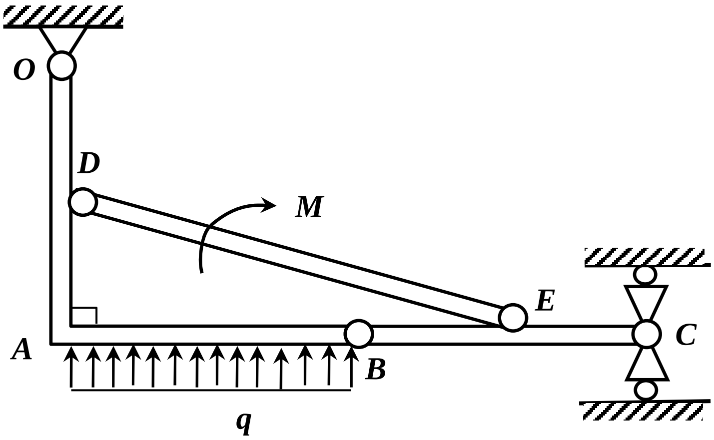
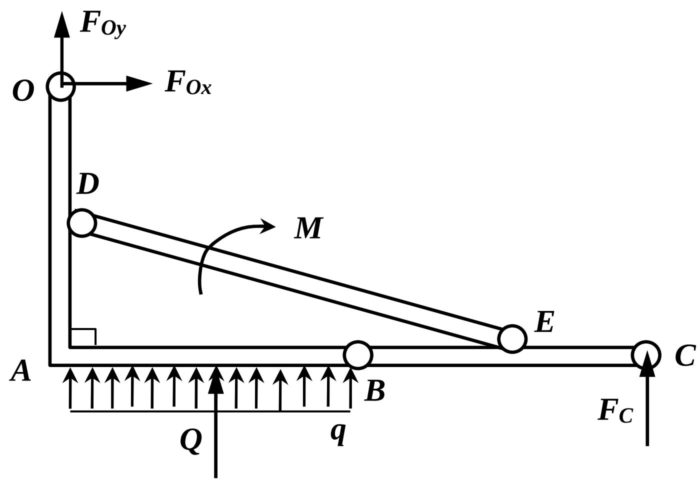
2009 理论力学期中考试（D 类）



1. 平衡系统由杆 OAB、杆 DE 和杆 BC 组成，如图所示。O 为铰链支座，B、D、E 处为铰链，C 处为滑动支座。不计各杆的重量。图示位置 AB 和 BC 水平。已知：$\overline{\mathrm{OA}}=\overline{\mathrm{AB}}=\overline{\mathrm{BC}}=2a$，$\overline{\mathrm{OD}}=\overline{\mathrm{DA}}=a$，$\overline{\mathrm{BE}}=\overline{\mathrm{EC}}=a$，杆 OAB 上作用均布载荷，载荷集度为 q，杆 DE 上作用一力偶，力偶矩大小为 $M=10qa^2$。

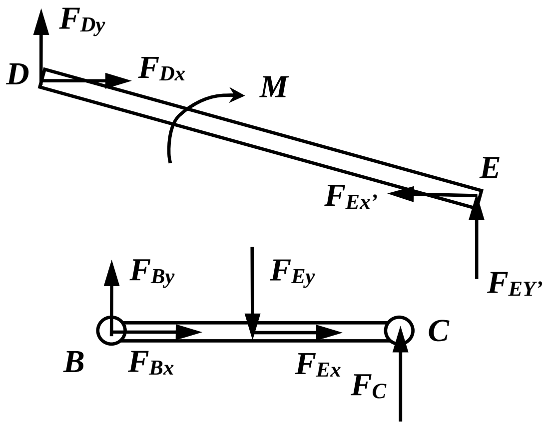
求：(1) 支座 O 的约束力 (2) 铰链 B 作用于杆 BC 的约束力。(20 分)

解：以系统为研究对象：



$\sum m_O(\vec{F})=4aF_C-M+aQ=0$，$Q=2aq$， 得到 $F_C=2aq$

$\sum F_X=F_{Ox}=0$， $\sum F_y=F_{Oy}+F_C+Q=0$， $F_{Oy}=-4aq$



以杆 BC 为研究对象：

$\sum m_B(\bar{F}) = 4aF_C - 2aF_{Ey} = 0$，$Q = 2aq$， 得到 $F_{Ey} = 4aq$

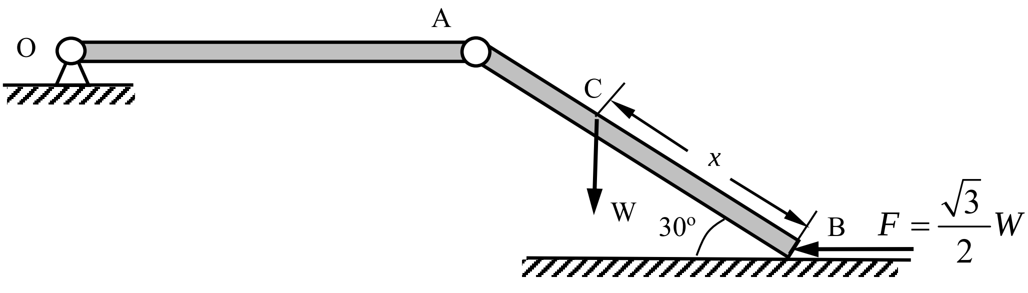
$\sum F_X = F_{Bx} + F_{Ex} = 0$，$\sum F_y = F_{By} - F_{Ey} + F_C = 0$

得到 $F_{Bx} = -F_{Ex}$，$F_{By} = F_{Ey} - F_C$

以杆 DE 为研究对象：

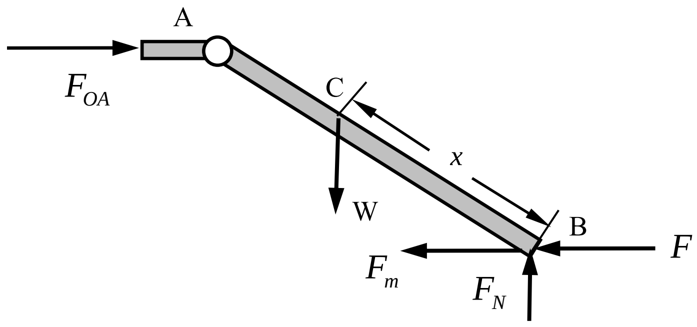
$\sum m_D(\bar{F}) = 3aF_{Ey} - M - aF_{Ex} = 0$， 得到 $F_{Ex} = 2aq$

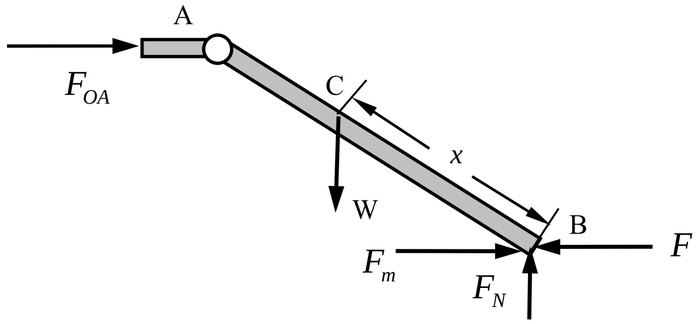
得到 $F_{Bx} = -2aq$，$F_{By} = 2aq$



2. 如图所示，杆 AO 和杆 AB 重量不计，杆 AO 在 O 处与地面铰接，在 A 处与杆 AB 铰接，杆 AB 的 B 端搁置在粗糙的地面上，B 端的极限摩擦系数为 $\dfrac{\sqrt{3}}{4}$。杆 AO 和杆 AB 的长度均为 l。重量为 W 的重物 C 放在杆 AB 上，C 点与 B 点的距离为 x，杆 AB 上作用一水平力 F，

大小为$\dfrac{\sqrt{3}}{2}W$。求系统平衡时 x 的范围。(20 分)





$\sum m_B(\vec{F}) = -\dfrac{1}{2} l\, F_{OA} + W\dfrac{\sqrt{3}\,x}{2} = 0$， 得到 $F_{OA} = \dfrac{\sqrt{3}\,x}{l} \cdot W$

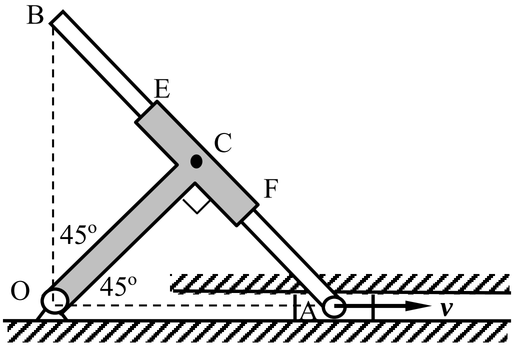
$\sum F_y = F_N - W = 0$，$F_N = W$

$\sum F_X = F_{OA} - F \pm \dfrac{\sqrt{3}}{4} F_N = \dfrac{\sqrt{3}x}{l} \cdot W - F \pm \dfrac{\sqrt{3}}{4} W = 0$

$\dfrac{\sqrt{3}x}{l} \cdot W = \dfrac{\sqrt{3}}{2} W \pm \dfrac{\sqrt{3}}{4} W$

上临界： $\dfrac{\sqrt{3}x}{l} \cdot W = \dfrac{3\sqrt{3}}{4} W$， 下临界： $\dfrac{\sqrt{3}x}{l} \cdot W = \dfrac{\sqrt{3}}{4} W$

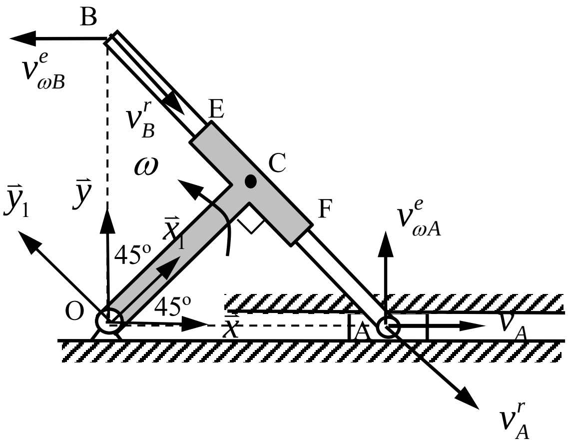
上临界： $x = \dfrac{3}{4} l$， 下临界： $x = \dfrac{l}{4}$



3. 平面运动机构如图所示，T 形块 OEF 作定轴转动，AB 杆可在 T 形块内滑动，AB 杆的 A 点在水平线内作匀速直线运动，速度为 v。已知 AB 杆长为 $\sqrt{2}\,l$，$OC \perp EF$，

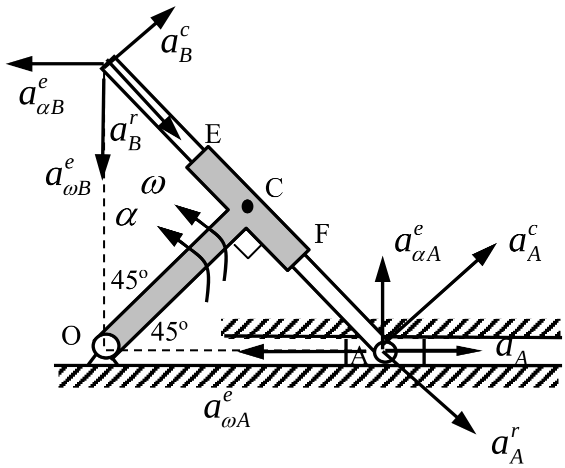
$\overline{OC} = \dfrac{\sqrt{2}\,l}{2}$。图示位置 OC 与水平线夹角为 45°。

求：(1) T 形块 OEF 的角速度 (2) T 形块 OEF 的角加速度 (3) B 点的加速度 (20 分)



解：取 A 为兴趣点，T 形块 OEF 的连体基 $\bar{x}_1\bar{y}_1$ 为动基，相对运动是直线运动，连体基 $\bar{x}_1\bar{y}_1$ 相对定基作定轴转动。

速度分析： $v^e_{\omega A} = l\omega = v$， $\omega = \dfrac{v}{l}$， $v^r_A = \sqrt{2}\,v$， $v^r_B = v^r_A = \sqrt{2}\,v$



加速度分析：

$$\vec{a}_A = \vec{a}_{\omega A}^e + \vec{a}_{\alpha A}^e + \vec{a}_A^c + \vec{a}_A^r = \vec{0}$$

$$a_A^c = 2\omega v_A^r = 2\sqrt{2}\frac{v^2}{l}$$

$\frac{1}{\sqrt{2}}a_A^r + \frac{1}{\sqrt{2}}a_A^c - a_{\omega A}^e = 0$， 得到 $a_A^r = \sqrt{2}a_{\omega A}^e - a_A^c = \sqrt{2}\frac{v^2}{l} - 2\sqrt{2}\frac{v^2}{l} = -\sqrt{2}\frac{v^2}{l}$

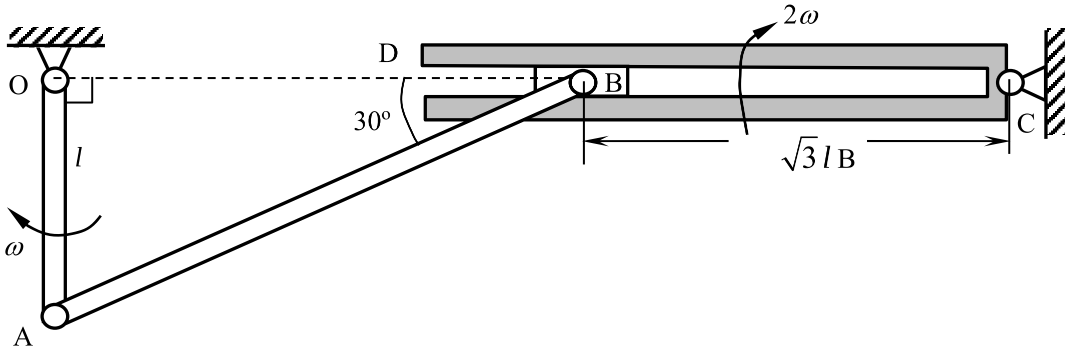
$-\frac{1}{\sqrt{2}}a_A^r + a_{\alpha A}^e + \frac{1}{\sqrt{2}}a_A^c = 0$， 得到 $a_{\alpha A}^e = l\alpha = \frac{1}{\sqrt{2}}a_A^r - \frac{1}{\sqrt{2}}a_A^c = -\frac{v^2}{l} - \frac{2v^2}{l} = -\frac{3v^2}{l}$

$$\alpha = -\frac{3v^2}{l^2}$$

$a_{\alpha B}^e = \alpha l = -\frac{3v^2}{l}$， $a_B^r = a_A^r = -\sqrt{2}\frac{v^2}{l}$， $a_B^c = a_A^c = 2\sqrt{2}\frac{v^2}{l}$

$$a_{Bx} = \frac{1}{\sqrt{2}}a_B^r + \frac{1}{\sqrt{2}}a_B^c - a_{\alpha B}^e = -\frac{v^2}{l} + \frac{2v^2}{l} + \frac{3v^2}{l} = \frac{4v^2}{l}$$

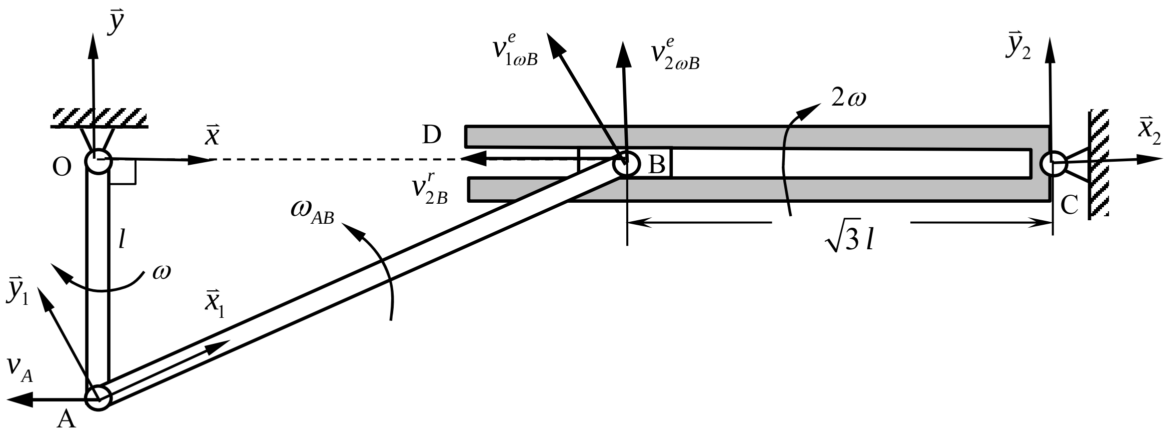
$$a_{By} = -\frac{1}{\sqrt{2}}a_B^r + \frac{1}{\sqrt{2}}a_B^c - a_{\omega B}^e = \frac{v^2}{l} + \frac{2v^2}{l} - \frac{v^2}{l} = \frac{2v^2}{l}$$



4. 平面运动机构如图所示，OA 杆以匀角速度ω绕 O 点作定轴转动，CD 杆以匀角速度2ω绕 C 点作定轴转动，OA 杆和 AB 杆铰接，AB 杆和滑块 B 铰接，滑块 B 可以在 CD 杆的滑槽内滑动。OA 杆的长度为 l，图示位置 OA 铅垂，CD 水平，$\overline{BC}=\sqrt{3}\,l$ 。

求：(1) AB 杆的角速度 (2) B 点的速度 (3) AB 杆的角加速度 (20 分)

解：速度分析：



(1) $\vec{v}_B=\vec{v}_A+\vec{v}^e_{1\omega B}+\vec{v}^r_{1B}=\vec{v}^e_{2\omega B}+\vec{v}^r_{2B}$

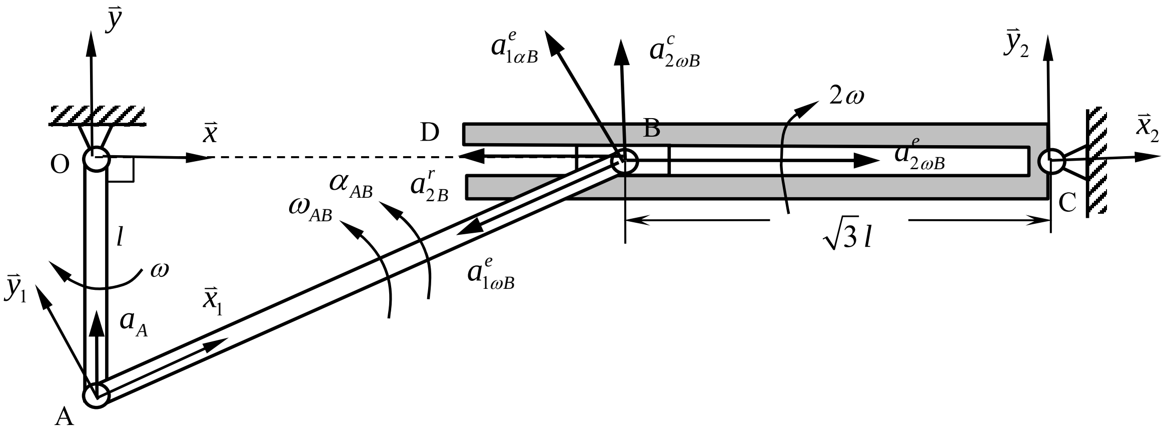
y： $\dfrac{\sqrt{3}}{2}v^e_{1\omega B}=v^e_{2\omega B}$， 得到 $\dfrac{\sqrt{3}}{2}2l\omega_{AB}=\sqrt{3}l\cdot 2\omega$， $\omega_{AB}=2\omega$

x： $-v_A-\dfrac{1}{2}v^e_{1\omega B}=-v^r_{2B}$，得到 $v^r_{2B}=3\omega l$

(2) $v_{Bx}=-v^r_{2B}=-3\omega l$， $v_{By}=v^e_{2\omega B}=2\sqrt{3}\,\omega l$

(3) 加速度分析：

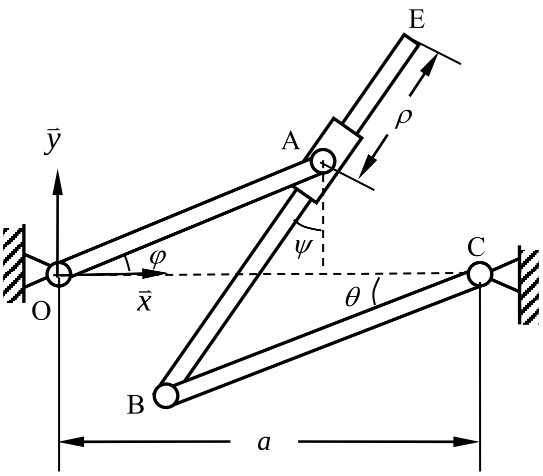
$\vec{a}_B=\vec{a}_A+\vec{a}^e_{1\omega B}+\vec{a}^e_{1\alpha B}+\vec{a}^r_{1B}=\vec{a}^e_{2\omega B}+\vec{a}^r_{2B}+\vec{a}^c_{2B}$



$$y:\quad a_A+\frac{\sqrt{3}}{2}a_{1\alpha B}^e-\frac{1}{2}a_{1\omega B}^e=a_{2\omega B}^c,$$

得到 $$\omega^2 l+\frac{\sqrt{3}}{2}2l\alpha_{AB}-\frac{1}{2}2l(2\omega)^2=2\cdot 2\omega\cdot 3\omega l$$

$$\alpha_{AB}=\frac{15}{\sqrt{3}}\omega^2=5\sqrt{3}\omega^2$$ （逆时针）



5． 平面运动机构由杆 OA、杆 BE、杆 BC 和滑块 A 组成，如图所示，O、A、B、C 处为理想圆柱铰链，滑块 A 可以相对杆 BE 滑动。设杆 OA 长度为 l_1，杆 BE 的长度为 l_2，杆 BC 的长度为 l_3，姿态角分别为φ、ψ、θ，点 A 与点 E 的距离为ρ 。

以 $\boldsymbol{q}=\begin{bmatrix}\varphi & \rho & \psi & \theta\end{bmatrix}^{\mathrm{T}}$ 为位形坐标，(1) 用总体法写出系统的运动学约束方程 (2) 计算自由度 (3) 写出雅可比阵和加速度约束方程的右项 (20 分)

解： (1) $\boldsymbol{\Phi} = \begin{bmatrix} l_1 \cos\varphi - (l_2 - \rho)\sin\psi + l_3 \cos\theta - a \\ l_1 \sin\varphi - (l_2 - \rho)\cos\psi + l_3 \sin\theta \end{bmatrix} = \mathbf{0}$

(2) $DOF = 4 - 2 = 2$

(3) $\boldsymbol{\Phi}_{\boldsymbol{q}} = \begin{bmatrix} -l_1 \sin\varphi & \sin\psi & -(l_2 - \rho)\cos\psi & -l_3 \sin\theta \\ l_1 \cos\varphi & \cos\psi & (l_2 - \rho)\sin\psi & l_3 \cos\theta \end{bmatrix}$

$$\boldsymbol{\Phi}_{\boldsymbol{q}}\dot{\boldsymbol{q}} = \begin{bmatrix} -l_1 \sin\varphi\dot{\varphi} + \sin\psi\,\dot{\rho} - (l_2 - \rho)\cos\psi\dot{\psi} - l_3 \sin\theta\dot{\theta} \\ l_1 \cos\varphi\dot{\varphi} + \cos\psi\,\dot{\rho} + (l_2 - \rho)\sin\psi\dot{\psi} + l_3 \cos\theta\dot{\theta} \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned} \gamma = -\left(\boldsymbol{\Phi}_{\boldsymbol{q}}\dot{\boldsymbol{q}}\right)_{\boldsymbol{q}}\dot{\boldsymbol{q}} &= -\begin{bmatrix} -l_1 \cos\varphi\dot{\varphi} & \cos\psi\dot{\psi} & \cos\psi\,\dot{\rho} + (l_2 - \rho)\sin\psi\dot{\psi} & -l_3 \cos\theta\dot{\theta} \\ -l_1 \sin\varphi\dot{\varphi} & -\sin\psi\dot{\psi} & -\sin\psi\,\dot{\rho} + (l_2 - \rho)\cos\psi\dot{\psi} & -l_3 \sin\theta\dot{\theta} \end{bmatrix}\dot{\boldsymbol{q}} \\ &= \begin{bmatrix} l_1 \cos\varphi\dot{\varphi}^2 - 2\cos\psi\dot{\psi}\dot{\rho} - (l_2 - \rho)\sin\psi\dot{\psi}^2 + l_3 \cos\theta\dot{\theta}^2 \\ l_1 \sin\varphi\dot{\varphi}^2 + 2\sin\psi\dot{\psi}\dot{\rho} - (l_2 - \rho)\cos\psi\dot{\psi}^2 + l_3 \sin\theta\dot{\theta}^2 \end{bmatrix} \end{aligned}$$