上 海 交 通 大 学 试 卷（ A 卷）

（ 20 11 至 20 12 学年 第 1 学期 ）

班级号________________　学号____________　姓名________

课程名称 离散数学________________　成绩________

一、选择题（26 分，每题 2 分。每题只有一个选项是正确的，请将答案写在题号前的括号里）

（ ）1. A,B,C为任意命题公式，当下列哪项成立时，有$A \Leftrightarrow B$。

(A) $C \to A \Leftrightarrow C \to B$

(B) $A \vee C \Leftrightarrow B \vee C$

(C) $A \wedge C \Leftrightarrow B \wedge C$

(D) $\neg A \Leftrightarrow \neg B$

（ ）2. 下列哪个命题公式是重言式?

(A) $(x \to y) \wedge (y \to x)$

(B) $(\neg x \vee y) \wedge (\neg(\neg x \wedge \neg y))$

(C) $\neg(x \to \neg y) \to x$

(D) $\neg(x \vee y)$

（ ）3. 一个无向图共有 6 个顶点， 其中 5 个顶点的度数分别为 1，2，2，3，4，则第六个顶点的度数不可能是下列哪项?

(A) 4　(B) 2　(C) 1　(D) 0

（ ）4. 下列三个命题公式中有几个与$(x \wedge \neg y)$矛盾(既不同为真也不同为假)?

$(\neg x \vee y)$，$(\neg x \wedge y)$，$(\neg y \to \neg x)$

(A) 0　(B) 1　(C) 2　(D) 3

（ ）5. 含 5 个顶点、3 条边的不同构的简单图有几个?

(A) 2 个　(B) 3 个　(C) 4 个　(D) 5 个

（ ）6. 令F(x):"x 是金属"，G(y):"y 是液体"，H(x,y):"x 可以溶解在 y 中"，则命题“任何金属可以溶解在某种液体中”可符号化为下列哪项?

(A) $(\forall x)(F(x) \wedge (\exists y)(G(y) \wedge H(x,y)))$

(B) $(\forall x)(\exists (x)F(x) \to (G(y) \to H(x,y)))$

(C) $(\forall x)(F(x) \to (\exists y)(G(y) \wedge H(x,y)))$

(D) $(\forall x)(F(x) \to (\exists y)(G(y) \to H(x,y))$

（ ）7、下面表述不正确的是哪项?

(A)全称量词和存在量词不可以随便交换位置。

(B)如果公式 A 没有自由变元，则称公式 A 为闭公式。

(C)命题的真值可以不唯一。

(D)谓词是用来刻画个体具有的性质或关系的。

我承诺，我将严格遵守考试纪律。

承诺人：__________

题号										
得分										
批阅人(流水阅卷教师签名处)										

( )8. 设解释I如下：个体域D = {a,b}，$F(a,a) = F(b,b) = 0$，$F(a,b) = F(b,a) = 1$，在解释I下，下列公式中真值为1的是哪项？

(A) $(\forall x)(\exists y)F(x,y)$

(B) $(\exists x)(\forall y)F(x,y)$

(C) $(\forall x)(\forall y)F(x,y)$

(D) $\neg(\exists x)(\exists y)F(x,y)$

( )9. 设有四个犯罪嫌疑人甲乙丙丁。甲说："我不是罪犯。"乙说："丁是罪犯。"丙说："乙是罪犯。"丁说："我不是罪犯。"经调查证实四人中只有一人说的是真话。下列哪个判断为真?

(A) 甲说的是假话，甲是罪犯。

(B) 乙说的是真话，丁是罪犯。

(C) 丙说的是真话，乙是罪犯。

(D) 丁说的是假话，丁是罪犯。

( )10. 互不相同的n元真值函数有多少个?

(A) $2n$　(B) 2^n　(C) n^2　(D) 2^{2^n}

( )11. 设无向图G的邻接矩阵为

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

则G的顶点数与边数分别为哪项?

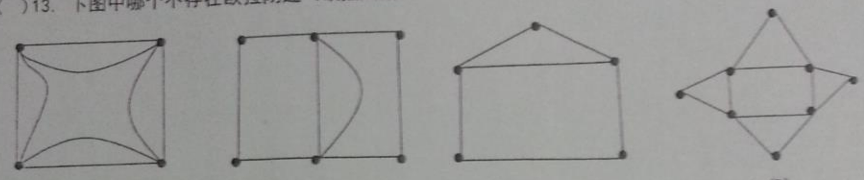
(A)4,10　(B)5,10　(C)4,8　(D)5,8

( )12. 已知一棵树T中有度为5，4，3，2的顶点各一个，其余为树叶顶点，T的树叶顶点数为哪项?

(A)8　(B)7　(C)6　(D)5

班级号______________ 学号____________ 姓名____________

( )13. 下图中哪个不存在欧拉闭迹（欧拉回路）？



(A)　　(B)　　(C)　　(D)

二、填空题（20 分，每题 2 分）

1. 命题公式$(\neg x \wedge y) \vee \neg z$的对偶式是 ______________。

2. 设图 G 是一个具有 k 个度为奇数的结点的无向图，最少要在 G 中添加______条边才能使得到图具有欧拉闭迹（欧拉回路）。

3. 如果只能使用联结词↑(与非)，则 $x \to y$ 可表示为______________________。

4. 设谓词公式：$(\forall x)(\exists y)P(x,y)$，个体域：$\{1,2\}$，将其中的量词消去，写出与之等价的命题公式为______________________。

5. 设R(x)："x 是实数"；S(x,y)："x 小于 y"。则命题“不存在最小的实数”，用谓词公式可以表示为______________________。

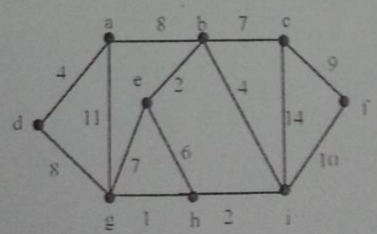
6. 带有 n 个顶点和 k 个连通分量的简单图最多有__________条边。

7. 设$t(\neg x \vee (y \wedge z)) = 0$, 则$t(\neg(\neg z \vee \neg y) \leftrightarrow x)$ =__________。

8. 在无向完全图K_n中，没有公共边的哈密顿圈（H 回路）的条数是：__________。

9. 设只有一个根节点的树 T 有 17 条边，4 个度为 4 的结点，1 个度为 3 的结点，其余 12 个结点全部为叶结点，那么 T 的树根的度数是__________。

10. 下图所示的无向连通图，最小生成树的权为__________。



班级号＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿ 学号＿＿＿＿＿＿＿＿ 姓名＿＿＿＿＿＿＿＿

三、(14 分，第一题 6 分，第二题 3 分，第三题 5 分)解答下列各题（直接在横线上填写结果）：

(1) $\big((x\to z)\wedge\big((y\to z)\wedge z\big)\big)\leftrightarrow(\neg x\vee\neg y)$的主析取范式为：

＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿。

和$\big((x\to z)\wedge\big((y\to z)\wedge z\big)\big)\leftrightarrow(\neg x\vee\neg y)$的主合取范式为：

＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿。

（2）请列出三个"联结词的最小功能完全集"：＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿

＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿

＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿

(3) 公式$(\forall x)P(x,y)\to((\forall x)Q(x)\to(\exists y)P(y,z))$的前束范式＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿

四、(8 分) 在通信中要传输 8 进制数字 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7，这些数字出现的频率依次为 30%; 20%; 15%; 10%; 10%; 6%; 5%; 4%. 编一个最佳前缀码，使通信中出现的二进制数字尽可能地少.

(1). 画出相应的哈夫曼（Huffman）树.

(2). 写出每个数字对应的前缀码.

班级号____________________ 学号_______________ 姓名_______________

五、(16 分，每题 8 分). 任用一种推理方法证明:

(1) $(\forall x)\big(P(x)\rightarrow((\forall y)Q(y))\wedge R(x)\big)$, $(\exists x)P(x)\Rightarrow Q(y)\wedge(\exists x)(P(x)\wedge R(x))$

(2) $x\rightarrow y,(\neg y\vee z)\wedge\neg z,\neg(\neg x\wedge w)\ \Rightarrow\neg w$

班级号________________ 学号____________ 姓名____________

六、（8 分）设$G=(V,E)$为非平凡无向图，边数为m，顶点数为n，请证明下面两个命题等价：

（1）G中任意两点间存在唯一的路径。

（2）G无圈且$m=n-1$。

七、（8 分）设简单图 $G=(V,E)$，结点数为n，边数为m，其中$n\geq 3$。证明：如果 $\frac{(n-1)(n-2)}{2}+2=m$，那么 G 为哈密顿（Hamilton）图。

离散数学试卷 A 卷-答案

一、 选择题

1、D　2、C　3、C　4、C　5、C　6、C
7、C　8、A　9、A　10、D　11、D　12、A　13、C

二、 填空题

1、$(\neg x \vee y) \wedge \neg z$

2、$\frac{k}{2}$

3、$((x\uparrow x)\uparrow(x\uparrow x))\uparrow(y\uparrow y)$或$x\uparrow(y\uparrow y)$

4、$(P(1,1) \vee P(1,2)) \wedge (P(2,1) \vee P(2,2))$

5、$(\forall x)(R(x) \rightarrow (\exists y)(R(y) \wedge S(y,x)))$

6、$\frac{(n-k)(n-k+1)}{2}$

7、0

8、$\left[\frac{n-1}{2}\right]$

9、3

10、37

三、 简答题

（1）主析取式为

$$(\neg x \wedge \neg x \wedge z) \vee (\neg x \wedge y \wedge z) \vee (x \wedge \neg y \wedge z) \vee (x \wedge y \wedge \neg z)$$

主合取式为

$$(\neg x \vee \neg y \vee \neg z) \wedge (x \vee y \vee z) \wedge (x \vee \neg y \vee z) \wedge (\neg x \vee y \vee z)$$

（2）$\{\neg,\wedge\},\{\neg,\vee\},\{\neg,\rightarrow\},\{\uparrow\},\{\downarrow\}$

（3）$(\exists x)(\exists v)(\exists w)\,(\neg P(x,y) \vee \neg Q(v) \vee P(w,z))$

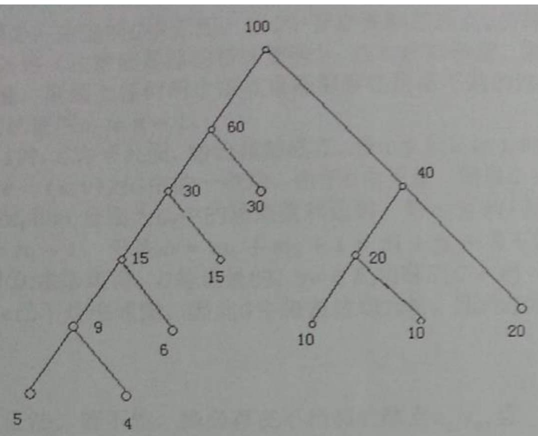
四、

赋权如下：$w_0 = 30, w_1 = 20, w_2 = 15, w_3 = 10, w_4 = 10,$

$w_5 = 6, w_6 = 5, w_7 = 4$。

将这些权由小到大排列：4,5,6,10,10,15,20,30。

(1). 相应的哈夫曼树如右图所示：



(2)每个数字的前缀码如下：

0 : 01 ;　1 : 11 ;　2 : 001 ;　3 : 100 ;　4 : 101 ;　5 : 0001 ;　6 : 00000 ;　7 : 00001

五、 证明题

1、

$(1)\exists xP(x)$

$(2)P(a)$

$(3)\forall x(P(x)\to Q(y)\wedge R(x))$

$(4)P(a)\to Q(y)\wedge R(a)$

$(5)Q(y)\wedge R(a)$

$(6)Q(y)$

$(7)R(a)$

$(8)P(a)$

$(9)P(a)\wedge R(a)$

$(10)\exists x(P(x)\wedge R(x))$

$(11)Q(y)\wedge\exists x(P(x)\wedge R(x))$

2、

1) w

2) $\neg(\neg x\wedge w)$

3) $x\vee\neg w$

4) x

5) $x\to y$

6) y

7) $(\neg y\vee z)\wedge\neg z$

8) $(\neg y\wedge\neg z)\vee(z\wedge\neg z)$

9) $\neg y\wedge\neg z$

10) $\neg y$

11) $y\wedge\neg y$

所以$x\to y,(\neg y\vee z)\wedge\neg z,\neg(\neg x\wedge w)\Rightarrow\neg w$

六、

由①到②：先证明G中无圈。若G中存在关联某顶点v的环，则v到v存在长为0和1的两条路（注意圈是路的特殊情况），这与已知矛盾。若G中存在长度大于或等于2的圈，则圈上任何两个顶点直接都存在两条不同的路，这也引出矛盾。下面用归纳法证明$m = n - 1$。

当$n = 1$时，G为平凡图，结论显然成立。设$n \le k(k \ge 1)$时结论成立。当$n = k + 1$时，设$e = (u, v)$为G中的一条边，由于G中无圈，所以$G - e$为两个连通分量G_1和G_2。设n_i和m_i分别为G_i中的顶点数和边树，则$n_i \le k(i = 1,2)$，由归纳假设法可知$m_i = n_i - 1$，于是$m = m_1 + m_2 + 1 = n_1 + n_2 - 2 + 1 = n - 1$。

由②到①:由②可得，G是连通的，$\forall e \in E$,均有$E(G - e) = n - 1 - 1 = n - 2$，因此$G - e$已不是连通图，因此$G$中每条边均为桥，因此$G$为树，因此得证。

七、

使用反证法。若不然，则必存在不相邻的结点u_0,v_0,且

$$d(u_0) + d(v_0) \le m - 1.$$

令G'为：将 G 中的结点u_0,v_0以及与u_0,v_0关联的所有边删去后所得，则G'为含m-2 个结点的图，且G'比 G 最多少了 m-1 条边。

设G'的边数为n'，于是有

$$\begin{aligned} n' &\ge n - (m-1) = C_{m-1}^2 + 2 - (m-1) \\ &= \frac{(m-1)(m-2)}{2} + 2 - m + 1 \\ &= \frac{(m-2)(m-3)}{2} + 1 = C_{m-2}^2 + 1 \end{aligned}$$

而G'为含 m-2 个结点的图知

$$n' \le C_{m-2}^2 < C_{m-2}^2 + 1$$

这与$n' \ge C_{m-2}^2 + 1$相矛盾。于是对于 G 中任意两个不相邻的结点u_0,v_0,均有

$$d(u_0) + d(v_0) \ge m$$

于是 G 为哈密顿图。