理论力学 CAI

刚体系运动学计算机辅助分析

理论力学 CAI

刚体系运动学计算机辅助分析

- 前言
- 刚体系的位形描述，约束方程
- 运动学的计算机辅助分析基础
- 常见平面运动约束的约束方程
- 平面机械系统运动学模型的定义
- 理论力学问题求解器的使用

刚体系位形描述

约束方程

刚体系的位形描述，约束方程

- 前言
- 笛卡尔位形坐标
- 约束方程

刚体系运动学及其计算机辅助分析方法

刚体系的位形描述，约束方程

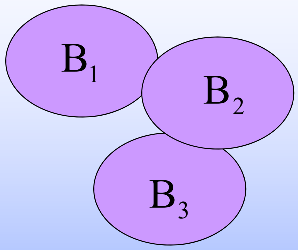
- 前言
- 笛卡尔位形坐标
- 约束方程

前言

- 由N个刚体构成的刚体系

$$\mathrm{B}_i \quad i=1,\cdots,N$$

- 解决如何描述刚体系的位形
  - 确定系统位形坐标



刚体系的位形描述，约束方程

- 前言
- **笛卡尔位形坐标**
- 约束方程

笛卡尔位形坐标

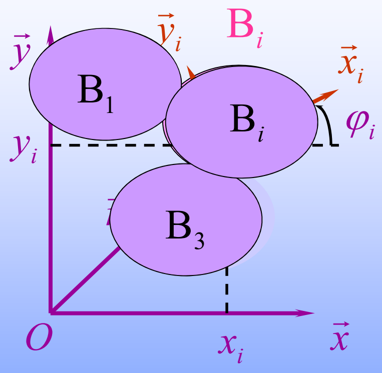
- 建立系统的公共参考基

$$O-\vec{e}:\quad O-(\vec{x}\quad \vec{y})^{\mathrm{T}}$$

- 每个刚体的位形的描述
  - 建立刚体的连体基

$$\mathrm{B}_i:\quad C_i-\vec{e}_i:\quad C_i-(\vec{x}_i\quad \vec{y}_i)^{\mathrm{T}}$$

  - 刚体的位形坐标均相对于公共基定义：笛卡尔坐标



$$\mathrm{B}_i:\quad \boldsymbol{q}_i=\left(\boldsymbol{r}_i^{\mathrm{T}}\quad \varphi_i\right)^{\mathrm{T}}=\left(x_i\quad y_i\quad \varphi_i\right)^{\mathrm{T}}$$

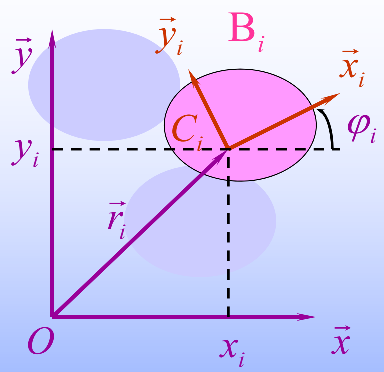
- 建立系统的公共参考基

$$O-\vec{e}$$

- 每个刚体的位形的描述
  - 建立刚体的连体基

$$\mathrm{B}_i:\quad C_i-\vec{e}_i$$

  - 刚体的位形坐标：笛卡尔坐标



$$\mathrm{B}_i:\quad \boldsymbol{q}_i=\left(\boldsymbol{r}_i^{\mathrm{T}}\quad \varphi_i\right)^{\mathrm{T}}=\left(x_i\quad y_i\quad \varphi_i\right)^{\mathrm{T}}$$

- 系统的位形坐标

$$\boldsymbol{q}=\left(\boldsymbol{q}_1^{\mathrm{T}}\quad \cdots\quad \boldsymbol{q}_N^{\mathrm{T}}\right)^{\mathrm{T}}=\left(x_1\quad y_1\quad \varphi_1\quad \cdots\quad x_N\quad y_N\quad \varphi_N\right)^{\mathrm{T}}$$

坐标个数 $\quad n=3N$

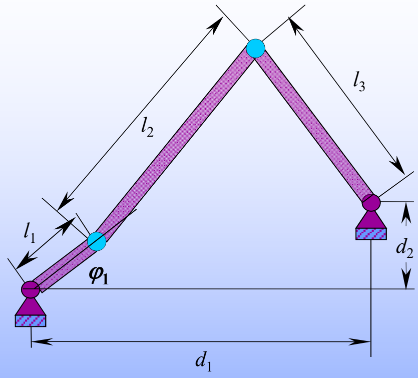
[例]

图示机构的参数为

l_1=0.1m，l_2=0.4m，l_3=0.3m

d_1=0.4m，d_2=0.1m

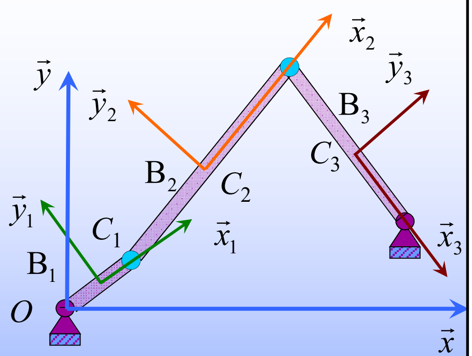
此瞬时 $\varphi_1 = \pi/4$ (rad)



求该瞬时系统的位形

[解1]

系统有 N=3个刚体构成，分别定义各刚性杆为$\mathbf{B}_1$，$\mathbf{B}_2$与$\mathbf{B}_3$



公共参考基 $O-\vec{e}$

建立连体基

B_1： $C_1-\vec{e}_1$

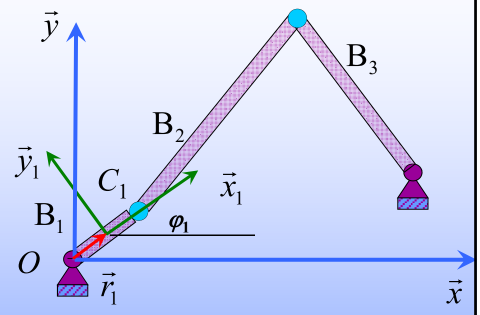
B_2： $C_2-\vec{e}_2$

B_3： $C_3-\vec{e}_3$

连体基基点在各杆的中点

各刚体的瞬时位形坐标

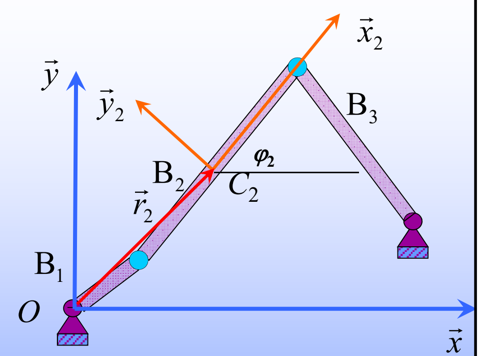
$$\mathrm{B}_1:\quad \boldsymbol{q}_1 = \left(\boldsymbol{r}_1^{\mathrm{T}} \quad \varphi_1\right)^{\mathrm{T}}$$
$$= \left(0.0354 \quad 0.0354 \quad 0.785\right)^{\mathrm{T}}$$



$\varphi_1 = \pi/4$ **(rad)**

各刚体的瞬时位形坐标

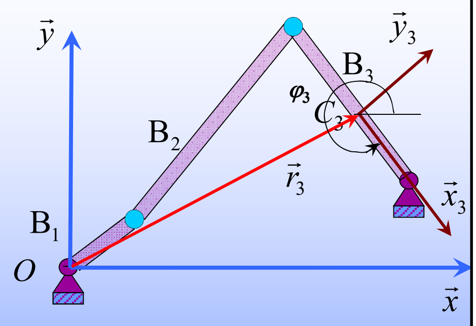
$$\mathrm{B}_1:\quad \boldsymbol{q}_1 = \left(\boldsymbol{r}_1^{\mathrm{T}} \quad \varphi_1\right)^{\mathrm{T}}$$
$$= \left(0.0354 \quad 0.0354 \quad 0.785\right)^{\mathrm{T}}$$
$$\mathrm{B}_2:\quad \boldsymbol{q}_2 = \left(\boldsymbol{r}_2^{\mathrm{T}} \quad \varphi_2\right)^{\mathrm{T}}$$
$$= \left(0.193 \quad 0.229 \quad 0.915\right)^{\mathrm{T}}$$



$\varphi_1 = \pi/4$ **(rad)**

各刚体的瞬时位形坐标

$$B_1:\ \boldsymbol{q}_1=(\boldsymbol{r}_1^{\mathrm{T}}\quad \varphi_1)^{\mathrm{T}}$$
$$=(0.0354\quad 0.0354\quad 0.785)^{\mathrm{T}}$$
$$B_2:\ \boldsymbol{q}_2=(\boldsymbol{r}_2^{\mathrm{T}}\quad \varphi_2)^{\mathrm{T}}$$
$$=(0.193\quad 0.229\quad 0.915)^{\mathrm{T}}$$
$$B_3:\ \boldsymbol{q}_3=(\boldsymbol{r}_3^{\mathrm{T}}\quad \varphi_3)^{\mathrm{T}}$$
$$=(0.357\quad 0.244\quad 5.000)^{\mathrm{T}}$$

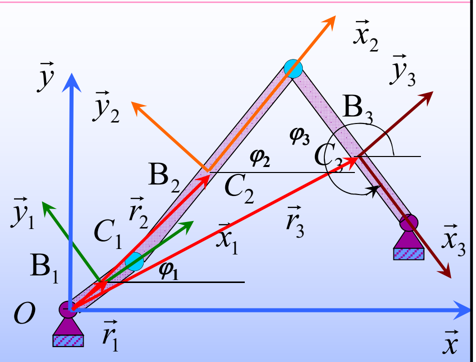


$\varphi_1=\pi/4$ (rad)

刚体系位形的描述，约束方程/笛卡尔位形坐标/解

各刚体的瞬时位形坐标

$$B_1:\ \boldsymbol{q}_1=(\boldsymbol{r}_1^{\mathrm{T}}\quad \varphi_1)^{\mathrm{T}}$$
$$=(0.0354\quad 0.0354\quad 0.785)^{\mathrm{T}}$$
$$B_2:\ \boldsymbol{q}_2=(\boldsymbol{r}_2^{\mathrm{T}}\quad \varphi_2)^{\mathrm{T}}$$
$$=(0.193\quad 0.229\quad 0.915)^{\mathrm{T}}$$
$$B_3:\ \boldsymbol{q}_3=(\boldsymbol{r}_3^{\mathrm{T}}\quad \varphi_3)^{\mathrm{T}}$$
$$=(0.357\quad 0.244\quad 5.000)^{\mathrm{T}}$$



$\varphi_1=\pi/4$ (rad)

系统的瞬时位形坐标

$$\boldsymbol{q}=(\boldsymbol{q}_1^{\mathrm{T}}\quad \boldsymbol{q}_2^{\mathrm{T}}\quad \boldsymbol{q}_3^{\mathrm{T}})^{\mathrm{T}}=(\underline{x_1\quad y_1\quad \varphi_1\quad x_2\quad y_2\quad \varphi_2\quad x_3\quad y_3\quad \varphi_3})^{\mathrm{T}}$$
$$=(0.0354\quad 0.0354\quad 0.785\quad 0.193\quad 0.229\quad 0.915\quad 0.357\quad 0.244\quad 5.000)^{\mathrm{T}}$$

系统的位形坐标都是时变的　　时变坐标的个数为**9**（**3*N***）

[解2]

系统有$N=3$个刚体构成，分别定义各刚性杆为$\mathbf{B}_1$，$\mathbf{B}_2$与$\mathbf{B}_3$

公共参考基 $O-\vec{e}$

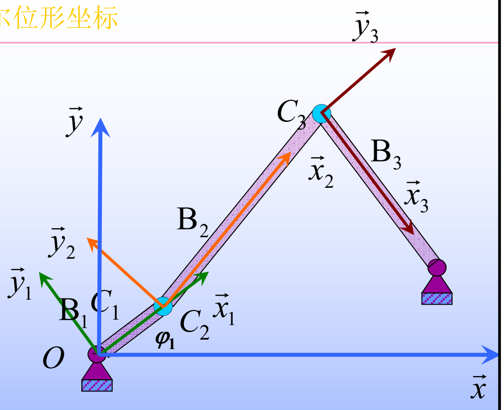
建立连体基

B_1： $C_1-\vec{e}_1$

B_2： $C_2-\vec{e}_2$

B_3： $C_3-\vec{e}_3$

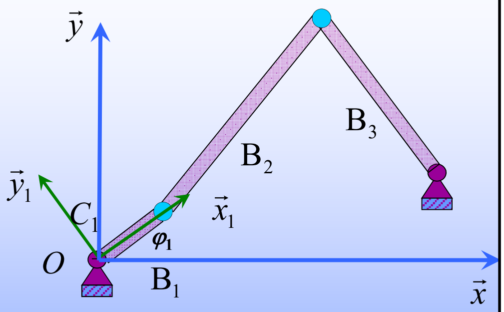
连体基基点在各杆的端点



各刚体的瞬时位形坐标

B_1： $\boldsymbol{q}_1=\left(\boldsymbol{r}_1^{\mathrm{T}} \quad \varphi_1\right)^{\mathrm{T}}$

$=\left(0 \quad 0 \quad \varphi_1\right)^{\mathrm{T}}$



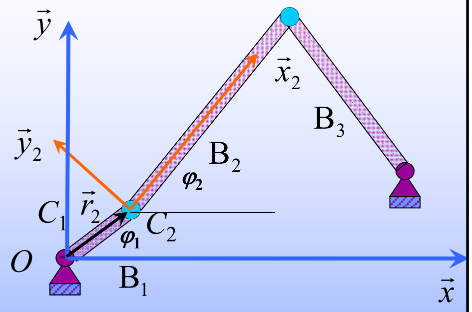
各刚体的瞬时位形坐标

$$\mathrm{B}_1:\ \boldsymbol{q}_1=\begin{pmatrix}\boldsymbol{r}_1^{\mathrm{T}} & \varphi_1\end{pmatrix}^{\mathrm{T}}$$

$$=\begin{pmatrix}0 & 0 & \varphi_1\end{pmatrix}^{\mathrm{T}}$$

$$\mathrm{B}_2:\ \boldsymbol{q}_2=\begin{pmatrix}\boldsymbol{r}_2^{\mathrm{T}} & \varphi_2\end{pmatrix}^{\mathrm{T}}$$

$$=\begin{pmatrix}x_2 & y_2 & \varphi_2\end{pmatrix}^{\mathrm{T}}$$



各刚体的瞬时位形坐标

$$\mathrm{B}_1:\ \boldsymbol{q}_1=\begin{pmatrix}\boldsymbol{r}_1^{\mathrm{T}} & \varphi_1\end{pmatrix}^{\mathrm{T}}$$

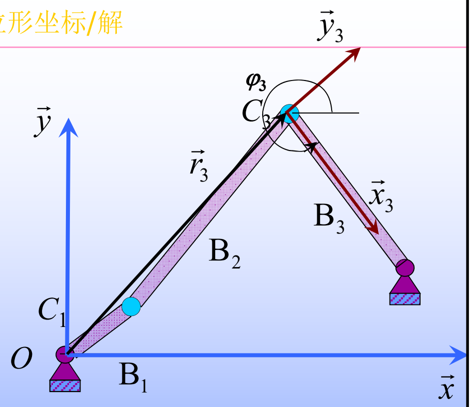
$$=\begin{pmatrix}0 & 0 & \varphi_1\end{pmatrix}^{\mathrm{T}}$$

$$\mathrm{B}_2:\ \boldsymbol{q}_2=\begin{pmatrix}\boldsymbol{r}_2^{\mathrm{T}} & \varphi_2\end{pmatrix}^{\mathrm{T}}$$

$$=\begin{pmatrix}x_2 & y_2 & \varphi_2\end{pmatrix}^{\mathrm{T}}$$

$$\mathrm{B}_3:\ \boldsymbol{q}_3=\begin{pmatrix}\boldsymbol{r}_3^{\mathrm{T}} & \varphi_3\end{pmatrix}^{\mathrm{T}}$$

$$=\begin{pmatrix}x_3 & y_3 & \varphi_3\end{pmatrix}^{\mathrm{T}}$$



刚体系位形的描述，约束方程/笛卡尔位形坐标/解

各刚体的**瞬时**位形坐标

$B_1:\ \boldsymbol{q}_1=(\boldsymbol{r}_1^{\mathrm{T}}\quad \varphi_1)^{\mathrm{T}}$

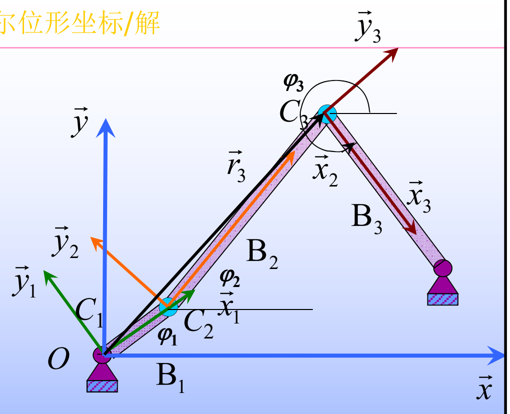
$\qquad =(0\quad 0\quad \varphi_1)^{\mathrm{T}}$

$B_2:\ \boldsymbol{q}_2=(\boldsymbol{r}_2^{\mathrm{T}}\quad \varphi_2)^{\mathrm{T}}$

$\qquad =(x_2\quad y_2\quad \varphi_2)^{\mathrm{T}}$

$B_3:\ \boldsymbol{q}_3=(\boldsymbol{r}_3^{\mathrm{T}}\quad \varphi_3)^{\mathrm{T}}$

$\qquad =(x_3\quad y_3\quad \varphi_3)^{\mathrm{T}}$



系统的**瞬时**位形坐标

$$\boldsymbol{q}=(\boldsymbol{q}_1^{\mathrm{T}}\quad \boldsymbol{q}_2^{\mathrm{T}}\quad \boldsymbol{q}_3^{\mathrm{T}})^{\mathrm{T}}=(0\quad 0\quad \underline{\varphi_1\quad x_2\quad y_2\quad \varphi_2\quad x_3\quad y_3\quad \varphi_3})^{\mathrm{T}}$$

系统的位形坐标部分是时变的　　时变坐标的个数为**7**（**<3*N***）

刚体系位形的描述，约束方程/笛卡尔位形坐标

[解3]

系统有N=**3**个刚体构成，分别定义各刚性杆为$\mathbf{B_1}$, $\mathbf{B_2}$与$\mathbf{B_3}$

公共参考基　　$O-\vec{\boldsymbol{e}}$

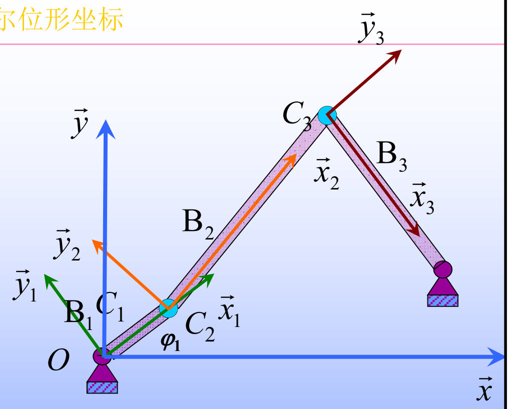
建立连体基

$B_1:\ C_1-\vec{\boldsymbol{e}}_1$

$B_2:\ C_2-\vec{\boldsymbol{e}}_2$

$B_3:\ C_3-\vec{\boldsymbol{e}}_3$

连体基基点在各杆的端点

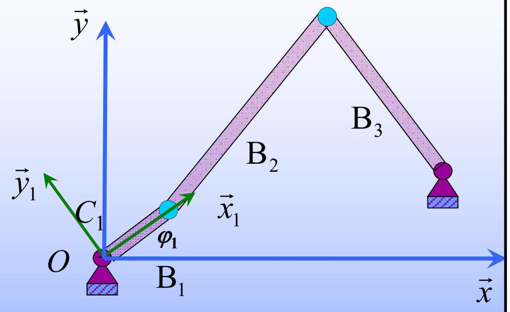


刚体系位形的描述，约束方程/笛卡尔位形坐标/解

各刚体的瞬时位形坐标

$B_1:\ \boldsymbol{q}_1 = \begin{pmatrix}\boldsymbol{r}_1^{\mathrm{T}} & \varphi_1\end{pmatrix}^{\mathrm{T}}$

$= \begin{pmatrix}0 & 0 & \varphi_1\end{pmatrix}^{\mathrm{T}}$



2018年11月2日
理论力学CAI 运动学计算机辅助分析
21

刚体系位形的描述，约束方程/笛卡尔位形坐标/解

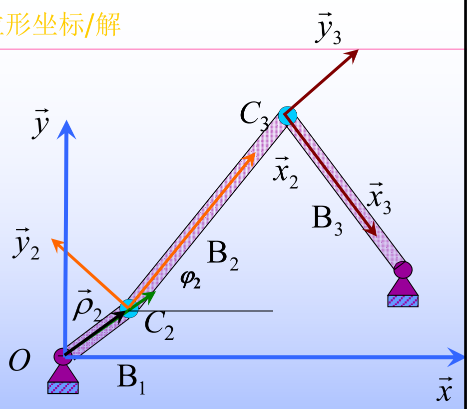
各刚体的瞬时位形坐标

$B_1:\ \boldsymbol{q}_1 = \begin{pmatrix}\boldsymbol{r}_1^{\mathrm{T}} & \varphi_1\end{pmatrix}^{\mathrm{T}}$

$= \begin{pmatrix}0 & 0 & \varphi_1\end{pmatrix}^{\mathrm{T}}$

$B_2:\ \boldsymbol{q}_2 = \begin{pmatrix}\boldsymbol{\rho}_2'^{\mathrm{T}} & \varphi_2\end{pmatrix}^{\mathrm{T}}$　　$\vec{\rho}_2$ 在基的 $\vec{\boldsymbol{e}}^1$ 坐标阵

$= \begin{pmatrix}l_1 & 0 & \varphi_2\end{pmatrix}^{\mathrm{T}}$



2018年11月2日
理论力学CAI 运动学计算机辅助分析
22

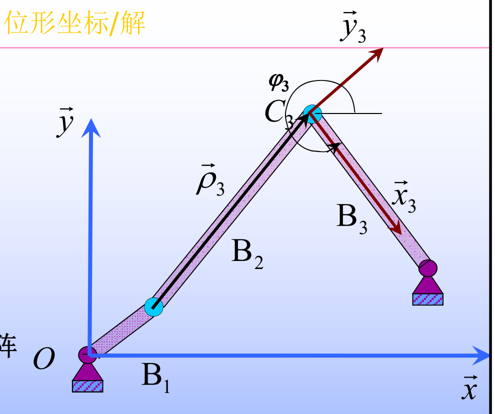
各刚体的瞬时位形坐标

$$B_1:\ \boldsymbol{q}_1 = (\boldsymbol{r}_1^{\mathrm{T}}\quad \varphi_1)^{\mathrm{T}} = (0\quad 0\quad \varphi_1)^{\mathrm{T}}$$

$$B_2:\ \boldsymbol{q}_2 = (\boldsymbol{\rho}_2'^{\mathrm{T}}\quad \varphi_2)^{\mathrm{T}} = (l_1\quad 0\quad \varphi_2)^{\mathrm{T}}$$

$$B_3:\ \boldsymbol{q}_3 = (\boldsymbol{\rho}_3'^{\mathrm{T}}\quad \varphi_3)^{\mathrm{T}} = (l_2\quad 0\quad \varphi_3)^{\mathrm{T}}$$

$\vec{\rho}_3$ 在基的 $\vec{e}^{\,2}$ 坐标阵



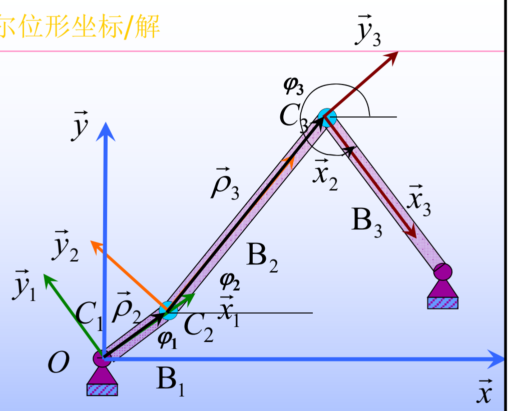
刚体系位形的描述，约束方程/笛卡尔位形坐标/解

各刚体的瞬时位形坐标

$$B_1:\ \boldsymbol{q}_1 = (\boldsymbol{r}_1^{\mathrm{T}}\quad \varphi_1)^{\mathrm{T}} = (0\quad 0\quad \varphi_1)^{\mathrm{T}}$$

$$B_2:\ \boldsymbol{q}_2 = (\boldsymbol{\rho}_2'^{\mathrm{T}}\quad \varphi_2)^{\mathrm{T}} = (l_1\quad 0\quad \varphi_2)^{\mathrm{T}}$$

$$B_3:\ \boldsymbol{q}_3 = (\boldsymbol{\rho}_3'^{\mathrm{T}}\quad \varphi_3)^{\mathrm{T}} = (l_2\quad 0\quad \varphi_3)^{\mathrm{T}}$$



系统的瞬时位形坐标

$$\boldsymbol{q} = (\boldsymbol{q}_1^{\mathrm{T}}\quad \boldsymbol{q}_2^{\mathrm{T}}\quad \boldsymbol{q}_3^{\mathrm{T}})^{\mathrm{T}} = (0\quad 0\quad \underline{\varphi_1}\quad l_1\quad 0\quad \underline{\varphi_2}\quad l_2\quad 0\quad \underline{\varphi_3})^{\mathrm{T}}$$

系统的位形坐标部分时变　　时变坐标的个数为3（**<3*N***）

$$\boldsymbol{q} = (\varphi_1\quad \varphi_2\quad \varphi_3)^{\mathrm{T}}$$

系统的位形坐标不是笛卡儿坐标

小结

系统位形笛卡尔坐标的最大的个数是**3*N***

定义系统位形笛卡尔坐标具有程式化的特征

系统位形坐标的定义是人为的

时变位形坐标的个数可能不同，这些时变坐标（< **3*N*** ）可作为描述系统的位形坐标。 称为位形坐标的缩减

刚体系的位形描述，约束方程

- 前言
- 笛卡尔位形坐标
- 约束方程

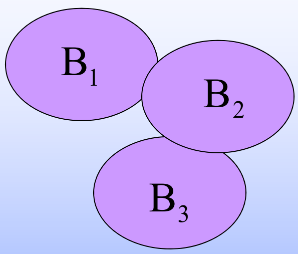
约束方程

- 约束方程的基本概念
- 系统的自由度
- 建立约束方程的方法
- 速度约束方程
- 加速度约束方程

约束方程的基本概念

- 由N个刚体构成的刚体系

$$\mathrm{B}_i \quad i=1,\cdots,N$$



- 描述刚体系的位形坐标

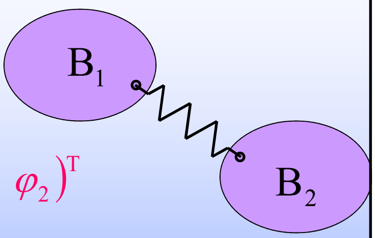
$$\boldsymbol{q}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{q}_1^{\mathrm{T}} & \cdots & \boldsymbol{q}_N^{\mathrm{T}}\end{pmatrix}^{\mathrm{T}}$$

坐标个数通常 $n=3N$ 缩减 $n<3N$

- 系统各刚体的运动相互有联系

有哪些联系？这些联系的力学描述？

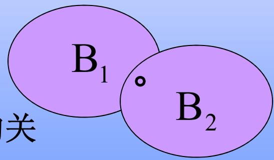
- 系统各刚体两种性质不同的联系
  - 不影响刚体相对运动的独立性



$$\boldsymbol{q} = \left(\boldsymbol{q}_1^{\mathrm{T}} \quad \boldsymbol{q}_2^{\mathrm{T}}\right)^{\mathrm{T}}$$

$$\boldsymbol{q}_1 = \left(x_1 \quad y_1 \quad \varphi_1\right)^{\mathrm{T}} \quad \boldsymbol{q}_2 = \left(x_2 \quad y_2 \quad \varphi_2\right)^{\mathrm{T}}$$

  - 影响刚体相对运动的独立性



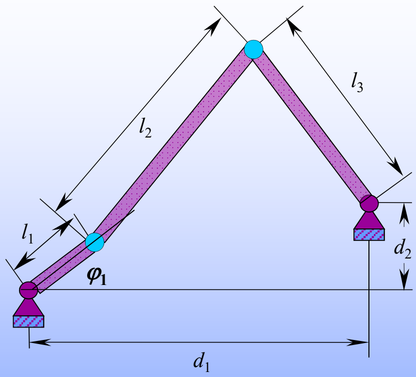
6个位形坐标相互不独立

系统运动过程中，位形坐标间存在的关系式称为约束方程

$$\boldsymbol{\Phi} = \boldsymbol{\Phi}\left(q_1, q_2\right) = \boldsymbol{\Phi}\left(\boldsymbol{q}\right) = \boldsymbol{0}$$

[例]

写出系统的约束方程



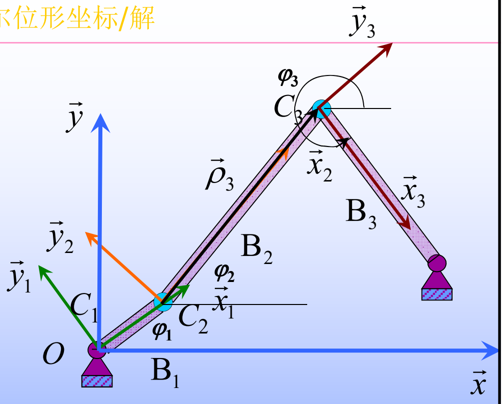
[解]

系统参考基与刚体连体基的定义

系统位形坐标的定义

$$\boldsymbol{q}=(\varphi_1 \quad \varphi_2 \quad \varphi_3)^{\mathrm{T}}$$

杆与杆和杆与机座的铰点限制各杆位形坐标的独立性



？如何建立各杆位形坐标间的关系

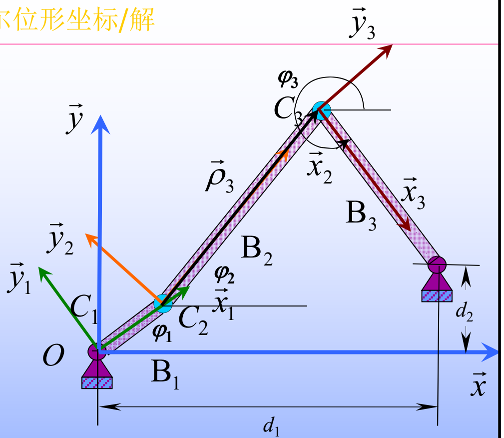
[解]

系统参考基与刚体连体基的定义

系统位形坐标的定义

$$\boldsymbol{q}=(\varphi_1 \quad \varphi_2 \quad \varphi_3)^{\mathrm{T}}$$

杆与杆和杆与机座的铰点限制各杆位形坐标的独立性



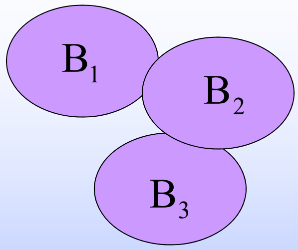
$$\boldsymbol{\Phi}(\boldsymbol{q})=\begin{pmatrix}\Phi_1(\boldsymbol{q})\\ \Phi_2(\boldsymbol{q})\end{pmatrix}\begin{matrix}= & l_1\cos\varphi_1+l_2\cos\varphi_2+l_3\cos\varphi_3-d_1=0\\ = & l_1\sin\varphi_1+l_2\sin\varphi_2+l_3\sin\varphi_3-d_2=0\end{matrix}$$

$$\boldsymbol{\Phi}=\boldsymbol{\Phi}(\varphi_1,\varphi_2,\varphi_3)=\boldsymbol{\Phi}(\boldsymbol{q})=\boldsymbol{0}$$

- 约束方程的一般形式

由N个刚体构成的刚体系

$$\mathrm{B}_i \quad i = 1, \cdots, N$$



描述刚体系的位形坐标

$$\boldsymbol{q} = \left(\boldsymbol{q}_1^{\mathrm{T}} \quad \cdots \quad \boldsymbol{q}_N^{\mathrm{T}}\right)^{\mathrm{T}}$$ 坐标个数 $\boldsymbol{n}$

约束方程－ $\boldsymbol{n}$ 个位形坐标的非线性代数方程组

$$\boldsymbol{\Phi} \overset{\text{def}}{=} \boldsymbol{\Phi}(\boldsymbol{q}, t) = \boldsymbol{0}$$

$$\begin{cases} \Phi_1 = \Phi_1(\boldsymbol{q}, t) = 0 \\ \vdots \\ \Phi_s = \Phi_s(\boldsymbol{q}, t) = 0 \end{cases}$$

其中 $\boldsymbol{\Phi} = \left(\Phi_1 \quad \cdots \quad \Phi_s\right)^{\mathrm{T}}$

方程的个数 $\boldsymbol{s}$

- 约束方程的分类

完整约束与非完整约束

$$\boldsymbol{\Phi} = \boldsymbol{\Phi}(\boldsymbol{q}, t) = \boldsymbol{0}$$ 完整约束

$$\boldsymbol{\Phi} = \boldsymbol{\Phi}(\boldsymbol{q}, \dot{\boldsymbol{q}}, t) = \boldsymbol{0}$$ 非完整约束：约束方程显含速度项

定常约束与非定常约束

$$\boldsymbol{\Phi} = \boldsymbol{\Phi}(\boldsymbol{q}) = \boldsymbol{0}$$ 定常完整约束

$$\boldsymbol{\Phi} = \boldsymbol{\Phi}(\boldsymbol{q}, t) = \boldsymbol{0}$$ 非定常完整约束：约束方程显含时间项

双面约束与单面约束

$$\boldsymbol{\Phi} = \boldsymbol{\Phi}(\boldsymbol{q}) = \boldsymbol{0}$$ 双面定常完整约束

$$\boldsymbol{\Phi} = \boldsymbol{\Phi}(\boldsymbol{q}) > \boldsymbol{0}$$ 单面定常完整约束

系统的自由度

- 定义

描述刚体系的位形坐标个数为 $\boldsymbol{n}$　　$\boldsymbol{q} = (q_1 \quad \cdots \quad q_n)^{\mathrm{T}}$

由于约束的存在，描述刚体系位形的独立坐标个数称为系统的自由度，记为δ

- 完整约束的系统的自由度

独立的完整约束方程个数为 $\boldsymbol{s}$

$$\boldsymbol{\Phi} = \boldsymbol{\Phi}(\boldsymbol{q}, t) = \boldsymbol{0} \qquad \boldsymbol{\Phi} = (\Phi_1 \quad \cdots \quad \Phi_s)^{\mathrm{T}}$$

系统的自由度为　$\delta = n - s$

- 系统的独立位形坐标与非独立位形坐标

独立的完整约束方程个数为 $\boldsymbol{s}$

$$\boldsymbol{\Phi} = \boldsymbol{\Phi}(\boldsymbol{q}, t) = \boldsymbol{0} \qquad \boldsymbol{\Phi} = (\Phi_1 \quad \cdots \quad \Phi_s)^{\mathrm{T}}$$

系统的自由度为　$\delta = n - s$

系统 $\boldsymbol{n}$ 个位形坐标中有 δ是独立的

独立坐标　记为 $\boldsymbol{w}$

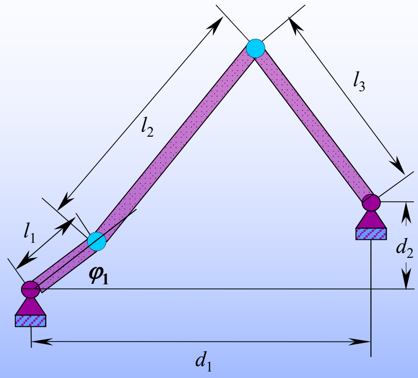
系统其余的 $\boldsymbol{s}$ 个位形坐标取决于独立坐标

非独立坐标　记为 $\boldsymbol{u}$

$$\boldsymbol{q} = (q_1 \quad \cdots \quad q_n)^{\mathrm{T}} \xrightarrow{\text{坐标重新排列}} \boldsymbol{q} = (\boldsymbol{w}^{\mathrm{T}} \quad \boldsymbol{u}^{\mathrm{T}})^{\mathrm{T}}$$

[例]

写出系统的自由度数，定义独立与非独立坐标



[解]

系统参考基与刚体连体基的定义

系统位形坐标的定义

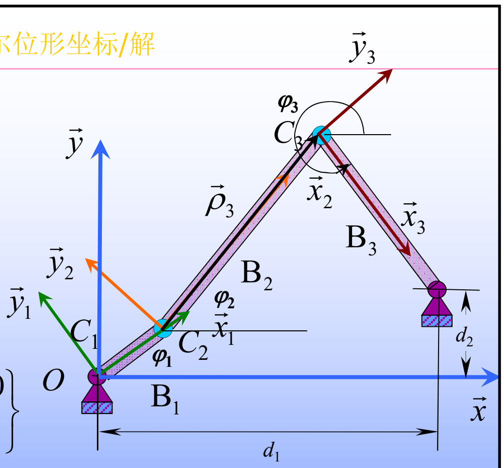
$$\boldsymbol{q} = (\varphi_1 \quad \varphi_2 \quad \varphi_3)^{\mathrm{T}} \qquad n = 3$$

约束方程

$$\left.\begin{aligned} l_1\cos\varphi_1 + l_2\cos\varphi_2 + l_3\cos\varphi_3 - d_1 = 0 \\ l_1\sin\varphi_1 + l_2\sin\varphi_2 + l_3\sin\varphi_3 - d_2 = 0 \end{aligned}\right\}$$

独立的完整约束方程的个数 s=2

系统的自由度 $\delta = n - s = 1$

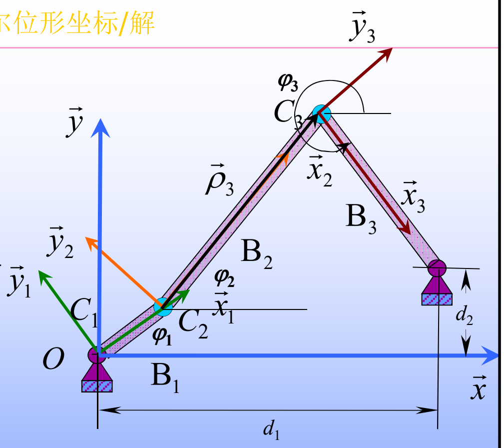


系统位形坐标

$$\boldsymbol{q}=(\varphi_1 \quad \varphi_2 \quad \varphi_3)^{\mathrm{T}}$$

约束方程

$$\left.\begin{aligned} l_1\cos\varphi_1+l_2\cos\varphi_2+l_3\cos\varphi_3-d_1&=0\\ l_1\sin\varphi_1+l_2\sin\varphi_2+l_3\sin\varphi_3-d_2&=0\end{aligned}\right\}$$



系统的自由度

$$\delta=n-s=1$$

独立坐标个数为 δ=1

定义独立坐标阵 $w=(\varphi_1)$

非独立坐标个数为 s=2

定义非独立坐标阵 $\boldsymbol{u}=(\varphi_2 \quad \varphi_3)^{\mathrm{T}}$

$$\boldsymbol{q}=\left(w \quad \boldsymbol{u}^{\mathrm{T}}\right)^{\mathrm{T}}$$

建立约束方程的方法

$$\boldsymbol{\Phi}=\boldsymbol{\Phi}(\boldsymbol{q},t)=\mathbf{0} \qquad \boldsymbol{\Phi}=(\Phi_1 \quad \cdots \quad \Phi_s)^{\mathrm{T}}$$

- 总体法

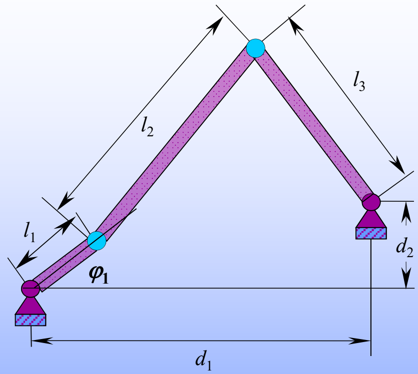
根据系统一般情况下构形的几何关系建立系统的约束方程

- 局部法

以系统中一对邻接刚体为单元，根据连接关系建立它们位形坐标间的关系，然而将它们组集

[例]

利用总体法写出系统的约束方程



[解]

系统参考基与刚体连体基的定义

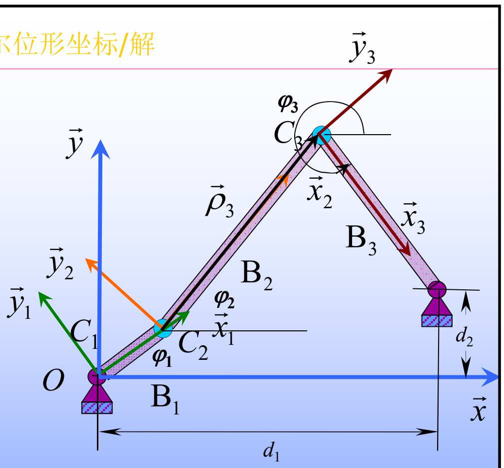
系统位形坐标的定义

$$\boldsymbol{q} = (\varphi_1 \quad \varphi_2 \quad \varphi_3)^{\mathrm{T}}$$

杆与杆和杆与机座的铰点限制

各杆位形坐标的独立性

总体上保证系统机座的相对位置（$\boldsymbol{d_1}, \boldsymbol{d_2}$）

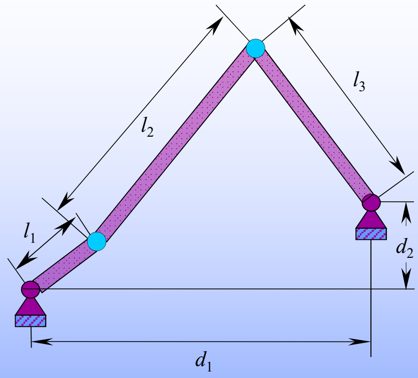


约束方程
$$\left.\begin{aligned} l_1\cos\varphi_1 + l_2\cos\varphi_2 + l_3\cos\varphi_3 - d_1 = 0 \\ l_1\sin\varphi_1 + l_2\sin\varphi_2 + l_3\sin\varphi_3 - d_2 = 0 \end{aligned}\right\}$$

$$\delta = n - s = 1$$

[例]

利用局部法写出系统的约束方程



[解]

系统的构成：

刚体个数 N=3　　铰的个数 N_J=4

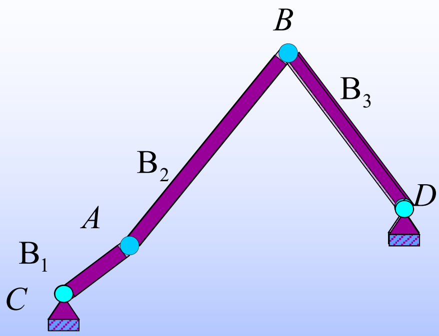
系统可分解为4个刚体偶对：

铰A：$B_1 \sim B_2$

铰B：$B_2 \sim B_3$

铰D：　B_3 ~支座

铰C：支座 ~ B_1



[解]

系统的构成：

刚体个数 N=3　铰的个数 N_J=4

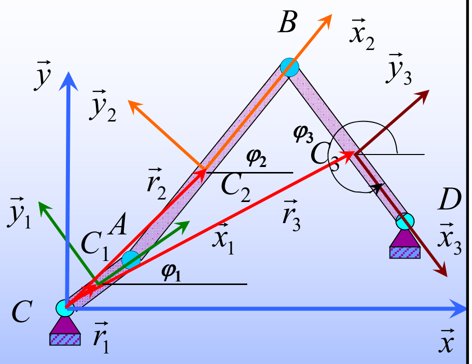
系统可分解为4个刚体偶对：

铰A：$B_1 \sim B_2$

铰B：$B_2 \sim B_3$

铰C：支座 ~ B_1

铰D：B_3 ~支座



建立参考基　$C-\vec{e}$

建立刚体连体基　$C_i-\vec{e}_i$　$i=1,\cdots,3$　连体基基点在各杆的中点

定义刚体的笛卡尔位形坐标

$$\mathrm{B}_i:\quad \boldsymbol{q}_i=\left(\boldsymbol{r}_i^{\mathrm{T}}\quad \varphi_i\right)^{\mathrm{T}}=\left(x_i\quad y_i\quad \varphi_i\right)^{\mathrm{T}}\qquad i=1,\cdots,3$$

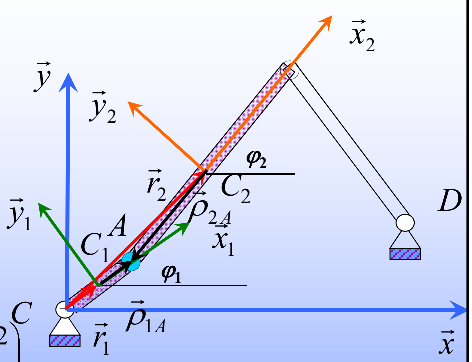
铰A：$B_1 \sim B_2$的约束方程

几何关系：在运动的过程中
铰 A 是两刚体的共点

$$\left(\vec{r}_2+\vec{\rho}_{2A}\right)-\left(\vec{r}_1+\vec{\rho}_{1A}\right)=\vec{0}$$

在公共基上的坐标式

$$\left(\boldsymbol{r}_2+\boldsymbol{A}^2\boldsymbol{\rho}'_{2A}\right)-\left(\boldsymbol{r}_1+\boldsymbol{A}^1\boldsymbol{\rho}'_{1A}\right)=0$$



$$\boldsymbol{r}_1=\begin{pmatrix}x_1\\y_1\end{pmatrix}\quad \boldsymbol{r}_2=\begin{pmatrix}x_2\\y_2\end{pmatrix}\quad \boldsymbol{\rho}'_{1A}=\begin{pmatrix}l_1/2\\0\end{pmatrix}\quad \boldsymbol{\rho}'_{2A}=\begin{pmatrix}-l_2/2\\0\end{pmatrix}$$

$$\boldsymbol{A}^1=\begin{pmatrix}\cos\varphi_1 & -\sin\varphi_1\\ \sin\varphi_1 & \cos\varphi_1\end{pmatrix}$$

$$\boldsymbol{A}^2=\begin{pmatrix}\cos\varphi_2 & -\sin\varphi_2\\ \sin\varphi_2 & \cos\varphi_2\end{pmatrix}$$

$$A:\ \begin{cases}x_2-\dfrac{l_2}{2}\cos\varphi_2-x_1-\dfrac{l_1}{2}\cos\varphi_1=0\\[2mm] y_2-\dfrac{l_2}{2}\sin\varphi_2-y_1-\dfrac{l_1}{2}\sin\varphi_1=0\end{cases}$$

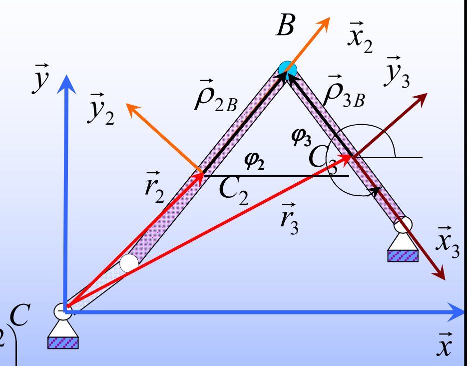
铰B：B_2~ B_3的约束方程

几何关系：在运动的过程中铰 B 是两刚体的共点

$$(\vec{r}_3+\vec{\rho}_{3B})-(\vec{r}_2+\vec{\rho}_{2B})=\vec{0}$$

在公共基上的坐标式

$$(\boldsymbol{r}_3+\boldsymbol{A}^3\boldsymbol{\rho}'_{3B})-(\boldsymbol{r}_2+\boldsymbol{A}^2\boldsymbol{\rho}'_{2B})=0$$



$$\boldsymbol{r}_2=\begin{pmatrix}x_2\\y_2\end{pmatrix}\quad \boldsymbol{r}_3=\begin{pmatrix}x_3\\y_3\end{pmatrix}\quad \boldsymbol{\rho}'_{2B}=\begin{pmatrix}l_2/2\\0\end{pmatrix}\quad \boldsymbol{\rho}'_{3B}=\begin{pmatrix}-l_3/2\\0\end{pmatrix}$$

$$\boldsymbol{A}^2=\begin{pmatrix}\cos\varphi_2 & -\sin\varphi_2\\ \sin\varphi_2 & \cos\varphi_2\end{pmatrix}$$

$$\boldsymbol{A}^3=\begin{pmatrix}\cos\varphi_3 & -\sin\varphi_3\\ \sin\varphi_3 & \cos\varphi_3\end{pmatrix}$$

$$B:\begin{cases}x_3-\dfrac{l_3}{2}\cos\varphi_3-x_2-\dfrac{l_2}{2}\cos\varphi_2=0\\ y_3-\dfrac{l_3}{2}\sin\varphi_3-y_2-\dfrac{l_2}{2}\sin\varphi_2=0\end{cases}$$

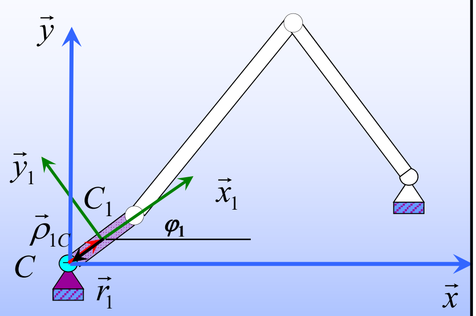
铰C：支座 ~ B_1的约束方程

几何关系：在运动的过程中铰 C 是支座与刚体 B_1 共点

$$(\vec{r}_1+\vec{\rho}_{1C})=\vec{0}$$

在公共基上的坐标式

$$\boldsymbol{r}_1+\boldsymbol{A}^1\boldsymbol{\rho}'_{1C}=0$$



$$\boldsymbol{r}_1=\begin{pmatrix}x_1\\y_1\end{pmatrix}\quad \boldsymbol{\rho}'_{1C}=\begin{pmatrix}-l_1/2\\0\end{pmatrix}$$

$$\boldsymbol{A}^1=\begin{pmatrix}\cos\varphi_1 & -\sin\varphi_1\\ \sin\varphi_1 & \cos\varphi_1\end{pmatrix}$$

$$C:\begin{cases}x_1-\dfrac{l_1}{2}\cos\varphi_1=0\\ y_1-\dfrac{l_1}{2}\sin\varphi_1=0\end{cases}$$

铰D： B_3~支座的约束方程

几何关系：在运动的过程中
铰 D 是刚体 B_3与支座共点

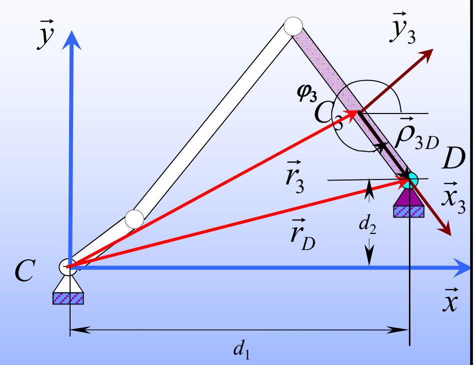
$$\vec{r}_D-(\vec{r}_3+\vec{\rho}_{3D})=\vec{0}$$

在公共基上的坐标式

$$\boldsymbol{r}_D-(\boldsymbol{r}_3+\boldsymbol{A}^3\boldsymbol{\rho}'_{3D})=0$$

$$\boldsymbol{r}_D=\begin{pmatrix}d_1\\d_2\end{pmatrix}\quad \boldsymbol{r}_3=\begin{pmatrix}x_3\\y_3\end{pmatrix}\quad \boldsymbol{\rho}'_{3D}=\begin{pmatrix}l_3/2\\0\end{pmatrix}$$

$$\boldsymbol{A}^3=\begin{pmatrix}\cos\varphi_3 & -\sin\varphi_3\\ \sin\varphi_3 & \cos\varphi_3\end{pmatrix}$$



$$D:\begin{cases}d_1-x_3-\dfrac{l_3}{2}\cos\varphi_3=0\\ d_2-y_3-\dfrac{l_3}{2}\sin\varphi_3=0\end{cases}$$

系统的约束方程

局部约束方程组集

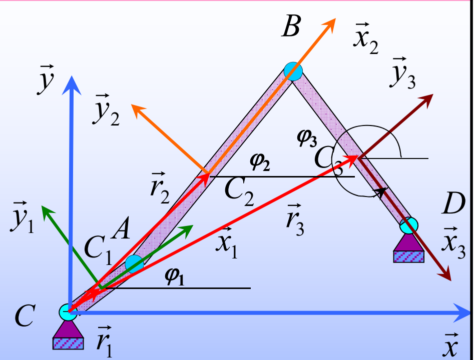
$$A:\begin{cases}x_2-\dfrac{l_2}{2}\cos\varphi_2-x_1-\dfrac{l_1}{2}\cos\varphi_1=0\\ y_2-\dfrac{l_2}{2}\sin\varphi_2-y_1-\dfrac{l_1}{2}\sin\varphi_1=0\end{cases}$$

$$B:\begin{cases}x_3-\dfrac{l_3}{2}\cos\varphi_3-x_2-\dfrac{l_2}{2}\cos\varphi_2=0\\ y_3-\dfrac{l_3}{2}\sin\varphi_3-y_2-\dfrac{l_2}{2}\sin\varphi_2=0\end{cases}$$

$$C:\begin{cases}x_1-\dfrac{l_1}{2}\cos\varphi_1=0\\ y_1-\dfrac{l_1}{2}\sin\varphi_1=0\end{cases}$$

$$D:\begin{cases}d_1-x_3-\dfrac{l_3}{2}\cos\varphi_3=0\\ d_2-y_3-\dfrac{l_3}{2}\sin\varphi_3=0\end{cases}$$

独立约束方程的个数 **s=8**



系统笛卡尔位形坐标

B_i： $\boldsymbol{q}_i=(x_i\quad y_i\quad \varphi_i)^{\mathrm{T}}\quad i=1,\cdots,3$

系统自由度 $\delta=n-s=9-8=1$

- 两种建立约束方程方法的比较

$$\boldsymbol{\Phi}=\boldsymbol{\Phi}(\boldsymbol{q},t)=\mathbf{0} \qquad \boldsymbol{\Phi}=\begin{pmatrix}\Phi_1 & \cdots & \Phi_s\end{pmatrix}^{\mathrm{T}}$$

总体法　依赖技巧：

坐标的定义

几何关系的分析

方程个数少

局部法　程式化：

坐标统一（3*N*个笛卡儿坐标）

统一以邻接刚体为单元建立约束方程

方程个数偏大

两种方法建立的约束方程，不影响系统的自由度

速度约束方程

系统的位形坐标个数为 n 　　$\boldsymbol{q}=\begin{pmatrix}q_1 & \cdots & q_n\end{pmatrix}^{\mathrm{T}}$

独立的完整约束方程个数为 s

$$\boldsymbol{\Phi}=\boldsymbol{\Phi}(\boldsymbol{q},t)=\mathbf{0} \qquad \boldsymbol{\Phi}=\begin{pmatrix}\Phi_1 & \cdots & \Phi_s\end{pmatrix}^{\mathrm{T}}$$

约束方程对时间的导数—速度约束方程

$$\dot{\boldsymbol{\Phi}}\overset{\text{def}}{=}\boldsymbol{\Phi}_q\dot{\boldsymbol{q}}+\boldsymbol{\Phi}_t=\mathbf{0} \qquad \boldsymbol{\Phi}_q\dot{\boldsymbol{q}}=-\boldsymbol{\Phi}_t$$

$$\boldsymbol{\Phi}_q=\begin{pmatrix}\dfrac{\partial\Phi_1}{\partial q_1} & \cdots & \dfrac{\partial\Phi_1}{\partial q_n}\\ \vdots & & \vdots\\ \dfrac{\partial\Phi_s}{\partial q_1} & \cdots & \dfrac{\partial\Phi_s}{\partial q_n}\end{pmatrix}\in R^{s\times n} \qquad \boldsymbol{\Phi}_t=\begin{pmatrix}\dfrac{\partial\Phi_1}{\partial t}\\ \vdots\\ \dfrac{\partial\Phi_s}{\partial t}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\dfrac{\partial\Phi_1}{\partial t} & \cdots & \dfrac{\partial\Phi_s}{\partial t}\end{pmatrix}^{\mathrm{T}}\in R^{s\times 1}$$

- 约束方程雅可比矩阵

$$\dot{\boldsymbol{\Phi}} = \boldsymbol{\Phi}_q \dot{\boldsymbol{q}} + \boldsymbol{\Phi}_t = \boldsymbol{0} \qquad \boldsymbol{\Phi}_q \dot{\boldsymbol{q}} = -\boldsymbol{\Phi}_t$$

$$\boldsymbol{\Phi}_q = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial \boldsymbol{\Phi}_1}{\partial q_1} & \cdots & \dfrac{\partial \boldsymbol{\Phi}_1}{\partial q_n} \\ \vdots & & \vdots \\ \dfrac{\partial \boldsymbol{\Phi}_s}{\partial q_1} & \cdots & \dfrac{\partial \boldsymbol{\Phi}_s}{\partial q_n} \end{pmatrix} \in R^{s\times n}$$

约束方程的雅可比矩阵

元素是位形坐标与时间的函数

$$\boldsymbol{\Phi}_q(\boldsymbol{q}, t)$$

$$\boldsymbol{\Phi}_t = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial \Phi_1}{\partial t} & \cdots & \dfrac{\partial \Phi_s}{\partial t} \end{pmatrix}^{\mathrm{T}} \in R^{s\times 1}$$

速度约束方程的右项

元素是位形坐标与时间的函数

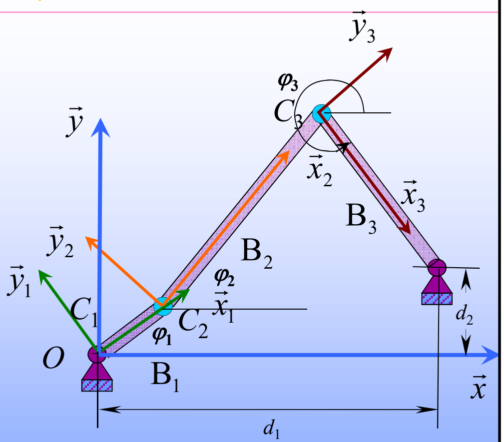
$$\boldsymbol{\Phi}_t(\boldsymbol{q}, t)$$

定常约束 $\boldsymbol{\Phi}_t = 0$

速度约束方程为位形速度的线性代数方程组

[例]

写出系统的速度约束方程



刚体系位形的描述，约束方程/约束方程/速度约束方程

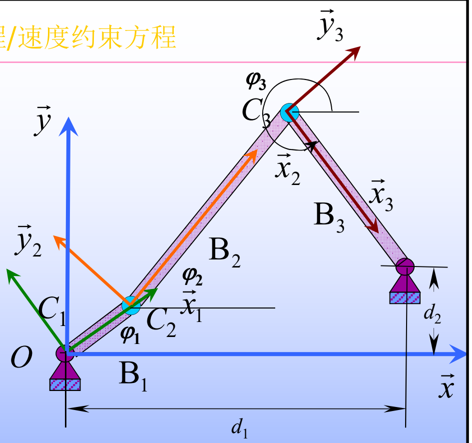
[解1]

位形坐标 $\boldsymbol{q}=(\varphi_1 \quad \varphi_2 \quad \varphi_3)^{\mathrm{T}}$

约束方程

$$\varPhi_1 = l_1\cos\varphi_1 + l_2\cos\varphi_2 + l_3\cos\varphi_3 - d_1 = 0$$

$$\varPhi_2 = l_1\sin\varphi_1 + l_2\sin\varphi_2 + l_3\sin\varphi_3 - d_2 = 0$$



约束方程雅可比矩阵

$$\boldsymbol{\varPhi}_q = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial \varPhi_1}{\partial \varphi_1} & \dfrac{\partial \varPhi_1}{\partial \varphi_2} & \dfrac{\partial \varPhi_1}{\partial \varphi_3} \\ \dfrac{\partial \varPhi_2}{\partial \varphi_1} & \dfrac{\partial \varPhi_2}{\partial \varphi_2} & \dfrac{\partial \varPhi_2}{\partial \varphi_3} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} -l_1\sin\varphi_1 & -l_2\sin\varphi_2 & -l_3\sin\varphi_3 \\ l_1\cos\varphi_1 & l_2\cos\varphi_2 & l_3\cos\varphi_3 \end{pmatrix}$$

速度约束方程右项

$$\boldsymbol{\varPhi}_t = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial \varPhi_1}{\partial t} \\ \dfrac{\partial \varPhi_2}{\partial t} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

定常约束

刚体系位形的描述，约束方程/约束方程/速度约束方程

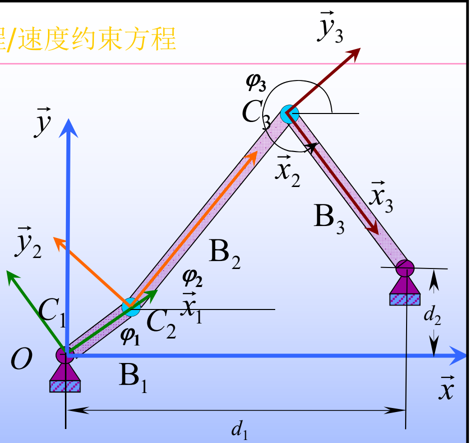
位形坐标 $\boldsymbol{q}=(\varphi_1 \quad \varphi_2 \quad \varphi_3)^{\mathrm{T}}$

约束方程

$$\varPhi_1 = l_1\cos\varphi_1 + l_2\cos\varphi_2 + l_3\cos\varphi_3 - d_1 = 0$$

$$\varPhi_2 = l_1\sin\varphi_1 + l_2\sin\varphi_2 + l_3\sin\varphi_3 - d_2 = 0$$

$$\boldsymbol{\varPhi}_q = \begin{pmatrix} -l_1\sin\varphi_1 & -l_2\sin\varphi_2 & -l_3\sin\varphi_3 \\ l_1\cos\varphi_1 & l_2\cos\varphi_2 & l_3\cos\varphi_3 \end{pmatrix}$$



$$\boldsymbol{\varPhi}_t = 0$$

速度约束方程 $\quad \boldsymbol{\varPhi}_q\dot{\boldsymbol{q}} = -\boldsymbol{\varPhi}_t$

$$\begin{pmatrix} -l_1\sin\varphi_1 & -l_2\sin\varphi_2 & -l_3\sin\varphi_3 \\ l_1\cos\varphi_1 & l_2\cos\varphi_2 & l_3\cos\varphi_3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \dot{\varphi}_1 \\ \dot{\varphi}_2 \\ \dot{\varphi}_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

速度约束方程为位形速度的线性代数方程组

[解2]

位形坐标 $\boldsymbol{q}=\begin{pmatrix}\varphi_1 & \varphi_2 & \varphi_3\end{pmatrix}^{\mathrm{T}}$

约束方程

$$\left.\begin{aligned} l_1\cos\varphi_1+l_2\cos\varphi_2+l_3\cos\varphi_3-d_1=0 \\ l_1\sin\varphi_1+l_2\sin\varphi_2+l_3\sin\varphi_3-d_2=0 \end{aligned}\right\}$$

直接对时间求导

$$\left.\begin{aligned} -l_1\dot{\varphi}_1\sin\varphi_1-l_2\dot{\varphi}_2\sin\varphi_2-l_3\dot{\varphi}_3\sin\varphi_3=0 \\ l_1\dot{\varphi}_1\cos\varphi_1+l_2\dot{\varphi}_2\cos\varphi_2+l_3\dot{\varphi}_3\cos\varphi_3=0 \end{aligned}\right\}$$

整理

$$\underbrace{\begin{pmatrix}-l_1\sin\varphi_1 & -l_2\sin\varphi_2 & -l_3\sin\varphi_3 \\ l_1\cos\varphi_1 & l_2\cos\varphi_2 & l_3\cos\varphi_3\end{pmatrix}}_{\boldsymbol{\Phi}_q}\begin{pmatrix}\dot{\varphi}_1 \\ \dot{\varphi}_2 \\ \dot{\varphi}_3\end{pmatrix}=\underbrace{\begin{pmatrix}0 \\ 0\end{pmatrix}}_{-\boldsymbol{\Phi}_t}$$

速度项的系数阵 $\boldsymbol{\Phi}_q$　　　$-\boldsymbol{\Phi}_t$ 与速度无关项

求速度约束方程雅可比矩阵与右项的另一种方法

加速度约束方程

系统的位形坐标个数为 $\boldsymbol{n}$　　$\boldsymbol{q}=\begin{pmatrix}q_1 & \cdots & q_n\end{pmatrix}^{\mathrm{T}}$

速度约束方程个数为 $\boldsymbol{s}$

$$\dot{\boldsymbol{\Phi}}=\boldsymbol{\Phi}_q\dot{\boldsymbol{q}}+\boldsymbol{\Phi}_t=\boldsymbol{0} \qquad \boldsymbol{\Phi}_q\dot{\boldsymbol{q}}=-\boldsymbol{\Phi}_t$$

速度约束方程对时间的导数—加速度约束方程

$$\ddot{\boldsymbol{\Phi}}=\boldsymbol{\Phi}_q\ddot{\boldsymbol{q}}+\underline{\dot{\boldsymbol{\Phi}}_q}\dot{\boldsymbol{q}}+\underline{\dot{\boldsymbol{\Phi}}_t} \qquad \boldsymbol{\Phi}_q(\boldsymbol{q},t)$$

$$=\boldsymbol{\Phi}_q\ddot{\boldsymbol{q}}+\underbrace{(\boldsymbol{\Phi}_q\dot{\boldsymbol{q}})_q\dot{\boldsymbol{q}}+\boldsymbol{\Phi}_{qt}\dot{\boldsymbol{q}}+\boldsymbol{\Phi}_{tq}\dot{\boldsymbol{q}}+\boldsymbol{\Phi}_{tt}}_{-\boldsymbol{\gamma}} \qquad \boldsymbol{\Phi}_t(\boldsymbol{q},t)$$

$$\ddot{\boldsymbol{\Phi}}\overset{\mathrm{def}}{=}\boldsymbol{\Phi}_q\ddot{\boldsymbol{q}}-\boldsymbol{\gamma}=\boldsymbol{0} \qquad \boldsymbol{\Phi}_q\ddot{\boldsymbol{q}}=\boldsymbol{\gamma}$$

$$\boldsymbol{\gamma}\overset{\mathrm{def}}{=}-(\boldsymbol{\Phi}_q\dot{\boldsymbol{q}})_q\dot{\boldsymbol{q}}-2\boldsymbol{\Phi}_{qt}\dot{\boldsymbol{q}}-\boldsymbol{\Phi}_{tt}\in\Re^{s\times1}$$

加速度约束方程

- 系统的位坐标个数为 $\boldsymbol{n}$　　$\boldsymbol{q} = (q_1 \quad \cdots \quad q_n)^{\mathrm{T}}$

  加速度约束方程个数为 $\boldsymbol{s}$

$$\ddot{\boldsymbol{\Phi}} \overset{\text{def}}{=} \boldsymbol{\Phi}_q \ddot{\boldsymbol{q}} - \boldsymbol{\gamma} = \mathbf{0} \qquad \boldsymbol{\Phi}_q \ddot{\boldsymbol{q}} = \boldsymbol{\gamma}$$

$$\boldsymbol{\gamma} \overset{\text{def}}{=} -(\boldsymbol{\Phi}_q \dot{\boldsymbol{q}})_q \dot{\boldsymbol{q}} - 2\cancel{\boldsymbol{\Phi}_{qt}} \dot{\boldsymbol{q}} - \cancel{\boldsymbol{\Phi}_{tt}} \in \Re^{s\times 1}$$

加速度约束方程的右项

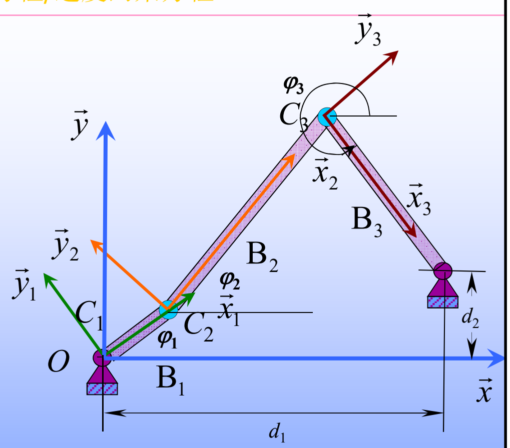
元素是位形坐标，速度与时间的函数　$\boldsymbol{\gamma}(\boldsymbol{q}, \dot{\boldsymbol{q}}, t)$

定常约束　$\boldsymbol{\gamma} = -(\boldsymbol{\Phi}_q \dot{\boldsymbol{q}})_q \dot{\boldsymbol{q}}$

加速度约束方程为位形加速度的线性代数方程组

[例]

写出系统的加速度约束方程



[解1] 位形坐标 $\boldsymbol{q}=(\varphi_1 \quad \varphi_2 \quad \varphi_3)^{\mathrm{T}}$

速度约束方程

$$\begin{pmatrix} -l_1\sin\varphi_1 & -l_2\sin\varphi_2 & -l_3\sin\varphi_3 \\ l_1\cos\varphi_1 & l_2\cos\varphi_2 & l_3\cos\varphi_3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix}\dot\varphi_1\\ \dot\varphi_2\\ \dot\varphi_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}$$

$$\boldsymbol{\Phi}_q\dot{\boldsymbol{q}}=\begin{pmatrix} -l_1\dot\varphi_1\sin\varphi_1-l_2\dot\varphi_2\sin\varphi_2-l_3\dot\varphi_3\sin\varphi_3 \\ l_1\dot\varphi_1\cos\varphi_1+l_2\dot\varphi_2\cos\varphi_2+l_3\dot\varphi_3\cos\varphi_3 \end{pmatrix}$$

$$\frac{\partial}{\partial\varphi_1}$$

$$(\boldsymbol{\Phi}_q\dot{\boldsymbol{q}})_q=\begin{pmatrix} -l_1\dot\varphi_1\cos\varphi_1 & -l_2\dot\varphi_2\cos\varphi_2 & -l_3\dot\varphi_3\cos\varphi_3 \\ -l_1\dot\varphi_1\sin\varphi_1 & -l_2\dot\varphi_2\sin\varphi_2 & -l_3\dot\varphi_3\sin\varphi_3 \end{pmatrix}$$

$$\boldsymbol{\gamma}=-(\boldsymbol{\Phi}_q\dot{\boldsymbol{q}})_q\dot{\boldsymbol{q}}=\begin{pmatrix} -l_1\dot\varphi_1\cos\varphi_1 & -l_2\dot\varphi_2\cos\varphi_2 & -l_3\dot\varphi_3\cos\varphi_3 \\ -l_1\dot\varphi_1\sin\varphi_1 & -l_2\dot\varphi_2\sin\varphi_2 & -l_3\dot\varphi_3\sin\varphi_3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix}\dot\varphi_1\\ \dot\varphi_2\\ \dot\varphi_3\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix} l_1\dot\varphi_1^2\cos\varphi_1+l_2\dot\varphi_2^2\cos\varphi_2+l_3\dot\varphi_3^2\cos\varphi_3 \\ l_1\dot\varphi_1^2\sin\varphi_1+l_2\dot\varphi_2^2\sin\varphi_2+l_3\dot\varphi_3^2\sin\varphi_3 \end{pmatrix}$$

[解1] 位形坐标 $\boldsymbol{q}=(\varphi_1 \quad \varphi_2 \quad \varphi_3)^{\mathrm{T}}$

速度约束方程

$$\begin{pmatrix} -l_1\sin\varphi_1 & -l_2\sin\varphi_2 & -l_3\sin\varphi_3 \\ l_1\cos\varphi_1 & l_2\cos\varphi_2 & l_3\cos\varphi_3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix}\dot\varphi_1\\ \dot\varphi_2\\ \dot\varphi_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}$$

$$\boldsymbol{\gamma}=\begin{pmatrix} l_1\dot\varphi_1^2\cos\varphi_1+l_2\dot\varphi_2^2\cos\varphi_2+l_3\dot\varphi_3^2\cos\varphi_3 \\ l_1\dot\varphi_1^2\sin\varphi_1+l_2\dot\varphi_2^2\sin\varphi_2+l_3\dot\varphi_3^2\sin\varphi_3 \end{pmatrix}$$

加速度约束方程 $\boldsymbol{\Phi}_q\ddot{\boldsymbol{q}}=\boldsymbol{\gamma}$

$$\begin{pmatrix} -l_1\sin\varphi_1 & -l_2\sin\varphi_2 & -l_3\sin\varphi_3 \\ l_1\cos\varphi_1 & l_2\cos\varphi_2 & l_3\cos\varphi_3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix}\ddot\varphi_1\\ \ddot\varphi_2\\ \ddot\varphi_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix} l_1\dot\varphi_1^2\cos\varphi_1+l_2\dot\varphi_2^2\cos\varphi_2+l_3\dot\varphi_3^2\cos\varphi_3 \\ l_1\dot\varphi_1^2\sin\varphi_1+l_2\dot\varphi_2^2\sin\varphi_2+l_3\dot\varphi_3^2\sin\varphi_3 \end{pmatrix}$$

[解2]

位形坐标

$$\boldsymbol{q}=(\varphi_1 \quad \varphi_2 \quad \varphi_3)^{\mathrm{T}}$$

速度约束方程

$$\left.\begin{aligned} -l_1\dot{\varphi}_1\sin\varphi_1-l_2\dot{\varphi}_2\sin\varphi_2-l_3\dot{\varphi}_3\sin\varphi_3=0 \\ l_1\dot{\varphi}_1\cos\varphi_1+l_2\dot{\varphi}_2\cos\varphi_2+l_3\dot{\varphi}_3\cos\varphi_3=0 \end{aligned}\right\}$$

直接对时间求导

$$\left.\begin{aligned} -l_1\ddot{\varphi}_1\sin\varphi_1-l_2\ddot{\varphi}_2\sin\varphi_2-l_3\ddot{\varphi}_3\sin\varphi_3\overbrace{-l_1\dot{\varphi}_1^2\cos\varphi_1-l_2\dot{\varphi}_2^2\cos\varphi_2-l_3\dot{\varphi}_3^2\cos\varphi_3}^{-\gamma}=0 \\ l_1\ddot{\varphi}_1\cos\varphi_1+l_2\ddot{\varphi}_2\cos\varphi_2+l_3\ddot{\varphi}_3\cos\varphi_3-l_1\dot{\varphi}_1^2\sin\varphi_1-l_2\dot{\varphi}_2^2\sin\varphi_2-l_3\dot{\varphi}_3^2\sin\varphi_3=0 \end{aligned}\right\}$$

整理

$$\begin{pmatrix} -l_1\sin\varphi_1 & -l_2\sin\varphi_2 & -l_3\sin\varphi_3 \\ l_1\cos\varphi_1 & l_2\cos\varphi_2 & l_3\cos\varphi_3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix}\ddot{\varphi}_1\\ \ddot{\varphi}_2\\ \ddot{\varphi}_3\end{pmatrix}=\underbrace{\begin{pmatrix} l_1\dot{\varphi}_1^2\cos\varphi_1+l_2\dot{\varphi}_2^2\cos\varphi_2+l_3\dot{\varphi}_3^2\cos\varphi_3 \\ l_1\dot{\varphi}_1^2\sin\varphi_1+l_2\dot{\varphi}_2^2\sin\varphi_2+l_3\dot{\varphi}_3^2\sin\varphi_3 \end{pmatrix}}_{\gamma}$$

与加速度无关项

求加速度约束方程右项的一种方法