应用随机过程

张　波　　　商　豪

中国人民大学　统计学院

第8章　随机积分

- 8.1 关于随机游动的积分
- 8.2 关于Brown运动的积分
- 8.3 Itô积分过程
- 8.4 Itô公式
- 8.5 随机微分方程
- 8.5 Black-Scholes模型

本章的目的是引入关于Brown运动的积分，讨论其性质并给出在随机分析及金融学中有着重要应用的Itô公式.

§8.1 关于随机游动的积分

我们从讨论关于简单的随机游动的积分开始.设$X_1, X_2, \cdots$ 是独立的随机变量，$P\{X_i = 1\} = P\{X_i = -1\} = \frac{1}{2}$，令$S_n$表示相应的游动

$$S_n = X_1 + X_2 + \cdots + X_n$$

我们可以这样看这组独立随机变量，X_n为第n次公平赌博的结果($X_n = 1$为赢1元，$X_n = -1$为输掉1元). $\mathcal{F}_n = \sigma(X_1, \cdots, X_n)$(由$\{X_i, 1 \le i \le n\}$生成的$\sigma$代数)，也可以理解为包含 $X_1, \cdots, X_n$的信息.令B_n是$\mathcal{F}_{n-1}$可测的随机变量序列，比如它表示第n次赌博时所下赌注，则它只能利用第$n-1$次及以前的信息，而不能利用第n次赌博的结果.于是到时刻n的收益Z_n为

$$Z_n = \sum_{i=1}^{n} B_i X_i = \sum_{i=1}^{n} B_i (S_i - S_{i-1}) = \sum_{i=1}^{n} B_i \Delta S_i$$

这里$\Delta S_i = S_i - S_{i-1}$，$S_0 = 0$. 我们称$Z_n$为$B_n$关于$S_n$的积分.

容易看出$\{Z_n\}$是关于$\mathcal{F}_n$的鞅，即，若$m < n$，则

$$E[Z_n|\mathcal{F}_m] = Z_m$$

特别地，$E[Z_n] = 0$. 此外，如果假定$E[B_n^2] < \infty$，则

$$Var[Z_n] = E[Z_n^2] = \sum_{i=1}^{n} E[B_i^2]$$

事实上，

$$Z_n^2 = \sum_{i=1}^{n} B_i^2 X_i^2 + 2 \sum_{1 \le i < j \le n} B_i B_j X_i X_j$$

再注意到$X_i^2 = 1$，如果$i < j$，则B_i, X_i, B_j都是$\mathcal{F}_{j-1}$可测的，且X_j独立于$\mathcal{F}_{j-1}$，于是由定理??，得

$$E[B_i B_j X_i X_j] = E[E[B_i B_j X_i X_j|\mathcal{F}_{j-1}]] = E[B_i B_j X_i E(X_j)] = 0$$

§8.2　关于Brown运动的积分

本节定义关于Brown运动的积分$\int_0^T X(t)dB(t)$ (或简记为$\int XdB$)，这里$\{B(t)\}$是一维标准Brown运动，有时也记为$\{W_t\}$. 首先考虑一个非随机的简单过程$\{X(t)\}$，即$X(t)$是一个简单函数 (不依赖于$B(t)$). 由简单函数的定义，存在$[0,T]$的分割$0 = t_0 < t_1 < \cdots < t_n = T$及常数$c_0, c_1, \cdots, c_{n-1}$，使得

$$X(t) = \begin{cases} c_0, & \text{如果} t = 0 \\ c_i, & \text{如果} t_i < t \leq t_{i+1},\ i = 0, 1, \cdots, n-1 \end{cases}$$

或表示为

$$X(t) = c_0 I_0(t) + \sum_{i=0}^{n-1} c_i I_{(t_i, t_{i+1}]}(t) \tag{8.2.1}$$

于是，可定义其积分为

$$\int_0^T X(t)dB(t) = \sum_{i=0}^{n-1} c_i[B(t_{i+1}) - B(t_i)] \tag{8.2.2}$$

由Brown运动的独立增量性可知，公式(8.2.2)所定义的积分是Gauss分布的随机变量，其均值为0，方差为

$$
\begin{aligned}
Var(\int XdB) &= E\left[\sum_{i=0}^{n-1} c_i(B(t_{i+1}) - B(t_i))\right]^2 \\
&= E\left[\sum_{i=0}^{n-1}\sum_{j=0}^{n-1} c_i c_j [B(t_{i+1}) - B(t_i)][B(t_{j+1}) - B(t_j)]\right] \\
&= \sum_{i=0}^{n-1}\sum_{j=0}^{n-1} c_i c_j E[(B(t_{i+1}) - B(t_i))(B(t_{j+1}) - B(t_j))] \\
&= \sum_{i=0}^{n-1} c_i^2 (t_{i+1} - t_i)
\end{aligned}
$$

用取极限的方法可以将这一定义推广到一般的非随机函数$X(t)$.但是我们要定义的是随机过程的积分，因此将简单函数中的常数c_i用随机变量ξ_i来代替，并要求ξ_i是$\mathcal{F}_{t_i}$可测的．这里$\mathcal{F}_t=\sigma\{B(u),0\le u\le t\}$.于是,由Brown运动的鞅性质得

$$E[\xi_i(B(t_{i+1})-B(t_i))|\mathcal{F}_{t_i}]=\xi_i E[B(t_{i+1})-B(t_i)|\mathcal{F}_{t_i}]=0$$

因此

$$E[\xi_i(B(t_{i+1})-B(t_i))]=0.$$

定义 8.2.1 设$\{X(t), 0 \le t \le T\}$是一个简单随机过程，即存在$[0,T]$的分割$0 = t_0 < t_1 < \cdots < t_n = T$，随机变量$\xi_{-1}, \xi_0, \cdots, \xi_{n-1}$使得 ξ_{-1}是常数，ξ_i依赖于$B(t), t \le t_i$，但不依赖于$B(t), t > t_i, i = 0, 1, \cdots, n-1$，并且

$$X(t) = \xi_{-1} I_0(t) + \sum_{i=0}^{n-1} \xi_i I_{(t_i, t_{i+1}]}(t) \tag{8.2.3}$$

此时，**Itô**积分$\int_0^T X dB$定义为

$$\int_0^T X(t) dB(t) = \sum_{i=0}^{n-1} \xi_i (B(t_{i+1}) - B(t_i)) \tag{8.2.4}$$

简单过程的积分是一个随机变量，满足下述性质.

(1) 线性　如果$X(t),Y(t)$是简单过程，则

$$\int_0^T (\alpha X(t)+\beta Y(t))dB(t) = \alpha \int_0^T X(t)dB(t)+\beta \int_0^T Y(t)dB(t)$$

这里α,β是常数.

(2)

$$\int_0^T I_{[a,b]}(t)dB(t) = B(b\wedge T) - B(a\vee 0)$$

其中$I_{[a,b]}(t)$是区间$[a,b]$的示性函数.

(3) 零均值性　如果$E[\xi_i^2] < \infty, (i = 0,1,\cdots,n-1)$，则

$$E[\int_0^T X(t)dB(t)] = 0$$

(4) 等距性　如果$E[\xi_i^2] < \infty, (i = 0, 1, \cdots, n-1)$，则

$$E\left[\int_0^T X(t)dB(t)\right]^2 = \int_0^T E[X^2(t)]dt$$

证明：性质(1),(2)和(3)是简单的，读者可自行证之，这里只证明性质(4)．利用 Cauchy-Schwarz不等式，得到

$$E[|\xi_i(B(t_{i+1}) - B(t_i))|] \le \sqrt{E(\xi_i^2)E[B(t_{i+1}) - B(t_i)]^2} < \infty$$

于是

$$
\begin{aligned}
Var[\int_0^T XdB] &= E\left[\sum_{i=0}^{n-1}\xi_i(B(t_{i+1})-B(t_i))\right]^2 \\
&= E\left[\sum_{i=0}^{n-1}\xi_i(B(t_{i+1})-B(t_i))\cdot\sum_{j=0}^{n-1}\xi_j(B(t_{j+1})-B(t_j))\right] \\
&= \sum_{i=0}^{n-1}E[\xi_i^2(B(t_{i+1})-B(t_i))^2]+ \\
&\quad 2\sum_{i<j}E[\xi_i\xi_j(B(t_{i+1})-B(t_i))(B(t_{j+1})-B(t_j))] \quad (8.2.5)
\end{aligned}
$$

由Brown运动的独立增量性以及关于ξ_i的假定，利用定理1.5.7(1)，有

$$E[\xi_i\xi_j(B(t_{i+1})-B(t_i))(B(t_{j+1})-B(t_j))]=0$$

所以，式(8.2.5)中的最后一项为零.由Brown运动的鞅性质，得

$$
\begin{aligned}
Var[\int_0^T XdB] &= \sum_{i=0}^{n-1} E[\xi_i^2(B(t_{i+1}) - B(t_i))^2] \\
&= \sum_{i=0}^{n-1} E\left[E\left(\xi_i^2(B(t_{i+1}) - B(t_i))^2|\mathcal{F}_{t_i}\right)\right] \\
&= \sum_{i=0}^{n-1} E\left[\xi_i^2 E\left((B(t_{i+1}) - B(t_i))^2|\mathcal{F}_{t_i}\right)\right] \\
&= \sum_{i=0}^{n-1} E[\xi_i^2](t_{i+1} - t_i) \\
&= \int_0^T E[X^2(t)]dt.
\end{aligned}
$$

∎

有了前面的准备，我们现在可以将上述随机积分的定义扩展到更一般的可测适应随机过程类.

定义 8.2.2 设$\{X(t), t \geq 0\}$是随机过程，$\{\mathcal{F}_t, t \geq 0\}$是$\sigma$代数流，如果对 $\forall t$, $X(t)$是$\mathcal{F}_t$可测的，则称$\{X(t)\}$是$\{\mathcal{F}_t\}$适应的

记

$$\mathcal{V} = \left\{ h, h\text{是定义在}[0,\infty)\text{上的可测的适应过程，满足}E[\int_0^T h^2(s)ds] < \infty \right\}$$

我们将随机积分的定义按下述步骤扩展到$\mathcal{V}$:

首先，令$h \in \mathcal{V}$有界，并且对每个$\omega \in \Omega$, $h(\cdot, \omega)$连续.则存在简单过程$\{\phi_n\}$，其中

$$\phi_n = \sum_j h(t_j, \omega) \cdot 1_{[t_j, t_{j+1})}(t) \in \mathcal{V}$$

使得当$n \to \infty$时，对每个$\omega \in \Omega$，

$$\int_0^T (h - \phi_n)^2 dt \to 0$$

因此由有界收敛定理得$E[\int_0^T (h - \phi_n)^2 dt] \to 0$.

其次，令$h \in \mathcal{V}$有界，可以证明存在$h_n \in \mathcal{V}$有界,且$\forall \omega \in \Omega, \forall n$，$h_n(\cdot, \omega)$连续，使得

$$E[\int_0^T (h - h_n)^2 dt] \to 0 \tag{8.2.6}$$

事实上，不妨设$|h(t,\omega)| \le M, \forall (t,\omega)$．定义

$$h_n(t,\omega) = \int_0^t \psi_n(s-t) h(s,\omega) ds$$

这里ψ_n是$\mathbb{R}$上非负连续函数，使得对所有的$x \notin (-\frac{1}{n}, 0)$，$\psi_n(x) = 0$且$\int_{-\infty}^{\infty} \psi_n(x) dx = 1$．则对每个$\omega \in \Omega$，$h_n(\cdot,\omega)$连续且$|h_n(t,\omega)| \le M$．由$h \in \mathcal{V}$可以看出$h_n \in \mathcal{V}$，并且

当$n \to \infty$时，对每个$\omega \in \Omega$,有

$$\int_0^T (h_n(s,\omega) - h(s,\omega))^2 ds \to 0$$

因此再次利用有界收敛定理得式(8.2.6).

GoBack
FullScreen
Close
Quit

最后，对任意的$f \in \mathcal{V}$，存在有界列$h_n \in \mathcal{V}$，使得

$$E[\int_0^T (f(t,\omega) - h_n(t,\omega))^2 dt] \to 0$$

事实上，只要令

$$h_n(t,\omega) = \begin{cases} -n, & \text{若 } f(t,\omega) < -n \\ f(t,\omega), & \text{若 } -n \le f(t,\omega) \le n \\ n, & \text{若 } f(t,\omega) > n \end{cases}$$

利用控制收敛定理即得.

现在，我们可以完成Itô积分$\int_0^T f(t)dB(t), f \in \mathcal{V}$的定义如下.

定义 8.2.3 设$f \in \mathcal{V}(0,T)$，则f的Itô积分定义为

$$\int_0^T f(t,\omega)dB_t(w) = \lim_{n\to\infty}\int_0^T \phi_n(t,\omega)dB_t(\omega), (L^2(P)\text{中极限}) \tag{8.2.7}$$

这里$\{\phi_n\}$是初等随机过程的序列，使得当$n \to \infty$时，

$$E\left[\int_0^T (f(t,\omega) - \phi_n(t,\omega))^2 dt\right] \to 0. \tag{8.2.8}$$

注：在实际问题中，我们常常遇到的过程并不满足$\mathcal{V}$中的可积性条件而仅仅满足下述的$\mathcal{V}^*$中的条件.事实上，Itô积分的定义可以推广到更广泛的过程$\{h(s) : s \geq 0\}$ 类:

$$\mathcal{V}^* = \left\{h : h\text{为}\mathcal{B}\times\mathcal{F}\text{可测的适应过程，且}\forall T > 0\text{满足}\int_0^T h^2(s)ds < \infty\ a.s.\right\}.$$

例 8.2.1 设f是连续函数，考虑$\int_0^1 f(B(t))dB(t)$. 因为$B(t)$有连续的路径，所以$f(B(t))$也在$[0,1]$上连续，从而$\int_0^1 f(B(t))dB(t)$有定义. 然而根据f的不同，这个积分可以有(或没有)有限的矩. 例如：

(1) 取$f(t)=t$, 则由于$\int_0^1 E[B^2(t)]dt<\infty$, $E[\int_0^1 B(t)dB(t)]=0$并且由性质8.2.1(3) $\sim$ (4)有

$$E\left[\int_0^1 B(t)dB(t)\right]^2=\int_0^1 E[B^2(t)]dt=\frac{1}{2}$$

(2) 取$f(t)=e^{t^2}$，此时考虑$\int_0^1 e^{B^2(t)}dB(t)$. 虽然积分存在，但由于当$t\geq\frac{1}{4}$时, $E[e^{2B^2(t)}]=\infty$，所以$\int_0^1 E[e^{2B^2(t)}]dt=\infty$，即$\int_0^1 E[f^2(B(t))]dt<\infty$不成立.说明积分的二阶矩不存在.

例 8.2.2 求积分$J=\int_0^1 tdB(t)$的均值与方差.

因为$\int_0^1 t^2dt<\infty$**，且**t**是**$\mathcal{F}_t=\sigma\{B(s),0\le s\le t\}$**适应的，所以Itô积分**$J$**是适定的并且其均值为**$E[J]=0$**，方差为**$E[J^2]=\int_0^1 t^2dt=\frac{1}{3}$.

例 8.2.3 估计使得积分$\int_0^1(1-t)^{-\alpha}dB(t)$适定的$\alpha$的值.

因为只要$\int_0^1(1-t)^{-2\alpha}dt<\infty$**，上述Itô积分就适定，所以只要**$\alpha<\frac{1}{2}$**即可**.

§8.3 Itô积分过程

假设对任意实数$T>0$，$X\in\mathcal{V}^*$，那么$\forall t\le T$，积分$\int_0^t X(s)dB(s)$是适定的. 因为对任意固定的t，$\int_0^t X(s)dB(s)$是一个随机变量，所以作为上限t的函数，它定义了一个随机过程$\{Y(t)\}$,其中

$$Y(t)=\int_0^t X(s)dB(s) \tag{8.3.1}$$

可以证明，Itô积分$Y(t)$存在连续的样本路径，即存在一个连续随机过程$\{Z(t)\}$，使得对所有的 t，有$Y(t)=Z(t)$, $a.s.$.因此，从现在起我们所讨论的积分都假定是其连续的样本路径.本节将讨论这一积分过程的各种随机性质.

现在我们可以证明其鞅性质.

定理 8.3.1 设$X(t) \in \mathcal{V}^*$，并且$\int_0^\infty E[X^2(s)]ds < \infty$，则

$$Y(t) = \int_0^t X(s)dB(s), \quad 0 \leq t \leq T$$

是零均值的连续的平方可积鞅(即$\sup_{t \leq T} E[Y^2(t)] < \infty$).

证明: 由定义8.2.3后注，可知$Y(t) = \int_0^T X(s)dB(s), 0 \leq t \leq T$是适定的，并且具有一阶及二阶矩.如果$\{X(t)\}$是简单过程，则由式(8.2) 之同样的证明方法可得

$$E\left[\int_s^t X(u)dB(u)|\mathcal{F}_s\right] = 0, \quad \forall s < t$$

于是

$$E[Y(t)|\mathcal{F}_s] = E\left[\int_0^t X(u)dB(u)|\mathcal{F}_s\right]$$
$$= \int_0^s X(u)dB(u) + E\left[\int_s^t X(u)dB(u)|\mathcal{F}_s\right]$$
$$= \int_0^s X(u)dB(u) = Y(s)$$

所以$\{Y(t)\}$是鞅. 由等距性可得其二阶矩

$$E\left[\int_0^t X(s)dB(s)\right]^2 = \int_0^t E[X^2(s)]ds$$

∎

GoBack
FullScreen
Close
Quit

推论 8.3.1 对任意有界的Borel可测函数f(即对任意$a \in \mathbb{R}$, 有 $\{x \in R,\ f(x) \le a\} \in \mathcal{B}(R)$), $\int_0^t f(B(s))dB(s)$是平方可积鞅.

证明: $X(t) = f(B(t))$是可测适应的, 并且有常数$K > 0$使得$|f(x)| < K$, 于是$\int_0^T E[f^2(B(s))]ds \le KT$. 由定理8.3.1, 此命题得证. ∎

上述定理提供了构造鞅的方法. 在8.2节中我们已经证明, 非随机的简单过程的 Itô积分是正态分布的随机变量. 更一般地, 我们有下述定理.

定理 8.3.2 如果X是非随机的，且$\int_0^T X^2(s)ds < \infty$，则$\forall t$, $Y(t) = \int_0^t X(s)dB(s)$ 是正态分布的随机变量.即$\{Y(t), 0 \le t \le T\}$是Gauss过程，其均值函数为零，协方差函数为

$$Cov(Y(t), Y(t+u)) = \int_0^t X^2(s)ds, \quad u \ge 0$$

$\{Y(t)\}$也是平方可积鞅.

证明：因为被积函数是非随机的，所以$\int_0^t E[X^2(s)]ds = \int_0^t X^2(s)ds < \infty$. **由定理**8.3.1 **知**$Y$**具有零均值，再由积分及**$Y(t)$**的鞅性质，有**

$$
\begin{aligned}
& E\left[\int_0^t X(s)dB(s)\int_t^{t+u} X(s)dB(s)\right] \\
= & E\left[E\left[\int_0^t X(s)dB(s)\int_t^{t+u} X(s)dB(s) \mid \mathcal{F}_t\right]\right] \\
= & E\left[\int_0^t X(s)dB(s)E\left[\int_t^{t+u} X(s)dB(s) \mid \mathcal{F}_t\right]\right] \\
= & 0
\end{aligned}
$$

因此

$$
\begin{aligned}
&Cov(Y(t), Y(t+u)) \\
&= E\left[\int_0^t X(s)dB(s) \int_0^{t+u} X(s)dB(s)\right] \\
&= E\left[\int_0^t X(s)dB(s) \left(\int_0^t X(s)dB(s) + \int_t^{t+u} X(s)dB(s)\right)\right] \\
&= E\left[\int_0^t X(s)dB(s)\right]^2 \\
&= \int_0^t E[X^2(s)]ds \\
&= \int_0^t X^2(s)ds \qquad (8.3.2)
\end{aligned}
$$

∎

例 8.3.1 根据上述定理可得$J = \int_0^t sdB(s) \sim N(0, \frac{t^3}{3})$.

下面讨论Itô积分的二次变差.

定义 8.3.1 设$Y(t)=\int_0^t X(s)dB(s), 0\le t\le T$是Itô积分，如果在依概率收敛的意义下，极限

$$\lim_{\delta_n\to 0}\sum_{i=0}^{n-1}|Y(t_{i+1}^n)-Y(t_i^n)|^2 \tag{8.3.3}$$

当$\{t_i^n\}_{i=0}^n$遍取$[0,t]$的分割，且其模 $\delta_n=\max_{0\le i\le n-1}(t_{i+1}^n-t_i^n)\to 0$ 时存在，则称此极限为Y的二次变差，记为$[Y,Y](t)$.

定理 8.3.3 设$Y(t)=\int_0^t X(s)dB(s), 0\le t\le T$是Itô积分，则$Y$的二次变差为

$$[Y,Y](t)=\int_0^t X^2(s)ds \tag{8.3.4}$$

证明：首先考虑$\{X(s)\}$为简单过程的情形，对一般情形，我们可以用简单过程逼近的方法得到，所以这里我们只证明$\{X(s)\}$为简单过程的情形. 不妨假定$X(s)$在$[0,T]$上只取两个不同的值，取任意有限多个值的情形可类似证之.为简单起见，设$T=1$，$X(t)$在$[0,1/2]$上取ξ_0，在$(1/2,1]$上取ξ_1，即

$$X(t)=\xi_0 I_{[0,\frac{1}{2}]}(t)+\xi_1 I_{(\frac{1}{2},1]}(t)$$

于是

$$Y(t)=\int_0^t X(s)dB(s)=\begin{cases}\xi_0 B(t), & \text{如果} \quad t\le\frac{1}{2}\\ \xi_0 B(\frac{1}{2})+\xi_1(B(t)-B(\frac{1}{2})), & \text{如果} \quad t>\frac{1}{2}\end{cases}$$

因此，对$[0,t]$的任何分割，有

$$Y(t_{i+1}^n)-Y(t_i^n)=\begin{cases}\xi_0(B(t_{i+1}^n)-B(t_i^n)), & \text{如果} \quad t_i^n<t_{i+1}^n\le\frac{1}{2}\\ \xi_1(B(t_{i+1}^n)-B(t_i^n)), & \text{如果} \quad \frac{1}{2}\le t_i^n<t_{i+1}^n\end{cases}$$

当$t\le\frac{1}{2}$时，

$$\begin{aligned}[Y,Y](t)&=\lim\sum_{i=0}^{n-1}(Y(t_{i+1}^n)-Y(t_i^n))^2\\&=\xi_0^2\lim\sum_{i=0}^{n-1}(B(t_{i+1}^n)-B(t_i^n))^2\\&=\xi_0^2[B,B](t)=\xi_0^2t=\int_0^t X^2(s)ds\end{aligned}$$

GoBack
FullScreen
Close
Quit

当$t > \frac{1}{2}$时，

$$
\begin{aligned}
[Y,Y](t) &= \lim \sum_{i=0}^{n-1} (Y(t_{i+1}^n) - Y(t_i^n))^2 \\
&= \xi_0^2 \lim \sum_{t_i < \frac{1}{2}} (B(t_{i+1}^n) - B(t_i^n))^2 + \xi_1^2 \lim \sum_{t_i > \frac{1}{2}} (B(t_{i+1}^n) - B(t_i^n))^2 \\
&= \xi_0^2 [B,B](\frac{1}{2}) + \xi_1^2 [B,B]((\frac{1}{2}, t]) = \int_0^t X^2(s) ds
\end{aligned}
$$

这里的极限都是当$\delta_n \to 0$时在依概率收敛意义下的极限. ∎

对关于同一个Brown运动$\{B(t)\}$的两个不同的Itô积分$Y_1(t)=\int_0^t X_1(s)dB(s)$和 $Y_2(t)=\int_0^t X_2(s)dB(s)$，由于$Y_1(t)+Y_2(t)=\int_0^t (X_1(s)+X_2(s))dB(s)$，我们可以定义$Y_1$和$Y_2$的二次协变差：

$$[Y_1,Y_2](t)=\frac{1}{2}([Y_1+Y_2,Y_1+Y_2](t)-[Y_1,Y_1](t)-[Y_2,Y_2](t))$$

由定理8.3.3，有

$$[Y_1,Y_2](t)=\int_0^t X_1(s)X_2(s)ds.$$

§8.4 Itô公式

Itô公式，随机分析中的变量替换公式或链锁法则，是随机分析中的一个主要工具，许多重要的公式，例如Dynkin公式，Feynman-Kac公式以及分部积分公式，都是由Itô公式导出的.

因为Brown运动在$[0,t]$上的二次变差为t，即在依概率收敛的意义下

$$\lim_{\delta_n\to 0}\sum_{i=0}^{n-1}(B(t_{i+1}^n)-B(t_i^n))^2=t$$

这里$\{t_i^n\}$是$[0,t]$的分割，$\delta_n=\max_{0\le i\le n-1}(t_{i+1}^n-t_i^n)$.

GoBack
FullScreen
Close
Quit

上式从形式上可表示为

$$\int_0^t (dB(s))^2 = \int_0^t ds = t$$

或

$$(dB(t))^2 = dt$$

更一般地，我们有以下定理.

定理 8.4.1 设g是有界连续函数，$\{t_i^n\}$是$[0,t]$的分割，则对任何$\theta_i^n \in (B(t_{i+1}^n), B(t_i^n))$ (即$B(t_i^n), B(t_{i+1}^n)$之间的任意值)，依概率收敛意义下的极限

$$\lim_{\delta_n \to 0} \sum_{i=0}^{n-1} g(\theta_i^n)(B(t_{i+1}^n) - B(t_i^n))^2 = \int_0^t g(B(s))ds \tag{8.4.1}$$

证明：首先取$\theta_i^n = B(t_i^n)$，由g的连续性和积分的定义，有

$$\sum_{i=0}^{n-1} g(B(t_i^n))(t_{i+1}^n - t_i^n) \to \int_0^t g(B(s))ds \qquad (8.4.2)$$

我们证明

$$\sum_{i=0}^{n-1} g(B(t_i^n))(B(t_{i+1}^n)-B(t_i^n))^2-\sum_{i=0}^{n-1} g(B(t_i^n))(t_{i+1}^n-t_i^n) \to 0 \qquad (8.4.3)$$

在L^2中成立. 记$\Delta B_i = B(t_{i+1}^n) - B(t_i^n)$，$\Delta t_i = t_{i+1}^n - t_i^n$，则由Brown运动的独立增量性和取条件期望的方法得到

$$
\begin{aligned}
& E\left[\sum_{i=0}^{n-1} g(B(t_i^n))((\Delta B_i)^2-\Delta t_i)\right]^2 \\
&= E\left[E\left(\sum_{i=0}^{n-1} g^2(B(t_i^n))((\Delta B_i)^2-\Delta t_i)^2 | \mathcal{F}_{t_i}\right)\right] \\
&= E\left[\sum_{i=0}^{n-1} g^2(B(t_i^n))E\left(((\Delta B_i)^2-\Delta t_i)^2 | \mathcal{F}_{t_i}\right)\right] \\
&= 2E\left[\sum_{i=0}^{n-1} g^2(B(t_i^n))(\Delta t_i)^2\right] \\
&\leq 2\delta_n E[\sum_{i=0}^{n-1} g^2(B(t_i^n))\Delta t_i] \to 0, \quad (\text{当}\delta_n \to 0\text{时})
\end{aligned}
$$

因此，在均方收敛的意义下

$$\sum_{i=0}^{n-1} g(B(t_i^n))((\Delta B_i)^2 - \Delta t_i) \to 0$$

这样，$\sum_{i=0}^{n-1} g(B(t_i^n))(B(t_{i+1}^n)-B(t_i^n))^2$与 $\sum_{i=0}^{n-1} g(B(t_i^n))(t_{i+1}^n-t_i^n)$有相同的极限$\int_0^t g(B(s))ds$.

对任意$\theta_i^n \in (B(t_{i+1}^n), B(t_i^n))$，当$\delta_n \to 0$时，

$$\sum_{i=0}^{n-1} (g(\theta_i^n) - g(B(t_i^n)))(\Delta B_i)^2$$

$$\leq \max_i((g(\theta_i^n) - g(B(t_i^n))) \sum_{i=0}^{n-1} (B(t_{i+1}^n) - B(t_i^n))^2 \quad (8.4.4)$$

GoBack

FullScreen

Close

Quit

由g和B的连续性，我们有 $\max_i((g(\theta_i^n)-g(B(t_i^n)))\to 0$， $a.s.$. 由Brown运动二次变差的定义得$\sum_{i=0}^{n-1}(B(t_{i+1}^n)-B(t_i^n))^2\to t$. 于是当$\delta_n\to 0$时，$\sum_{i=0}^{n-1}(g(\theta_i^n)-g(B(t_i^n)))(\Delta B_i)^2\to 0$. 因此 $\sum_{i=0}^{n-1}g(\theta_i^n)(\Delta B_i)^2$与$\sum_{i=0}^{n-1}g(B(t_i^n))(\Delta B_i)^2$具有相同的依概率收敛意义的极限 $\int_0^t g(B(s))ds$. ∎

现在，我们给出Itô公式.

定理 8.4.2 如果f是二次连续可微函数，则对任何t，有

$$f(B(t)) = f(0) + \int_0^t f'(B(s))dB(s) + \frac{1}{2}\int_0^t f''(B(s))ds \tag{8.4.5}$$

证明：易见式(8.4.5)中的积分都是适定的.取$[0,t]$的分割$\{t_i^n\}$，有

$$f(B(t)) = f(0) + \sum_{i=0}^{n-1} [f(B(t_{i+1}^n)) - f(B(t_i^n))]$$

对$f(B(t_{i+1}^n)) - f(B(t_i^n))$应用Taylor公式得

$$f(B(t_{i+1}^n))-f(B(t_i^n)) = f'(B(t_i^n))(B(t_{i+1}^n)-B(t_i^n))+\frac{1}{2}f''(\theta_i^n)(B(t_{i+1}^n)-B(t_i^n))$$

其中$\theta_i^n \in (B(t_{i+1}^n), B(t_i^n))$.于是

$$f(B(t)) = f(0) + \sum_{i=0}^{n-1} f'(B(t_i^n))(B(t_{i+1}^n) - B(t_i^n)) + \frac{1}{2}\sum_{i=0}^{n-1} f''(\theta_i^n)(B(t_{i+1}^n) - B(t_i^n))^2 \qquad (8.4.6)$$

令$\delta_n \to 0$取极限，则式(8.4.6)中的第一个和收敛于Itô积分$\int_0^t f'(B(s))dB(s)$.利用定理8.4.1可知式(8.4.6)中的第二个和收敛于$\int_0^t f''(B(s))ds$. ∎

式(8.4.5)称为Brown运动的Itô公式，由此看出，Brown运动的函数可以表示为一个Itô积分加上一个具有有界变差的绝对连续过程.我们称这类过程为Itô过程，严格地，我们有下面定义.

定义 8.4.1 如果过程$\{Y(t), 0 \le t \le T\}$可以表示为

$$Y(t) = Y(0) + \int_0^t \mu(s)ds + \int_0^t \sigma(s)dB(s), \quad 0 \le t \le T \tag{8.4.7}$$

其中过程$\{\mu(t)\}$和$\{\sigma(t)\}$满足

(1) $\mu(t)$是适应的并且$\int_0^T |\mu(t)|dt < \infty, \quad a.s.$

(2) $\sigma(t) \in \mathcal{V}^*$.

则称$\{Y(t)\}$为**Itô过程**.

GoBack
FullScreen
Close
Quit

有时我们也将Itô过程(8.4.7)记为微分的形式

$$dY(t) = \mu(t)dt + \sigma(t)dB(t), \quad 0 \le t \le T \qquad (8.4.8)$$

其中函数$\mu(t)$称为漂移系数,$\sigma(t)$称为扩散系数,它们可以依赖于$Y(t)$或$B(t)$，甚至整个路径$\{B(s), s \le t\}$，（例如$\mu(t) = \cos(M(t) + t)$，这里 $M(t) = \max_{s \le t} B(s)$. 一类非常重要的情形是$\mu$与$\sigma(t)$ 仅仅通过$Y(t)$依赖于t，在这种情况下，式(8.4.8)应改写为

$$dY(t) = \mu(Y(t))dt + \sigma(Y(t))dB(t), \quad 0 \le t \le T \quad (8.4.9)$$

如果用微分形式表示，Itô公式(8.4.5)变为

$$d(f(B(t)) = f'(B(t))dB(t) + \frac{1}{2}f''(B(t))dt \qquad (8.4.10)$$

例 8.4.1 求$d(e^{B(t)})$.

解 对函数$f(x)=e^x$用Itô公式，此时$f'(x)=e^x, f''(x)=e^x$，所以

$$d(e^{B(t)})=e^{B(t)}dB(t)+\frac{1}{2}e^{B(t)}dt$$

于是，$X(t)=e^{B(t)}$具有随机微分形式

$$dX(t)=X(t)dB(t)+\frac{1}{2}X(t)dt$$

在金融应用中，股票的价格$S(t)$是用随机微分方程$dS(t) = \mu S(t)dt + \sigma S(t)dB(t)$描述的.如果$a(t)$表示在时刻$t$投资者的股票各股收益，那么在整个时间区间$[0, T]$内的收益为

$$\int_0^T a(t)dS(t) = \mu \int_0^T a(t)S(t)dt + \sigma \int_0^T a(t)S(t)dB(t)$$

下面定理给出了关于Itô过程的Itô公式

定理 8.4.3 设$\{X(t)\}$是由

$$dX(t) = \mu(t)dt + \sigma(t)dB(t)$$

给出的Itô过程，$g(t,x)$是$[0,\infty) \times \mathbb{R}$上的二次连续可微函数.则

$$\{Y(t) = g(t, X(t))\}$$

仍为Itô过程，并且

$$dY(t) = \frac{\partial g}{\partial t}(t, X(t))dt + \frac{\partial g}{\partial x}(t, X(t))dX(t) + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 g}{\partial x^2}(t, X(t)) \cdot (dX(t))^2 \tag{8.4.11}$$

其中$(dX(t))^2 = (dX(t)) \cdot (dX(t))$按照下面规则计算:

$$dt \cdot dt = dt \cdot dB(t) = dB(t) \cdot dt = 0, \quad dB(t) \cdot dB(t) = dt$$

即(8.4.11)可以改写为

$$dY(t) = \left(\frac{\partial g}{\partial t}(t, X(t)) + \frac{\partial g}{\partial x}(t, X(t))\mu(t)\right) dt + \frac{\partial g}{\partial x}(t, X(t))\sigma(t)dB(t) + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 g}{\partial x^2}(t, X(t))\sigma^2(t)dt$$

特别地，如果$g(t, x) = g(x)$只是x的函数，(8.4.12)简化为

$$dY(t) = [g'(X(t))\mu(t)+\frac{1}{2}g''(X(t))\sigma^2(t)]dt+g'(X(t))\sigma(t)dB(t) \tag{8.4.12}$$

§8.5 随机微分方程

上一节定义了Itô过程，本节我们将上节的随机积分的形式稍做一般化，考虑

$$dX_t = \mu(t, X_t)dt + \sigma(t, X_t)dB_t, \tag{8.5.1}$$

这里μ, σ是$[0, \infty) \times \mathbb{R}$上的函数，$\{B_t\}$是一维标准Brown运动. 这就是所谓的随机微分方程，式(8.5.1)的意义是下述的随机积分方程的微分形式.

$$X_t = X_0 + \int_0^t \mu(s, X_s)ds + \int_0^t \sigma(s, X_s)dB_s. \tag{8.5.2}$$

我们自然会问，随机微分方程的解是否存在？如果存在，是否唯一？有什么性质？

对于一般的随机微分方程来说，我们通常很难或者根本就无法求出显示解.为此，首先我们给出随机微分方程(8.5.1)解的定义，然后给出解的存在唯一性定理.

定义 8.5.1 设随机过程$\{X(t), t \geq 0\}$满足方程(8.5.2),则称$\{X(t), t \geq 0\}$为随机微分方程(8.5.1)在初始值$X(0) = X_0$的解.

由于随机微分方程的解是随机过程，所以本质上与常微分方程的解有很大差别.事实上，在随机分析中，有两种类型的解. 随机微分方程第一种类型的解与常微分方程的解的情形类似.给定漂移系数、扩散系数和随机微分项dB_t,我们确定一个随机过程 $\{X_t\}$，它的路径满足方程(8.5.2).显然，正如我们在(8.5.2)右端积分中所见到的，$\{X_t\}$依赖于时间t 及Brown运动$\{B_t\}$过去和现在的值.这种类型的解称为强解.

第二种类型的解就是所谓的弱解.对于弱解，我们确定一个过程 $\{\tilde{X}_t\}$:

$$\tilde{X}_t = f(t, \tilde{B}_t) \tag{8.5.3}$$

这里的Brown运动与$\{\tilde{X}_t\}$同时确定.由此对于随机微分方程的弱解来说，问题只需分别给定漂移系数和扩散系数.本书中我们讨论随机微分方程的解就是指第一种类型的强解.下面给出解的存在唯一性定理.

GoBack
FullScreen
Close
Quit

定理 8.5.1 设$[0,T]\times\mathbb{R}$上的函数$\mu(\cdot,\cdot),\sigma(\cdot,\cdot)$满足

(1) $\mu(t,x),\sigma(t,x)$二元可测,且 $|\mu(t,x)|^{1/2},|\sigma(t,x)|$平方可积;

(2)(Lipschitiz条件)存在常数$M>0$,使得对于$t\in[0,T]$

$$|\mu(t,x)-\mu(t,y)|+|\sigma(t,x)-\sigma(t,y)|\le M|x-y|,\ \forall x,y\in\mathbb{R}. \tag{8.5.4}$$

(3)(线性增长条件)存在常数$K>0$, 使得

$$|\mu(t,x)|+|\sigma(t,x)|\le M(1+|x|),\quad \forall t\in[0,T],\quad x\in\mathbb{R}. \tag{8.5.5}$$

(4)(初始条件)随机变量$X(t_0)$关于$\mathcal{F}_{t_0}$可测, 且$E[X^2(t_0)]<\infty$.

则存在唯一的具有连续路径的随机过程$\{X_t : t \geq t_0\} \in \mathcal{V}(t_0,\infty)$，满足随机微分方程

$$X_t = X_{t_0} + \int_{t_0}^{t} \mu(s,X_s)ds + \int_{t_0}^{t} \sigma(s,X_s)dB_s, \quad t \geq t_0. \tag{8.5.6}$$

并方程(8.5.6)的唯一解记为$\{X_t = X_t^{t_0,X_{t_0}}(\omega)\}$，表示解对初始时刻和初始值$X_{t_0}$的依赖.

§8.6 Black-Scholes模型

研究金融市场有一个基本的假定，就是无套利原则，即假定正常运行的市场没有套利机会(套利即指在开始时无资本，经过资本的市场运作后，变成有非负的随机资金，而且有正资金的概率为正.)因为在出现套利机会时，大量的投机者就会涌向市场进行套利，于是经过一个相对较短的混乱时期后，市场就会重返正常，即回复到无套利状态.在金融衍生证券的定价理论中，并不讨论这段短混乱时期，因此，在研究中普遍地设置无套利假定，这样的市场也称为可行市场.

设某种股票在t时刻的价格为S_t，并设它满足以下的Black-Scholes模型：

$$dS_t = S_t(\mu dt + \sigma dB_t)$$

其中常数$\mu, \sigma(> 0)$分别为股票的收益率与波动率.假定当前的银行利率为常数r，而且不随时间变化.

以这种股票为标的变量的欧式看涨期权，是指在$t=0$时甲方与乙方的一个合约，规定乙方有一个权利，能在时刻T以价格K从甲方买进股票.如果时刻T时股票的市场价格S_T低于K，乙方可以不买；而只要时刻T时股票的市场价格 S_T高于K，乙方就能获利.综合起来，乙方在时刻T净得随机收益为$X_T=(S_T-K)^+$，这种合约称为期权.因为乙方只能在最终时刻T作出选择，称为欧式期权.若乙方能在任意时刻作出选择，则称为美式期权.乙方希望S_T尽量大，以便有更多的获利，也就是有选择权的乙方盼望股票上涨，所以称为看涨期权.由于这个合约能给乙方带来X_T的随机收益，就需要乙方在$t=0$时刻用钱从甲方购买.这个合约在$t=0$时刻的价格，称为它的贴水或保证金.问题是如何确定这个合约在时刻$t<T$的价格(包括贴水).

另一种情况是，如果在$t=0$时刻甲方卖给乙方如下的合约，此合约规定乙方有一个权利，即能在时刻T以价格为K卖给甲方这种股票. 如果时刻T时股票的市场价格S_T高于K，乙方可以不卖；而只要时刻T时股票的市场价格 S_T低于K，乙方就能获利.综合起来，乙方在时刻T净得随机收益$X_T=(K-S_T)^+$.乙方希望S_T尽量小，以便有更多的获利，所以称为 看跌期权.如果乙方只能在最终时刻T行使期权，则称为欧式看跌期权；若乙方能在任意时刻T行使期权，则称为美式看跌期权.同样由于这个合约能给乙方带来X_T的随机收益，就需要乙方在$t=0$时刻用钱从甲方购买.这个合约在$t=0$时刻的价格，称为它的贴水或保证金.

比看涨期权与看跌期权更为一般的欧式期权是：甲方卖给乙方一个由证券组合组成的合约，此合约能在时刻T给乙方带来随机收益$f(S_T)$(称为欧式未定权益)，同样要给出这个合约在时刻$t < T$的价格贴水.

设在时刻T损益为$f(S_T)$的股票期权在时刻$t(< T)$的价格为$F(t, S_t)$，于是在$t = 0$时该期权的定价为$f_0 = F(0, S_0)$.下面用Itô公式求出$F(t, S_t)$所满足的偏微分方程，即著名的Black-Sholes方程.

假设期权卖出方在时刻t买进Δ份（Δ待定）股票以抵消在时刻T损失$F(S_T)$的风险，即他花费了$\Delta \cdot S_t$，于是在时刻t他的余额为

$$R_t = F(t, S_t) - \Delta \cdot S_t$$

到时刻$t + dt$，其价值变为

$$R_{t+dt} = F(t + dt, S_{t+dt}) - \Delta \cdot S_{t+dt}$$

利用Itô公式，有

$$\begin{aligned} dR_t &= dF(t,S_t) - \Delta\cdot dS_t \\ &= \frac{\partial F}{\partial t}dt + \frac{\partial F}{\partial x}S_t(\mu dt + \sigma dB_t) + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 F}{\partial x^2}S_t^2\sigma^2 dt - \Delta\cdot S_t(\mu dt + \sigma dB_t) \\ &= (\frac{\partial F}{\partial x} - \Delta)\sigma S_t dB_t + [\frac{\partial F}{\partial t} + \mu S_t(\frac{\partial F}{\partial x} - \Delta) + \frac{1}{2}\sigma^2 S_t^2\frac{\partial^2 F}{\partial x^2}]dt \end{aligned}$$

如果取$\Delta = \frac{\partial F}{\partial x}(t,S_t)$，则有

$$dR_t = [\frac{\partial F}{\partial t} + \frac{1}{2}\sigma^2 S_t^2\frac{\partial^2 F}{\partial x^2}]dt$$

可见影响随机波动的因素不再出现，所以R_t应为无风险的，即

$$\frac{dR_t}{dt} = rR_t \quad (r\text{为无风险利率})$$

GoBack
FullScreen
Close
Quit

从而

$$\frac{\partial F}{\partial t}+\frac{1}{2}\sigma^2 S_t^2\frac{\partial^2 F}{\partial x^2}=r(F-\Delta\cdot S_t)=r(F-\frac{\partial F}{\partial x}x)$$

即$F(t,x)$满足方程

$$\frac{\partial F}{\partial t}+\frac{1}{2}\sigma^2 {S_t}^2\frac{\partial^2 F}{\partial x^2}+rx\frac{\partial F}{\partial x}-rF=0 \qquad (8.6.1)$$

这就是著名的Black-Scholes方程.我们可以根据具体的边界条件来求出$F(t,S_t)$的解析解或数值解.对欧式看涨期权，其边界条件为$F(T,S_T)=\max(S_T-K,0)$，而欧式看跌期权，其边界条件为$F(T,S_T)=\max(K-S_T,0)$. 在这两种情况下，方程是有显式解的，我们称之为 Black-Scholes公式.

GoBack FullScreen Close Quit