# 理论力学 CAI

## 矢量动力学基础

- 前言
- 惯量
- 动量定理
- 动量矩定理
- 动能定理

# 动能定理




## 本节内容要点

- 重点掌握刚体（系）动能的计算公式、刚体动能定理
- 掌握弹簧力做功、重力做功、重力场势能、弹簧势能
- 阻尼力做功不讲

# 动能定理

- 动能
- 力的功
- 势力场与势能
- 动能定理





# 动能定理

- 动能
- 力的功
- 势力场与势能
- 动能定理

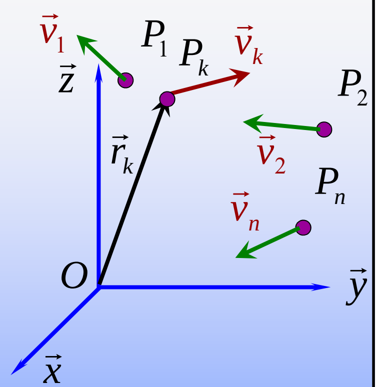
# 动能

- 质点系的动能
- 刚体的动能





## 质点系的动能




- 质点的动能

质点$P_k$动能

$$T \overset{\text{def}}{=} \frac{1}{2} m_k \dot{\vec{r}}_k \cdot \dot{\vec{r}}_k = \frac{1}{2} m_k \vec{v}_k \cdot \vec{v}_k = \frac{1}{2} m_k v_k^2$$

- 质点系的动能

质点系 $(P_1, P_2, \cdots, P_n)$

$$T \overset{\text{def}}{=} \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{n} m_k \dot{\vec{r}}_k \cdot \dot{\vec{r}}_k = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{n} m_k \vec{v}_k \cdot \vec{v}_k = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{n} m_k v_k^2$$

## 刚体的动能

- 平动刚体
- 定轴转动刚体
- 平面运动刚体的动能-柯尼希定理

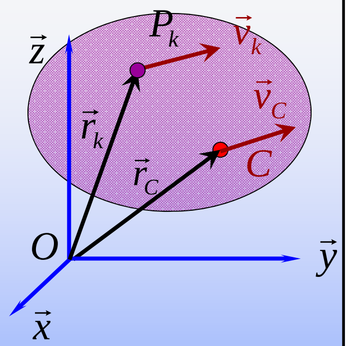




- 平动刚体

质点$\boldsymbol{P_k}$

$$\vec{v}_k = \vec{v}_C$$

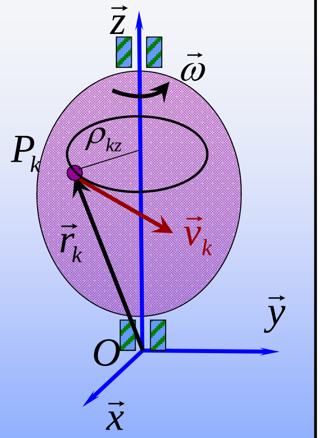



$$T = \frac{1}{2}\sum_k m_k \vec{v}_k \cdot \vec{v}_k = \frac{1}{2}\vec{v}_C \cdot \vec{v}_C \underbrace{\sum_k m_k}_{= m}$$

$$T = \frac{1}{2} m \vec{v}_C \cdot \vec{v}_C = \frac{1}{2} m v_C^2$$

刚体的平动动能相当于将刚体质量集中在质心的一质点的动能

- 定轴转动刚体




$$\vec{\omega} = \omega\vec{z}$$

质点$P_k$的速度 $\quad \vec{v}_k = \vec{\omega}\times\vec{r}_k = \omega\vec{z}\times\vec{r}_k$

$$T = \frac{1}{2}\sum_k m_k \vec{v}_k\cdot\vec{v}_k$$

$$= \frac{1}{2}\omega^2\sum_k m_k(\vec{z}\times\vec{r}_k)\cdot(\vec{z}\times\vec{r}_k) = \frac{1}{2}\omega^2\underbrace{\sum_k m_k\rho_{kz}^2}_{J_{Oz}}$$

$$|\vec{z}\times\vec{r}_k| = \rho_{kz}$$

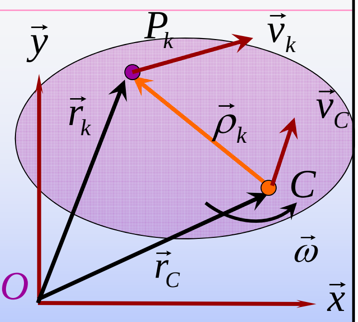
$$T = \frac{1}{2}J_{Oz}\omega^2$$

刚体对固定轴$Oz$的动能等于
刚体对该轴转动惯量与角速度平方的积





- 平面运动刚体-柯尼希定理




平面运动刚体 $\quad \vec{v}_C \quad \vec{\omega} = \omega\vec{z}$

质点$P_k$的速度 $\quad \vec{r}_k = \vec{r}_C + \vec{\rho}_k$

$$\vec{v}_k = \dot{\vec{r}}_k = \dot{\vec{r}}_C + \vec{\omega}\times\vec{\rho}_k = \vec{v}_C + \omega\vec{z}\times\vec{\rho}_k$$

$$T = \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n} m_k \vec{v}_k\cdot\vec{v}_k \quad (\vec{v}_C + \omega\vec{z}\times\vec{\rho}_k)\cdot(\vec{v}_C + \omega\vec{z}\times\vec{\rho}_k)$$

$$= \frac{1}{2}\sum_k m_k\vec{v}_C\cdot\vec{v}_C + \frac{1}{2}\omega^2\underbrace{\sum_k m_k(\vec{z}\times\vec{\rho}_k)\cdot(\vec{z}\times\vec{\rho}_k)}_{\sum_k m_k\rho_k^2 = J_{Cz}} + \omega\vec{v}_C\cdot(\vec{z}\times\underbrace{\sum_k m_k\vec{\rho}_k}_{\sum_k m_k\vec{\rho}_C = \vec{0}})$$

$$T = \frac{1}{2}mv_C^2 + \frac{1}{2}J_{Cz}\omega^2$$

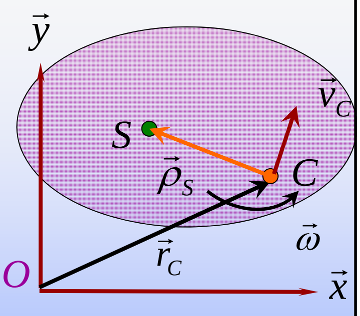
刚体的动能等于将质量集中于质心的质点动
能与绕过质心瞬时轴的转动动能之简单叠加

- 平面运动刚体动能另一表达式

平面运动刚体 $\vec{v}_C$ $\vec{\omega} = \omega\vec{z}$

瞬心$S$ $\vec{v}_S = \vec{v}_C + \omega\vec{z} \times \vec{\rho}_S = \vec{0}$

$$\vec{v}_C = -\omega\vec{z} \times \vec{\rho}_S$$




$$T = \frac{1}{2}mv_C^2 + \frac{1}{2}J_{Cz}\omega^2$$

$$= \frac{1}{2}\omega^2 m\underbrace{(\vec{z} \times \vec{\rho}_S)\cdot(\vec{z} \times \vec{\rho}_S)}_{\rho_S^2} + \frac{1}{2}J_{Cz}\omega^2 = \frac{1}{2}\underbrace{\left(J_{Cz} + m\rho_S^2\right)}_{J_{Sz}}\omega^2$$

$$T = \frac{1}{2}J_{Sz}\omega^2$$

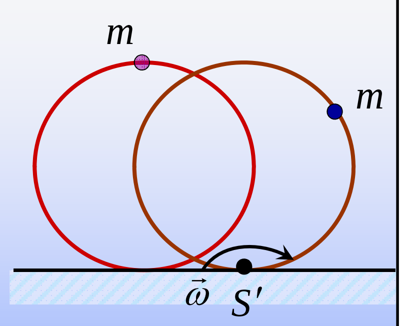
平面运动刚体动能等于刚体绕过瞬心瞬时轴转动的动能





[例]

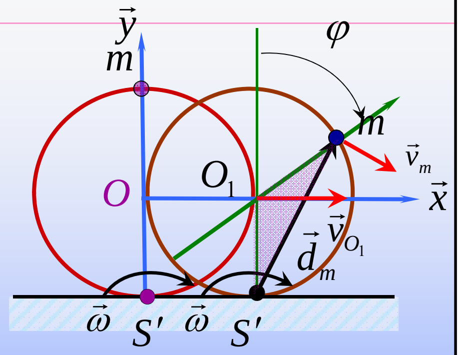
一质量为***m***，半径为***R***的圆环上固结一质量为***m***的质点




圆环在水平面上作无滑动的滚动

试求系统动能

**[解1]** 惯性基 $O-\vec{e}$




质点**m** 动能　　? $v_m=\omega(2R)$

$$d_m=\sqrt{R^2+R^2-2RR\cos(\pi-\varphi)}=R\sqrt{2+2\cos\varphi}$$

$$v_m=\omega d_m=\omega R\sqrt{2+2\cos\varphi}$$

$$T_m=\frac{1}{2}mv_m^2=m\omega^2R^2(1+\cos\varphi)$$

速度与位形有关　动能除与位形速度有关通常还与位形有关

圆环 动能(平面一般运动)

$$T_H=\frac{1}{2}J_{O_1z}\omega^2+\frac{1}{2}mv_{O_1}^2=\frac{1}{2}mR^2\omega^2+\frac{1}{2}m(\omega R)^2=mR^2\omega^2$$

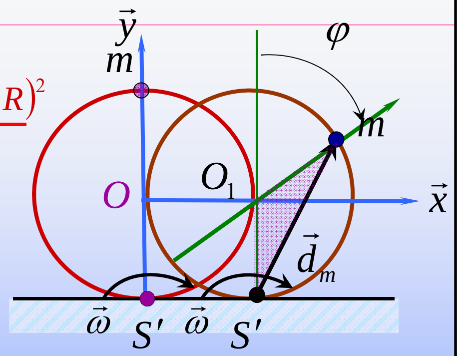
系统动能

$$T=T_H+T_m=mR^2\omega^2+m\omega^2R^2(1+\cos\varphi)=m\omega^2R^2(2+\cos\varphi)$$





**[解2]** 惯性基 $O-\vec{e}$




质点**m**对**S'**的转动惯量　? $J_{mS'z}=m(2R)^2$

$$d_m=\sqrt{R^2+R^2-2RR\cos(\pi-\varphi)}=R\sqrt{2+2\cos\varphi}$$

$$J_{mS'z}=md_m^2=mR^2(2+2\cos\varphi)$$

圆环对**S'**的转动惯量

$$J_{HS'z}=J_{O_1z}+mR^2=2mR^2$$

转动惯量与位形有关

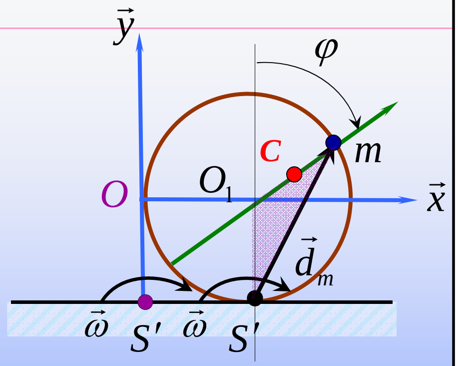
系统对**S'**的转动惯量

$$J_{S'z}=J_{HS'z}+J_{mS'z}=2mR^2+2mR^2(1+\cos\varphi)=2mR^2(2+\cos\varphi)$$

系统动能

$$T=\frac{1}{2}J_{S'z}\omega=m\omega^2R^2(2+\cos\varphi)$$

[解3] 惯性基 $O-\vec{e}$




系统质心 $C$

$$T=\frac{1}{2}\cdot 2mv_C^2+\frac{1}{2}J_{Cz}\omega^2$$





# 动能定理

- 动能
- 力的功
- 势力场与势能
- 动能定理

# 力的功

- 元功与功
- 几种常见力的功
- 刚体所受力的功

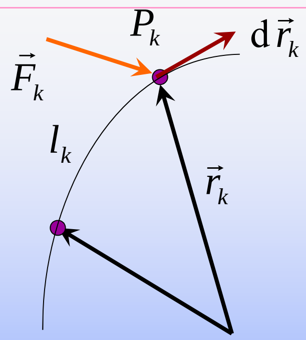




- 元功

力 $\vec{F}_k$ 的作用点 $\boldsymbol{P_k}$　　运动轨迹 $\boldsymbol{l_k}$

无限小位移矢量　$\mathrm{d}\vec{r}_k$




定义该力的元功

$$\mathrm{d}W_k \overset{\mathrm{def}}{=} \mathrm{d}\vec{r}_k \cdot \vec{F}_k = \vec{F}_k \cdot \mathrm{d}\vec{r}_k$$

- 力的功

定义该力在路径$l_k$作的功

$$W_k = \int_{l_k} \mathrm{d}W_k = \int_{l_k} \vec{F}_k \cdot \mathrm{d}\vec{r}_k$$

- 力系的功

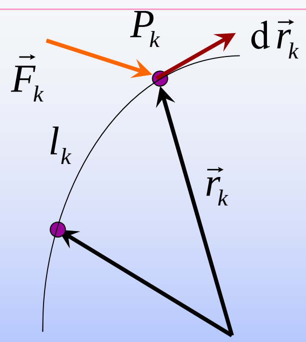
力系 $(\vec{F}_1, \vec{F}_2, \cdots, \vec{F}_n)$

作用点 $(P_1, P_2, \cdots, P_n)$

运动轨迹 $(l_1, l_2, \cdots, l_n)$

该力系的总功为所有力的功之和

$$W = \sum_{k=1}^{n} W_k = \sum_{k=1}^{n} \int_{l_k} \vec{F}_k \cdot \mathrm{d}\vec{r}_k$$








## 几种常见力的功

- 重力的功
- 线弹性力的功
- 阻尼力的功

- 重力的功

$\boldsymbol{g} = g(0 \quad 0 \quad -1)^{\mathrm{T}}\vec{g}$

刚体内任意质点$\boldsymbol{P_k}$ $\quad \vec{F}_k = m_k\vec{g}$

功 $\quad W_k = \int_{l_k} m_k\vec{g}\cdot \mathrm{d}\vec{r}_k = m_k\vec{g}\cdot\int_{l_k}\mathrm{d}\vec{r}_k$

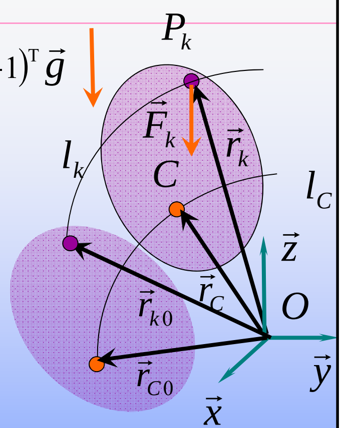
$= m_k\vec{g}\cdot(\vec{r}_k - \vec{r}_{k0})$

刚体重力的功 $\quad W = \vec{g}\cdot\sum_k m_k(\vec{r}_k - \vec{r}_{k0})$

$$W = m\vec{g}\cdot(\vec{r}_C - \vec{r}_{C0})$$

$\vec{\boldsymbol{e}}$ : $\quad W = m\boldsymbol{g}^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{r}_C - \boldsymbol{r}_{C0})$

$$W = -mg(z_C - z_{C0})$$




$m\vec{r}_C = \sum_k m_k\vec{r}_k$

$\boldsymbol{r}_C = (x_C \quad y_C \quad z_C)^{\mathrm{T}}$

$\boldsymbol{r}_{C0} = (x_{C0} \quad y_{C0} \quad z_{C0})^{\mathrm{T}}$

刚体重力的功与质心的高度差成正比，与质心所经过的路径无关





- 线弹性力的功

线弹性力的一种常见的物理对象是线性弹簧

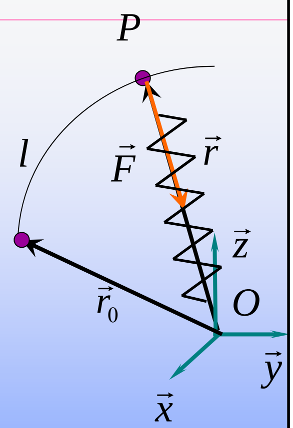
$\vec{F} = -F\dfrac{\vec{r}}{r} \qquad F = k(r - l_0)$

**k**：线弹簧的刚度系数 $\qquad$ **$l_0$**: 弹簧原长

$W = \int_l \vec{F}\cdot\mathrm{d}\vec{r} = -k\int_l (r - l_0)\dfrac{\vec{r}}{r}\cdot\mathrm{d}\vec{r}$

$= -k\int_l (r - l_0)\mathrm{d}r = -k\int_l s\,\mathrm{d}s$

$$W = -\frac{1}{2}k(s^2 - s_0^2) \qquad s = r - l_0$$




$\vec{r}\cdot\mathrm{d}\vec{r} = \dfrac{1}{2}\mathrm{d}(\vec{r}\cdot\vec{r})$

$= \dfrac{1}{2}\mathrm{d}r^2 = r\,\mathrm{d}r$

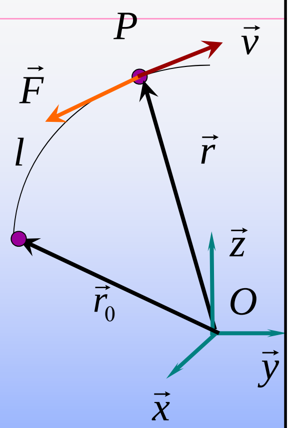
线弹性力的功与弹簧的变形平方之差成正比，与通过的路径无关

- 阻尼力的功

$$\vec{F} = -f(v)\left(\frac{\vec{v}}{v}\right)$$

$f(v) = fF_{\mathrm{N}}$ 库仑阻尼

$f(v) = cv$ 粘性阻尼




$$W = \int_l \vec{F}\cdot \mathrm{d}\vec{r} = -\int_l \frac{f(v)}{v}\vec{v}\cdot\vec{v}\,\mathrm{d}t$$

$$W = -\int_l f(v)v\,\mathrm{d}t \qquad W = -\int_{t_0}^{t} f(v)v\,\mathrm{d}t$$

库仑阻尼 $W = -fF_{\mathrm{N}}\int_l v\,\mathrm{d}t = -fF_{\mathrm{N}}\int_l \mathrm{d}l$

$W = -fF_{\mathrm{N}}l$ 库仑阻尼力的功与滑动的距离*l*成正比

粘性阻尼 $W = -\int_{t_0}^{t} cv^2\,\mathrm{d}t$





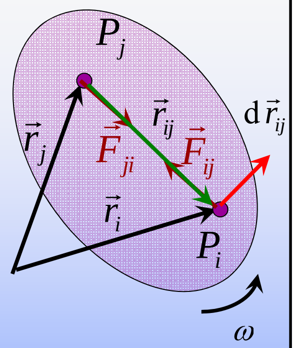
## 刚体上力的功

- 刚体内力的功
- 理想约束力的功
- 作用于平面刚体主动力的功

- 刚体内力的功

刚体内任意两质点$P_i$，$P_j$　$(i,j=1,2,\cdots)$

作用于$P_i$，$P_j$的内力　$\vec{F}_{ij}=-\vec{F}_{ji}$




两内力元功之和

$$\mathrm{d}W_{ij}=\vec{F}_{ij}\cdot\mathrm{d}\vec{r}_i+\vec{F}_{ji}\cdot\mathrm{d}\vec{r}_j=\vec{F}_{ij}\cdot(\mathrm{d}\vec{r}_i-\mathrm{d}\vec{r}_j)$$

$$=\vec{F}_{ij}\cdot\mathrm{d}(\vec{r}_i-\vec{r}_j)=\vec{F}_{ij}\cdot\mathrm{d}\underbrace{\vec{r}_{ij}}_{\text{连体矢量}}=0$$

$$\frac{\mathrm{d}\vec{r}_{ij}}{\mathrm{d}t}=\vec{\omega}\times\vec{r}_{ij}\qquad \mathrm{d}\vec{r}_{ij}\perp\vec{r}_{ij}\qquad \mathrm{d}\vec{r}_{ij}\perp\vec{F}_{ij}$$

$$\mathrm{d}W_{ij}=0\qquad (i,j=1,2,\cdots)$$

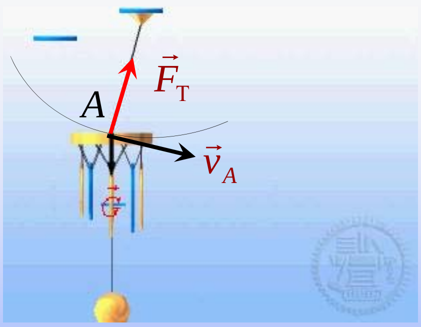
刚体在运动过程中所有质点间内力的功等于零





- 理想约束力的功

柔束



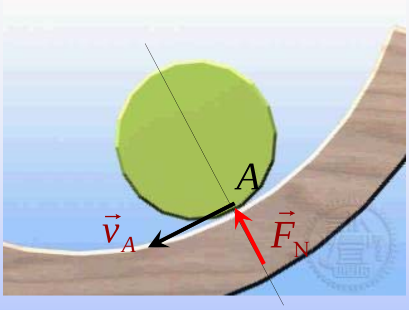

理想约束力方向　$\vec{F}_\mathrm{T}$

作用点$A$的运动（速度）方向　$\vec{v}_A$

$$\vec{F}_\mathrm{N}\perp\vec{v}_A$$

理想约束力的方向与点的运动方向垂直

## 支承面约束




理想约束力方向 $\vec{F}_N$

接触点的运动（速度）方向 $\vec{v}_A$

$$\vec{F}_N \perp \vec{v}_A$$

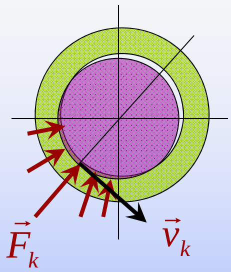
理想约束力的方向与接触点的运动方向垂直





## 平面圆柱铰约束

## 球铰约束



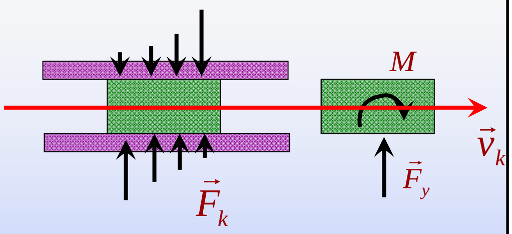

理想约束力方向 $\vec{F}_k$ 径向

接触点的运动（速度）方向 $\vec{v}_k$ 切向

$$\vec{F}_k \perp \vec{v}_k$$

理想约束力的方向与接触点的运动方向垂直

## 滑移铰约束




理想约束力方向 $\vec{F}_k$

接触点的运动（速度）方向 $\vec{v}_k$

$\vec{F}_k \perp \vec{v}_k$

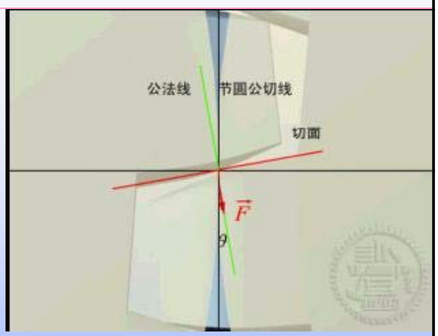
理想约束力的方向与接触点的运动方向垂直

主矢 $\vec{F}_y \perp \vec{v}$　　主矩 $M \perp \vec{v}$





## 齿轮副约束




理想约束力方向 $\vec{F}$ 沿齿面公法线

接触点的运动（速度）方向 $\vec{v}$ 沿齿面

$\vec{F} \perp \vec{v}$

理想约束力的方向与接触点点的运动方向垂直

- 理想约束力的功

理想约束力的方向与接触点的运动方向垂直 $\vec{F}_k \perp \vec{v}_k$

$$\vec{F}_k \perp \mathrm{d}\vec{r}_k$$

理想约束力的元功

$$\mathrm{d}W_k = \mathrm{d}\vec{r}_k \cdot \vec{F}_k = \vec{F}_k \cdot \mathrm{d}\vec{r}_k \equiv 0$$

**刚体在运动过程中作用在刚体上的理想约束力所作的功为零**





- 作用于平面刚体主动力的功

主动力系 $(\vec{F}_1, \vec{F}_2, \cdots, \vec{F}_n)$

作用点 $(P_1, P_2, \cdots, P_n)$

运动轨迹 $(l_1, l_2, \cdots, l_n)$

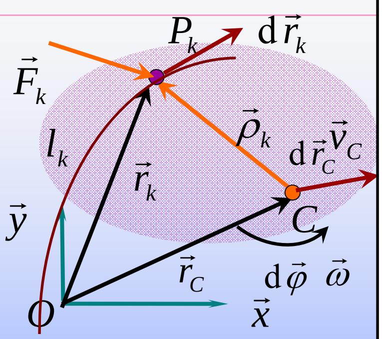
刚体平面运动

$$\vec{v}_C = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\vec{r}_C \qquad \vec{\omega} = \omega\vec{z} = \frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}t}\vec{z}$$

作用点$\boldsymbol{P_k}$ $\dot{\vec{r}}_k = \vec{v}_C + \vec{\omega} \times \vec{\rho}_k$

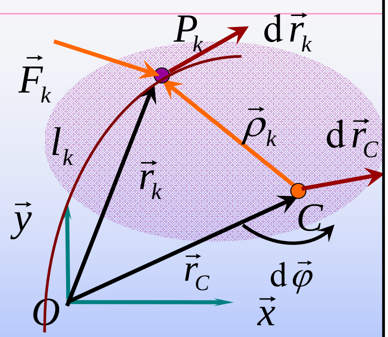
$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\vec{r}_k = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\vec{r}_C + \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\varphi\vec{z} \times \vec{\rho}_k$$

$$\mathrm{d}\vec{r}_k = \mathrm{d}\vec{r}_C + \mathrm{d}\vec{\varphi} \times \vec{\rho}_k$$




$$\mathrm{d}\vec{\varphi} \overset{\text{def}}{=} \mathrm{d}\varphi\vec{z}$$

$$\mathrm{d}\vec{r}_k = \mathrm{d}\vec{r}_C + \mathrm{d}\vec{\varphi} \times \vec{\rho}_k \qquad (k = 1,2,\cdots,n)$$




主动力总元功

$$\mathrm{d}W = \sum_{k=1}^{n} \vec{F}_k \cdot \mathrm{d}\vec{r}_k$$

$$= \left(\sum_{k=1}^{n} \vec{F}_k\right) \cdot \mathrm{d}\vec{r}_C + \sum_{k=1}^{n} \vec{F}_k \cdot (\mathrm{d}\vec{\varphi} \times \vec{\rho}_k)$$

$$= \underbrace{\left(\sum_{k=1}^{n} \vec{F}_k\right)}_{\vec{F}_\mathrm{R}} \cdot \mathrm{d}\vec{r}_C + \underbrace{\left(\sum_{k=1}^{n} \vec{\rho}_k \times \vec{F}_k\right)}_{\vec{M}_C} \cdot \mathrm{d}\vec{\varphi}$$

$$\vec{F}_k \cdot (\mathrm{d}\vec{\varphi} \times \vec{\rho}_k) = \mathrm{d}\vec{\varphi} \cdot (\vec{\rho}_k \times \vec{F}_k)$$

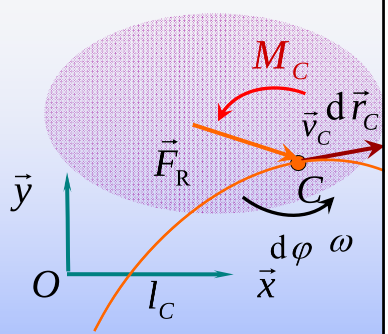
$$\mathrm{d}W = \vec{F}_\mathrm{R} \cdot \mathrm{d}\vec{r}_C + \vec{M}_C \cdot \mathrm{d}\vec{\varphi}$$





$$\mathrm{d}W = \vec{F}_\mathrm{R} \cdot \mathrm{d}\vec{r}_C + \vec{M}_C \cdot \mathrm{d}\vec{\varphi}$$

$$\mathrm{d}W = \vec{F}_\mathrm{R} \cdot \mathrm{d}\vec{r}_C + M_C\,\mathrm{d}\varphi$$




**主动力所作的总元功等于主动力的主矢与质心无限小位移矢量的点积以及主动力对质心的主矩与无限小方位角积之和**

$\vec{M}_C$ $\mathrm{d}\vec{\varphi}$ 同向

主动力的功

$$W = \int_{l_C} \mathrm{d}W = \int_{l_C} \left(\vec{F}_\mathrm{R} \cdot \mathrm{d}\vec{r}_C + M_C\,\mathrm{d}\varphi\right)$$

$$W = \int_{l_C} \left(\vec{F}_\mathrm{R} \cdot \vec{v}_C + M_C\omega\right)\mathrm{d}t$$

- 重力的功

刚体内任意质点$\boldsymbol{P}_k$ $\vec{F}_k = m_k \vec{g}$

重力的主矢 $\vec{F}_\mathrm{R} = m\vec{g}$

重力对质心的主矩 $M_C = 0$

刚体重力的元功

$$\mathrm{d}W = \vec{F}_\mathrm{R} \cdot \mathrm{d}\vec{r}_C = m\vec{g} \cdot \mathrm{d}\vec{r}_C$$

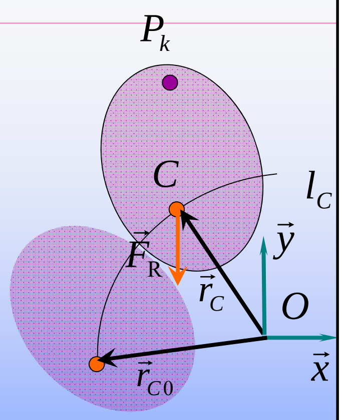
刚体重力的功

$$W = m\vec{g} \cdot \int_{l_C} \mathrm{d}\vec{r}_C = m\vec{g} \cdot (\vec{r}_C - \vec{r}_{C0})$$

$\vec{\boldsymbol{e}}$ :

$$W = m\boldsymbol{g}^\mathrm{T}(\boldsymbol{r}_C - \boldsymbol{r}_{C0})$$

$$W = -mg(z_C - z_{C0})$$




$$\boldsymbol{g} = g(0 \quad -1)^\mathrm{T}$$

$$\boldsymbol{r}_C = (x_C \quad y_C)^\mathrm{T}$$





# 动能定理

- 动能
- 力的功
- 势力场与势能
- 动能定理

# 势力场与势能

- 定义
- 几种常见的势力场





## 定义

- 力场
- 势力场
- 势力的功
- 势力场的势能
- 势力场的描述

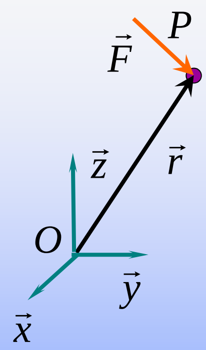
- 力场

在空间某个区域内存在大小和方向仅与空间位置有关的力，则称该区域为力场

$$\vec{F}=\vec{F}(\vec{r})$$

$\vec{e}$ :  $\boldsymbol{F}=\boldsymbol{F}(\boldsymbol{r})$  $\boldsymbol{F}=\begin{pmatrix}F_x & F_y & F_z\end{pmatrix}^{\mathrm{T}}$

为空间点坐标的单值可微函数  $\boldsymbol{r}=\begin{pmatrix}x & y & z\end{pmatrix}^{\mathrm{T}}$








- 势力场(保守力场)

对于某力场如果存在一标量函数$U(\boldsymbol{r})$其梯度恰好等于力的坐标阵$\boldsymbol{F}$

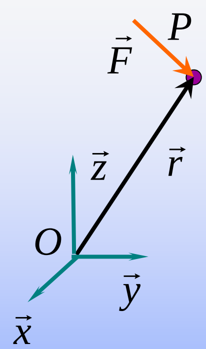
$\vec{e}$ :  $$\boldsymbol{F}=\mathrm{grad}U(\boldsymbol{r})=U_{\boldsymbol{r}}^{\mathrm{T}}$$

$$F_x=\frac{\partial U}{\partial x}\qquad F_y=\frac{\partial U}{\partial y}\qquad F_z=\frac{\partial U}{\partial z}$$

标量函数 $U$ 称为该势力场的势函数，简称为势

$$V(\boldsymbol{r})=-U(\boldsymbol{r})$$

标量函数 $V$ 称为该势力场的势能函数，简称为势能

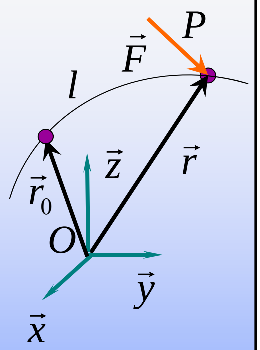



$$\mathrm{grad}U(\boldsymbol{r})=\begin{pmatrix}\frac{\partial U}{\partial x} & \frac{\partial U}{\partial y} & \frac{\partial U}{\partial z}\end{pmatrix}^{\mathrm{T}}=U_{\boldsymbol{r}}^{\mathrm{T}}$$

- 势力的功 $U=U(\boldsymbol{r}) \qquad \boldsymbol{r}=(x \quad y \quad z)^{\mathrm{T}}$

$$\mathrm{d}U=\frac{\partial U}{\partial x}\mathrm{d}x+\frac{\partial U}{\partial y}\mathrm{d}y+\frac{\partial U}{\partial z}\mathrm{d}z=U_{\boldsymbol{r}}\,\mathrm{d}\boldsymbol{r}=\boldsymbol{F}^{\mathrm{T}}\mathrm{d}\boldsymbol{r}$$

$$\mathrm{d}U=\vec{F}\cdot\mathrm{d}\vec{r}$$




一质点在势力场中沿路径 $\boldsymbol{l}$ 运动，力场对其所作的功

$$W=\int_l \vec{F}\cdot\mathrm{d}\vec{r}=\int_l \mathrm{d}U$$

$$W=U-U_0=-(V-V_0)$$

$$\boldsymbol{F}=U_{\boldsymbol{r}}^{\mathrm{T}}$$

**质点在势力场中运动，势力的功为路径终点与起始点的势函数(或势能)值有关，而与路径无关**



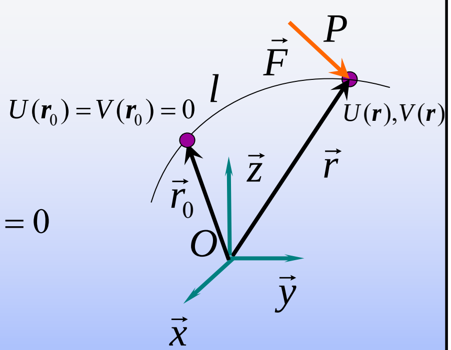


- 势力场的势能

$$W=U-U_0=-(V-V_0)$$

令 $\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}_0 \qquad \boldsymbol{r}=(x \quad y \quad z)^{\mathrm{T}}$

$$U_0=U(\boldsymbol{r}_0)=0 \qquad V_0=V(\boldsymbol{r}_0)=0$$




$$W=U(\boldsymbol{r})=-V(\boldsymbol{r})$$

$$V(\boldsymbol{r})=-W$$

质点在势力场某位置的势能为质点由零势能位置移动到该位置势力所作的功的负值

也即：质点在势力场某位置的势能为质点由该位置移动到零势能位置势力所作的功

- 势力场的几何描述

$$U = U(\boldsymbol{r}) \qquad \boldsymbol{r} = (x \quad y \quad z)^{\mathrm{T}}$$

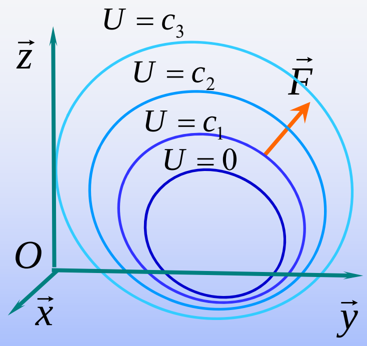
$U = U(\boldsymbol{r}) = c$ 空间曲面 等势面

$$c_3 > c_2 > c_1$$

$U = U(\boldsymbol{r}) = 0$ 零势面

势力的方向沿等势面的法向

质点在等势面上移动，势力不作功








## 几种常见的势力场

- 重力场
- 线弹性力场

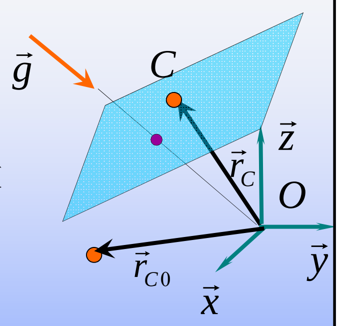
- 重力场 $W = \underline{U} - U_0 = -(V - V_0)$

重力的功 $W = \underline{m\boldsymbol{g}^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{r}_C - \boldsymbol{r}_{C0})}$

势 $U = m\boldsymbol{g}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{r}_C \quad U_0 = m\boldsymbol{g}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{r}_{C0}$

等势面 $U = m\boldsymbol{g}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{r}_C = c \qquad \vec{g}\cdot\vec{r}_C = 常数$

垂直于重力加速度矢量的平面



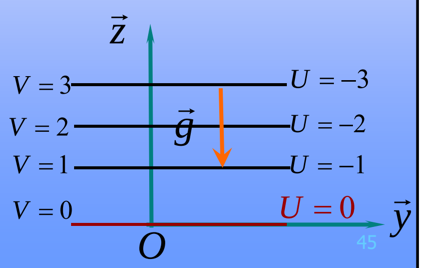

令 $\boldsymbol{g} = (0 \quad 0 \quad -g)^{\mathrm{T}} \quad \boldsymbol{r}_C = (x_C \quad y_C \quad z_C)^{\mathrm{T}}$

等势面 $U = -mgz_C = c$

$z_C = 0 \quad U_0 = 0$ 零势面为*xy*平面

势函数 $U = -mgz_C$

势能函数 $V = mgz_C$








- 线弹性力场 $W = \underline{U} - U_0 = -(V - V_0)$

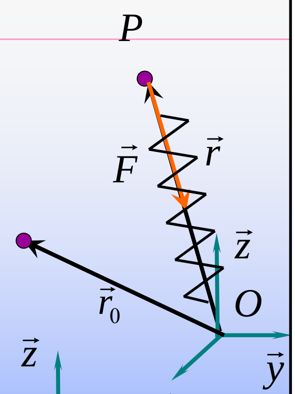
线弹性力的功 $W = \underline{-\frac{1}{2}k(s^2 - s_0^2)}$

势 $U = -\frac{1}{2}ks^2 \quad U_0 = -\frac{1}{2}ks_0^2$ $\quad s = r - l_0$

$l_0$: 弹簧原长

等势面 $U = -\frac{1}{2}ks^2 = -\frac{1}{2}k(r - l_0)^2 = c$

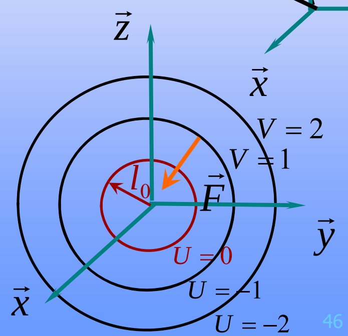
以基点为圆心的球




以原长$l_0$为半径的球面为零势面

$s_0 = r - l_0 = 0$

$U = -\frac{1}{2}k(r - l_0)^2 \quad V = \frac{1}{2}k(r - l_0)^2$



# 动能定理

- 动能
- 力的功
- 势力场与势能
- 动能定理





# 动能定理

- 质点系动能定理
- 刚体的动能定理
- 机械能守恒

- 质点系动能定理

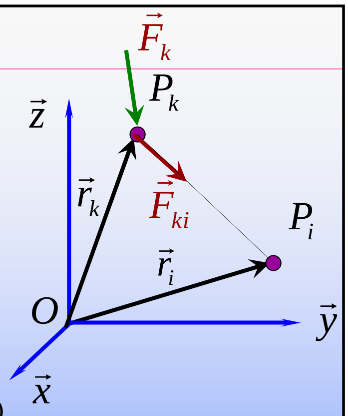
质点系 $(P_1, P_2, \cdots, P_n)$

质点$P_k$ $(k=1,2,\cdots,n)$ 所受的力

外力 $\vec{F}_k$

内力 质点$P_i$所对$P_k$的作用力

$\vec{F}_{ki}$ $(i=1,2,\cdots,n; \neq k)$




牛顿定律 $m_k \ddot{\vec{r}}_k = \vec{F}_k + \sum_{i=1,\neq k}^{n} \vec{F}_{ki}$ $(k=1,2,\cdots,n)$

$$\frac{\mathrm{d} m_k \dot{\vec{r}}_k}{\mathrm{d}t} = \vec{F}_k + \sum_{i=1,\neq k}^{n} \vec{F}_{ki} \qquad \dot{\vec{r}}_k \cdot \frac{\mathrm{d} m_k \dot{\vec{r}}_k}{\cancel{\mathrm{d}t}} = \frac{\mathrm{d}\vec{r}_k}{\cancel{\mathrm{d}t}} \cdot \left( \vec{F}_k + \sum_{i=1,\neq k}^{n} \vec{F}_{ki} \right)$$

$$\dot{\vec{r}}_k \cdot \mathrm{d} m_k \dot{\vec{r}}_k = \mathrm{d}\vec{r}_k \cdot \left( \vec{F}_k + \sum_{i=1,\neq k}^{n} \vec{F}_{ki} \right)$$





$$\dot{\vec{r}}_k \cdot \mathrm{d} m_k \dot{\vec{r}}_k = \mathrm{d}\vec{r}_k \cdot \left( \vec{F}_k + \sum_{i=1,\neq k}^{n} \vec{F}_{ki} \right) \qquad (k=1,2,\cdots,n)$$

$$\underline{\sum_{k=1}^{n} \dot{\vec{r}}_k \cdot \mathrm{d} m_k \dot{\vec{r}}_k} = \underline{\sum_{k=1}^{n} \mathrm{d}\vec{r}_k \cdot \left( \vec{F}_k + \sum_{i=1,\neq k}^{n} \vec{F}_{ki} \right)}$$

$$\sum_{k=1}^{n} \dot{\vec{r}}_k \cdot \mathrm{d} m_k \dot{\vec{r}}_k = \sum_{k=1}^{n} \mathrm{d}\left( \frac{1}{2} m_k \dot{\vec{r}}_k \cdot \dot{\vec{r}}_k \right) = \mathrm{d} \sum_{k=1}^{n} T_k = \mathrm{d}T$$

$$\sum_{k=1}^{n} \mathrm{d}\vec{r}_k \cdot \left( \vec{F}_k + \sum_{i=1,\neq k}^{n} \vec{F}_{ki} \right) = \sum_{k=1}^{n} \underbrace{\mathrm{d}\vec{r}_k \cdot \vec{F}_k}_{\mathrm{d}W_k} + \sum_{k=1}^{n} \underbrace{\mathrm{d}\vec{r}_k \cdot \sum_{i=1,\neq k}^{n} \vec{F}_{ki}}_{\mathrm{d}W'_k} = \underbrace{\mathrm{d}\sum_{k=1}^{n} W_k}_{\mathrm{d}W} + \underbrace{\mathrm{d}\sum_{k=1}^{n} W'_k}_{\mathrm{d}W'}$$

外力的元功 内力的元功

$$\mathrm{d}T = \mathrm{d}W + \mathrm{d}W'$$

$$\mathrm{d}T=\mathrm{d}W+\mathrm{d}W'$$

$$\int \mathrm{d}T=\mathrm{d}\sum_{k=1}^{n}\int W_k+\mathrm{d}\sum_{k=1}^{n}\int W_k'$$

所有外力的功 $W=\sum_{k=1}^{n}\int_{l_k}\mathrm{d}W_k$

所有内力的功 $W'=\sum_{k=1}^{n}\int_{l_k}\mathrm{d}W_k'$

$$T-T_0=W+W'$$

**质点系动能的改变等于作用于质点系所有外力的功与所有内力的功之和**

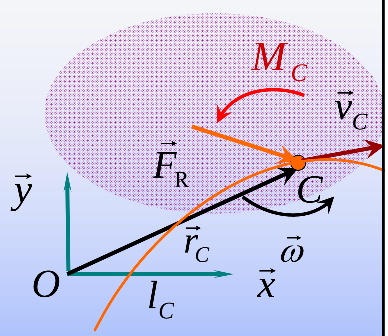




- 刚体的动能定理

$$T-T_0=W+\cancel{W'}$$

刚体的内力不作功




$$T-T_0=W$$

$$=\int_{l_C}\left(\vec{F}_{\mathrm{R}}\cdot\vec{v}_C+M_C\omega\right)\mathrm{d}t$$

- 机械能守恒

刚体处在势力场 $T - T_0 = \underline{W}$ 势力的功

刚体势力的功 $W = -(V - V_0)$

$$T - T_0 = -(V - V_0)$$

$$\underline{T+V} = T_0 + V_0 = \text{常数}$$

机械能：刚体的动能与势能代数和

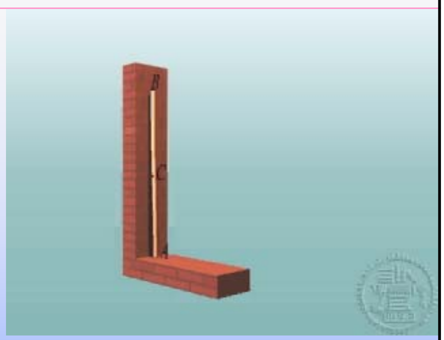
**势力场中刚体的机械能为常量**





[例]

均质杆***AB***长为***l***，质量为***m***。
当该杆处于$\varphi_0$由静止开始在地面与墙面上无摩擦地滑动



试求杆在不同位置的角速度

[解]　惯性基 $O-\vec{e}$　　连体基 $C-\vec{e}^{\mathrm{b}}$

杆的运动为平面一般运动

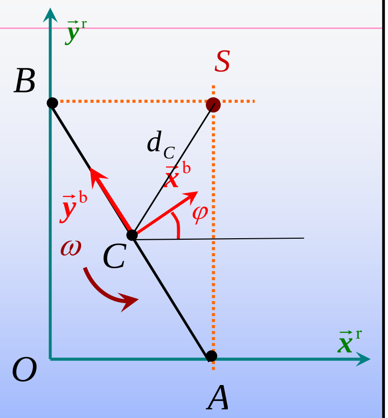
杆运动的一般位置 $\varphi$

杆对瞬心S的转动惯量

$$J_{Sz} = J_{Cz} + md_C^2 = \frac{ml^2}{12} + \frac{ml^2}{4} = \frac{1}{3}ml^2$$

杆动能

$$T = \frac{1}{2}J_{Sz}\omega^2 = \frac{1}{6}ml^2\omega^2$$








杆动能　$T = \frac{1}{2}J_{Sz}\omega^2 = \frac{1}{6}ml^2\omega^2$

杆受的外力

理想约束力不作功

主动力：重力

初始位形　$\varphi_0$　　当前位形　$\varphi$

重力作功

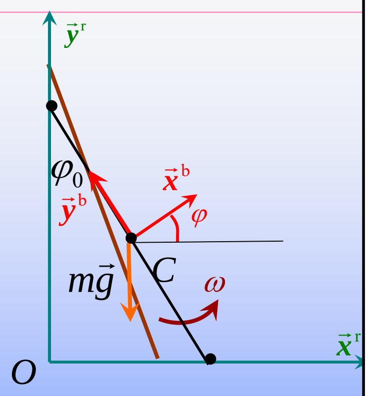
$$W = -mg\cdot\frac{1}{2}l(\cos\varphi - \cos\varphi_0)$$

初始角速度　$\omega_0 = 0$　　$T_0 = 0$

当前角速度　$\omega$　　$T$

$$\frac{1}{6}ml^2\omega^2 - 0 = -\frac{1}{2}mgl(\cos\varphi - \cos\varphi_0)$$

$$\omega = \sqrt{3g(\cos\varphi_0 - \cos\varphi)/l}$$




$$W = -mg(y_C - y_{C0})$$

$$T - T_0 = W$$

$$\frac{1}{6}ml^2\omega^2=-\frac{1}{2}mgl(\cos\varphi-\cos\varphi_0)$$

$$\omega=\sqrt{\frac{3g(\cos\varphi_0-\cos\varphi)}{l}}$$

任意时刻的角速度与姿态角的关系

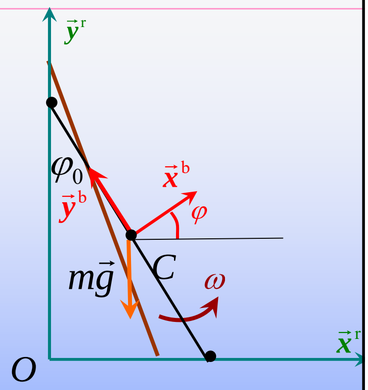
条件： $t=t_0 \quad \varphi=\varphi_0$

$\omega=\omega_0=0$

$$\dot{\varphi}=\sqrt{\frac{3g(\cos\varphi_0-\cos\varphi)}{l}}$$

姿态角的微分方程 $\frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}t}=f(\varphi)=\sqrt{\frac{3g(\cos\varphi_0-\cos\varphi)}{l}}$

积分 $\varphi=\varphi(t)$



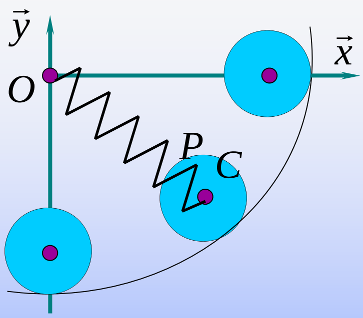

角加速度？





[例]

图示一质量为**m**半径为**r**的均质圆盘在一铅垂平面内的曲线轨道上作无滑动滚动。
圆盘中心***C***与固定点***O***连接一原长为$l_0$线弹簧。初始时***OC***为水平，弹簧长为$l_1 < l_0$，圆盘处于静止状态。
终了时***OC***为铅垂，弹簧长为$l_2 < l_0$




试求圆盘在终了位置质心的速度

**[解]** 受力分析

理想约束力 $\vec{F}_{\mathrm{N}}$ 不作功

摩擦力 $\vec{F}_{\mathrm{f}}$ 纯滚动 接触点无位移不作功

重力 $m\vec{g}$ 作功 $W_1 = mgl_2$

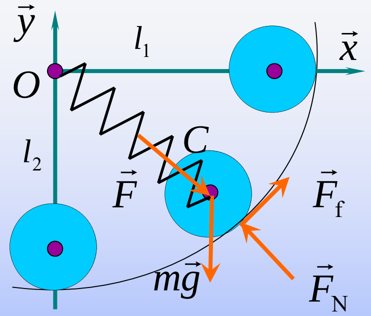
线弹性力 $\vec{F}$ 作功

$$W_2 = -\frac{1}{2}k[(l_2 - l_0)^2 - (l_1 - l_0)^2]$$

运动分析：平面一般运动

$$T = \frac{1}{2}mv_C^2 + \frac{1}{2}J_C\omega^2$$

$$= \frac{1}{2}mv_C^2 + \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}mr^2\cdot\left(\frac{v_C}{r}\right)^2 = \frac{3}{4}mv_C^2$$




$$W = -mg(y_C - y_{C0})$$

$$W = -\frac{1}{2}k(s^2 - s_0^2)$$

$$\omega = \frac{v_C}{r}$$





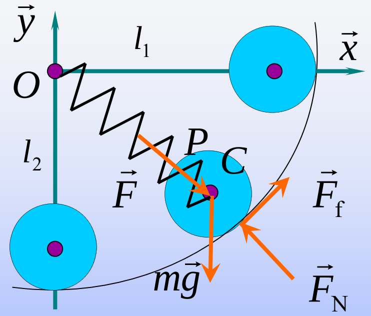
重力 $m\vec{g}$ 作功 $W_1 = mgl_2$

线弹性力 $\vec{F}$ 作功

$$W_2 = -\frac{1}{2}k[(l_2 - l_0)^2 - (l_1 - l_0)^2]$$

$$T = \frac{3}{4}mv_C^2$$

初始态 $T_0 = 0$



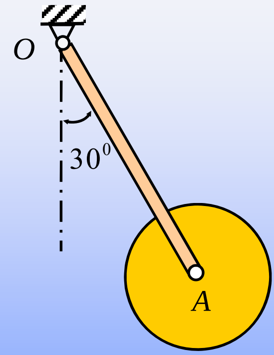

$$\frac{3}{4}mv_C^2 - 0 = mgl_2 - \frac{1}{2}k[(l_2 - l_0)^2 - (l_1 - l_0)^2]$$

$$T - T_0 = W$$

$$v_C = \sqrt{\frac{4}{3}gl_2 - \frac{2k}{3m}[(l_2 - l_0)^2 - (l_1 - l_0)^2]}$$

[例] 习题6-26

如图所示，一质量为30kg，半径为0.5 m的均质圆盘与一质量为18kg，长为1 m的均质直杆用理想铰链连接，在铅垂平面内绕杆的一端转动。系统自图示位置无初速地开始运动。




求当杆*OA*处于铅垂位置时点*A*的速度。



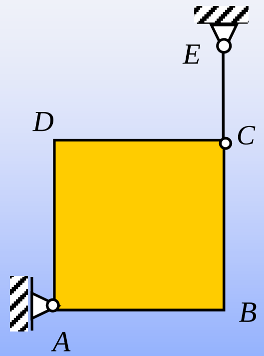


[例] 习题6-35

正方形均质薄板重$G$，用理想铰链$A$及软绳$CE$支持如图所示。

（1）求软绳剪断的瞬间铰链$A$处的约束力；

（2）求当板转过$90^0$时铰链$A$处的约束力。



- 小结

动能定理

运动与力的关系 ➡ 动能与功的关系

$$T - T_0 = W + W'$$

解决系统两个状态的功能间的关系

速度层次上：代数表达式 ➡ 解决当前态与初始态速度间的关系

$$\omega = \sqrt{\frac{3g(\cos\varphi_0 - \cos\varphi)}{l}}$$

位形层次上：一阶微分方程 ➡ 解决姿态的时间历程

$$\frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}t} = f(\varphi) = \sqrt{\frac{3g(\cos\varphi_0 - \cos\varphi)}{l}}$$