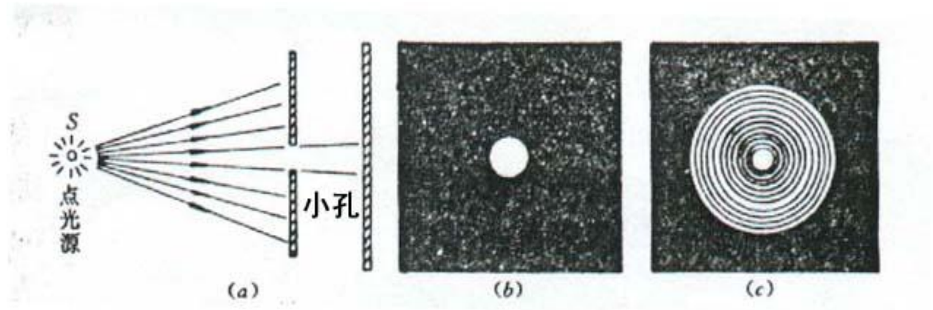
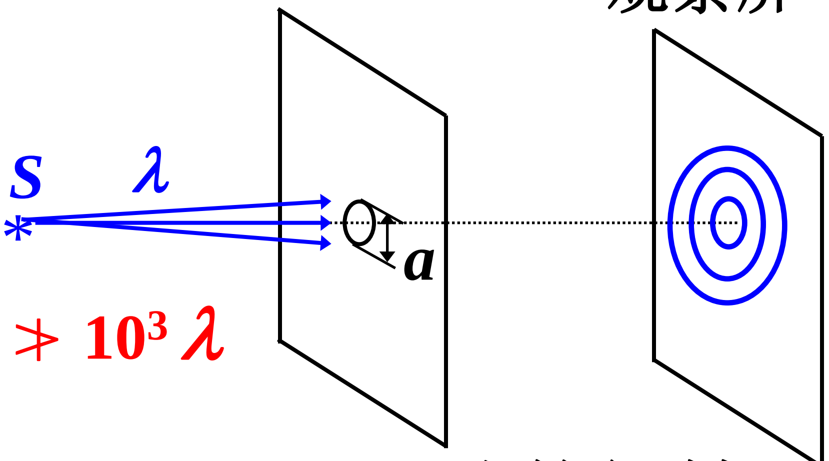
§ 20-7 夫琅禾费单缝衍射

一、光的衍射现象

光在传播过程中能绕过障碍物的边缘而偏离直线传播的现象叫光的衍射。



例



一般$a \ngtr 10^3\lambda$

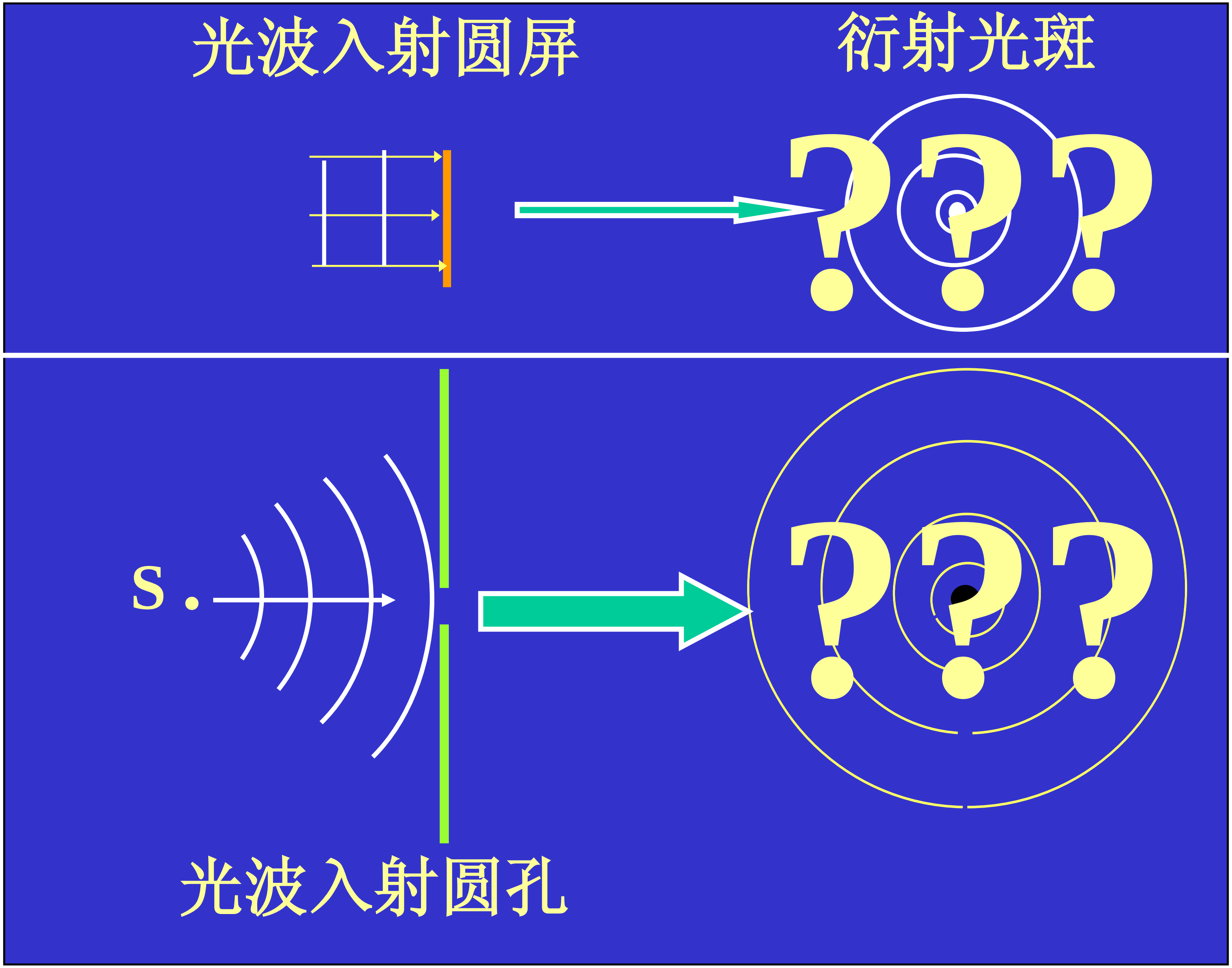
孔的衍射

不但光线拐弯，而且在屏上出现明暗相间的条纹。

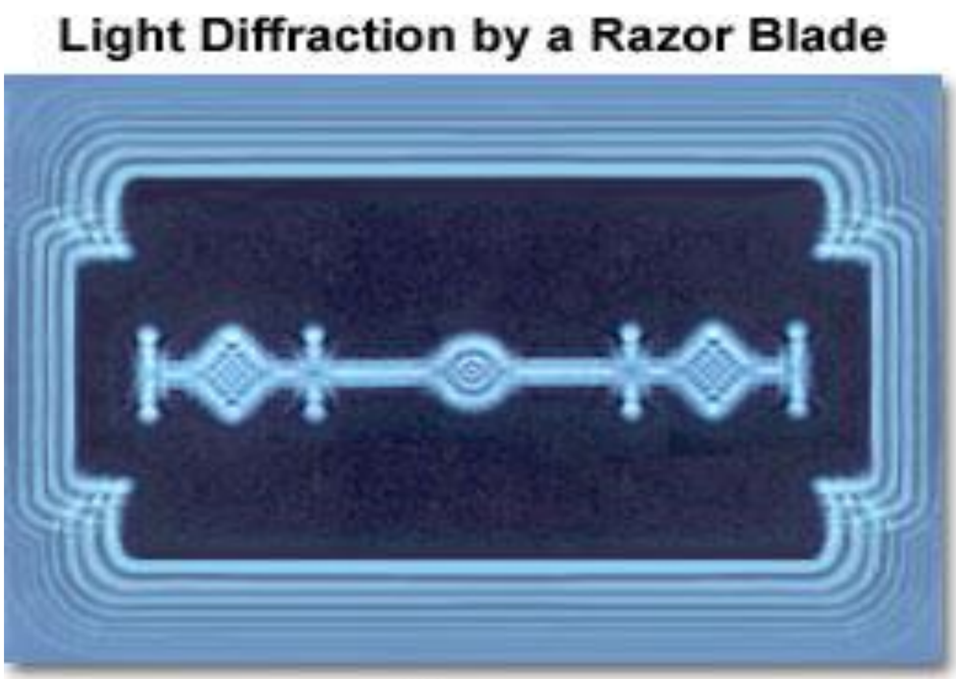
这是光具有波动性的重要表现。

一、光的衍射现象

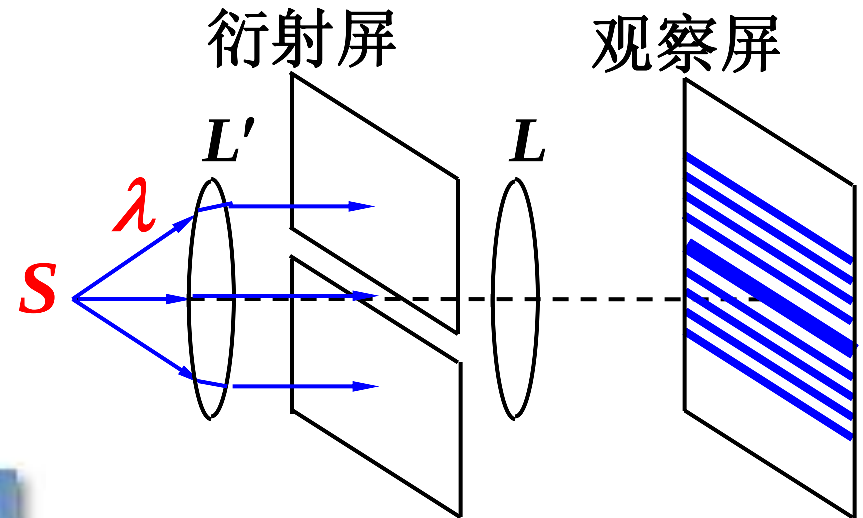
泊松斑



一、光的衍射现象

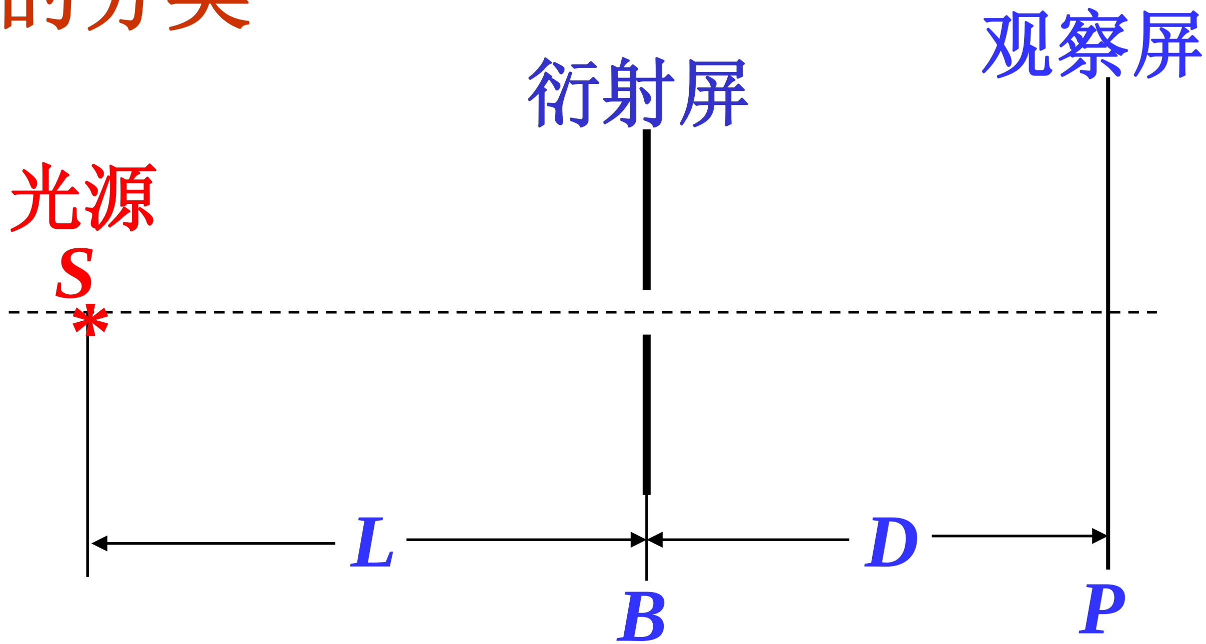


刀片边缘的衍射



缝的衍射

衍射现象的分类



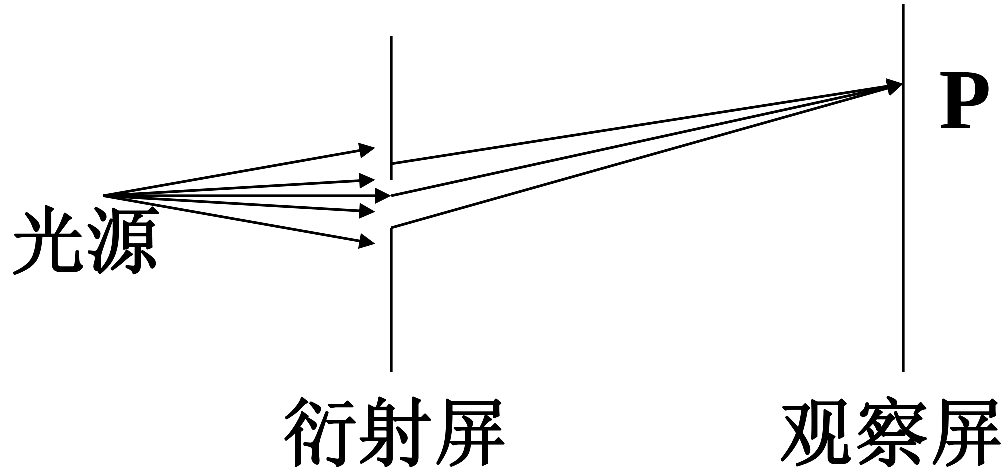
（1） 菲涅耳衍射 ——近场衍射

L 和 D中至少有一个是有限值。

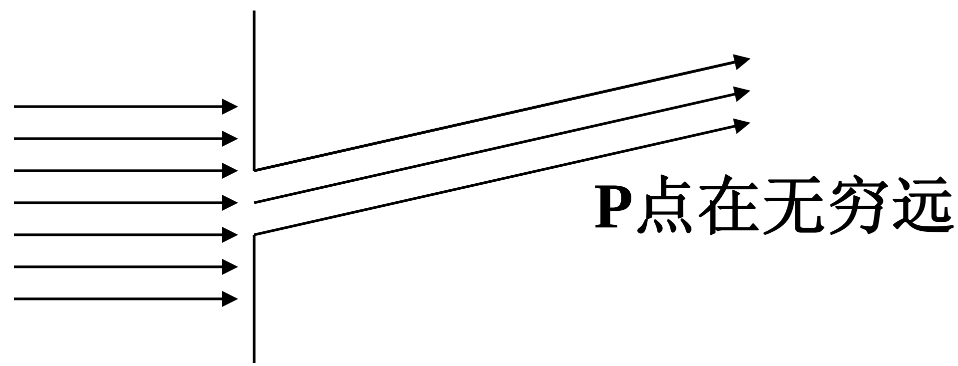
（2） 夫琅禾费衍射 ——远场衍射

L 和 D皆为无限大（也可用透镜实现）。

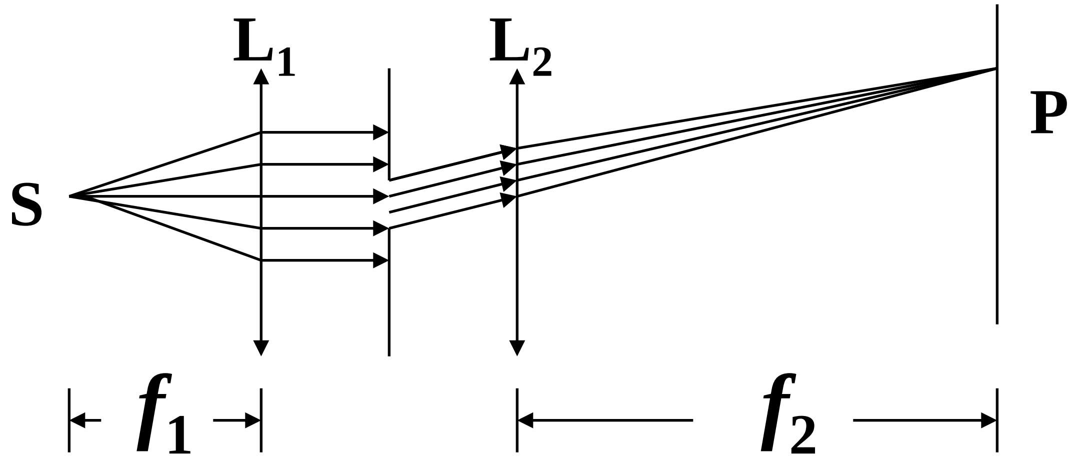
菲涅耳衍射:



夫琅禾费衍射:



观察单缝的夫琅禾费衍射的实验装置示意图:



二、惠更斯-菲涅耳原理

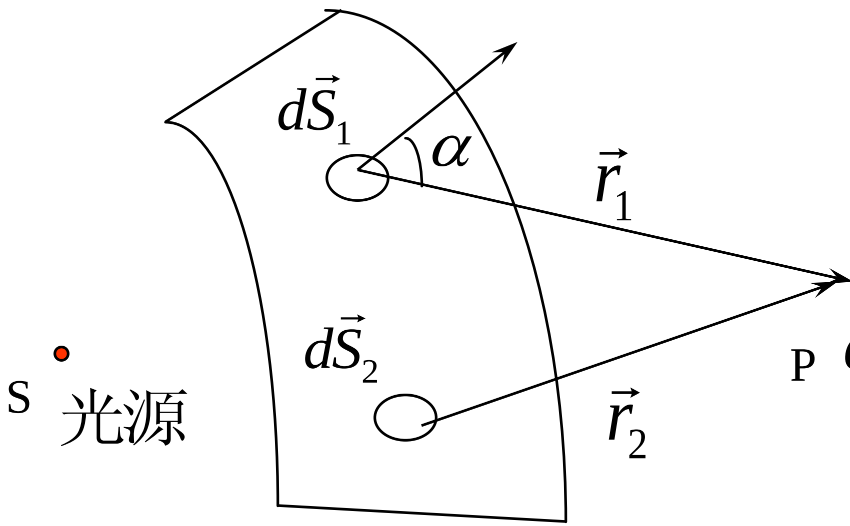
（Huygens—Fresnel principle ）

对惠更斯原理的修改

惠更斯——菲涅耳原理：**从同一波阵面上各点发出的次波，在传播过程中相遇时，也能相互叠加而产生干涉现象，空间各点波的强度，由各子波在该点的相干叠加所决定。**

二、惠更斯-菲涅耳原理

（Huygens—Fresnel principle ）



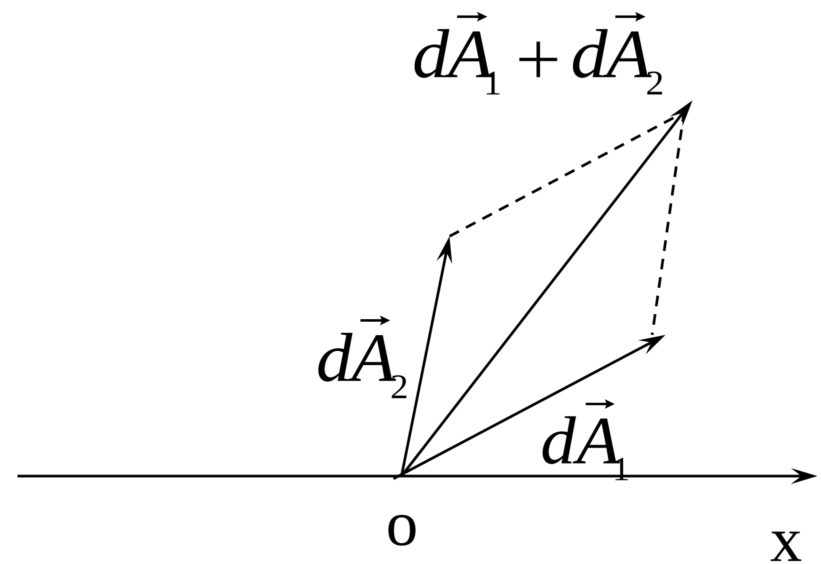
$$\boldsymbol{dA_1 \rightarrow d\vec{A}_1}$$ **:旋转振幅矢量**

$$\boldsymbol{dA_2 \rightarrow d\vec{A}_2}$$

$$\boldsymbol{dA_1 \propto \frac{dS_1}{r_1}}$$

$$\boldsymbol{\alpha \uparrow \rightarrow dA_1 \downarrow}$$

$$\boldsymbol{\alpha \geq \frac{\pi}{2} \rightarrow dA_1 = 0}$$

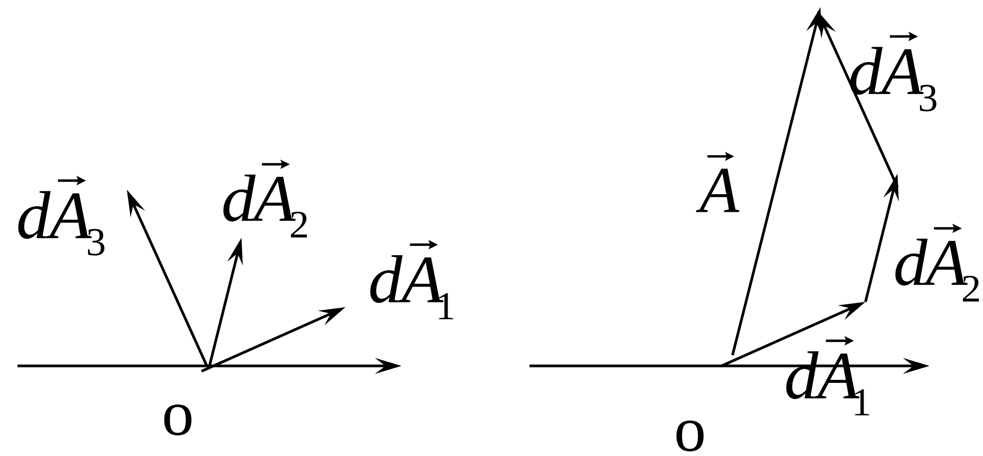


$\vec{A}$：合振动所对应之旋转振幅矢量

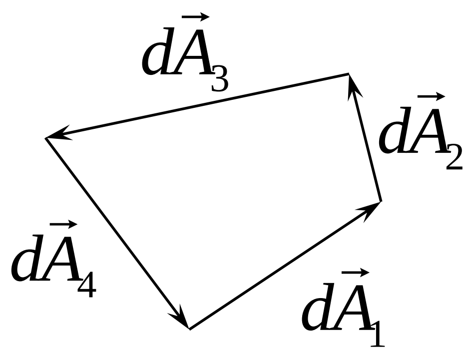
$$\vec{A} = d\vec{A}_1 + d\vec{A}_2 + \cdots$$

$$\vec{A} = \int d\vec{A}$$

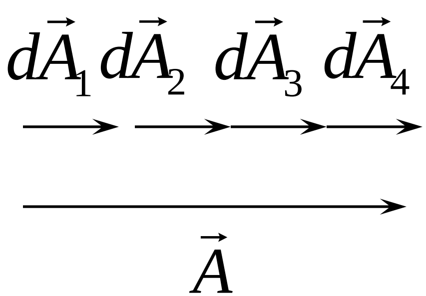
$$A = \left|\vec{A}\right| = \left|\int d\vec{A}\right|$$



特例：



$$\rightarrow A = 0 \rightarrow \text{暗点}$$



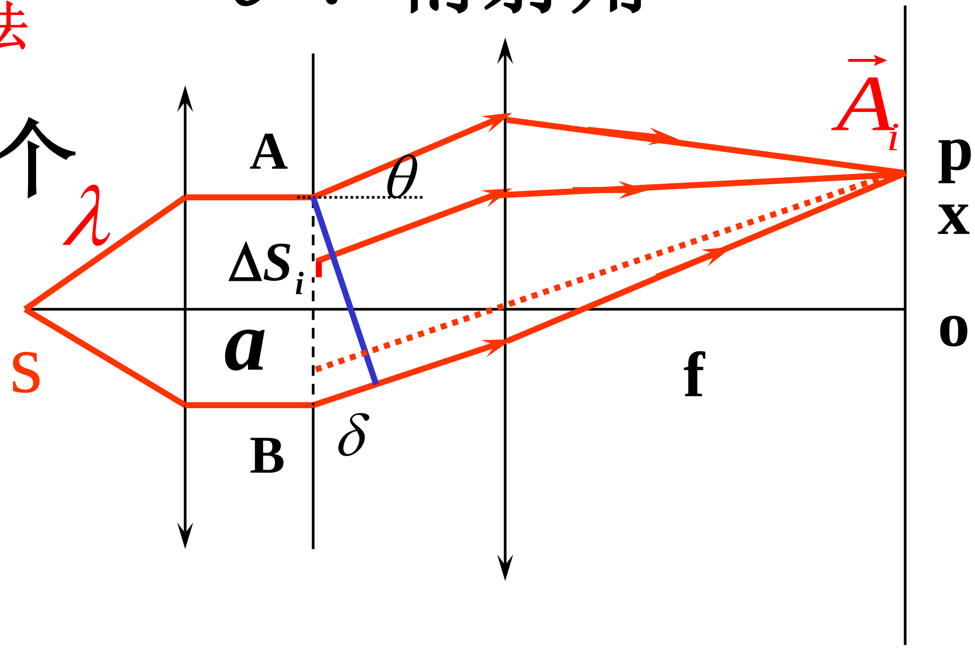
$$\rightarrow A = A_{\max} \rightarrow \text{亮点}$$

三、单缝衍射

振幅矢量法 ☀

复数积分法

θ：衍射角



将波阵面AB分割为N个等宽窄条ΔS

合振动 $\vec{A} = \sum_{i=1}^{N} \vec{A}_i$

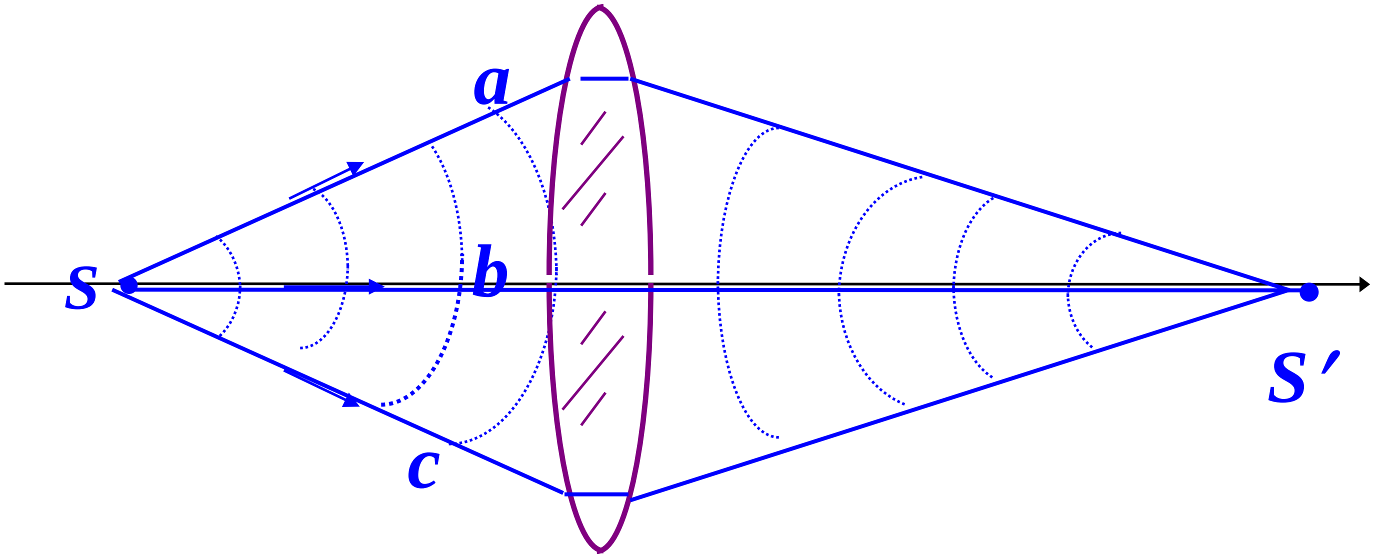
$$A_1 = A_2 = \cdots$$

$$A, B\text{到}P\text{点之光程差}\ \delta = a\sin\theta$$

$$\Delta S_i, \Delta S_{i+1}\text{到}P\text{点之光程差}\ \Delta\delta = a\sin\theta / N$$

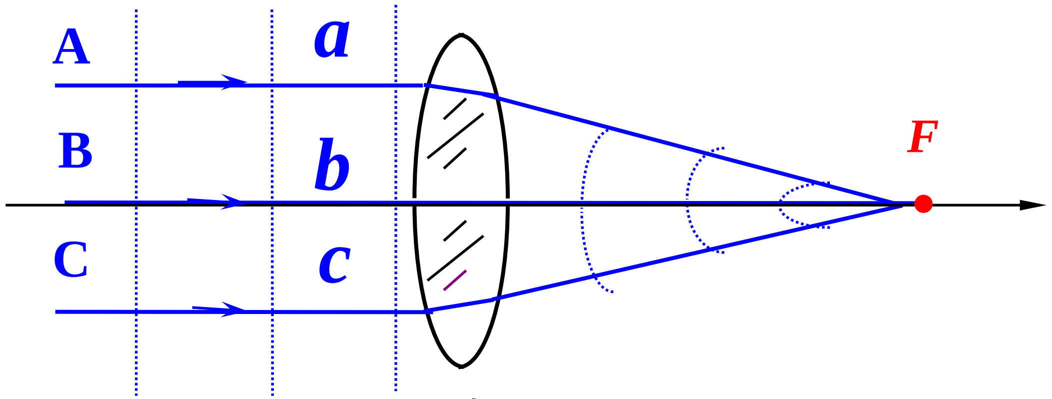
$$\vec{A}_i, \vec{A}_{i+1}\text{间周相差}\ \varphi = \frac{2\pi}{\lambda}\Delta\delta = \frac{2\pi a\sin\theta}{N\lambda}$$

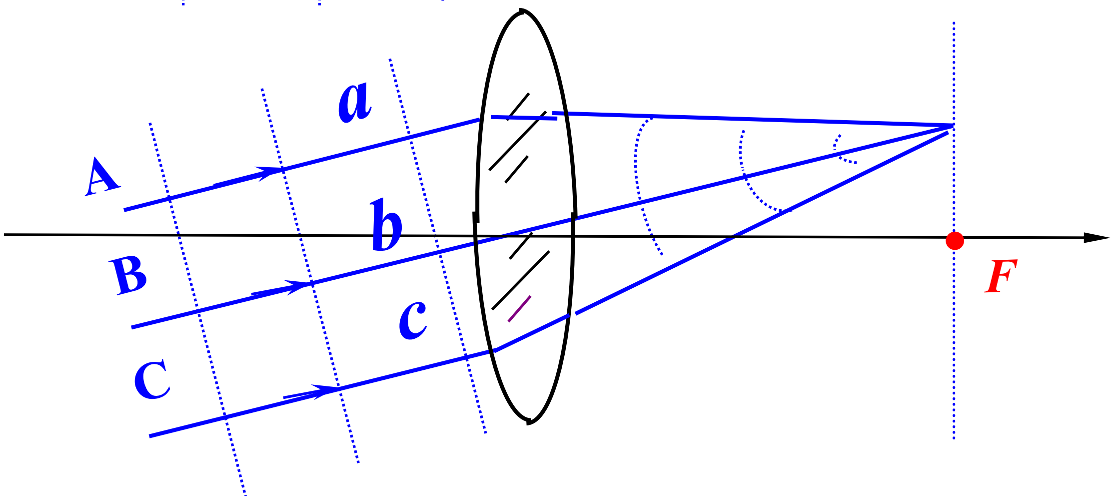
透镜不会产生附加光程差



透镜成像，像点是亮点，说明光线是同位相叠加，即物点到像点各光线之间的光程差为零（等光程原理）

平行光入射汇聚到透镜焦点或焦平面上





说明：透镜不会产生附加光程差！！！

$$2\beta = \angle LOM = N\varphi \quad \beta = \frac{N\varphi}{2} = \frac{\pi}{\lambda} a\sin\theta$$

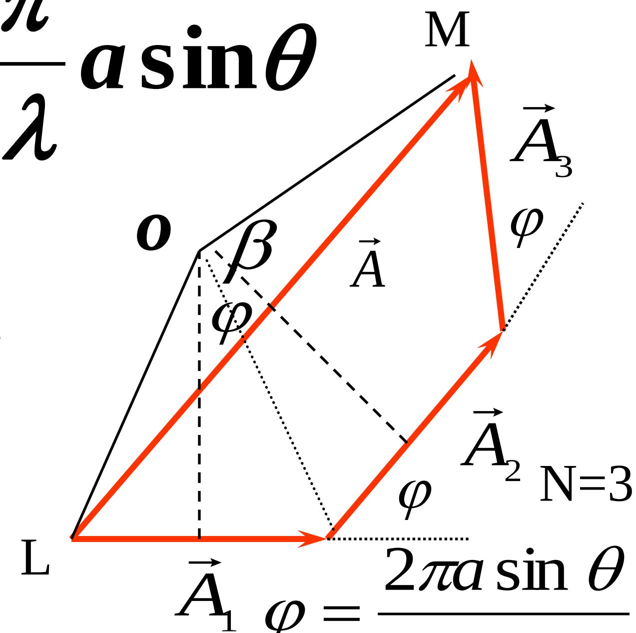
$N \to \infty$ 弧长$_{L\to M} = 2\beta R = NA_1$

$$A = 2R\sin\beta = NA_1 \frac{\sin\beta}{\beta}$$

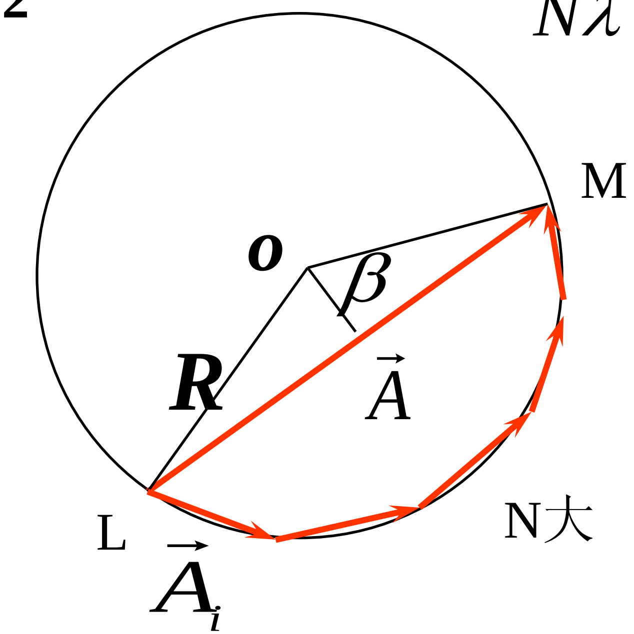
$$I \propto A^2 \to I = K(NA_1)^2 \left(\frac{\sin\beta}{\beta}\right)^2$$

$$\theta = 0 \to \beta = 0 \to \frac{\sin\beta}{\beta} = 1$$

$$\to I = K(NA_1)^2 = I_0$$



$$\varphi = \frac{2\pi a\sin\theta}{N\lambda}$$



讨论： **1.中央明纹**

$$I = I_0\left(\frac{\sin\beta}{\beta}\right)^2$$

$$\theta = 0 \rightarrow I_{\max} = I_0$$

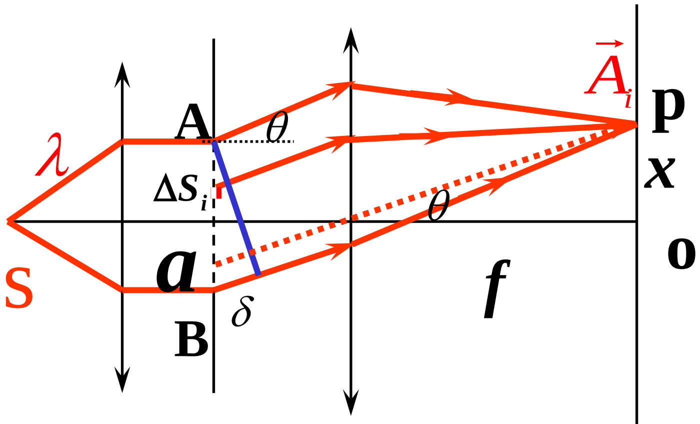
$$\beta = \frac{\pi}{\lambda} a\sin\theta$$

2.暗纹

$$\beta = \pm K\pi \qquad \frac{\pi}{\lambda} a\sin\theta = \pm K\pi$$

$$a\sin\theta = \pm K\lambda \quad K = 1,2,3\cdots$$

$$x = f \cdot \tan\theta$$



3.次级明纹

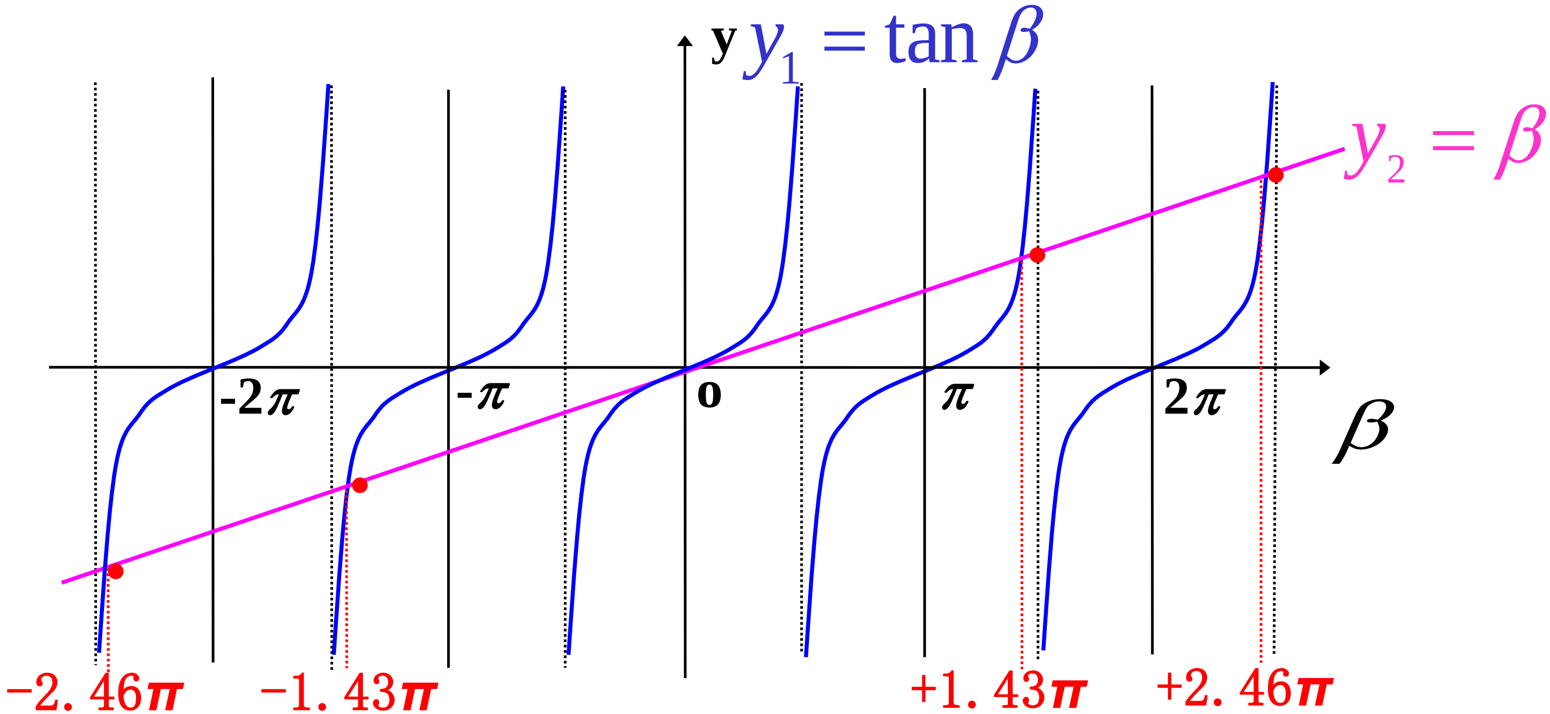
$$\frac{d}{d\beta}\left(\frac{\sin\beta}{\beta}\right)^2=0 \qquad I=I_0\left(\frac{\sin\beta}{\beta}\right)^2$$

$$2\left(\frac{\sin\beta}{\beta}\right)\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\beta}\left(\frac{\sin\beta}{\beta}\right)=0 \qquad \beta=\frac{\pi}{\lambda}a\sin\theta$$

$$2\left(\frac{\sin\beta}{\beta}\right)\left(\frac{\beta\cos\beta-\sin\beta}{\beta^2}\right)=0$$

$$\beta\cos\beta-\sin\beta=0$$

$$\tan\beta=\beta$$ （超越方程）



解得 ：$\beta = \pm 1.43\pi, \pm 2.46\pi, \pm 3.47\pi, \cdots$ $\because \beta = \dfrac{\pi}{\lambda} a\sin\theta$

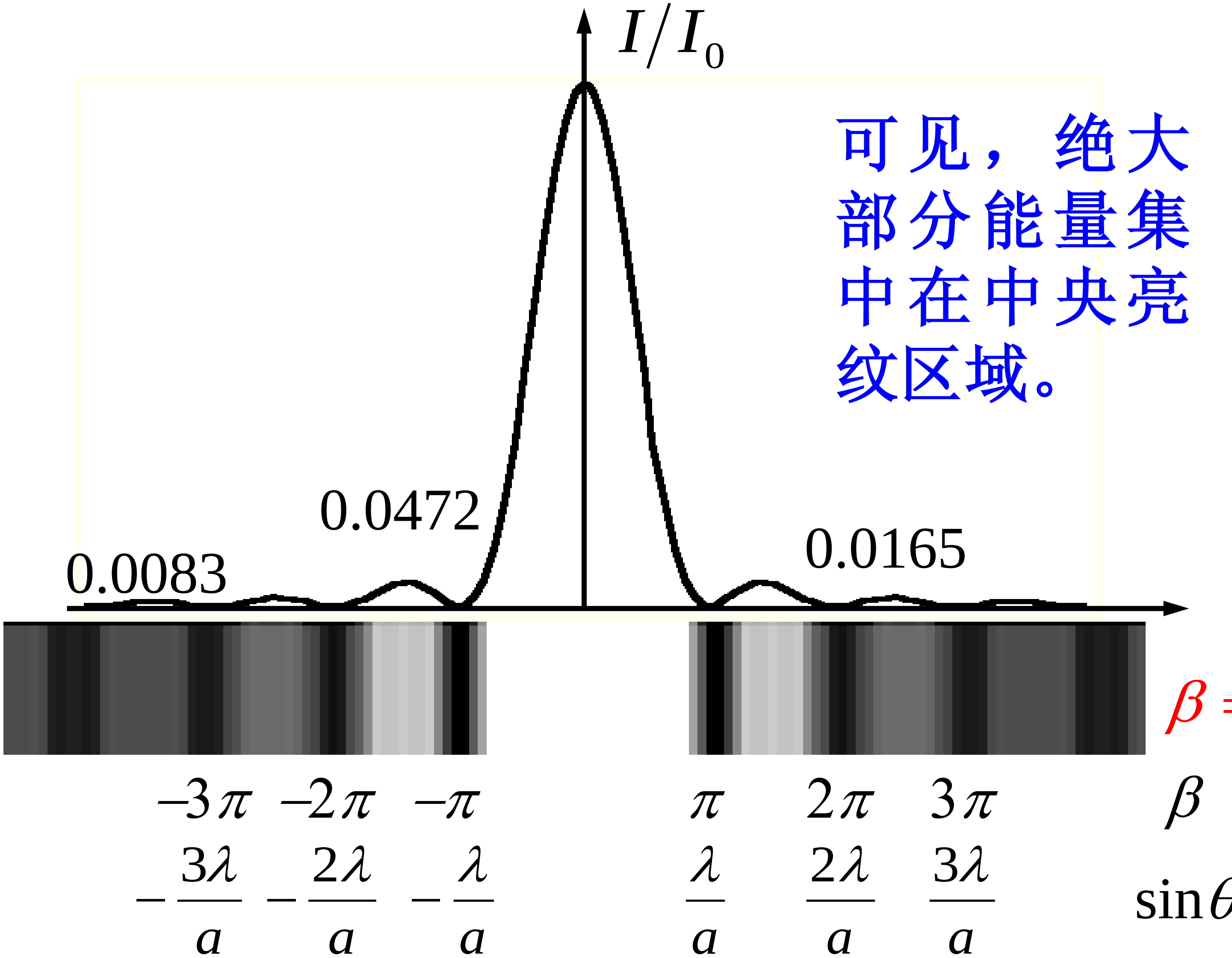
相应 ： $a\sin\theta = \pm 1.43\lambda, \pm 2.46\lambda, \pm 3.47\lambda, \cdots$

光强 ： 从中央往外各次级明纹的光强依次为：

$0.0472 I_0$， $0.0165 I_0$， $0.0083 I_0$, …

$\therefore$ $I_{次级明纹} \ll I_{中央明纹}$

相对光强随 $\sin\theta$ 的变化如下图：

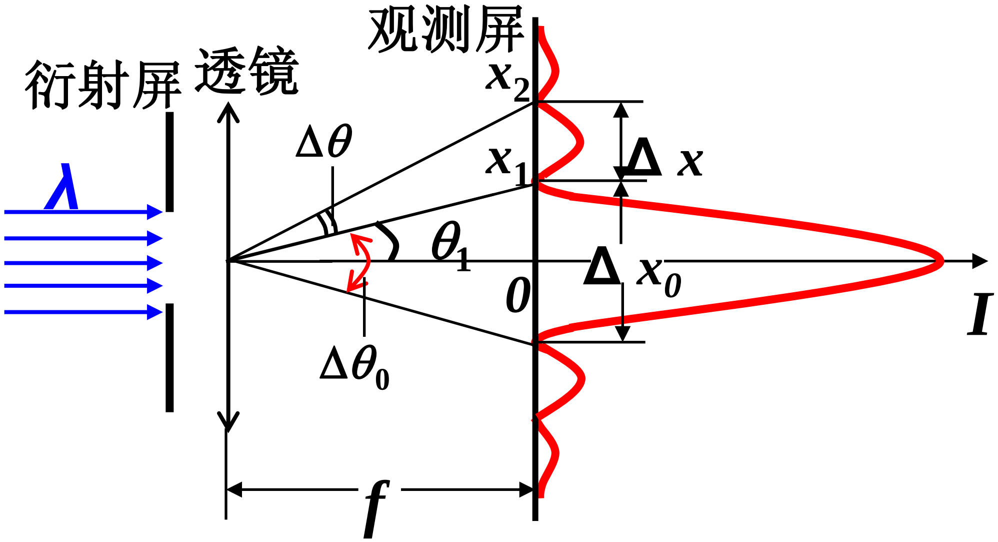


可见，绝大部分能量集中在中央亮纹区域。

$$\beta = \frac{\pi}{\lambda} a \sin\theta$$

4. 条纹宽度

中央明纹宽度为两侧一级暗纹中心距离



(1). 线宽度

θ_1：半角宽度

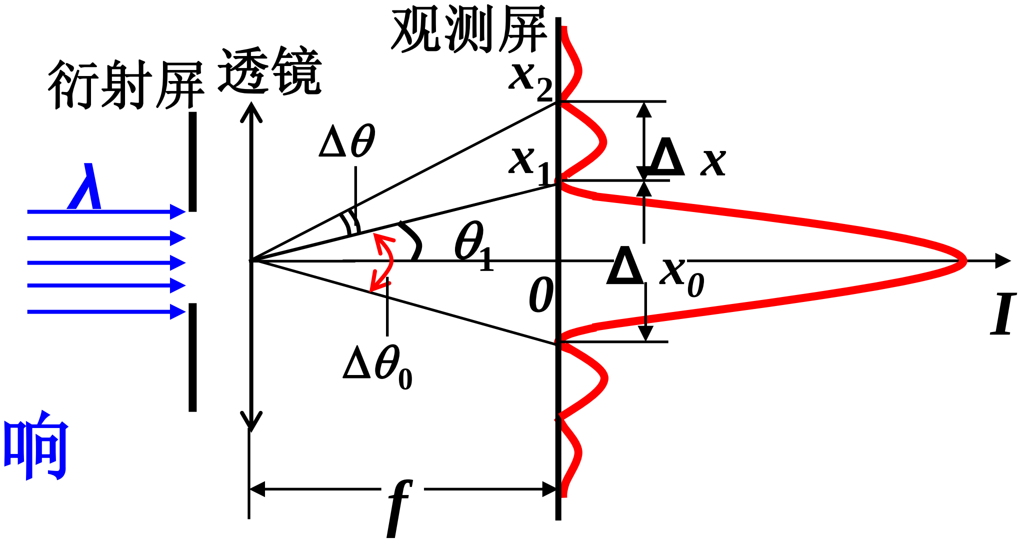
角度较小

$$\Delta x_0 = 2f \cdot \tan\theta_1 \approx 2f\sin\theta_1 = 2f\frac{\lambda}{a} \propto \frac{\lambda}{a}$$

——衍射反比定律

(2). 其他明纹(次级明纹)

$$\Delta x \approx \frac{f\lambda}{a} = \frac{1}{2}\Delta x_0$$



(3). 波长对条纹宽度的影响

$\Delta x \propto \lambda$　　波长越长，条纹宽度越宽

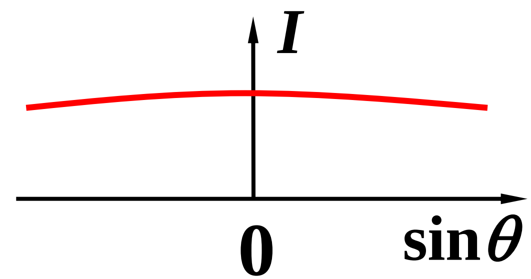
(4). 缝宽变化对条纹的影响

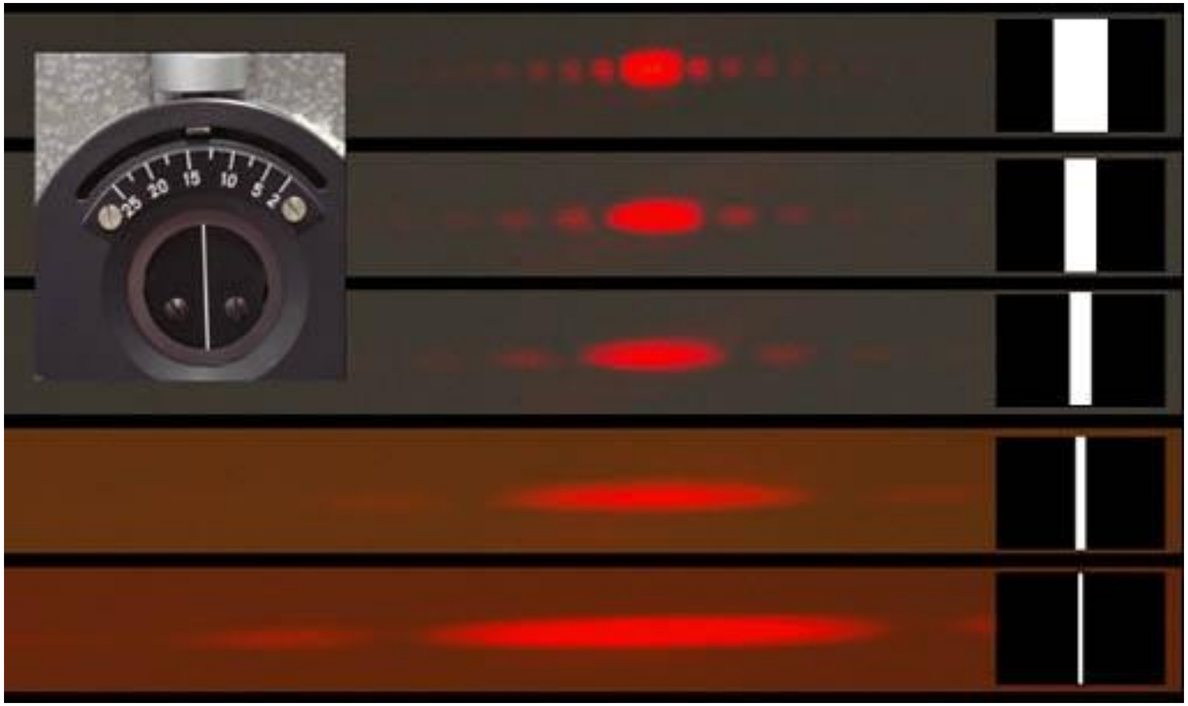
$$\Delta x = \frac{1}{2}\Delta x_0 = f\frac{\lambda}{a}$$

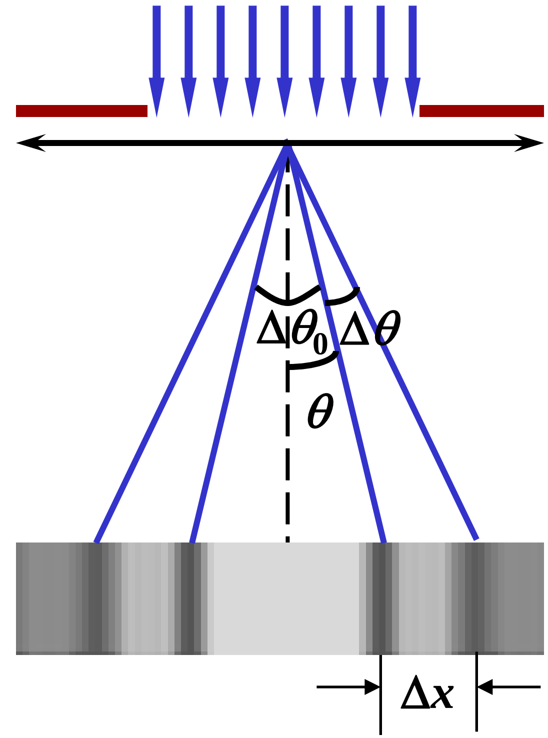
缝宽越小，条纹宽度越宽

当 $\dfrac{a}{\lambda} \to 0$ 时，

屏幕是“一片亮”







缝宽变化对条纹的影响

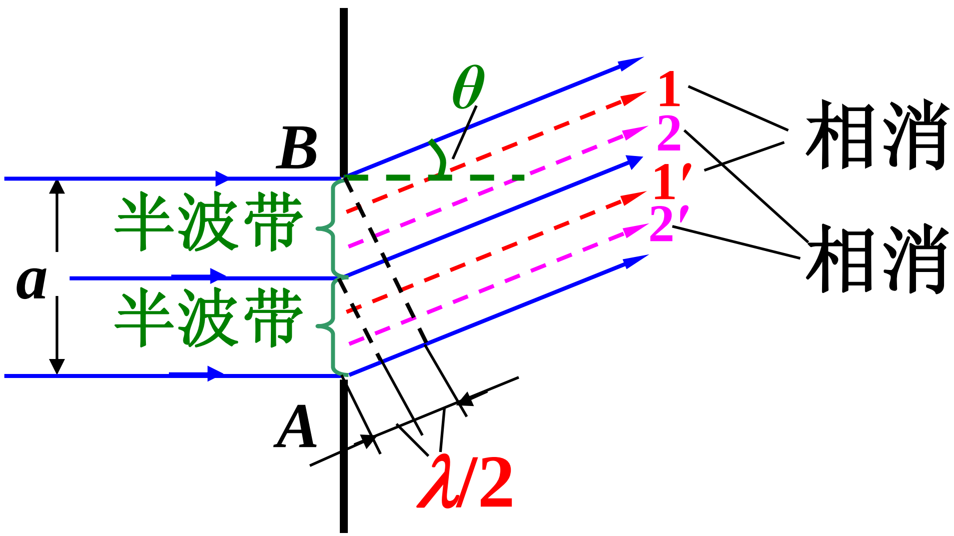
当 $\dfrac{\lambda}{a} \to 0$ 时， $\Delta x \to 0$

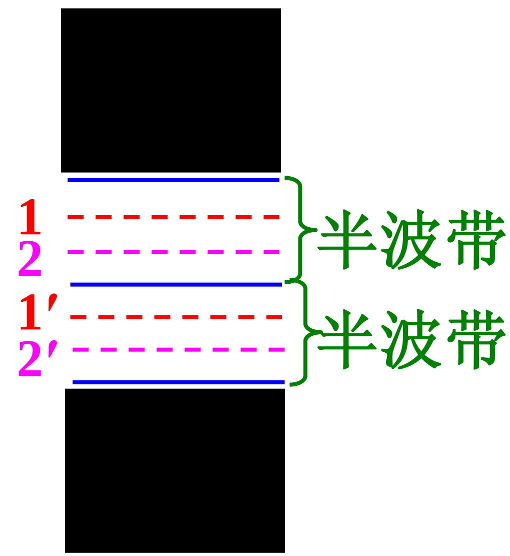
只显出单一的明条纹 ——单缝的几何光学像

$\therefore$几何光学是波动光学在$\lambda/a \to 0$ 时的极限情形

5. 半波带法—计算观察屏上的强度分布

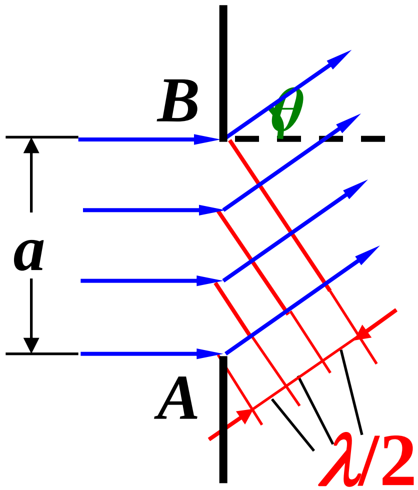
（1）当$a\sin\theta=\lambda$ 时，可将缝分为两个“半波带”





两个半波带发的光，在 p 点干涉相消形成暗纹。

（2）当$a\sin\theta=\dfrac{3}{2}\lambda$时，可将缝分成三个半波带，



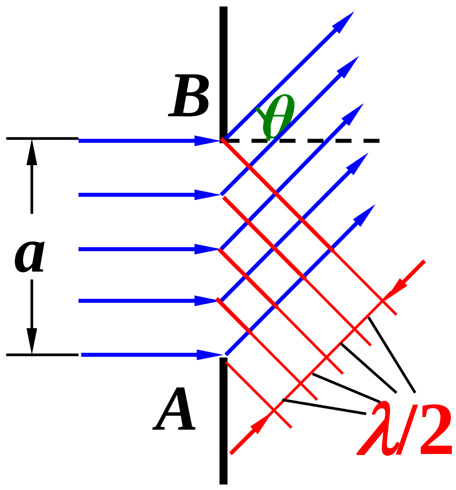
其中两相邻半波带的衍射光相消，

余下一个半波带的衍射光不被抵消

— 在 p 点形成明纹（中心）

（3）当$a\sin\theta=2\lambda$ 时，可将缝分成四个半波带，

两相邻半波带的衍射光相消， p 点形成暗纹。



半波带法得到的一般结果：

$\delta = a\sin\theta = 0$ —— 中央明纹中心（准确）

$a\sin\theta = \pm k\lambda$，$k = 1,2,3\cdots$ —— 暗纹（准确）

$a\sin\theta = \pm(2k'+1)\dfrac{\lambda}{2}$，$k' = 1,2,3\cdots$ —— 明纹中心（近似）

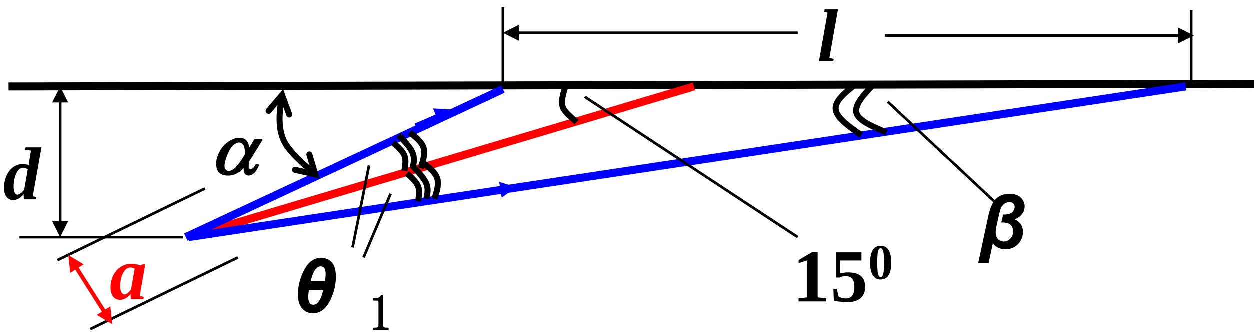
中央明纹中心和暗纹位置是准确的，其余明纹中心的位置是近似的，与准确值稍有偏离。

6.干涉和衍射的联系与区别

干涉和衍射都是波的相干叠加， 但干涉是有限多个分立光束的相干叠加，衍射是波阵面上无限多个子波的相干叠加。二者又常出现在同一现象中。

例：已知：一雷达位于路边 d =15m 处，射束与公路成 15^0 角，天线宽度 a = 0.20m，射束波长 λ= 30mm。

求：该雷达监视范围内公路的长度 l = ？

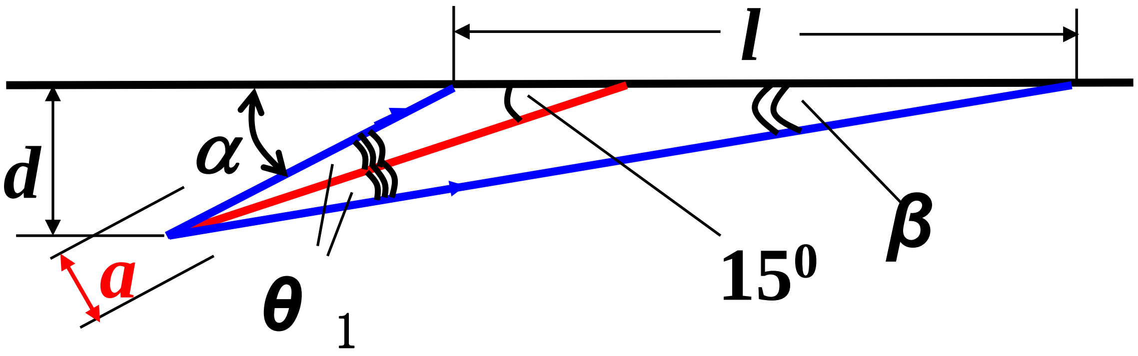


解：将雷达波束看成集中在单缝衍射的0级明纹上，

有 $$\sin\theta_1 = \frac{\lambda}{a} = \frac{30\text{mm}}{0.20\text{m}} = 0.15$$

$\rightarrow$ $\theta_1 \approx 8.63^\circ$

$$\theta_1 \approx 8.63°$$



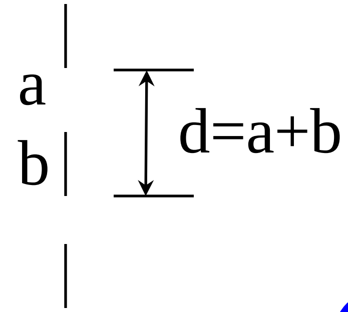
如图 $\alpha = 15° + \theta_1 = 23.63°$

$$\beta = 15° - \theta_1 = 6.37°$$

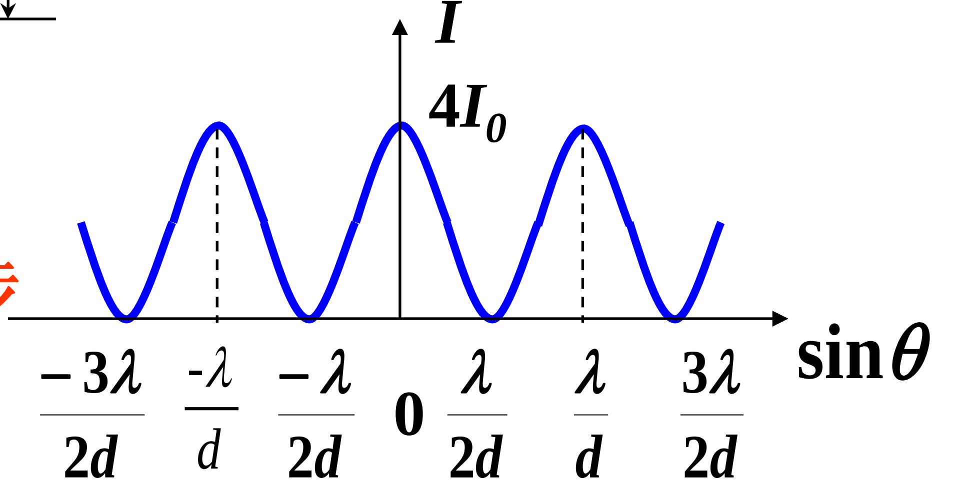
$$\therefore \quad l = d(\cot\beta - \cot\alpha)$$

$$= 15(\cot 6.37° - \cot 23.63°) \approx 100\text{m}$$

四、双缝衍射



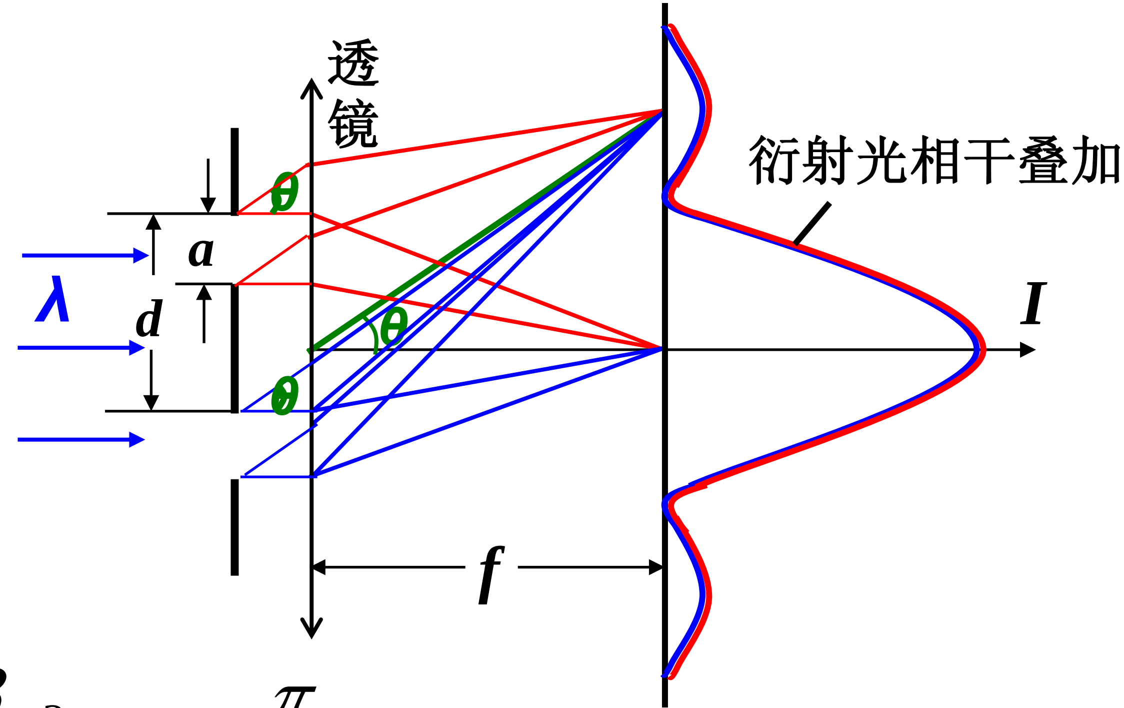
不考虑衍射时，双缝干涉的光强分布图：



双干 $I(\theta) = 4I_0 \cos^2(\frac{\pi}{\lambda} d \sin\theta)$

衍射的影响：

双缝干涉条纹各级主极大的强度不再相等，位置不变.



$$\text{单衍}\quad I_1 = I_2 = I_0\left(\frac{\sin\beta}{\beta}\right)^2 \qquad \beta = \frac{\pi}{\lambda} a\sin\theta$$

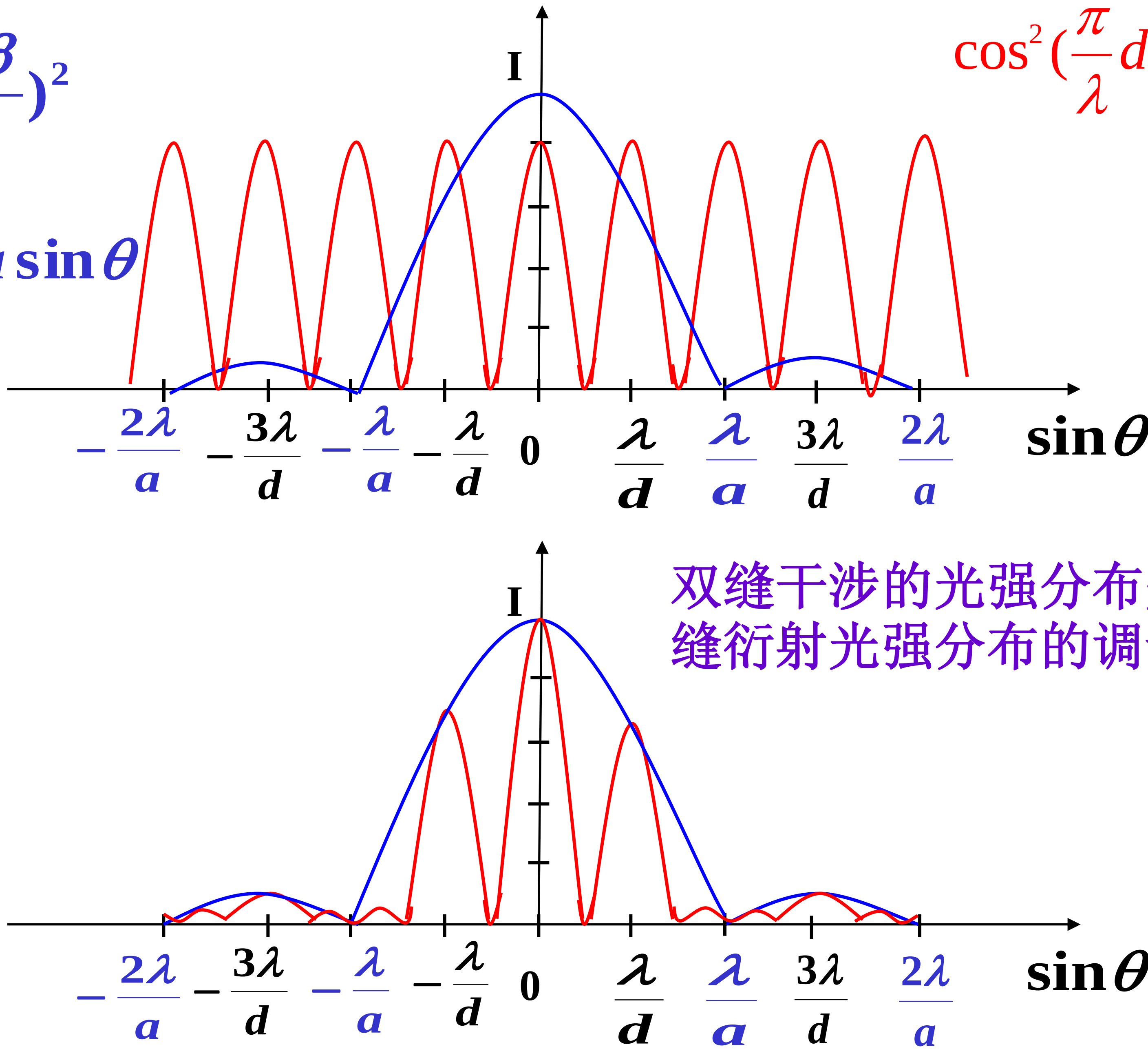
$$\text{双衍}\quad I = I_1 + I_2 + 2\sqrt{I_1 I_2}\cos(\varphi_1 - \varphi_2) \qquad \varphi_1 - \varphi_2 = \frac{2\pi}{\lambda} d\sin\theta$$

$$I(\theta) = 4I_0\left(\frac{\sin\beta}{\beta}\right)^2 \cos^2\left(\frac{\pi}{\lambda} d\sin\theta\right)$$

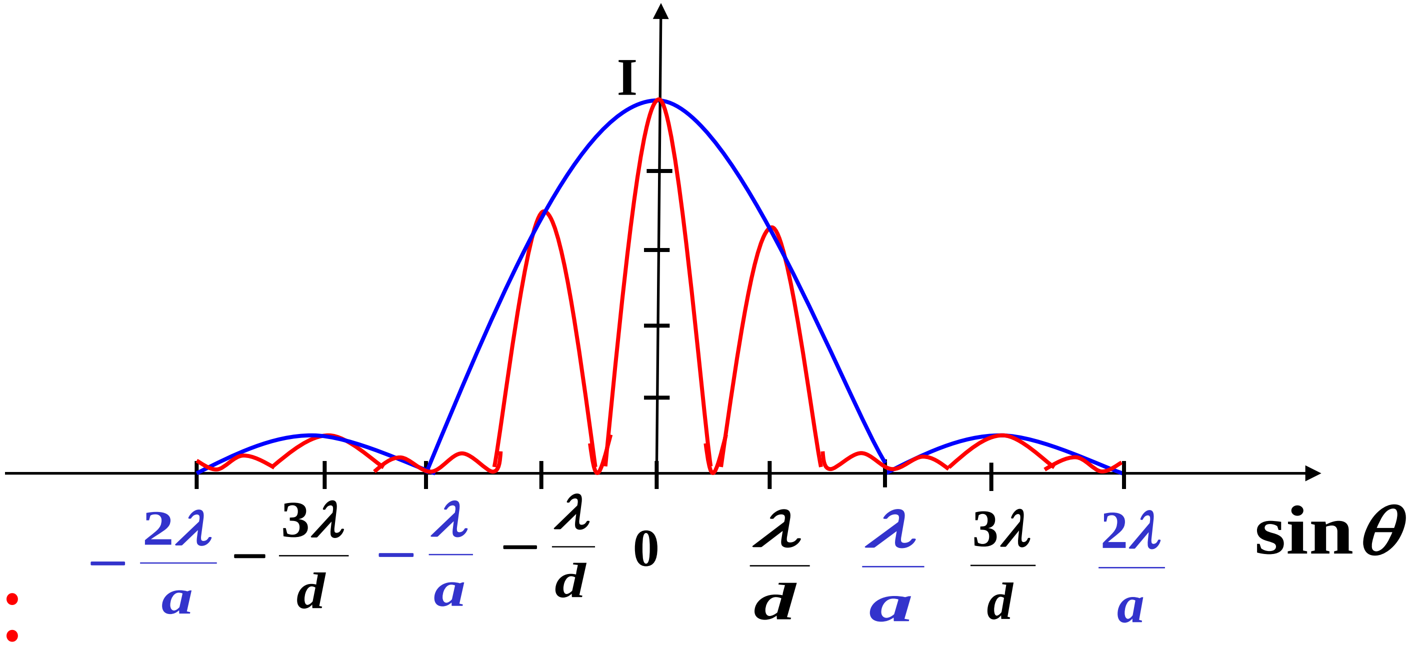
$$I_0\left(\frac{\sin\beta}{\beta}\right)^2$$

$$\beta=\frac{\pi}{\lambda}a\sin\theta$$

$$\cos^2\left(\frac{\pi}{\lambda}d\sin\theta\right)$$



双缝干涉的光强分布受到单缝衍射光强分布的调制！



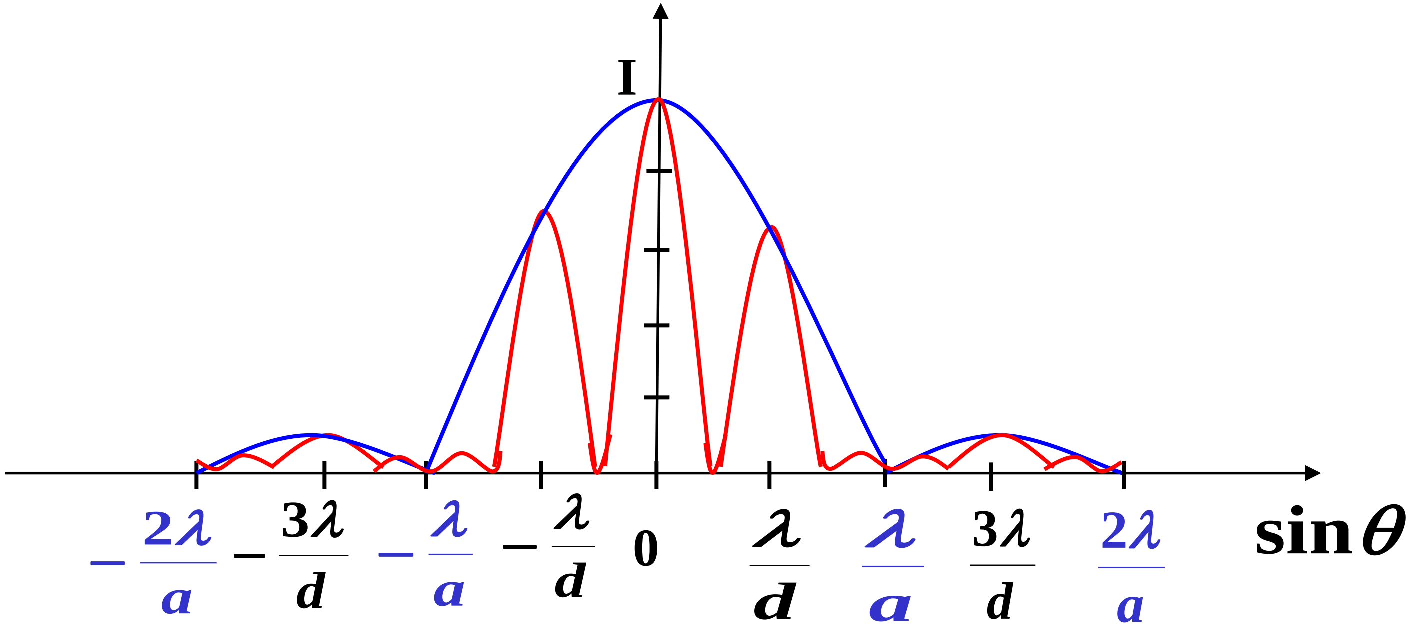
讨论：

a.两因子之一为零，合光强为零

$$I(\theta)=4I_0\left(\frac{\sin\beta}{\beta}\right)^2\cos^2\left(\frac{\pi}{\lambda}d\sin\theta\right)$$

***b*.**干涉因子(干涉条纹位置)决定于λ/d

衍射因子决定于λ/a

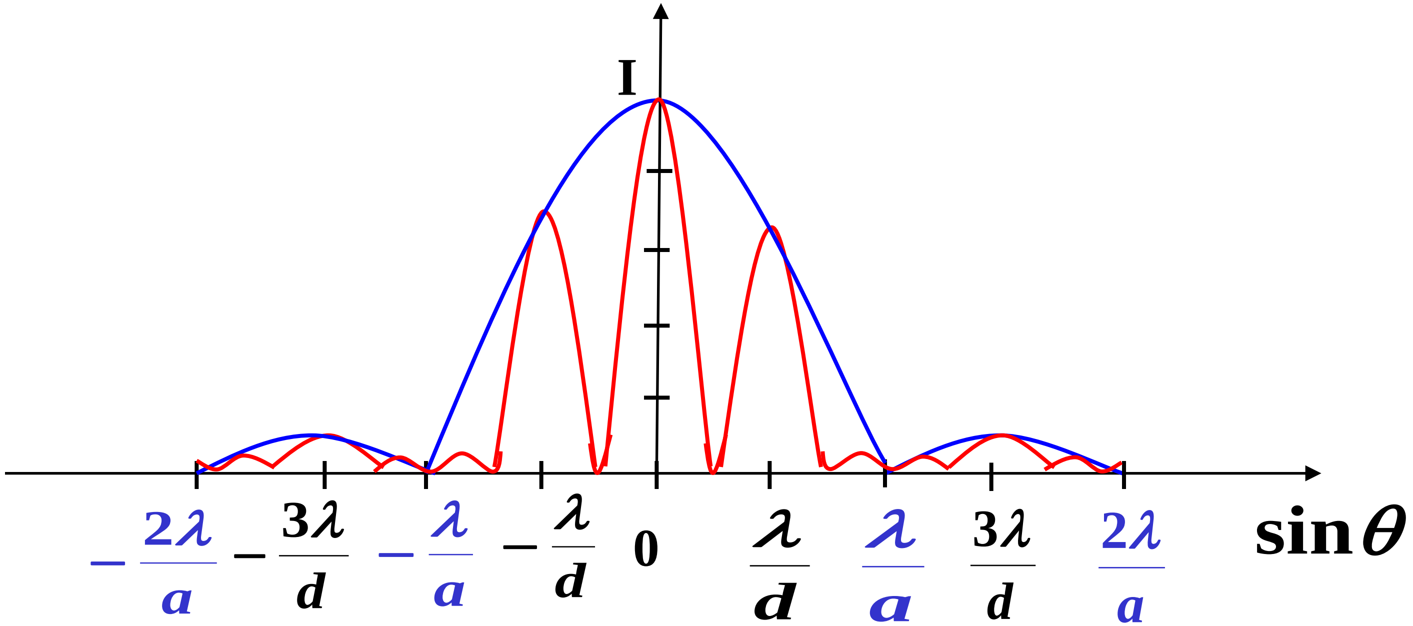


c. 缺级现象

干涉明纹位置： $d\sin\theta = \pm k\lambda, \quad k = 0,1,2,\cdots$

衍射暗纹位置： $a\sin\theta' = \pm n\lambda, \quad n = 1,2,3,\cdots$

$\frac{d}{a} = \frac{k}{n}$ 时，$\theta = \theta'$，此时在应该干涉加强的位置上没有衍射光到达，从而出现缺级。



干涉明纹缺级级次：

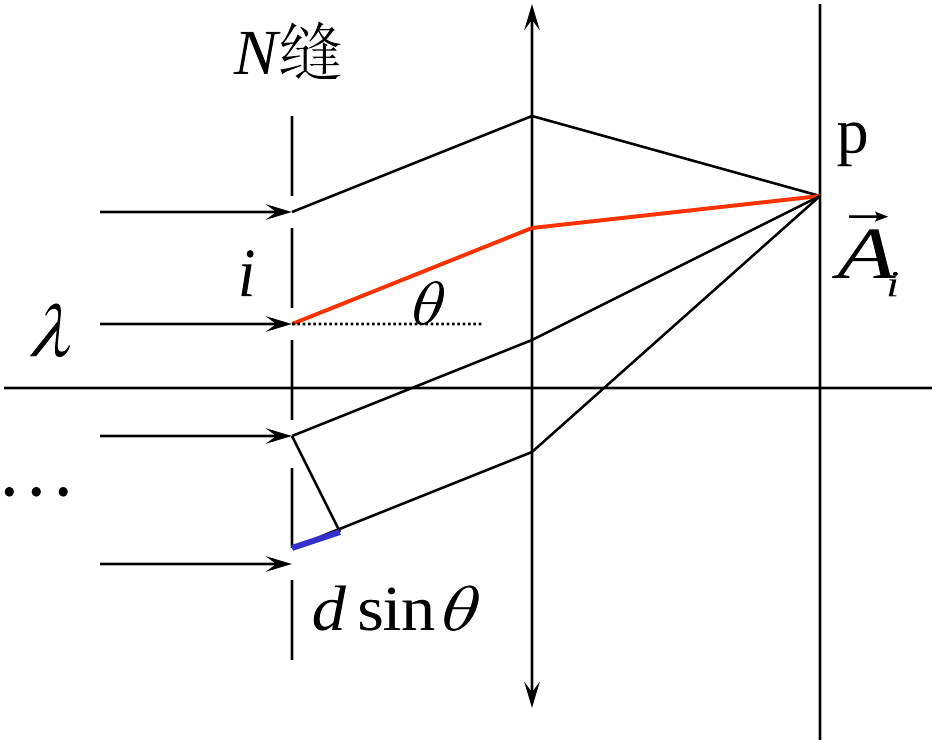
$$\boxed{k = \pm\frac{d}{a}n} \quad , n = 1, 2, 3, \cdots$$

§ 20-8 多光束干涉　光栅衍射

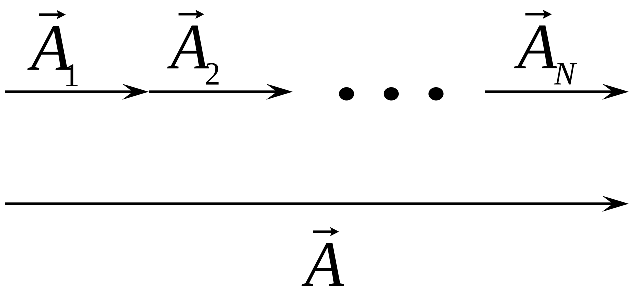
一.多光束干涉

1. 主极大

$$\vec{A}=\sum_{i=1}^{N}\vec{A}_i$$



$$\delta=d\sin\theta=\pm k\lambda\quad k=0,1,\cdots$$



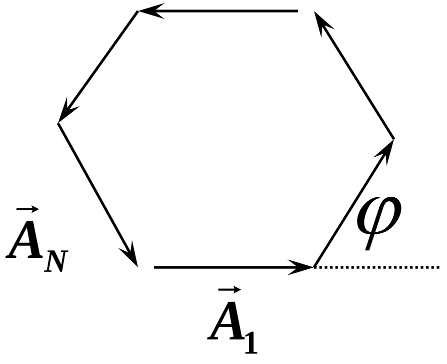
$$A=NA_1$$

$$I=N^2A_1^2$$

多光束干涉主极大的位置与缝的个数无关

2.暗纹

$\vec{A}=0 \rightarrow$ 暗纹　　$\varphi: \vec{A}_i, \vec{A}_{i+1}$ 之交角



$$\varphi=\frac{2\pi}{\lambda}\delta=\frac{2\pi}{\lambda}d\sin\theta$$

条件？　　$N\varphi=\pm 2k'\pi$

$$\Rightarrow d\sin\theta=\pm\frac{k'}{N}\lambda \quad k'=1,2\cdots$$

$k'=kN$　回到主极大明纹情况

暗纹　$k'=$ 1, 2, $\cdots$N - 1, N + 1, $\cdots$

明纹　$k=0,$　　　　　　　　1, $\cdots$

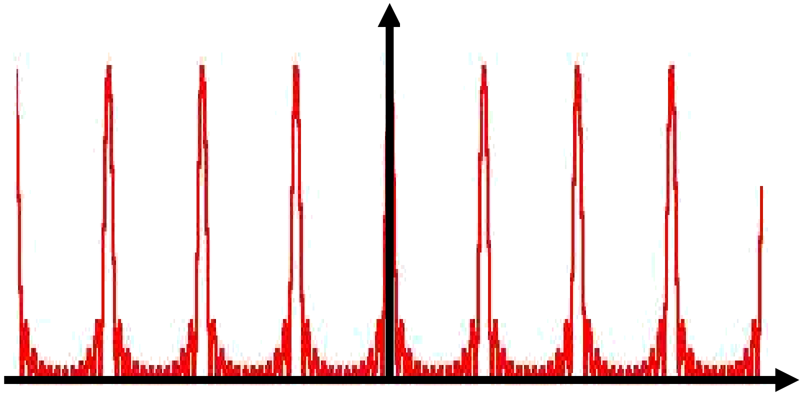
$N-1$ 条暗纹

$N-2$ 条次级明纹

相邻主极大间有$N-1$个暗纹，有$N-2$条明纹（次极大）。

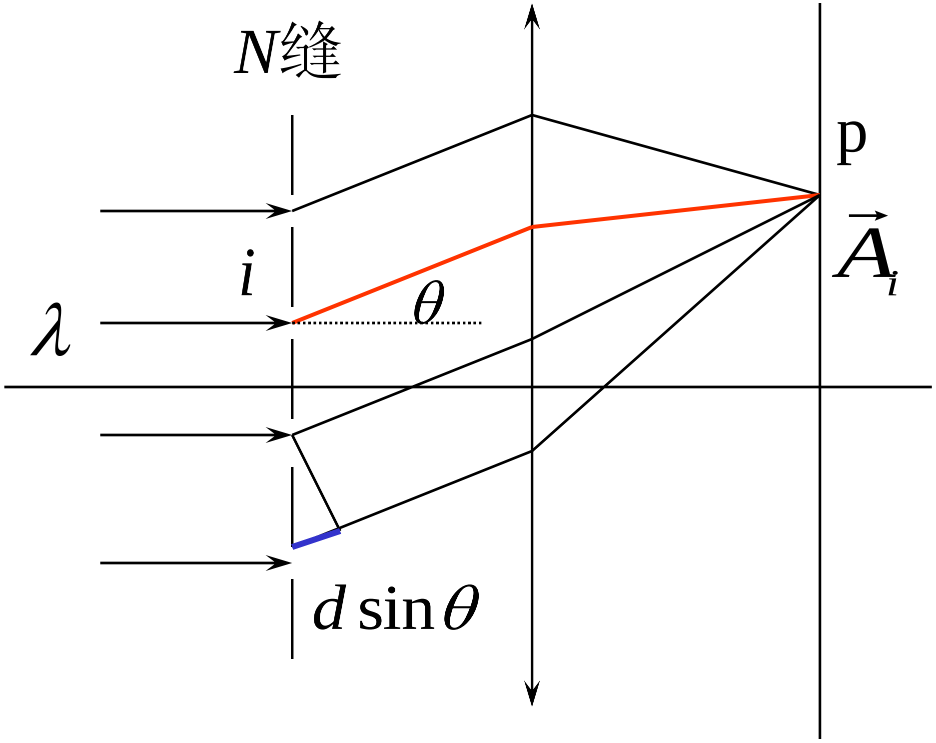
计算表明，次极大的光强仅为主极大的4%

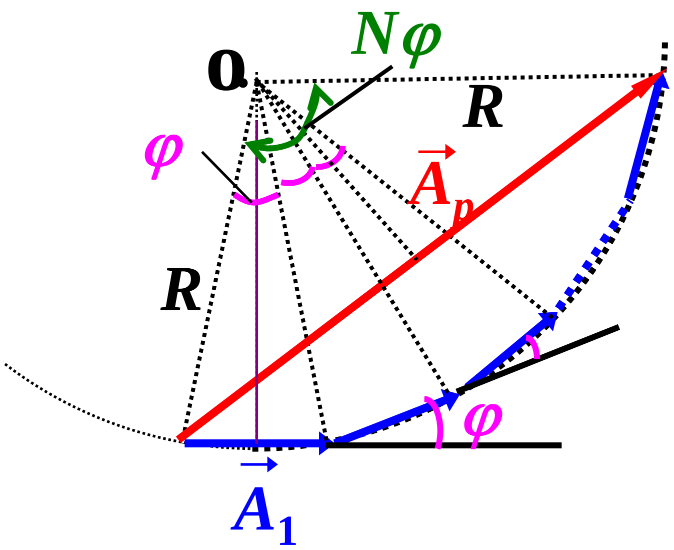
当 N 很大时：



当N很大时，次极大的强度很弱，通常无法观察到。

3. 多缝干涉光强公式





相邻缝在 ***p*** 点的相位差 $\varphi = \dfrac{2\pi}{\lambda} \cdot d \cdot \sin\theta$

p 点合振幅为 $A_p = 2R\sin\dfrac{N\varphi}{2}$ ， 又 $A_1 = 2R\sin\dfrac{\varphi}{2}$

$$\therefore \ A_p = A_1 \frac{\sin N\dfrac{\varphi}{2}}{\sin\dfrac{\varphi}{2}} = A_1 \frac{\sin N\alpha}{\sin\alpha}$$

$$\varphi = \frac{2\pi}{\lambda} d\sin\theta$$

$$\alpha = \frac{\varphi}{2} = \frac{\pi}{\lambda} d\sin\theta$$

多缝干涉的光强:

$$\boxed{I_p = I_1\left(\frac{\sin N\alpha}{\sin\alpha}\right)^2}$$

I_1 —— **单缝在*p*点的光强**

例：暗纹 $N\alpha = \pm k'\pi$ $\quad d\sin\theta = \pm\dfrac{k'}{N}\lambda$ $\quad k' \neq kN$

主极大明纹 $k' = kN(\alpha = \pm k\pi)$ $\quad I_p = N^2 I_1$

二. 光栅衍射

1. 光栅（grating）

光栅是现代科技中常用的重要光学元件。

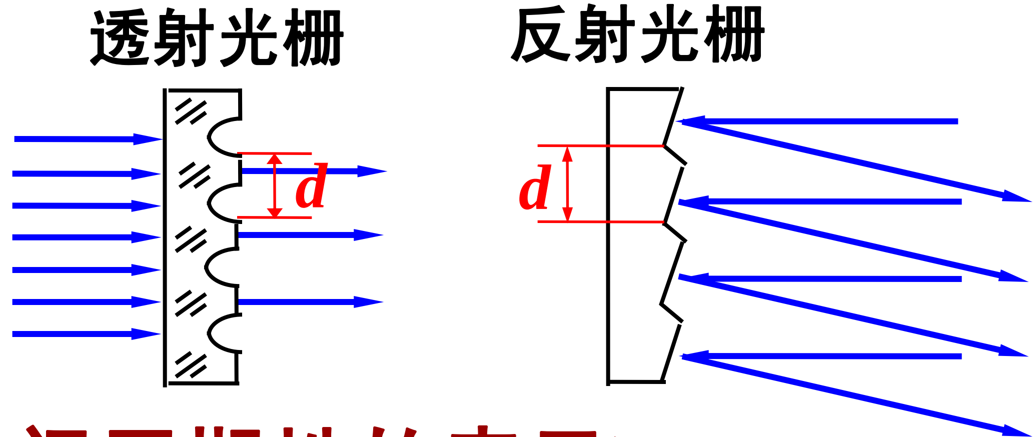
光通过光栅衍射可以产生明亮尖锐的亮纹，复色光入射可产生光谱，用以进行光谱分析。

2. 光栅的概念

光栅是由大量的等宽等间距的平行狭缝（或反射面）构成的光学元件。

从广义上理解，任何具有空间周期性的衍射屏，都可叫作光栅。

3. 光栅的种类：



4. 光栅常数 (空间周期性的表示)

$$\boxed{d = a+b}$$

a —— 透光（或反光）部分的宽度

b —— 不透光（或不反光）部分的宽度

普通光栅刻线为数十条/mm —— 数千条/mm，用电子束刻制可达数万条/mm（$d \sim 10^{-1}\mu m$）。

5. 光栅衍射

（1） 主极大 $d\sin\theta = \pm k\lambda$ $\quad \boldsymbol{k = 0,1,2,\ldots}$

正入射光栅方程

（2）暗纹 $d\sin\theta = \pm\frac{k'}{N}\lambda$ $\quad k' \neq kN$

或 $a\sin\theta = \pm n\lambda$ $\quad \boldsymbol{n = 1,2,\ldots}$

缺级 $k = \frac{d}{a}n$

优点:$\boldsymbol{a+b}$小,条纹拉的开.

$\boldsymbol{N}$大,光强大明亮

6. 光栅衍射的光强公式

每个单缝在 p 点（对应衍射角 θ）均有 $I = I_0\left(\dfrac{\sin\beta}{\beta}\right)^2$

$$A_1 = A_0 \frac{\sin\beta}{\beta} \qquad \beta = \frac{\pi}{\lambda} a \sin\theta$$

A_0 ：单缝衍射光矢量最大幅值

多缝干涉 $A_p = A_1 \dfrac{\sin N\alpha}{\sin\alpha} \qquad \alpha = \dfrac{\pi}{\lambda} d \sin\theta$

光栅衍射的光强：

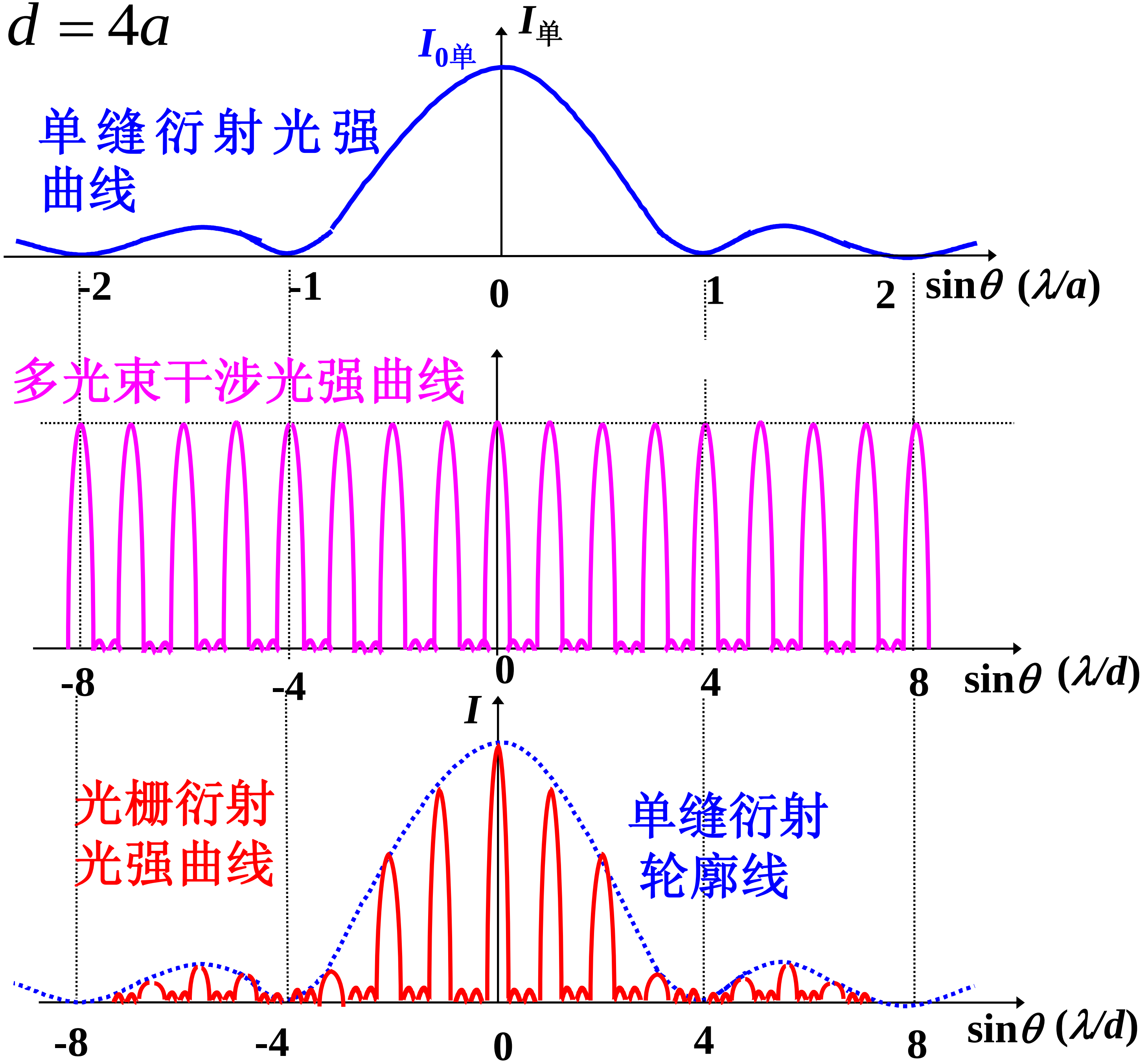
$$\boxed{I_p = I_0 \left(\frac{\sin\beta}{\beta}\right)^2 \cdot \left(\frac{\sin N\alpha}{\sin\alpha}\right)^2}$$

多缝干涉因子

单缝衍射因子

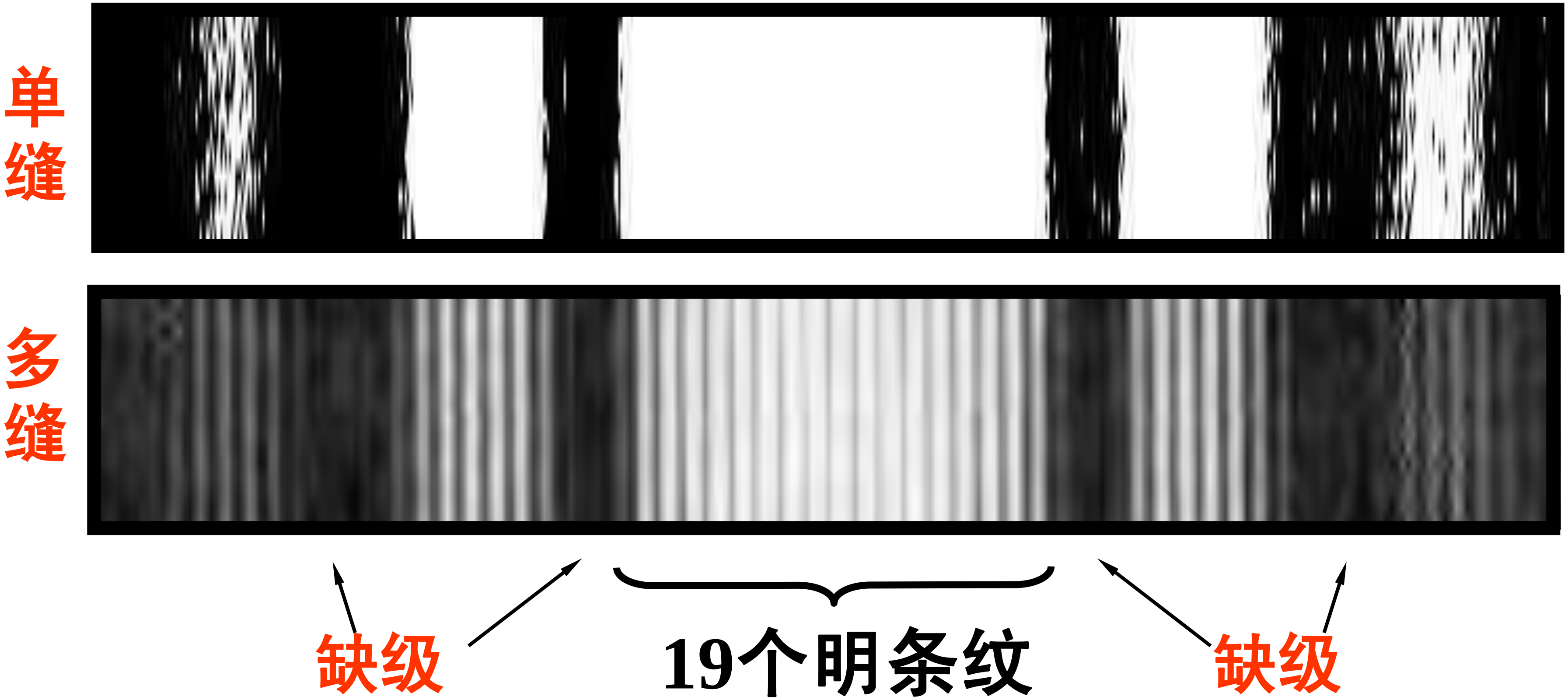
I_0 —— 单缝衍射中央明纹中心处光强

$N = 4\ ,\ d = 4a$



I单
I0单
单缝衍射光强曲线
-2
-1
0
1
2
sinθ (λ/a)
多光束干涉光强曲线
-8
-4
0
4
8
sinθ (λ/d)
I
光栅衍射光强曲线
单缝衍射轮廓线
-8
-4
0
4
8
sinθ (λ/d)

单缝衍射和多缝衍射干涉的对比（$d=10a$）



【演示】单、双、三、多缝的衍射

[例] 用每毫米500条栅纹的光栅，观察钠光谱线（λ=5900 Å ）问：（1）光线垂直入射；（2）光线以入射角30° 入射时，最多能看到几级条纹?

解：（1） $(a+b)\sin\varphi = k\lambda$

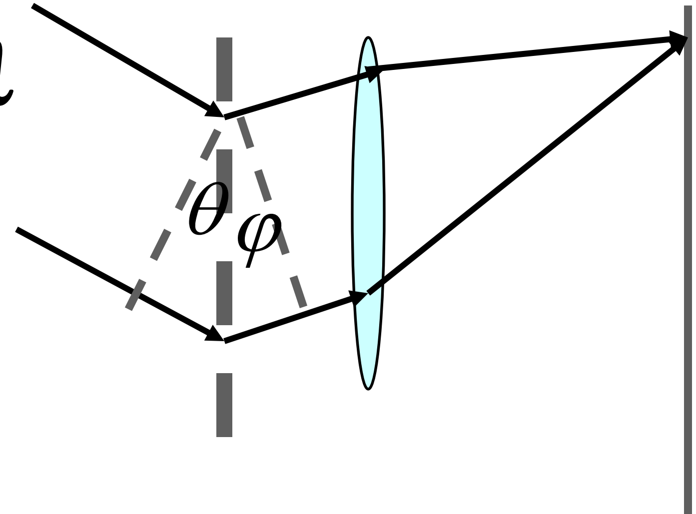
$$k = \frac{a+b}{\lambda}\sin\varphi \qquad \sin\varphi = 1 \quad (\varphi = 90^\circ)$$ **k最大**

$$a+b = \frac{1\times10^{-3}}{500} = 2\times10^{-6}\,\mathrm{m}$$

$$k = \frac{a+b}{\lambda} = \frac{2\times10^{-6}}{5900\times10^{-10}} \approx 3.39$$ **取 k =3**

最多能看到 k=3,2,1,0,-1,-2,-3 级条纹.

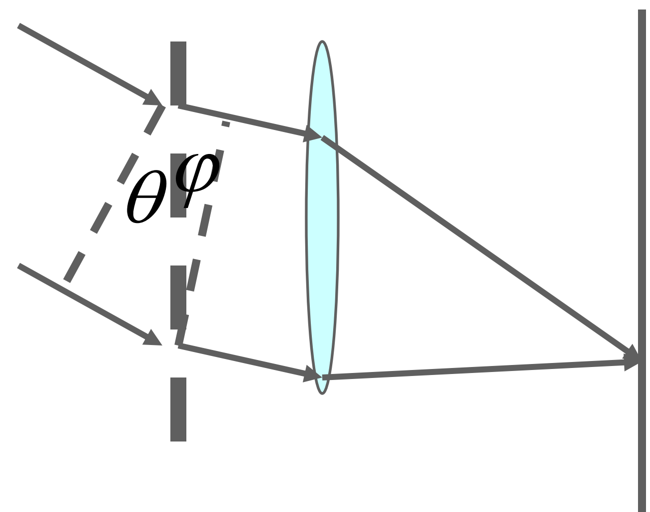
（2）$(a+b)(\sin\theta+\sin\varphi)=k\lambda$



$$k=\frac{(a+b)(\sin\theta+\sin\varphi)}{\lambda}$$

$\sin\varphi=1\quad(\varphi=90°)\quad$ k最大

$$k=\frac{2\times10^{-6}\times(\sin30°+1)}{5900\times10^{-10}}\approx5$$



上侧最大: k=5

$$k=\frac{(a+b)(\sin\theta-\sin\varphi)}{\lambda}=-1.69$$

下侧最大: k = -1

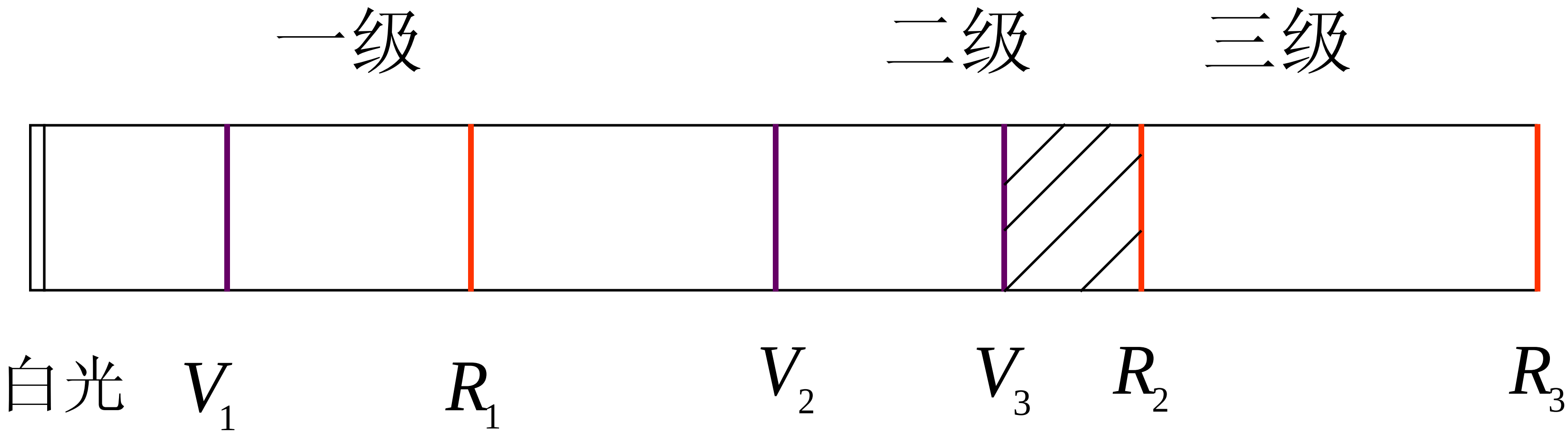
最多能看到 k=5,4,3,2,1,0,-1 级条纹.

三. 光栅光谱

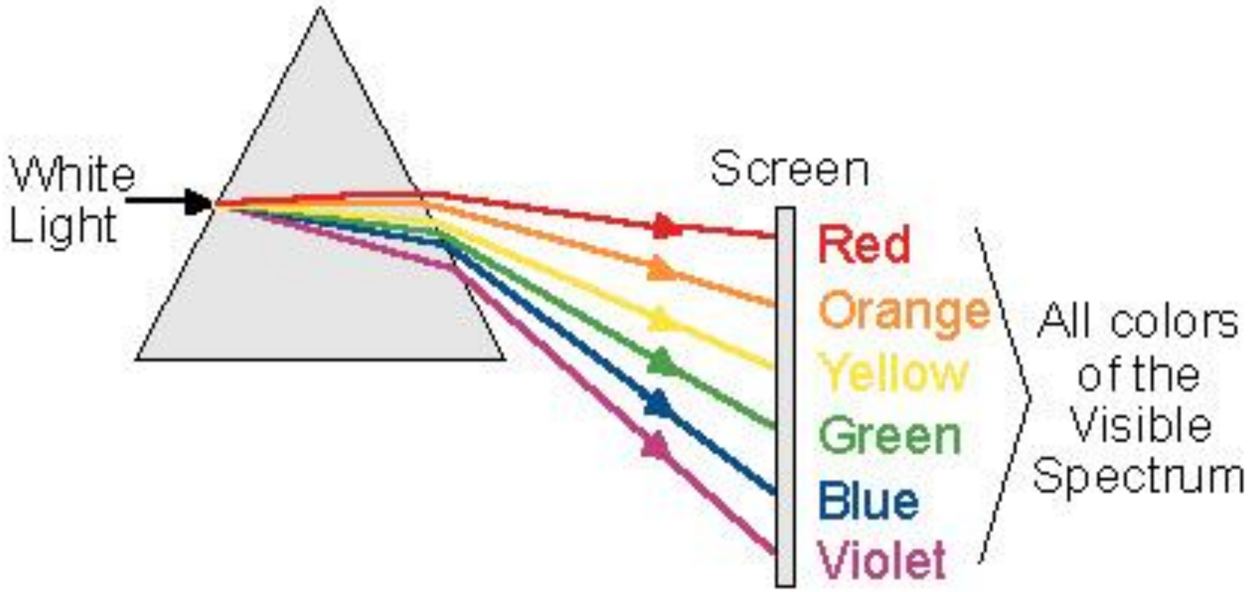
$$d\sin\theta = \pm k\lambda$$

$$k = 0 \rightarrow \theta = 0, \text{与}\lambda\text{无关.}$$

$$k \neq 0, \lambda\downarrow \rightarrow \theta\downarrow, \lambda\uparrow \rightarrow \theta\uparrow \text{(同一级)}$$

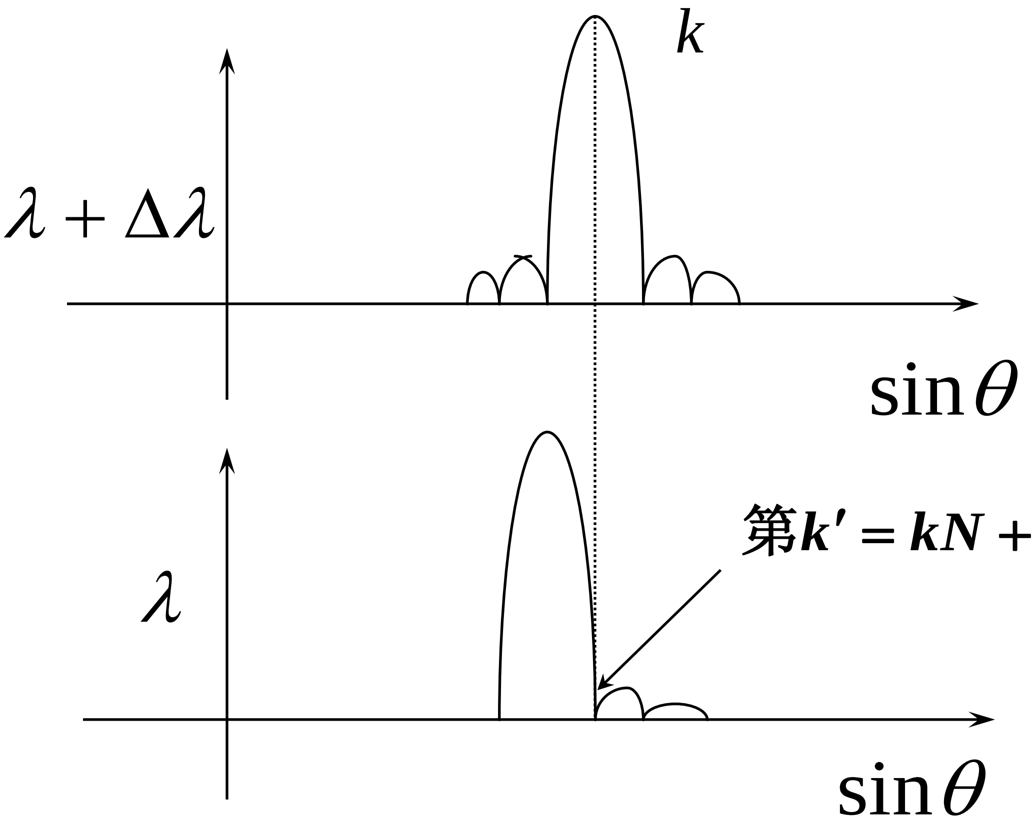


复色光照射光栅时会将不同波长光衍射条纹分开——光栅光谱


White
Light
Screen
Red
Orange
Yellow
Green
Blue
Violet
All colors
of the
Visible
Spectrum

棱镜光谱

四. 光栅的分辨本领



$$d\sin\theta = k(\lambda + \Delta\lambda)$$

$$d\sin\theta = \frac{kN+1}{N}\lambda$$

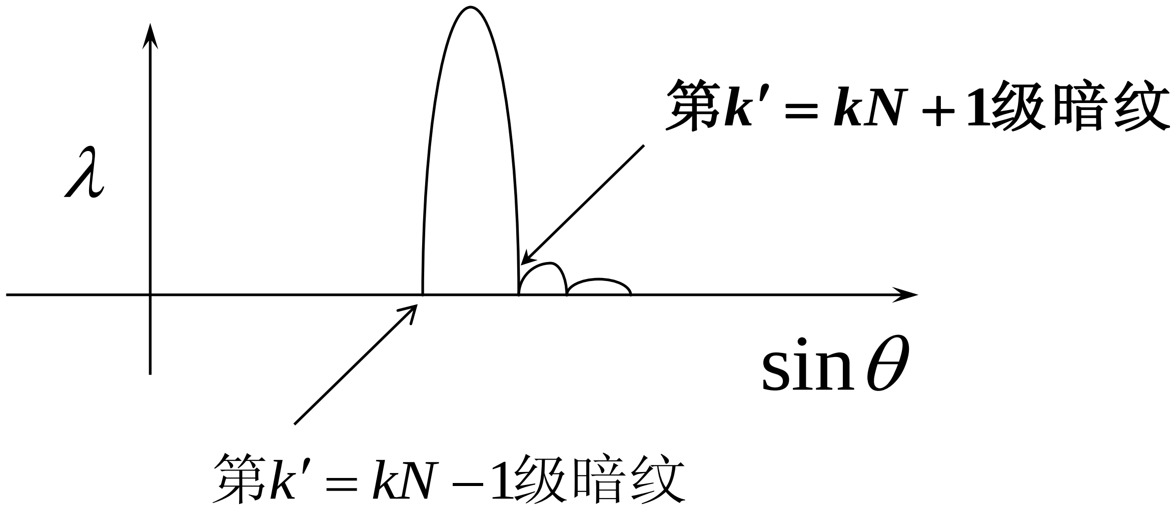
$$\Rightarrow k\Delta\lambda = \lambda / N$$

$$R = \frac{\lambda}{\Delta\lambda} = kN,\quad k \neq 0$$

$$\therefore \left.\begin{array}{l} \uparrow N \\ \uparrow k \end{array}\right\} \rightarrow \uparrow R$$

$\lambda + \Delta\lambda$的k级主极大刚好与λ的最近邻极小相重合称为能分辨(瑞利准则)

条纹角宽度



$$d\sin\theta = \frac{k'}{N}\lambda$$

$$d\cos\theta\Delta\theta = \frac{\Delta k'}{N}\lambda \qquad \Rightarrow \Delta\theta_k = \frac{2\lambda}{Nd\cos\theta}$$

$$\Delta k' = 2$$

光栅的分辨本领： $R=\dfrac{\lambda}{\Delta\lambda}=kN，\ k\neq 0$

例如，对波长靠得很近的Na双线：

$$\lambda_1=\lambda=589\ \mathrm{nm}$$

$$\lambda_2=\lambda+\Delta\lambda=589.6\mathrm{nm}$$

$$R=\frac{\lambda}{\Delta\lambda}=\frac{589}{0.6}\approx 982=Nk$$

$$\left.\begin{array}{l}\text{若 } k=2\text{，则 } N=491\\ \text{若 } k=3\text{，则 } N=327\end{array}\right\}\text{都可分辨出Na双线}$$

[例] 设计一光栅，要求（1） 600nm波长的第二级谱线衍射角不大于30 °；（2）色散尽可能大；（3）第三级谱线缺级；（4）在600nm波长的第二级谱线上能分辨0.02nm的波长差。又：当选定光栅参数后，在透镜焦平面上能看到600nm波长的几条谱线？

解： $(a+b)\sin\theta = k\lambda$ 以 $k=2$ $\theta = 30°$ 代入

由条件（1） $a+b \geq \dfrac{2\lambda}{\sin 30°} = 24\times10^{-4}\,\mathrm{mm}$

由条件（2），色散大即 Δx_k 大，或 $\Delta\theta_k$ 大

$$\theta_k = \frac{k\lambda}{a+b} \qquad \therefore \Delta\theta_k = \frac{k}{a+b}(\lambda_2 - \lambda_1)$$

$\Delta\theta_k$尽可能大即$\boldsymbol{a+b}$ 尽可能小

$$\therefore a+b = 24\times10^{-4}\,\mathrm{mm}$$

[例] 设计一光栅，要求（1） 600nm波长的第二级谱线衍射角不大于30°；（2）色散尽可能大；（3）第三级谱线缺级；（4）在600nm波长的第二级谱线上能分辨0.02nm的波长差。又：当选定光栅参数后，在透镜焦平面上能看到600nm波长的几条谱线？

由条件（3） $\begin{cases}(a+b)\sin\theta = 3\lambda \\ a\sin\theta = \lambda\end{cases} \Rightarrow \dfrac{a+b}{a} = 3$

$\therefore a = 8\times10^{-4}\,\text{mm} \qquad b = 16\times10^{-4}\,\text{mm}$

由条件（4） $R = \dfrac{\lambda}{\Delta\lambda} = Nk \qquad \therefore N = 15000$

$\therefore a + b = 24\times10^{-4}\,\text{mm}$

[例] 设计一光栅，要求（1） 600nm波长的第二级谱线衍射角不大于30°；（2）色散尽可能大；（3）第三级谱线缺级；（4）在600nm波长的第二级谱线上能分辨0.02nm的波长差。又：当选定光栅参数后，在透镜焦平面上能看到600nm波长的几条谱线？

由条件（3） $\begin{cases}(a+b)\sin\theta = 3\lambda \\ a\sin\theta = \lambda\end{cases}$ $\longrightarrow$ $\dfrac{a+b}{a} = 3$

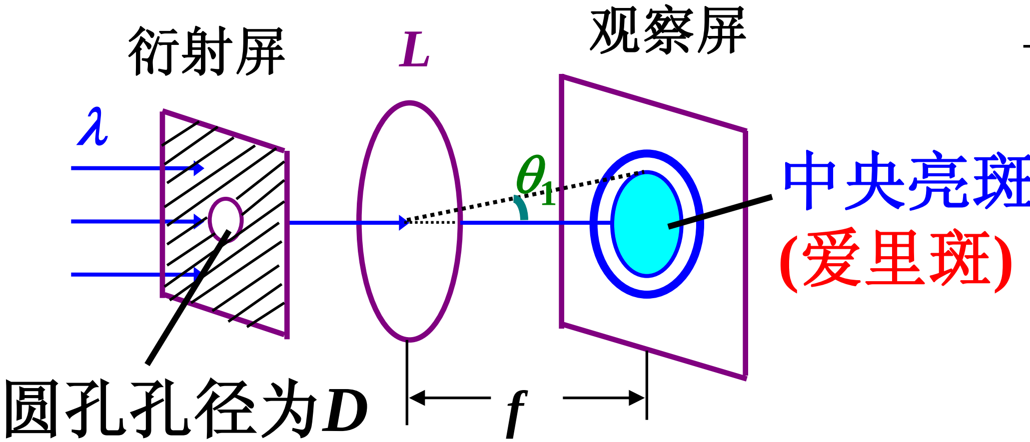
$\therefore a = 8\times10^{-4}\,\text{mm} \qquad b = 16\times10^{-4}\,\text{mm}$

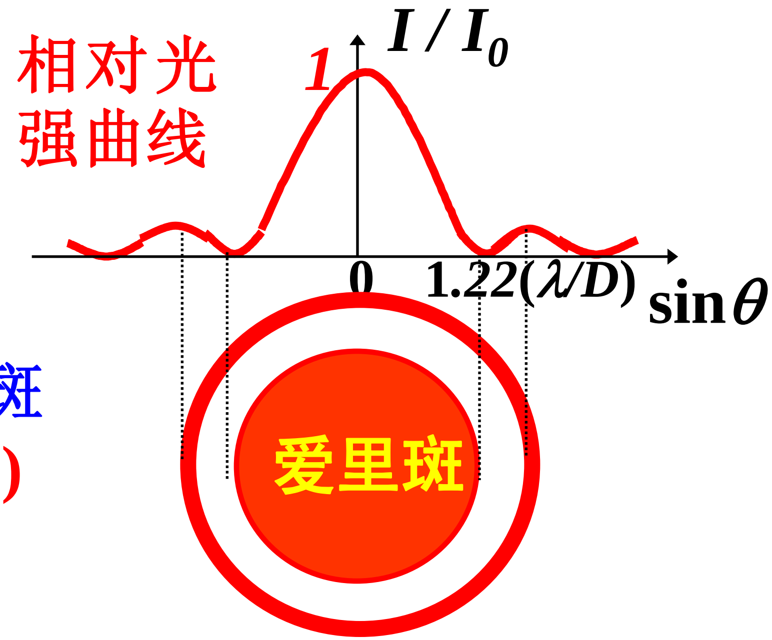
由条件（4） $R = \dfrac{\lambda}{\Delta\lambda} = Nk \qquad \therefore N = 15000$

当 $\theta = \dfrac{\pi}{2}$ 时 $a+b = k\lambda \qquad \therefore k < \dfrac{a+b}{\lambda} = 4$

可以看到0，±1，±2级共5条谱线。（ ±3缺级）

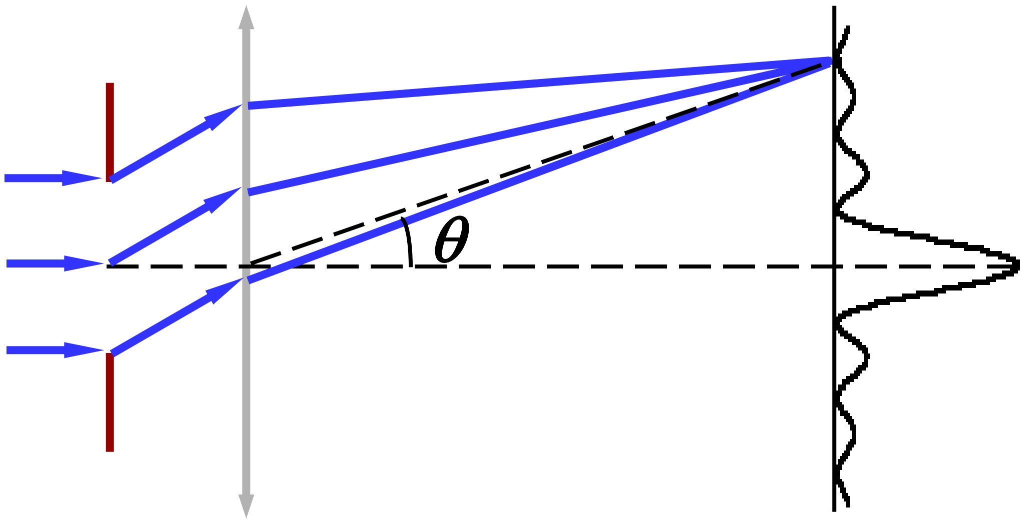
§ 20-9　夫琅和费圆孔衍射





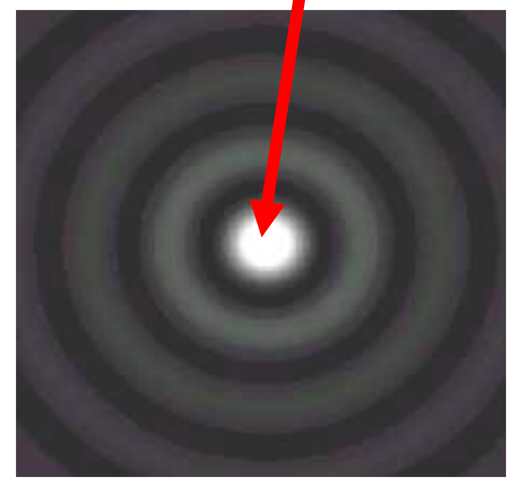
$$D \cdot \sin\theta_1 \approx 1.22\lambda$$

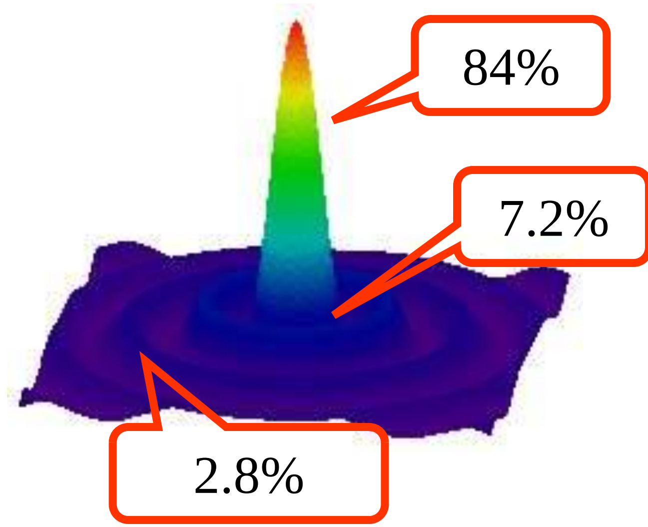
$\left.\begin{array}{l} D\uparrow \\ \lambda\downarrow \end{array}\right\}$ 爱里斑变小



爱里斑

Airy disk





$$D \cdot \sin\theta_1 \approx 1.22\lambda$$

(不要求推导)

(对比单缝，有 $a \cdot \sin\theta_1 = \lambda$)

光学仪器的分辨本领

几何光学：

（经透镜）

物点 ⇒ 像点

物(物点集合) ⇒ 像(像点集合)

波动光学：

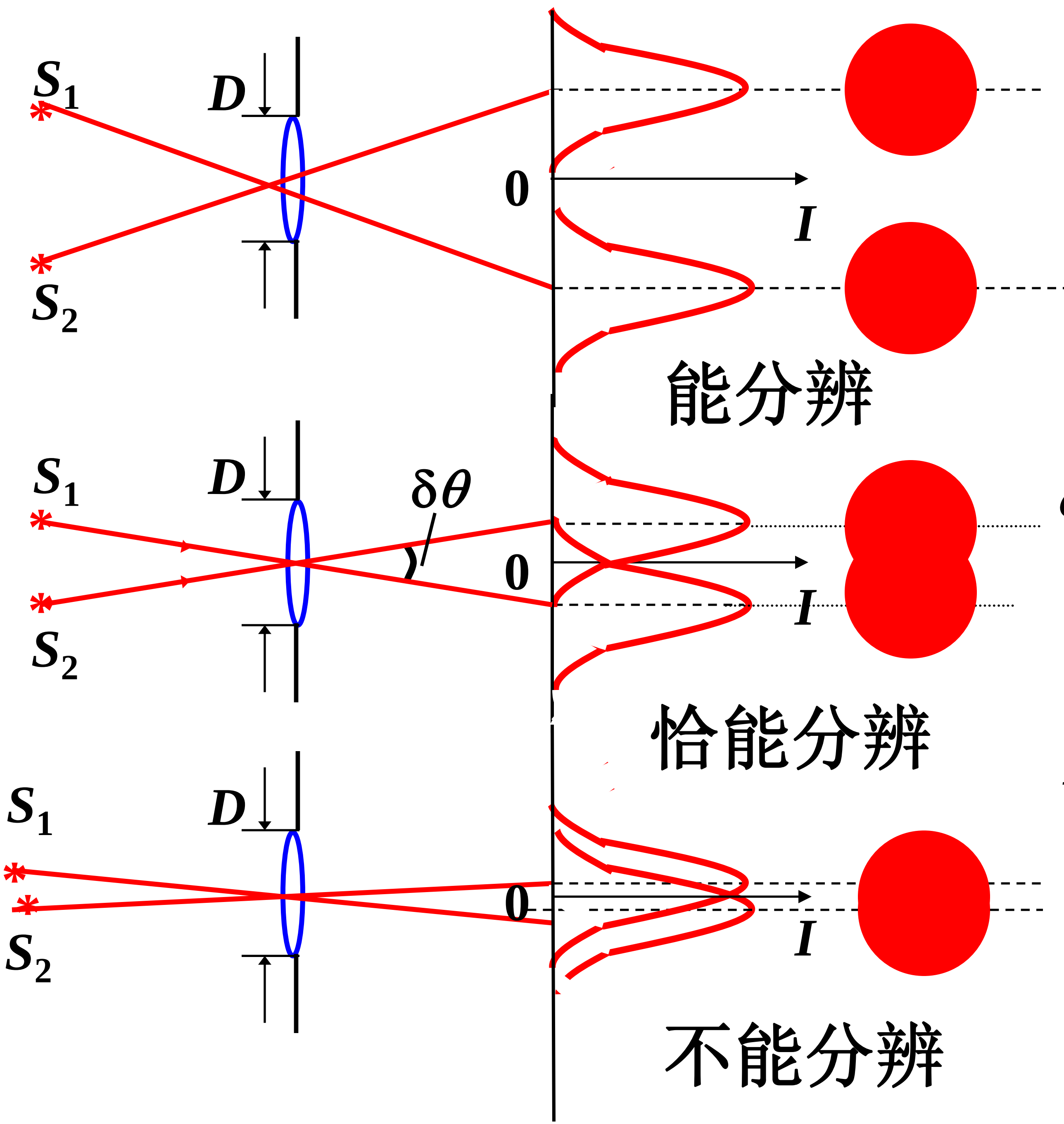
（经透镜）

物点 ⇒ 像斑

物(物点集合) ⇒像(像斑集合)

由于衍射的存在，一个物点的像不再是一个点，而是一个衍射斑(主要是爱里斑)。

衍射限制了透镜的分辨能力。



恰能分辨:一个像斑的中心恰好落在另一像斑的边缘（第一暗纹处）。

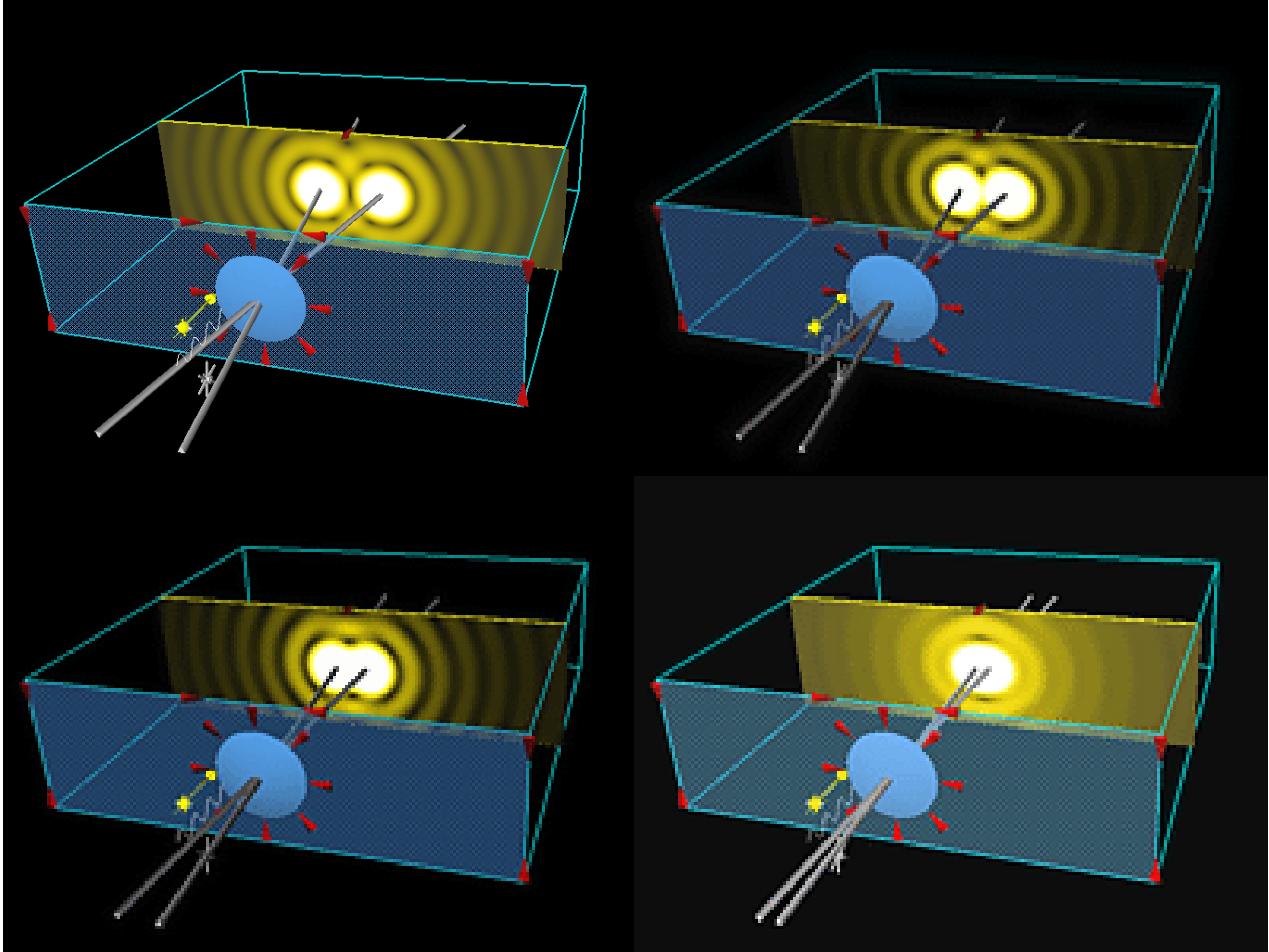
最小分辨角

$$\delta\theta = \theta_1 \approx 1.22\frac{\lambda}{D}$$

分辨本领

$$R \equiv \frac{1}{\delta\theta} = \frac{D}{1.22\lambda}$$

$$\left.\begin{array}{l} D\uparrow \\ \lambda\downarrow \end{array}\right\} \rightarrow R\uparrow$$



一个实例　你有过这样的经验吗？

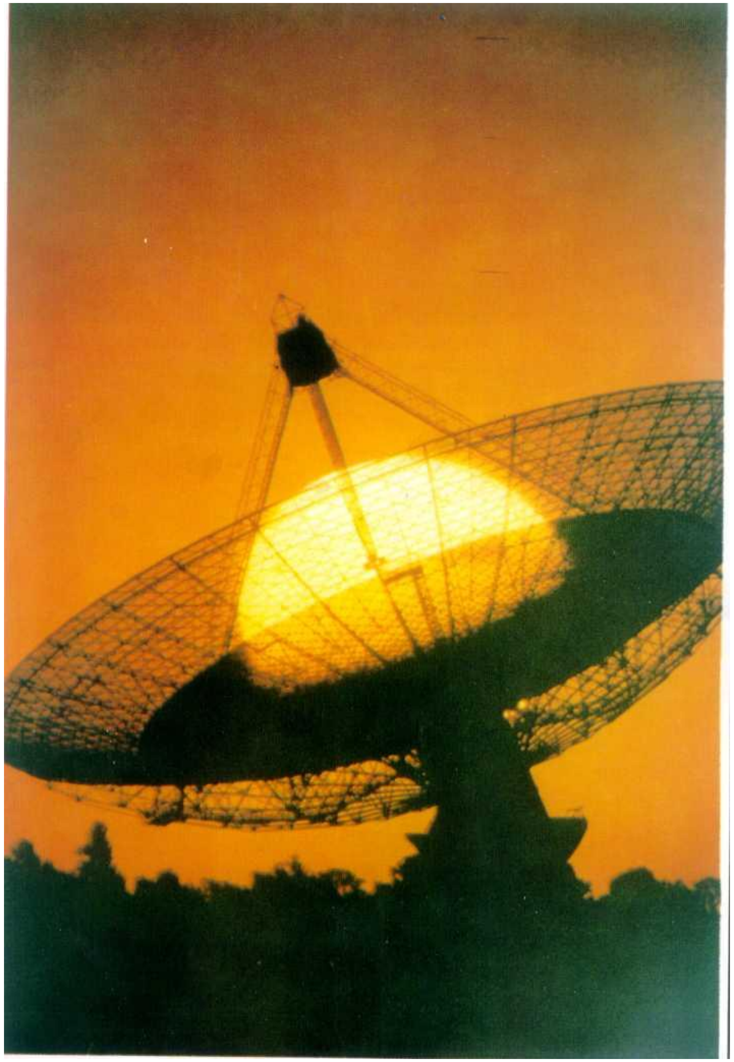
♦望远镜：

$$R \equiv \frac{1}{\theta_1} = \frac{D}{1.22\lambda}$$

波长不可选择

但可增大***D***

（射电望远镜
的大天线）



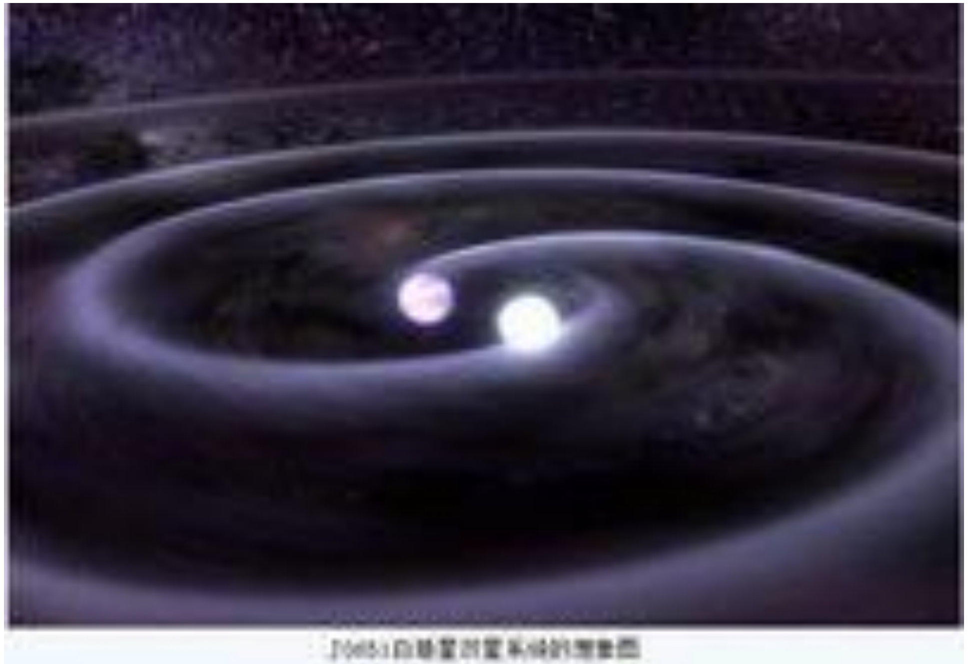
2016年9月25日，有着“超级天眼”之称的500米口径球面射电望远镜在贵州平塘的喀斯特洼坑中落成启用，吸引着世界目光。

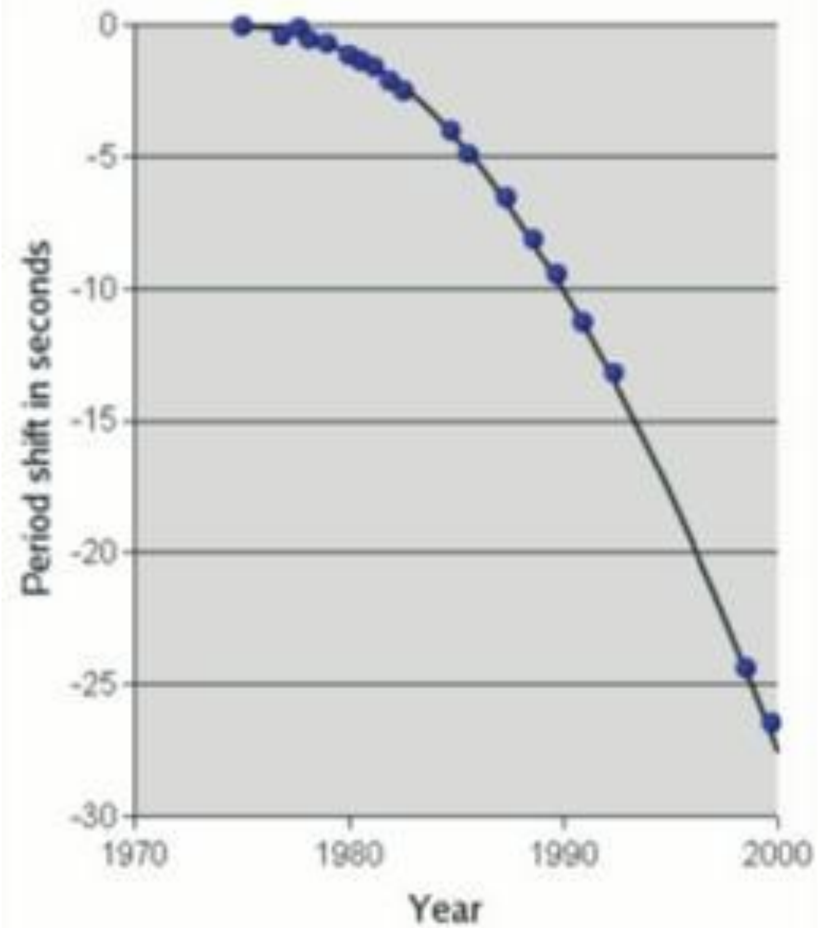
原世界上最大的射电望远镜

建在美国波多黎各岛的 Arecibo

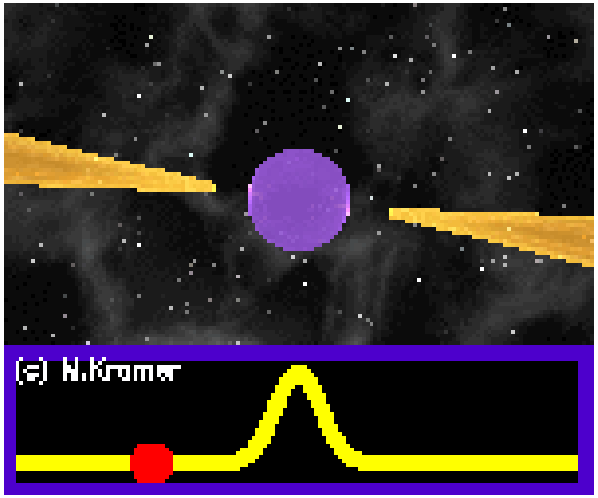
直径305m，能探测射到整个地球表面仅10^{-12}W的功率，也可探测引力波。

最激动人心的观测成果是1974年泰勒和赫尔斯发现第一个射电脉冲双星系统PSR191316。这是一个双中子星系统，轨道周期为7.75小时。根据广义相对论理论推算，这个双星系统的引力辐射十分强。引力辐射将导致双星系统轨道周期的明显变化。泰勒教授利用Arecibo射电望远镜进行上千次的观测，获得这颗脉冲星20年的轨道周期值，观测结果与广义相对论计算结果符合得很好，终于证实了引力波的存在。泰勒和赫尔斯一起荣获1993年诺贝尔物理学奖，这也成为Arecibo射电望远镜的骄傲。





Period shift in seconds
0
-5
-10
-15
-20
-25
-30
1970
1980
1990
2000
Year



(c) M.Kramer

♦显微镜：

$$R \equiv \frac{1}{\theta_1} = \frac{D}{1.22\lambda}$$

D不会很大，可 $\downarrow\lambda \rightarrow \uparrow R$

(紫光显微镜)

（电子显微镜）

电子的波长很小：0.1 Å～ 1Å，
∴分辨本领 R 很大。

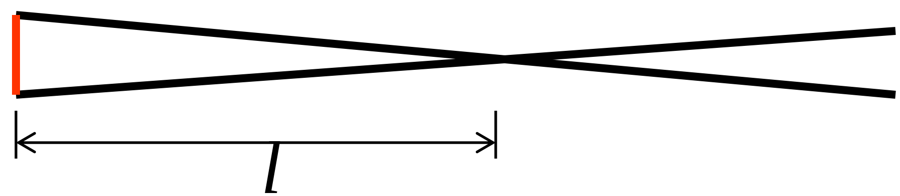
例题、在通常亮度下，人眼的瞳孔直径为3mm，问：人眼最小分辨角为多大？（λ=5500 Å ）如果窗纱上两根细丝之间的距离为2.0mm，问：人在多远恰能分辨。

解：

$$\delta\theta = 1.22\frac{\lambda}{d}$$

$$= 1.22 \times \frac{5500\times 10^{-10}}{3\times 10^{-3}} = 2.2\times 10^{-4}\,\mathrm{rad}(1')$$

$$\delta\theta = \frac{s}{l}$$



$$l = \frac{s}{\delta\theta} = \frac{2.0\times 10^{-3}}{2.2\times 10^{-4}} = 9.1\mathrm{m}$$

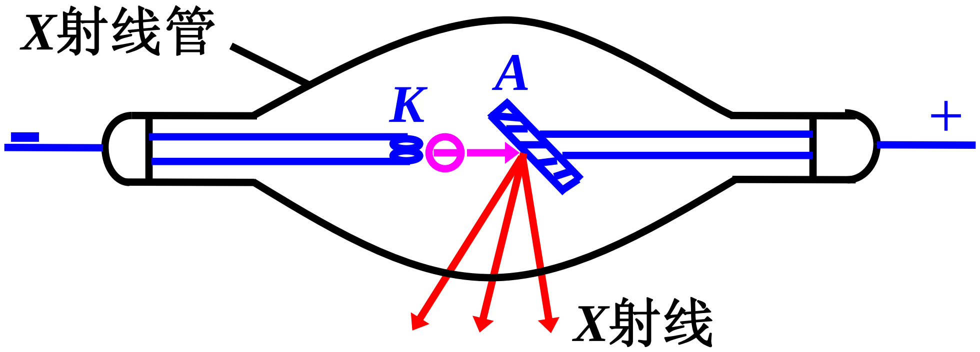
§20-10　X射线的衍射

伦琴（W. K. Rontgen，1845-1923）

•德国实验物理学家，1895年发现了X射线，并将其公布于世。历史上第一张X射线照片，就是伦琴拍摄他夫人的手的照片。

•由于X射线的发现具有重大的理论意义和实用价值，伦琴于1901年获得首届诺贝尔物理学奖金。

一. X 射线的产生



$$d\sin\theta = k\lambda$$

X射线λ:　0.001-0.01nm

λ太小$\rightarrow$$\theta$太小$\rightarrow$主极大太密

劳厄（Laue）实验（1912）

劳 厄

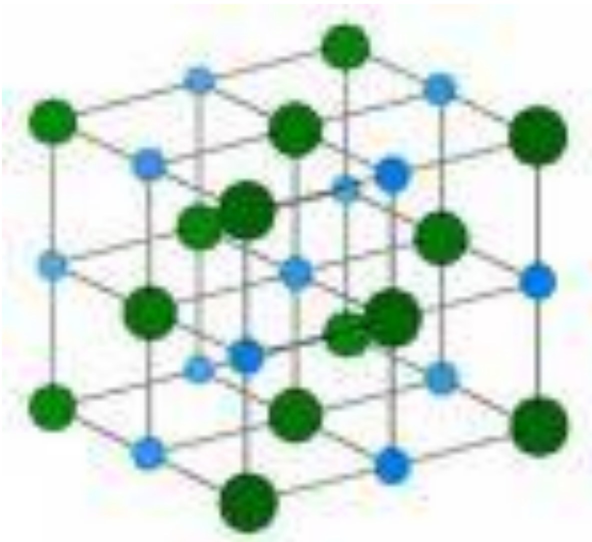
M. von Laue

(1879~1960)

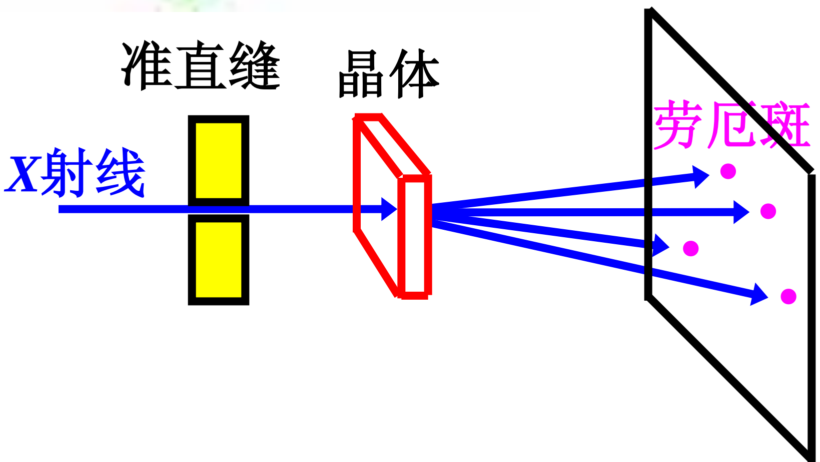
1914年获诺贝尔物理学奖

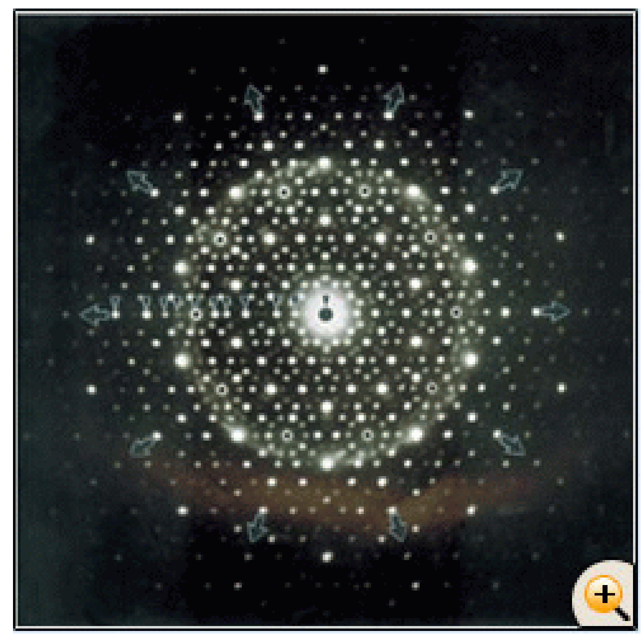
X **射线发现17年后，于1912年，德国物理学家劳厄找到了** ***X*** **射线具有波动本性的最有力的实验证据**

劳厄（Laue）实验（1912）



晶体结构中的三维空间点阵





证实了X射线的波动性！

二. X射线在晶体上的衍射(布喇格公式)

1912年，英国物理学家布喇格父子提出 X射线在晶体上衍射的一种简明的理论解释

亨·布 喇 格

W. H. Bragg

(1862~1942)

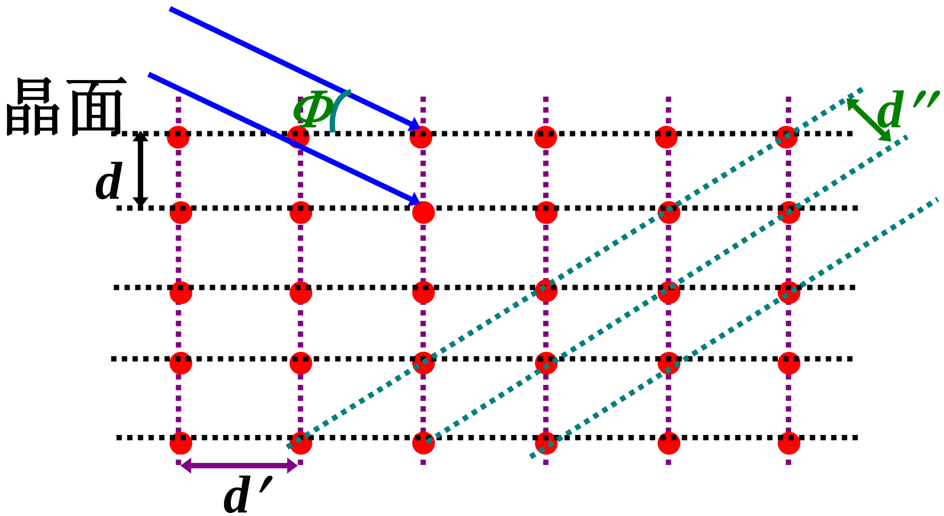
劳·布 喇 格

W. L. Bragg

(1890~1971)

1915年布喇格父子获诺贝尔物理学奖，小布喇格当年25岁，是历届诺贝尔奖最年轻的得主。

二. X射线在晶体上的衍射(布喇格公式)



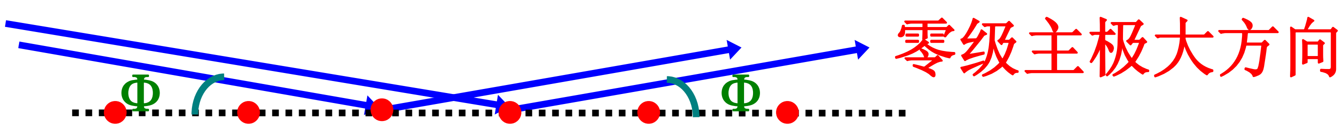
d： 晶面间距

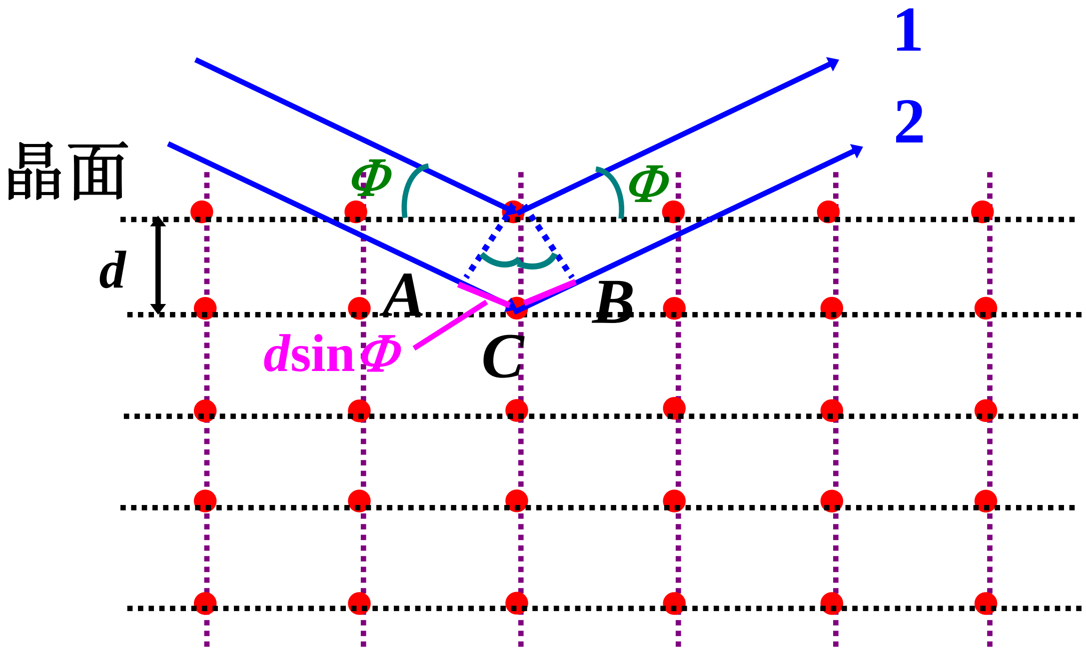
Φ： 掠射角

1. 衍射中心

每个原子都是散射子波的子波源

2. 点间散射光的干涉





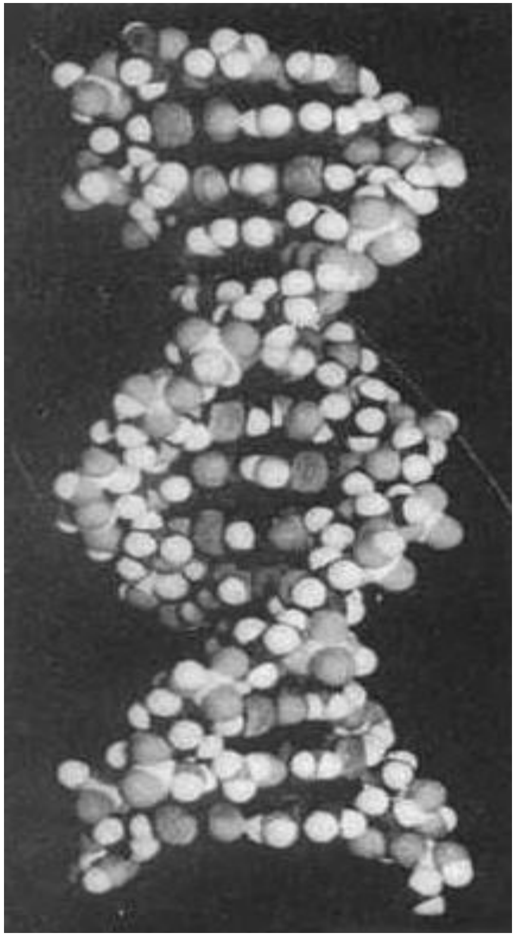
3 . 面间散射光的干涉 $\delta = \overline{AC} + \overline{CB} = 2d \cdot \sin\Phi$

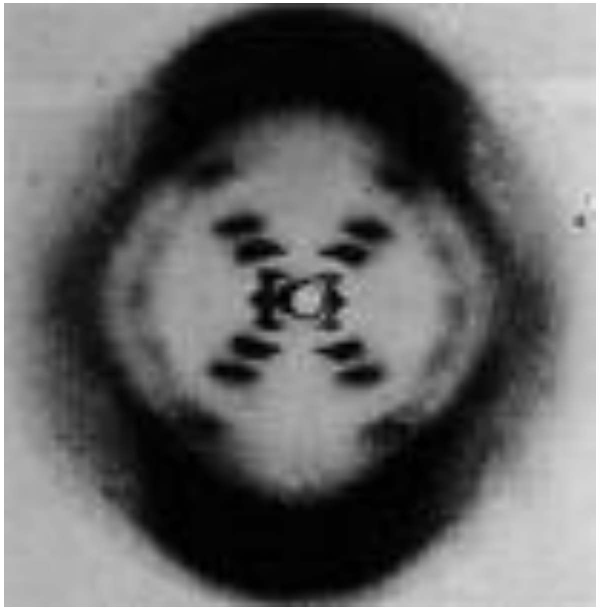
散射光干涉加强条件：

$2d \cdot \sin\Phi = k\lambda \quad (k = 1, 2, \cdots)$ —布喇格公式

三. 应用

- 已知Φ、λ 可测d — X射线晶体结构分析。

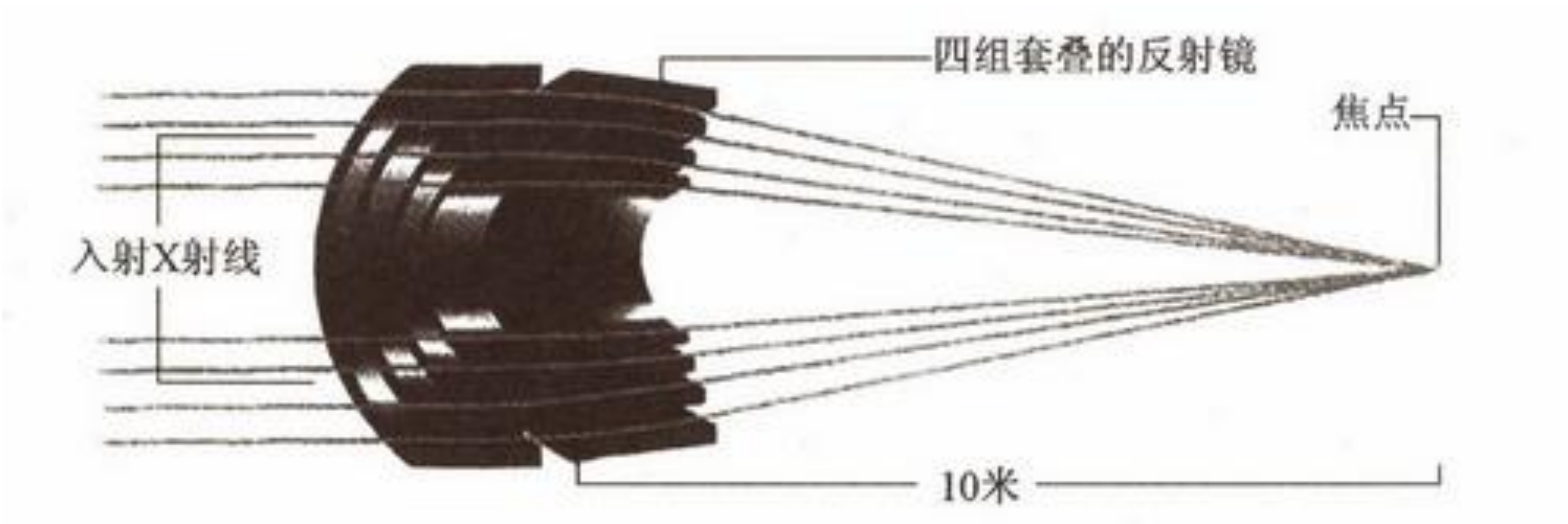




DNA晶体的X射线衍射图

三. 应用

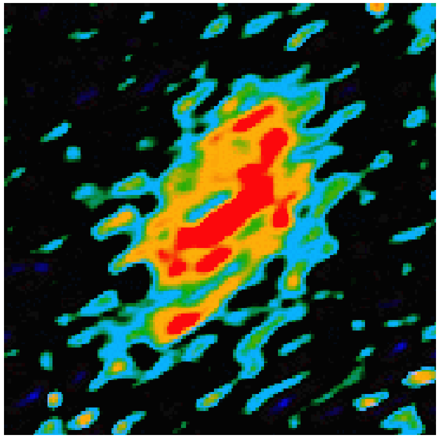
- 已知Φ、d可测λ — X射线光谱分析。



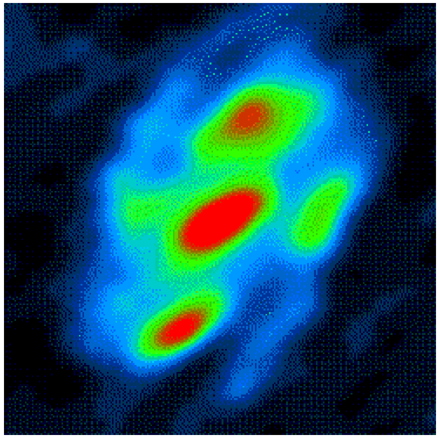
掠射式X射线望远镜

- 不同波段的旋涡星系M81

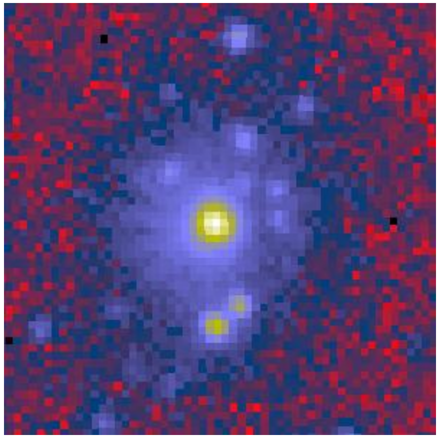
光学



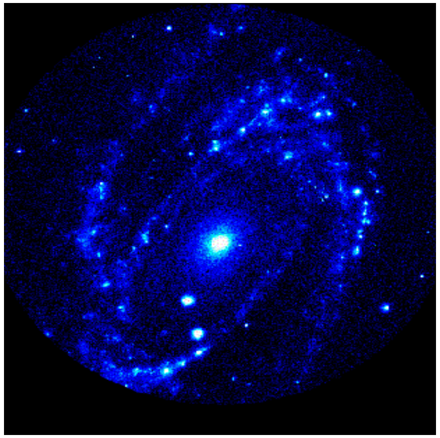
中红外



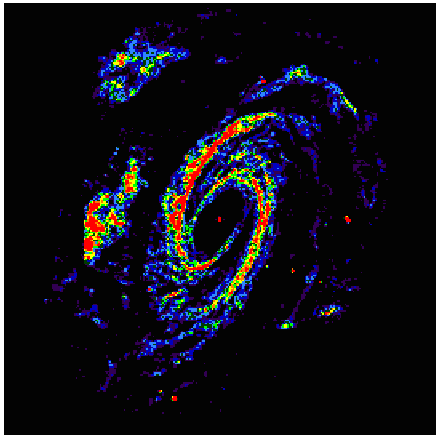
远红外



X射线



紫外



射电

四、X 射线衍射与普通光栅衍射的区别

▲X 射线衍射有一系列的布喇格条件。

晶体内有许多晶面族，入射方向和λ一定时，对第i个晶面族有：$2d_i \cdot \sin\Phi_i = k_i\lambda$，$i = 1,2,3 \ \ldots$

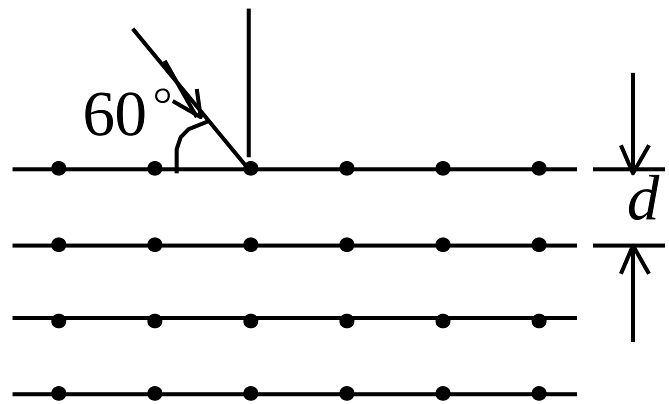
一维光栅只有一个干涉加强条件：

$$d\sin\theta = \pm k\lambda$$ —光栅方程。

▲晶体在 d_i、Φ_i、λ 都确定时，不一定能满足布喇格公式 $2d_i \cdot \sin\Phi_i = k_i\lambda$ 的关系。

一维光栅在λ和入射方向角 i 确定后，总能有衍射角θ满足光栅方程。

例：图中所示的入射X射线束不是单色的，而是含有由0.095～0.130 nm (1 nm = 10^{-9} m) 这一波段中的各种波长，晶面间距 *d* = 0.275 nm。问对图示的晶面，波段中哪些波长能产生强反射？



解：布喇格衍射公式

$$2d\sin\theta = k\lambda$$

$$\lambda = \frac{2d\sin\theta}{k} = \frac{0.476}{k} \quad \textbf{nm}$$

所以只有当***k* = 5和4**，即波长等于**0.095 nm** 和**1.19 nm**的**X**射线能产生强反射

衍 射 小 结

1、一个原理

惠更斯——菲涅耳原理

2、两种方法

半波带法　　振幅矢量法

3、三类问题

单缝、圆孔衍射——单纯衍射

光栅 —— 衍射和干涉的综合

*X*光衍射 —— 空间光栅

4、四点结论

（1）无论孔、缝，衍射都出现光的扩展

$a >> \lambda$， $D >> \lambda \rightarrow$ 几何光学

（2）任何光学仪器都存在分辨本领的问题

透镜： $\boxed{R \equiv \frac{1}{\delta\theta} = \frac{D}{1.22\lambda}}$ （角）

光栅： $\boxed{R = \frac{\lambda}{\delta\lambda} = Nk}$ （色）

（3）光栅方程

$$\boxed{d(\sin\theta-\sin i)=\pm k\lambda} \quad k=0，1，2，\cdots$$

i： 入射角 θ：衍射角

（4）布喇格公式

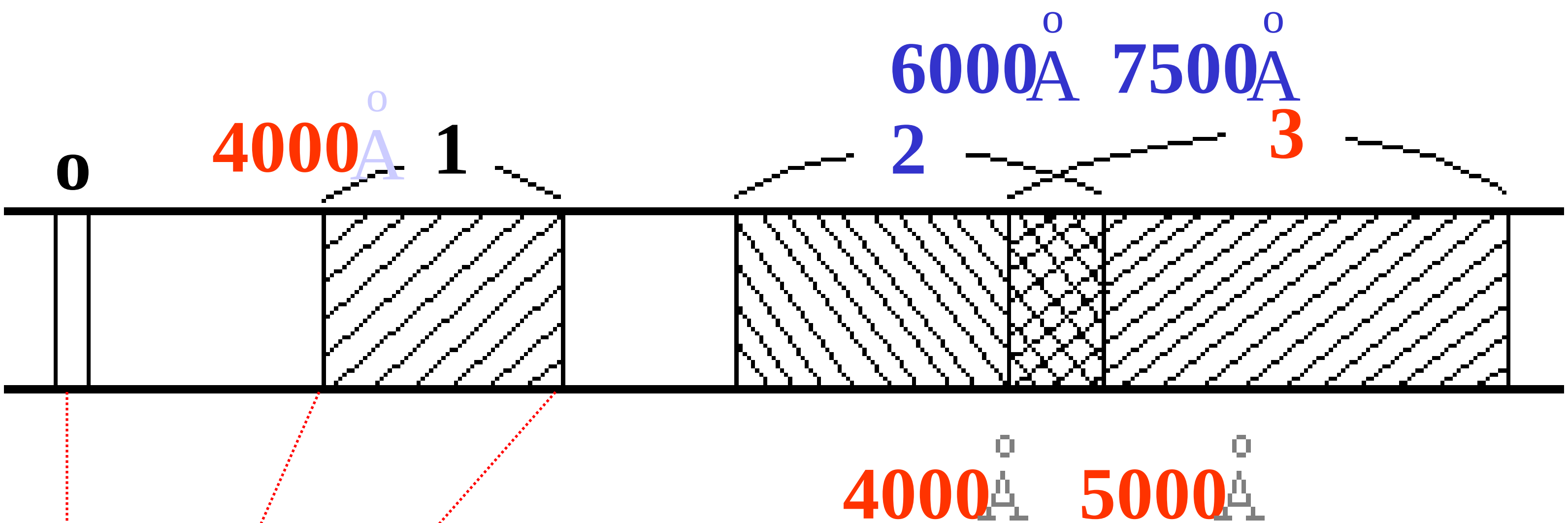
$$\boxed{2d\cdot\sin\Phi=k\lambda} \quad k=1，2，\cdots$$

Φ：掠射角

[例]波长400 nm到 750 nm的白光垂直照射到某光栅上，在离光栅 0.50 m 处的光屏上测得第一级彩带离中央明条纹中心最近的距离为 4.0 cm，求：

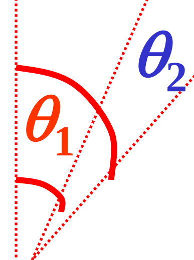
(1) 第一级彩带的宽度；

(2) 第三级光谱中哪些波长的光与第二级光谱的光重合。



解：(1) 波长短的在里面

$$(a+b)\sin\theta_1 = 4000\ \text{Å}$$

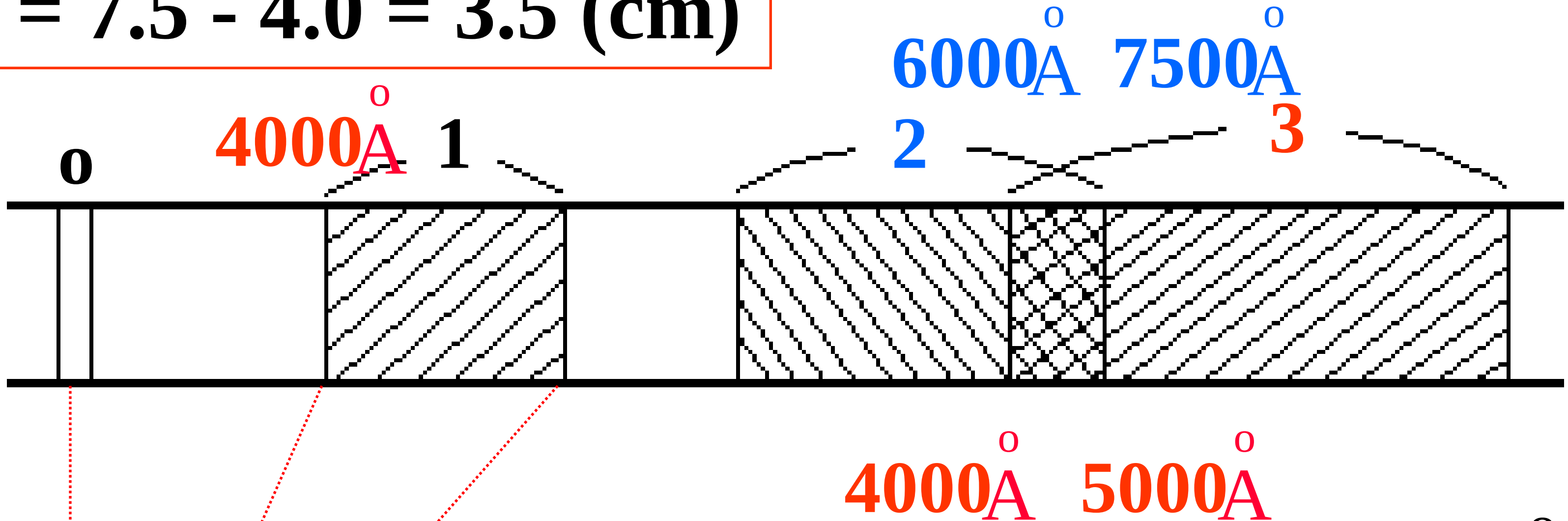


$$(a+b) = 4000\frac{D}{x} = 4\times10^{-7}\frac{0.5}{4\times10^{-2}} = 5\times10^{-6}(\text{m})$$

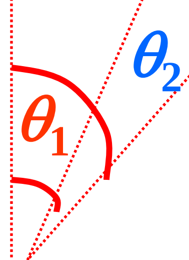
$$(a+b)\sin\theta_2 = 7500\ \mathring{A} \Rightarrow (a+b)\frac{x'}{D} = 7500\ \mathring{A}$$

$$x' = \frac{7500D}{(a+b)} = \frac{7.5\times10^{-7}\times0.5}{5\times10^{-6}} = 7.5(\mathrm{cm})$$

$$\boxed{\Delta x = 7.5 - 4.0 = 3.5\ (\mathrm{cm})}$$



解：(1) 波长短的在里面 $(a+b)\sin\theta_1 = 4000\ \mathring{A}$



$$(a+b) = 4000\frac{D}{x} = 4\times10^{-7}\frac{0.5}{4\times10^{-2}} = 5\times10^{-6}(\mathrm{m})$$

(2) $$(a+b)\sin\theta = 2\lambda_2$$
$$(a+b)\sin\theta = 3\lambda_3$$
$$\Rightarrow \quad 2\lambda_2 = 3\lambda_3$$

$$\lambda_3 = 4000\ \mathring{A} \qquad \text{得} \qquad \lambda_2 = 6000\ \mathring{A}$$
$$\lambda_2' = 7500\ \mathring{A} \qquad\qquad \lambda_3' = 5000\ \mathring{A}$$

第三级 4000 Å ~ 5000 Å 与第二级的 6000 Å ~ 7500 Å 重合