理论力学 CAI 刚体动力学

- 前言
- 刚体的平面运动
- 非惯性基下刚体动力学
- 碰撞
- 刚体的定点运动

碰 撞

理论力学CAI
版权所有, 2000 (c) 上海交通大学工程力学系

碰撞

- 前言
- 基本假设、恢复因数
- 碰撞中刚体动量与动量矩的变化

碰撞

- **前言**
- 基本假设、恢复因数
- 碰撞中刚体动量与动量矩的变化

前言

- 碰撞是物体运动的特殊形式
  - 特点是在很短的时间间隔内 物体的速度发生突然的变化
- 如工程中的锻铁、打桩，生活中踢足球，捶钉子等
- 如一个运动着的物体，突然对其施加约束，物体的速度也会发生突变
- 在力学上凡物体的速度或动量发生突变的现象均称为碰撞
- 本节将根据动力学的基本原理对碰撞现象进行描述，讨论碰撞运动的基本规律

- 两物体发生碰撞的时间间隔在千分之一到万分之一秒之间
  - 在碰撞的时间间隔内，速度有很大的变化故物体的加速度极大
  - 在碰撞的时间间隔内，物体相互的作用力非常大
  - 这种在短暂时刻发生远大于普通力的力称为碰撞力
- 在巨大的碰撞力作用下，物体肯定产生变形，同时会发生声、光与热等物理现象。说明碰撞的物理现象很复杂
- 碰撞过程中将有一部分机械能转化为其他运动形式的能量，机械能不守恒

碰撞

- 前言
- 基本假设、恢复因数
- 碰撞中刚体动量与动量矩的变化

基本假定、恢复因数

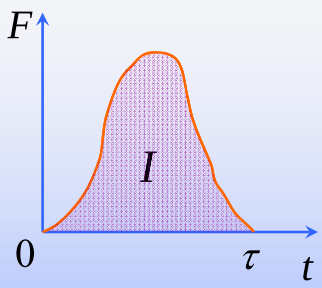
- 在理论力学中不考虑碰撞时间间隔内的所有物理过程
- 主要讨论在碰撞力的作用下物体在碰撞前后的速度的变化

基本假定1

- 不考虑碰撞时间间隔中碰撞力的变化
- 碰撞力对物体的作用直接用碰撞力的冲量来描述

$$\vec{I} = \int_0^{\tau} \vec{F}\,\mathrm{d}t$$

- 碰撞力的冲量称为碰撞冲量



τ 碰撞的时间间隔

基本假定2

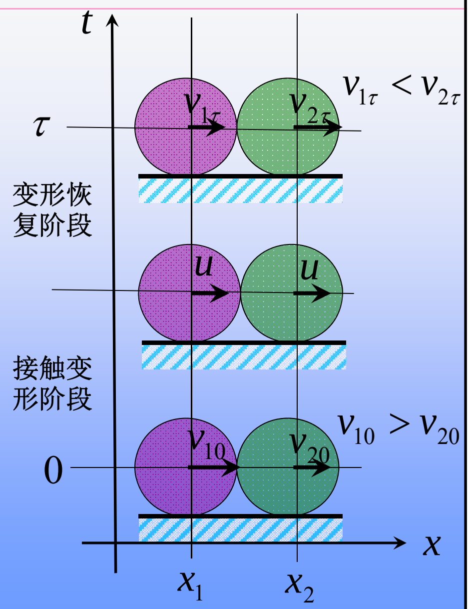
- 通常碰撞力是物体的普通作用力(如重力、弹性力等)的数百倍或数千倍
- 在讨论碰撞的效应时只考虑碰撞力，其他的相互作用力均忽略

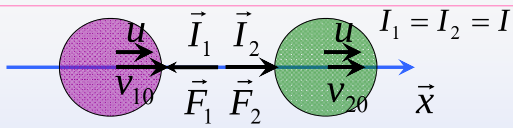
基本假定3

- 由于碰撞的时间间隔τ非常短，质点的位移、刚体的位形变化非常小，而忽略不计，只考虑它们的速度的变化
- 尽管该位形的变化很小，由于碰撞力很大，故碰撞力所作的功为一有限值，不能忽略

恢复因数

- 碰撞前后两碰撞点的速度方向与两球中心连线重合称为正碰撞
- 碰撞的两个阶段
  - 各阶段位形不变

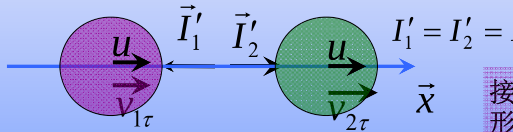




动量定理的积分形式

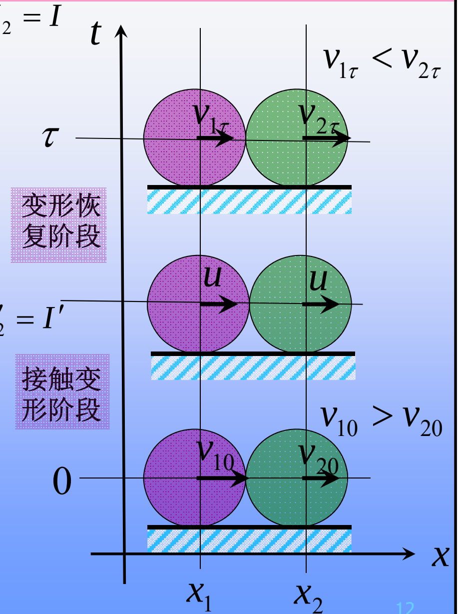
$$m_1u - m_1v_{10} = -I$$

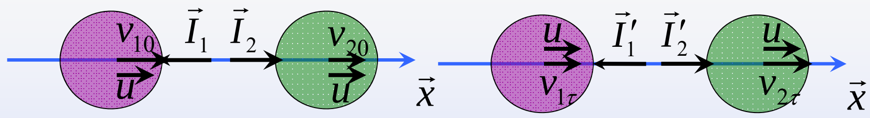
$$m_2u - m_2v_{20} = I$$



$$m_1v_{1\tau} - m_1u = -I'$$

$$m_2v_{2\tau} - m_2u = I'$$





$$m_1u - m_1v_{10} = -I \qquad m_1v_{1\tau} - m_1u = -I'$$

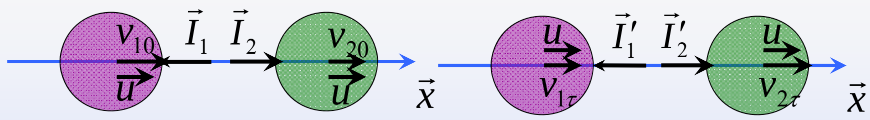
$$m_2u - m_2v_{20} = I \qquad m_2v_{2\tau} - m_2u = I'$$

I　接触变形阶段冲量　　I'　变形恢复阶段冲量

恢复因数　$e = \dfrac{I'}{I}$

牛顿认为
这两个碰撞冲量的比为常数，且该常数与碰撞物体的材料性质有关，与物体的形状、大小与碰撞前的速度无关

刚体动力学/碰撞/基本假定恢复因数



$$m_1u - m_1v_{10} = -I \qquad m_1v_{1\tau} - m_1u = -I'$$

$$m_2u - m_2v_{20} = I \qquad m_2v_{2\tau} - m_2u = I'$$

未知量个数=方程数　　$e = \dfrac{I'}{I}$　　无恢复因数的条件无法解

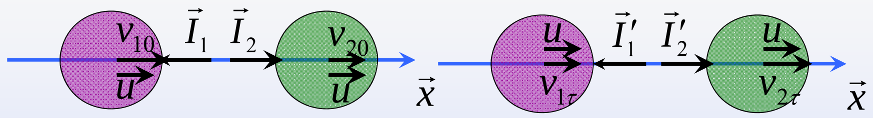
$$u = \frac{m_1v_{10} + m_2v_{20}}{m_1 + m_2}$$

$$I = \frac{m_1m_2(v_{10} - v_{20})}{m_1 + m_2}$$

$$I' = eI$$

$$v_{1\tau} = v_{10} - (1+e)\frac{m_2(v_{10} - v_{20})}{m_1 + m_2}$$

$$v_{2\tau} = v_{20} + (1+e)\frac{m_1(v_{10} - v_{20})}{m_1 + m_2}$$



$$u=\frac{m_1v_{10}+m_2v_{20}}{m_1+m_2}$$

$$I=\frac{m_1m_2(v_{10}-v_{20})}{m_1+m_2}$$

$$e=\frac{I'}{I}$$

$$I'=eI$$

$$v_{1\tau}=v_{10}-(1+e)\frac{m_2(v_{10}-v_{20})}{m_1+m_2}$$

$$v_{2\tau}=v_{20}+(1+e)\frac{m_1(v_{10}-v_{20})}{m_1+m_2}$$

$$\begin{aligned}v_{2\tau}-v_{1\tau}&=(v_{20}-v_{10})+(1+e)\frac{(m_1+m_2)(v_{10}-v_{20})}{m_1+m_2}\\&=(v_{20}-v_{10})+(1+e)(v_{10}-v_{20})\\&=e(v_{10}-v_{20})\end{aligned}$$

$$e=\frac{v_{2\tau}-v_{1\tau}}{v_{10}-v_{20}}$$

恢复因数等于碰撞前后两物体碰撞点相对分离与相对接近速度的绝对值之比（球心连线方向）

$$e=\frac{I'}{I}\qquad e=\frac{v_{2\tau}-v_{1\tau}}{v_{10}-v_{20}}$$

相碰撞的材料	铁/铅	木/橡皮	木/木	铁/铁	玻璃/玻璃
恢复因数	**0.14**	**0.26**	**0.50**	**0.56**	**0.94**

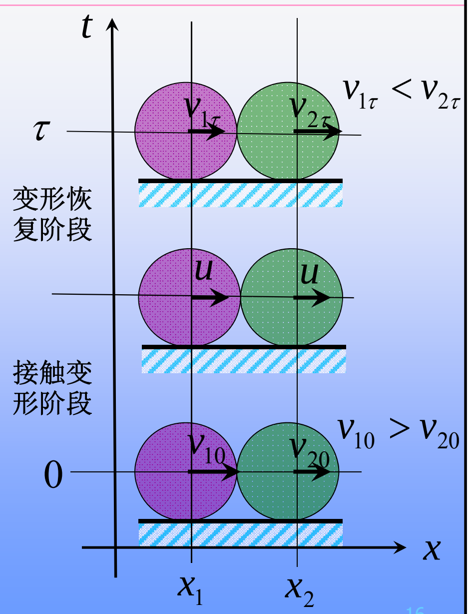
$$0<e<1$$

***e*=0** $v_{2\tau}=v_{1\tau}=u$

变形不恢复 完全塑性碰撞

***e*=1** $v_{2\tau}-v_{1\tau}=v_{10}-v_{20}$

变形完全恢复 完全弹性碰撞

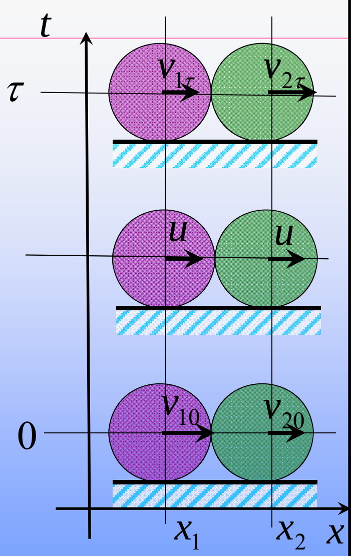


$$v_{1\tau}=v_{10}-(1+e)\frac{m_2(v_{10}-v_{20})}{m_1+m_2}$$

$$v_{2\tau}=v_{20}+(1+e)\frac{m_1(v_{10}-v_{20})}{m_1+m_2}$$

碰撞前后的机械能损失

$$T_0=\frac{1}{2}(m_1v_{10}^2+m_2v_{20}^2)\qquad T_\tau=\frac{1}{2}(m_1v_{1\tau}^2+m_2v_{2\tau}^2)$$



假定(3)：碰撞前后刚体位形变化忽略不计

碰撞前后势能不变

$$T_0-T_\tau=(1-e^2)\frac{m_1m_2(v_{10}-v_{20})^2}{2(m_1+m_2)}$$

$T_0-T_\tau\geq 0$　碰撞前后有机械能损失

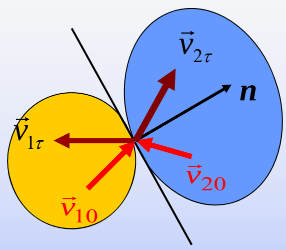
$e=0$：完全塑性碰撞　损失最大

$e=1$：完全弹性碰撞　损失为零

$0<e<1$：一般碰撞　损失居中

恢复因数的一般性定义

$$e=\frac{v_{2\tau n}-v_{1\tau n}}{v_{10n}-v_{20n}}$$



恢复因数等于碰撞前后两物体碰撞点沿公法线方向相对分离与相对接近速度之比

恢复因数的取值范围：

- $0<e<1$，部分弹性碰撞：变形不能完全恢复
- $e=1$，完全弹性碰撞：无能量损耗，碰撞后变形完全恢复
- $e=0$，完全塑性碰撞：能量完全损耗，变形完全不能恢复

两种定义等价

碰撞

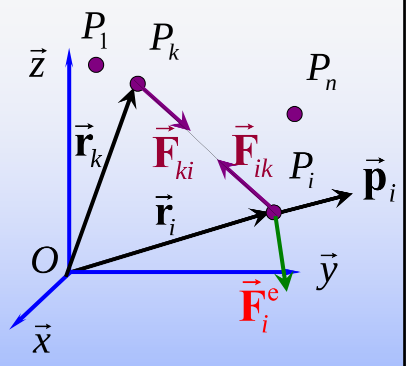
- 前言
- 基本假设、恢复因数
- **碰撞中刚体动量与动量矩的变化**

研究碰撞的矢量力学方法

- 碰撞的动量定理
- 碰撞的动量矩定理

质点系

对于质点 P_i



$$\frac{d\vec{\mathbf{p}}_i}{dt} = \frac{d(m_i\vec{\mathbf{v}}_i)}{dt} = \vec{\mathbf{F}}_i^{e} + \sum_{k=1,k\neq i}^{n} \vec{\mathbf{F}}_{ik}$$

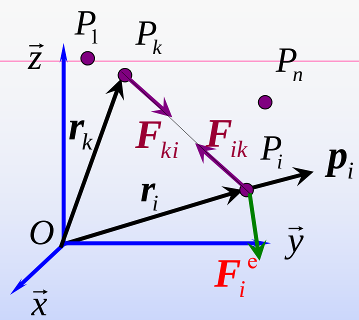
动量定理的积分形式：

$$\int_0^\tau d\vec{p}_i = \int_0^\tau \vec{F}_i^{(e)}dt + \int_0^\tau \sum_{k=1,k\neq i}^{n} \vec{F}_{ik}dt$$

$$\vec{\mathbf{F}}_{ik} = -\vec{\mathbf{F}}_{ki}$$

$$\vec{p}_{i\tau} - \vec{p}_{i0} = \vec{I}_i^{(e)} + \sum_{k=1,k\neq i}^{n} \vec{I}_{ik} \qquad (i,k=1,2,\cdots,n)$$

碰撞的质心运动定理



对于质点 P_i

$$\vec{p}_{i\tau} - \vec{p}_{i0} = \vec{I}_i^{(e)} + \sum_{k=1,k\neq i}^{n} \vec{I}_{ik}$$

$$\vec{\mathbf{F}}_{ik} = -\vec{\mathbf{F}}_{ki}$$

$$\underline{\sum \vec{p}_{i\tau}} - \underline{\sum \vec{p}_{i0}} = \sum \vec{I}_i^{(e)} + \cancel{\sum \sum_{k=1,k\neq i}^{n} \vec{I}_{ik}}$$

$$m\vec{v}_{C\tau} - m\vec{v}_{C0} = \sum \vec{I}_i^{(e)}$$

发生碰撞的质点系动量的改变等于作用在质点系上所有外力冲量的主矢。

适用于任何刚体或刚体（系）

研究碰撞的矢量力学方法

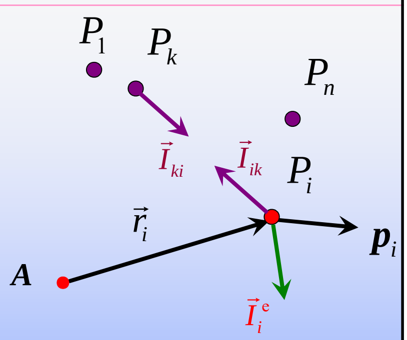
- 碰撞的动量定理
- 碰撞的动量矩定理

质点系

对于质点 P_i

动量定理的积分形式：

$$\vec{p}_{i\tau} - \vec{p}_{i0} = \vec{I}_i^{(e)} + \sum_{k=1,k\neq i}^{n} \vec{I}_{ik}$$



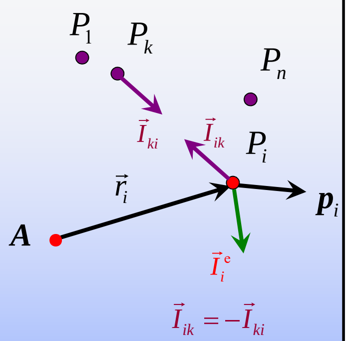
$$\vec{I}_{ik} = -\vec{I}_{ki}$$

$$\vec{r}_i \times (\vec{p}_{i\tau} - \vec{p}_{i0}) = \vec{r}_i \times \left(\vec{I}_i^{(e)} + \sum_{k=1,k\neq i}^{n} \vec{I}_{ik} \right)$$

***A*是空间中的任意点（定点、动点或质心均可）**

质点系

对于质点 P_i



$$\vec r_i \times (\vec p_{i\tau} - \vec p_{i0})$$

$$= \vec r_i \times \left(\vec I_i^{(e)} + \sum_{k=1,k\neq i}^{n} \vec I_{ik} \right)$$

碰撞过程中 $\vec r_i$ 不变

$$\sum \vec r_i \times (\vec p_{i\tau} - \vec p_{i0})$$

$$= \sum \vec r_i \times \vec I_i^{(e)} + \sum \vec r_i \times \cancel{\left(\sum_{k=1,k\neq i}^{n} \vec I_{ik} \right)}$$

$$\sum \vec r_i \times \vec p_{i\tau} - \sum \vec r_i \times \vec p_{i0} = \sum \vec r_i \times \vec I_i^{(e)}$$

$$\vec L_{A\tau} \quad - \quad \vec L_{A0} \quad = \quad \sum_{i=1}^{n} \vec M_A(\vec I_i^e)$$

在一定的时间间隔内，质点系对A点动量矩的改变等于同一时间间隔内，作用在质点系上所有外力冲量对同一点的矩之和。

A点可为任意点（固定点、动点、质心均可）

动量须为为绝对动量！！！

适用于任何刚体或刚体（系）

碰撞中刚体动量与动量矩的变化

- 定轴转动的碰撞问题
- 刚体平面运动的碰撞问题

定轴转动的碰撞问题（单刚体）

惯性基 $O-\vec{e}$ 连体基 $O-\vec{e}^{\mathrm{b}}$

利用动量矩定理的积分形式

$$L_{Oz\tau} - L_{Oz0} = \sum_{k=1}^{n}\int_0^{\tau} M_{Oz}\,\mathrm{d}t$$

运动分析 姿态坐标 φ $\omega = \dot{\varphi}$

$$L_{Oz} = J_{Oz}\omega = J_{Oz}\dot{\varphi}$$

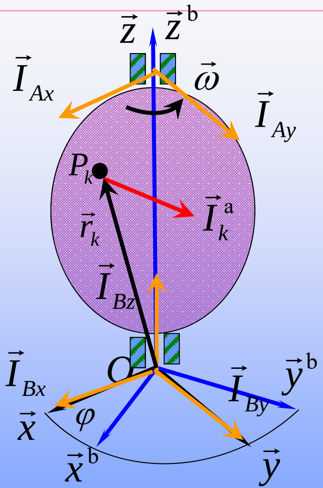
受力分析

在点P_k的碰撞主动冲量 $\vec{I}_k^{\mathrm{a}}$ 对 M_{Oz} 有贡献

其他非碰撞主动力不计

碰撞理想约束力 $\vec{I}_{Ax}$ $\vec{I}_{Ay}$ $\vec{I}_{Bx}$ $\vec{I}_{By}$ $\vec{I}_{Bz}$

对 M_{Oz} 无贡献



$$L_{Oz} = J_{Oz}\omega = J_{Oz}\dot{\varphi}$$

$$L_{Oz\tau} - L_{Oz0} = \sum_{k=1}^{n}\int_{0}^{\tau} M_{Oz}\,\mathrm{d}t$$

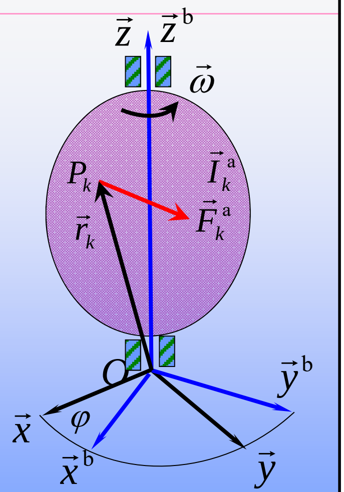
$$\int_{0}^{\tau} M_{Oz}\,\mathrm{d}t = \int_{0}^{\tau} M_{Oz}(\vec{F}_k^{\mathrm{a}})\,\mathrm{d}t = \int_{0}^{\tau} \vec{z}\cdot(\vec{r}_k \times \vec{F}_k^{\mathrm{a}})\,\mathrm{d}t$$

假定(3)：碰撞前后刚体位形变化忽略不计

$$= \vec{z}\cdot\left(\vec{r}_k \times \int_{0}^{\tau} \vec{F}_k^{\mathrm{a}}\,\mathrm{d}t\right)$$

$\vec{r}_k$ 与时间无关

$$= \vec{z}\cdot(\vec{r}_k \times \vec{I}_k^{\mathrm{a}})$$



$$J_{Oz}\omega_{\tau} - J_{Oz}\omega_{0} = \sum_{k=1}^{n} M_{Oz}(\vec{I}_k^{\mathrm{a}})$$

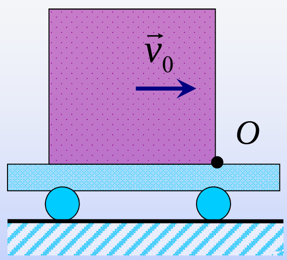
刚体碰撞前后对该轴动量矩的改变等于主动碰撞力的冲量对该轴的矩之和

$$M_{Oz}(\vec{I}_k^{\mathrm{a}})\vec{z}_k = \vec{z}\cdot(\vec{r}_k \times \vec{I}_k^{\mathrm{a}})$$

冲量对点O的矩 $\vec{M}_O(\vec{I}_k^{\mathrm{a}})$

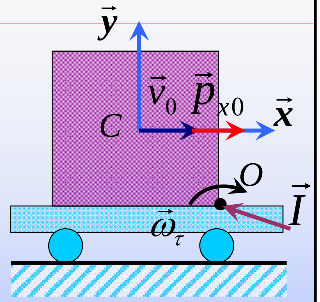
[例]

以速度为v_0匀速运动的小车上有一边长为l的方块。
当小车突然停住时，方块将绕底面的一边翻转



求此时方块翻转的角速度与方块能量的损耗

[解]　惯性基 $C-\vec{e}$



运动分析

碰撞前瞬时 $t=0$　　碰撞后瞬时 $t=\tau$

滑块的平动　突变　绕O的定轴转动

$\vec{v}_0$　位形不变　$\vec{\omega}_\tau$　设定正向

滑块的动量

$p_{x0}=mv_0$

对点O 的动量矩

$L_{Oz0}=-mv_0\dfrac{l}{2}$

对点O 的动量矩

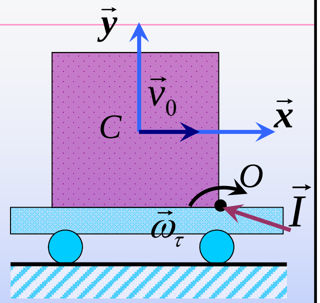
$L_{Oz\tau}=-J_{Oz}\omega_\tau=-\dfrac{2}{3}ml^2\omega_\tau$

$L_{Oz\tau}-L_{Oz0}=\sum_{k=1}^{n}M_{Oz}(\vec{I}_k^a)$

冲量分析

铰O　$\vec{I}$

$$-\frac{2}{3}ml^2\omega_\tau-\left(-\frac{1}{2}mv_0 l\right)=0 \qquad \omega_\tau=\frac{3v_0}{4l}$$



碰撞前瞬时 $t=0$　　碰撞后瞬时 $t=\tau$

滑块的平动　突变　绕O的定轴转动

$\vec{v}_0$　　$\vec{\omega}$

滑块的动能

$T_0=\dfrac{1}{2}mv_0^2$　　$T_\tau=\dfrac{1}{2}J_{Oz}\omega_\tau^2$

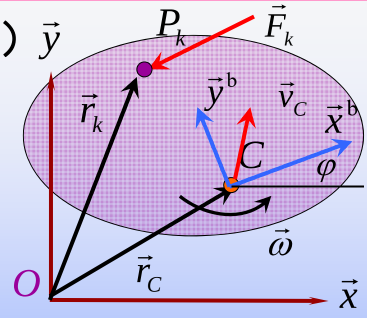
机械能的改变

$$T_0-T_\tau=\frac{1}{2}mv_0^2-\frac{1}{2}\cdot\frac{2}{3}ml^2\cdot\left(\frac{3v_0}{4l}\right)^2 \qquad \omega_\tau=\frac{3v_0}{4l}$$

$$T_0-T_\tau=\frac{5}{16}mv_0^2$$

O处约束冲量？

平面运动的碰撞问题（单刚体）



惯性基 $O-\vec{\boldsymbol{e}}$　　连体基 $C-\vec{\boldsymbol{e}}^{\mathrm{b}}$

受力分析

在点$\boldsymbol{P}_k$的碰撞外力 $\vec{F}_k$

包括 碰撞主动力　碰撞理想约束力

运动分析

碰撞前瞬时　$t=0$

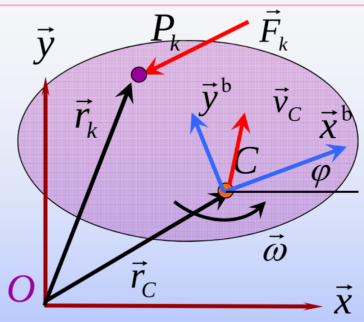
质心速度 $\vec{v}_{C0}$　刚体角速度 $\vec{\omega}_0=\dot{\varphi}_0\vec{z}$

动量 $\vec{p}_0=m\vec{v}_{C0}$　对$\boldsymbol{C}$的动量矩 $L_{Cz0}=J_{Cz}\omega_0$

碰撞后瞬时　$t=\tau$

质心速度 $\vec{v}_{C\tau}$　刚体角速度 $\vec{\omega}_\tau=\dot{\varphi}_\tau\vec{z}$

动量 $\vec{p}_\tau=m\vec{v}_{C\tau}$　对$\boldsymbol{C}$的动量矩 $L_{Cz\tau}=J_{Cz}\omega_\tau$



在点$\boldsymbol{P}_k$的碰撞外力 $\vec{F}_k$

碰撞前瞬时 $t=0$

质心速度 $\vec{v}_{C0}$　动量 $\vec{p}_0=m\vec{v}_{C0}$

碰撞后瞬时 $t=\tau$

质心速度 $\vec{v}_{C\tau}$　动量 $\vec{p}_\tau=m\vec{v}_{C\tau}$

动量定理的积分形式

$$m\vec{v}_{C\tau}-m\vec{v}_{C0}=\sum_{k=1}^{n}\vec{I}_k$$

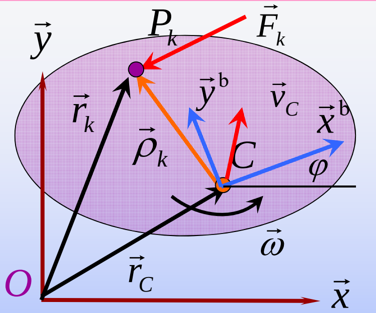
$$\vec{I}=\int_0^\tau \vec{F}\,\mathrm{d}t \qquad \boldsymbol{I}=\int_0^\tau \boldsymbol{F}\,\mathrm{d}t$$

$$\vec{\boldsymbol{e}}:\ m\boldsymbol{v}_{C\tau}-m\boldsymbol{v}_{C0}=\sum_{k=1}^{n}\boldsymbol{I}_k$$

$$mv_{Cx\tau}-mv_{Cx0}=\sum_{k=1}^{n}I_{kx} \qquad mv_{Cy\tau}-mv_{Cy0}=\sum_{k=1}^{n}I_{ky}$$

在点P_k的碰撞外力 $\vec{F}_k$

碰撞前瞬时	刚体角速度	对C的动量矩
$t=0$	$\vec{\omega}_0=\dot{\varphi}_0\vec{z}$	$L_{Cz0}=J_{Cz}\omega_0$
碰撞后瞬时		
$t=\tau$	$\vec{\omega}_\tau=\dot{\varphi}_\tau\vec{z}$	$L_{Cz\tau}=J_{Cz}\omega_\tau$



对质心C的动量矩的积分形式

$$L_{Cz\tau}-L_{Cz0}=\sum_{k=1}^{n}\int_0^\tau M_{Cz}(\vec{F}_k)\,\mathrm{d}t$$

假定(3)：碰撞前后刚体位形变化忽略不计

$$\int_0^\tau M_{Cz}(\vec{F}_k)\,\mathrm{d}t=\int_0^\tau \vec{z}\cdot(\vec{\rho}_k\times\vec{F}_k)\,\mathrm{d}t$$

$\vec{\rho}_k$ 与时间无关

$$=\vec{z}\cdot\left(\vec{\rho}_k\times\int_0^\tau\vec{F}_k\,\mathrm{d}t\right)=\vec{z}\cdot(\vec{\rho}_k\times\vec{I}_k)$$

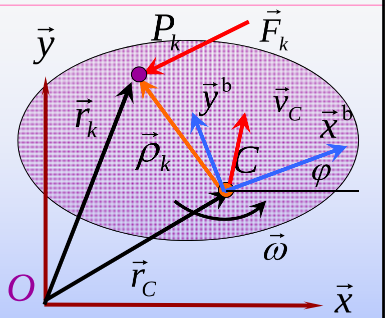
$\vec{M}_C(\vec{I}_k^{\mathrm{a}})$

$$\vec{I}_k=\int_0^\tau\vec{F}_k\,\mathrm{d}t$$

$$J_{Cz}\omega_\tau-J_{Cz}\omega_0=\sum_{k=1}^{n}M_{Cz}(\vec{I}_k)$$

$$M_{Cz}(\vec{I}_k)=\vec{z}\cdot(\vec{\rho}_k\times\vec{I}_k)$$

刚体平面运动碰撞前后的动量与动量矩的变化



$$mv_{Cx\tau}-mv_{Cx0}=\sum_{k=1}^{n}I_{kx}$$

$$mv_{Cy\tau}-mv_{Cy0}=\sum_{k=1}^{n}I_{ky}$$

$$J_{Cz}\omega_\tau-J_{Cz}\omega_0=\sum_{k=1}^{n}M_{Cz}(\vec{I}_k)$$

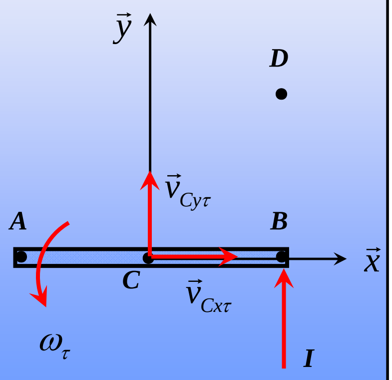
$$\vec{I}_k=\int_0^\tau\vec{F}_k\,\mathrm{d}t\qquad M_{Cz}(\vec{I}_k)=\vec{z}\cdot(\vec{\rho}_k\times\vec{I}_k)$$

[例] 自由刚体

水平面内质量为**m**的长为***l***的均质细杆处于静止状态，在其一端作用一垂直冲量，求撞击后杆的运动状态。

【解】 未知量分析： **3**个独立未知运动量

3个独立方程, 可解



动量定理

$$mv_{Cx\tau} - 0 = 0 \qquad v_{Cx\tau} = 0$$

$$mv_{Cy\tau} - 0 = I \qquad v_{Cy\tau} = \frac{I}{m}$$

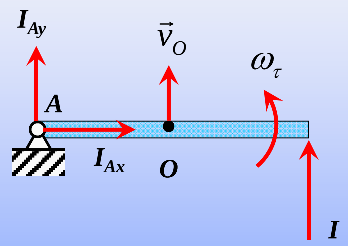
对质心**C**动量矩定理

$$\frac{ml^2}{12}\omega_\tau - 0 = I\frac{l}{2} \qquad \omega_\tau = \frac{6I}{ml}$$

也可对**A**、**B**、**D**动量矩定理

[例] 受约束的单个刚体

上面例子中杆的一端用铰链固定，求撞击后杆的角速度及铰链的撞击冲量。



对点**A**的动量矩定理

$$\frac{1}{3}ml^2\omega_\tau - 0 = Il \qquad \omega_\tau = \frac{3I}{ml}$$

动量定理

$$mv_O - 0 = I + I_{Ay} \qquad v_O = \frac{3I}{2m} \qquad I_{Ay} = \frac{I}{2}$$

$$0 - 0 = I_{Ax} \qquad I_{Ax} = 0$$

[例] 刚体系问题

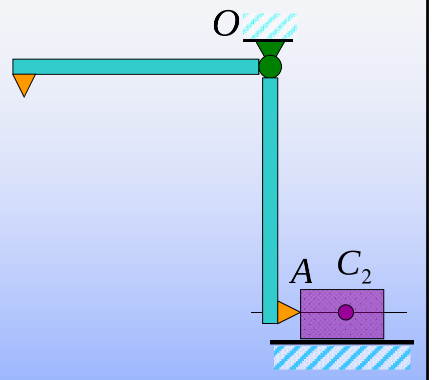
均质杆OA质量为m_1，长为l，一端O由铰链与机座相连。从水平位置下落，在铅垂位置

杆的另一端A撞击一质量为m_2的方块

设点A与方块的质心C_2在同一水平线上

已知恢复因数为e

求撞击后杆的角速度与方块的速度，杆对方块的冲量



[解] （1）撞击后杆的角速度与方块的速度

惯性基 $O-\vec{e}$

碰撞发生前杆的角速度

杆由水平位置 $\xrightarrow{\text{重力}}$ 铅垂位置

势能 $V'=m_1 g\cdot\dfrac{l}{2}$ $\qquad V_0=0$

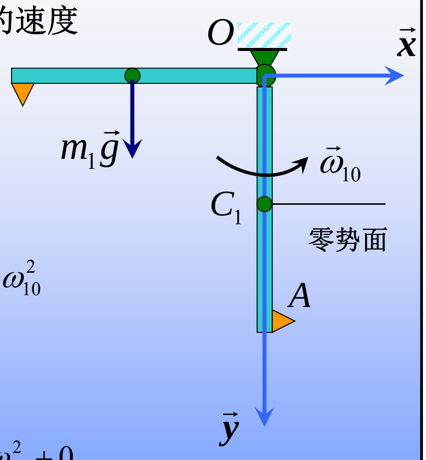
动能 $T'=0$ $\qquad T_0=\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{1}{3}m_1 l^2\cdot\omega_{10}^2$

约束力不作功

机械能守恒 $\qquad T'+V'=T_0+V_0$

$$0+m_1 g\cdot\frac{l}{2}=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3}m_1 l^2\cdot\omega_{10}^2+0$$

$$\omega_{10}=\sqrt{\frac{3g}{l}}$$



碰撞运动分析

杆定轴转动　滑块平动

碰撞前瞬时　$t=0$

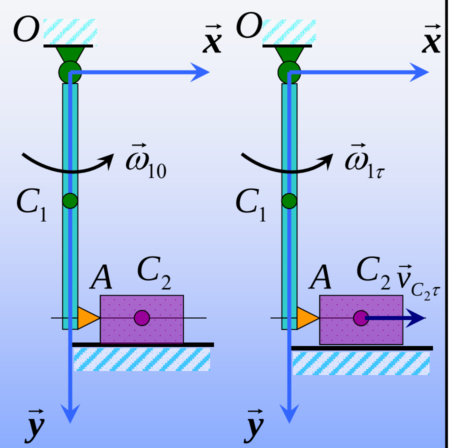
杆角速度　$\omega_{10}=\sqrt{\dfrac{3g}{l}}$

滑块速度　$v_{C_2 0}=0$

碰撞后瞬时　$t=\tau$

杆角速度　$\omega_{1\tau}=?$　设定正向

滑块速度　$v_{C_2\tau}=?$　设定正向



碰撞冲量分析

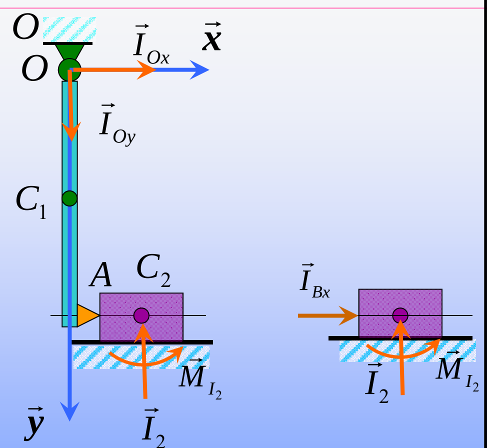
铰**O**约束力冲量

$\vec{I}_{Ox}$　$\vec{I}_{Oy}$　设定正向

滑块约束力冲量　$\vec{I}_2$　$\vec{M}_{I_2}$

滑块与杆之间的碰撞冲量　$\vec{I}_{Bx}$

其他非碰撞力不计　重力、摩擦力



未知量分析

碰撞后瞬时 $t=\tau$

杆角速度 $\omega_{1\tau}=?$

滑块速度 $v_{C_2\tau}=?$

铰O约束力冲量 $\vec{I}_{Ox}$ $\vec{I}_{Oy}$

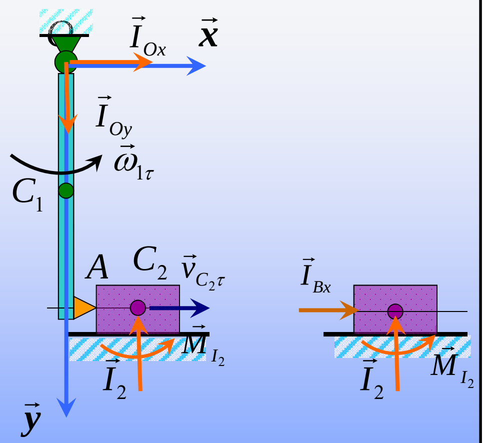
滑块约束力冲量 $\vec{I}_2$ $\vec{M}_{I_2}$

滑块与杆之间的碰撞冲量 $\vec{I}_{Bx}$

7个独立未知数

$$\omega_{1\tau}, v_{C_2\tau}, I_{Ox}, I_{Oy}, I_{Bx}, I_2, M_{I_2}$$

两个刚体，6个独立动力学方程 **+** 恢复因数关系



7个独立未知数，7个独立方程，问题封闭

$\omega_{10}=\sqrt{3g/l}$ $\quad v_{C_2 0}=0$

$\omega_{1\tau}=?$ $\quad v_{C_2\tau}=?$

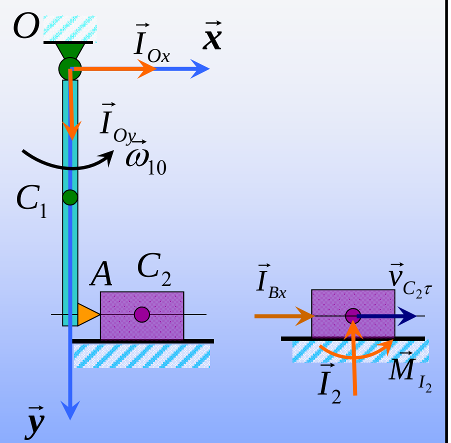
分析滑块

平移运动，角速度为0

$0-0=I_2 \qquad I_2=0$

$$J_{C_2z}\omega_{2\tau}-J_{C_2z}\omega_{20}=M_{I_2}$$

$0-0=M_{I_2} \qquad M_{I_2}=0$



$\omega_{10} = \sqrt{3g/l}$ $\quad v_{C_2 0} = 0$

$\omega_{1\tau} = ?$ $\quad v_{C_2\tau} = ?$

铰O约束力冲量 $\vec{I}_{Ox}$ $\vec{I}_{Oy}$

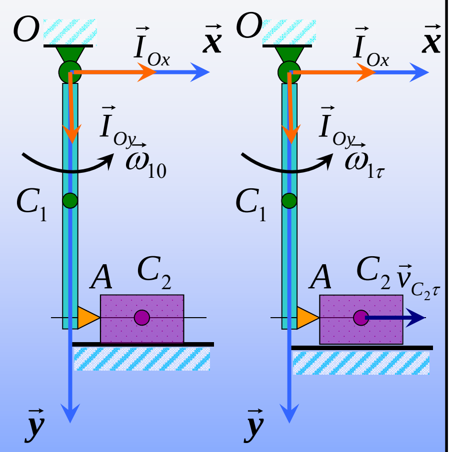
碰撞前后瞬时 系统对点O的动量矩

$$L_{Oz0} = -J_{Oz}\omega_{10}$$

$$L_{Oz\tau} = -J_{Oz}\omega_{1\tau} - m_2 v_{C_2\tau} l$$

$$L_{Oz\tau} - L_{Oz0} = \sum_{k=1}^{n} M_{Oz}(\vec{I}_k)$$

$$-(m_2 v_{2\tau} l + J_{Oz}\omega_{1\tau}) + J_{Oz}\omega_{10} = 0$$



$\omega_{10} = \sqrt{3g/l}$ $\quad v_{C_2 0} = 0$

$\omega_{1\tau} = ?$ $\quad v_{C_2\tau} = ?$

$$(m_2 v_{2\tau} l + J_{Oz}\omega_{1\tau}) - J_{Oz}\omega_{10} = 0$$

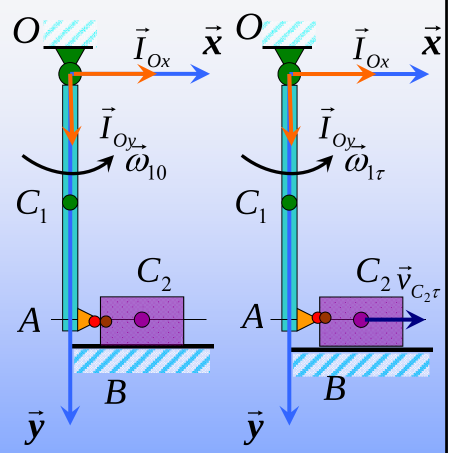
未知量(2)>方程数(1) 附加方程

恢复因数定义

$$e = \frac{v_{B\tau} - v_{A\tau}}{v_{A0} - v_{B0}} = \frac{v_{C_2\tau} - \omega_{1\tau} l}{\omega_{10} l - 0}$$

$$v_{C_2\tau} = (\omega_{1\tau} + e\omega_{10}) l$$

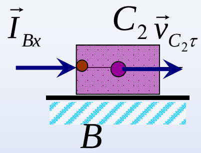
$$\omega_{1\tau} = \frac{-m_2 l^2 e + J_{Oz}}{m_2 l^2 + J_{Oz}}\omega_{10} = \frac{m_1 - 3m_2 e}{m_1 + 3m_2}\sqrt{\frac{3g}{l}}$$



$m_1 - 3m_2 e > 0 \quad \omega_{1\tau} > 0$

$m_1 - 3m_2 e < 0 \quad \omega_{1\tau} < 0$

（2）杆对滑块的冲量



碰撞前瞬时 $t=0$

滑块速度 $v_{C_2 0}=0$

碰撞后瞬时 $t=\tau$

滑块速度 $v_{C_2\tau}=(\omega_{1\tau}+e\omega_{10})l$

$$\omega_{10}=\sqrt{3g/l}$$

$$\omega_{1\tau}=\frac{m_1-3m_2 e}{m_1+3m_2}\sqrt{\frac{3g}{l}}$$

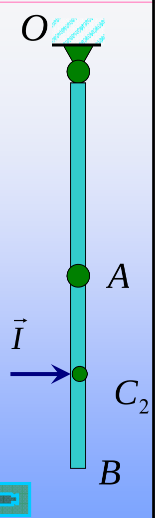
动量定理的积分形式

$$m_2 v_{C_2\tau}-m_2 v_{C_2 0}=I_{Bx}$$

$$I_{Bx}=m_2 v_{C_2\tau}$$

$$I_{Bx}=\frac{(1+e)m_1}{(m_1+3m_2)m_2}\sqrt{3gl}$$

[例] 刚体系问题



质量为***m***，长为***l***的两均质杆***OA***与***AB***，以铰***A***相连，一端***O***由铰链与机座相连现在杆***AB***的质心***C***$_2$作用一水平冲量***I***

求撞击后两杆的角速度与***C***$_2$的速度

[解]　惯性基　$O-\vec{e}$

运动分析　OA：定轴转动

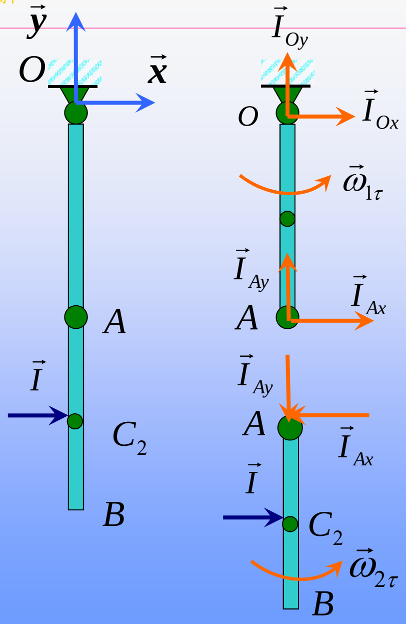
AB：平面一般运动

冲量分析　$\vec{I}_{Ox}$　$\vec{I}_{Oy}$　$\vec{I}_{Ax}$　$\vec{I}_{Ay}$

未知量：

$I_{Ox}, I_{Oy}, I_{Ax}, I_{Ay}, \omega_{1\tau}, \omega_{2\tau}$

6个独立未知量，6个独立碰撞动力学方程，问题封闭



[法一]惯性基　$O-\vec{e}$

以OA为对象

运动分析　定轴转动

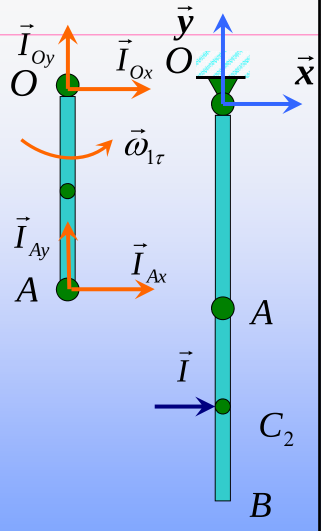
冲量分析　铰O与A理想约束力冲量

$\vec{I}_{Ox}$　$\vec{I}_{Oy}$　$\vec{I}_{Ax}$　$\vec{I}_{Ay}$　设定正向

对点O的动量矩定理的积分形式

$$J_{Oz}\omega_{1\tau} - J_{Oz}\cancel{\omega_{10}} = lI_{Ax}$$

$$J_{Oz}\omega_{1\tau} = lI_{Ax}$$



以AB为对象　平面一般运动

冲量分析　铰A理想约束力冲量

$\vec{I}'_{Ax}$　$\vec{I}'_{Ay}$　设定正向　$I'_{Ax}=I_{Ax}$　$I'_{Ay}=I_{Ay}$

对质心C_2的动量矩定理的积分形式

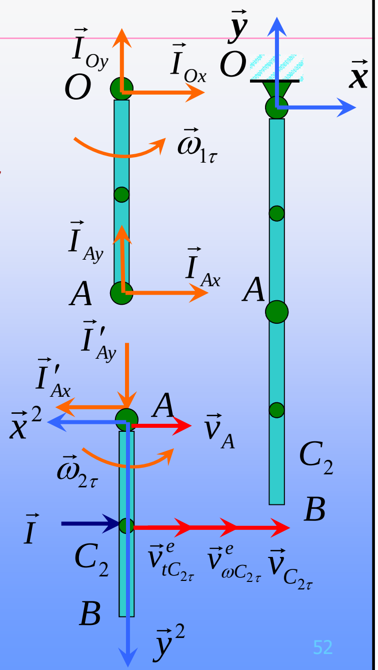
$$J_{C_2z}\omega_{2\tau}-J_{C_2z}\cancel{\omega_{20}}=\frac{1}{2}lI'_{Ax}\qquad J_{C_2z}\omega_{2\tau}=\frac{1}{2}lI_{Ax}$$

动量定理的积分形式　连体基 $A-\vec{e}^2$

$$\vec{v}_{C_2\tau}=\vec{v}^e_{tC_2\tau}+\vec{v}^e_{\omega C_2\tau}\qquad v_{C_2\tau}=\omega_{1\tau}l+\frac{1}{2}\omega_{2\tau}l$$

$$mv_{C_2\tau}-0=I-I'_{Ax}\qquad mv_{C_2\tau}=I-I_{Ax}$$

$$0-0=-I'_{Ay}\qquad 0=-I_{Ay}$$



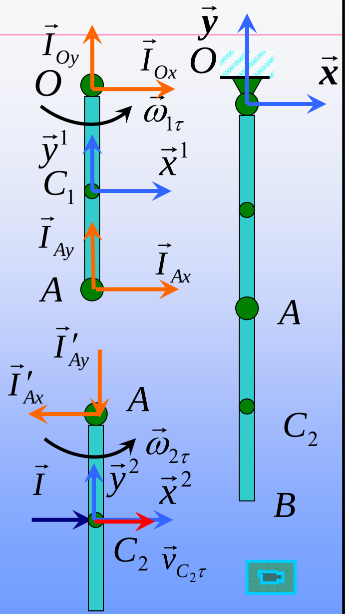
$$\begin{cases}J_{Oz}\omega_{1\tau}=lI_{Ax}\\ J_{C_2z}\omega_{2\tau}=\frac{1}{2}lI_{Ax}\\ mv_{C_2\tau}=m\left(\omega_{1\tau}l+\frac{1}{2}\omega_{2\tau}l\right)=I-I_{Ax}\end{cases}\qquad v_{C_2\tau}=\omega_{1\tau}l+\frac{1}{2}\omega_{2\tau}l$$

三个方程联合求解

$$J_{Oz}=\frac{1}{3}ml^2\qquad J_{C_2z}=\frac{1}{12}ml^2$$

$$\omega_{1\tau}=\frac{3I}{7ml}\qquad \omega_{2\tau}=\frac{6I}{7ml}\qquad v_{C_2x\tau}=\frac{6I}{7m}$$

$$I_{Ax}=\frac{I}{7}$$　约束有冲量



[法二]

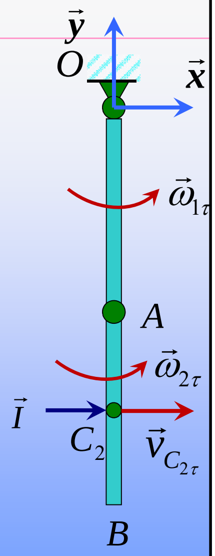
以整体为对象，对点**O**的动量矩定理

$$J_O\omega_{1\tau} + J_{C_2}\omega_{2\tau} + m v_{C_{2\tau}}\frac{3l}{2} = I\frac{3l}{2}$$

以**AB**为对象，对点**A**的动量矩定理

$$m v_{C_{2\tau}}\frac{l}{2} + J_{C_{2\tau}}\omega_{2\tau} = I\frac{l}{2}$$

$$v_{C_2\tau} = \omega_{1\tau} l + \frac{1}{2}\omega_{2\tau} l \qquad \omega_{1\tau} = \frac{3I}{7ml} \qquad \omega_{2\tau} = \frac{6I}{7ml}$$



$$J_A\omega_{2\tau} = I\frac{l}{2}$$

错！！！

碰撞问题的小结

- 碰撞动力学方程利用积分形式的动量定理或动量矩定理
- 在碰撞问题中未知量可能包括理想约束力的冲量、刚体质心速度与角速度等运动学量
- 合理选取方程，尽可能减少未知量的出现，使问题求解方便
- 对于较复杂的问题，也可利用程式化的方式
  - 可能出现未知量的个数超过方程的个数的情况，需增加运动学条件
  - 碰撞动力学方程均在速度的层次上，需要速度约束条件
  - 这些条件可以通过约束方程求导得到，比较方便的是直接寻找速度约束关系
- 涉及碰撞前后速度的关系的碰撞问题
  - 利用恢复因数的条件