应用随机过程

张　波　　商　豪

中国人民大学　统计学院

第4章　更新过程

§4.1 更新过程定义及若干分布

定义 4.1.1 设$\{X_n, n=1,2,\cdots\}$是一串独立同分布的非负随机变量，

分布函数为$F(x)$(为了避免平凡的情况，设 $F(0)=P(X_n=0)\neq 1$，记$\mu=EX_n=\int_0^\infty x dF(x)$，则$0<\mu\leq\infty$)．令$T_n=\sum_{i=1}^n X_i\ (n\geq 1)$，$T_0=0$. 我们把由

$$N(t)=\sup\{n:\quad T_n\leq t\}$$

定义的计数过程称为更新过程.

更新过程的一个典型例子是机器零件的更换．在0时刻，安装上一个新零件并开始运行，设此零件在X_1时刻损坏，马上用一个新的来替换(假定替换不需要时间)，则第二个零件在X_1时刻开始运行，设它在X_2时刻损坏，同样马上

换第三个，$\cdots$.很自然可以认为这些零件的使用寿命是独立同分布的，那么到t时刻为止所更换的零件数目就构成一个更新过程.

注：在更新过程中我们将事件发生一次叫做一次更新，X_n就是第$n-1$次和第n次更新相距的时间， T_n是第n次更新发生的时刻，而$N(t)$就是t时刻之前发生的总的更新次数.

§4.1.1 $N(t)$的分布及$E[N(t)]$的一些性质

$$N(t)<\infty\text{的概率为}1$$

事实上，由强大数定律知道

$$\frac{\sum_{i=1}^{n}X_i}{n}=\frac{T_n}{n}\to\mu$$

以概率1成立. 而$\mu > 0$, 所以当$n \to \infty$时$T_n \to \infty$, 也就是说无穷多次更新只可能在无限长的时间内发生. 于是有限时间内最多只能发生有限次更新.

$$N(t) \geq n \iff T_n \leq t$$

所以

$$\begin{aligned} P(N(t) = n) &= P(N(t) \geq n) - P(N(t) \geq n+1) \\ &= P(T_n \leq t) - P(T_{n+1} \leq t) \\ &= P(\sum_{i=1}^{n} X_i \leq t) - P(\sum_{i=1}^{n+1} X_i \leq t) \end{aligned}$$

以F_n记T_n的分布，则F_n是F的n重卷积，因此

$$P(N(t) = n) = F_n(t) - F_{n+1}(t)$$

定理 4.1.2

$$M(t)=\sum_{n=1}^{\infty}F_n(t)$$

其中$M(t)=E[N(t)]$, 称之为更新函数.

证明： 由定义可得

$$\begin{aligned}M(t)&=E[N(t)]\\&=\sum_{n=1}^{\infty}nP(N(t)=n)\\&=\sum_{n=1}^{\infty}n[F_n(t)-F_{n+1}(t)]\\&=\sum_{n=1}^{\infty}F_n(t)\end{aligned}$$

定理 4.1.3 $M(t)$是t的不减函数，且对$0 \le t < +\infty$，$M(t) < +\infty$.

证明： 由于$N(t)$是关于t不减的，故$M(t)$也是不减的，下面证明$M(t)$的有限性.

由假设$F(0) < 1$，即$P(X_n = 0) < 1$(或$P(X_n > 0) > 0$)，则存在$a > 0$，使得 $P(X_n \ge a) > 0$，从而$P(X_n < a) < 1$. 而

$$F(a) = P(X_n \le a) = P(X_n < a) + P(X_n = a)$$

为了避免$P(X_n = a) = P(X_n \ge a)$造成$F(a) = P(X_n < a) + P(X_n \ge a) = 1$的情况，不妨取$0 < b < a$ 易见

$$F(b) \le P(X_n < a) < 1$$

又对任意固定的t，恒能选定正整数k，使$kb \ge t$，所以

$$\{T_k \le t\} \subset \{T_k \le kb\} \subset \{X_1 > b, X_2 > b, \cdots, X_k > b\}^c$$

于是

$$\begin{aligned} P(T_k \le t) &\le 1 - P(X_1 > b, X_2 > b, \cdots, X_k > b) \\ &= 1 - [1 - F(b)]^k \\ &= 1 - \beta \end{aligned}$$

这里$\beta = (1 - F(b))^k > 0$. 又因为

$$\{T_{mk} \le t\} \subset \{T_k - T_0 \le t, T_{2k} - T_k \le t, \cdots, T_{mk} - T_{(m-1)k} \le t\}$$

且更新区间独立同分布，所以有

$$P(T_k - T_0 \le t, T_{2k} - T_k \le t, \cdots, T_{mk} - T_{(m-1)k} \le t)$$
$$= [P(T_k \le t)]^m$$

由上两式，可得

$$P(T_{mk} \leq t) \leq [P(T_k \leq t)]^m \leq (1-\beta)^m$$

对任意整数$j \geq 0$，有

$$\{T_{mk+j} \leq t\} \subset \{T_{mk} \leq t\}$$

所以

$$\sum_{n=mk}^{(m+1)k-1} P(T_n \leq t) \leq kP(T_{mk} \leq t).$$

综上可得

$$
\begin{aligned}
M(t) &= \textstyle\sum_{n=1}^{\infty} F_n(t) \\
&= \textstyle\sum_{n=1}^{\infty} P(T_n \le t) \\
&= \textstyle\sum_{n=1}^{k-1} P(T_n \le t) + \sum_{n=k}^{\infty} P(T_n \le t) \\
&\le \textstyle\sum_{n=1}^{k-1} P(T_n \le t) + \sum_{m=1}^{\infty} kP(T_{mk} \le t) \\
&\le \textstyle\sum_{n=1}^{k-1} P(T_n \le t) + \sum_{m=1}^{\infty} k(1-\beta)^m \\
&= \textstyle\sum_{n=1}^{k-1} P(T_n \le t) + \frac{k}{\beta} < \infty
\end{aligned}
$$

例 4.1.4 考虑一个时间离散的更新过程$\{N_j, j = 1, 2, \cdots\}$，在每个时刻独立地做Bernoulli试验，设成功的概率为p，失败的概率为$q = 1 - p$. 以试验成功做为事件（更新）求此过程的更新函数 $M(k)$。

解： 首先，易知更新的时间间隔$\{X_i\}$为独立的同几何

分布

$$P(X_i = n) = q^{n-1}p, \quad n = 1, 2, \cdots$$

则第r次成功（更新）发生的时刻$T_r = \sum_{i=1}^{r} X_i$服从负二项分布

$$P(T_r = n) = \binom{n-1}{r-1} q^{n-r}p^r, \quad n = r, r+1, \cdots$$

因此

$$\begin{aligned}
& P(N_k = r) \\
= & P(T_r \le k) - P(T_{r+1} \le k) \\
= & \sum_{n=r}^{k} \binom{n-1}{r-1} q^{n-r}p^r - \sum_{n=r+1}^{k} \binom{n-1}{r} q^{n-r-1}p^{r+1}
\end{aligned}$$

所以更新函数为

$$M(k)=\sum_{r=0}^{k} rP(N_k=r)$$

§4.2　更新方程及其应用

§4.2.1　更新方程

定义 4.2.1 在$M(t)$的导数存在的条件下，其导数$M'(t)$称为更新密度，记为$m(t)$. 由$M(t)=\sum_{n=1}^{\infty}F_n(t)$两边求导得

$$m(t)=\sum_{n=1}^{\infty} f_n(t)$$

其中$f_n(t)$是$F_n(t)$的密度函数.

定理 4.2.2 $M(t)$和$m(t)$分别满足积分方程

$$M(t)=F(t)+\int_0^t M(t-s)dF(s)$$

$$m(t)=f(t)+\int_0^t m(t-s)f(s)ds$$

其中$f(t)=F'(t)$.

证明： **首先证明第一式，由定义可得**

$$\begin{aligned}M(t)&=\sum_{n=1}^{\infty}F_n(t)=F(t)+\sum_{n=2}^{\infty}F_n(t)\\&=F(t)+\left(\sum_{n=2}^{\infty}F_{n-1}*F\right)(t)\\&=F(t)+\left(\sum_{n=1}^{\infty}F_n*F\right)(t)\\&=F(t)+(M*F)(t)\end{aligned}$$

由卷积定义知$(M * F)(t) = \int_0^t M(t-s)dF(s)$**，从而第一式得证．第二式由第一式两边取导数可得．**

定义 4.2.3 (更新方程) 称如下形式的积分方程为更新方程

$$K(t) = H(t) + \int_0^t K(t-s)dF(s)$$

其中$H(t)$,$F(t)$为已知，且当$t<0$时$H(t)$,$F(t)$均为0．当$H(t)$在任何区间上有界时,称上述方程为适定**(Proper)**更新方程，简称为更新方程．

定理 4.2.4 设更新方程中$H(t)$为有界函数，则方程在有限区间内存在

唯一有界解

$$K(t)=H(t)+\int_0^t H(t-s)dM(s) \qquad (4.2.1)$$

其中$M(t)=\sum_{n=1}^{\infty}F_n(t)$是分布函数$F(t)$的更新函数.

卷积性质:

命题 4.2.5 假设$B(t)$是单调增加的右连续函数,且$B(0)=0$. $C(t),C_1(t)$, $C_2(t)$为光滑有界函数(注: 这些条件可以保证卷积有定义),则有

(1) $\max_{0\le t\le T}|B*C(t)|\le \max_{0\le t\le T}|C(t)|\cdot B(T)$;

(2) $B*C(t)+B*C_2(t)=B*(C_1+C_2)(t)$;

(3) $B_1*(B_2*C)(t)=(B_1*B_2)*C(t)$.

证明: 我们先证(1)确实是更新方程的解，并且满足

有界性条件. 由$M(t)$是更新函数, 可知$M(t)$有界且单调不减, 再由$H(t)$有界及式（1），对任意$T>0$，有

$$\begin{aligned}\sup_{0\le t\le T}|K(t)| &\le |H(t)| + \int_0^T \sup_{0\le s\le T}|H(T-s)|dM(s)\\ &\le \sup_{0\le t\le T}|H(t)|(1+M(T)) < \infty\end{aligned}$$

所以在有界区间上$K(t)$是有界的. 再来看它是否满足更新方程. 由式（1），有

$$\begin{aligned}K(t) &= H(t) + M * H(t)\\ &= H(t) + (F + F * M) * H(t)\\ &= H(t) + F * (H + M * H)(t)\\ &= H(t) + F * K(t)\end{aligned}$$

最后要证惟一性，只需证明更新方程的任何解都有（1）式的形式. 设$\tilde{K}(t)$是更新方程的解，并且满足有界性条件，则

由

$$\tilde{K}(t) = H + F * \tilde{K}(t)$$

连续代换$\tilde{K}(t)$，有

$$\begin{aligned}
\tilde{K} &= H(t) + F * (H + F * \tilde{K})(t) \\
&= H(t) + F * H(t) + F * (F * \tilde{K})(t) \\
&= H(t) + F * H(t) + F_2 * \tilde{K}(t) \\
&= H(t) + F * H(t) + F_2 * (H + F * \tilde{K})(t) \\
&= H(t) + F * H(t) + F_2 * H(t) + F_3 * \tilde{K}(t) \\
&= \cdots\cdots \\
&= H + \left(\sum_{k=1}^{n-1} F_k \right) * H + F_n * \tilde{K}(t).
\end{aligned}$$

注意到对任何t,

$$
\begin{aligned}
|F_n * \tilde{K}(t)| = & \left| \int_0^t \tilde{K}(t-x) dF_n(x) \right| \\
& \leq \{ \sup_{0\leq x\leq t} |\tilde{K}(t-x)| \} \cdot F_n(t)
\end{aligned}
$$

由假定$\sup_{0\leq x\leq t} |\tilde{K}(t-x)| < \infty$,并且$M(t) = \sum_{n=1}^{\infty} F_n(t) < \infty$知,

$$\lim_{n\to\infty} F_n(t) = 0, \quad \forall t$$

从而

$$\lim_{n\to\infty} |F_n * \tilde{K}(t)| = 0.$$

而

$$
\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty} \left(\sum_{k=1}^{n-1} F_k * H(t) \right) &= \left(\sum_{k=1}^{\infty} F_k \right) * H(t) \\
&= M * H(t)
\end{aligned}
$$

于是推出

$$\tilde{K}(t) = H(t) + \lim_{n\to\infty}\left[\sum_{k=1}^{n-1} F_k * H(t) + F_n * \tilde{K}(t)\right]$$
$$= H(t) + M * H(t),$$

与式（1）一致.

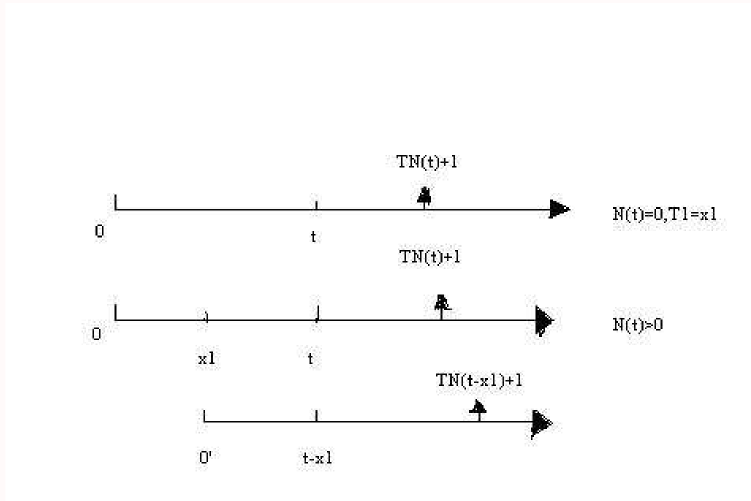
例 4.2.6 (Wald等式) 设$EX_i < \infty$, $i = 1, 2, \cdots$,
证明

$$E(T_{N(t)+1}) = E(X_1+X_2+\cdots+X_{N(t)+1}) = EX_1E(N(t)+1).$$

证明： 对第一次更新的时刻X_1取条件

$$E(T_{N(t)+1}|X_1 = x) = \begin{cases} x, & \text{若 } x > t \\ x + E(T_{N(t-x)+1}), & \text{若 } x \le t \end{cases}$$

如图4-1.



记$K(t)=E(T_{N(t+1)})$，则

$$
\begin{aligned}
K(t) &= E[T_{N(t)+1}] = E\left[E(T_{N(t)+1}|X_1=x)\right] \\
&= \int_0^{\infty} E(T_{N(t)+1}|X_1=x)dF(x) \\
&= \int_0^{t}[x+K(t-x)]dF(x) + \int_t^{\infty} xdF(x) \\
&= EX_1 + \int_0^{t} K(t-x)dF(x)
\end{aligned}
$$

这是更新方程，由更新方程解存在性定理,知

$$\begin{aligned}K(t) &= EX_1 + \int_0^t EX_1 dM(x)\\ &= E(X_1)\cdot(1+M(t))\\ &= E(X_1)\cdot(E[N(t)+1]).\end{aligned}$$

注 这里给出的Wald等式的证明仅仅是为了给出更新定理的一个应用，事实上利用独立性我们也可以直接得到其证明.

事实上，

$$
\begin{aligned}
E[T_{N(t)+1}] &= \sum_{k=0}^{\infty} E[\sum_{i=1}^{N(t)+1} X_i | N(t)=k] P\{N(t)=k\} \\
&= \sum_{k=0}^{\infty} E[\sum_{i=1}^{k+1} X_i] P\{N(t)=k\} \\
&= \sum_{k=0}^{\infty} (k+1) E[X_1] P\{N(t)=k\} \\
&= E[X_1][k \sum_{k=0}^{\infty} P\{N(t)=k\} + \sum_{k=0}^{\infty} P\{N(t)=k\}] \\
&= E[X_1] E[N(t)+1]
\end{aligned}
$$

§4.2.2 更新方程在人口学中的一个应用

考虑一个确定性的人口模型：$B(t)$表示在时刻t女婴的

出生率，即在$[t, t+dt]$时间区间内有$B(t)dt$个女婴出生．已知过去的$B(t)(t \leq 0)$，要预测未来的$B(t)(t > 0)$，为此假定生存函数$S(x)$(指一个新生女婴能够活到年龄x的概率）及生育的年龄强度$\beta(x)(x > 0)$(指年龄为x的母亲生育女婴的速率，即$\beta(x)dt$为这个母亲在长度为dt的时间区间内生下的女婴数)已知．

在时刻t,有$B(t-x) \cdot S(x)dx$个女性居民的年龄在x到$x+dx$之间,（指x年前出生的女婴存活到x年后的人数）,在此次时刻，单位时间内该群体将生育$B(t-x)S(x)\beta(x)dx$个女婴．由此每单位时间内由所有育龄段的女性所生育的女婴数应为

$$B(t) = \int_0^{\infty} B(t-x)S(x)\beta(x)dx.$$

根据过去与未来的生育情况，将上述积分分成两段

$$B(t)=\int_t^{\infty}B(t-x)S(x)\beta(x)dx+\int_0^{t}B(t-x)S(x)\beta(x)dx$$

这是一个更新方程，其中$f(x)=S(x)\beta(x)$,

$$H(t)=\int_t^{\infty}B(t-x)S(x)\beta(x)dx.$$

作变量替换$x=y+t$，得

$$H(t)=\int_0^{\infty}B(-y)S(y+t)\beta(y+t)dy$$

注意$H(t)dt$是由年龄为t或更大的女性在时间$[t,t+dt]$之间生育的女婴数，此外，每一个新生的女婴将期待在年龄 x与$x+dx$之间生育$f(x)dx$个女婴. 于是，每一新生女婴在死亡或生存到年龄x之前（不论哪种情况先发生）将期待生育$F(x)=\int_0^x f(t)dt$个女婴，从而在她一生中将期待生育$F(\infty)$个女婴.

若$F(\infty)>1$ 可以解得$B(t)\sim Ce^{-Rt}, t\to\infty$(解的过程略),其中$C$为常数，$R$满足方程

$$\int_0^\infty e^{Ry}S(y)\beta(y)dy=1$$

即出生速率（以及具有此速率的人群）将以渐近指数增长.

若$F(\infty)<1,\ k>0, B(t)$渐近指数地趋于0，也就是说人群最终要消亡，只有当 $F(\infty)=1$时，出生速率将最终趋于一个有限的正数.

§4.3　更新定理

在第3章中我们已经知道，强度为λ的Poisson过程的两次事件发生的时间间隔X_n服从参数为λ的指数分布，且

其更新函数$M(t)=E[N(t)]=\lambda t$，于是

$$\frac{M(t)}{t}=\lambda=\frac{1}{E[X_n]} \tag{4.3.1}$$

那么，对于一般的更新过程是否还有这种性质呢？

定理 4.3.1 (Feller初等更新定理) 记$\mu=EX_n$，则

$$\frac{M(t)}{t}\to\frac{1}{\mu}(t\to\infty),\quad 若\mu=\infty,\frac{1}{\mu}=0.$$

证明： 首先假设$\mu<\infty$，由于

$$T_{N(t)+1}>t$$

两边取期望，利用例4.2.1的结论,得

$$\mu[M(t)+1]>t$$

即

$$\frac{M(t)}{t}>\frac{1}{\mu}-\frac{1}{t}$$

从而推出

$$\liminf_{t\to\infty}\frac{M(t)}{t}\geq\frac{1}{\mu}.$$

另一方面，固定常数M，令

$$X_n^c=\begin{cases}X_n, & X_n\leq M\\ M, & X_n>M\end{cases}$$

则$X_n^c, n=1,2,\cdots$确定了一个新的更新过程. 令

$$T_n^c=\sum_{i=1}^{n}X_i^c$$

$$N(t)^c=\sup\{n:T_n^c\leq t\}$$

由于$X_n^c\leq M$，则

$$T_{N^c(t)+1}^c\leq t+M$$

再利用例4.2.1，得

$$[M(t)^c + 1] \cdot \mu_M \leq t + M$$

其中$\mu_M = E(X_n^c), M(t)^c = E[N(t)^c]$**，由上式得**

$$\frac{M(t)^c}{t+M} \leq \frac{1}{\mu_M} - \frac{1}{t+M}$$

从而

$$\limsup_{t\to\infty} \frac{M(t)^c}{t} \leq \frac{1}{\mu_M}$$

又因为 $X_n^c \leq X_n$**，得**$T_n^c \leq T_n$**，** $N^(t)^c \geq N(t), M(t)^c \geq M(t)$.

于是

$$\limsup_{t\to\infty} \frac{M(t)}{t} \leq \frac{1}{\mu_M}$$

令$M \to \infty$**，有**$X_n^c \to X_n, E(X_n^c) \to EX_n$**，即**

$$\mu_M \to \mu$$

所以

$$\limsup_{t\to\infty}\frac{M(t)}{t}\le\frac{1}{\mu}$$

利用上述各式得定理结论. 当$\mu=\infty$时,再考虑由X_n^c确定的过程. 当$M\to\infty$时, $\mu\to\infty$. 由上述各式知结论成立.

$\mu<\infty$时，定理??可以看做当$t\to\infty$时，$M(t)\sim\frac{t}{\mu}$.很自然，我们会猜想当$t\to\infty$时,对于任意一个h，是否有

$$M(t+h)-M(t)\to\frac{h}{\mu}\quad(=\frac{t+h}{\mu}-\frac{t}{\mu}) \tag{4.3.2}$$

由这一猜想,引出了另一个重要的更新定理—Blackwell更新定理.为了描述这一定理，我们先引入一个新的概念.

定义 4.3.2 (格点分布) 若存在$d\ge 0$, 使得

$$\sum_{n=0}^{\infty}P(X=nd)=1$$

称随机变量X服从格点分布(或称随机变量X的分布F是格点)，称满足上述条件的最大的d为此格点分布的周期.

注： 从上述定义只能知道格点分布在不是d的整数倍处取值的概率为0，但并不一定所有nd $(n = 0, 1, 2, \cdots)$一一取到.

定理 4.3.3 (Blackwell更新定理) 记$\mu = EX_n$,

（1）若F不是格点分布，则对一切$a \geq 0$, 当$t \to \infty$时,

$$M(t + a) - M(t) \to \frac{a}{\mu}.$$

（2）若F是格点分布，周期为d, 则当$n \to \infty$时,

$$P(\text{在}nd\text{处发生更新}) \to \frac{d}{\mu}.$$

注： Blackwell定理指出,在远离原点的某长度为a的区间内，更新次数的期望是$\frac{a}{\mu}$, 直观上这是容易理解的，因

为$\frac{1}{\mu}$本来就可以看做长时间后更新过程发生的平均速率(见习题4.3).但当 F是格点时，由于更新只能发生在d的整数倍处，(1)就不能成立了，因为更新次数的多少是依赖于区间上形如nd 的点的数目，而同样长度的区间内含有此类点的数目是可以不同的.

初等更新定理是Blackwell定理的特殊情形. 事实上，令 $b_n = M_n - M_{n-1}$，当F是非格点时，由(1)知

$$b_n \to \frac{1}{\mu}, \quad n \to \infty$$

由极限的性质得

$$\frac{b_1 + b_2 + \cdots + b_n}{n} = \frac{M(n)}{n} \to \frac{1}{\mu}, \quad n \to \infty$$

而对任何实数t,

$$\frac{[t]}{t} \cdot \frac{M([t])}{[t]} \leq \frac{M(t)}{t} \leq \frac{[t]+1}{t} \cdot \frac{M([t]+1)}{[t]+1}$$

这里$[t]$表示t的整数部分,即不超过t的最大整数. 令$t \to \infty$可得

$$\frac{M(t)}{t} \to \frac{1}{\mu}$$

这就是Feller定理. 当F是格点分布时，请读者自己论证.

定理 4.3.4 (关键更新定理) 记$\mu = EX_n$, 设函数$h(t), t \in [0, \infty)$, 满足(i)$h(t)$非负不增; (ii)$\int_0^\infty h(t)dt < \infty$. $H(t)$是更新方程

$$H(t) = h(t) + \int_0^t H(t-x)dF(x)$$

的解. 那么

(1)若F不是格点分布, 有

$$\lim_{t\to\infty} H(t) = \begin{cases} \frac{1}{\mu}\int_0^\infty h(x)dx, & \mu < \infty \\ 0, & \mu = \infty \end{cases}$$

（2）若F是格点分布，对于$0 \le c < d$,有

$$\lim_{n\to\infty} H(c+nd) = \begin{cases} \frac{d}{\mu}\sum_{n=0}^{\infty} h(c+nd), & \mu < \infty \\ 0 \qquad\qquad\qquad\quad , & \mu = \infty \end{cases}$$

关键更新定理与Blackwell定理的等价性：只考虑F不是格点的情况，在关键更新定理中，取满足(i),(ii)两个条件的

$$h(t) = \begin{cases} 1, & 0 \le t < a \\ 0, & t \ge a \end{cases}$$

代入更新方程的解，则有

$$\begin{aligned} H(t) &= h(t) + \int_0^t h(t-x)dM(x) \\ &= \int_{t-a}^t dM(x) = M(t) - M(t-a) \end{aligned}$$

又

$$\lim_{t\to\infty} H(t) = \frac{1}{\mu}\int_0^\infty h(x)dx = \frac{a}{\mu}$$

从而有

$$\lim_{t\to\infty}(M(t) - M(t-a)) = \frac{a}{\mu}$$

反过来，由Blackwell定理知道，对任意的$a > 0$，

$$\lim_{t\to\infty}\frac{M(t+a) - M(t)}{a} = \frac{1}{\mu}$$

故

$$\lim_{a\to 0}\lim_{t\to\infty}\frac{M(t+a) - M(t)}{a} = \frac{1}{\mu}.$$

假设极限次序可交换，将有

$$\lim_{t\to\infty}\frac{dM(t)}{dt} = \frac{1}{\mu}$$

即当t很大时,有$dM(t) \sim \frac{1}{\mu}dt$ 又$\int_0^\infty h(x)dx < \infty$，则当$t \to \infty$时，$h(t)$将快速趋于0,因此当$t$变得很大时，对于$h(t-x)$主要考虑当$t-x$比较小也就是$x$比较大的情况. 则有

$$\int_0^t h(t-x)dM(x) \approx \int_0^t h(t-x)dx \cdot \frac{1}{\mu} = \frac{1}{\mu}\int_0^t h(x)dx$$

这正是关键更新定理的结论.

例 4.3.5 某控制器用一节电池供电，设电池寿命$X_i(i=1,2,\cdots)$服从均值为45小时的正态分布，电池失效时需要去仓库领取，领取新电池的时间 $Y_i(i=1,2,\cdots)$服从期望为0.5小时的均匀分布.求长时间工作时，控制器更换电池的速率.

解　以$N(t)$表示到时刻t为止更换电池的次数，平均更新时间为$E[X_i+Y_i]=45.5$小时.

故更换电池的速率为

$$\lim_{t\to\infty}\frac{M(t)}{t}=\frac{1}{45.5}=\frac{2}{91}(\text{次/小时})$$

例 4.3.6 设有一个单服务员银行，顾客到达可看作速率为λ的Poisson分布，服务员为每一位顾客服务的时间是随机变量，分布为均值为 $\frac{1}{\mu}$指数分布.顾客到达门口只能在服务员空闲时才准进来.试求:

(1)顾客进银行的速率;

(2)服务员工作的时间所占的比例.

解　两个相邻到达的顾客的间隔时间X_i独立同分布于指数分布，且$E[X_i]=\frac{1}{\lambda}(i=1,2,\cdots)$；顾客接受服务的时间$Y_i$独立同分布服从指数分布，且$E[Y_i]=\frac{1}{\mu}(i=1,2,\cdots)$.

(1)顾客进入银行的平均时间为$\frac{1}{\lambda}+\frac{1}{\mu}=\frac{\lambda+\mu}{\lambda\mu}$

顾客进银行的速率为$\frac{\lambda\mu}{\lambda+\mu}$.

(2)服务员工作的时间所占比例$\frac{1}{\mu}/\frac{1}{\lambda}+\frac{1}{\mu}=\frac{\lambda}{\lambda+\mu}$.

例 4.3.7 考虑离散时间的更新过程$N(n), n=0,1,2,\cdots$, 在每个时间点独立地做Bernoulli试验，设试验成功的概率为p，失败的概率为$q=1-p$，以试验成功作为更新事件，以$M(n)$记此过程的更新函数，求其更新率$\lim_{n\to\infty}\frac{M(n)}{n}$.

解　相邻两次试验成功的时间间隔X_i的分布为$P\{X_i=k\}=pq^{k-1},\quad k=1,2,\cdots$,

平均更新时间为

$$E[X_i]=\sum_{k=1}^{+\infty}kpq^{k-1}=p\sum_{k=1}^{+\infty}(q^k)'=p\left(\sum_{k=1}^{+\infty}q^k\right)'=p(\frac{q}{1-q})'=\frac{1}{p}$$

故有

$$\lim_{n\to\infty}\frac{M(n)}{n}=\frac{1}{E[X_1]}=p$$

例 4.3.8 某电话交换台的电话呼叫次数服从平均1分钟λ次的Poisson过程，通话时间$Y_1, Y_2, \cdots$是相互独立且服从同一分布的随机变量序列，满足 $E[Y_1] < \infty$，假定通话时电话打不进来，用$N(t)$表示到时刻t为止电话打来的次数，试证

$$\lim_{n\to\infty} \frac{E[N(t)]}{t} = \frac{\lambda}{1+\lambda E[Y_1]}$$

解　通话结束时刻的序列为更新过程.若以X_i表示第$i-1$次通话结束后第i次电话打进来的间隔时间，则更新的间隔时间为$X_i + Y_i$，他们独立同分布，且平均更新时间为

$$\mu = E[X_i + Y_i] = \frac{1}{\lambda} + E[Y_1]$$

从而

$$\lim_{n\to\infty}\frac{E[N(t)]}{t}=\frac{\lambda}{1+\lambda E[Y_1]}$$

例 4.3.9 （剩余寿命与年龄的极限分布） 以$r(t)=T_{N(t)+1}-t$表示时刻t的剩余寿命，即从 t 开始到下次更新剩余的时间，$s(t)=t-T_{N(t)}$为 t 时刻的年龄. 求$r(t)$和$s(t)$的极限分布.

解： 令

$$\overline{R}_y=P(r(t)>y)$$

对第一次更新的时刻X_1取条件，得

$$P(r(t)>y|X_1=x)=\begin{cases}1 \quad , & x>t+y\\ 0 \quad , & t<x\le t+y\\ \overline{R}_y(t-x), & 0<x\le t\end{cases}$$

由全概率公式,有

$$\overline{R}_y(t) = \int_0^\infty P(r(t) > y | X_1 = x) dF(x)$$
$$= \int_{t+y}^\infty dF(x) + \int_0^t \overline{R}_y(t-x) dF(x)$$
$$= 1 - F(t+y) + \int_0^t \overline{R}_y(t-x) dF(x)$$

这是一个更新方程. 它的解为

$$\overline{R}_y(t) = 1 - F(t+y) + \int_0^t [1 - F(t+y-x)] dM(x)$$

这时仍假设$\mu = EX_1 < \infty$, 则

$$\mu = \int_0^\infty x dF(x) = \int_0^\infty [1 - F(x)] dx < \infty$$

所以

$$\int_0^\infty [1 - F(t+y)] dt = \int_y^\infty [1 - F(z)] dz < \infty$$

即$1-F(t+y)$满足关键更新定理的条件，于是

$$\begin{aligned}\lim_{t\to\infty} P(r(t)>y) &= \lim_{t\to\infty} \overline{R}_y(t) \\ &= \frac{1}{\mu}\int_y^\infty (1-F(z))dz, \quad z>0\end{aligned}$$

年龄$s(t)$的分布可由上式导出. 注意到

$$\{r(t)>x, s(t)>y\} \iff \{r(t-y)>x+y\}$$

从而

$$\begin{aligned}\lim_{t\to\infty} P(r(t)>x, s(t)>y) &= \lim_{t\to\infty} P(r(t-y)>x+y) \\ &= \frac{1}{\mu}\int_{x+y}^\infty [1-F(z)]dz\end{aligned}$$

特别地

$$\begin{aligned}\lim_{t\to\infty} P(s(t)>y) &= \lim_{t\to\infty} P(s(t)>y, r(t)>0)\\ &= \frac{1}{\mu}\int_y^{\infty}[1-F(z)]dz.\end{aligned}$$

注1： 在应用关键更新定理时，常常用到例中的技巧，先关于某次更新 (一般对第一次或t时刻前的最后一次)取条件而得到一个更新方程，再利用关键更新定理.

注2： 例中得到的年龄与剩余寿命的极限分布是相同的，如何理解这一结论?

§4.4 Lundberg-Cramèr破产论

Lundberg-Cramèr经典破产模型：设保险公司在时刻t的盈余(surplus)可表示为

$$U(t) = u + ct - \sum_{1}^{N(t)} X_k, \quad t \geq 0$$

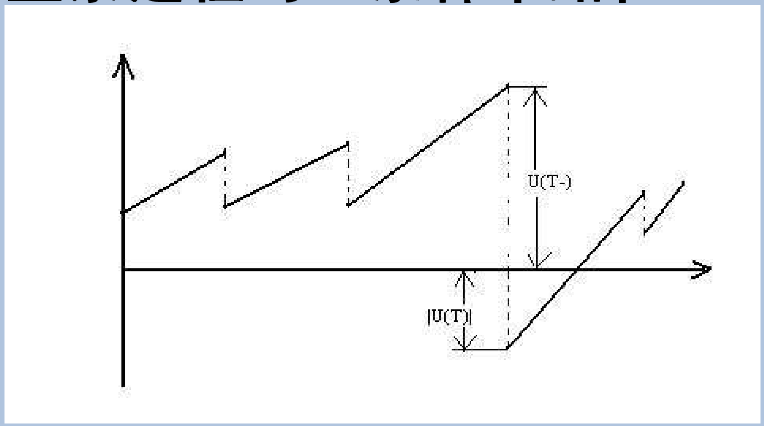
其中u是初始资本,c是保险公司单位时间征收的保险费率, $X_k, k = 1, 2, \ldots$表示第k次索赔额,$N(t)$表示到时刻t 发生的索赔次数.

假定1. $\{X_k, k \geq 1\}$是恒正的独立同分布随机变量序列，记$F(x) = P(X_1 \leq x), \ \forall x \geq 0, \quad \mu = EX_1 = \int_0^\infty [1 - F(x)]dx$;

$\{N(t), t \geq 0\}$是参数为λ $(\lambda > 0)$的Poisson过程，且

与 $\{X_k, k \geq 1\}$相互独立.

盈余过程的一条样本路径:



假定2.

$$c = (1+\theta)\lambda\mu$$

其中$\theta > 0$, 称为相对安全负载(relative security loading).

注：记

$$S(t)=\sum_{k=1}^{N(t)} X_k, \quad \forall t\ge 0,$$

它表示至时刻t为止的索赔总额(aggregate claim). 由模型的独立性假定知

$$E[S(t)]=E[N(t)]EX_1=\lambda\mu t$$

保险公司为运作上的安全，要求

$$ct-E[S(t)]=(c-\lambda\mu)t>0, \quad t\ge 0.$$

因此需要假定2.

　　破产概率: 由泊松过程具有平稳独立增量以及L-C模型的独立性假定知$\{ct-S(t), t\ge 0\}$为平稳独立增量过程.

于是由强大数定律得

$$\lim_{t\to\infty} U(t) = +\infty, \quad a.s.$$

但这并不能排除在某一瞬时，盈余过程可能取负值，这时称保险公司“破产”，称$T = \inf\{t : U(t) < 0\}$为破产时刻.

所以 Lundberg-Cramèr研究的是保险公司最终破产的概率

$$\Psi(u) = P(T < \infty | U(0) = u), \quad u \geq 0$$

简称为破产概率.

假定3. （调节系数存在惟一性假定）

首先，要求个体索赔额的矩母函数

$$\phi_X(r) = E(e^{rX}) = \int_0^\infty e^{rx} dF(x) = 1 + r\int_0^\infty e^{rx}[1 - F(x)]dx$$

至少在包含原点的某个邻域内存在. 其次，要求方程

$$\phi_X(r) = 1 + \frac{c}{\lambda} r$$

存在正解.

注 1: 由于$\phi_X(r)$在其收敛域内是严格增加的凸函数，故上方程若有正解，则必是惟一的，记为 R，并称之为调节系数，满足

$$\frac{\lambda}{c}\int_0^\infty e^{Rx}[1 - F(x)]dx = 1$$

注意到

$$\frac{\lambda}{c}\int_0^\infty [1 - F(x)]dx = \frac{\lambda}{c}\mu = \frac{1}{1+\theta} < 1$$

可知非负函数$\frac{\lambda}{c}[1 - F(x)], x \geq 0$不是一个概率密度函数. 但若令

$$f(x) = e^{Rx}\frac{\lambda}{c}[1 - F(x)]$$

则可证$f(x)$是一个概率密度函数,这解释了调节系数R名称的由来．注2：记$V(t)=ct-S(t)$。由于$\{V(t),t\geq 0\}$为平稳独立增量过程，故有

$$\phi_{V(t)}(r)=E[e^{rV(t)}]=\left(\phi_{V(t)}\right)^{\prime},\quad \forall t\geq 0$$

又因为

$$\begin{aligned}\phi_{V(1)}(r)&=E[e^{r(c-S(1)}]=e^{cr}E[e^{-rS(1)}]\\&=e^{cr}\exp\{\lambda(\phi_X(-r)-1)\}\\&=\exp\{\lambda\phi_X(-r)-\lambda+cr\}\end{aligned}$$

以及调节系数的定义可知

$$\phi_{V(1)}(-R)=1$$

从而也有

$$\phi_{V(t)}(-R)=1,\quad \forall t\geq 0$$

总之，若调节系数存在，则它是方程$\phi_X(r) = 1 + \frac{c}{\lambda}r$和下述两个方程的惟一正根：

$$\frac{\lambda}{c}\int_0^\infty e^{rx}[1 - F(x)]dx = 1$$

$$\phi_{V(1)}(-r) = 1.$$

定理 4.4.1 若假定1 ∼ 假定3成立，则有

（1）$\Psi(0) = \frac{1}{1+\theta}$

（2）Lundberg 不等式

$$\Psi(u) \le e^{-Ru}, \quad \forall u \ge 0$$

（3）Lundberg-Cramèr近似：存在正常数C，使得

$$\Psi(u) \sim Ce^{-Ru}, \quad u \to \infty$$

即

$$\lim_{u\to\infty} \frac{\Psi(u)}{Ce^{-Ru}} = 1.$$

证明：我们用更新论证技巧证明定理中的（1）和（3）.（2）的简单证明由于要利用连续鞅的技巧,我们将在第六章中给出. 记

$$R(u)=1-\Psi(u)=P(U(t)\geq 0|U(0)=u),$$

则它表示初始盈余为u时，保险公司永不破产的概率，也称为生存概率.首先，根据首次索赔发生的时刻T_1和首次索赔额X_1的大小，对生存概率应用全概率公式，得

$$R(u)=\int_0^{\infty}\lambda e^{-\lambda t}\left(\int_0^{u+ct}R(u+ct-z)dF(z)\right)dt$$

做变换$x=u+ct$,得

$$R(u)=\frac{\lambda}{c}e^{\frac{\lambda}{c}u}\int_u^{\infty}e^{-\frac{\lambda}{c}x}\left(\int_0^{x}R(x-z)dF(z)\right)dx$$

由此可见$R(u)$是可微函数. 将上式两端对u求导,得

$$R'(u)=\frac{\lambda}{c}R(u)-\frac{\lambda}{c}\int_0^u R(u-z)dF(z)$$

在上式两端取积分，得

$$R(t)-R(0)=\frac{\lambda}{c}\int_0^t R(u)du+\frac{\lambda}{c}\int_0^t\int_0^u R(u-z)d[1-F(z)]du$$

由分部积分公式得到

$$\int_0^u R(u-z)d[1-F(z)]=R(0)[1-F(u)]-R(u)+\int_0^u R'(u-z)[1-F(z)]dz$$

并代入上式, 即得

$$R(t)-R(0)=\frac{\lambda}{c}R(0)\int_0^t[1-F(u)]du+\frac{\lambda}{c}\int_0^t\int_0^u R'(u-z)[1-F(z)]dzdu$$

若在上式中的二重积分中交换积分次序，可得

$$\begin{aligned}\int_0^t\int_0^u R'(u-z)[1-F(z)]dzdu &= \int_0^t\Big(\int_z^t R'(u-z)[1-F(u)]du\Big)dz\\ &=\int_0^t[R(t-z)-R(0)][1-F(z)]dz\end{aligned}$$

再将上式代入上式，得到

$$R(t) = R(0) + \frac{\lambda}{c}\int_0^t R(t-z)[1-F(z)]dz$$

由于$\lim_{u\to\infty} R(u) = 1$，令$t \to \infty$得

$$1 = R(0) + \frac{\lambda}{c}\int_0^\infty [1-F(z)]dz = R(0) + \frac{\lambda}{c}\mu$$

于是有

$$\Psi(0) = 1 - R(0) = \frac{\lambda}{c}\mu = \frac{1}{1+\theta}$$

(1)得证.

将上式代入其前式，得

$$\begin{aligned} R(t) &= 1-\tfrac{\lambda}{c}\int_0^\infty [1-F(z)]dz+\tfrac{\lambda}{c}\int_0^t R(t-z)[1-F(z)]dz \\ &= 1-\tfrac{\lambda}{c}\int_t^\infty [1-F(z)]dz-\tfrac{\lambda}{c}\int_0^t [1-R(t-z)][1-F(z)]dz \end{aligned}$$

从而得

$$\Psi(t)=\frac{\lambda}{c}\int_0^\infty[1-F(z)]dz+\frac{\lambda}{c}\int_0^t\Psi(t-z)[1-F(z)]dz$$

由于

$$\frac{\lambda}{c}\int_0^\infty[1-F(z)]dz=\frac{\lambda}{c}\mu=\frac{1}{1+\theta}<1$$

所以上式是更新方程.

在上述更新方程两端同乘以e^{Rt}（R为调节系数）,并令

$$A(t)=e^{Rt}\Psi(t),\quad a(t)=\frac{\lambda}{c}e^{Rt}\int_t^\infty[1-F(z)]dz$$

$$f(z)=\frac{\lambda}{c}e^{Rz}[1-F(z)]$$

即得

$$A(t)=a(t)+\int_0^t A(t-z)f(z)dz$$

又知$\int_0^\infty f(z)dz = 1$,从而上方程是适定更新方程. 易见$a(t)$为单调递减函数，并且

$$\int_0^\infty a(t)dt = \frac{1}{R}\frac{\theta}{1+\theta} = C_1.$$

于是$a(t)$在$[0,\infty)$上满足更新定理中的条件. 因此由关键更新定理得

$$\lim_{t\to\infty} e^{Rt}\Psi(t) = \lim_{t\to\infty} A(t) = \frac{C_1}{\int_0^\infty zf(z)dz} = C$$

这表明

$$\lim_{t\to\infty} \frac{\Psi(t)}{Ce^{-Rt}} = 1$$

从而伦德伯格-克拉默近似(3)式得证. ∎

§4.5 更新过程的推广

§4.5.1 延迟更新过程

更新过程要求时间间隔$X_1, X_2, \cdots$是分布函数为F的独立同分布序列.如果放宽对X_1的要求，允许它服从别的分布G，则称由$X_1, X_2, \cdots$确定的计数过程是延迟更新过程.

例如，在4.1节零件更换的例子中，假设开始观察时第一个零件已经运行了一段时间，则到它损坏的使用时间X_1，就应认为与新零件能使用的时间$X_2, X_3, \cdots$不同分布.但是要注意的是$X_1, X_2, \cdots$之间的独立性仍然是必需的. 可以证明对于延迟更新过程，4.3节中的三个更新定理依然成立(要注意 $M(t) = \sum_{n=1}^{\infty} F_n(t)$中的$F_n(t)$相应用$F_1(t) = G(t), F_n(t) = G * F_{n-1}(t)(n \geq 2)$来替换就可以

了(比如$F_1 \leftrightarrow G, F_2 \leftrightarrow G*F, F_3 \leftrightarrow G*F*F, \cdots$, 等). 直观上这也是比较显然的，因为我们并不认为第一次更新发生的时刻会对无穷远处的情况有很大的影响.

定义 4.5.1 更新过程要求时间间隔$X_1, X_2, \cdots$是分布函数为F的独立

同分布序列. 如果放宽对X_1的要求，允许它服从别的分布G, 则称由$X_1, X_2, \cdots$ 确定的计数过程是延迟更新过程.

§4.5.2 更新回报过程

定义 4.5.2 设

$$R(t) = \sum_{i=1}^{N(t)} R_i$$

其中$\{N(t), t \geq 0\}$是一个更新过程，$R_n, n = 1, 2, \cdots$独立同分布且与$\{N(t), t \geq 0\}$独立，则称$R(t)$是一个 更新回报过程

注： 这一名称是由于我们可以把 R_n 看做第n次更新发生时带给我们的回报. 更一般的更新回报过程，可以允许R_n依赖于X_n(即回报的多少与等待的时间有关)，只要求随机向量列 (X_n, R_n)独立同分布.

定理 4.5.3 (更新回报定理)若更新间隔$X_1, X_2, \cdots$满足$EX_1 < \infty$,

每次得到的回报 $\{R_n\}$满足$ER_1 < \infty$. 则

(1)

$$\lim_{t \to \infty} \frac{1}{t} R(t) = \frac{ER_1}{EX_1} \quad w.p.1;$$

(2)
$$\lim_{t\to\infty}\frac{1}{t}ER(t)=\frac{ER_1}{EX_1}.$$

例 4.5.4 （产品保修策略）设某公司所售出商品采取如下更换策略：若产品售出后，在期限w内损坏,则免费更换同样产品. 若在$(w, w+T]$期间损坏,则按使用时间折价更换新产品. 并且对在$(0, w]$ 内更换的新产品执行原来的更换期,而对在$(w, w+T]$内折价更换的新产品,从更换时刻重新计算更换期. 讨论长期执行此策略对厂家的影响(即厂家的期望利润是多少）,假定一旦产品损坏,顾客立刻更换、退换或者购买新的.

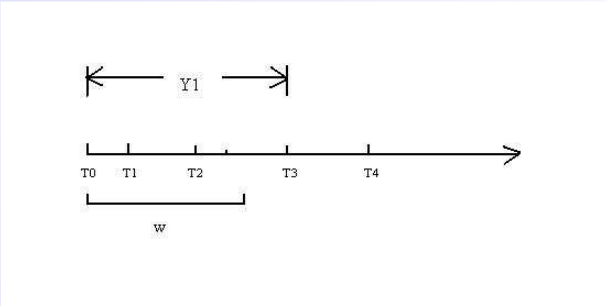
解： 设$t=0$时用户购买一个新产品,售价为c,成本$c_0<c$,产品寿命为X,它的分布函数为$F(t)$, $EX=\mu<\infty$. 设用户相临两次购买（包换全价购买和折扣更换，但不包

括免费更换）的间隔为$Y_1, Y_2, \cdots$. 容易求出 $Y_1, Y_2, \cdots$独立同分布（因为每次更换的产品都是新的）. 记Y_i的分布为$G(t)$. 以$N(t)$记$(0,t)$时间内的更换次数, T_n为第n次更换时刻, $M(t) = E[N(t)]$.

首先计算用户在$(0, Y_1)$内的期望花费与EY_1. 由所设条件知道,对用户而言,更换策略为

$$\begin{cases} 0, & y \le w \\ \frac{c(y-w)}{T}, & y > w \end{cases}$$

其中y为使用时间,由Y_1的含义知,$Y_1 = w + R_w$(R_w指产品在w时刻的剩余寿命), $Y_1 = T_{N(w)+1}$,如图4-3所示.



GoBack
FullScreen
Close
Quit

从而

$$\bar{G}(t) = P(Y_1 > t)$$

$$= \begin{cases} 1, & 0 \le t \le w \\ P(w+R_w>t)=\bar{F}(t)+\int_0^w \bar{F}(t-x)dM(x), & w < t \end{cases}$$

$$EY_1 = E[T_{N(w)+1}] = \mu(1 + M(w))$$

设$(0, Y_1]$内用户花费为c_1，则

$$c_1 = \begin{cases} c, & Y_1 > w + T \\ \frac{c(Y_1-w)}{T}, & w < Y_1 \le w + T \end{cases}$$

所以

$$Ec_1 = c\bar{G}(w + T) + \frac{c}{T}\int_w^{w+T}(t - w)dG(t).$$

解得

$$Ec_1 = \frac{c}{T}\int_0^T \bar{G}(w + x)dx = \frac{c}{T}\int_0^T P(R_w > x)dx$$

于是

$$c(w,T) = \text{长期平均费用} = \frac{Ec_1}{EY_1} = \frac{c\int_0^T P(R_w > x)dx}{T\mu[1+M(w)]}$$

对公司而言，其利润为用户付费所得收入与成本之差，在$(0,w]$时间内免费更换产品的个数的期望值为$E[N(w)] = M(w)$. 因此，在一个购买周期$(0,Y_1]$内,公司所付成本为$c_0[M(w)+1]$，公司从每个用户所得的长期平均利润为

$$c(w,T) - \frac{c_0[1+M(w)]}{\mu[1+M(w)]} = c(w,T) - \frac{c_0}{\mu}.$$

§4.5.3 交替更新过程

定义 4.5.5 在更新过程中，我们考虑系统只有一个状态的情况,比如机器一直是开的(即更换零件不需时间). 而实际中，零件损坏之后，会有一个拆卸，更换的过程这段

时间机器是“关”的.这里我们就来考虑有“开”“关”两种状态的更新过程,我们将这种过程称做 交替更新过程.

注1： 设系统最初是开的，持续开的时间是Z_1，而后关闭，时间为Y_1 ,之后再打开，时间为Z_2，又关闭，时间$Y_2, \cdots$交替进行，每当系统被打开称做一次更新.

注2： 我们假设随机向量列$\{(Z_n, Y_n), n = 1, 2, \ldots\}$是独立同分布的，从而$\{Z_n\}$，$\{Y_n\}$都是独立同分布的，即$Z_i, Y_j$在$i \neq j$时独立，但$Z_i, Y_i$允许不独立.

定理 4.5.6 设H是Z_n的分布，G是Y_n的分布，F是Z_n+Y_n的分布．并记 $P(t) = P(t$时刻系统是开的)，设$E(Y_n + Z_n) < \infty$，且F不是格点的，则

$$\lim_{t\to\infty} P(t) = \frac{EZ_n}{EZ_n + EY_n}$$

证明：对第一次更新的时刻$X_1 = Z_1 + Y_1$取条件概率，得

$$P(t\text{时刻系统开着}|X_1 = x) = \begin{cases} P(Z_1 > t|Z_1 + Y_1 > t), & x \geq t \\ P(t - x), & x < t \end{cases}$$

则

$$\begin{aligned} P(t) &= \int_0^{\infty} P(t\text{时刻系统开着}|X_1 = x)dF(x) \\ &= P(Z_1 > t) + \int_0^t P(t - x)dF(x) \\ &= \bar{H}(t) + \int_0^t P(t - x)dF(x) \end{aligned}$$

上方程的解为

$$P(t) = \bar{H}(t) + \int_0^t \bar{H}(t - x)dM(x)$$

又$\int_0^\infty \bar{H}(t)dt = EZ_1 < \infty$且显然$\bar{H}(t)$非负不增，由关键更新定理得

$$\lim_{t\to\infty} P(t) = \frac{\int_0^\infty \bar{H}(t)dt}{E(Y_1+Z_1)} = \frac{EZ_1}{EZ_1+EY_1}$$

∎