Institute of Media,
Information, and Network

谓词逻辑的等值和推理演算

Prof. Junni Zou

邹君妮

http://www.cs.sjtu.edu.cn/~zou-jn/

Dept. of Computer Science and Engineering
Shanghai Jiao Tong University

2 Mar. 2018

主要内容

- 谓词公式的等值
- 等值演算
- 范式（PNF, Skolem范式）
- 推理式及推理演算
- 归结推理

公式的等值

- 谓词公式α 和β 如果在任一解释下都有相同的真值，就说α和β是**等值**的（或逻辑等价），记作$\alpha = \beta$ （或 $\alpha \Leftrightarrow \beta$）
- 定理：$\alpha = \beta$ *iff* $\alpha \leftrightarrow \beta$ 是普遍有效的

命题逻辑移植来的等值式

- 在命题逻辑的等值式中以谓词公式代入命题变项,便可得谓词逻辑的等值式
- 命题逻辑中的等值公式在谓词逻辑中基本成立
- 例如：

$\neg\neg p = p$ ➔ $\neg\neg(\forall x)P(x) = (\forall x)P(x)$

$p \rightarrow q = \neg p \vee q$ ➔ $P(x) \rightarrow Q(x) = \neg P(x) \vee Q(x)$

量词转化型等值式

- **量词的转化**

$$(\forall x)\alpha(x) = \neg(\exists x)\neg\alpha(x)$$

$$\neg(\forall x)\alpha(x) = (\exists x)\neg\alpha(x)$$

$$(\exists x)\alpha(x) = \neg(\forall x)\neg\alpha(x)$$

$$\neg(\exists x)\alpha(x) = (\forall x)\neg\alpha(x)$$

- **例：**

$\neg(\forall x)(Animal(x) \rightarrow Cat(x))$并非动物都是猫

$= (\exists x)\neg(Animal(x) \rightarrow Cat(x))$

$= (\exists x)(Animal(x) \wedge \neg Cat(x))$存在不是猫的动物

量词分配等值式

- **量词对 $\wedge$ 及 $\vee$ 的分配律**

$$(\forall x)(\alpha(x) \vee \beta) = (\forall x)\alpha(x) \vee \beta$$

$$(\exists x)(\alpha(x) \vee \beta) = (\exists x)\alpha(x) \vee \beta$$

$$(\forall x)(\alpha(x) \wedge \beta) = (\forall x)\alpha(x) \wedge \beta$$

$$(\exists x)(\alpha(x) \wedge \beta) = (\exists x)\alpha(x) \wedge \beta$$

- 其中 β 是命题变项，**与个体变元 x 无关**

量词分配等值式(续)

- **量词对 $\rightarrow$ 的分配律**

$$(\forall x)(\alpha(x)\rightarrow\beta) = (\exists x)\alpha(x) \rightarrow \beta$$

$$(\exists x)(\alpha(x)\rightarrow\beta) = (\forall x)\alpha(x) \rightarrow \beta$$

$$(\forall x)(\beta\rightarrow\alpha(x)) = \beta\rightarrow(\forall x)\alpha(x)$$

$$(\exists x)(\beta\rightarrow\alpha(x)) = \beta\rightarrow(\exists x)\alpha(x)$$

- 其中β是命题变项，**与个体变元x无关**

量词分配等值式(续)

- $\forall$对$\wedge$, $\exists$对$\vee$的分配律

$$(\forall x)(\alpha(x)\wedge\beta(x)) = (\forall x)\alpha(x)\wedge(\forall x)\beta(x)$$

$$(\exists x)(\alpha(x)\vee\beta(x)) = (\exists x)\alpha(x)\vee(\exists x)\beta(x)$$

- **$\forall$对$\vee$, $\exists$对$\wedge$没有分配律**

  - 举例说明：

$$(\forall x)(Man(x)\vee Woman(x))$$

所有人要么是男人要么是女人

$$(\forall x)Man(x)\vee(\forall x)Woman(x)$$

要么所有人都是男人，要么所有人都是女人

量词分配等值式(续)

- **回顾：约束变元改名规则**

$$(\forall x)\alpha(x) = (\forall y)\alpha(y)$$

$$(\exists x)\alpha(x) = (\exists y)\alpha(y)$$

- **变元易名后的“分配律”**

$$(\forall x)\alpha(x)\vee(\forall x)\beta(x)=(\forall x)(\forall y)(\alpha(x)\vee\beta(y))$$

$$(\exists x)\alpha(x)\wedge(\exists x)\beta(x)=(\exists x)(\exists y)(\alpha(x)\wedge\beta(y))$$

改名与代人规则

规则1 (约束变元的改名规则)：

（1）将量词中出现的变元以及该量词辖域中此变量之所有约束出现都用新的个体变元替换；

（2）新的变元一定要有别于改名辖域中的所有其它变量。

规则2 (自由变元的代入规则)：

（1）将公式中出现该自由变元的每一处都用新的个体变元替换；

（2）新变元不允许在原公式中以任何约束形式出现

利用谓词之间的等值关系证明下列公式：

$(\forall x)P(x) \rightarrow Q(x) = (\exists y)(P(y) \rightarrow Q(x))$

证明 $(\forall x)P(x) \rightarrow Q(x)$

$= \neg(\forall x)P(x) \vee Q(x)$

$= (\exists x)\neg P(x) \vee Q(x)$

$= (\exists y)\neg P(y) \vee Q(x)$

$= (\exists y)(\neg P(y) \vee Q(x))$

$= (\exists y)(P(y) \rightarrow Q(x))$

范式

- 回顾：在命题逻辑中，每一个公式都有与之等值的范式
- 谓词逻辑公式也有范式，其中**前束范式与原公式是等值的**，而其他范式与原公式只有较弱的关系

前束范式

- **定义：如果公式α 中的所有量词都位于公式最左端（不含否定词），且这些量词的辖域都延伸到公式的末端，则称α是前束范式。标准形式：**

$$(Q_1x_1)(Q_2x_2)\cdots(Q_nx_n)M(x_1, \ x_2, \ \cdots, \ x_n)$$

其中Q_1为量词∀或∃(i=1, …, n)，M称作公式α的母式(基式)，M中不再有量词。

- **前束范式定理：任一公式都有与之等值的前束范式**

如何转化成前束范式

- **定理** **谓词逻辑中的任一公式都可化为与之等价的前束范式，但其前束范式并不唯一。**

步骤： 设α 是任一公式，通过下述步骤可将其转化为与之等价的前束范式：

（1）消去公式中包含的联结词“→”、“↔”；

（2）反复运用摩根定律，直接将“¬”内移到原子谓词公式的前端；

（3）约束变元易名（如果必要的话）；

（4）使用分配等值公式，将所有量词提到公式的最前端。

求$\neg((\forall x)(\exists y)P(a,x,y)\rightarrow(\exists x)(\neg(\forall y)Q(y,b)\rightarrow R(x)))$的前束范式。

解　（1）消去联结词“→”、“↔”，得：

$\neg(\neg(\forall x)(\exists y)P(a, x, y)\vee(\exists x)(\neg\neg(\forall y)Q(y,b)\vee R(x)))$

（2）¬内移，得：

$(\forall x)(\exists y)P(a, x, y)\wedge\neg(\exists x)((\forall y)Q(y, b)\vee R(x))$

$=(\forall x)(\exists y)P(a, x, y)\wedge(\forall x)((\exists y)\neg Q(y, b)\wedge\neg R(x))$

（3）量词左移（使用分配等值式），得：

$(\forall x)((\exists y)P(a, x, y)\wedge(\exists y)\neg Q(y, b)\wedge\neg R(x))$

（4）变元易名（使用变元易名分配等值式），得：

$(\forall x)((\exists y)P(a, x, y)\wedge(\exists z)\neg Q(z, b)\wedge\neg R(x))$

$= (\forall x)(\exists y)(\exists z)(P(a, x, y)\wedge\neg Q(z, b)\wedge\neg R(x))$

$= (\forall x)(\exists y)(\exists z)S(a, b, x, y, z)$

即：$(\forall x)(\exists y)(\exists z)S(a, b, x, y, z)$为原式的前束范式，这里$S(a, b, x, y, z)$是原公式的母式。

Skolem标准形

- 前束范式对前束量词没有次序要求，也没有其他要求
- 如果对前束范式进而要求所有∃都在∀之左，或者只保留∀而消去∃，便得**Skolem标准形**
- **定理**：任意一个公式都有相应的Skolem标准形存在，但此Skolem标准形不一定与原公式等值。

Skolem标准形(1):∃-前束范式

- **一个公式的 ∃-前束范式形如**

  $(\exists x_1)\ldots(\exists x_i)(\forall x_{i+1})\ldots(\forall x_n)\ M(x_1,\ldots,x_n)$

  - 是前束范式
  - 至少有一个存在量词
  - 存在量词都在全称量词的左边
  - $M(x_1,\ldots,x_n)$中不再有量词，也无自由个体变项

∃-前束范式定理

- **定理：任一公式 α 都可化为 ∃-前束范式α'，并且**

  $$\alpha \text{ 普遍有效 } iff\ \alpha' \text{ 普遍有效}$$

- **说明:**
  - 只有普遍有效的公式α ,才与其 ∃-前束范式是等值的
  - 一般的公式与其∃-前束范式并不等值
  - 用于FOL完备性的证明

求: $(\exists x)(\forall y)(\exists u)P(x,y,u)$的 ∃-前束范式 ($P$中无量词)

1. 先求前束范式. 本例已是.

2. 关键一步: $(\forall y)$改写成$(\exists y)\ldots(\forall z)$. 形如

$$(\exists x)((\exists y)(\exists u)(P(x,y,u) \wedge \neg S(x,y)) \vee (\forall z)S(x, z))$$

- 引入新谓词S和新变元z

3.$(\forall z)$左移即得结果:

$$(\exists x)(\exists y)(\exists u)(\forall z)((P(x,y,u) \wedge \neg S(x,y)) \vee S(x, z))$$

- **当有多个∀在∃的左边，可按此法逐一右移**

Skolem标准形(2)

- **前束范式中消去所有∃而只保留∀**
  - 术语"Skolem范式"一般指这种形式
- **定理：任一公式α 都可化为 Skolem范式α'，并且**

$$\alpha\ \text{(不)可满足}\ \textit{iff}\ \alpha'\ \text{(不)可满足}$$

  - 不是等值 (equivalent), 而是"等可满足"(equisatisfiable).

$(\exists x)(\forall y)(\forall z)(\exists u)(\forall v)(\exists w)P(x,y,z,u,v,w)$

1. 先求前束范式. 本例已是.

2. 关键: 消去$\exists$. 方法是引入个体常项或函数. 如

$(\forall y)(\forall z)(\exists u)(\forall v)(\exists w)P(a,y,z,u,v,w)$

- 消去 $\exists x$: 引入新个体常项a代入x

3. 消去$(\exists u)$时, 引进的个体因为与左边的y和z有关，所以不能用个体常项，而是用函数

$(\forall y)(\forall z)(\forall v)(\exists w)P(a,y,z,f(y,z),v,w)$

4.消去$(\exists w)$: $(\forall y)(\forall z)(\forall v)P(a,y,z,f(y,z),v,g(y,z,v))$

比较 $(\forall x)(\exists y)P(x,y)$ 与 $(\forall x)P(x, f(x))$:

- 在{1,2}域上

  $(\forall x)(\exists y)P(x,y)$

  $= (P(1,1) \vee P(1,2)) \wedge (P(2,1) \vee P(2,2))$

  $(\forall x)P(x, f(x)) = P(1, f(1)) \wedge P(2, f(2))$

- 两者明显不等值，但在(不)可满足的意义下两者是一致的

Skolem范式不保持等值

谓词逻辑的推理

- 命题逻辑中有关推理形式、重言蕴涵，以及基本的推理公式的讨论和所用的术语都可引入到谓词逻辑中，并可把命题逻辑的推理作为谓词逻辑的推理的一个部分来看待
- 我们讨论谓词逻辑所特有的推理形式和基本推理公式

推理形式

- **推理形式是指 (用→) 表达推理的公式**
- **推理形式表达的推理有正确的，也有错误的**
- 例1：所有整数都是有理数，所有有理数都是实数，所以所有整数都是实数.
  - 将这三句话形式化表示,可得如下推理形式

$$((\forall x)(Integer(x) \rightarrow Rational(x)) \wedge$$
$$(\forall x)(Rational(x) \rightarrow Real(x))) \rightarrow$$
$$(\forall x)(Integer(x) \rightarrow Real(x))$$

  - 这是正确的推理形式
  - 在命题逻辑里只能表达成$p \wedge q \rightarrow r$，显然不是正确的推理形式

推理形式

- 例2：人皆有死，孔子是人，所以孔子有死.

  $(\forall x)(Man(x) \rightarrow Mortal(x)) \wedge Man(\text{Confucius})$
  $\rightarrow Mortal(\text{Confucius})$

- 例3：若有一个又高又胖的人，则有一个高个子而且有一个胖子.

  $(\exists x)(Tall(x) \wedge Fat(x)) \rightarrow (\exists x)Tall(x) \wedge (\exists x)Fat(x)$

- 例4: 若某个体a具有性质E，那么所有个体 x 都具有性质E.

  $E(a) \rightarrow (\forall x)E(x)$

  - 这是错误的推理形式

基本推理式

(1) $(\forall x)P(x) \vee (\forall x)Q(x) \Rightarrow (\forall x)(P(x) \vee Q(x))$

(2) $(\exists x)(P(x) \wedge Q(x)) \Rightarrow (\exists x)P(x) \wedge (\exists x)Q(x)$

(3) $(\forall x)(P(x) \rightarrow Q(x)) \Rightarrow (\forall x)P(x) \rightarrow (\forall x)Q(x)$

(4) $(\forall x)(\mathrm{P}(x) \rightarrow Q(x)) \Rightarrow (\exists x)P(x) \rightarrow (\exists x)Q(x)$

(5) $(\forall x)(P(x) \leftrightarrow Q(x)\ ) \ \Rightarrow (\forall x)P(x) \leftrightarrow (\forall x)Q(x)$

(6) $(\forall x)(P(x) \leftrightarrow Q(x)) \Rightarrow (\exists x)P(x) \leftrightarrow (\exists x)Q(x)$

(7) $(\forall x)(P(x) \rightarrow Q(x)) \wedge (\forall x)(Q(x) \rightarrow R(x)) \Rightarrow (\forall x)(P(x) \rightarrow R(x))$

(8) $(\forall x)(P(x) \rightarrow Q(x)) \wedge P(a) \Rightarrow Q(a)$

(9) $(\forall x)(\forall y)P(x,y) \Rightarrow (\exists x)(\forall y)P(x,y)$

(10) $(\exists x)(\forall y)P(x,y) \Rightarrow (\forall y)(\exists x)P(x,y)$

(2) $(\exists x)(P(x) \wedge Q(x)) \Rightarrow (\exists x)P(x) \wedge (\exists x)Q(x)$

语义说明：若个体域是某班学生，$P(x)$表示x是高材生，$Q(x)$表示x是运动健将，那么$(\exists x)(P(x) \wedge Q(x))$表示有学生既是高材生又是运动健将，而$(\exists x)P(x) \wedge (\exists x)Q(x)$是说有高材生并且有运动健将 (但不要求高材生和运动健将是同一个学生).

显然推理式(2)成立.

因为结论比前提弱，推理式(2)的逆不成立.

推理演算

- 逻辑中的推理演算可推广到谓词逻辑。推理规则(代入规则需补充说明）都可直接移入谓词逻辑。
- 除此之外，还需引入4条有关量词的推理规则。

$\forall$ 消去规则

- **$\forall$ 消去规则: $(\forall x)\alpha(x) \Rightarrow \alpha(y)$**
  - y是个体变元，代表论域中任一个体.
  - $\alpha(y)$是在$\alpha(x)$中对x代入y的结果.
  - 当$\alpha(x)$中不含量词和其他变项时成立.
  - 当允许$\alpha(x)$中出现量词和变项时，则需限制y不在$\alpha(x)$中约束出现.

$\forall$ 引入规则

- **$\forall$ 引入规则:** $\alpha(y) \Rightarrow (\forall x)\alpha(x)$
  - y是论域中任一个体.
  - 显然若任一个体y(自由变项)都使α为真，那么$(\forall x)\alpha(x)$为真.
  - x不在$\alpha(y)$中出现.

∃消去规则

- **∃消去规则:** $(\exists x)\alpha(x) \Rightarrow \alpha(c)$
  - 其中c是未出现的个体常项.
  - 如果存在个体使$\alpha(x)$为真，那么就让c是那个个体，自然$\alpha(c)$为真.
  - 这是数学里常用的存在推理法.
  - 需限制$(\exists x)\alpha(x)$中没有自由个体变元出现.
  - 还需限制$\alpha(x)$中不含有c.

∃引入规则

- **∃引入规则:** $\alpha(c) \Rightarrow (\exists x)\alpha(x)$
  - 其中c是个体常项.
  - 意指如果有个体常项c使α为真，那么$(\exists x)\alpha(x)$也为真.
  - 需限制x不出现在$\alpha(c)$中.

使用中的注意事项

- **多个量词下的量词消去与引入规则:**
  - $(\forall x)(\exists y)\alpha(x,y) \Rightarrow (\exists y)\alpha(x,y)$
    - 右端不能写成$(\exists y)\alpha(y,y)$
  - $(\forall x)\alpha(x,c) \Rightarrow (\exists y)(\forall x)\alpha(x,y)$
    - 右端不能写成$(\exists x)(\forall x)\alpha(x,x)$
  - $(\forall x)(\exists y)\alpha(x,y) \Rightarrow (\exists y)\alpha(x,y) \Rightarrow \alpha(x,c)$
    - 但不能再反推出$(\forall x)\alpha(x,c)$和$(\exists y)(\forall x)\alpha(x,y)$
    - 原因是$(\forall x)(\exists y)\alpha(x,y)$成立时,对每个$x$所找到的$y$是依赖于$x$的,从而$\alpha(x,y)$的成立是有条件的,不是对所有的$x$都有同一个$y$.

推理演算

- **在谓词逻辑里，真值表法不能使用，又不存在判明 $\alpha \rightarrow \beta$ 普遍有效的一般方法，从而使用推理规则的推理演算是谓词逻辑的基本推理方法.**
- **推理演算过程:**
  - 首先将以自然语句表示的推理问题形式化表示
  - 若不能直接使用基本的推理公式便消去量词,在无量词下使用规则和公式推理
  - 最后再引入量词

推理演算举例

前提: $(\forall x)(P(x)\rightarrow Q(x))$，$(\forall x)(Q(x)\rightarrow R(x))$

结论: $(\forall x)(P(x)\rightarrow R(x))$

证明:

(1) $(\forall x)(P(x)\rightarrow Q(x))$	前提
(2) $P(x)\rightarrow Q(x)$	$\forall$消去
(3) $(\forall x)(Q(x)\rightarrow R(x))$	前提
(4) $Q(x)\rightarrow R(x)$	$\forall$消去
(5) $P(x)\rightarrow R(x)$	(2),(4)三段论
(6) $(\forall x)(P(x)\rightarrow R(x))$	$\forall$引入

推理演算举例

证明苏格拉底三段论：“所有的人都是要死的；苏格拉底是人。所以苏格拉底是要死的。”

解：设H(x)：x是人；M(x)：x是要死的；

s：苏格拉底。则符号化为：

$$(\forall x)(H(x)\rightarrow M(x)),\ H(s)\ \vdash\ M(s)$$

证明：

(1)	$(\forall x)(H(x)\rightarrow M(x))$	前提
(2)	$H(s)\rightarrow M(s)$	∀消去
(3)	$H(s)$	前提
(4)	$M(s)$	(2),(3)分离

推理演算举例

证明：

$$(\exists x)(P(x) \wedge Q(x)) \Rightarrow (\exists x)P(x) \wedge (\exists x)Q(x)$$

证明：1) $(\exists x)(P(x) \wedge Q(x))$

2) $P(c) \wedge Q(c)$

3) $P(c)$

4) $Q(c)$

5) $(\exists x)P(x)$

6) $(\exists x)Q(x)$

7) $(\exists x)P(x) \wedge (\exists x)Q(x)$

推理演算举例

请看上述推论的逆推导：

1) $(\exists x)P(x) \land (\exists x)Q(x)$

2) $(\exists x)P(x)$

3) $P(c)$

4) $(\exists x)Q(x)$

5) $Q(c)$

6) $P(c) \land Q(c)$

7) $(\exists x)(P(x) \land Q(x))$

如有两个含有存在量词的公式，用存在量词消去时，不能选用同一个常量符号来取代两个公式中的变元

推理演算举例

正确地推导：

1) $(\exists x)P(x) \land (\exists x)Q(x)$

2) $(\exists x)P(x)$

3) $P(c)$

4) $(\exists x)Q(x)$

5) $Q(b)$

6) $P(c) \land Q(b)$

7) $(\exists y)(P(c) \land Q(y))$

8) $(\exists x)(\exists y)(P(x) \land Q(y))$

推理演算举例

例　每个喜欢步行的人都不喜欢坐汽车；每个人或者喜欢坐汽车或者喜欢骑自行车；有的人不喜欢骑自行车。因而有的人不喜欢步行。

设：H(x)：x是人；　　　P(x)：x喜欢坐汽车；

　　Q(x)：x喜欢骑自行车；　R(x)：x喜欢步行。

则上述语句可符号化为：

$$(\forall x)(H(x)\land R(x)\rightarrow\neg P(x)),$$

$$(\forall x)(H(x)\rightarrow P(x)\lor Q(x)),$$

$$(\exists x)(H(x)\land\neg Q(x)) \Rightarrow (\exists x)(H(x)\land\neg R(x))$$

推理演算举例

(1) $(\exists x)(H(x) \wedge \neg Q(x))$

(2) $H(c) \wedge \neg Q(c)$

(3) $H(c)$

(4) $\neg Q(c)$

(5) $(\forall x)(H(x) \rightarrow P(x) \vee Q(x))$

(6) $H(c) \rightarrow P(c) \vee Q(c)$

(7) $P(c) \vee Q(c)$

(8) $P(c)$

推理演算举例

(9) $(\forall x)(H(x) \wedge R(x) \rightarrow \neg P(x))$

(10) $H(c) \wedge R(c) \rightarrow \neg P(c)$

(11) $\neg(H(c) \wedge R(c))$

(12) $\neg H(c) \vee \neg R(c)$

(13) $\neg R(c)$

(14) $H(c) \wedge \neg R(c)$

(15) $(\exists x)(H(x) \wedge \neg R(x))$

推理演算举例

证明下述论断的正确性：

所有的哺乳动物都是脊椎动物；并非所有的哺乳动物都是胎生动物；故有些脊椎动物不是胎生的。

解：设谓词如下：

P(x)：x是哺乳动物；

Q(x)：x是脊椎动物；

R(x)：x是胎生动物。

则有：

$$(\forall x)(P(x)\rightarrow Q(x)),\ \neg(\forall x)(P(x)\rightarrow R(x))$$

$$\Rightarrow (\exists x)(Q(x)\wedge\neg R(x))$$

推理演算举例

1) $\neg(\forall x)(P(x)\rightarrow R(x))$
2) $\neg(P(x)\rightarrow R(x))$
3) $\neg(\neg P(x)\vee R(x))$
4) $(P(x)\wedge\neg R(x))$
5) $P(x)$
6) $\neg R(x)$
7) $(\forall x)(P(x)\rightarrow Q(x))$
8) $P(x)\rightarrow Q(x)$
9) $Q(x)$
10) $Q(x)\wedge\neg R(x)$
11) $(\exists x)(Q(x)\wedge\neg R(x))$
12) $(\forall x)(Q(x)\wedge\neg R(x))$

消去量词、添加量词时，此量词必须位于整个公式的最前端，并且它的辖域为其后的整个公式

正确地推导：

1) $\neg(\forall x)(P(x)\rightarrow R(x))$

2) $(\exists x)\neg(\neg P(x)\vee R(x))$

3) $\neg(\neg P(c)\vee R(c))$

4) $(P(c)\wedge\neg R(c))$

5) $P(c)$

6) $\neg R(c)$

7) $(\forall x)(P(x)\rightarrow Q(x))$

8) $P(c)\rightarrow Q(c)$

9) $Q(c)$

10) $Q(c)\wedge\neg R(c)$

11) $(\exists x)(Q(x)\wedge\neg R(x))$

谓词逻辑的归结推理法

- 归结证明法可推广到谓词逻辑，证明过程同命题逻辑，只不过要考虑量词和个体变元带来的复杂性

- 使用推理规则的推理演算灵活而技巧性强；归结法较为机械，容易使用计算机来实现

归结证明过程

(1) 回忆：为证明$\alpha \Rightarrow \beta$，可等价地证明$\alpha \wedge \neg\beta$是矛盾式.

(2) 建立$\alpha \wedge \neg\beta$的子句集S

将$G = \alpha \wedge \neg\beta$化成等值的**前束范式**，进而化成**Skolem范式**(消去$\exists$)，得到仅含$\forall$的公式G^*.

- 回忆: G不可满足性 iff G^*不可满足

再将G^*中的$\forall$省略，并将G^*母式(已合取范式化)中的合取词$\wedge$以“,” 表示，便得子句集S.

- S与G是同不可满足的
- S中的变元均被$\forall$约束

归结证明过程

(3) 对S进行一步归结:

若S中有两个子句$C_1 = L_1 \vee C_1', C_2 = \neg L_2 \vee C_2'$,且对$L_1$与$L_2$有代入$\sigma$，使得两者合一(*unification*)

$$L_1\sigma = L_2\sigma$$

则可对其进行归结，得到归结式$C_1'\sigma \vee C_2'\sigma$，放入$S$中.

(4) 重复(3)，直至得到矛盾式.

例如: 设$C_1 = P(x) \vee Q(x)$, $C_2 = \neg P(a) \vee R(y)$,

对$P(x)$与$P(a)$进行变元代入$\sigma = \{x/a\}$后即可合一, 从而可做归结.

因此对$C_1\sigma$和$C_2\sigma$归结后得到归结式

$$Q(a) \vee R(y)$$

归结证明举例

$(\forall x)(P(x)\rightarrow Q(x)) \wedge (\forall x)(Q(x)\rightarrow R(x)) \Rightarrow (\forall x)(P(x)\rightarrow R(x))$

1. 改写成公式G：

$$(\forall x)(P(x)\rightarrow Q(x)) \wedge (\forall x)(Q(x)\rightarrow R(x)) \wedge \neg(\forall x)(P(x)\rightarrow R(x))$$

2. 求G的子句集S：可分别对三个合取项求子句集,然后求其并集.
(这样求得的子句集并非S,但与S是同不可满足的)

$(\forall x)(P(x)\rightarrow Q(x))$的子句集为$\{\neg P(x) \vee Q(x))$

$(\forall x)(Q(x)\rightarrow R(x))$的子句集为$\{\neg Q(x) \vee R(x)\}$

$\neg(\forall x)(P(x)\rightarrow R(x)) = (\exists x)\neg(\neg P(x) \vee R(x)) = (\exists x)(P(x) \wedge \neg R(x))$

经Skolem化得子句集$\{P(a), \neg R(a)\}$

于是得到G的子句集: $\{\neg P(x)\vee Q(x), \neg Q(x)\vee R(x), P(a), \neg R(a)\}$

归结证明举例

3. 归结过程：

(1) $\neg P(x) \vee Q(x)$	
(2) $\neg Q(x) \vee R(x)$	
(3) $P(a)$	
(4) $\neg R(a)$	
(5) $Q(a)$	(1)(3)归结
(6) $R(a)$	(2)(5)归结
(7) 空(矛盾)	(4)(6)归结

上海交通大學
SHANGHAI JIAO TONG UNIVERSITY

Institute of Media, Information, and Network

Q & A

Many Thanks

zou-jn@cs.sjtu.edu.cn