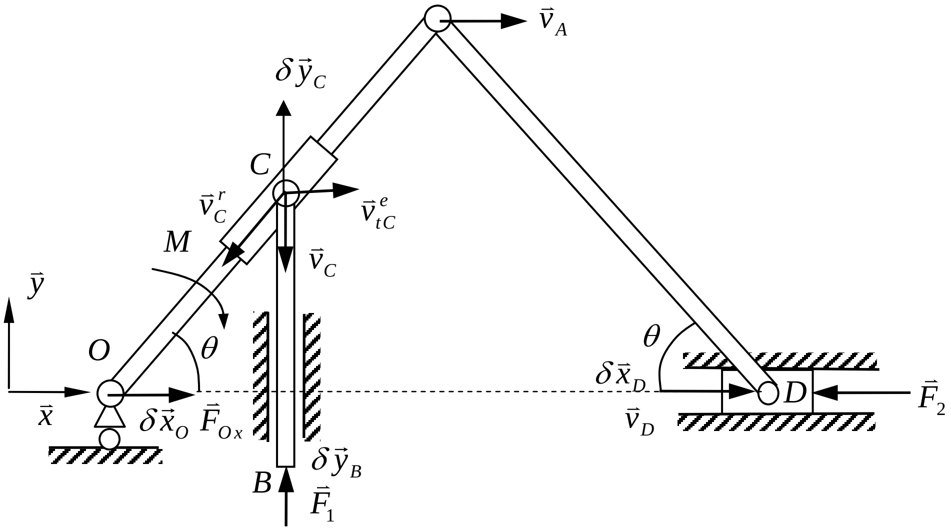
得到：$v_D = \sqrt{2}v_A = 4\omega l = 4l\dot{\theta}$，

$\dot{x}_D = -v_D = -4\omega l = -4l\dot{\theta}$，得到：$\delta x_D = -4l\delta\theta$ （1 分）

代入(1)：

$-M\delta\theta + F_1 2l\delta\theta + F_2 4l\delta\theta = 0$ （1 分）

即：$M = 2F_1 l + 4F_2 l$ （1 分）



（2）铰点 O 沿 x 方向的约束力 （总共 5 分）

释放铰点 O 的 x 方向的约束，施加约束力 $\vec{F}_{Ox}$。此时为两个自由度问题，广义坐标为 x_O 和 θ。令 $\delta\theta = 0$，

由虚位移原理：$-F_2\delta x_D + F_{Ox}\delta x_O + F_1\delta y_B = 0$ (1) （2 分）

由于 $\delta\theta = 0$，杆 OA 和杆 AD 均作平动，$\vec{v}_D = \vec{v}_A = \vec{v}_O$，$\delta x_D = \delta x_A = \delta x_O$

$\vec{v}_C = \vec{v}_{tC}^e + \vec{v}_{\omega C}^e + \vec{v}_C^r$，（1 分）由于 $\dot{\theta} = 0$，$\vec{v}_{\omega C}^e = \vec{0}$

$\vec{v}_C = \vec{v}_{tC}^e + \vec{v}_C^r$，$\dot{y}_C = -v_C = -v_{tC}^e = -v_O = -\dot{x}_O$，得到：$\delta y_B = \delta y_C = -\delta x_O$ （1 分）

代入 (1)：

$-F_2\delta x_O + F_{Ox}\delta x_O - F_1\delta x_O = 0$，

解得：$F_{Ox} = F_1 + F_2$ （1 分）

解 2（坐标法）：

(1) 主动力（偶）间的关系计算（总共 15 分）

(a) 虚功表达式（总共 5 分）

由虚位移原理：

$-M\delta\theta + F_1\delta y_B - F_2\delta x_D = 0$ (1) （5 分）

(b) 建立虚位移关系（总共 10 分）

$y_C = l\tan\theta$，$\delta y_C = l\sec^2\theta\delta\theta = 2l\delta\theta$ （3 分）

杆 BC 作直线平动， $\delta y_B = \delta y_C = 2l\delta\theta$ （1 分）

$x_D = 4\sqrt{2}l\cos\theta$ （1 分）， $\delta x_D = -4\sqrt{2}l\sin\theta\delta\theta = -4l\delta\theta$ （3 分）

代入(1)，得到： $M = 2lF_1 + 4lF_2$ （2 分）

（2）铰点 O 沿 x 方向的约束力 （总共 5 分）

释放铰点 O 的 x 方向的约束，施加约束力 $\vec{F}_{Ox}$。此时为两个自由度问题，广义坐标为 x_O 和 θ。令 $\delta\theta = 0$，

由虚位移原理：$-F_2\delta x_D + F_{Ox}\delta x_O + F_1\delta y_B = 0$ (1) （2 分）

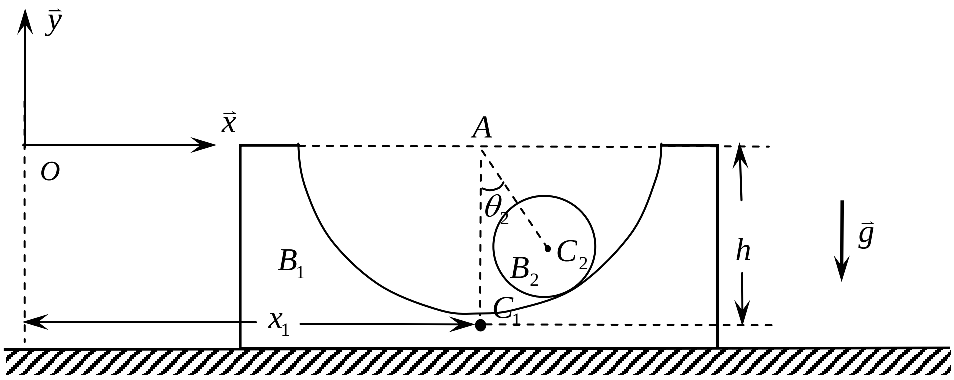
由于 $\delta\theta = 0$，杆 OA 和杆 AD 均作平动， $\delta x_D = \delta x_A = \delta x_O$ （1 分）

$y_C = (x_C - x_O)\tan\theta$， 由于 $x_C = \text{const}$

$\delta y_C = -\delta x_O \tan\theta = -\delta x_O$

杆 BC 作直线平动， $\delta y_B = \delta y_C = -\delta x_O$ （1 分）

代入(1)，得到： $F_{Ox} = F_1 + F_2$ （1 分）



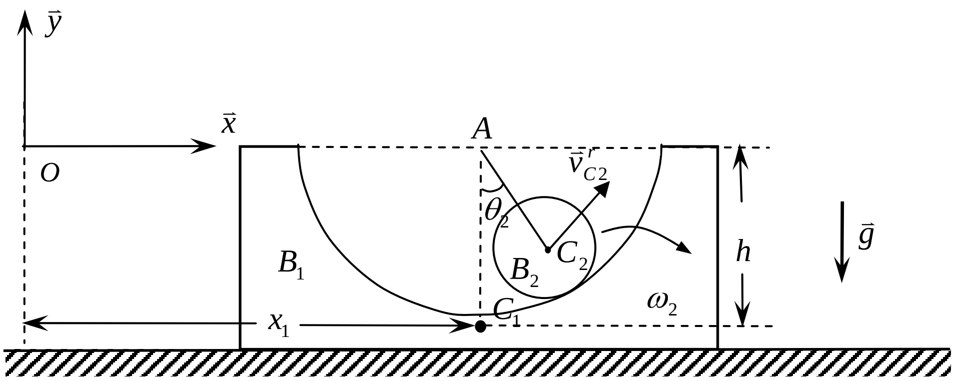
4. （20 分）带有圆槽的滑块 B_1 可以在光滑的水平面上滑动，圆盘 B_2 在圆槽内相对 B_1 作无滑动滚动。B_1 和 B_2 的质量均为 m。设圆盘 B_2 的半径为 r，圆槽的半径为 $R = 3r$ 。

（1）以 x_1 和 θ_2 为广义坐标写出系统的动能和势能。

（2）写出系统的初积分。

（3）如果初始时刻，$x_1 = 0$，$\theta_2 = \dfrac{\pi}{2}$，系统从静止开始运动，利用初积分求圆盘 B_2 运动到 AC_2 处于铅垂位置时，滑块 B_1 的速度。

（4）如果滑块 B_1 的运动为已知，速度为常数 v，写出此系统的初积分。



解：

(a) 动能和势能计算 （总共 8 分）

如图建立惯性基 O-$\vec{e}$

$x_{C2}=x_1+(R-r)\sin\theta_2$， $y_{C2}=-(R-r)\cos\theta_2$ （0.5 分）

对时间求导：

$\dot{x}_{C2}=\dot{x}_1+(R-r)\cos\theta_2\dot{\theta}_2$， $\dot{y}_{C2}=(R-r)\sin\theta_2\dot{\theta}_2$ （0.5 分）

由于圆盘 B_2 相对 B_1 作无滑动滚动，$\vec{v}_{C2}^r=r\omega_2^r=(R-r)\dot{\theta}_2$， （0.5 分）

由于滑块平动，$\omega_1=0$， $\omega_2=\omega_2^r=\dfrac{(R-r)\dot{\theta}_2}{r}$ （0.5 分）

系统的动能为：

$$T=\frac{1}{2}m\dot{x}_1^{\,2}+\frac{1}{2}m\left(\dot{x}_{C2}^{\,2}+\dot{y}_{C2}^{\,2}\right)+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}mr^2\omega_2^{\,2} \quad \text{（2 分）}$$

$$=m\dot{x}_1^{\,2}+\frac{3}{4}m(R-r)^2\dot{\theta}_2^{\,2}+m(R-r)\cos\theta_2\dot{x}_1\dot{\theta}_2 \quad \text{（1 分）}$$

$$V=-mgh-mg(R-r)\cos\theta_2 \quad \text{（3 分）}$$

(b) 写出系统的初积分 （总共 5 分）

拉格朗日函数为：

$$L=T-V=m\dot{x}_1^{\,2}+\frac{3}{4}m(R-r)^2\dot{\theta}_2^{\,2}+m(R-r)\cos\theta_2\dot{x}_1\dot{\theta}_2+mgh+mg(R-r)\cos\theta_2 \quad \text{（1 分）}$$

由于 L 不显含 x_1，循环积分为：

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_1}=C_1 \quad \text{（1 分）}$$

$$2m\dot{x}_1+m(R-r)\dot{\theta}_2=C_1 \quad \text{（1 分）}$$

由于 L 不显含 t，且 T 仅包含广义速度的 2 次项，$T_0=T_1=0$， $T=T_2$，广义能量积分为：

$$T+V=C_2 \quad \text{（1 分）}$$

$$m\dot{x}_1^{\ 2}+\frac{3}{4}m(R-r)^2\dot{\theta}_2^{\ 2}+m(R-r)\cos\theta_2\dot{x}_1\dot{\theta}_2-mgh-mg(R-r)\cos\theta_2=C_2$$ （1 分）

(c) 计算铅垂位置时滑块 B_1 的速度 （总共 3 分）

将 $R=3r$ 和初始条件 $\dot{x}_1(0)=0$，$\dot{\theta}_2(0)=0$ 代入，$C_1=0$，得到：

$2m\dot{x}_1+2mr\dot{\theta}_2=0$，得到 $r\dot{\theta}_2=-\dot{x}_1$ （1） （1 分）

将 $R=3r$ 和初始条件 $\dot{x}_1(0)=0$，$\theta_2(0)=\dfrac{\pi}{2}$，$\dot{\theta}_2(0)=0$ 代入，$C_2=-mgh$，得到：

$$m\dot{x}_1^{\ 2}+3mr^2\dot{\theta}_2^{\ 2}+2mr\cos\theta_2\dot{x}_1\dot{\theta}_2-mgh-2mgr\cos\theta_2=-mgh$$

化简得到：

$$m\dot{x}_1^{\ 2}+3mr^2\dot{\theta}_2^{\ 2}+2mr\cos\theta_2\dot{x}_1\dot{\theta}_2C_2-2mgr\cos\theta_2=0$$ （2） （1 分）

当圆盘 B_2 运动到 AC_2 处于铅垂位置时，$\theta_2=0$，得到

$$m\dot{x}_1^{\ 2}+3mr^2\dot{\theta}_2^{\ 2}+2mr\dot{x}_1\dot{\theta}_2-2mgr=0$$ （3）

将（1）代入（3）：

$$2m\dot{x}_1^{\ 2}-2mgr=0$$

解得：$v_1=\dot{x}_1=\sqrt{gr}$ （1 分）

(d) 非定常约束的初积分（总共 4 分）

如果 x_1 是时间的已知函数，$x_1(t)=vt$，$\dot{x}_1=v$，其中 v 是常数，圆盘处于非定常约束系统的自由度为 1，以 θ_2 为广义坐标。圆盘的动能为：

$$T=\frac{1}{2}mv^2+\frac{3}{4}m(R-r)^2\dot{\theta}_2^{\ 2}+m(R-r)\cos\theta_2 v\dot{\theta}_2$$

$T_0=\dfrac{1}{2}mv^2$，$T_1=m(R-r)\cos\theta_2 v\dot{\theta}_2$，$T_2=\dfrac{3}{4}m(R-r)^2\dot{\theta}_2^{\ 2}$ （1 分）

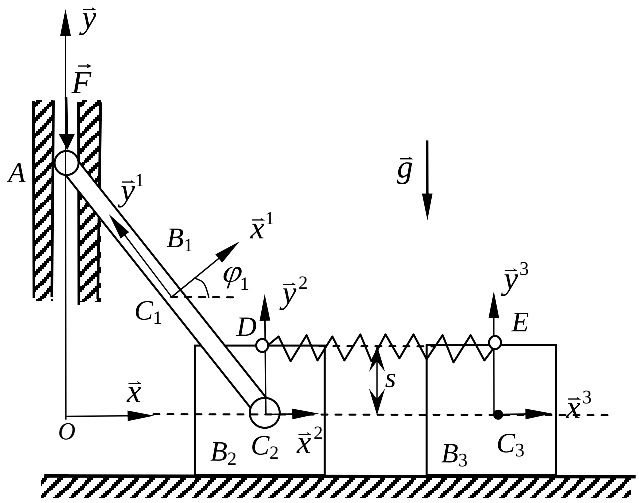
$$L=T-V=\frac{1}{2}mv^2+\frac{3}{4}m(R-r)^2\dot{\theta}_2^{\ 2}+m(R-r)\cos\theta_2 v\dot{\theta}_2+mg(R-r)\cos\theta_2$$ （1 分）

由于 L 不显含时间 t，系统的广义能量积分为：

$T_2-T_0+V=C$ （1 分）

即

$$\frac{3}{4}m(R-r)^2\dot{\theta}_2^{\ 2}-\frac{1}{2}mv^2-mg(R-r)\cos\theta_2=C$$ （1 分）



5．（20 分）如图动力学系统由均质杆 B_1、滑块 B_2 和滑块 B_3 组成，杆 B_1 与滑块 B_2 在 C_2 处铰接，端点 A 可以在光滑的铅垂滑槽内滑动，滑块 B_2 和滑块 B_3 可以在光滑的水平面上滑动。设杆 B_1 的长度为 $2l$，构件 B_i 的质量为 $m_i\,(i=1,2,3)$，滑块 B_2 和滑块 B_3 关于质心的转动惯量分别为 J_2 和 J_3。铅垂力 $\vec{F}$ 作用于杆 B_1 的端点 A。滑块 B_2 和滑块 B_3 间有线弹簧，刚度为 k，原长为 l_0，作用点分别为点 C_2 和点 C_3 的上方 D 和 E，直线 DE 与 C_2C_3 之间的距离为 s。图中 $O\text{-}\vec{\boldsymbol{e}}$ 为惯性基。以系统的位形坐标写出封闭的带拉格朗日乘子的第一类拉格朗日方程。

解：(a) 位移，速度和加速度约束方程和拉格朗日乘子（总共 8 分）

建立惯性基 $O\text{-}\vec{\boldsymbol{e}}$，分别在三构件的质心建立连体基 $\vec{\boldsymbol{e}}^{\,i}\,(i=1,2,3)$

系统的位形坐标为

$$\boldsymbol{q}=\begin{bmatrix}\boldsymbol{q}_1^{\,T} & \boldsymbol{q}_2^{\,T} & \boldsymbol{q}_3^{\,T}\end{bmatrix}^T$$ （1 分）

$$\boldsymbol{q}_i=\begin{pmatrix}x_i & y_i & \varphi_i\end{pmatrix}^T\ (i=1,2,3)$$

系统的运动学约束方程为：

$$\boldsymbol{\Phi}=\begin{bmatrix} x_1-l\sin\varphi_1 \\ x_1+l\sin\varphi_1-x_2 \\ y_1-l\cos\varphi_1-y_2 \\ y_2 \\ \varphi_2 \\ y_3 \\ \varphi_3 \end{bmatrix}=0$$ （2 分）

雅可比阵为：

$$\boldsymbol{\Phi}_q=\begin{bmatrix}1 & 0 & -l\cos\varphi_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\ 1 & 0 & l\cos\varphi_1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 1 & l\sin\varphi_1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1\end{bmatrix}$$ （1 分）

$$\boldsymbol{\Phi}_q{}^T=\begin{bmatrix}1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0\\ -l\cos\varphi_1 & l\cos\varphi_1 & l\sin\varphi_1 & 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1\end{bmatrix}$$ （1 分）

加速度约束方程为：

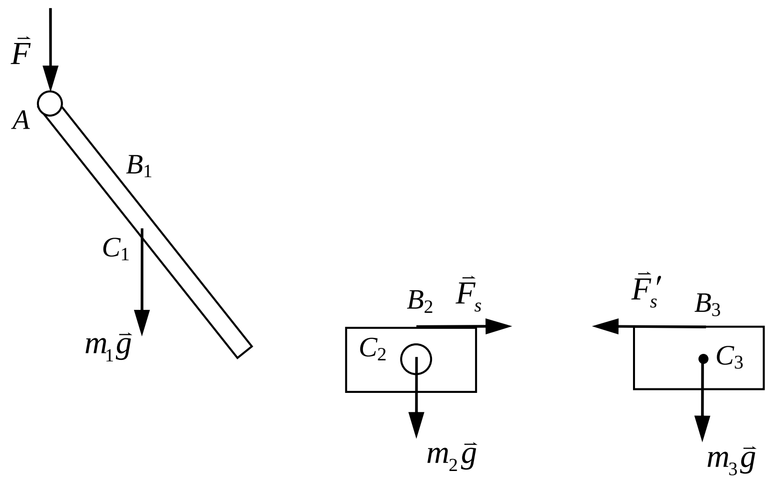
$$\ddot{\boldsymbol{\Phi}}=\boldsymbol{\Phi}_q\ddot{\boldsymbol{q}}-\boldsymbol{\gamma}=\begin{bmatrix}\ddot{x}_1-l\cos\varphi_1\ddot{\varphi}_1+l\sin\varphi_1\dot{\varphi}_1{}^2\\ \ddot{x}_1+l\cos\varphi_1\ddot{\varphi}_1-l\sin\varphi_1\dot{\varphi}_1{}^2-\ddot{x}_2\\ \ddot{y}_1+l\sin\varphi_1\ddot{\varphi}_1+l\cos\varphi_1\dot{\varphi}_1{}^2-\ddot{y}_2\\ \ddot{y}_2\\ \ddot{\varphi}_2\\ \ddot{y}_3\\ \ddot{\varphi}_3\end{bmatrix}=0$$ （1 分）

加速度约束方程的右项：

$$\boldsymbol{\gamma}=\begin{bmatrix}-l\sin\varphi_1\dot{\varphi}_1{}^2\\ l\sin\varphi_1\dot{\varphi}_1{}^2\\ -l\cos\varphi_1\dot{\varphi}_1{}^2\\ 0\\ 0\\ 0\\ 0\end{bmatrix}$$ （1 分）

$$\boldsymbol{\lambda}=(\lambda_1\quad\lambda_2\quad\lambda_3\quad\lambda_4\quad\lambda_5\quad\lambda_6\quad\lambda_7)^T$$ （1 分）

(b) 增广质量阵和增广主动力阵（总共 9 分）



主动力分析图（0.5 分）

刚体系的增广质量阵为：

$$\boldsymbol{Z} = diag(\boldsymbol{Z}_1, \boldsymbol{Z}_2, \boldsymbol{Z}_3)，\quad \boldsymbol{Z}_1 = \begin{pmatrix} m_1 & 0 & 0 \\ 0 & m_1 & 0 \\ 0 & 0 & m_1 l^2/3 \end{pmatrix}$$ （0.5 分）

$$\boldsymbol{Z}_2 = \begin{pmatrix} m_2 & 0 & 0 \\ 0 & m_2 & 0 \\ 0 & 0 & J_2 \end{pmatrix}$$ （0.5 分），$$\boldsymbol{Z}_3 = \begin{pmatrix} m_3 & 0 & 0 \\ 0 & m_3 & 0 \\ 0 & 0 & J_3 \end{pmatrix}$$ （0.5 分）

系统受到的外力为重力和铅垂力 $\vec{F}$。作功的力元有线弹簧力 $\vec{F}_s$，当线弹簧受拉伸时，作用在两滑块上的弹簧力大小为 $F_s = F_s' = k(x_3 - x_2 - l_0)$（1 分）。

这些力与力偶对增广主动力阵的贡献为：

对 B$_1$： $$\hat{\boldsymbol{F}}_1^a = \begin{bmatrix} 0 \\ -m_1 g - F \\ F\,l\sin\varphi_1 \end{bmatrix}$$ （2 分）

对 B$_2$： $$\hat{\boldsymbol{F}}_2^a = \begin{bmatrix} k(x_3 - x_2 - l_0) \\ -m_2 g \\ -sk(x_3 - x_2 - l_0) \end{bmatrix}$$ （2 分）

对 B$_3$： $$\hat{\boldsymbol{F}}_3^a = \begin{bmatrix} -k(x_3 - x_2 - l_0) \\ -m_3 g \\ sk(x_3 - x_2 - l_0) \end{bmatrix}$$ （2 分）

刚体系的增广主动力阵为：

$$\hat{\boldsymbol{F}}^{a}=\begin{bmatrix}\hat{\boldsymbol{F}}_1^{a}\\ \hat{\boldsymbol{F}}_2^{a}\\ \hat{\boldsymbol{F}}_3^{a}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\ -m_1g-F\\ F\,l\sin\varphi_1\\ k(x_3-x_2-l_0)\\ -m_2g\\ -sk(x_3-x_2-l_0)\\ -k(x_3-x_2-l_0)\\ -m_3g\\ sk(x_3-x_2-l_0)\end{bmatrix}$$

（c）封闭的带拉格朗日乘子的第一类拉格朗日方程（总共 3 分）

封闭的带拉格朗日乘子的第一类拉格朗日方程为：

$$\begin{bmatrix}\boldsymbol{Z} & \boldsymbol{\Phi}_{\boldsymbol{q}}^{T}\\ \boldsymbol{\Phi}_{\boldsymbol{q}} & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\ddot{\boldsymbol{q}}\\ \boldsymbol{\lambda}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\hat{\boldsymbol{F}}^{a}\\ \boldsymbol{\gamma}\end{bmatrix}$$ （2 分）

$\ddot{\boldsymbol{q}}=\left[\ddot{\boldsymbol{q}}_1^{T}\ \ddot{\boldsymbol{q}}_2^{T}\ \ddot{\boldsymbol{q}}_3^{T}\right]^{T}$，$\ddot{\boldsymbol{q}}_i=(\ddot{x}_i\ \ddot{y}_i\ \ddot{\varphi}_i)^{T}\ (i=1,2,3)$（1 分）