

# 线性代数

屠余马

胡金德 林翠琴

王飞燕 邢文训

清华大学出版社

# 线 性 代 数

居余马

胡金德 林翠琴

王飞燕 邢文训

清华大学出版社

**(京)新登字 158 号**

## **内 容 简 介**

本书为高等院校理工科教材。全书共 7 章,内容包括:行列式;矩阵;线性方程组;向量空间与线性变换;特征值和特征向量·矩阵的对角化;二次型及应用问题。书末附录中还介绍了内积空间·厄米特二次型;约当(Jordan)标准形。

本书内容丰富,阐述简明扼要,层次清晰。可作为高等院校的教材或教学参考书。

## **图书在版编目(CIP)数据**

线性代数/居余马等编. —北京:清华大学出版社,1994  
ISBN 7-302-01698-4

I. 线… II. 居… III. 线性代数-高等学校-教材 IV. 0151.2

中国版本图书馆 CIP 数据核字(94)第 14171 号

**出版者:** 清华大学出版社(北京清华大学校内,邮编 100084)

**印刷者:** 北京通县人民文学印刷厂

**发行者:** 新华书店总店北京科技发行所

**开 本:** 850×1168 1/32 印张: 11.75 字数: 303 千字

**版 次:** 1995 年 1 月第 1 版 1995 年 1 月第 1 次印刷

**书 号:** ISBN 7-302-01698-4/O · 157

**印 数:** 0001—5000

**定 价:** 7.30 元

## 序 言

本书是根据全国工科数学课程指导委员会制定的《线性代数》课程基本要求,以及我们多年来在清华大学讲授本课程的实际体会编写而成的. 本书适用于教学要求不同的院校和专业,课内学时为 35—72 的都可选用本书作为教材.

线性代数是一门基础数学课程,它的基本概念、理论和方法,具有较强的逻辑性、抽象性和广泛的实用性;它的核心内容是研究有限维线性空间的结构和线性空间的线性变换. 由于数域  $F$  上的  $n$  维线性空间  $V(F)$  与  $n$  维向量空间  $F^n$  是同构的,给定了  $n$  维线性空间  $V(F)$  的一组基后,  $V(F)$  的线性变换与数域  $F$  上的  $n$  阶矩阵一一对应,因此,在学时较少的情况下,教学的基本要求是:熟练掌握  $n$  维向量的线性运算,理解线性相关性的理论,搞清  $R^n$  的基、向量在基下的坐标、向量的内积运算及向量的长度与夹角等概念;熟练掌握矩阵的基本运算和线性方程组的解的理论和求解方法;掌握矩阵的特征值和特征向量、矩阵的对角化及二次型的标准形和正定二次型的基本概念和理论. 在上述教学内容中,要注重基本概念和理论,着重培养熟练的运算能力,适当地训练逻辑思维和推理能力.

关于教材内容,作了以下一些处理:

1 关于行列式. 采用简便的递归法来定义  $n$  阶行列式,并相应地证明它的性质. 这比用逆序法定义可节省一些学时.

2 关于矩阵. 从高斯消元法入手,引进矩阵和初等变换的概念. 对于矩阵的运算,除了要熟练掌握加法、数乘、乘法、求逆及转置等基本运算,还要加强初等变换和矩阵分块运算,它们不仅是矩

阵运算的重要方法和技巧,而且在理论分析中也有重要意义.

3 关于线性方程组. 将方程组放在矩阵之后讲解,可以充分利用矩阵工具,使表述简明. 向量的线性相关性的概念和矩阵的秩的概念是这一章的难点,以三维几何向量在线性运算下的关系作背景,抽象出  $n$  维向量的线性相关性的概念,便于初学者理解这个重要的概念. 利用初等行变换不改变矩阵的行秩和列秩以及阶梯形矩阵的行秩等于列秩,来证明  $A$  的列秩等于其行秩,这样容易为读者所理解.

4 关于向量空间. 重点放在搞清  $R^n$  的基本结构,以三维几何向量为背景,一并提出  $R^n$  中的线性运算和内积运算,阐明  $R^n$  的基和向量在基下的坐标的概念以及向量的几何度量性. 如果教学学时允许的话,在  $R^n$  的基础上再进一步讲授一般线性空间的概念和理论. 至于一般的欧氏空间和内积空间的概念,则把它放在附录中,这是因为受一般工科院校的本课程学时所限,而不能列入教学要求.

5 关于线性变换. 以一元线性函数为背景,抽象出  $n$  维向量空间的线性变换的概念,并列举了  $C, A, D$  中常用的线性变换的例子. 进而讲了线性变换的矩阵表示和线性变换的运算.

6 关于特征值和特征向量,书中只讲矩阵的特征值和特征向量. 深入讨论了矩阵可对角化的条件,学时少的重点掌握实对称矩阵的对角化.

7 关于二次型. 将其放在最后,目的是用已学过的知识,全面地讨论二次型化标准形的方法和正定二次型的判定. 学时少的只要掌握通过正交变换化二次型为标准形.

8 关于应用问题. 书中专列一章应用问题,是为学有余力的学生提供一些材料,使他们对线性代数应用的广泛性有所了解.

本书的编排情况为:

(1) 正文分为基本部分、引伸和应用部分及附录. 基本部分

共 6 章,引伸部分用打“\*”的办法安排在有关章节.

(2) 习题分为基本题、打“\*”题和补充题. 打“\*”题主要是一些证明题和引伸内容的训练题,补充题一般比打“\*”题更难一些.

对于课内不超过 40 学时的院校,我们建议以正文的基本部分和习题的基本题作为讲授和训练的基本要求.

本书由居余马(主编)与胡金德、林翠琴、王飞燕、邢文训合编,是在居余马(主编)与胡金德合编的《线性代数及其应用》的基础上作了较大修改而写成的. 第 1 章由王飞燕、第 2 章及附录 B 由胡金德、第 3,4 章由居余马、第 5,7 章由林翠琴、第 6 章及附录 A 由邢文训编写,最后由主编作了些修改而定稿. 由于水平所限,不妥或谬误之处在所难免,恳请读者和使用本教材的教师批评指正.

编 者

1994 年 5 月于清华园



# 目 录

<b>1 行列式</b>	(1)
1.1 $n$ 阶行列式的定义及性质	(1)
1.2 $n$ 阶行列式的计算	(12)
1.3 克莱姆(Cramer)法则	(22)
附录 性质 1 的证明 双重连加号	(27)
习题 补充题 答案	(33)
<b>2 矩阵</b>	(42)
2.1 高斯消元法	(42)
2.2 矩阵的加法 数量乘法 乘法	(50)
2.3 矩阵的转置 对称矩阵	(63)
2.4 可逆矩阵的逆矩阵	(65)
2.5 矩阵的初等变换和初等矩阵	(70)
2.6 分块矩阵	(80)
习题 补充题 答案	(91)
<b>3 线性方程组</b>	(107)
3.1 $n$ 维向量及其线性相关性	(107)
3.2 矩阵的秩 相抵标准形	(119)
3.3 齐次线性方程组有非零解的条件及解的结构	(129)
3.4 非齐次线性方程组有解的条件及解的结构	(134)
习题 补充题 答案	(140)
<b>4 向量空间与线性变换</b>	(151)
4.1 $R^n$ 的基与向量关于基的坐标	(151)
4.2 $R^n$ 中向量的内积 标准正交基和正交矩阵	(158)



* 4.3	线性空间的定义及简单性质 .....	(166)
* 4.4	线性子空间 .....	(169)
* 4.5	线性空间的基 维数 向量的坐标 .....	(175)
* 4.6	向量空间的线性变换 .....	(182)
	习题 补充题 答案 .....	(200)
<b>5</b>	<b>特征值和特征向量 矩阵的对角化 .....</b>	<b>(213)</b>
5.1	矩阵的特征值和特征向量 相似矩阵 .....	(213)
5.2	矩阵可对角化的条件 .....	(222)
5.3	实对称矩阵的对角化 .....	(231)
	习题 补充题 答案 .....	(237)
<b>6</b>	<b>二次型 .....</b>	<b>(245)</b>
6.1	二次型的定义和矩阵表示 合同矩阵 .....	(245)
6.2	化二次型为标准形 .....	(249)
6.3	惯性定理和二次型的规范形 .....	(266)
6.4	正定二次型和正定矩阵 .....	(269)
* 6.5	其它有定二次型 .....	(277)
	习题 补充题 答案 .....	(279)
<b>* 7</b>	<b>应用问题 .....</b>	<b>(289)</b>
7.1	人口模型 .....	(289)
7.2	马尔可夫链 .....	(297)
7.3	投入产出数学模型 .....	(302)
7.4	图的邻接矩阵 .....	(308)
7.5	递归关系式的矩阵解法 .....	(311)
7.6	矩阵分析(简介)及其在求解常系数线性微分方 程组中的应用 .....	(313)
* 7.7	不相容方程组的最小二乘解 .....	(319)
	习题 补充题 答案 .....	(325)
<b>附录 A</b>	<b>内积空间 厄米特二次型 .....</b>	<b>(334)</b>

A. 1	实内积空间 欧氏空间 .....	(334)
A. 2	度量矩阵和标准正交基 .....	(337)
A. 3	复向量的内积 酉空间 .....	(342)
A. 4	酉矩阵和厄米特二次型 .....	(345)
习题	答案 .....	(347)
<b>附录 B</b>	<b>约当(Jordan)标准形(简介) .....</b>	<b>(351)</b>
习题	答案 .....	(360)



# 1 行列式

在线性代数中,行列式是一个基本工具,讨论很多问题都要用到它. 在初等代数里,已经介绍过二、三阶行列式的定义、性质和计算,现在我们要进一步讨论  $n$  阶行列式. 本章主要内容: $n$  阶行列式定义及其性质;行列式的计算;求解一类非齐次线性方程组的 Cramer 法则,以及由此得到的方程个数与未知量个数相同的齐次线性方程组有非零解的必要条件.

## 1.1 $n$ 阶行列式的定义及性质

行列式的概念首先是在求解方程个数与未知量个数相同的一次方程组时提出来的(以后常把一次方程组称为线性方程组),例如对于一个二元一次方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 = b_2. \end{cases} \quad (1.1)$$

用消元法求解,当  $a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} \neq 0$  时,求得解为

$$x_1 = \frac{b_1a_{22} - a_{12}b_2}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}}, \quad x_2 = \frac{a_{11}b_2 - b_1a_{21}}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}}. \quad (1.2)$$

人们从(1.2)式中发现,如果记

$$D = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc, \quad (1.3)$$

则(1.2)可以表示为:

$$x_1 = \frac{\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}}, \quad x_2 = \frac{\begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}},$$

我们把(1.3)式中由四个数  $a, b, c, d$  排成的两(横)行、两(竖)列并定义为  $ad-bc$  的式子

$$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix},$$

叫做二阶行列式.

对于由九个元素  $a_{ij} (i, j=1, 2, 3)$  排成三行三列的式子定义为:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32}, \quad (1.4)$$

并称它为三阶行列式.

(1.4)式中的六项是按下面(1.5)式所示的方法(称为沙路法)得到的.

$$\begin{array}{ccc|ccc} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{11} & a_{12} & \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{21} & a_{22} & \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{31} & a_{32} & \\ \hline & & & & & \end{array} \quad (1.5)$$

(Diagram showing the Sarrus rule for a 3x3 determinant. The first three columns are repeated to the right. Solid arrows point from the top-left to the bottom-right of the first three columns, and dashed arrows point from the top-right to the bottom-left. The result is the sum of the products along the solid arrows minus the sum of the products along the dashed arrows.)

如果三元线性方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 = b_2, \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 = b_3, \end{cases}$$

的系数行列式

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \neq 0.$$

用消元法求解这个方程组可得

$$x_1 = \frac{D_1}{D}, \quad x_2 = \frac{D_2}{D}, \quad x_3 = \frac{D_3}{D}. \quad (1.6)$$

其中  $D_j (j=1, 2, 3)$  是用常数项  $b_1, b_2, b_3$  替换  $D$  中的第  $j$  列所得到的三阶行列式, 即

$$D_1 = \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & a_{13} \\ b_2 & a_{22} & a_{23} \\ b_3 & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}, \quad D_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & b_1 & a_{13} \\ a_{21} & b_2 & a_{23} \\ a_{31} & b_3 & a_{33} \end{vmatrix}, \quad D_3 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & b_2 \\ a_{31} & a_{32} & b_3 \end{vmatrix}.$$

但是, 对于  $n$  阶行列式 ( $n > 3$ ), 不能如 (1.5) 式 (沙路法) 那样定义. 因为如果象 (1.5) 式那样定义  $n$  阶行列式, 当  $n > 3$  时, 它将与二、三阶行列式没有统一的运算性质, 而且对  $n$  元线性方程组也得不到象 (1.6) 式那样的求解公式. 因此, 对一般的  $n$  阶行列式要用另外的方法来定义. 在代数中, 它可以用三种不同的方法作定义, 我们采用简明的递归法作定义.

我们从二、三阶行列式的展开式中, 发现它们遵循着一个共同的规律——可以按第一行展开, 得到

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}A_{11} + a_{12}A_{12} + a_{13}A_{13}, \quad (1.7)$$

其中  $A_{11}, A_{12}, A_{13}$  分别是  $a_{11}, a_{12}, a_{13}$  的代数余子式 (见后面的定义), 即

$$A_{11} = (-1)^{1+1} \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{22}a_{33} - a_{23}a_{32},$$

$$A_{12} = (-1)^{1+2} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{23}a_{31} - a_{21}a_{33},$$

$$A_{13} = (-1)^{1+3} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix} = a_{21}a_{32} - a_{22}a_{31}.$$

同样

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}A_{11} + a_{12}A_{12},$$

其中

$$A_{11} = (-1)^{1+1}|a_{22}| = a_{22}, \quad A_{12} = (-1)^{1+2}|a_{21}| = -a_{21}. \quad (1.8)$$

这里  $|a_{22}|$  ( $|a_{21}|$ ) 是一阶行列式 (不是数的绝对值). 我们把  $a$  的一阶行列式  $|a|$  定义为  $a$ .

如果把 (1.7)、(1.8) 两式作为三阶、二阶行列式的定义, 那么这种定义的方法是统一的, 它们都是用低阶行列式定义高一阶的行列式. 因此人们很自然地会想到, 用这种递归的方法来定义一般的  $n$  阶行列式. 对于这样定义的各阶行列式, 显然将会有统一的运算性质. 下面我们给出  $n$  阶行列式的递归法定义.

### 1.1.1 $n$ 阶行列式的定义

**定义** 由  $n^2$  个数  $a_{ij}$  ( $i, j=1, 2, \dots, n$ ) 组成的  $n$  阶行列式

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} \quad (\text{简记作 } |a_{ij}|_n) \quad (1.9)$$

是一个算式, 当  $n=1$  时,  $D = |a_{11}| = a_{11}$ .

当  $n \geq 2$  时,

$$D = a_{11}A_{11} + a_{12}A_{12} + \cdots + a_{1n}A_{1n} = \sum_{j=1}^n a_{1j}A_{1j}, \quad (1.10)$$

其中

$$A_{1j} = (-1)^{1+j}M_{1j},$$

$$M_{1j} = \begin{vmatrix} a_{21} & \cdots & a_{2j-1} & a_{2j+1} & \cdots & a_{2n} \\ a_{31} & \cdots & a_{3j-1} & a_{3j+1} & \cdots & a_{3n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nj-1} & a_{nj+1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} \quad (j = 1, 2, \cdots, n),$$

并称  $M_{1j}$  为元素  $a_{1j}$  的余子式,  $A_{1j}$  为元素  $a_{1j}$  的代数余子式.

在(1.9)式中,  $a_{11}, a_{22}, \cdots, a_{nn}$  所在的对角线称为行列式的主对角线, 相应地  $a_{11}, a_{22}, \cdots, a_{nn}$  称为主对角元, 另一条对角线称为行列式的副对角线.

由定义可见, 行列式这个算式是由其  $n^2$  个元素  $a_{ij}$  ( $i, j = 1, 2, \cdots, n$ ) 的乘积构成的和式(称作展开式), 二阶行列式的展开式中共有  $2!$  项, 三阶行列式的展开式中共有  $3!$  项,  $n$  阶行列式的展开式中共有  $n!$  项; 在  $n$  阶行列式的展开式中, 每一项都是不同行不同列的  $n$  个元素的乘积; 在全部  $n!$  项中, 带正号的项和带负号的项各占一半(以上结论可根据定义, 用数学归纳法给以证明); 整个展开式是  $n^2$  个元素  $a_{ij}$  的  $n$  次齐次多项式. 当第一行元素为  $x_1, x_2, \cdots, x_n$  时,  $n$  阶行列式是  $x_1, x_2, \cdots, x_n$  的一次齐次多项式.

**例 1** 证明  $n$  阶下三角行列式(当  $i < j$  时,  $a_{ij} = 0$ , 即主对角线以上元素全为 0)

$$D_n = \begin{vmatrix} a_{11} & & & \\ a_{21} & a_{22} & & \\ \cdots & \cdots & \cdots & \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}.$$

**证** 对  $n$  作数学归纳法,  $n=2$  时, 结论显然成立, 假设结论对  $n-1$  阶下三角行列式成立, 则由定义得

$$D_n = \begin{vmatrix} a_{11} & & & \\ a_{21} & a_{22} & & \\ \cdots & \cdots & \cdots & \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = (-1)^{1+1}a_{11} \begin{vmatrix} a_{22} & & & \\ a_{32} & a_{33} & & \\ \cdots & \cdots & \cdots & \\ a_{n2} & a_{n3} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix},$$



右端行列式是  $n-1$  阶下三角行列式, 根据归纳假设得

$$D_n = a_{11}(a_{22} a_{33} \cdots a_{nn}).$$

同理可证,  $n$  阶对角行列式

$$\begin{vmatrix} a_{11} & & & \\ & a_{22} & & \\ & & \ddots & \\ & & & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11} a_{22} \cdots a_{nn}.$$

**例 2** 计算  $n$  阶行列式

$$D_n = \begin{vmatrix} & & & & a_n \\ & & & a_{n-1} & * \\ & & \cdots & \cdots & \cdots \\ & a_2 & \cdots & * & * \\ a_1 & * & \cdots & * & * \end{vmatrix},$$

其中  $a_i \neq 0, (i=1, 2, \cdots, n)$ , “\*” 表示元素为任意数.

**解** 注意, 对一般的  $n$ , 这个行列式不等于  $(-a_1 a_2 \cdots a_n)$ . 利用行列式定义, 可得到

$$D_n = (-1)^{n+1} a_n \begin{vmatrix} & & & a_{n-1} \\ & & \cdots & \cdots \\ & a_2 & \cdots & * \\ a_1 & * & \cdots & * \end{vmatrix} = (-1)^{n-1} a_n D_{n-1},$$

再利用上面  $n$  阶与  $n-1$  阶行列式之间的关系(通常称递推关系), 递推可得

$$\begin{aligned} D_n &= (-1)^{n-1} a_n D_{n-1} = (-1)^{n-1} a_n (-1)^{n-2} a_{n-1} D_{n-2} \\ &= \cdots \cdots \cdots \\ &= (-1)^{(n-1)+(n-2)+\cdots+2+1} a_n a_{n-1} \cdots a_2 a_1 \\ &= (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} a_n a_{n-1} \cdots a_2 a_1. \end{aligned}$$

例如, 当  $n=4, 5$  时,  $D_4 = a_1 a_2 a_3 a_4$ ,  $D_5 = a_1 a_2 a_3 a_4 a_5$ .

当  $n=6, 7$  时,  $D_6 = -a_1 a_2 \cdots a_6, D_7 = -a_1 a_2 \cdots a_7$ .

### 1.1.2 $n$ 阶行列式的性质

直接用行列式的定义计算行列式,在一般情况下是较繁的.因此,我们要从定义推导出行列式的一些性质,以简化行列式的计算.

**性质 1** 行列式的行与列(按原顺序)互换,其值不变,即

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{n1} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{n2} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}. \quad (1.11)$$

这个性质可用数学归纳法证明,由于证明的表述较繁,我们略去其证明,有兴趣的读者可参阅本章附录.

有了这个性质,行列式对行成立的性质都适用于列.以下我们仅对行讨论行列式的性质.

**性质 2** 行列式(1.9)对任一行按下式展开,其值相等,即

$$D = a_{i1}A_{i1} + a_{i2}A_{i2} + \cdots + a_{in}A_{in} = \sum_{j=1}^n a_{ij}A_{ij}, \quad (1.12)$$

其中

$$(i = 1, 2, \cdots, n).$$

$$A_{ij} = (-1)^{i+j}M_{ij}.$$

$M_{ij}$ 是  $D$  中去掉第  $i$  行第  $j$  列元素所成的  $n-1$  阶行列式,它称为  $a_{ij}$  的余子式,  $A_{ij}$  称为  $a_{ij}$  的代数余子式.

证法与性质 1 的证明类似,也用数学归纳法(参阅本章附录).

**性质 3** (线性性质)有以下两条:

$$(i) \quad \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ ka_{i1} & ka_{i2} & \cdots & ka_{in} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = k \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}. \quad (1.13)$$

$$\begin{aligned}
 \text{(ii)} \quad & \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{i1} + b_{i1} & a_{i2} + b_{i2} & \cdots & a_{in} + b_{in} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} \\
 = & \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ b_{i1} & b_{i2} & \cdots & b_{in} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}. \quad (1.14)
 \end{aligned}$$

利用性质 2, 将(1.13)、(1.14)式中等号左端的行列式按第  $i$  行展开, 立即可得等号右端的结果.

由(1.13)式又可得

**推论 1** 某行元素全为零的行列式其值为零.

**性质 4** 行列式中两行对应元素全相等, 其值为零, 即当  $a_{il} = a_{jl}, l=1, 2, \cdots, n$  时, 有

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{j1} & a_{j2} & \cdots & a_{jn} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = 0. \quad (1.15)$$

**证** 用数学归纳法证明. 结果对二阶行列式显然成立, 假设结论对  $n-1$  阶行列式成立, 在  $n$  阶的情况下, 对第  $k$  行展开, ( $k \neq i, j$ ), 则

$$D = a_{k1}A_{k1} + a_{k2}A_{k2} + \cdots + a_{kn}A_{kn} = \sum_{l=1}^n a_{kl}A_{kl}.$$

由于  $M_{kl} (l=1, 2, \dots, n)$  是  $n-1$  阶行列式, 且其中都有两行元素相同, 所以  $A_{kl} = (-1)^{k+l} M_{kl} = 0, l=1, 2, \dots, n$ , 故  $D=0$ . ■

由性质 3(i) 和性质 4, 立即可得:

**推论 2** 行列式中两行对应元素成比例 (即  $a_{jl} = ka_{il}, i \neq j, l=1, 2, \dots, n, k$  是常数), 其值为零.

**性质 5** 在行列式中, 把某行各元素分别乘非零常数  $k$ , 再加到另一行的对应元素上, 行列式的值不变, 即

$$\begin{vmatrix}
 a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\
 \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\
 a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\
 \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\
 a_{j1} & a_{j2} & \cdots & a_{jn} \\
 \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\
 a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn}
 \end{vmatrix}
 =
 \begin{vmatrix}
 a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\
 \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\
 a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\
 \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\
 ka_{i1} + a_{j1} & ka_{i2} + a_{j2} & \cdots & ka_{in} + a_{jn} \\
 \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\
 a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn}
 \end{vmatrix}.
 \quad (1.16)$$

利用性质 3(ii) 和推论 2, 可证明 (1.16) 式成立.

**性质 6 (反对称性质)** 行列式的两行互换, 行列式的值反号.

**证** 重复用性质 5 和利用性质 3(i), 就有

$$\begin{aligned}
& \begin{vmatrix} \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{j1} & a_{j2} & \cdots & a_{jn} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \end{vmatrix} \\
= & \begin{vmatrix} \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{i1} + a_{j1} & a_{i2} + a_{j2} & \cdots & a_{in} + a_{jn} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{j1} & a_{j2} & \cdots & a_{jn} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \end{vmatrix} \\
= & \begin{vmatrix} \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{i1} + a_{j1} & a_{i2} + a_{j2} & \cdots & a_{in} + a_{jn} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ -a_{i1} & -a_{i2} & \cdots & -a_{in} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \end{vmatrix} \\
= & \begin{vmatrix} \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{j1} & a_{j2} & \cdots & a_{jn} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ -a_{i1} & -a_{i2} & \cdots & -a_{in} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \end{vmatrix} \\
= & - \begin{vmatrix} \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{j1} & a_{j2} & \cdots & a_{jn} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \end{vmatrix}.
\end{aligned}$$

**性质 7** 行列式某一行的元素乘另一行对应元素的代数余子式之和等于零, 即

$$\sum_{k=1}^n a_{ik} A_{jk} = a_{i1} A_{j1} + a_{i2} A_{j2} + \cdots + a_{in} A_{jn} = 0, (i \neq j). \quad (1.17)$$

证 根据性质 2, 行列式(1.9)对  $j$  行展开得

$$D = \sum_{k=1}^n a_{jk} A_{jk}.$$

因此, 将行列式(1.9)中第  $j$  行的元素  $a_{j1}, a_{j2}, \cdots, a_{jn}$  换成  $a_{i1}, a_{i2}, \cdots, a_{in}$  后所得的行列式, 其展开式就是  $\sum_{k=1}^n a_{ik} A_{jk}$ , 即

$$\sum_{k=1}^n a_{ik} A_{jk} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{j1} & a_{j2} & \cdots & a_{jn} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} \begin{matrix} \text{第 } i \text{ 行} \\ \text{第 } j \text{ 行} \end{matrix}$$

由于上式右端的行列式第  $i$  行和第  $j$  行对应元素相等, 故

$$\sum_{k=1}^n a_{ik} A_{jk} = 0. \quad \blacksquare$$

对于行列式(1.9), 我们可以把(1.10), (1.12), (1.17)式统一地写成

$$\sum_{k=1}^n a_{ik} A_{jk} = \delta_{ij} D,$$

其中

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{当 } i = j, \\ 0 & \text{当 } i \neq j. \end{cases} \quad (1.18)$$

同样, 行列式(1.9)对列展开, 也有

$$\sum_{k=1}^n a_{ki} A_{kj} = \delta_{ij} D. \quad (1.19)$$

## 1.2 $n$ 阶行列式的计算

这一节,我们通过例题来说明,利用行列式的定义和性质,计算  $n$  阶行列式的常用方法.

**例 1** 计算上三角行列式( $i > j$  时,  $a_{ij} = 0$ )

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ & & \cdots & \cdots \\ & & & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

**解** 利用 1.1 节中性质 1 和例 1 的结果,得

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & & & \\ a_{12} & a_{22} & & \\ \cdots & \cdots & \cdots & \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}.$$

**例 2** 计算 4 阶行列式.

$$D = \begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 & 2 \\ -1 & -1 & -4 & 1 \\ 2 & 4 & -6 & 1 \\ 1 & 2 & 4 & 2 \end{vmatrix}.$$

**解** 利用性质 5,把第 1 行分别乘 1, -2, -1 加到第 2, 3, 4 行上去得

$$D = \begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & -5 & 3 \\ 0 & 2 & -4 & -3 \\ 0 & 1 & 5 & 0 \end{vmatrix} \xrightarrow{\textcircled{2} \leftrightarrow \textcircled{4}} \begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 5 & 0 \\ 0 & 2 & -4 & -3 \\ 0 & 0 & -5 & 3 \end{vmatrix}$$

$$\begin{array}{l}
 \underline{\textcircled{3} + \textcircled{2} \times (-2)} \quad - \quad \begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & -14 & -3 \\ 0 & 0 & -5 & 3 \end{vmatrix} \\
 \underline{\textcircled{4} + \textcircled{3} \times \left(-\frac{5}{14}\right)} \quad - \quad \begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & -14 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 57/14 \end{vmatrix}
 \end{array}$$

$$= (-1) \times 1 \times 1 \times (-14) \times (57/14) = 57.$$

其中:  $\textcircled{2} \leftrightarrow \textcircled{4}$  表示第②行与第④行对换;  $\textcircled{3} + \textcircled{2} \times (-2)$  表示第③行加第②行乘  $(-2)$ ;  $\textcircled{4} + \textcircled{3} \times \left(-\frac{5}{14}\right)$  是类似的.

此例利用性质 5 和性质 6, 把数字行列式化为上三角行列式, 是计算数字行列式的基本方法. 但是对于三阶数字行列式, 用沙路法按对角线展开(计算 6 项乘积)可能更为简捷.

### 例 3 计算 4 阶行列式

$$D = \begin{vmatrix} 1 & 4 & -1 & 4 \\ 2 & 1 & 4 & 3 \\ 4 & 2 & 3 & 11 \\ 3 & 0 & 9 & 2 \end{vmatrix}.$$

**解** 利用性质 5, 把行列式某行(列)元素化为只剩一个非零元, 再利用性质 2, 把行列式按这行(列)展开, 从而降阶计算.

注意到  $D$  中第二列有一个 0, 再利用  $a_{22}=1$  把第二列中其余元素化为 0, 得

$$D = \begin{vmatrix} -7 & 0 & -17 & -8 \\ 2 & 1 & 4 & 3 \\ 0 & 0 & -5 & 5 \\ 3 & 0 & 9 & 2 \end{vmatrix}$$



$$\begin{aligned}
&= (-1)^{2+2} \times 1 \times \begin{vmatrix} -7 & -17 & -8 \\ 0 & -5 & 5 \\ 3 & 9 & 2 \end{vmatrix} \\
&= \begin{vmatrix} -7 & -17 & -8 \\ 0 & -5 & 5 \\ 3 & 9 & 2 \end{vmatrix}.
\end{aligned}$$

再把第三列加到第二列,按第二行展开

$$\begin{aligned}
D &= \begin{vmatrix} -7 & -17 & -8 \\ 0 & -5 & 5 \\ 3 & 9 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -7 & -25 & -8 \\ 0 & 0 & 5 \\ 3 & 11 & 2 \end{vmatrix} \\
&= (-1)^{2+3} \times 5 \times \begin{vmatrix} -7 & -25 \\ 3 & 11 \end{vmatrix} \\
&= -5 \times (-77 + 75) = 10.
\end{aligned}$$

**例 4** 行列式  $D = |a_{ij}|_n$  的元素满足  $a_{ij} = -a_{ji} (i, j = 1, 2, \dots, n)$ , 就称  $D$  是反对称行列式(其中  $a_{ii} = -a_{ii} \Rightarrow a_{ii} = 0, i = 1, \dots, n$ ).

证明奇数阶反对称行列式的值为零.

证 设  $D = \begin{vmatrix} 0 & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ -a_{12} & 0 & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ -a_{1n} & -a_{2n} & \cdots & 0 \end{vmatrix}.$

根据性质 1 和性质 3(i)

$$D = \begin{vmatrix} 0 & -a_{12} & -a_{13} & \cdots & -a_{1n} \\ a_{12} & 0 & -a_{23} & \cdots & -a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{1n} & a_{2n} & a_{3n} & \cdots & 0 \end{vmatrix}$$

$$\begin{aligned}
&= (-1)^n \begin{vmatrix} 0 & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ -a_{12} & 0 & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ -a_{1n} & -a_{2n} & -a_{3n} & \cdots & 0 \end{vmatrix} \\
&= (-1)^n D.
\end{aligned}$$

由  $n$  是奇数, 得  $D = -D$ , 故  $D = 0$ .

**例 5** 证明

$$\begin{vmatrix} a_1 + b_1 & b_1 + c_1 & c_1 + a_1 \\ a_2 + b_2 & b_2 + c_2 & c_2 + a_2 \\ a_3 + b_3 & b_3 + c_3 & c_3 + a_3 \end{vmatrix} = 2 \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}.$$

**证** 法 1: 把左端行列式的第 2, 3 列加到第 1 列, 提取公因子 2, 再把第 1 列乘  $(-1)$  加到第 2, 3 列得

$$\text{左式} = 2 \begin{vmatrix} a_1 + b_1 + c_1 & -a_1 & -b_1 \\ a_2 + b_2 + c_2 & -a_2 & -b_2 \\ a_3 + b_3 + c_3 & -a_3 & -b_3 \end{vmatrix}.$$

再把第 2, 3 列加到第 1 列, 然后分别提出 2, 3 列的公因数  $(-1)$ , 再作两次列对换, 等式就得证.

法 2: 对左式的各列依次用性质 3(ii), 将左式表示为  $2^3$  个行列式之和, 其中有 6 个行列式各有 2 列相等, 即

$$\begin{aligned}
\text{左式} &= \begin{vmatrix} a_1 & b_1 + c_1 & c_1 + a_1 \\ a_2 & b_2 + c_2 & c_2 + a_2 \\ a_3 & b_3 + c_3 & c_3 + a_3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} b_1 & b_1 + c_1 & c_1 + a_1 \\ b_2 & b_2 + c_2 & c_2 + a_2 \\ a_3 & b_3 + c_3 & c_3 + a_3 \end{vmatrix} \\
&= \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 + a_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 + a_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 + a_3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_1 & c_1 & c_1 + a_1 \\ a_2 & c_2 & c_2 + a_2 \\ a_3 & c_3 & c_3 + a_3 \end{vmatrix} + 0 \\
&\quad + \begin{vmatrix} b_1 & c_1 & c_1 + a_1 \\ b_2 & c_2 & c_2 + a_2 \\ b_3 & c_3 & c_3 + a_3 \end{vmatrix}
\end{aligned}$$

$$= \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} + 0 + 0 + 0 + 0 + 0 + 0 + \begin{vmatrix} b_1 & c_1 & a_1 \\ b_2 & c_2 & a_2 \\ b_3 & c_3 & a_3 \end{vmatrix}$$

= 右式. ■

**例 6** 计算  $n$  阶行列式

$$D = \begin{vmatrix} x & a & a & \cdots & a \\ a & x & a & \cdots & a \\ a & a & x & \cdots & a \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a & a & a & \cdots & x \end{vmatrix}.$$

**解** 把各列都加到第一列, 提出第一列的公因子  $[x + (n-1)a]$ , 然后将第一行乘  $-1$  分别加到其余各行,  $D$  就化为上三角形行列式, 即

$$\begin{aligned} D &= [x + (n-1)a] \begin{vmatrix} 1 & a & a & \cdots & a \\ 1 & x & a & \cdots & a \\ 1 & a & x & \cdots & a \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 1 & a & a & \cdots & x \end{vmatrix} \\ &= [x + (n-1)a] \begin{vmatrix} 1 & a & a & \cdots & a \\ & x-a & 0 & & 0 \\ & & x-a & & \\ & & & \ddots & 0 \\ & & & & x-a \end{vmatrix} \\ &= [x + (n-1)a](x-a)^{n-1}. \end{aligned}$$

**例 7** 计算 4 阶行列式

$$D = \begin{vmatrix} x_1 & a & a & a \\ a & x_2 & a & a \\ a & a & x_3 & a \\ a & a & a & x_4 \end{vmatrix} \quad (a \neq x_i, i = 1, 2, 3, 4).$$

**解** 将第 1 列乘  $(-1)$  加到其余各列, 得

$$D = \begin{vmatrix} x_1 & a - x_1 & a - x_1 & a - x_1 \\ a & x_2 - a & 0 & 0 \\ a & 0 & x_3 - a & 0 \\ a & 0 & 0 & x_4 - a \end{vmatrix},$$

再将第  $i$  行乘  $(x_1 - a)/(x_i - a)$  ( $i = 2, 3, 4$ ) 加到第一行, 得

$$\begin{aligned} D &= \begin{vmatrix} x_1 + a \sum_{i=2}^4 \frac{x_1 - a}{x_i - a} & & & \\ a & x_2 - a & & \\ a & 0 & x_3 - a & \\ a & 0 & 0 & x_4 - a \end{vmatrix} \\ &= \left[ x_1 + a(x_1 - a) \sum_{i=2}^4 \frac{1}{x_i - a} \right] (x_2 - a)(x_3 - a)(x_4 - a) \\ &= a \left[ \frac{x_1}{a(x_1 - a)} + \sum_{i=2}^4 \frac{1}{x_i - a} \right] \\ &\quad \cdot (x_1 - a)(x_2 - a)(x_3 - a)(x_4 - a) \\ &= a \left[ \frac{1}{a} + \sum_{i=1}^4 \frac{1}{x_i - a} \right] \prod_{i=1}^4 (x_i - a), \end{aligned}$$

其中  $\prod_{i=1}^4 (x_i - a)$  表示连乘积, 即  $(x_1 - a)(x_2 - a)(x_3 - a)(x_4 - a)$ .

**例 8** 计算  $n$  阶三对角行列式

$$D_n = \begin{vmatrix} \alpha + \beta & \alpha\beta & & & \\ & 1 & \alpha + \beta & \alpha\beta & \\ & & 1 & \alpha + \beta & \alpha\beta \\ & & & 1 & \alpha + \beta \\ & & & & 1 \end{vmatrix}.$$

解法 1: 把  $D_n$  按第一行展开, 得

$$\begin{aligned} D_n &= (\alpha + \beta)D_{n-1} - \alpha\beta \begin{vmatrix} 1 & \alpha\beta & & & \\ 0 & \alpha + \beta & \alpha\beta & & \\ & 1 & \alpha + \beta & \alpha\beta & \\ & & 1 & \alpha + \beta & \alpha\beta \\ & & & 1 & \alpha + \beta \end{vmatrix}_{n-1 \text{ 阶}} \\ &= (\alpha + \beta)D_{n-1} - \alpha\beta D_{n-2}, \end{aligned}$$

把这个递推公式改写成

$$D_n - \alpha D_{n-1} = \beta(D_{n-1} - \alpha D_{n-2}). \quad (1)$$

继续用递推公式①递推下去, 即得

$$D_n - \alpha D_{n-1} = \beta^2(D_{n-2} - \alpha D_{n-3}) = \cdots = \beta^{n-2}(D_2 - \alpha D_1).$$

而  $D_2 = (\alpha + \beta)^2 - \alpha\beta, \quad D_1 = \alpha + \beta.$

故  $D_n - \alpha D_{n-1} = \beta^n.$

将  $n$  分别用  $n, n-1, n-2, \cdots, 2$  代入上式得到

$$D_n - \alpha D_{n-1} = \beta^n,$$

$$D_{n-1} - \alpha D_{n-2} = \beta^{n-1},$$

$$D_{n-2} - \alpha D_{n-3} = \beta^{n-2},$$

.....

$$D_2 - \alpha D_1 = \beta^2.$$

把这些等式两端分别用  $1, \alpha, \alpha^2, \cdots, \alpha^{n-2}$  相乘, 然后再将它们相加, 得到

$$D_n - \alpha^{n-1}D_1 = \beta^n + \alpha\beta^{n-1} + \alpha^2\beta^{n-2} + \cdots + \alpha^{n-2}\beta^2$$

把  $D_1 = \alpha + \beta$  代入并移项, 得

$$D_n = \beta^n + \alpha\beta^{n-1} + \alpha^2\beta^{n-2} + \cdots + \alpha^{n-2}\beta^2 + \alpha^{n-1}\beta + \alpha^n \\ = \begin{cases} (n+1)\alpha^n, & \text{当 } \alpha = \beta; \\ \frac{\beta^{n+1} - \alpha^{n+1}}{\beta - \alpha}, & \text{当 } \alpha \neq \beta. \end{cases}$$

法 2: 把原行列式表示为下述形式:

$$D_n = \begin{vmatrix} (\alpha + \beta) & (\alpha\beta + 0) & (0 + 0) & \cdots & (0 + 0) & (0 + 0) \\ (0 + 1) & (\alpha + \beta) & (\alpha\beta + 0) & \cdots & (0 + 0) & (0 + 0) \\ (0 + 0) & (0 + 1) & (\alpha + \beta) & \cdots & (0 + 0) & (0 + 0) \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & (\alpha + \beta) & (\alpha\beta + 0) \\ (0 + 0) & (0 + 0) & (0 + 0) & \cdots & (0 + 1) & (\alpha + \beta) \end{vmatrix} \quad (2)$$

再利用行列式性质 3(ii) 将  $D_n$  表示为  $2^n$  个  $n$  阶行列式之和 (如例 4 那样), 其中每一列是行列式②中该列的两个子列之一. 容易看出, 每一列的第二子列与下一列的第一子列成比例. 因此, 在  $2^n$  个行列式中不为 0 的只有  $n+1$  个, 即各列都选第一子列, 或者由第  $i$  列起以后都选第二子列 ( $i = n, n-1, \cdots, 1$ ), 而前  $(i-1)$  列都选第一子列. 也得

$$D_n = \alpha^n + \alpha^{n-1}\beta + \alpha^{n-2}\beta^2 + \cdots + \alpha\beta^{n-1} + \beta^n$$

**例 9** 证明范德蒙 (Vandermonde) 行列式

$$V_n = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ x_1 & x_2 & x_3 & \cdots & x_n \\ x_1^2 & x_2^2 & x_3^2 & \cdots & x_n^2 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ x_1^{n-1} & x_2^{n-1} & x_3^{n-1} & \cdots & x_n^{n-1} \end{vmatrix} \\ = \prod_{1 \leq j < i \leq n} (x_i - x_j),$$

其中连乘积

$$\prod_{1 \leq j < i \leq n} (x_i - x_j) = (x_2 - x_1)(x_3 - x_1) \cdots (x_n - x_1) \cdot (x_3 - x_2) \cdots (x_n - x_2) \cdots (x_{n-1} - x_{n-2})(x_n - x_{n-2})(x_n - x_{n-1})$$

是满足条件  $1 \leq j < i \leq n$  的所有因子  $(x_i - x_j)$  的乘积.

证 用数学归纳法证明. 当  $n=2$  时,

$$V_2 = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ x_1 & x_2 \end{vmatrix} = (x_2 - x_1) = \prod_{1 \leq j < i \leq 2} (x_i - x_j),$$

结论成立. 假设结论对  $n-1$  阶范德蒙行列式成立, 下面证明对  $n$  阶范德蒙行列式结论也成立.

在  $V_n$  中, 从第  $n$  行起, 依次将前一行乘  $-x_1$  加到后一行, 得

$$V_n = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 0 & x_2 - x_1 & x_3 - x_1 & \cdots & x_n - x_1 \\ 0 & x_2(x_2 - x_1) & x_3(x_3 - x_1) & \cdots & x_n(x_n - x_1) \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & x_2^{n-2}(x_2 - x_1) & x_3^{n-2}(x_3 - x_1) & \cdots & x_n^{n-2}(x_n - x_1) \end{vmatrix}.$$

按第一列展开, 并分别提取公因子, 得

$$V_n = (x_2 - x_1)(x_3 - x_1) \cdots (x_n - x_1) \begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ x_2 & x_3 & \cdots & x_n \\ x_2^2 & x_3^2 & \cdots & x_n^2 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ x_2^{n-2} & x_3^{n-2} & \cdots & x_n^{n-2} \end{vmatrix}.$$

上式右端的行列式是  $n-1$  阶范德蒙行列式, 根据归纳假设得

$$V_n = (x_2 - x_1)(x_3 - x_1) \cdots (x_n - x_1) \prod_{2 \leq j < i \leq n} (x_i - x_j),$$

故

$$V_n = \prod_{1 \leq j < i \leq n} (x_i - x_j). \quad \blacksquare$$

**例 10** 证明

$$\begin{aligned}
 D &= \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1k} & 0 & \cdots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2k} & 0 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{k1} & a_{k2} & \cdots & a_{kk} & 0 & \cdots & 0 \\ c_{11} & c_{12} & \cdots & c_{1k} & b_{11} & \cdots & b_{1m} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ c_{m1} & c_{m2} & \cdots & c_{mk} & b_{m1} & \cdots & b_{mm} \end{vmatrix} \\
 &= \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1k} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2k} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{k1} & a_{k2} & \cdots & a_{kk} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} b_{11} & \cdots & b_{1m} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ b_{m1} & \cdots & b_{mm} \end{vmatrix}. \quad (1.20)
 \end{aligned}$$

证 记

$$|A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1k} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2k} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{k1} & a_{k2} & \cdots & a_{kk} \end{vmatrix}, \quad |B| = \begin{vmatrix} b_{11} & \cdots & b_{1m} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ b_{m1} & \cdots & b_{mm} \end{vmatrix}.$$

对 $|A|$ 的阶数 $k$ 作数学归纳法. 当 $k=1$ 时, 对 $D$ 的第一行展开, 得 $D=a_{11}|B|=|a_{11}||B|$  (这里 $|a_{11}|$ 是一阶行列式), (1.20)式成立. 假设 $|A|$ 为 $k-1$ 阶时, (1.20)式成立. 下面考虑 $|A|$ 为 $k$ 阶的情形: 此时, 将 $D$ 对第一行展开, 得

$$D = a_{11}(-1)^{1+1}M_{11}^D + a_{12}(-1)^{1+2}M_{12}^D + \cdots + a_{1k}(-1)^{1+k}M_{1k}^D, \quad (1)$$

其中 $M_{1j}^D$ 是 $a_{1j}$ 在 $D$ 中的余子式( $j=1, 2, \cdots, k$ ). 显然 $M_{1j}^D$ 也是(1.20)式类型的行列式, 而且它的左上角是 $k-1$ 阶的, 根据归纳假设

$$M_{1j}^D = M_{1j}^{|A|}|B|, \quad j=1, 2, \cdots, k, \quad (2)$$

其中 $M_{1j}^{|A|}$ 是 $a_{1j}$ 在 $|A|$ 中的余子式. 将②式代入①式, 即得



所以  $|A|$  为  $k$  阶时, (1.20) 式成立. 因此  $|A|$  为任意阶时, (1.20) 式都成立.  $\blacksquare$

$$D = \begin{vmatrix} A & 0 \\ * & B \end{vmatrix} = |A| |B|.$$
$$D = \begin{vmatrix} A & * \\ 0 & B \end{vmatrix} = |A| |B|. \quad (1.21)$$
$$D = \begin{vmatrix} 0 & A \\ B & * \end{vmatrix} \neq -|A||B|.$$
$$\begin{vmatrix} 0 & A \\ B & * \end{vmatrix} = (-1)^{k \times m} \begin{vmatrix} A & 0 \\ * & B \end{vmatrix} = (-1)^{k \times m} |A| |B|. \quad (1.22)$$

这一节讨论： $n$  个未知量  $n$  个方程的线性方程组，在系数行列式不等于零时的行列式解法，通常称为 **Cramer 法则**；并进一步给出  $n$  个未知量  $n$  个方程的线性齐次方程组有非零解的必要条件。

[illegible]

$$(\text{或简记为 } \sum_{j=1}^n a_{ij}x_j = b_i, i = 1, 2, \dots, n) \quad (1.24)$$

其系数行列式

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} \neq 0,$$

则方程组(1.23)有唯一解

$$x_j = \frac{D_j}{D} \quad j = 1, 2, \dots, n. \quad (1.25)$$

其中  $D_j$  是用常数项  $b_1, b_2, \dots, b_n$  替换  $D$  中第  $j$  列所成的行列式, 即

$$D_j = \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1j-1} & b_1 & a_{1j+1} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & \cdots & a_{2j-1} & b_2 & a_{2j+1} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nj-1} & b_n & a_{nj+1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}. \quad (1.26)$$

证 先证(1.25)是方程组(1.23)的解, 根据(1.26)式

$$D_j = b_1 A_{1j} + b_2 A_{2j} + \cdots + b_n A_{nj} = \sum_{k=1}^n b_k A_{kj},$$

其中  $A_{kj}$  是系数行列式中元素  $a_{kj}$  的代数余子式.

将  $x_j = \frac{1}{D} \sum_{k=1}^n b_k A_{kj} (j=1, 2, \dots, n)$  代入(1.24)式左端, 得

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^n a_{ij} \left( \frac{1}{D} \sum_{k=1}^n b_k A_{kj} \right) &= \frac{1}{D} \sum_{j=1}^n \left( \sum_{k=1}^n a_{ij} A_{kj} b_k \right) \\ &\stackrel{*}{=} \frac{1}{D} \sum_{k=1}^n \left( \sum_{j=1}^n a_{ij} A_{kj} b_k \right) = \frac{1}{D} \sum_{k=1}^n b_k \left( \sum_{j=1}^n a_{ij} A_{kj} \right) \\ &= \frac{1}{D} \sum_{k=1}^n b_k \delta_{ik} D \quad (k=i \text{ 时}, \delta_{ik} = 1, k \neq i \text{ 时}, \delta_{ik} = 0) \\ &= \frac{1}{D} (b_i \cdot 1 \cdot D) = b_i \quad (i = 1, 2, \dots, n). \end{aligned}$$

所以(1.25)式中的  $x_j = D_j/D (j=1, 2, \dots, n)$  满足方程组(1.23)中的每一个方程, 因此它是方程组(1.23)的解.

[illegible]
$$\begin{aligned} & \left( \sum_{i=1}^n a_{i1} A_{i,j} \right) c_1 + \cdots + \left( \sum_{i=1}^n a_{ij} A_{i,j} \right) c_j + \cdots + \left( \sum_{i=1}^n a_{in} A_{i,j} \right) c_n \\ &= \sum_{i=1}^n b_i A_{i,j}. \end{aligned}$$
$$c_j = \frac{D_j}{D}.$$

由 Cramer 法则, 立即可得下面的推论 1.

$$\sum_{j=1}^n a_{ij}x_j = 0 \quad (i = 1, 2, \dots, n)$$

• 24 •

$$x_j = 0, \quad (j = 1, 2, \dots, n).$$

由推论 1 又可得推论 2.

**推论 2** 齐次线性方程组

$$\sum_{j=1}^n a_{ij}x_j = 0 \quad (i = 1, 2, \dots, n)$$

有非零解的必要条件是系数行列式  $D = |a_{ij}|_n = 0$ .

在第 3 章中,我们将进一步证明,  $D=0$  也是齐次线性方程组 (1.23) 有非零解的充分条件.

用 Cramer 法则求解系数行列式不等于零的  $n$  元非齐次线性方程组,需要计算  $n+1$  个  $n$  阶行列式,它的计算工作量很大. 实际上关于数字系数的线性方程组(包括系数行列式等于零及方程个数和未知量个数不相同的线性方程组)的解法,一般都采用第 2 章中介绍的高斯消元法. Cramer 法则主要是在理论上具有重要意义,特别是它明确地揭示了方程组的解和系数之间的关系.

**例 1** 已知三次曲线  $y=f(x)=a_0+a_1x+a_2x^2+a_3x^3$  在四个点  $x=\pm 1, x=\pm 2$  处的值为:  $f(1)=f(-1)=f(2)=6, f(-2)=-6$ , 试求其系数  $a_0, a_1, a_2, a_3$ .

**解** 将三次曲线在 4 点处的值代入其方程,得到关于  $a_0, a_1, a_2, a_3$  的非齐次线性方程组

$$\begin{cases} a_0 + a_1 + a_2 + a_3 = 6, \\ a_0 + a_1(-1) + a_2(-1)^2 + a_3(-1)^3 = 6, \\ a_0 + a_1(2) + a_2(2)^2 + a_3(2)^3 = 6, \\ a_0 + a_1(-2) + a_2(-2)^2 + a_3(-2)^3 = -6. \end{cases}$$

它的系数行列式是 Vandermonde 行列式

$$D = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & (-1)^2 & (-1)^3 \\ 1 & 2 & 2^2 & 2^3 \\ 1 & -2 & (-2)^2 & (-2)^3 \end{vmatrix}$$

$$= (-1-1)(2-1)(-2-1)(2+1)(-2+1) \\ (-2-2) = -72.$$

于是,由 Cramer 法则可得三次曲线方程的系数

$$a_j = \frac{D_j}{D}, \quad j = 0, 1, 2, 3,$$

其中

$$D_0 = \begin{vmatrix} 6 & 1 & 1 & 1 \\ 6 & -1 & 1 & -1 \\ 6 & 2 & 4 & 8 \\ -6 & -2 & 4 & -8 \end{vmatrix} = -576,$$

$$D_1 = \begin{vmatrix} 1 & 6 & 1 & 1 \\ 1 & 6 & 1 & -1 \\ 1 & 6 & 4 & 8 \\ 1 & -6 & 4 & -8 \end{vmatrix} = 72,$$

$$D_2 = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 6 & 1 \\ 1 & -1 & 6 & -1 \\ 1 & 2 & 6 & 8 \\ 1 & -2 & -6 & -8 \end{vmatrix} = 144,$$

$$D_3 = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 6 \\ 1 & -1 & 1 & 6 \\ 1 & 2 & 4 & 6 \\ 1 & -2 & 4 & -6 \end{vmatrix} = -72.$$

所以  $a_0 = 8, a_1 = -1, a_2 = -2, a_3 = 1$ , 即所求的三次曲线方程为

$$f(x) = 8 - x - 2x^2 + x^3.$$

由上述解题过程可知:过  $n+1$  个  $x$  坐标不同的点  $(x_i, y_i), i = 1, 2, \dots, n+1$ , 可以唯一地确定一个  $n$  次曲线的方程  $y = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_nx^n$ .

**例 2** 求四个平面  $a_ix + b_iy + c_iz + d_i = 0 (i = 1, 2, 3, 4)$  相交于

一点的充分必要条件.

**解** 我们把平面方程写成

$$a_i x + b_i y + c_i z + d_i t = 0,$$

其中  $t=1$ , 于是四个平面交于一点, 即  $x, y, z, t$  的齐次线性方程组

$$\begin{cases} a_1 x + b_1 y + c_1 z + d_1 t = 0, \\ a_2 x + b_2 y + c_2 z + d_2 t = 0, \\ a_3 x + b_3 y + c_3 z + d_3 t = 0, \\ a_4 x + b_4 y + c_4 z + d_4 t = 0, \end{cases}$$

有唯一的一组非零解  $(x_0, y_0, z_0, 1)$ , 根据齐次线性方程组有非零解的必要充分条件(充分性以后将证明)是系数行列式等于零, 即得四平面相交于一点的充分必要条件为

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 & d_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 & d_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 & d_3 \\ a_4 & b_4 & c_4 & d_4 \end{vmatrix} = 0.$$

## 附录 性质 1 的证明 双重连加号

### I. 性质 1 的证明

$$\text{证明 } \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{n1} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{n2} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

**证** 对行列式的阶数作数学归纳法, 将等式两端的行列式分别记作  $D$  和  $D'$ .

当  $n=2$  时,  $D=D'$  显然成立, 假设结论对小于  $n$  阶的行列式都成立, 下面考虑  $n$  阶的情况: 根据定义

$$D = a_{11}A_{11} + a_{12}A_{12} + \cdots + a_{1n}A_{1n},$$

$$D' = a_{11}A_{11} + a_{21}A'_{21} + \cdots + a_{n1}A'_{n1}.$$

由于  $D'$  中  $a_{11}$  的余子式  $M'_{11}$  ( $n-1$  阶行列式) 行与列互换就是  $D$  中  $a_{11}$  的余子式  $M_{11}$ , 所以根据归纳假设得  $A'_{11} = A_{11}$ . 于是

$$\begin{aligned} D' = & a_{11}A_{11} + (-1)^{1+2}a_{21} \begin{vmatrix} a_{12} & a_{32} & \cdots & a_{n2} \\ a_{13} & a_{33} & \cdots & a_{n3} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{1n} & a_{3n} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} \\ & + (-1)^{1+3}a_{31} \begin{vmatrix} a_{12} & a_{22} & a_{42} & \cdots & a_{n2} \\ a_{13} & a_{23} & a_{43} & \cdots & a_{n3} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{1n} & a_{2n} & a_{4n} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} \\ & + \cdots + (-1)^{1+n}a_{n1} \begin{vmatrix} a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{n-1,2} \\ a_{13} & a_{23} & \cdots & a_{n-1,3} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{n-1,n} \end{vmatrix}. \end{aligned}$$

为了证明  $D' = D$ , 我们要将上式右端  $(n-1)$  个  $n-1$  阶行列式展开, 以便证明上式后  $(n-1)$  项等于  $a_{12}A_{12} + \cdots + a_{1n}A_{1n}$ . 为此, 根据归纳假设可直接按第一列展开, 得到

$$\begin{aligned} D' = & a_{11}A_{11} + \left\{ (-1)^{1+2}a_{12} \begin{vmatrix} a_{21} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_{33} & \cdots & a_{n3} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & a_{3n} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} \right. \\ & \left. + (-1)^{1+3}a_{13}(-1) \begin{vmatrix} 0 & a_{31} & 0 & \cdots & 0 \\ a_{23} & 0 & a_{43} & \cdots & a_{n3} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{2n} & 0 & a_{4n} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} \right. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \dots + (-1)^{1+n} a_{12} (-1)^{n-2} \left\{ \begin{array}{c} \left| \begin{array}{cccc} 0 & \dots & 0 & a_{n1} \\ a_{23} & \dots & a_{n-1,3} & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{2n} & \dots & a_{n-1,n} & 0 \end{array} \right| \end{array} \right\} \\
& + \left\{ (-1)^{1+2} a_{13} (-1)^{1+2} \left| \begin{array}{cccc} a_{21} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & a_{32} & \dots & a_{n2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & a_{3n} & \dots & a_{nn} \end{array} \right| \right. \\
& + (-1)^{1+3} a_{13} (-1)^{1+2} (-1) \left. \left| \begin{array}{ccccc} 0 & a_{31} & 0 & \dots & 0 \\ a_{22} & 0 & a_{42} & \dots & a_{n2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{2n} & 0 & a_{4n} & \dots & a_{nn} \end{array} \right| \right. \\
& + \dots + (-1)^{1+n} a_{13} (-1)^{1+2} (-1)^{n-2} \left. \left\{ \begin{array}{c} \left| \begin{array}{cccc} 0 & \dots & 0 & a_{n1} \\ a_{22} & \dots & a_{n-1,2} & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{2n} & \dots & a_{n-1,n} & 0 \end{array} \right| \end{array} \right\} \right. \\
& + \dots + \left\{ (-1)^{1+2} a_{1n} (-1)^{1+n-1} \left| \begin{array}{cccc} a_{21} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & a_{32} & \dots & a_{n2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & a_{3,n-1} & \dots & a_{n,n-1} \end{array} \right| \right. \\
& + (-1)^{1+3} a_{1n} (-1)^{1+n-1} (-1) \left. \left| \begin{array}{ccccc} 0 & a_{31} & 0 & \dots & 0 \\ a_{22} & 0 & a_{42} & \dots & a_{n2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{2,n-1} & 0 & a_{4,n-1} & \dots & a_{n,n-1} \end{array} \right| \right. \\
& + \dots
\end{aligned}$$



$$\begin{aligned}
& + (-1)^{1+n} a_{1n} (-1)^{1+n-1} (-1)^{n-2} \left\{ \begin{vmatrix} 0 & \cdots & 0 & a_{n1} \\ a_{22} & \cdots & a_{n-1,2} & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{2,n-1} & \cdots & a_{n-1,n-1} & 0 \end{vmatrix} \right\} \\
& = a_{11} A_{11} + (-1)^{1+2} a_{12} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{31} & \cdots & a_{n1} \\ a_{23} & a_{33} & \cdots & a_{n3} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{2n} & a_{3n} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} \\
& + (-1)^{1+3} a_{13} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{31} & \cdots & a_{n1} \\ a_{22} & a_{32} & \cdots & a_{n2} \\ a_{24} & a_{34} & \cdots & a_{n4} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{2n} & a_{3n} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} \\
& + \cdots + (-1)^{1+n} a_{1n} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{31} & \cdots & a_{n1} \\ a_{22} & a_{32} & \cdots & a_{n2} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{2,n-1} & a_{3,n-1} & \cdots & a_{n,n-1} \end{vmatrix}.
\end{aligned}$$

根据归纳假设,将上面  $n-1$  个  $n-1$  阶行列式的行与列互换,就证明了

$$D' = a_{11}A_{11} + a_{12}A_{12} + a_{13}A_{13} + \cdots + a_{1n}A_{1n} \quad \blacksquare$$

## II. 性质 2 的证明

证明  $a_{i1}A_{i1} + a_{i2}A_{i2} + \cdots + a_{in}A_{in}$

$$= a_{11}A_{11} + a_{12}A_{12} + \cdots + a_{1n}A_{1n} \quad (i = 2, 3, \cdots, n).$$

证 用类似于性质 I 的证明方法,读者不难证明上式对任意的  $i$  ( $2 \leq i \leq n$ ) 都成立.

## III. 关于双重连加号“ $\sum \sum$ ”

对于  $n$  个数连加的式子

$$a_1 + a_2 + \cdots + a_n,$$

为了简便起见,我们可用连加号  $\sum$ , 把它记作  $\sum_{i=1}^n a_i$ .

例如 
$$\sum_{i=1}^n i^2 = 1^2 + 2^2 + \cdots + n^2,$$

其中  $i$  称为求和指标,它只起辅助作用,因为把  $\sum_{i=1}^n i^2$  还原成  $n$  个数的平方和,  $i$  不再现出,所以  $1^2 + 2^2 + \cdots + n^2$  也可记作  $\sum_{j=1}^n j^2$ , 因此求和指标是可以任意选择的.

有时连加的数是用两个指标来编号的,例如  $m \times n$  个数排成  $m$  行  $n$  列

$$\begin{array}{c} a_{11}a_{12}\cdots a_{1j}\cdots a_{1n} \\ a_{21}a_{22}\cdots a_{2j}\cdots a_{2n} \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{i1}a_{i2}\cdots a_{ij}\cdots a_{in} \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{m1}a_{m2}\cdots a_{mj}\cdots a_{mn} \end{array} \quad \textcircled{1}$$

求它们的和数  $S$ . 可以先把第  $i$  行的  $n$  个数相加,记作  $S_i = \sum_{j=1}^n a_{ij}$  (称为对  $j$  指标求和),然后把  $m$  个行的和数  $S_1, S_2, \cdots, S_m$  相加,记作

$$S = \sum_{i=1}^m S_i = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n a_{ij}. \quad \textcircled{2}$$

同样也可以先把第  $j$  列的  $m$  个数相加,记作  $S'_j = \sum_{i=1}^m a_{ij}$  (称为对  $i$  指标求和). 再把  $n$  个列的和数  $S'_1, S'_2, \cdots, S'_n$  相加,记作

$$S = \sum_{j=1}^n S'_j = \sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^m a_{ij}. \quad \textcircled{3}$$

②,③两个式子是用双重连加号求和以表示①式中  $m \times n$  个数的和数,②式是先对指标  $j$  求和后对指标  $i$  求和;③式是先对指标  $i$  求和,后对指标  $j$  求和,显然②,③式是相等的,即

$$\sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n a_{ij} = \sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^m a_{ij}. \quad (4)$$

④式表明,用双重连加号求和时,对指标  $i, j$  的求和次序可以颠倒.

有时,对用两个指标编号的数,求其一部分数的和时,可以在连加号下注明求和指标应满足的条件,例如

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^{n-1} \sum_{i < i \leq n} a_{ij} &= (a_{21} + a_{31} + a_{41} + \cdots + a_{n1}) \quad j = 1 \\ &+ (a_{32} + a_{42} + \cdots + a_{n2}) \quad j = 2 \\ &+ (a_{43} + \cdots + a_{n3}) \quad j = 3 \\ &+ \cdots \\ &+ a_{n, n-1} \quad j = n - 1 \end{aligned}$$

又如,对于两个多项式

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0,$$

$$g(x) = b_m x^m + b_{m-1} x^{m-1} + \cdots + b_1 x + b_0,$$

求其乘积  $f(x)g(x)$  中  $x^k$  的系数,就可以表示为

$$\sum_{i+j=k} a_i b_j.$$

例如  $x^4$  的系数为  $\sum_{i+j=4} a_i b_j = a_0 b_4 + a_1 b_3 + a_2 b_2 + a_3 b_1 + a_4 b_0.$

此外,某  $n$  个数的和与另  $m$  个数的和之积也可用双重连加号表示,即

$$(a_1 + a_2 + \cdots + a_n)(b_1 + b_2 + \cdots + b_m) = \sum_{i=1}^n a_i \sum_{j=1}^m b_j.$$

利用分配律,上式得

$$\begin{aligned}
&= \sum_{i=1}^n \left( \sum_{j=1}^m a_i b_j \right) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m a_i b_j \stackrel{\text{或}}{=} \sum_{j=1}^m \left( \sum_{i=1}^n a_i b_j \right) \\
&= \sum_{j=1}^m \sum_{i=1}^n a_i b_j.
\end{aligned}$$

其中  $\sum_{j=1}^m a_i b_j$  是对指标  $j$  求和, 此时指标  $i$  不变, 这种情况下的和式

$$\sum_{j=1}^m a_i b_j = a_i \sum_{j=1}^m b_j.$$

## 习题 补充题 答案

### 习题

计算下列 2, 3 阶行列式:

$$1. \begin{vmatrix} a^2 & ab \\ ab & b^2 \end{vmatrix}, \quad 2. \begin{vmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha \\ \sin \alpha & \cos \alpha \end{vmatrix}, \quad 3. \begin{vmatrix} a+bi & b \\ 2a & a-bi \end{vmatrix}.$$

$$4. \begin{vmatrix} 3 & 2 & -4 \\ 4 & 1 & -2 \\ 5 & 2 & -3 \end{vmatrix}, \quad 5. \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{vmatrix}.$$

$$6. \begin{vmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 4 & 1 & -1 \\ 202 & 199 & 101 \end{vmatrix}.$$

$$7. \begin{vmatrix} 1 & \omega & \omega^2 \\ \omega^2 & 1 & \omega \\ \omega & \omega^2 & 1 \end{vmatrix}, \text{ 其中 } \omega = -\frac{1}{2} + i \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

$$8. \begin{vmatrix} 1 & x & x \\ x & 2 & x \\ x & x & 3 \end{vmatrix}.$$

计算下列数字元素行列式:

$$9. \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 4 & 3 \\ 0 & 4 & 3 & 2 \\ 4 & 3 & 2 & 1 \end{vmatrix} \quad 10. \begin{vmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 2 & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 8 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 9 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 10 \end{vmatrix}.$$

$$11. \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & -1 \end{vmatrix} \quad 12. \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 1 \\ 3 & 4 & 1 & 2 \\ 4 & 1 & 2 & 3 \end{vmatrix}.$$

$$13. \begin{vmatrix} 5 & 0 & 4 & 2 \\ 1 & -1 & 2 & 1 \\ 4 & 1 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} \quad 14. \begin{vmatrix} 3 & 6 & 5 & 6 & 4 \\ 5 & 9 & 7 & 8 & 6 \\ 6 & 12 & 13 & 9 & 7 \\ 4 & 6 & 6 & 5 & 4 \\ 2 & 5 & 4 & 5 & 3 \end{vmatrix}.$$

$$15. \begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 \\ 3 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & 5 & 1 \end{vmatrix} \quad 16. \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 6 & 7 & 8 & 9 & 10 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \end{vmatrix}.$$

$$17. \begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 3 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 4 & 0 \\ 1 & 2 & 4 & 0 & -1 \\ 3 & 1 & 2 & 5 & 8 \end{vmatrix}.$$

$$18. \begin{vmatrix} * & * & * & * & * & 1 & 0 & 0 \\ * & * & * & * & * & 1 & 2 & 0 \\ * & * & * & * & * & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -5 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}.$$

证明下列恒等式:

$$19. \begin{vmatrix} a_1+b_1x & a_1x+b_1 & c_1 \\ a_2+b_2x & a_2x+b_2 & c_2 \\ a_3+b_3x & a_3x+b_3 & c_3 \end{vmatrix} = (1-x^2) \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}.$$

$$20. \begin{vmatrix} 1+x & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1-x & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1+y & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1-y \end{vmatrix} = x^2y^2.$$

$$21. \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ a^3 & b^3 & c^3 \end{vmatrix} = (a+b+c)(b-a)(c-a)(c-b).$$

$$22. \begin{vmatrix} 1 & a^2 & a^3 \\ 1 & b^2 & b^3 \\ 1 & c^2 & c^3 \end{vmatrix} = (ab+bc+ca) \begin{vmatrix} 1 & a & a^2 \\ 1 & b & b^2 \\ 1 & c & c^2 \end{vmatrix}.$$

计算下列各题:

$$23. \begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 & a \\ 2 & 0 & b & 0 \\ 3 & c & 4 & 5 \\ d & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}, \quad 24. \begin{vmatrix} a & 1 & 0 & 0 \\ -1 & b & 1 & 0 \\ 0 & -1 & c & 1 \\ 0 & 0 & -1 & d \end{vmatrix}.$$

$$25. \begin{vmatrix} a^2 & (a+1)^2 & (a+2)^2 & (a+3)^2 \\ b^2 & (b+1)^2 & (b+2)^2 & (b+3)^2 \\ c^2 & (c+1)^2 & (c+2)^2 & (c+3)^2 \\ d^2 & (d+1)^2 & (d+2)^2 & (d+3)^2 \end{vmatrix}.$$

$$26. \begin{vmatrix} a & b & c & 1 \\ b & c & a & 1 \\ c & a & b & 1 \\ \frac{b+c}{2} & \frac{c+a}{2} & \frac{a+b}{2} & 1 \end{vmatrix}.$$

$$27. \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & \cdots & n-1 & n \\ 1 & -1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -2 & \cdots & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & n-1 & -(n-1) \end{vmatrix}.$$

$$28. \begin{vmatrix} 1 & 2 & 2 & \cdots & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 2 & \cdots & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 3 & \cdots & 2 & 2 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 2 & 2 & 2 & \cdots & n-1 & 2 \\ 2 & 2 & 2 & \cdots & 2 & n \end{vmatrix}.$$

$$29. \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ a & a-1 & a-2 & \cdots & a-n \\ a^2 & (a-1)^2 & (a-2)^2 & \cdots & (a-n)^2 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \end{vmatrix}.$$

$$30. \begin{vmatrix} a^n & (a-1)^n & (a-2)^n & \cdots & (a-n)^n \\ a_1^n & a_1^{n-1}b_1 & a_1^{n-2}b_1^2 & \cdots & a_1b_1^{n-1} & b_1^n \\ a_2^n & a_2^{n-1}b_2 & a_2^{n-2}b_2^2 & \cdots & a_2b_2^{n-1} & b_2^n \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n+1}^n & a_{n+1}^{n-1}b_{n+1} & a_{n+1}^{n-2}b_{n+1}^2 & \cdots & a_{n+1}b_{n+1}^{n-1} & b_{n+1}^n \end{vmatrix}.$$

用 Cramer 法则解下列方程组:

$$31. \begin{cases} 5x_1 + 4x_3 + 2x_4 = 3, \\ x_1 - x_2 + 2x_3 + x_4 = 1, \\ 4x_1 + x_2 + 2x_3 = 1, \\ x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0. \end{cases}$$

$$32. \begin{cases} x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 1, \\ x_1 + x_3 + x_4 + x_5 = 2, \\ x_1 + x_2 + x_4 + x_5 = 3, \\ x_1 + x_2 + x_3 + x_5 = 4, \\ x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 5. \end{cases}$$

33. 问: 齐次线性方程组

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + ax_4 = 0, \\ x_1 + 2x_2 + x_3 + x_4 = 0, \\ x_1 + x_2 - 3x_3 + x_4 = 0, \\ x_1 + x_2 + ax_3 + bx_4 = 0, \end{cases}$$

有非零解时,  $a, b$  必须满足什么条件?

34. 求平面上过两点  $(x_1, y_1)$  和  $(x_2, y_2)$  的直线方程.

35. 求三次多项式  $f(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3$ , 使得  $f(-1) = 0, f(1) = 4, f(2) = 3, f(3) = 16$ .

### 补充题

证明下列恒等式:

$$36. \begin{vmatrix} 1+a_1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 1+a_2 & \cdots & 1 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 1 & 1 & \cdots & 1+a_n \end{vmatrix} = \left(1 + \sum_{i=1}^n \frac{1}{a_i}\right) \prod_{i=1}^n a_i.$$

(1) 用数学归纳法证明之;

(2) 利用线性性质, 将原行列式表示为  $2^n$  个行列式之和的方



法, 计算行列式;

(3) 利用递推公式, 计算行列式.

$$37. \begin{vmatrix} x & -1 & & & \\ 0 & x & -1 & & \\ & & \ddots & \ddots & \\ 0 & & 0 & x & -1 \\ a_n & a_{n-1} & \cdots & a_2 & x + a_1 \end{vmatrix} = x^n + \sum_{k=1}^n a_k x^{n-k}.$$

$$38. \begin{vmatrix} a_1 & -1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ a_2 & x & -1 & \cdots & 0 & 0 \\ a_3 & 0 & x & \cdots & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n-1} & 0 & 0 & \cdots & x & -1 \\ a_n & 0 & 0 & \cdots & 0 & x \end{vmatrix} = \sum_{k=1}^n a_k x^{n-k}.$$

$$39. \begin{vmatrix} \cos\theta & & 1 & & \\ 1 & 2\cos\theta & & 1 & \\ \ddots & & \ddots & & \ddots \\ & \ddots & & 2\cos\theta & 1 \\ & & 1 & 2\cos\theta & \end{vmatrix} = \cos n\theta.$$

计算下列行列式:

$$40. \begin{vmatrix} \frac{1}{3} & -\frac{5}{2} & \frac{2}{5} & \frac{3}{2} \\ 3 & -12 & \frac{21}{5} & 15 \\ \frac{2}{3} & -\frac{9}{2} & \frac{4}{5} & \frac{5}{2} \\ -\frac{1}{7} & \frac{2}{7} & -\frac{1}{7} & \frac{3}{7} \end{vmatrix};$$

$$41. \begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 & -n \\ 1 & 1 & \cdots & -n & 1 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 1 & -n & \cdots & 1 & 1 \\ -n & 1 & \cdots & 1 & 1 \end{vmatrix}.$$

$$42. \begin{vmatrix} a_1 + \lambda_1 & a_2 & a_3 & \cdots & a_n \\ a_1 & a_2 + \lambda_2 & a_3 & \cdots & a_n \\ a_1 & a_2 & a_3 + \lambda_3 & \cdots & a_n \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_1 & a_2 & a_3 & \cdots & a_n + \lambda_n \end{vmatrix}.$$

$$43. \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & \cdots & n-1 & n \\ 2 & 3 & 4 & \cdots & n & 1 \\ 3 & 4 & 5 & \cdots & 1 & 2 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ n & 1 & 2 & \cdots & n-2 & n-1 \end{vmatrix}.$$

44. 证明

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ x_1 & x_2 & x_3 & \cdots & x_n \\ x_1^2 & x_2^2 & x_3^2 & \cdots & x_n^2 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ x_1^{n-2} & x_2^{n-2} & x_3^{n-2} & \cdots & x_n^{n-2} \\ x_1^n & x_2^n & x_3^n & \cdots & x_n^n \end{vmatrix} \\ = \left( \sum_{i=1}^n x_i \right) \prod_{1 \leq j < i \leq n} (x_i - x_j).$$

45. 证明(用数学归纳法):

$$\frac{d}{dt} \begin{vmatrix} a_{11}(t) & a_{12}(t) & \cdots & a_{1n}(t) \\ a_{21}(t) & a_{22}(t) & \cdots & a_{2n}(t) \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1}(t) & a_{n2}(t) & \cdots & a_{nn}(t) \end{vmatrix} \\ = \sum_{j=1}^n \begin{vmatrix} a_{11}(t) & \cdots & \frac{d}{dt}a_{1j}(t) & \cdots & a_{1n}(t) \\ a_{21}(t) & \cdots & \frac{d}{dt}a_{2j}(t) & \cdots & a_{2n}(t) \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1}(t) & \cdots & \frac{d}{dt}a_{nj}(t) & \cdots & a_{nn}(t) \end{vmatrix}.$$

46. 设三个点  $P_1(x_1, y_1), P_2(x_2, y_2), P_3(x_3, y_3)$  不在一条直线上, 求过点  $P_1, P_2, P_3$  的圆的方程.

47. 求使三点  $(x_1, y_1), (x_2, y_2), (x_3, y_3)$  位于一直线上的充分必要条件.

48. 写出通过三点  $(1, 1, 1), (2, 3, -1), (3, -1, -1)$  的平面的方程.

49. 写出通过点  $(1, 1, 1), (1, 1, -1), (1, -1, 1), (-1, 0, 0)$  的球面方程, 并求其中心和半径.

50. 已知  $a^2 \neq b^2$ , 证明方程组

$$\begin{cases} ax_1 & + & bx_{2n} = 1, \\ ax_2 & + & bx_{2n-1} = 1, \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ ax_n + bx_{n+1} & & = 1, \\ bx_n + ax_{n+1} & & = 1, \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ bx_2 & + & ax_{2n-1} = 1, \\ bx_1 & + & ax_{2n} = 1, \end{cases}$$

有唯一解,并求解.

## 答案

1.  $(a-b)^2$ . 2. 1. 3.  $(a+b)^2$ . 4. -5. 5. 0.

6. -18. 7. 0. 8.  $2x^3-6x^2+6$ . 9. 256. 10. 101.

11. -8. 12. 160. 13. -7. 14. 5. 15. 32.

16. -20. 17. -60. 18.  $3! 5!$ . 23.  $abcd$ .

24.  $(ab+1)(cd+1)+ad$ . 25. 0. 26. 0.

27.  $(-1)^{n-1} \frac{(n+1)!}{2}$ . 28.  $-2(n-2)!$ .

29.  $(-1)^{\frac{n(n+1)}{2}} \prod_{k=1}^n K_k$  30.  $\prod_{1 \leq j < i \leq n+1} (b_i a_j - a_i b_j)$ .

31. 1, -1, -1, 1. 32.  $\frac{11}{4}, \frac{7}{4}, \frac{3}{4}, -\frac{1}{4}, -\frac{5}{4}$ .

33.  $(a+1)^2=46$ . 34.  $\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \end{vmatrix} = 0$ . 40.  $\frac{1}{35}$ .

41.  $(-1)^{\frac{n(n+1)}{2}} (n+1)^{n-1}$ . 42.  $\left(1 + \sum_{i=1}^n \frac{a_i}{\lambda_i}\right) \prod_{j=1}^n \lambda_j$ .

43.  $(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} \frac{n+1}{2} n^{n-1}$ .

44. 原行列式中添加一行一列构成范德蒙行列式,利用范德蒙行列式的结论及两个行列式的关系推出.

45. 用数学归纳法,证明结论对  $n$  阶成立时,将  $n$  阶行列式按第一行展开求导后用归纳法假设即可.

48.  $4x+y+3z-8=0$ . 49.  $\left(x-\frac{1}{2}\right)^2 + y^2 + z^2 = \left(\frac{3}{2}\right)^2$ .

50.  $x_k = \frac{1}{a+b} \quad (k=1, 2, \dots, 2n)$ .

## 2 矩 阵

矩阵是数学中最重要的基本概念之一,在很多领域中的一些数量关系都要用矩阵来描述. 矩阵是代数学的一个主要研究对象,也是数学的很多分支研究及应用的一个重要工具.

本章从高斯消元法入手,引出矩阵的概念,进而介绍矩阵的基本运算——加法、数量乘法、乘法、转置、可逆矩阵的逆矩阵及矩阵的初等变换,并介绍矩阵的分块及分块矩阵的运算.

矩阵是一种新的运算对象,读者必须注意矩阵运算的一些特有的规律,并熟练地掌握它的各种基本运算,这对学好线性代数所研究的一些基本问题是十分重要的.

### 2.1 高斯消元法

在前一章,我们介绍了求解  $n$  个未知元  $n$  个方程的线性方程组的克莱姆法则,线性方程组在数学的各个分支,在自然科学,工程技术,生产实际中经常遇到,而且未知元的个数及方程的个数可达到成百上千,因此它的理论是很重要的,其应用也很广泛.

在中学里,我们已经学过用代入消元法或加减消元法解二元、三元一次方程组. 现在我们把它推广到  $m$  个方程  $n$  个未知元的一般情况,并在此基础上引出矩阵和初等变换的概念. 至于线性方程组的解的一般理论将在第 3 章中介绍.

下面先介绍消元法解线性方程组的具体做法:

消元法的基本思想是通过消元变形把方程组化成容易求解的同解方程组. 在解未知量较多的方程组时,需要使消元步骤规范

而又简便. 下面通过例子来说明消元法的具体做法.

**例 1 解线性方程组**

$$\begin{cases} 2x_1 - 2x_2 & + 6x_4 = -2, \\ 2x_1 - x_2 + 2x_3 + 4x_4 = -2, \\ 3x_1 - x_2 + 4x_3 + 4x_4 = -3, \\ x_1 + x_2 + x_3 + 8x_4 = 2. \end{cases} \quad (2.1)$$

**解** 将第一个方程乘  $\frac{1}{2}$ , 得

$$\begin{cases} x_1 - x_2 & + 3x_4 = -1, \\ 2x_1 - x_2 + 2x_3 + 4x_4 = -2, \\ 3x_1 - x_2 + 4x_3 + 4x_4 = -3, \\ x_1 + x_2 + x_3 + 8x_4 = 2. \end{cases}$$

将第 1 个方程乘  $(-2)$ ,  $(-3)$ ,  $(-1)$ , 并分别加到第 2, 3, 4 四个方程上, 使得在第 2, 3, 4 个方程中消去未知量  $x_1$ , 得

$$\begin{cases} x_1 - x_2 & + 3x_4 = -1, \\ x_2 + 2x_3 - 2x_4 = 0, \\ 2x_2 + 4x_3 - 5x_4 = 0, \\ 2x_2 + x_3 + 5x_4 = 3. \end{cases}$$

容易证明, 这个方程组与原方程组是同解的. 现在再把其中的第 2 个方程乘  $(-2)$ , 并分别加到第 3, 4 个方程上, 使得第 3, 4 个方程中消去  $x_2$ , 得

$$\begin{cases} x_1 - x_2 & + 3x_4 = -1, \\ x_2 + 2x_3 - 2x_4 = 0, \\ & -x_4 = 0, \\ & -3x_3 + 9x_4 = 3. \end{cases}$$

再将第 3 个方程乘  $(-1)$ , 第 4 个方程乘  $(-1/3)$ , 并把第 3, 4 个方程交换位置, 得

(2.2)

所以  $(1, 2, -1, 0)$  是原方程组 (2.1) 的解.

形如(2.2)的方程组称为**阶梯形方程组**.

从上述解题过程可以看出,用高斯消元法解线性方程组的具体做法是对方程组反复施行下列三种变换:

(i) 用一个非零常数乘某一个方程, 简称倍乘初等变换;

(ii) 把某个方程乘以常数再添加到另一个方程上, 简称倍加初等变换;

(iii) 互换两个方程的位置, 简称**互换初等变换**. 这三种变换称为**方程组的初等变换**. 可以证明方程组经过初等变换后得到的方程组是原方程组的同解方程组. 任一个方程组都可经上述初等变换化成容易求解的、同解的阶梯形方程组.

从例 1 的解题过程中看到,对方程组用初等变换作消元时,只是对未知元的系数和常数项进行运算,因此用消元法解线性方程组时,为了简便,可以把方程组的未知元系数及常数项,排成一张矩形数表,即线性方程组

(2.3)

可以用一张矩形数表

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & b_2 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} & b_n \end{bmatrix} \quad (2.4)$$

来表示,其中  $a_{ij} (i=1,2,\cdots,m, j=1,2,\cdots,n)$  表示第  $i$  个方程第  $j$  个未知量  $x_j$  的系数.

**定义** 数域  $F$  中  $m \times n$  个数  $a_{ij} (i=1,2,\cdots,m; j=1,2,\cdots,n)$  排成  $m$  行  $n$  列,并括以方括弧(或圆括弧)的数表

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} \quad (2.5)$$

称为数域  $F$  上的  $m \times n$  矩阵,通常用大写字母记作  $A$  或  $A_{m \times n}$  有时也记作

$$A = [a_{ij}]_{m \times n} \quad (i=1,2,\cdots,m; j=1,2,\cdots,n)$$

其中  $a_{ij}$  称为矩阵  $A$  的第  $i$  行第  $j$  列元素.

$m \times n$  个元素全为零的矩阵称为**零矩阵**,记作  $O$ .

当  $m=n$  时,称  $A$  为  $n$  阶矩阵(或  $n$  阶方阵).

线性方程组(2.3)对应的矩阵(2.4)称为方程(2.3)的**增广矩阵**,记作  $[A, b]$ ,其中由未知元系数排成的矩阵  $A$  称为方程组的**系数矩阵**.

用消元法解线性方程组的消元步骤可以在增广矩阵上实现.下面举例说明.

**例2** 求解线性方程组



$$\begin{cases} x_1 - x_2 - x_3 + 3x_5 = -1, & \textcircled{1} \\ 2x_1 - 2x_2 - x_3 + 2x_4 + 4x_5 = -2, & \textcircled{2} \\ 3x_1 - 3x_2 - x_3 + 4x_4 + 5x_5 = -3, & \textcircled{3} \\ x_1 - x_2 + x_3 + x_4 + 8x_5 = 2. & \textcircled{4} \end{cases} \quad (2.6)$$

解 方程组的增广矩阵为

$$[A, b] = \left[ \begin{array}{ccccc|c} 1 & -1 & -1 & 0 & 3 & -1 \\ 2 & -2 & -1 & 2 & 4 & -2 \\ 3 & -3 & -1 & 4 & 5 & -3 \\ 1 & -1 & 1 & 1 & 8 & 2 \end{array} \right] \quad \begin{matrix} \textcircled{1} \\ \textcircled{2} \\ \textcircled{3} \\ \textcircled{4} \end{matrix} \quad (2.6)'$$

将(2.6)中第①方程分别乘 $(-2)$ ,  $(-3)$ ,  $(-1)$ 并依次加到第②, ③, ④方程上, 消去后三个方程中的  $x_1$  (此时也消去了  $x_2$ ), 也就是将(2.6)' 矩阵第①行分别乘 $(-2)$ ,  $(-3)$ ,  $(-1)$ 加到第②, ③, ④行上, 得

$$[A, b] \xrightarrow{\begin{matrix} \textcircled{2} + \textcircled{1} \times (-2) \\ \textcircled{3} + \textcircled{1} \times (-3) \\ \textcircled{4} + \textcircled{1} \times (-1) \end{matrix}} \left[ \begin{array}{ccccc|c} 1 & -1 & -1 & 0 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 4 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & 5 & 3 \end{array} \right] \quad \begin{matrix} \textcircled{1} \\ \textcircled{2} \\ \textcircled{3} \\ \textcircled{4} \end{matrix}$$

这个矩阵中第1, 2列后三个元素皆为零, 表示方程(2.6)中第②, ③, ④方程中的  $x_1, x_2$  均已消去. 再用 $(-2)$ 乘第②行加到第③, ④行上, 得

$$\begin{aligned} & \xrightarrow{\begin{matrix} \textcircled{3} + \textcircled{2} \times (-2) \\ \textcircled{4} + \textcircled{2} \times (-2) \end{matrix}} \left[ \begin{array}{ccccc|c} 1 & -1 & -1 & 0 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -3 & 9 & 3 \end{array} \right] \quad \begin{matrix} \textcircled{1} \\ \textcircled{2} \\ \textcircled{3} \\ \textcircled{4} \end{matrix} \\ & \xrightarrow[\textcircled{3} \leftrightarrow \textcircled{4}]{\textcircled{4} \times (-\frac{1}{3})} \left[ \begin{array}{ccccc|c} 1 & -1 & -1 & 0 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -3 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right] \quad \begin{matrix} \textcircled{1} \\ \textcircled{2} \\ \textcircled{3} \\ \textcircled{4} \end{matrix} \quad (2.7) \end{aligned}$$

其中:④ $\times(-1/3)$ 表示第④行乘 $(-1/3)$ ;③ $\leftrightarrow$ ④表示第③,④行对换位置.

(2.7)式中的阶梯形增广矩阵所对应的方程组与原方程组是同解的.为了在求解时省去回代的步骤,我们对(2.7)继续作初等(行)变换,把(2.7)中每行第一个非零元所在列的其余元素全化为零,即

$$\begin{aligned} \xrightarrow{\text{②} + \text{③} \times (-2)} & \left[ \begin{array}{ccccc|c} 1 & -1 & -1 & 0 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 4 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -3 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right] \begin{matrix} \text{①} \\ \text{②} \\ \text{③} \\ \text{④} \end{matrix} \\ \xrightarrow{\text{①} + \text{②}} & \left[ \begin{array}{ccccc|c} 1 & -1 & 0 & 0 & 7 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 4 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -3 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right] \begin{matrix} \text{①} \\ \text{②} \\ \text{③} \\ \text{④} \end{matrix} \quad (2.8) \end{aligned}$$

(2.8)式矩阵称为行简化阶梯矩阵,它所对应的方程组

$$\begin{cases} x_1 - x_2 + 7x_5 = 1, \\ x_3 + 4x_5 = 2, \\ x_4 - 3x_5 = -1, \end{cases} \quad (2.8)'$$

与原方程组同解.这里是3个方程,5个未知数,任取 $x_2=k_1, x_5=k_2$ 代入方程组(2.8)'可唯一地解得对应于 $k_1, k_2$ 的 $x_1, x_3, x_4$ ,从而得到满足方程组的全部解; $x_1=1+k_1-7k_2, x_2=k_1, x_3=2-4k_2, x_4=-1+3k_2, x_5=k_2$ ,其中 $k_1, k_2$ 为任意常数.以后我们常把方程组的解写成下面的形式

$$\begin{aligned} & [x_1, x_2, x_3, x_4, x_5] \\ & = [1+k_1-7k_2, k_1, 2-4k_2, -1+3k_2, k_2]. \end{aligned}$$

当方程组(2.3)的常数项 $b_1=b_2=\cdots=b_m=0$ 时,我们叫它为齐次线性方程组,否则叫非齐次线性方程组.

齐次线性方程组的解法与例2一样.如果例2中四个方程的

常数项全为零,其解为:

$$\begin{aligned} & [x_1, x_2, x_3, x_4, x_5] \\ & = [k_1 - 7k_2, k_1, -4k_2, 3k_2, k_2]. \end{aligned}$$

### 例3 解线性方程组

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 1, \\ x_1 + 2x_2 - 5x_3 = 2, \\ 2x_1 + 3x_2 - 4x_3 = 5. \end{cases}$$

解

$$\begin{aligned} [A, b] &= \left[ \begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & -5 & 2 \\ 2 & 3 & -4 & 5 \end{array} \right] \\ &\xrightarrow[\text{③} + \text{①} \times (-2)]{\text{②} + \text{①} \times (-1)} \left[ \begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -6 & 1 \\ 0 & 1 & -6 & 3 \end{array} \right] \\ &\xrightarrow{\text{③} + \text{②} \times (-1)} \left[ \begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -6 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{array} \right] \xrightarrow{\text{①} + \text{②} \times (-1)} \left[ \begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 7 & 0 \\ 0 & 1 & -6 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{array} \right] \end{aligned} \quad (2.9)$$

其中第三行  $0, 0, 0, 2$  所表示的方程  $0x_1 + 0x_2 + 0x_3 = 2$  显然是无解的,故原方程组无解. 这是由于方程组中第三个方程的左端等于前两个方程左端之和,而右端不等于前两个方程右端之和,这表明第三个方程与前两个方程是矛盾的,即满足前两个方程的解不可能满足第三个方程,这种含有矛盾方程而无解的方程组称为不相容方程组. 有解的方程组则叫做相容方程组. 例1、例2是相容方程组,例2在消元过程中其增广矩阵第③行出现全零行,是由于方程组(2.6)中第③方程等于(第②方程乘2)+(第①方程乘(-1)). 因此,满足第①、②方程的解都满足第③方程,所以第③

方程在方程组(2.6)中是多余的,我们把它叫做**多余方程**. 在高斯消元法的消元过程中,在增广矩阵上会清楚地揭示出方程组中的多余方程和矛盾方程.

从例2、例3可见,对一般的线性方程组(2.3),通过消元步骤,即对增广矩阵(2.4)作三种初等行变换,可将其化为如(2.8)、(2.9)式那样的行简化阶梯阵. 为了便于做一般的讨论,不妨假设增广矩阵(2.4)化为如下的行简化阶梯矩阵.

$$[A, b] \Rightarrow \begin{bmatrix} c_{11} & 0 & \cdots & 0 & c_{1,r+1} & \cdots & c_{1n} & d_1 \\ 0 & c_{22} & \cdots & 0 & c_{2,r+1} & \cdots & c_{2n} & d_2 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & c_{rr} & c_{r,r+1} & \cdots & c_{rn} & d_r \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 & d_{r+1} \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (2.10)$$

其中  $c_{ii}=1, i=1, 2, \cdots, r$ .

(2.10)式对应的非齐次线性方程组与方程组(2.3)是同解方程组. 由(2.10)式易见,方程组有解的充要条件是  $d_{r+1}=0$ , 因为  $d_{r+1} \neq 0$  时, (2.10)中第  $r+1$  行对应的方程是无解的. 在有解的情况下:

(i) 当  $r=n$  时,有唯一解  $x_1=d_1, x_2=d_2, \cdots, x_n=d_n$ ;

(ii) 当  $r < n$  时,有无穷多解,求解时把(2.10)式中每行第一个非零元  $c_{ii} (i=1, 2, \cdots, r)$  所在列对应的未知量(这里是  $x_1, x_2, \cdots, x_r$ )取为基本未知量,其余未知量(这里是  $x_{r+1}, x_{r+2}, \cdots, x_n$ )取为自由未知量,并令自由未知量依次取任意常数  $k_1, k_2, \cdots, k_{n-r}$ , 将它们代入(2.10)式所对应的方程组,即可解得

[illegible]

其中  $k_1, k_2, \dots, k_{n-r}$  为互相独立的任意常数. 这就是方程组的全部解.

齐次线性方程组总是有解的,这是因为(2.3)中  $b_1=b_2=\cdots=b_m=0$ ,从而(2.11)中  $d_1=\cdots=d_r=d_{r+1}=0$ . 当  $r=n$  时,只有零解,即  $x_1=x_2=\cdots=x_n=0$ ;当  $r<n$  时,有无穷多解,其解是(2.11)式中  $d_1=d_2=\cdots=d_r=0$  的情形.

如果齐次线性方程组中方程个数  $m$  小于未知量个数  $n$ , 则必有无穷多个非零解.

最后还需指出:用不同的消元步骤,将增广矩阵化为阶梯矩阵时,阶梯阵的形式不是唯一的,但阶梯阵的非零行的行数是唯一确定的,当方程组有解时,这表明解中任意常数的个数是相同的,但解的表示式不是唯一的,然而每一种解的表示式中包含的无穷多个解的集合又是相等的. 这些重要的结论,研究了矩阵的秩和向量的线性相关性的理论,才能给以严格的论证.

## 2.2 矩阵的加法 数量乘法 乘法

在前一节,我们已经初步看到用矩阵表示线性方程组,对其用消元法求解是比较方便的.以后我们将通过对矩阵的进一步研究,来揭示线性方程组的解的理论.

矩阵不仅对研究线性方程组的问题是重要的,而且研究线性

代数的各种基本问题都离不开矩阵. 此外, 很多实际问题的研究都要使用矩阵的工具, 有兴趣的读者可参阅第 7 章中的一些应用问题.

矩阵的加法、数量乘法和乘法是矩阵最基本的运算. 为要讨论矩阵的运算, 首先要对两个矩阵相等给以定义.

**定义 1** 如果两个矩阵  $A=[a_{ij}]$  和  $B=[b_{ij}]$  的行数和列数分别相等, 且各对应元素也相等, 即  $a_{ij}=b_{ij}$  ( $i=1, 2, \dots, m, j=1, 2, \dots, n$ ), 就称  $A$  和  $B$  相等, 记作  $A=B$ .

由定义可知, 两个  $m \times n$  矩阵构成一个矩阵等式, 等价于  $m \times n$  个元素的等式, 例如由

$$\begin{bmatrix} x & -1 & -8 \\ 0 & y & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & -1 & z \\ 0 & 2 & 4 \end{bmatrix},$$

立即可得  $x=3, y=2, z=8$ .

读者必须注意, 矩阵与行列式的本质区别, 行列式是一个算式, 一个数字行列式经过计算可求得其值, 而矩阵仅仅是一个数表, 它的行数和列数也可以不同. 对于  $n$  阶方阵, 虽然有时也要算它的行列式, (记作  $|A|$  或  $\det A$ ), 但是方阵  $A$  和方阵  $A$  的行列式是不同的概念, 当  $\det A=0$  (此时  $A$  不一定为零矩阵) 时, 称  $A$  为奇异矩阵; 当  $\det A \neq 0$  时, 称  $A$  为非奇异矩阵.

### 2.2.1 矩阵的加法

**定义 2** 设  $A=[a_{ij}]$  和  $B=[b_{ij}]$  是两个  $m \times n$  矩阵, 规定

$$A+B=[a_{ij}+b_{ij}]=\begin{bmatrix} a_{11}+b_{11} & a_{12}+b_{12} & \cdots & a_{1n}+b_{1n} \\ a_{21}+b_{21} & a_{22}+b_{22} & \cdots & a_{2n}+b_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1}+b_{m1} & a_{m2}+b_{m2} & \cdots & a_{mn}+b_{mn} \end{bmatrix} \quad (2.12)$$

并称  $A+B$  为  $A$  与  $B$  之和.

必须注意：只有行数相同，列数也相同的矩阵（即同型矩阵）才能相加，且同型矩阵之和仍是同型矩阵。

根据定义，不难验证矩阵的加法满足以下规律：

- (i) 交换律： $A+B=B+A$ ；
- (ii) 结合律： $(A+B)+C=A+(B+C)$ ；
- (iii) 零矩阵满足： $A+O=A$ ，其中  $O$  是与  $A$  同型的零矩阵；
- (iv) 存在矩阵  $(-A)$  满足  $A+(-A)=O$ ，此时，如果  $A=[a_{ij}]_{m \times n}$ ，则

$$-A = \begin{bmatrix} -a_{11} & -a_{12} & \cdots & -a_{1n} \\ -a_{21} & -a_{22} & \cdots & -a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ -a_{m1} & -a_{m2} & \cdots & -a_{mn} \end{bmatrix},$$

并称  $(-A)$  为  $A$  的负矩阵。

进而我们定义矩阵的减法

$$A-B=A+(-B).$$

### 2.2.2 矩阵的数量乘法(简称数乘)

**定义 3** 设  $k$  是数域  $F$  中的任意一个数， $A=[a_{ij}]$  是一个  $m \times n$  矩阵，规定

$$kA = [ka_{ij}] = \begin{bmatrix} ka_{11} & ka_{12} & \cdots & ka_{1n} \\ ka_{21} & ka_{22} & \cdots & ka_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ ka_{m1} & ka_{m2} & \cdots & ka_{mn} \end{bmatrix}, \quad (2.13)$$

并称这个矩阵为  $k$  与  $A$  的数量乘积。

要注意：数  $k$  乘一个矩阵  $A$ ，需要把数  $k$  乘矩阵  $A$  的每一个元素，这与行列式的性质 3(i) 是不同的。

矩阵的数量乘法满足以下规律：

- (i)  $1A=A$ ；

- (ii)  $(kl)A = k(lA)$ ;
- (iii)  $(k+l)A = kA + lA$ ;
- (iv)  $k(A+B) = kA + kB$ ,

其中  $1, k, l$  是数域  $F$  中的数.

### 2.2.3 矩阵的乘法

矩阵乘法的定义,是从研究  $n$  维向量的线性变换的需要而规定的一种独特的乘法运算,矩阵运算中所具有的特殊的规律,主要产生于矩阵的乘法运算.

**定义 4** 设  $A$  是一个  $m \times n$  矩阵,  $B$  是一个  $n \times s$  矩阵,

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1s} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2s} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ b_{n1} & b_{n2} & \cdots & b_{ns} \end{bmatrix}.$$

则  $A$  与  $B$  之乘积  $AB$  (记作  $C = [c_{ij}]$ ) 是一个  $m \times s$  矩阵,且

$$c_{ij} = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + \cdots + a_{in}b_{nj} = \sum_{k=1}^n a_{ik}b_{kj}. \quad (2.14)$$

根据矩阵的乘法定义,我们可以把  $AB=C$  形象地表示成:

$$\begin{array}{c} m \text{ 行} \\ \text{第 } i \text{ 行} \end{array} \begin{array}{c} n \text{ 列} \\ \boxed{A} \\ \cdots \end{array} \begin{array}{c} s \text{ 列} \\ \boxed{n \text{ 行 } B} \\ \text{第 } j \text{ 列} \end{array} = \begin{array}{c} m \text{ 行} \\ \boxed{C} \\ c_{ij} \end{array}$$

其中矩阵  $C$  的第  $i$  行第  $j$  列元素  $c_{ij}$ , 是  $A$  的第  $i$  行  $n$  个元素与  $B$  的第  $j$  列相应的  $n$  个元素分别相乘的乘积之和.

**例 1** 设

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 2 \\ -1 & 1 & 3 & 0 \\ 0 & 5 & 7 & -6 \end{bmatrix}_{3 \times 4}, \quad B = \begin{bmatrix} 0 & -4 \\ 1 & 2 \\ -3 & -2 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}_{4 \times 2},$$



记算  $AB$ .

解  $AB$  是  $3 \times 2$  矩阵, 且

$$\begin{aligned}
 AB &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 2 \\ -1 & 1 & 3 & 0 \\ 0 & 5 & 7 & -6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & -4 \\ 1 & 2 \\ -3 & -2 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \\
 &= \begin{bmatrix} 1 \times 0 + 0 \times 1 + (-1) \times (-3) + 2 \times (-1) & 1 \times (-4) + 0 \times 2 + (-1) \times (-2) + 2 \times 1 \\ -1 \times 0 + 1 \times 1 + 3 \times (-3) + 0 \times (-1) & (-1) \times (-4) + 1 \times 2 + 3 \times (-2) + 0 \times 1 \\ 0 \times 0 + 5 \times 1 + 7 \times (-3) + (-6) \times (-1) & 0 \times (-4) + 5 \times 2 + 7 \times (-2) + (-6) \times 1 \end{bmatrix} \\
 &= \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -8 & 0 \\ -10 & -10 \end{bmatrix}.
 \end{aligned}$$

由矩阵的乘法定义可知, 两个矩阵相乘, 左边矩阵的列数必须等于右边矩阵的行数. 因此, 任给两个矩阵, 它们不一定是可乘的, 例如, 例 1 中乘积  $BA$  是没有意义的 (即不可乘).

例 2 设  $A, B$  分别是  $n \times 1$  和  $1 \times n$  矩阵, 且

$$A = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix}, \quad B = [b_1, b_2, \dots, b_n],$$

计算  $AB$  和  $BA$ .

解

$$AB = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix} [b_1 \ b_2 \ \dots \ b_n] = \begin{bmatrix} a_1 b_1 & a_1 b_2 & \dots & a_1 b_n \\ a_2 b_1 & a_2 b_2 & \dots & a_2 b_n \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_n b_1 & a_n b_2 & \dots & a_n b_n \end{bmatrix}.$$

$$BA = [b_1 \ b_2 \ \cdots \ b_n] \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix} = b_1 a_1 + b_2 a_2 + \cdots + b_n a_n.$$

$AB$  是  $n$  阶矩阵,  $BA$  是 1 阶矩阵(运算的最后结果为 1 阶矩阵时, 可以把它与数等同看待, 不必加矩阵符号, 但是, 在运算过程中, 一般不能把 1 阶矩阵看成数).

**例 3** 设  $A = \begin{bmatrix} a & a \\ -a & -a \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} b & -b \\ -b & b \end{bmatrix},$

计算  $AB$  和  $BA$ .

**解**  $AB = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, BA = \begin{bmatrix} b & a \\ -a & -b \end{bmatrix}.$

从例 1, 2, 3 可见, 矩阵的乘法运算, 一般不满足交换律, 例 1 的情况是  $BA$  无意义, 显然  $AB \neq BA$ ; 例 2 的情况是  $AB$  和  $BA$  不是同型矩阵, 所以两者也不能相等; 例 3 中  $AB$  与  $BA$  虽是同型矩阵, 但它们仍不相等. 矩阵的乘法不满足交换律是矩阵代数运算的一个重要特点, 矩阵的乘法不满足交换律是就一般情况而言的, 并不是说任意给定两个矩阵  $A$  和  $B$ , 一定就有  $AB \neq BA$ , 例如

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} b & -b \\ -b & b \end{bmatrix},$$

就有  $AB = BA = \begin{bmatrix} 2b & -2b \\ -2b & 2b \end{bmatrix}.$

当  $AB \neq BA$  时, 我们说  **$AB$  不可交换**, (或说  $A$  与  $B$  不可交换) 当  $AB = BA$  时, 我们说  **$AB$  可交换**, (或  $A$  与  $B$  可交换).

从例 3 中还可看到矩阵乘法运算的又一个奇特的现象,  $A$  与  $B$  皆非零矩阵, 而  $A$  与  $B$  之积  $AB = O$ , (这种现象在数的乘法中是不可能出现的) 这时我们称  $B$  是  $A$  的**右零因子**,  $A$  是  $B$  的**左零因子**. (由于  $BA \neq O$ , 所以  $B$  不是  $A$  的左零因子,  $A$  也不是  $B$  的右零因子.) 一个非零矩阵  $A$  如有左(右)零因子, 其左(右)零因子不

是唯一的,例如对于  $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix}$  而言

$$B = \begin{bmatrix} b & -b \\ -b & b \end{bmatrix} \text{ 和 } C = \begin{bmatrix} -c & c \\ c & -c \end{bmatrix}$$

都是  $A$  的右零因子,即  $AB=AC=O$ .

由此又可见,一般情况下,当  $AB=AC$  时,不能消去  $A$ ,而得到  $B=C$ ,这说明,矩阵的乘法也不适合消去律.

矩阵乘法不满足交换律和消去律,是矩阵乘法区别于数的乘法的两个重要特点,但是矩阵乘法与数的乘法也有相同或相似的运算律,即矩阵乘法满足下列运算律:

- (i) 结合律  $(AB)C=A(BC)$ ;
- (ii) 数乘结合律  $k(AB)=(kA)B=A(kB)$ , 其中  $k$  是数;
- (iii) 左分配律  $A(B+C)=AB+AC$ ;  
右分配律  $(B+C)A=BA+CA$ .

**证** (i) 设  $A$  是  $m \times n$  矩阵,  $B$  是  $n \times p$  矩阵,  $C$  是  $p \times s$  矩阵, 则  $AB$  是  $m \times p$  矩阵,  $(AB)C$  是  $m \times s$  矩阵,  $BC$  是  $n \times s$  矩阵,  $A(BC)$  是  $m \times s$  矩阵, 所以  $(AB)C$  和  $A(BC)$  是同型矩阵. 下面证明这两个矩阵第  $i$  行第  $j$  列元素 ( $i=1, 2, \dots, m; j=1, 2, \dots, s$ ) 都是相同的.

$$\begin{aligned} [(AB)C]_{ij} &= \sum_{k=1}^p (AB)_{ik} C_{kj} = \sum_{k=1}^p \left( \sum_{l=1}^n a_{il} b_{lk} \right) c_{kj} \\ &= \sum_{k=1}^p \left( \sum_{l=1}^n a_{il} b_{lk} c_{kj} \right) = \sum_{l=1}^n \left( \sum_{k=1}^p a_{il} b_{lk} c_{kj} \right) \\ &= \sum_{l=1}^n a_{il} \left( \sum_{k=1}^p b_{lk} c_{kj} \right) = \sum_{l=1}^n a_{il} (BC)_{lj} \\ &= [A(BC)]_{ij}. \end{aligned}$$

(ii) 和 (iii) 的证明留给读者作为练习.

下面介绍几个重要的特殊矩阵及其乘法运算.

**定义 5** 主对角元全为 1, 其余元素全为零的  $n$  阶矩阵, 称为

$n$  阶单位矩阵, 记作  $I_n$  或  $I$ ; 主对角元全为非零常数  $k$ , 其余元素全为零的  $n$  阶矩阵, 称为  $n$  阶数量矩阵, 记作  $kI_n$  或  $kI$ . 即

$$I_n = \begin{bmatrix} 1 & & & \\ & 1 & & \\ & & \ddots & \\ & & & 1 \end{bmatrix}_{n \times n}, \quad kI_n = \begin{bmatrix} k & & & \\ & k & & \\ & & \ddots & \\ & & & k \end{bmatrix}_{n \times n} \quad (k \neq 0).$$

因为  $I_m A_{m \times n} = A_{m \times n}$ ,  $A_{m \times n} I_n = A_{m \times n}$ . 可见, 单位矩阵在矩阵乘法中的作用与数 1 在数的乘法中的作用是类似的.

又因为

$$(kI)A = k(IA) = kA; \quad A(kI) = k(AI) = kA,$$

故数量阵  $kI$  乘矩阵  $A$  等于数  $k$  乘矩阵  $A$ , 且  $n$  阶数量矩阵  $kI$  与任意的  $n$  阶矩阵  $A$  可交换, 此外也可以证明 (留给读者作为练习): 与任意的  $n$  阶矩阵可交换的矩阵必是  $n$  阶数量矩阵.

**定义 6** 非主对角元皆为零的  $n$  阶矩阵称为  $n$  阶对角矩阵 (简称对角阵), 记作  $\Lambda$ , 即

$$\Lambda = \begin{bmatrix} a_1 & & & \\ & a_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & a_n \end{bmatrix},$$

或记作  $\text{diag}(a_1, a_2, \dots, a_n)$ .

显然

$$\begin{bmatrix} a_1 & & & \\ & a_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & a_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1s} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2s} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{ns} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_1 a_{11} & a_1 a_{12} & \cdots & a_1 a_{1s} \\ a_2 a_{21} & a_2 a_{22} & \cdots & a_2 a_{2s} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_n a_{n1} & a_n a_{n2} & \cdots & a_n a_{ns} \end{bmatrix}.$$

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_1 & & & \\ & a_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & a_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_1 a_{11} & a_2 a_{12} & \cdots & a_n a_{1n} \\ a_1 a_{21} & a_2 a_{22} & \cdots & a_n a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_1 a_{m1} & a_2 a_{m2} & \cdots & a_n a_{mn} \end{bmatrix}.$$

$$\begin{bmatrix} a_1 & & & \\ & a_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & a_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_1 & & & \\ & b_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & b_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_1 b_1 & & & \\ & a_2 b_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & a_n b_n \end{bmatrix}.$$

**定义 7**  $n$  阶矩阵  $A = [a_{ij}]_{n \times n}$ , 当  $i > j$  时,  $a_{ij} = 0$ , ( $j = 1, 2, \dots, n-1$ ) 的矩阵称为上三角矩阵; 当  $i < j$  时,  $a_{ij} = 0$  ( $j = 2, 3, \dots, n$ ) 的矩阵称为下三角矩阵.

**例 4** 证明 两个上三角矩阵的乘积仍是上三角矩阵.

证

$$\text{设 } A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ & & \ddots & \vdots \\ & & & a_{nn} \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1n} \\ & b_{22} & \cdots & b_{2n} \\ & & \ddots & \vdots \\ & & & b_{nn} \end{bmatrix},$$

$$AB = C = [c_{ij}]_{n \times n}$$

当  $i > j$  时,  $c_{ij} = \sum_{k=1}^n a_{ik} b_{kj} = \sum_{k=1}^{i-1} a_{ik} b_{kj} + \sum_{k=i}^n a_{ik} b_{kj}$ , 由于  $A$  是上三角矩阵, 所以上式右端第一个和式中  $a_{ik} = 0$  ( $k = 1, 2, \dots, i-1$ ); 同理, 上式右端第二个和式中  $b_{kj} = 0$  ( $k = i, i+1, \dots, n$ , 它们都  $> j$ ). 因此, 当  $i > j$  时, 恒有  $c_{ij} = 0$ , 故  $C$  是上三角矩阵.

同样可证, 两个下三角矩阵的乘积仍是下三角矩阵.

定义了矩阵的乘法, 我们可以将线性方程组简洁地表示成一个矩阵等式.

设线性方程组

$$(2.15)$$

由于方程组中第  $i$  个方程可以表示为

$$[a_{i1} \ a_{i2} \ \cdots \ a_{in}] \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = b_i \quad i = 1, 2, \cdots, m.$$

因此线性方程组(2.15)可以表示成

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix}.$$

记

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}, X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}, b = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix}. \quad (2.16)$$

则线性方程组(2.15)可以简洁地表示成下列矩阵等式

$$AX=b, \quad (2.17)$$

并称矩阵  $A$  为线性方程组 (2.15) 的系数矩阵.

下面讨论两个方阵的乘积的行列式

**定理** 设  $A, B$  是两个  $n$  阶矩阵, 则乘积  $AB$  的行列式等于  $A$  和  $B$  的行列式的乘积, 即

$$|AB| = |A| |B|.$$

**证** 设  $A=[a_{ij}]_{n \times n}, B=[b_{ij}]_{n \times n}$ , 利用第 1 章 1.2 节例 9 的结

果,有

$$|A||B| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ -1 & 0 & \cdots & 0 & b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1n} \\ 0 & -1 & \cdots & 0 & b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & -1 & b_{n1} & b_{n2} & \cdots & b_{nn} \end{vmatrix}_{2n \times 2n}.$$

将第  $n+1$  行乘  $a_{11}$  加到第一行,第  $n+2$  行乘  $a_{12}$  加到第一行, ..., 第  $2n$  行乘  $a_{1n}$  加到第一行,即得

$$|A||B| = \begin{vmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & c_{11} & c_{12} & \cdots & c_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ -1 & 0 & \cdots & 0 & b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1n} \\ 0 & -1 & & \vdots & b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2n} \\ & & \ddots & 0 & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & \cdots & 0 & -1 & b_{n1} & b_{n2} & \cdots & b_{nn} \end{vmatrix}.$$

其中

$$c_{1j} = a_{11}b_{1j} + a_{12}b_{2j} + \cdots + a_{1n}b_{nj} = \sum_{k=1}^n a_{1k}b_{kj} \quad (j=1, 2, \cdots, n).$$

即  $c_{11}, c_{12}, \cdots, c_{1n}$  是  $AB$  的第一行,仿照上述步骤,将行列式中  $a_{21}, a_{22}, \cdots, a_{2n}, \cdots, a_{n1}, a_{n2}, \cdots, a_{nn}$  全消为零时,就得

$$\begin{aligned} \frac{|A||B|}{|AB|} &= \begin{vmatrix} A & O \\ -I & B \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} O & AB \\ -I & B \end{vmatrix} = (-1)^n \begin{vmatrix} AB & O \\ B & -I \end{vmatrix} \\ &= (-1)^n |AB| | -I_n | = (-1)^n |AB| (-1)^n \\ &= |AB|. \end{aligned}$$

这个定理应用很广,下面举两个应用的例子.

**例 5** 设  $A = \begin{bmatrix} a & -b & -c & -d \\ b & a & -d & c \\ c & d & a & -b \\ d & -c & b & a \end{bmatrix},$

计算  $(\det A)^2$  和  $\det A$ .

**解** 将  $A$  中行列互换得矩阵记成  $A^T$ , 即

$$A^T = \begin{bmatrix} a & b & c & d \\ -b & a & d & -c \\ -c & -d & a & b \\ -d & c & -b & a \end{bmatrix}.$$

由于  $|A^T| = |A|$ , 所以

$$\begin{aligned} |A|^2 &= |A| |A^T| = |AA^T| \\ &= \begin{vmatrix} a^2+b^2+c^2+d^2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a^2+b^2+c^2+d^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a^2+b^2+c^2+d^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a^2+b^2+c^2+d^2 \end{vmatrix} \\ &= (a^2+b^2+c^2+d^2)^4. \end{aligned}$$

因此  $|A| = \pm (a^2+b^2+c^2+d^2)^2$ .

但  $A$  的主对角元全是  $a$ , 行列式  $|A|$  中的  $a^4$  项的符号为“+”, 故

$$|A| = (a^2+b^2+c^2+d^2)^2.$$

**例 6** 设

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}, A^* = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{21} & \cdots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \cdots & A_{n2} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ A_{1n} & A_{2n} & \cdots & A_{nn} \end{bmatrix}, \quad (2.18)$$

其中  $A_{ij}$  是行列式  $|A|$  中元素  $a_{ij}$  的代数余子式.



证明 当  $|A| \neq 0$  时,  $|A^*| = |A|^{n-1}$ .

证 设  $AA^* = C = [c_{ij}]$ , 其中

$$\begin{aligned} c_{ij} &= a_{i1}A_{j1} + a_{i2}A_{j2} + \cdots + a_{in}A_{jn} \\ &= \begin{cases} |A|, & \text{当 } j=i \\ 0, & \text{当 } j \neq i \end{cases} \quad i, j=1, 2, \dots, n. \end{aligned}$$

$$\text{于是 } AA^* = \begin{bmatrix} |A| & & & \\ & |A| & & \\ & & \ddots & \\ & & & |A| \end{bmatrix} = |A|I_n, \quad (2.19)$$

因此  $|A||A^*| = |AA^*| = |A|^n$ .

由于  $|A| \neq 0$ , 故  $|A^*| = |A|^{n-1}$ . ■

最后, 我们定义方阵的幂和方阵的多项式.

**定义 8** 设  $A$  是  $n$  阶矩阵,  $k$  个  $A$  的连乘积称为  $A$  的  $k$  次幂, 记作  $A^k$ , 即

$$A^k = \underbrace{A \cdot A \cdots A}_{k \uparrow}$$

由定义可以证明: 当  $m, k$  为正整数时,

$$A^m A^k = A^{m+k}, \quad (2.20)$$

$$(A^m)^k = A^{mk}, \quad (2.21)$$

但是, 要注意, 当  $AB$  不可交换时,

$$(AB)^k \neq A^k B^k.$$

**定义 9** 设  $f(x) = a_k x^k + a_{k-1} x^{k-1} + \cdots + a_1 x + a_0$  是  $x$  的  $k$  次多项式,  $A$  是  $n$  阶矩阵, 则

$$f(A) = a_k A^k + a_{k-1} A^{k-1} + \cdots + a_1 A + a_0 I_n,$$

称为矩阵  $A$  的  $k$  次多项式 (注意常数项应变为  $a_0 I$ ).

由定义容易证明: 若  $f(x), g(x)$  为多项式,  $A, B$  皆是  $n$  阶矩阵, 则

$$f(A)g(A) = g(A)f(A).$$

例如

$$\begin{aligned}(A+3I)(2A-I) &= (2A-I)(A+3I) \\ &= 2A^2+5A+3I.\end{aligned}$$

$$(A+\lambda I)^k = A^k + C_k^1 \lambda A^{k-1} + C_k^2 \lambda^2 A^{k-2} + \cdots + C_k^{k-1} \lambda^{k-1} A + \lambda^k I$$

其中  $\lambda$  为常数. 但一般情况下,  $f(A)g(B) \neq g(B)f(A)$ . 例如当  $AB$  不可交换时,

$$\begin{aligned}(A+B)^2 &\neq A^2+2AB+B^2; \\ (A+B)(A-B) &\neq (A-B)(A+B) \neq A^2-B^2.\end{aligned}$$

## 2.3 矩阵的转置 对称矩阵

定义 1 把一个  $m \times n$  矩阵

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

的行列互换得到的一个  $n \times m$  矩阵, 称之为  $A$  的转置矩阵, 记作  $A'$  或  $A^T$ , 即

$$A^T = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{m1} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{m2} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}.$$

由定义可知, 如果记  $A = [a_{ij}]_{m \times n}$ ,  $A^T = [a_{ji}^T]_{n \times m}$  则

$$a_{ji}^T = a_{ij} \quad (i=1, 2, \cdots, m, j=1, 2, \cdots, n).$$

矩阵的转置运算满足以下运算规律:

- (i)  $(A^T)^T = A$ ;
- (ii)  $(A+B)^T = A^T + B^T$ ;
- (iii)  $(kA)^T = kA^T$  ( $k$  是数);

(iv)  $(AB)^T = B^T A^T$ .

规则(i), (ii), (iii)是显然成立的, 下面证明规则(iv). 设

$$A = [a_{ij}]_{m \times n}, B = [b_{ij}]_{n \times s}, A^T = [a_{ji}^T]_{n \times m}, B^T = [b_{ji}^T]_{s \times n}.$$

于是  $(AB)^T$  是  $s \times m$  矩阵,  $B^T A^T$  也是  $s \times m$  矩阵, 所以  $(AB)^T$  与  $B^T A^T$  是同型矩阵. 再根据

$$a_{ji}^T = a_{ij}, b_{ji}^T = b_{ij}.$$

得

$$\begin{aligned} (B^T A^T)_{ji} &= \sum_{k=1}^n b_{jk}^T a_{ki}^T = \sum_{k=1}^n a_{ik} b_{kj} \\ &= (AB)_{ij} = (AB)^T_{ji}. \\ j &= 1, 2, \dots, s; i = 1, 2, \dots, n. \end{aligned}$$

故  $(AB)^T = B^T A^T$ . ■

利用规则(iv), 可以证明  $(A_1 A_2 \cdots A_k)^T = A_k^T \cdots A_2^T A_1^T$ .

**定义 2** 设

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

是一个  $n$  阶矩阵, 如果  $a_{ij} = a_{ji} (i, j = 1, 2, \dots, n)$ , 则称  $A$  为**对称矩阵**; 如果  $a_{ij} = -a_{ji} (i, j = 1, 2, \dots, n)$ , 则称  $A$  为**反对称矩阵**.

反对称矩阵  $A$ , 由于  $a_{ii} = -a_{ii} (i = 1, 2, \dots, n)$  所以其主对角元  $a_{ii}$  全为零.

根据定义 1 和定义 2, 容易证明:

$A$  为对称阵的充要条件是  $A^T = A$ ;

$A$  为反对称阵的充要条件是  $A^T = -A$ .

**例 1** 设  $B$  是一个  $m \times n$  矩阵, 则  $B^T B$  和  $B B^T$  都是对称矩阵. 因为  $B^T B$  是  $n$  阶矩阵, 且

$$(B^T B)^T = B^T (B^T)^T = B^T B.$$

同理  $BB^T$  是  $m$  阶对称矩阵.

**例 2** 设  $A$  是  $n$  阶反对称矩阵,  $B$  是  $n$  阶对称矩阵, 则  $AB+BA$  是  $n$  阶反对称矩阵. 这是因为

$$\begin{aligned}(AB+BA)^T &= (AB)^T + (BA)^T = B^T A^T + A^T B^T \\ &= B(-A) + (-A)B = -(AB+BA).\end{aligned}$$

必须注意, 对称矩阵的乘积不一定是对称矩阵.

## 2.4 可逆矩阵的逆矩阵

矩阵的运算中, 定义了加法和负矩阵, 就可以定义矩阵的减法, 那么定义了矩阵的乘法, 是否可定义矩阵的除法呢? 由于矩阵乘法不满足交换律, 因此我们不能一般地定义矩阵的除法. 大家知道, 在数的运算中, 当数  $a \neq 0$  时,  $aa^{-1} = a^{-1}a = 1$ , 这里  $a^{-1} = \frac{1}{a}$  称为  $a$  的倒数, (或称  $a$  的逆); 在矩阵的乘法运算中, 单位矩阵  $I$  相当于数的乘法运算中的 1, 那么, 对于一个矩阵  $A$ , 是否存在一个矩阵  $A^{-1}$ , 使得  $AA^{-1} = A^{-1}A = I$  呢? 如果存在这样的矩阵  $A^{-1}$ , 就称  $A$  是可逆矩阵, 并称  $A^{-1}$  是  $A$  的逆矩阵. 下面我们给出可逆矩阵及其逆矩阵的一般定义, 并讨论矩阵可逆的条件及求逆矩阵的方法.

**定义 1** 对于矩阵  $A$ , 如果存在一个矩阵  $B$ , 使得

$$AB = BA = I, \quad (2.22)$$

就称  $A$  为可逆矩阵, (简称  $A$  可逆), 并称  $B$  是  $A$  的逆矩阵, 记作  $A^{-1}$ , 即  $A^{-1} = B$ .

由定义可知, 可逆矩阵及其逆矩阵是同阶方阵. 由于 (2.22) 式中,  $A$  与  $B$  的地位是平等的, 所以也可称  $A$  是  $B$  的逆矩阵.

**定理 1** 若  $A$  是可逆矩阵, 则  $A$  的逆矩阵是唯一的.

**证** 设  $B$  和  $C$  都是  $A$  的逆矩阵, 则由

$$AB=BA=I, AC=CA=I,$$

可得  $B=IB=(CA)B=C(AB)=CI=C,$

故  $A$  的逆矩阵是唯一的. ■

下面讨论矩阵  $A$  可逆的充分必要条件.

如果  $A$  可逆, 由 (2.22) 式可知:  $|A||B|=|I|=1$ , 于是  $|A| \neq 0$ , 因此  $|A| \neq 0$  是  $A$  可逆的必要条件.  $|A| \neq 0$  也是  $A$  可逆的充分条件, 为了证明这个结论, 我们引进  $A$  的伴随矩阵 (adjoint matrix) 的概念.

**定义 2** 设  $A$  是一个  $n$  阶矩阵,

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} \xrightarrow{\text{记作}} [a_{ij}]_{n \times n}.$$

$A_{ij}$  是行列式  $|A|$  中元素  $a_{ij}$  的代数余子式. 我们称

$$\text{cof} A = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & \cdots & A_{1n} \\ A_{21} & A_{22} & \cdots & A_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ A_{n1} & A_{n2} & \cdots & A_{nn} \end{bmatrix} \xrightarrow{\text{记作}} [A_{ij}]_{n \times n}$$

是  $A$  的代数余子式矩阵, 并称  $\text{cof} A$  的转置矩阵是  $A$  的伴随矩阵, 记作  $\text{adj} A$  或  $A^*$ , 即

$$A^* = (\text{cof} A)^T = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{21} & \cdots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \cdots & A_{n2} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ A_{1n} & A_{2n} & \cdots & A_{nn} \end{bmatrix}$$

在 2.2 节的例 6 中已经证明了

$$AA^* = \begin{bmatrix} |A| & & & \\ & |A| & & \\ & & \ddots & \\ & & & |A| \end{bmatrix} = |A|I.$$

同理可证,  $A^*A = |A|I$ , 于是

$$AA^* = A^*A = |A|I, \quad (2.23)$$

当  $|A| \neq 0$  时, 由 (2.23) 式可得

$$A\left(\frac{1}{|A|}A^*\right) = \left(\frac{1}{|A|}A^*\right)A = I, \quad (2.24)$$

故当  $|A| \neq 0$  时,  $A$  可逆, 且

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|}A^*. \quad (2.25)$$

综上所述, 我们得到下面的定理:

**定理 2** 矩阵  $A$  可逆的充分必要条件是:  $|A| \neq 0$ , 且

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|}A^*.$$

**推论** 若  $A, B$  都是  $n$  阶矩阵, 且  $AB = I$ , 则  $BA = I$ , 即  $A, B$  皆可逆, 且  $A, B$  互为逆矩阵.

**证** 由  $AB = I$ , 得  $|A||B| = 1$ ,  $|A| \neq 0$ ,  $|B| \neq 0$ , 根据定理 2,  $A, B$  皆可逆, 于是,

$$AB = I \Rightarrow A^{-1}ABA = A^{-1}IA \Rightarrow BA = I. \quad \blacksquare$$

定理 2 不仅给出了  $A$  可逆的充要条件, 而且提供了求  $A^{-1}$  的一种方法. 以后我们还将介绍另一种常用的求  $A^{-1}$  的方法. 定理 2 的推论告诉我们, 判断  $B$  是否为  $A$  的逆, 只需验证  $AB = I$  或  $BA = I$  的一个等式成立即可.

**例 1** 下列矩阵  $A, B$  是否可逆? 若可逆, 求其逆矩阵.

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} b_1 & & \\ & b_2 & \\ & & b_3 \end{bmatrix}.$$

**解**  $|A|=2$ , 故  $A$  可逆. 记  $A=[a_{ij}]_{3 \times 3}$ , 各元素的代数余子式为

$$A_{11} = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1, A_{12} = - \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 0, A_{13} = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = -1,$$

$$A_{21} = - \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = -2, A_{22} = \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 2, A_{23} = - \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = 2,$$

$$A_{31} = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 1, A_{32} = - \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = -2, A_{33} = \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 1.$$

故

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|} A^* = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ -2 & 2 & 2 \\ -1 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

$|B|=b_1 b_2 b_3 \neq 0$  时,  $B$  可逆, 其逆矩阵仍为对角矩阵, 且

$$B^{-1} = \begin{bmatrix} 1/b_1 & & \\ & 1/b_2 & \\ & & 1/b_3 \end{bmatrix}.$$

求逆的运算容易出错, 所以求得  $A^{-1}$  后, 应验证  $AA^{-1}=I$ , 以保证结果是正确的.

**例 2** 设  $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$

的行列式  $\det A = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} = d \neq 0$ , 则其逆矩阵

$$A^{-1} = \frac{1}{d} A^* = \frac{1}{d} \begin{bmatrix} a_{22} & -a_{12} \\ -a_{21} & a_{11} \end{bmatrix}.$$

**例 3** 设方阵满足方程  $A^2 - 3A - 10I = O$ , 证明:  $A, A - 4I$  都可逆, 并求它们的逆矩阵.

**证** 由  $A^2 - 3A - 10I = O$  得  $A(A - 3I) = 10I$ , 即

$$A \left[ \frac{1}{10} (A - 3I) \right] = I,$$

故  $A$  可逆, 且  $A^{-1} = \frac{1}{10}(A-3I)$ . 再由  $A^2-3A-10I=O$  得

$$(A+I)(A-4I)=6I,$$

即  $\frac{1}{6}(A+I)(A-4I)=I,$

故  $A-4I$  可逆, 且  $(A-4I)^{-1} = \frac{1}{6}(A+I).$  ■

**例 4** 已知非齐次线性方程组  $AX=b$  的系数矩阵  $A$  如例 1 所给,  $b=[5, 1, 1]^T$ , 问方程组是否有解? 如有解, 求其解.

**解** 由于  $A$  是可逆矩阵, 且逆矩阵是唯一的, 因此等式  $AX=b$  两端都左乘  $A^{-1}$ , 即

$$A^{-1}(AX)=A^{-1}b,$$

便得此方程组的唯一解

$$X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = A^{-1}b = \begin{bmatrix} 1/2 & -1 & 1/2 \\ 0 & 1 & -1 \\ -1/2 & 1 & 1/2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 5 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}$$

最后, 我们利用定理 2 的推论, 得到可逆矩阵有以下性质:

设同阶矩阵  $A, B$  皆可逆, 数  $k \neq 0$ , 则

$$(i) (A^{-1})^{-1}=A; \quad (ii) (kA)^{-1}=k^{-1}A^{-1};$$

$$(iii) (AB)^{-1}=B^{-1}A^{-1}; \quad (iv) (A^T)^{-1}=(A^{-1})^T;$$

$$(v) \det(A^{-1})=1/\det A, \quad \text{即 } |A^{-1}|=|A|^{-1}.$$

我们仅证明后三条性质(前两条性质的证明, 留给读者作为练习).

因为  $|AB|=|A||B| \neq 0$ , 所以  $AB$  可逆, 又

$$(AB)(B^{-1}A^{-1})=A(BB^{-1})A^{-1}=AIA^{-1}=AA^{-1}=I,$$

故  $(AB)^{-1}=B^{-1}A^{-1}$ . 性质(iii)可推广到多个可逆阵的乘积, 即若  $A_1, A_2, \dots, A_m$ , 皆可逆, 则

$$(A_1A_2\cdots A_m)^{-1}=A_m^{-1}\cdots A_2^{-1}A_1^{-1}.$$

因为  $|A^T|=|A| \neq 0$ , 所以  $A^T$  可逆, 又



$$(AA^{-1})^T = I, \text{ 即 } (A^{-1})^T A^T = I,$$

故  $(A^T)^{-1} = (A^{-1})^T$ .

因为  $AA^{-1} = I$ , 所以  $|A||A^{-1}| = 1, (|A| \neq 0)$ , 因此

$$|A^{-1}| = \frac{1}{|A|} = |A|^{-1}.$$

必须注意,  $A, B$  皆可逆,  $A+B$  不一定可逆, 即使  $A+B$  可逆, 一般的  $(A+B)^{-1} \neq A^{-1} + B^{-1}$ , 例如:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, C = \begin{bmatrix} 1 & \\ & 2 \end{bmatrix},$$

$A, B$  均可逆, 但  $A+B = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$  不可逆.

$A, C$  均可逆, 且  $A+C = \begin{bmatrix} 2 & \\ & 1 \end{bmatrix}$  也可逆, 但容易验证

$$(A+C)^{-1} \neq A^{-1} + C^{-1}.$$

特别是  $A+A=2A$  可逆, 但  $(2A)^{-1} = 2^{-1}A^{-1} \neq 2A^{-1}$ .

**例 5** 证明: 若  $A$  是可逆的反对称矩阵, 则  $A^{-1}$  也是反对称矩阵.

**证** 因为  $(A^{-1})^T = (A^T)^{-1} = (-A)^{-1} = -A^{-1}$ , 所以  $A^{-1}$  是反对称矩阵.

同理, 可逆对称矩阵的逆矩阵仍是对称矩阵.

## 2.5 矩阵的初等变换和初等矩阵

用高斯消元法解线性方程组, 其消元步骤是对增广矩阵做三类行变换:

(i) 以非零常数  $c$  乘矩阵的某一行;

(ii) 将矩阵的某一行乘以常数  $c$  并加到另一行;

(iii) 将矩阵的某两行对换位置.

这三类行变换统称为**矩阵的初等行变换**, (i) 称为**倍乘变换**, (ii) 称为**倍加变换**, (iii) 称为**对换变换**.

在矩阵的其他一些问题里(如展开方阵的行列式), 也要对矩阵作上述三类初等列变换, 初等行、列变换统称为**初等变换**.

初等变换在矩阵的理论中具有十分重要的作用. 矩阵的初等变换不只是可用语言表述, 而且可用矩阵的乘法运算来表示, 为此要引入初等矩阵的概念.

**定义** 将单位矩阵作一次初等变换所得的矩阵称为**初等矩阵**.

对应于三类初等行、列变换, 有三种类型的初等矩阵:

(i) **初等倍乘矩阵**

$$E_i(c) = \text{diag}(1, \cdots, 1, c, 1, \cdots, 1).$$

$E_i(c)$  是由单位矩阵第  $i$  行(或列)乘  $c$  ( $c \neq 0$ ) 而得到的;

(ii) **初等倍加矩阵**

$$E_{ij}(c) = \begin{bmatrix} 1 & & & & & \\ & \ddots & & & & \\ & & 1 & & & \\ & & & \ddots & & \\ & & c & & 1 & \\ & & & & & \ddots \\ & & & & & & 1 \end{bmatrix},$$

$E_{ij}(c)$  是由单位矩阵第  $i$  行乘  $c$  加到第  $j$  行而得到的, 或由第  $j$  列乘  $c$  加到第  $i$  列而得到;

(iii) **初等对换矩阵**

$$E_{ij} = \begin{bmatrix} 1 & & & & & \\ & \ddots & & & & \\ & & 0 & & 1 & \\ & & & 1 & & \\ & & & & \ddots & \\ & & & & & 1 \\ & 1 & & & & 0 & \\ & & & & & & \ddots \\ & & & & & & & 1 \end{bmatrix}.$$

$E_{ij}$ 是由单位矩阵第  $i, j$  行(或列)对换而得到的.

**例 1** 计算下列初等矩阵与矩阵  $A = [a_{ij}]_{3 \times n}$ ,  $A = [a_{ij}]_{3 \times 2}$ ,  $B = [b_{ij}]_{3 \times 3}$  的乘积:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & c & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & \cdots & a_{3n} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ ca_{21} & ca_{22} & \cdots & ca_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & \cdots & a_{3n} \end{bmatrix}.$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & c \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} + ca_{31} & a_{12} + ca_{32} \\ a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{bmatrix}.$$

$$\begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{13} & b_{12} \\ b_{21} & b_{23} & b_{22} \\ b_{31} & b_{33} & b_{32} \end{bmatrix}.$$

由例 1 可见,初等矩阵左乘  $A$ (右乘  $B$ )的结果是对  $A(B)$ 作初等行(列)变换,而且,如果初等矩阵是由单位矩阵作某种行(列)变换所得,那末它左乘  $A$ (右乘  $B$ )也是对  $A(B)$ 作该种行(列)变换.

读者不难证明下面的一般结论:

$E_i(c)A$  表示  $A$  的第  $i$  行乘  $c$ ;

$E_{ij}(c)A$  表示  $A$  的第  $i$  行乘  $c$  加至第  $j$  行;

$E_{ij}A$  表示  $A$  第  $i$  行与第  $j$  行对换位置;

$BE_i(c)$  表示  $B$  的第  $i$  列乘  $c$ ;

$BE_{ij}(c)$  表示  $B$  的第  $j$  列乘  $c$  加至第  $i$  列;

$BE_{ij}$  表示  $B$  的第  $i$  列与第  $j$  列对换位置.

初等矩阵的行列式都不等于零,因此初等矩阵都是可逆矩阵.由于对初等矩阵再作一次初等变换就化为单位矩阵,即

$$E_i\left(\frac{1}{c}\right)E_i(c)=I, \quad E_{ij}(-c)E_{ij}(c)=I, \quad E_{ij}E_{ij}=I,$$

所以,初等矩阵的逆矩阵是同类初等矩阵,即

$$E_i^{-1}(c)=E_i\left(\frac{1}{c}\right), \quad E_{ij}^{-1}(c)=E_{ij}(-c), \quad E_{ij}^{-1}=E_{ij}.$$

**例 2** 设初等矩阵

$$P_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, P_2 = \begin{bmatrix} 1 & & & \\ 0 & 1 & & \\ 0 & 0 & 1 & \\ c & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$
$$P_3 = \begin{bmatrix} 1 & & & \\ & k & & \\ & & 1 & \\ & & & 1 \end{bmatrix}.$$

试求  $P_1P_2P_3$  及  $[P_1P_2P_3]^{-1}$ .

**解**  $P_2$  左乘  $P_3$  表示对  $P_3$  作初等行变换,  $P_1$  左乘  $P_2P_3$ , 表示对  $P_2P_3$  作初等行变换,于是可得

$$P_1P_2P_3 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & & & \\ 0 & 1 & & \\ 0 & 0 & 1 & \\ c & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & & & \\ & k & & \\ & & 1 & \\ & & & 1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ c & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & & & \\ 0 & k & & \\ 0 & 0 & 1 & \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & k & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ c & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

$$[P_1 P_2 P_3]^{-1} = P_3^{-1} P_2^{-1} P_1^{-1}$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & & & \\ 0 & \frac{1}{k} & & \\ 0 & 0 & 1 & \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & & & \\ 0 & 1 & & \\ 0 & 0 & 1 & \\ -c & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & & & \\ & \frac{1}{k} & & \\ & & 1 & \\ & & & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -c & 1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & \frac{1}{k} & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -c & 1 \end{bmatrix}.$$

对于  $P_1 P_2 P_3$ , 其中  $P_2$  右乘  $P_1$  表示对  $P_1$  作初等列变换,  $P_3$  右乘  $P_1 P_2$  表示对  $P_1 P_2$  作初等列变换, 这样运算其结果也是一样的.

• 例 3 将三对角矩阵

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

分解成主对角元为 1 的下三角矩阵  $L$  和上三角矩阵  $U$  的乘积, 即  $A=LU$ .

**解** 由于第三类初等矩阵及其逆矩阵都是主对角元为 1 的同类型三角阵. 因此如能通过倍加行变换将  $A$  的主对角线以下元素消为零. (此时倍加行变换对应的初等矩阵是主对元为 1 的下三角矩阵, 而  $A$  将化成上三角矩阵,) 就可将  $A$  分解为  $LU$ , 具体作法如下:

$$\begin{bmatrix} 1 & & & \\ -\frac{1}{2} & 1 & & \\ & & 1 & \\ & & & 1 \end{bmatrix} A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{3}{2} & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{bmatrix} \xrightarrow{\text{记作}} A_1,$$

$$\begin{bmatrix} 1 & & & \\ & 1 & & \\ -\frac{2}{3} & 1 & & \\ & & 1 & \\ & & & 1 \end{bmatrix} A_1 = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{3}{2} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{4}{3} & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{bmatrix} \xrightarrow{\text{记作}} A_2,$$

$$\begin{bmatrix} 1 & & & \\ & 1 & & \\ & & 1 & \\ & & -\frac{3}{4} & 1 \end{bmatrix} A_2 = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \\ & \frac{3}{2} & 1 & 0 \\ & & \frac{4}{3} & 1 \\ & & & \frac{5}{4} \end{bmatrix} \xrightarrow{\text{记作}} U,$$

将上面三个式子中的左端的矩阵分别记作  $L_1, L_2, L_3$

则  $L_3 L_2 L_1 A = U,$

故  $A = (L_3 L_2 L_1)^{-1} U = LU,$

其中  $L = (L_3 L_2 L_1)^{-1} = L_1^{-1} L_2^{-1} L_3^{-1}$

$$= \begin{bmatrix} 1 & & & \\ \frac{1}{2} & 1 & & \\ & & 1 & \\ & & & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & & & \\ & 1 & & \\ & \frac{2}{3} & 1 & \\ & & & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & & & \\ & 1 & & \\ & & 1 & \\ & & \frac{3}{4} & 1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & & & \\ \frac{1}{2} & 1 & & \\ & \frac{2}{3} & 1 & \\ & & \frac{3}{4} & 1 \end{bmatrix}.$$

下面介绍用初等变换求逆矩阵的方法.

**定理** 可逆矩阵可以经过若干次初等行变换化为单位矩阵.

**证**  $n$  阶可逆矩阵

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

的行列式  $|A| \neq 0$ , 所以它的第一列元素不全为零. 不失一般性, 设  $a_{11} \neq 0$  (如果  $a_{11} = 0$ , 必存在  $a_{i1} \neq 0$ , 此时先把第 1 行与第  $i$  行对换), 先将第一行乘  $a_{11}^{-1}$ , 再将变换后的第一行乘  $(-a_{i1})$  加至第  $i$  行 ( $i=2, 3, \cdots, n$ ) 得

$$P_{1m} \cdots P_{12} P_{11} A = \begin{bmatrix} 1 & a'_{12} & \cdots & a'_{1n} \\ 0 & a'_{22} & \cdots & a'_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & a'_{n1} & \cdots & a'_{nn} \end{bmatrix}$$

记作  $\begin{bmatrix} 1 & \alpha \\ 0 & A_1 \end{bmatrix} = B,$

其中  $P_{11}, P_{12}, \dots, P_{1m}$  是对  $A$  所作初等行变换所对应的初等矩阵. 由于  $|A_1| = |P_{1m} \cdots P_{12} P_{11} A| \neq 0$ , 故对  $B$  中  $A_1$  继续作如对  $A$  所作的初等行变换, 直至把  $B$  化为主对角元为 1 的上三角矩阵, 即

$$P_{2l} \cdots P_{22} P_{21} B = \begin{bmatrix} 1 & a'_{12} & \cdots & a'_{1n} \\ & 1 & \cdots & a''_{2n} \\ & & \ddots & \vdots \\ & & & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{\text{记作}} C.$$

再将  $C$  中第  $n, n-1, \dots, 2$  行依次分别乘某些常数加到前面的第  $n-1, n-2, \dots, 1$  行, 就可使  $C$  化为单位阵, 即

$$P_{3l} \cdots P_{32} P_{31} C = I.$$

综上所述有

$$(P_{3l} \cdots P_{32} P_{31})(P_{2l} \cdots P_{22} P_{21})(P_{1m} \cdots P_{12} P_{11})A = I,$$

其中  $A$  左边的矩阵都是初等矩阵, 于是定理得证.

**推论 1** 可逆矩阵  $A$  可以表示为若干个初等矩阵的乘积.

**证** 根据定理, 存在初等矩阵  $P_1, P_2, \dots, P_r$ , 使得

$$P_r \cdots P_2 P_1 A = I, \quad (2.26)$$

所以

$$A = (P_r \cdots P_2 P_1)^{-1} = P_1^{-1} P_2^{-1} \cdots P_r^{-1}, \quad (2.27)$$

其中  $P_1^{-1}, P_2^{-1}, \dots, P_r^{-1}$  仍是初等矩阵, 推论得证.

由 (2.26) 式可知



$$A^{-1} = P_1 \cdots P_2 P_1 = P_1 \cdots P_2 P_1 I. \quad (2.28)$$

于是,根据(2.26), (2.28)式,即得

**推论 2** 如果对可逆矩阵  $A$  和同阶单位阵  $I$  作同样的初等行变换,那末当  $A$  变为单位阵时,  $I$  就变为  $A^{-1}$ ,即

$$[A, I] \xrightarrow{\text{初等行变换}} [I, A^{-1}].$$

由(2.27)式又可得:

$$AP_1 \cdots P_2 P_1 = I;$$

$$IP_1 \cdots P_2 P_1 = A^{-1}.$$

因此,同样也可用初等列变换求逆矩阵,即

$$\begin{bmatrix} A \\ I \end{bmatrix} \xrightarrow{\text{初等列变换}} \begin{bmatrix} I \\ A^{-1} \end{bmatrix}$$

**例 4** 用初等行变换求 2.4 节中例 1 中

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 2 \\ 1 & 3 & 3 \end{bmatrix}$$

的逆矩阵

**解**

$$\begin{aligned} [A, I] &= \left[ \begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 3 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right] \\ &\xrightarrow[\text{③} + \text{①} \times (-1)]{\text{②} + \text{①} \times (-2)} \left[ \begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & -4 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & 1 \end{array} \right] \\ &\xrightarrow[\text{③} + \text{②} \times 3]{\text{②} \leftrightarrow \text{③}} \left[ \begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -4 & -5 & 1 & 3 \end{array} \right] \end{aligned}$$

$$\begin{array}{l}
 \xrightarrow[\text{①} + \text{③} \times (-3)]{\text{③} \times (-\frac{1}{4})} \left[ \begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 0 & -\frac{11}{4} & \frac{3}{4} & \frac{9}{4} \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{5}{4} & -\frac{1}{4} & -\frac{3}{4} \end{array} \right] \\
 \xrightarrow{\text{①} + \text{②} \times (-2)} \left[ \begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -\frac{3}{4} & \frac{3}{4} & \frac{1}{4} \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{5}{4} & -\frac{1}{4} & -\frac{3}{4} \end{array} \right],
 \end{array}$$

故

$$A^{-1} = \frac{1}{4} \begin{bmatrix} -3 & 3 & 1 \\ -4 & 0 & 4 \\ 5 & -1 & -3 \end{bmatrix}.$$

**例 5** 假设矩阵  $A, B$  满足如下关系

$$AB = A + 2B, \text{ 其中 } A = \begin{bmatrix} 4 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 3 \end{bmatrix}, \text{ 求 } B.$$

**解** 这是一个矩阵方程, 应先将关系式变形, 解出  $B$ , 然后再代入具体矩阵进行计算.

由  $AB = A + 2B$ , 得  $AB - 2B = (A - 2I)B = A$ , 其中  $I$  是单位阵, 因

$$|A - 2I| = \begin{vmatrix} 2 & 2 & 3 \\ 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \end{vmatrix} = -1 \neq 0,$$

故  $A - 2I$  可逆, 且  $B = (A - 2I)^{-1}A$ , 用初等行变换(或用伴随矩阵求逆法)易得:

$$(A - 2I)^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & -4 & -3 \\ 1 & -5 & -3 \\ -1 & 6 & 4 \end{bmatrix},$$

$$\text{故 } B = \begin{bmatrix} 1 & -4 & -3 \\ 1 & -5 & -3 \\ -1 & 6 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & -8 & -6 \\ 2 & -9 & -6 \\ -2 & 12 & 9 \end{bmatrix}$$

读者必须注意,用初等行变换求可逆矩阵的逆矩阵时,必须始终作行变换,其间不能作任何列变换.如果作初等行变换时,出现全零行,则其行列式等于零,因而矩阵是不可逆的.

读者也应练习一下,用初等列变换求逆矩阵的方法.

高斯消元法的消元步骤,实际上是对增广矩阵作初等行变换将其化为阶梯形矩阵.事实上,任何一个  $m \times n$  矩阵  $A$ ,都可通过初等行变换化为阶梯形矩阵,而且不论如何作行变换,所化得的阶梯形矩阵的非零行的行数是由  $A$  唯一确定的(下一章我们将给出它的证明).

## 2.6 分块矩阵

把一个大型矩阵分成若干小块,构成一个分块矩阵,这是矩阵运算中的一个重要技巧,它可以把大型矩阵的运算化为若干小型矩阵的运算,使运算更为简明.下面通过例子说明如何分块及分块矩阵的运算方法.

把一个 5 阶矩阵

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 & 0 & -1 \\ 1 & 2 & 2 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

用水平和垂直的虚线分成 4 块,如果记

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} = A_1, \quad \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & -3 & 0 \end{bmatrix} = A_2, \\ \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = O, \quad \begin{bmatrix} 1 & & \\ & 1 & \\ & & 1 \end{bmatrix} = I_3,$$

就可以把  $A$  看成由上面 4 个小矩阵所组成,写作

$$A = \begin{bmatrix} A_1 & A_2 \\ O & I_3 \end{bmatrix},$$

并称它是  $A$  的一个  $2 \times 2$  分块矩阵,其中的每一个小矩阵称为  $A$  的一个子块.

把一个  $m \times n$  矩阵  $A$ ,在行的方向分成  $s$  块,在列的方向分成  $t$  块,称为  $A$  的  $s \times t$  分块矩阵,记作  $A = [A_{kl}]_{s \times t}$ ,其中  $A_{kl}$  ( $k=1,2,\dots,s, l=1,2,\dots,t$ ) 称为  $A$  的子块,它们是各种类型的小矩阵.

常用的分块矩阵,除了上面的 4 块矩阵,还有以下几种形式:

按行分块

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_1 \\ A_2 \\ \vdots \\ A_m \end{bmatrix},$$

其中  $A_i = [a_{i1} \quad a_{i2} \quad \cdots \quad a_{in}] \quad i=1,2,\dots,m.$

按列分块

$$B = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1s} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2s} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ b_{n1} & b_{n2} & \cdots & b_{ns} \end{bmatrix} = [B_1, B_2, \cdots, B_s],$$

其中 
$$B_j = \begin{bmatrix} b_{1j} \\ b_{2j} \\ \vdots \\ b_{nj} \end{bmatrix}, \quad j=1, 2, \dots, s.$$

当  $n$  阶矩阵  $C$  中非零元素都集中在主对角线附近, 有时可以分块成下面的**对角块矩阵**(又称**准对角矩阵**)

$$C = \begin{bmatrix} C_1 & & & \\ & C_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & C_m \end{bmatrix},$$

其中  $C_i$  是  $r_i$  阶方阵 ( $i=1, 2, \dots, m; \sum_{i=1}^m r_i = n$ ), 例如

$$B = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 2 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 2 & -2 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} B_1 & & \\ & B_2 & \\ & & B_3 \end{bmatrix},$$

其中  $B_1 = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}, B_2 = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & -2 \end{bmatrix}, B_3 = [3].$

下面讨论分块矩阵的运算.

### 1. 分块矩阵的加法

设分块矩阵  $A = [A_{kl}]_{s \times t}, B = [B_{kl}]_{s \times t}$ , 如果  $A$  与  $B$  对应的子块  $A_{kl}$  和  $B_{kl}$  都是同型矩阵, 则

$$A + B = [A_{kl} + B_{kl}]_{s \times t}.$$

例如 
$$\begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} B_{11} & B_{12} \\ B_{21} & B_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{11} + B_{11} & A_{12} + B_{12} \\ A_{21} + B_{21} & A_{22} + B_{22} \end{bmatrix},$$

其中  $A_{11}$  与  $B_{11}, A_{12}$  与  $B_{12}, A_{21}$  与  $B_{21}, A_{22}$  与  $B_{22}$  分别都是同型

小矩阵(子块).

## 2. 分块矩阵的数量乘法

设分块矩阵  $A = [A_{kl}]_{r \times t}$ ,  $h$  是一个数, 则

$$hA = [hA_{kl}]_{r \times t}.$$

## 3. 分块矩阵的乘法

设  $A$  是  $m \times n$  矩阵,  $B$  是  $n \times p$  矩阵, 如果  $A$  分块为  $r \times s$  分块矩阵  $[A_{kl}]_{r \times s}$ ,  $B$  分块为  $s \times t$  分块矩阵  $[B_{kl}]_{s \times t}$ , 且  $A$  的列的分块法和  $B$  的行的分块法完全相同, 则

$$AB = \begin{matrix} & \begin{matrix} j_1 \text{ 列} & j_2 \text{ 列} & \cdots & j_s \text{ 列} \end{matrix} \\ \begin{matrix} i_1 \text{ 行} \\ i_2 \text{ 行} \\ \vdots \\ i_r \text{ 行} \end{matrix} & \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & \cdots & A_{1s} \\ A_{21} & A_{22} & \cdots & A_{2s} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ A_{r1} & A_{r2} & \cdots & A_{rs} \end{bmatrix} \end{matrix} \cdot \begin{matrix} \begin{bmatrix} B_{11} & B_{12} & \cdots & B_{1t} \\ B_{21} & B_{22} & \cdots & B_{2t} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ B_{s1} & B_{s2} & \cdots & B_{st} \end{bmatrix} \\ \begin{matrix} j_1 \text{ 行} \\ j_2 \text{ 行} \\ \vdots \\ j_s \text{ 行} \end{matrix} \end{matrix}$$

$$= C \stackrel{\text{记作}}{=} [C_{kl}]_{r \times t},$$

其中  $C$  是  $r \times t$  分块矩阵, 且

$$C_{kl} = \sum_{i=1}^s A_{ki} B_{il} \quad (k=1, 2, \cdots, r; l=1, 2, \cdots, t).$$

可以证明(但略去), 用分块乘法求得的  $AB$  与不分块作乘法求得的  $AB$  是相等的.

**例 1** 将下列 5 阶矩阵  $A, B$  分成 4 块阵, 并用分块矩阵的乘法计算  $AB$ .

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

**解** 由观察, 可将  $A$  分成如下 4 块阵

$$A = \left[ \begin{array}{cc|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline -1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right] = \begin{bmatrix} I_2 & O_{2 \times 3} \\ A_1 & I_3 \end{bmatrix}, \text{其中 } A_1 = \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 1 & 1 \\ -2 & 0 \end{bmatrix}.$$

根据分块矩阵乘法的要求,  $B$  的行的分法应和  $A$  的列的分法一致, 而列可以任分, 为计算方便可将  $B$  分块如下

$$B = \left[ \begin{array}{ccc|cc} 3 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 0 & 0 & 1 \\ \hline -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \end{array} \right] = \begin{bmatrix} B_1 & I_2 \\ -I_3 & O_{3 \times 2} \end{bmatrix},$$

其中  $B_1 = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 0 \\ 1 & 3 & 0 \end{bmatrix},$

则  $AB = \begin{bmatrix} I_2 & 0 \\ A_1 & I_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} B_1 & I_2 \\ -I_3 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} B_1 & I_2 \\ A_1 B_1 - I_3 & A_1 \end{bmatrix},$

其中  $A_1 B_1 - I_3 = \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 1 & 1 \\ -2 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & 2 & 0 \\ 1 & 3 & 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$   
 $= \begin{bmatrix} -2 & 4 & 0 \\ 4 & 4 & 0 \\ -6 & -4 & -1 \end{bmatrix},$

故

$$AB = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 0 & 0 & 1 \\ -2 & 4 & 0 & -1 & 2 \\ 4 & 4 & 0 & 1 & 1 \\ -6 & -4 & -1 & -2 & 0 \end{bmatrix}.$$

不难验证,  $AB$  直接相乘与分块相乘所得结果是一致的.

**例 2** 设  $A$  是  $m \times n$  矩阵,  $B$  是  $n \times s$  矩阵,  $B$  按列分块成  $1 \times s$  分块矩阵, 将  $A$  看成  $1 \times 1$  分块阵则

$$AB = A[B_1, B_2, \dots, B_s] = [AB_1, AB_2, \dots, AB_s].$$

若已知  $AB = O$ , 则显然有  $AB_i = O, i = 1, 2, \dots, s$ . 因此,  $B$  的每一列都是线性方程组  $Ax = O$  的解.

**例 3** 若  $n$  阶矩阵  $C, D$  可以分块成同型对角块矩阵, 即

$$C = \begin{bmatrix} C_1 & & & \\ & C_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & C_m \end{bmatrix}, D = \begin{bmatrix} D_1 & & & \\ & D_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & D_m \end{bmatrix},$$

其中  $C_i$  和  $D_i$  是同阶方阵 ( $i = 1, 2, \dots, m$ ), 则

$$CD = \begin{bmatrix} C_1 D_1 & & & \\ & C_2 D_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & C_m D_m \end{bmatrix}.$$

矩阵的分块乘法, 在以后证明一些重要的命题时, 起着重要的作用, 下面看一个例子.

**例 4** 证明: 若  $n$  阶上三角矩阵  $A$  可逆, 则其逆矩阵  $A^{-1}$  也是上三角阵.

**证** 对  $n$  作数学归纳法,  $n = 1$  时,  $[a]^{-1} = \left[\frac{1}{a}\right]$ , 结论成立. (一阶矩阵可以认为是上(下)三角阵, 对角阵, 对称阵). 假设命题对  $n-1$  阶可逆上三角阵成立, 下面考虑  $n$  阶情况. 设

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} \xrightarrow{\text{分块}} \begin{bmatrix} a_{11} & a \\ 0 & A_1 \end{bmatrix} (a_{ii} \neq 0, i = 1, 2, \dots, n),$$



其中  $A_1$  是  $n-1$  阶可逆的上三角阵. 设  $A$  的逆矩阵为

$$B = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ b_{n1} & b_{n2} & \cdots & b_{nn} \end{bmatrix} \xrightarrow{\text{分块}} \begin{bmatrix} b_{11} & \beta \\ \gamma & B_1 \end{bmatrix},$$

则

$$AB = \begin{bmatrix} a_{11} & \alpha \\ O & A_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_{11} & \beta \\ \gamma & B_1 \end{bmatrix} = I_n = \begin{bmatrix} 1 & O \\ O & I_{n-1} \end{bmatrix},$$

即

$$\begin{bmatrix} a_{11}b_{11} + \alpha\gamma & a_{11}\beta + \alpha B_1 \\ A_1\gamma & A_1B_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & O \\ O & I_{n-1} \end{bmatrix},$$

于是:  $A_1\gamma = O \Rightarrow \gamma = A^{-1}O = O$

$A_1B_1 = I_{n-1} \Rightarrow B_1 = A_1^{-1}$ , 根据归纳假设,  $B_1$  是  $n-1$  阶上三角阵,

因此

$$A^{-1} = B = \begin{bmatrix} b_{11} & \beta \\ 0 & B_1 \end{bmatrix}$$

是上三角矩阵(其中:  $b_{11} = a_{11}^{-1}$ ;  $\beta = -a_{11}^{-1}\alpha A_1^{-1}$ ).

#### 4. 分块矩阵的转置

分块矩阵  $A = [A_{kl}]_{t \times s}$  的转置矩阵为

$$A^T = [B_{lk}]_{s \times t},$$

其中  $B_{lk} = A_{kl}^T$ ,  $l=1, 2, \cdots, t$ ;  $k=1, 2, \cdots, s$ .

例如  $A = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} \end{bmatrix}$ , 则  $A^T = \begin{bmatrix} A_{11}^T & A_{21}^T \\ A_{12}^T & A_{22}^T \\ A_{13}^T & A_{23}^T \end{bmatrix}$ .

$$B \xrightarrow{\text{按行分块}} \begin{bmatrix} B_1 \\ B_2 \\ \vdots \\ B_m \end{bmatrix}, \text{ 则 } B^T = [B_1^T, B_2^T, \cdots, B_m^T].$$

#### 5. 可逆分块矩阵的逆矩阵

对角块矩阵(准对角矩阵)

$$A = \begin{bmatrix} A_1 & & & \\ & A_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & A_m \end{bmatrix}$$

的行列式为  $|A| = |A_1| |A_2| \cdots |A_m|$ , 因此, 对角块矩阵  $A$  可逆的充要条件为

$$|A_i| \neq 0 \quad i=1, 2, \cdots, m.$$

根据对角块矩阵的乘法, 容易求得它的逆矩阵

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} A_1^{-1} & & & \\ & A_2^{-1} & & \\ & & \ddots & \\ & & & A_m^{-1} \end{bmatrix}.$$

用分块矩阵求逆矩阵, 可以将高阶矩阵的求逆转化为低阶矩阵的求逆. 一个 4 块阵求逆, 可以根据逆矩阵的定义, 用解矩阵方程的办法解得.

**例 5** 设  $A = \begin{bmatrix} B & O \\ C & D \end{bmatrix}$ , 其中  $B, D$  皆为可逆方阵, 证  $A$  可逆并求  $A^{-1}$ .

**解**  $|A| = |B| |D| \neq 0, A$  可逆. 设

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} X & Y \\ Z & T \end{bmatrix},$$

其中  $X$  与  $B, T$  与  $D$  分别是同阶方阵, 于是由

$$\begin{bmatrix} B & O \\ C & D \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X & Y \\ Z & T \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} BX & BY \\ CX + DZ & CY + DT \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I_1 & O \\ O & I_2 \end{bmatrix},$$

得  $BX = I_1, \quad$  故  $X = B^{-1}.$   
 $BY = O, \quad$  故  $Y = B^{-1}O = O.$   
 $CX + DZ = O, \quad$  故  $DZ = -CX = -CB^{-1},$

$$Z = -D^{-1}CB^{-1}.$$

$$CY + DT = I_2, \quad \text{故} \quad DT = I_2, T = D^{-1}.$$

所以

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} B^{-1} & O \\ -D^{-1}CB^{-1} & D^{-1} \end{bmatrix}.$$

$$\text{当 } A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \text{ 时, 将 } A \text{ 分块为 } A = \begin{bmatrix} B & O \\ C & D \end{bmatrix},$$

$$\text{其中 } B = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}, D = I_3 \text{ 可逆, } C = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -3 \\ 3 & 0 \end{bmatrix}. \text{ 利用例 5 的结果, 先}$$

$$\text{求出: } B^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} \\ -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} \end{bmatrix}, D^{-1} = I_3, -D^{-1}CB^{-1} = -\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -2 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}.$$

即得

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} B^{-1} & O \\ -D^{-1}CB^{-1} & D^{-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2/3 & -1/3 & 0 & 0 & 0 \\ -1/3 & 2/3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ -2 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

## 6. 分块矩阵的初等变换与分块初等阵

这里我们仅就  $2 \times 2$  分块矩阵为例来作讨论. 对于分块矩阵

$$A = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix}.$$

可以同样地定义它的三类初等行变换和列变换, 并相应地定义三类分块初等矩阵:

(i) 分块倍乘阵( $C_1, C_2$  是可逆阵)

$$\begin{bmatrix} C_1 & O \\ O & I_n \end{bmatrix} \quad \text{或} \quad \begin{bmatrix} I_m & O \\ O & C_2 \end{bmatrix}.$$

(ii) 分块倍加阵

$$\begin{bmatrix} I_m & O \\ C_3 & I_n \end{bmatrix} \quad \text{或} \quad \begin{bmatrix} I_m & C_4 \\ O & I_n \end{bmatrix}.$$

(iii) 分块对换阵

$$\begin{bmatrix} O & I_n \\ I_m & O \end{bmatrix}.$$

分块初等矩阵自然是方阵,它们左乘(或右乘)分块矩阵  $A$  (不一定是方阵),在保证可乘的情况下,其作用与前述初等矩阵左乘(或右乘)矩阵的作用是相同的.

分块矩阵的初等变换也是矩阵运算的一个重要技巧,我们以后讨论很多问题时要用到它.下面举两个应用的例子.

**例 6** 设  $n$  阶矩阵  $A$  分块表示为

$$A = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix},$$

其中  $A_{11}, A_{22}$  为方阵,且  $A$  和  $A_{11}$  可逆. 证明  $A_{22} - A_{21}A_{11}^{-1}A_{12}$  可逆,并求  $A^{-1}$ .

**解** 先对分块阵  $A$  作初等变换,将其化为上三角块矩阵,为此左乘分块倍加阵

$$P_1 = \begin{bmatrix} I_1 & O \\ -A_{21}A_{11}^{-1} & I_2 \end{bmatrix},$$

其中  $I_1, I_2$  为单位阵,其阶数分别等于  $A_{11}, A_{22}$  的阶数. 于是

$$P_1 A = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ O & A_{22} - A_{21}A_{11}^{-1}A_{12} \end{bmatrix} \xrightarrow{\text{记作}} B,$$

$$|P_1 A| = |A_{11}| |A_{22} - A_{21}A_{11}^{-1}A_{12}|.$$

由于  $|P_1|=1, |A|\neq 0, |A_{11}|\neq 0$ , 所以  $|A_{22}-A_{21}A_{11}^{-1}A_{12}|=\frac{|A|}{|A_{11}|}\neq 0$ , 故矩阵  $(A_{22}-A_{21}A_{11}^{-1}A_{12})$  可逆. 记

$$Q=A_{22}-A_{21}A_{11}^{-1}A_{12}.$$

为了求  $A^{-1}$ , 将  $B$  化为对角块矩阵, 为此取

$$P_2=\begin{bmatrix} I_1 & -A_{12}Q^{-1} \\ O & I_2 \end{bmatrix},$$

于是 
$$P_2B=\begin{bmatrix} A_{11} & O \\ O & Q \end{bmatrix} \xrightarrow{\text{记作}} C,$$

即  $P_2P_1A=C$ , 两边取逆得  $A^{-1}(P_2P_1)^{-1}=C^{-1}$ , 因此

$$\begin{aligned} A^{-1} &= C^{-1}(P_2P_1) \\ &= \begin{bmatrix} A_{11}^{-1} & O \\ O & Q^{-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_1 & -A_{12}Q^{-1} \\ O & I_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_1 & O \\ -A_{21}A_{11}^{-1} & I_2 \end{bmatrix}, \end{aligned}$$

记

$$A^{-1}=\begin{bmatrix} D_{11} & D_{12} \\ D_{21} & D_{22} \end{bmatrix},$$

则 
$$D_{11}=A_{11}^{-1}+A_{11}^{-1}A_{12}Q^{-1}A_{21}A_{11}^{-1}, \quad D_{22}=Q^{-1},$$

$$D_{12}=-A_{11}^{-1}A_{12}Q^{-1}, \quad D_{21}=-Q^{-1}A_{21}A_{11}^{-1}$$

其中

$$Q=A_{22}-A_{21}A_{11}^{-1}A_{12}.$$

**例 7** 设  $Q=\begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix}$ , 且  $A$  可逆, 证明:  $\det Q = |A| |D-CA^{-1}B|$ .

**证** 先用分块倍加阵左乘  $Q$ , 使之化为上三角块矩阵, 为此取

$$P=\begin{bmatrix} I_n & O \\ -CA^{-1} & I_m \end{bmatrix},$$

其中  $I_n$  与  $A$  同阶,  $I_m$  与  $D$  同阶. 如此则有

$$PQ=\begin{bmatrix} A & B \\ O & D-CA^{-1}B \end{bmatrix},$$

将上式两端求行列式, 得  $|P||Q|=|A||D-CA^{-1}B|$ , 由于

$|P|=1$ , 故命题得证.

## 习题 补充题 答案

### 习题

用高斯消元法解 1—4 题的线性方程组:

$$1. \begin{cases} 2x_1 - \frac{1}{2}x_2 - \frac{1}{2}x_3 = 0, \\ -\frac{1}{2}x_1 + 2x_2 - \frac{1}{2}x_4 = 3, \\ -\frac{1}{2}x_1 + 2x_3 - \frac{1}{2}x_4 = 3, \\ -\frac{1}{2}x_2 - \frac{1}{2}x_3 + 2x_4 = 0. \end{cases}$$

$$2. \begin{cases} x_1 - 2x_2 + 3x_3 - 4x_4 = 4, \\ x_2 - x_3 + x_4 = -3, \\ x_1 + 3x_2 - 3x_4 = 1, \\ -7x_2 + 3x_3 + x_4 = -3. \end{cases}$$

$$3. \begin{cases} 2x_1 + 3x_2 + 5x_3 + x_4 = 3, \\ 3x_1 + 4x_2 + 2x_3 + 3x_4 = -2, \\ x_1 + 2x_2 + 8x_3 - x_4 = 8, \\ 7x_1 + 9x_2 + x_3 + 8x_4 = 0. \end{cases}$$

$$4. \begin{cases} x_1 - 10x_2 + 11x_3 - 11x_4 = 0, \\ 2x_1 + 4x_2 - 5x_3 + 7x_4 = 0, \\ 3x_1 - 3x_2 + 3x_3 - 2x_4 = 0, \\ 5x_1 + x_2 - 2x_3 + 5x_4 = 0. \end{cases}$$

下列 5—6 题的线性方程组中,  $p, q$  取何值时, 方程组有解, 无解. 在有解的情况下, 求出它的全部解:

$$5. \begin{cases} px_1 + x_2 + x_3 = 1, \\ x_1 + px_2 + x_3 = p, \\ x_1 + x_2 + px_3 = p^2. \end{cases}$$

$$6. \begin{cases} x_1 - 3x_2 - 6x_3 + 2x_4 = -1, \\ x_1 - x_2 - 2x_3 + 3x_4 = 0, \\ x_1 + 5x_2 + 10x_3 - x_4 = q, \\ 3x_1 + x_2 + Px_3 + 4x_4 = 1. \end{cases}$$

7. 将军点兵,三三数之剩二,五五数之剩三,七七数之剩二,问兵几何(求在 500 至 1000 范围内的解)?

8. 百鸡术:母鸡每只 5 元,公鸡每只 3 元,小鸡三只一元,百元买百鸡,各买几何?

$$9. \text{ 设 } A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 1 & 2 \end{bmatrix},$$

计算:  $2A, 3B, A+B, 2A-3B, AB-BA$ .

$$10. \text{ 设 } A = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \text{ 求 } AB-BA.$$

计算 11--20 题的矩阵乘积:

$$11. \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ 0 & 1 \\ 2 & 4 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \end{bmatrix}.$$

$$12. \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ -2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & -1 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}.$$

$$13. \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 3 \\ 4 & 2 & 1 \end{bmatrix}.$$

$$14. \begin{bmatrix} a & b \\ ma & mb \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ \frac{a}{b} & -\frac{a}{b} \end{bmatrix}.$$

$$15. [y_1 \ y_2 \cdots y_n] \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}.$$

$$16. [x_1 \ x_2] \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}.$$

$$17. \begin{bmatrix} 1 & & & \\ & 1 & & \\ & & 0 & \\ & & & \ddots \\ & & & & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}.$$

$$18. \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & & & \\ & 2 & & \\ & & 0 & \\ & & & \ddots \\ & & & & 0 \end{bmatrix}.$$

$$19. \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{bmatrix}.$$

$$20. \begin{bmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & a_4 \\ b_1 & b_2 & b_3 & b_4 \\ c_1 & c_2 & c_3 & c_4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

21. 已知  $A=PAQ$ , 其中

$$P = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}, A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}, Q = \begin{bmatrix} 2 & -3 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}, QP = I_2,$$

计算:  $A^8, A^9, A^{2n}, A^{2n-1}$  ( $n$  为正整数).



22. 计算  $\begin{bmatrix} a & & \\ & -b & \\ & & c \end{bmatrix}^n$ , ( $n$  为正整数).

23. 计算  $\begin{bmatrix} \cos\varphi & \sin\varphi \\ -\sin\varphi & \cos\varphi \end{bmatrix}^n$  及  $\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}^n$ .

24.  $A, B$  皆是  $n$  阶矩阵, 问下列等式成立的条件是什么?

(1)  $(A+B)^3 = A^3 + 3A^2B + 3AB^2 + B^3$ ;

(2)  $(A+B)(A-B) = A^2 - B^2$ .

25. 若  $AB = BA, AC = CA$ , 证明  $A, B, C$  是同阶矩阵, 且  $A(B+C) = (B+C)A, A(BC) = (BC)A$ .

26. 求平方等于零矩阵的所有二阶矩阵.

27. 求与  $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$  可交换的全体二阶矩阵.

28. 求所有与  $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & -2 \end{bmatrix}$  可交换的三阶矩阵.

29. 已知  $A$  是对角元互不相等的  $n$  阶对角阵, 即

$$A = \begin{bmatrix} a_1 & & & \\ & a_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & a_n \end{bmatrix}.$$

当  $i \neq j$  时,  $a_i \neq a_j$  ( $i, j = 1, 2, \dots, n$ ). 证明: 与  $A$  可交换的矩阵必是对角阵.

30. 证明: 两个  $n$  阶下三角矩阵的乘积仍是下三角矩阵.

31. 证明: 若  $A$  是主对角元全为零的上三角矩阵, 则  $A^2$  也是主对角元全为零的上三角阵.

32. 证明: 主对角元全为 1 的上三角阵的乘积, 仍是主对角元为 1 的上三角阵.

33. 设  $A = \begin{bmatrix} 5 & -2 & 1 \\ 3 & 4 & -1 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} -3 & 2 & 0 \\ -2 & 0 & 1 \end{bmatrix},$

计算  $AB^T, B^T A, A^T A, BB^T + AB^T.$

34. 证明  $(A_1 A_2 \cdots A_k)^T = A_k^T \cdots A_2^T A_1^T.$

35. 证明 若  $A$  和  $B$  都是  $n$  阶对称矩阵, 则  $A+B, A-2B$  也是对称矩阵.

36. 对于任意的  $n$  阶矩阵  $A$ . 证明:

(1)  $A+A^T$  是对称矩阵,  $A-A^T$  是反对称矩阵.

(2)  $A$  可表示为对称矩阵和反对称矩阵之和.

37. 证明 若  $A$  和  $B$  都是  $n$  阶对称矩阵, 则  $AB$  是对称矩阵的充要条件是  $A$  与  $B$  可交换.

38. 设  $A$  是实对称矩阵, 且  $A^2=0$ , 证明:  $A=0$

39. 已知  $A$  是一个  $n$  阶对称矩阵,  $B$  是一个  $n$  阶反对称矩阵:

(1) 问  $A^B, B^B$  是否为对称或反对称矩阵?

(2) 证明  $AB+BA$  是一个反对称矩阵.

40. 求下列矩阵的逆矩阵:

(1)  $\begin{bmatrix} 8 & -4 \\ -5 & 3 \end{bmatrix}.$

(2)  $\begin{bmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}.$

(3)  $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & -2 \\ 2 & -2 & 1 \end{bmatrix}.$

(4)  $\begin{bmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 1 & 2 & 0 \\ -1 & 2 & -2 \end{bmatrix}.$

(5)  $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}.$

(6)  $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$

41. 利用逆矩阵, 解下列矩阵方程:

(1)  $\begin{bmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} B = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}.$

$$(2) \begin{bmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 1 & 2 & 0 \\ -1 & 2 & -2 \end{bmatrix} X = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 0 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}.$$

$$(3) A \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}.$$

42. 利用逆矩阵,解线性方程组.

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 1, \\ 2x_2 + 2x_3 = 1, \\ x_1 - x_2 = 2. \end{cases}$$

43. 设  $A, B, C$  为同阶方阵:

(1) 问:  $A$  满足什么条件时,命题“若  $AB=AC$ ,则  $B=C$ (消去律)”成立.

(2) 问:若  $B \neq C$ ,是否必有  $AB \neq AC$ ?

44. 设  $A, B$  都是  $n$  阶矩阵,问:下列命题是否成立?若成立,给出证明;若不成立,举反例说明.

(1) 若  $A, B$  皆不可逆,则  $A+B$  也不可逆.

(2) 若  $AB$  可逆,则  $A, B$  都可逆.

(3) 若  $AB$  不可逆,则  $A, B$  都不可逆.

(4) 若  $A$  可逆,则  $kA$  可逆( $k$  是数).

45. 设方阵  $A$  满足  $A^2 - A - 2I = 0$ ,证明:

(1)  $A$  和  $I - A$  都可逆,并求它们的逆矩阵;

(2)  $(A+I)$  和  $A-2I$  不同时可逆.

46. 设方阵  $A$  满足方程  $A^2 - 2A + 4I = 0$ ,证明:  $A+I$  和  $A-3I$  都可逆,并求它们的逆矩阵.

47. 证明:可逆的对称矩阵的逆矩阵仍是对称矩阵.

48. 试求上(或下)三角矩阵可逆的充要条件,并证明:可逆上(或下)三角矩阵的逆矩阵也是上(或下)三角矩阵.

用初等变换法求 49—53 题的矩阵的逆:

$$49. \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & -2 \\ 2 & -2 & 1 \end{bmatrix} \quad 50. \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & -2 & -6 \end{bmatrix}.$$

$$51. \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}, \quad 52. \begin{bmatrix} 1 & a & a^2 & a^3 \\ 0 & 1 & a & a^2 \\ 0 & 0 & 1 & a \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

$$53. \begin{bmatrix} 0 & a_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & a_2 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a_{n-1} \\ a_n & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix},$$

其中  $a_i \neq 0, i = 1, 2, \cdots, n$ .

解 54—56 题的矩阵方程:

$$54. \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} X = \begin{bmatrix} 3 & 5 \\ 5 & 9 \end{bmatrix}.$$

$$55. X \begin{bmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 3 & 2 & -4 \\ 2 & -1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -3 & 0 \\ 10 & 2 & 7 \\ 10 & 7 & 8 \end{bmatrix}.$$

$$56. \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 0 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 1 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix} X = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & \cdots & n \\ 0 & 1 & 2 & \cdots & n-1 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & n-2 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix}.$$

\*57. 将下列矩阵作  $IU$  分解, 其中  $I$  为主对角元为 1 的下三角矩阵,  $U$  为上三角矩阵:

$$(1) \begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 2 & 4 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}, \quad (2) \begin{bmatrix} 3 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 3 \end{bmatrix}.$$

58. 用分块矩阵的乘法, 计算下列矩阵的乘积.

$$(1) A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 8 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 3 & 1 & 1 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 8 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & 2 \\ 2 & 3 & 3 & 1 & 1 \end{bmatrix},$$

求  $AB$ .

$$(2) A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -1 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -2 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 4 & 2 \end{bmatrix},$$

求  $AB$ .

59. 设  $A$  是  $m \times n$  矩阵,  $B$  是  $n \times s$  矩阵,  $X$  是  $n \times 1$  矩阵, 证明:  $AB=0$  的充分必要条件是  $B$  的每一列都是齐次线性方程组  $AX=0$  的解.

60. 设  $C$  是  $n$  阶可逆矩阵,  $D$  是  $3 \times n$  矩阵, 且

$$D = \begin{bmatrix} 1 & 2 & \cdots & n \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix},$$

试用分块乘法, 求一个  $n \times (n+3)$  矩阵  $A$ , 使得  $A \begin{bmatrix} C \\ D \end{bmatrix} = I_n$ .

61. 设  $A = \begin{bmatrix} O & B \\ C & O \end{bmatrix}$ , 其中  $B$  是  $n$  阶可逆阵,  $C$  是  $m$  阶可逆阵, 证明  $A$  可逆, 并求  $A^{-1}$ .

62. 用矩阵分块的方法,证明下列矩阵可逆,并求其逆矩阵:

$$(1) \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 5 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad (2) \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 4 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 7 & 8 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

$$(3) \begin{bmatrix} 0 & a_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & a_2 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a_{n-1} \\ a_n & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix}, \quad (4) \begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

\* 63. 设  $A, B, C, D$  都是  $n$  阶矩阵,  $|A| \neq 0, AC=CA$ . 证明:

$$\begin{vmatrix} A & B \\ C & D \end{vmatrix} = |AD - CB|.$$

\* 64. 设  $A = \begin{bmatrix} O & B \\ C & D \end{bmatrix}$ , 其中  $B, C$  分别为二阶, 三阶可逆矩阵, 且已知  $B^{-1}, C^{-1}$ , 求  $A^{-1}$ .

\* 65. 将  $n$  阶矩阵  $A$  分块为

$$A = \begin{bmatrix} A_{n-1} & B \\ C & a_{nn} \end{bmatrix},$$

其中  $A_{n-1}$  是  $n-1$  阶可逆阵, 如果  $A$  可逆, 且已知  $A_{n-1}^{-1}$ , 试求  $A^{-1}$  (这种利用  $A_{n-1}^{-1}$  求  $A^{-1}$  的方法, 称为加边法).

\* 66. 利用 20 题加边法的结果, 求

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & -2 \\ 2 & -2 & 1 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & -2 & -6 \end{bmatrix}.$$

的逆矩阵.

## 补充题

67. 计算下列矩阵的幂:

$$(1) \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}^n, \quad (2) \begin{bmatrix} a & 1 & 0 & 0 \\ 0 & a & 1 & 0 \\ 0 & 0 & a & 1 \\ 0 & 0 & 0 & a \end{bmatrix}^n.$$

68. 设  $A, B$  皆是  $n$  阶矩阵, 证明

$$\begin{vmatrix} A & B \\ B & A \end{vmatrix} = |A+B| |A-B|.$$

69. 证明 与任意的  $n$  阶矩阵可交换的矩阵必是  $n$  阶数量矩阵.

70.  $n$  阶矩阵  $A = [a_{ij}]$  的主对角元之和称为矩阵  $A$  的迹, 记作  $\text{tr}(A)$ , 即

$$\text{tr}(A) = \sum_{i=1}^n a_{ii},$$

证明 若  $A$  是  $m \times n$  矩阵,  $B$  是  $n \times m$  矩阵, 则

$$\text{tr}(AB) = \text{tr}(BA).$$

71. 证明 对于任意的两个  $n$  阶矩阵  $A$  和  $B$ , 都有  $AB - BA \neq I_n$ .

72. 若  $n$  阶矩阵  $A$  存在正整数  $k$ , 使得  $A^k = 0$ , 就称  $A$  为幂零矩阵.

设幂零矩阵  $A$  满足  $A^k = 0$ , ( $k$  为正整数), 试证明:  $I - A$  可逆, 并求其逆矩阵.

$$73. \text{ 设 } A = \begin{bmatrix} a & 1 & 0 & 0 \\ 0 & a & 1 & 0 \\ 0 & 0 & a & 1 \\ 0 & 0 & 0 & a \end{bmatrix}, f(x) = (x-b)^n.$$

试求  $f(A)$ , 当  $f(A)$  可逆时, 求其逆矩阵.

74. 设

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 3 & -2 \end{bmatrix}, f(x) = \begin{vmatrix} x-1 & x & 0 \\ 0 & x-1 & -3 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix},$$

$$g(x) = \begin{vmatrix} x & -1 \\ -3 & x+2 \end{vmatrix}.$$

试求:  $f(A), g(A)$ .

75. 证明 主对角元全为 1 的上(下)三角矩阵的逆矩阵也是主对角元全为 1 的上(下)三角矩阵.

76. 证明  $n$  阶反对称矩阵可逆的必要条件是  $n$  为偶数, 举例说明  $n$  为偶数不是  $n$  阶反对称矩阵可逆的充分条件.

77. 设  $P = \begin{bmatrix} A & B \\ O & C \end{bmatrix}$ ,  $A, C$  均为可逆矩阵, 证明  $P$  可逆, 并求  $P^{-1}$ .

78. 证明  $n$  阶可逆下三角阵的逆矩阵也是下三角阵.

79. 证明  $n$  阶矩阵  $A$  的任意多项式  $f(A)$  与  $g(A)$  可交换.

80. 证明 若  $n$  阶矩阵  $A$  与  $B$  可交换, 则  $A$  与  $B$  的任意多项式  $f(A)$  与  $g(B)$  也可交换.

## 答案

1.  $[1, 2, 2, 1]$ . 2.  $[-8, k+3, 2k+6, k]$ ,  $k$  是任意常数.

3. 无解. 4.  $[0, \frac{11}{3}k, \frac{13}{3}k, k]$ ,  $k$  是任意常数.

5.  $P=1$  是无穷多解;  $[1, k_1-k_2, k_1, k_2]$  其中  $k_1, k_2$  是任意常数.  $P=-2$  时, 无解;  $P \neq 1$  且  $P \neq -2$  时, 唯一解:

$$\left[ -\frac{P+1}{P+2}, \frac{1}{P+2}, \frac{(P+1)^2}{P+2} \right].$$

6.  $P \neq 2$  时, 唯一解:

$$\left[ \frac{q-2}{2}, \frac{1}{2} \left( 1 - \frac{3-q}{7} - 4 \frac{2-q}{p-2} \right), \frac{2-q}{p-2}, \frac{3-q}{7} \right]; P=2, q \neq 2 \text{ 时无}$$



解:  $P=2$  且  $q=2$  时, 无穷多解:  $\left[0, \frac{3}{7}-2k, k, \frac{1}{7}\right]$ ,  $k$  是任意常数.

7. 458, 653, 758, 863, 968.

8.  $[0, 25, 73][4, 18, 78][8, 11, 81][12, 4, 84]$ .

21.  $A^2 = I_2, A^3 = \begin{bmatrix} 7 & -12 \\ 4 & -7 \end{bmatrix}, A^{2n} = I_2, A^{2n+1} = \begin{bmatrix} 7 & -12 \\ 4 & -7 \end{bmatrix}$ .

23.  $\begin{bmatrix} \cos n\varphi & \sin n\varphi \\ -\sin n\varphi & \cos n\varphi \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \cos n \frac{\pi}{2} & \sin n \frac{\pi}{2} \\ -\sin n \frac{\pi}{2} & \cos n \frac{\pi}{2} \end{bmatrix}$ .

24.  $A, B$  可交换时成立, 一般情况不成立.

26.  $\begin{bmatrix} a & b \\ c & -a \end{bmatrix}$ , 其中  $a, b, c$  满足关系  $a^2 + bc = 0$ .

27.  $\begin{bmatrix} a & b \\ 0 & a \end{bmatrix}$ ,  $a, b$  为任意常数.

28.  $\begin{bmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & c & 2b \\ 0 & b & c-3b \end{bmatrix}$ ,  $a, b, c$  为任意常数.

38. 由  $A^2$  的对角元  $\sum_{k=1}^n a_{ik}a_{ki} = 0 (i=1, 2, \dots, n)$  及  $A' = A$ , 即可得证  $A=0$ .

39.  $A^k$  仍是对称阵,  $B^k$  当  $k$  为偶数时为对称阵,  $k$  为奇数时为反对称阵.

40. (2)  $\begin{bmatrix} \cos \varphi & -\sin \varphi \\ \sin \varphi & \cos \varphi \end{bmatrix}$  (4)  $\frac{1}{6} \begin{bmatrix} 4 & -4 & -2 \\ -2 & 5 & 1 \\ -4 & 7 & -1 \end{bmatrix}$

(6)  $\begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

$$41. (2) \frac{1}{6} \begin{bmatrix} 6 & 2 \\ -6 & -1 \\ -18 & -5 \end{bmatrix} \quad (3) \begin{bmatrix} 1 & -3 & 3 \\ 1 & 0 & -2 \end{bmatrix}.$$

$$42. \frac{1}{2} [1, -3, 2]^T.$$

$$43. (1) |A| \neq 0. \quad (2) \text{否}.$$

44. (1) 不成立. (2) 成立. (3) 不成立. (4)  $k \neq 0$  时成立,  $k = 0$  时不成立.

$$45. A^{-1} = \frac{1}{2}(A - I), (I - A)^{-1} = -\frac{1}{2}A.$$

$$46. (A + I)^{-1} = -\frac{1}{7}(A - 3I), (A - 3I)^{-1} = -\frac{1}{7}(A + I).$$

$$47. \text{利用运算性质和 } A^T = A, \text{证明 } (A^{-1})^T = A^{-1}.$$

48. 证明伴随矩阵为上(下)三角阵.

$$51. \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}, \quad 52. \begin{bmatrix} 1 & a & a^2 & a^3 \\ 0 & 1 & a & a^2 \\ 0 & 0 & 1 & a \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

$$53. \begin{bmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & 1/a_n \\ 1/a_1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1/a_2 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 1/a_{n-1} & 0 \end{bmatrix}.$$

$$55. \begin{bmatrix} 20 & -15 & 13 \\ -105 & 77 & -58 \\ -152 & 112 & -87 \end{bmatrix} \quad 56. \begin{bmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 0 & 1 & \cdots & 1 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix}.$$

$$57. (1) \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & \frac{1}{8} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 0 & 8 & -4 \\ 0 & 0 & \frac{3}{2} \end{bmatrix}.$$

$$(2) \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{2}{3} & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{6}{7} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{14}{15} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{7}{3} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{15}{7} & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{31}{15} \end{bmatrix}.$$

58.

$$(1) \begin{bmatrix} 7 & 27 & 0 & 0 & 0 \\ 18 & 70 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 3 & 4 & 1 & 2 \\ 6 & 9 & 14 & 11 & 10 \\ 5 & 4 & 8 & 4 & 6 \end{bmatrix}, (2) \begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & -3 & 0 & 0 \\ 3 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & -6 \\ 0 & 0 & 0 & -8 & -4 \end{bmatrix}.$$

59. 将  $B$  按列分块为  $B=[B_1, B_2, \dots, B_n]$ .

60.  $A=[C^{-1}, B]$ , 其中  $B$  是第一列元素全为零, 其余元素为任意的  $n \times s$  矩阵.

$$61. A^{-1} = \begin{bmatrix} O & C^{-1} \\ B^{-1} & O \end{bmatrix}$$

$$62. (3) \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & \frac{1}{a_n} \\ \frac{1}{a_1} & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{a_2} & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \frac{1}{a_{n-1}} & 0 \end{bmatrix}.$$

$$(4) \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{2} & 0 & -1 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{2} & -\frac{3}{2} \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

63. 对对应分块阵作初等行变换. 第一行左乘  $-CA^{-1}$  加到第二行.

$$64. \begin{bmatrix} -C^{-1}DB^{-1} & C^{-1} \\ B^{-1} & O \end{bmatrix}$$

$$65. \begin{bmatrix} A_{n-1}^{-1}[I+BW^{-1}CA_{n-1}^{-1}] & -A_{n-1}^{-1}BW^{-1} \\ -W^{-1}A_{n-1}^{-1} & W^{-1} \end{bmatrix},$$

其中  $W = a_{nn} - CA_{n-1}^{-1}B$

$$67. (1) \begin{bmatrix} 1 & n & \frac{n(n-1)}{2} \\ 0 & 1 & n \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

$$(2) \begin{bmatrix} a^n & c_n^1 a^{n-1} & c_n^2 a^{n-2} & c_n^3 a^{n-3} \\ 0 & a^n & c_n^1 a^{n-1} & c_n^2 a^{n-2} \\ 0 & 0 & a^n & c_n^1 a^{n-1} \\ 0 & 0 & 0 & a^n \end{bmatrix}.$$

69. 设  $A = [a_{ij}]$ , (1) 取  $E_{ii} = \text{diag}(0, \dots, 0, 1, 0, \dots, 0)$ , 由  $E_{ii}A = AE_{ii}$  ( $i = 1, 2, \dots, n$ ) 得证  $a_{ij} = 0$ , ( $i \neq j, i, j = 1, 2, \dots, n$ ). (2) 再证  $a_{11} = a_{22} = \dots = a_{nn}$ .

71. 证明  $AB - BA$  的主对角元之和等于零.

72.  $(A - I)^{-1} = A^{k-1} + A^{k-2} + \dots + A + I$ .

$$73. \begin{bmatrix} (a-b)^n & c_n^1(a-b)^{n-1} & c_n^2(a-b)^{n-2} & c_n^3(a-b)^{n-3} \\ 0 & (a-b)^n & c_n^1(a-b)^{n-1} & c_n^2(a-b)^{n-2} \\ 0 & 0 & (a-b)^n & c_n^1(a-b)^{n-1} \\ 0 & 0 & 0 & (a-b)^n \end{bmatrix}$$

$$\cdot \begin{bmatrix} 1 & -c_n^1(a-b)^{-1} & [(c_n^1)^2 - c_n^2](a-b)^{-2} & [-(c_n^1)^3 + 2c_n^2c_n^1 - c_n^3](a-b)^{-3} \\ 0 & 1 & -c_n^1(a-b)^{-1} & [(c_n^1)^2 - c_n^2](a-b)^{-2} \\ 0 & 0 & 1 & -c_n^1(a-b)^{-1} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$(a-b)^n$$

$$74. f(A) = \begin{bmatrix} 1 & -4 \\ -12 & 9 \end{bmatrix}, g(A) = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

75. 对矩阵的阶数作数学归纳法,并用分块的方法证明结论对  $n$  阶矩阵成立.

$$76. \text{例} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

$$77. \begin{bmatrix} A^{-1} & -A^{-1}BC^{-1} \\ O & C^{-1} \end{bmatrix}. \quad 78. \text{证法同 75.}$$

### 3 线性方程组

这一章的中心问题是讨论线性方程组的解的基本理论,也就是非齐次线性方程组有解和齐次线性方程组有非零解的充分必要条件以及它们的解的结构. 前一章介绍的高斯消元法虽然提供了求解线性方程组的一种基本方法,但是它并没有告诉我们方程组  $AX=b$  的增广矩阵  $[A, b]$  满足什么条件时,由消元步骤将  $[A, b]$  化成的阶梯形矩阵  $[C, d]$  中的  $d_{r+1}$  必定等于零(即方程组有解). 此外,采用不同的消元步骤所得到的阶梯形矩阵的非零行的行数是否唯一确定(即自由未知量的个数是否唯一确定)?求解时,自由未知量可以有不同的选择,那末对不同自由未知量求得的全部解的集合是否相等?为了探讨这些问题,并给出明确的结论,需要引入  $n$  维向量的概念,定义它的线性运算,研究向量的线性相关性,进而引出矩阵的秩的概念. 本章概念密集,难点较多,读者要仔细领会,深入钻研,学好上一章和这一章将为学好线性代数打下坚实的基础.

#### 3.1 $n$ 维向量及其线性相关性

在空间解析几何学中,我们利用向量工具讨论过三元齐次线性方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = 0, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 = 0, \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 = 0, \end{cases} \quad (3.1)$$

的解的几何解释,记三个方程的系数向量(即平面的法向量)为

$$\alpha_i = a_{i1}i + a_{i2}j + a_{i3}k \quad (i=1,2,3),$$

或简记为

$$\alpha_i = (a_{i1}, a_{i2}, a_{i3}) \quad (i=1,2,3).$$

方程组(3.1)的任一个解记作向量形式

$$x = x_1i + x_2j + x_3k \text{ 或 } x = (x_1, x_2, x_3).$$

那么,方程组的解向量  $x$  与  $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$  都垂直. 因此, (i) 如果  $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$  不共面, 只有零向量与三者都垂直, 即方程组(3.1)只有零解; (ii) 如果  $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$  共面, 但不共线, 则与该平面垂直的向量都是方程组(3.1)的解向量, 故(3.1)有无穷多个彼此平行的解向量; (iii) 如果  $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$  共线, 则过原点且与该直线垂直的平面上的全体向量都是(3.1)的解向量, 这时, 任一个解向量可表示为

$$x = k_1 x^{(1)} + k_2 x^{(2)}$$

其中  $x^{(1)}$  和  $x^{(2)}$  是方程组(3.1)的某两个不共线的非零解向量,  $k_1, k_2$  为任意常数.

对于  $n$  元线性方程组  $AX=b$ , 如果把系数矩阵和增广矩阵的每一行也看作一个向量, 并像三维几何向量那样定义它的加法运算和数乘向量的运算, 那末方程组的解的情况也取决于  $A$  和  $[A, b]$  的所有各行的向量在加法和数乘运算下的相互关系.

现在, 我们先引入  $n$  维向量的概念, 定义它的线性运算, 并讨论向量的线性相关性.

**定义 1** 数域  $F$  上的  $n$  个数  $a_1, a_2, \dots, a_n$  构成的有序数组, 称为数域  $F$  上的一个  $n$  元向量(以后常称  $n$  维向量), 记作

$$\alpha = [a_1, a_2, \dots, a_n], \quad (3.2)$$

其中  $a_i$  称为  $\alpha$  的第  $i$  个分量.

向量写作(3.2)的形式, 称为**行向量**; 向量写作列的形式(也用矩阵的转置记号表示)

$$\alpha = [a_1, a_2, \dots, a_n]^T \quad (3.3)$$

称为**列向量**((3.2)、(3.3)式的方括号也可用圆括号).

数域  $F$  上全体  $n$  元向量组成的集合, 记作  $F^n$ .

**定义 2** 设  $\alpha = [a_1, a_2, \dots, a_n], \beta = [b_1, b_2, \dots, b_n] \in F^n, k \in F$ ,  
定义:

(i)  $\alpha = \beta$ , 当且仅当  $a_i = b_i (i = 1, \dots, n)$ ;

(ii) 向量加法(或  $\alpha$  与  $\beta$  之和)为

$$\alpha + \beta = [a_1 + b_1, a_2 + b_2, \dots, a_n + b_n];$$

(iii) 向量的数量乘法(简称数乘)为

$$k\alpha = [ka_1, ka_2, \dots, ka_n],$$

$k\alpha$  称为向量  $\alpha$  与数  $k$  的数量乘积.

在定义 2 的(iii)中, 取  $k = -1$ , 得

$$(-1)\alpha = [-a_1, -a_2, \dots, -a_n]. \quad (3.4)$$

(3.4)式右端的向量称为  $\alpha$  的负向量, 记作  $-\alpha$ . 向量的减法定义为

$$\beta - \alpha = \beta + (-\alpha).$$

分量全为零的  $n$  维向量  $[0, 0, \dots, 0]$  称为  $n$  维零向量, 记作  $O_n$  或简记  $O$ .

上述在  $F^n$  中定义的向量加法和数乘运算称为向量的线性运算, 用定义容易验证它们满足下列八条运算规则:

(1)  $\alpha + \beta = \beta + \alpha$  (加法交换律);

(2)  $(\alpha + \beta) + \gamma = \alpha + (\beta + \gamma)$  (加法结合律);

(3) 对任一个向量  $\alpha$ , 有  $\alpha + O_n = \alpha$ ;

(4) 对任一个向量  $\alpha$ , 存在负向量  $-\alpha$ , 使  $\alpha + (-\alpha) = O_n$ ;

(5)  $1\alpha = \alpha$ ;

(6)  $k(l\alpha) = (kl)\alpha$  (数乘结合律);

(7)  $k(\alpha + \beta) = k\alpha + k\beta$  (数乘分配律);

(8)  $(k + l)\alpha = k\alpha + l\alpha$  (数乘分配律).

其中  $\alpha, \beta, \gamma \in F^n; 1, k, l \in F$ .  $O_n$  为零向量.

除了上述八条运算规则, 显然还有以下性质:



(1)  $0a=O_n, kO_n=O_n$  (其中  $0$  为数零,  $k$  为任意数);

(2) 若  $ka=O_n$ , 则或者  $k=0$ , 或者  $a=O_n$ ;

(3) 向量方程  $a+x=\beta$  有唯一解  $x=\beta-a$ .

**定义 3** 数域  $F$  上的全体  $n$  元向量, 在其中定义了上述向量的加法和数乘运算, 就称之为数域  $F$  上的  $n$  维向量空间, 仍记作  $F^n$ . 当  $F=R$  (实数域) 时, 叫做  $n$  维实向量空间, 记作  $R^n$ .

**定义 4** 设  $\alpha_i \in F^n, k_i \in F$  (数域) ( $i=1, 2, \dots, m$ ), 则向量

$$\sum_{i=1}^m k_i \alpha_i = k_1 \alpha_1 + k_2 \alpha_2 + \dots + k_m \alpha_m$$

称为向量组  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m$  在数域  $F$  上的一个线性组合. 如果记  $\beta$

$= \sum_{i=1}^m k_i \alpha_i$ , 就说  $\beta$  可由  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m$  线性表示 (或线性表出).

向量的线性相关性是向量在线性运算下的一种性质, 它是线性代数中极重要的基本概念. 为了更好地理解这个概念, 我们先讲一下它在三维实向量中的某些几何背景, 然后给以一般定义.

若两个非零向量  $\alpha_1$  和  $\alpha_2$  共线, 则  $\alpha_2 = l\alpha_1$  ( $l \in R$ ), 这等价于: 存在不全为零的数  $k_1, k_2$  使  $k_1\alpha_1 + k_2\alpha_2 = O_3$ ; 若  $\alpha_1$  和  $\alpha_2$  不共线, 则  $\forall l \in R$ , 有  $\alpha_2 \neq l\alpha_1$ , 它等价于: 只有当  $k_1, k_2$  全为 0 时, 才有  $k_1\alpha_1 + k_2\alpha_2 = O_3$ .

若三个非零向量  $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$  共面, 则其中至少有一个向量可由另两个向量线性表示, 如图 3.1 中:  $\alpha_3 = l_1\alpha_1 + l_2\alpha_2$ , 图 3.2 中:  $\alpha_1 = 0\alpha_2 + l_3\alpha_3$ , 二者都等价于: 存在不全为 0 的数  $k_1, k_2, k_3$ , 使  $k_1\alpha_1 + k_2\alpha_2 + k_3\alpha_3 = O_3$ ; 若  $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$  不共面 (如图 3.3), 则任一个向量都不能由另两个向量线性表示, 即只有当  $k_1, k_2, k_3$  全为 0 时, 才有  $k_1\alpha_1 + k_2\alpha_2 + k_3\alpha_3 = O_3$ .

上述三维向量在线性运算下的性质 (即: 一组向量中是否存在一个向量可由其余向量线性表示, 或是否有不全为 0 的系数使向量的线性组合为零向量), 就是向量的线性相关性.

下面正式给  $n$  维向量的线性相关性下定义.

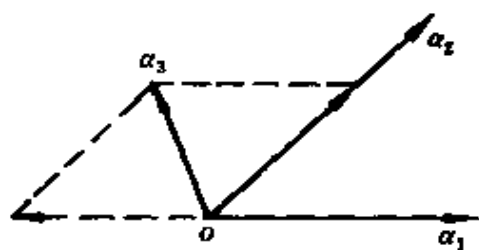


图 3.1

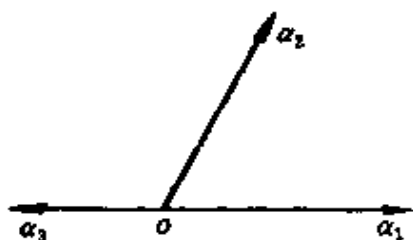


图 3.2

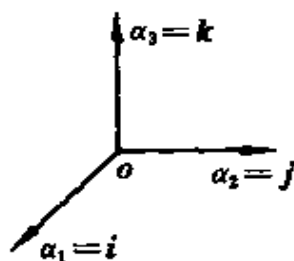


图 3.3

**定义 5** 如果对  $m$  个向量  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m \in F^n$ , 有  $m$  个不全为零的数  $k_1, k_2, \dots, k_m \in F$ , 使

$$k_1 \alpha_1 + k_2 \alpha_2 + \dots + k_m \alpha_m = O_n \quad (3.5)$$

成立, 则称  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m$  线性相关; 否则, 称  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m$  线性无关.

读者要注意定义中“否则”一词的含义, 这里是指: “没有不全为零的数  $k_1, k_2, \dots, k_m$ , 使 (3.5) 式成立”, 也就是“只有当  $k_1, k_2, \dots, k_m$  全为零时, 才使 (3.5) 成立”.

以后,  $O_n$  常简写成  $O$ , 注意不要把  $O$  向量与数  $0$  混淆.

**定理 1** 向量组  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m$  ( $m \geq 2$ ) 线性相关的充分必要条件是,  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m$  中至少有一个向量可由其余  $m-1$  个向量线性表示.

**证** 设  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m$  线性相关, 则存在  $m$  个不全为  $0$  的数  $k_1,$

$k_2, \dots, k_m$ , 使

$$k_1\alpha_1 + k_2\alpha_2 + \dots + k_m\alpha_m = O.$$

不妨设  $k_1 \neq 0$ , 于是由向量的线性运算性质得

$$\alpha_1 = -\frac{k_2}{k_1}\alpha_2 - \frac{k_3}{k_1}\alpha_3 - \dots - \frac{k_m}{k_1}\alpha_m.$$

必要性得证. 再证充分性, 不妨设  $\alpha_1$  可用  $\alpha_2, \alpha_3, \dots, \alpha_m$  线性表示, 即

$$\alpha_1 = l_2\alpha_2 + l_3\alpha_3 + \dots + l_m\alpha_m,$$

于是有

$$1\alpha_1 - l_2\alpha_2 - l_3\alpha_3 - \dots - l_m\alpha_m = O,$$

显然  $1, -l_2, -l_3, \dots, -l_m$  不全为 0, 故  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m$  线性相关. ■

定理 1 的等价命题(逆否命题)是: 向量组  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m (m \geq 2)$  线性无关的充分必要条件是其中任一个向量都不能由其余向量线性表示.

**例 1** 设  $n$  维向量  $\epsilon_i = [0, \dots, 0, 1, 0, \dots, 0]$ , 其中第  $i$  个分量为 1, 其余分量为 0, 则  $\epsilon_1, \epsilon_2, \dots, \epsilon_n$  是线性无关的.

**证** 设存在  $n$  个数  $k_1, k_2, \dots, k_n$  使

$$k_1\epsilon_1 + k_2\epsilon_2 + \dots + k_n\epsilon_n = O,$$

即

$$[k_1, k_2, \dots, k_n] = O,$$

则必须  $k_1 = k_2 = \dots = k_n = 0$ , 故  $\epsilon_1, \epsilon_2, \dots, \epsilon_n$  线性无关.

以后, 我们把  $\epsilon_1, \epsilon_2, \dots, \epsilon_n$  称为基本向量.

**例 2** 设  $n$  维向量  $\alpha = [a_1, a_2, \dots, a_n]$ ,  $\epsilon_1, \epsilon_2, \dots, \epsilon_n$  为基本向量, 则向量组  $\alpha, \epsilon_1, \epsilon_2, \dots, \epsilon_n$  是线性相关的.

**证** 由于

$$\alpha = [a_1, a_2, \dots, a_n] = a_1\epsilon_1 + a_2\epsilon_2 + \dots + a_n\epsilon_n,$$

根据定理 1, 向量组  $\alpha, \epsilon_1, \epsilon_2, \dots, \epsilon_n$  线性相关.

**例 3** 包含零向量的任何向量组是线性相关的.

证 设向量组  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_r$  (其中  $\alpha_1 = O$ ), 于是存在不全为零的数  $1, 0, \dots, 0$ , 使

$$1\alpha_1 + 0\alpha_2 + \dots + 0\alpha_r = O,$$

故  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_r$  线性相关.

根据定义 5, 读者不难证明: 单个向量  $\alpha$  线性相关(无关), 当且仅当  $\alpha$  为零向量(非零向量).

**定理 2** 设  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_r \in F^n$ , 其中:

$\alpha_1 = [a_{11}, a_{21}, \dots, a_{n1}]^T, \alpha_2 = [a_{12}, a_{22}, \dots, a_{n2}]^T, \dots, \alpha_r = [a_{1r}, a_{2r}, \dots, a_{nr}]^T$ . 则向量组  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_r$  线性相关的充分必要条件是齐次线性方程组

$$AX = O \quad (3.6)$$

有非零解, 其中

$$A = \begin{bmatrix} | & | & \cdots & | \\ \alpha_1 & \alpha_2 & \cdots & \alpha_r \\ | & | & \cdots & | \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1r} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2r} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nr} \end{bmatrix}, \quad X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_r \end{bmatrix}.$$

证 设

$$x_1\alpha_1 + x_2\alpha_2 + \dots + x_r\alpha_r = O_n, \quad (3.7)$$

即

$$x_1 \begin{bmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{n1} \end{bmatrix} + x_2 \begin{bmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ \vdots \\ a_{n2} \end{bmatrix} + \dots + x_r \begin{bmatrix} a_{1r} \\ a_{2r} \\ \vdots \\ a_{nr} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}. \quad (3.8)$$

将(3.8)式左端作线性运算, 再与其右端相等, 即得方程组(3.6). 因此, 如果  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_r$  线性相关, 就必有不全为零的数  $x_1, x_2, \dots, x_r$  使(3.7)式成立, 即齐次线性方程组(3.6)有非零解; 反之, 如果方程组(3.6)有非零解, 也就是有不全为零的数  $x_1, x_2, \dots, x_r$  使

(3.7)式成立,故  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_r$  线性相关. 定理得证. ■

定理2的等价命题是:  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_r$  线性无关的充分必要条件是齐次线性方程组(3.6)只有零解.

在定理2中,如果  $n < r$ , 由高斯消元法可知, 方程组(3.6)求解时必有自由未知量, 即必有非零解. 因此, 任何  $n+1$  个  $n$  维向量都是线性相关的. 所以在  $R^n$  中, 任何一组线性无关的向量最多只能含  $n$  个向量.

**定理3** 若向量组  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_r$  线性无关, 而  $\beta, \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_r$  线性相关, 则  $\beta$  可由  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_r$  线性表示, 且表示法唯一.

**证** 因为  $\beta, \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_r$  线性相关, 所以存在不全为零的数  $k, k_1, k_2, \dots, k_r$ , 使得

$$k\beta + k_1\alpha_1 + k_2\alpha_2 + \dots + k_r\alpha_r = 0, \quad (3.9)$$

其中  $k \neq 0$  (如果  $k=0$ , 则由  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_r$  线性无关又得  $k_1, k_2, \dots, k_r$  必须全为零, 这与  $k, k_1, k_2, \dots, k_r$  不全为零矛盾), 于是  $\beta$  可由  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_r$  线性表示为

$$\beta = -\frac{k_1}{k}\alpha_1 - \frac{k_2}{k}\alpha_2 - \dots - \frac{k_r}{k}\alpha_r.$$

再证表示法唯一, 设有两种表示法:

$$\begin{aligned} \beta &= l_1\alpha_1 + l_2\alpha_2 + \dots + l_r\alpha_r \\ &= h_1\alpha_1 + h_2\alpha_2 + \dots + h_r\alpha_r, \end{aligned}$$

于是

$$(l_1 - h_1)\alpha_1 + (l_2 - h_2)\alpha_2 + \dots + (l_r - h_r)\alpha_r = 0.$$

由于  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_r$  线性无关, 所以必有

$$l_i - h_i = 0, \text{ 即 } l_i = h_i, \quad i = 1, \dots, r,$$

故  $\beta$  由  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_r$  线性表示的表示法唯一. ■

由定理2和定理3, 立即可得下面的推论,

**推论** 如果  $F^n$  中的  $n$  个向量  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$  线性无关, 则  $F^n$  中的任一向量  $\alpha$  可由  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$  线性表示, 且表示法唯一. ?

**例 4** 设  $\alpha_1 = [1, -1, 1]$ ,  $\alpha_2 = [1, 2, 0]$ ,  $\alpha_3 = [1, 0, 3]$ ,  $\alpha_4 = [2, -3, 7]$ .

问 (1)  $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$  是否线性相关? (2)  $\alpha_4$  可否由  $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$  线性表示? 如能表示求其表示式.

**解** (1) 根据定理 2, 作矩阵

$$A = \begin{bmatrix} | & | & | \\ \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 \\ | & | & | \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

用高斯消元法易得方程组  $AX=O$  只有零解, 故  $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$  线性无关.

(2) 根据定理 2 和定理 3 的推论,  $\alpha_4$  可由  $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$  线性表示, 且表示法唯一. 设

$$x_1\alpha_1 + x_2\alpha_2 + x_3\alpha_3 = \alpha_4,$$

$$\text{即 } x_1[1, -1, 1] + x_2[1, 2, 0] + x_3[1, 0, 3] = [2, -3, 7].$$

于是得

$$\begin{bmatrix} | & | & | \\ \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 \\ | & | & | \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ -3 \\ 7 \end{bmatrix},$$

即  $AX=\alpha_4$ , 解此方程组得唯一解:  $x_1=1, x_2=-1, x_3=2$ , 故

$$\alpha_4 = \alpha_1 - \alpha_2 + 2\alpha_3.$$

**例 5** 设向量组  $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$  线性无关, 又  $\beta_1 = \alpha_1 + \alpha_2 + 2\alpha_3, \beta_2 = \alpha_1 - \alpha_2, \beta_3 = \alpha_1 + \alpha_3$ , 证明  $\beta_1, \beta_2, \beta_3$  线性相关.

**证** 思路是, 由  $x_1\beta_1 + x_2\beta_2 + x_3\beta_3 = 0$  推出  $x_1, x_2, x_3$  不全为零.

设

$$x_1\beta_1 + x_2\beta_2 + x_3\beta_3 = 0, \quad (3.10)$$

即

$$x_1(\alpha_1 + \alpha_2 + 2\alpha_3) + x_2(\alpha_1 - \alpha_2) + x_3(\alpha_1 + \alpha_3) = 0,$$

$$(x_1 + x_2 + x_3)\alpha_1 + (x_1 - x_2)\alpha_2 + (2x_1 + x_3)\alpha_3 = 0.$$

由于  $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$  线性无关, 上式系数必须全为零, 于是得

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 0, \\ x_1 - x_2 = 0, \\ 2x_1 + x_3 = 0. \end{cases}$$

容易解得此方程组有非零解  $[-1, -1, 2]$ . 因此, 有不全为零的  $x_1, x_2, x_3$  使 (3.10) 式成立, 故  $\beta_1, \beta_2, \beta_3$  线性相关. ■

**例 6** 证明: 若向量组  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s$  中有一部分向量线性相关, 则该向量组线性相关.

**证** 不妨设  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_r$  线性相关 ( $r < s$ ), 于是有不全为零的数  $k_1, k_2, \dots, k_r$  使

$$k_1\alpha_1 + k_2\alpha_2 + \dots + k_r\alpha_r = 0,$$

从而有

$$k_1\alpha_1 + k_2\alpha_2 + \dots + k_r\alpha_r + 0\alpha_{r+1} + \dots + 0\alpha_s = 0,$$

这就证明了  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s$  线性相关. ■

例 6 的等价命题是: 若向量组  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s$  线性无关, 则其任一部分组都是线性无关的.

例 6 告诉我们, 对一个向量组来说, 如果部分相关, 则整体必相关; 如果整体无关, 则任一部分必无关.

利用定理 2 的结论可以证明: 如果一组  $n$  维向量  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s$  线性无关, 那么把这些向量各任意添加  $m$  个分量所得到的新向量组也是线性无关的; 如果  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s$  线性相关, 那么它们各去掉第  $i$  个分量所得到的新向量组也是线性相关的.

现在, 我们利用线性相关性的概念, 研究一个向量组的秩及其极大线性无关组.

向量组的秩也是一个重要概念, 先看一个例子.

在  $R^3$  中, 给定四个共面向量  $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$  (如图 3.4 所示), 它们显然是线性相关的, 但它们中存在两上线性无关的向量, 而且任

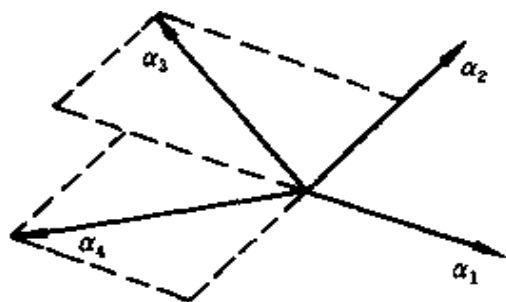


图 3.4

一个向量都可由这两个线性无关的向量线性表示(例如:  $\alpha_1, \alpha_2$  线性无关,  $\alpha_3$  和  $\alpha_4$  可由  $\alpha_1$  和  $\alpha_2$  线性表示). 此外它们中任意三个向量是线性相关的, 即它们中任一个线性无关的部分组最多只含“2”个向量, 数“2”就叫作这个向量组的秩. 下面正式给出向量组的秩的定义.

**定义 6** 如果向量组  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s$  中存在  $r$  个线性无关的向量, 且其中任一个向量可由这  $r$  个线性无关的向量线性表示, 则数  $r$  称为向量组的秩, 记作秩  $\{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s\} = r$ .

显然, 如果  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s$  线性无关, 则秩  $\{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s\} = s$ ; 只含零向量的向量组的秩为零.

秩为  $r$  的向量组中, 任意  $r+1$  个向量都是线性相关的. 为了证明这个结论和叙述方便, 再给一个定义和证明一个定理.

**定义 7** 如果向量组  $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_t$  中每个向量可由向量组  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s$  线性表示, 就称前一个向量组可由后一个向量组线性表示. 如果两个向量组可以互相线性表示, 则称这两个向量组是等价的.

**定理 4** 如果向量组  $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_t$  可由向量组  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s$  线性表示, 且  $t > s$ , 则  $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_t$  线性相关.

证 设  $\beta_j = \sum_{i=1}^s k_{ij} \alpha_i \quad (j=1, \dots, t),$

欲证  $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_t$  线性相关, 只需证: 存在不全为零的数  $x_1, x_2, \dots,$



$x_i$  使得

$$x_1\beta_1 + x_2\beta_2 + \cdots + x_t\beta_t = 0, \quad (3.11)$$

即

$$\sum_{j=1}^t x_j \beta_j = \sum_{j=1}^t \left( \sum_{i=1}^s k_{ij} \alpha_i \right) = \sum_{i=1}^s \left( \sum_{j=1}^t k_{ij} x_j \right) \alpha_i = 0.$$

当其中  $\alpha_1, \cdots, \alpha_s$  的系数

$$\sum_{j=1}^t k_{ij} x_j = 0, \quad i = 1, 2, \cdots, s, \quad (3.12)$$

时, (3.11) 式显然成立. 而 (3.12) 式是  $t$  个未知量  $x_1, x_2, \cdots, x_t$  的齐次线性方程组, 由于  $t > s$  (方程个数), 故方程组 (3.12) 有非零解, 即有不全为零的  $x_1, x_2, \cdots, x_t$  使 (3.11) 式成立. 所以  $\beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_t$  线性相关. ■

我们把定理 4 的等价命题写作推论 1.

**推论 1** 如果向量组  $\beta_1, \cdots, \beta_t$  可由向量组  $\alpha_1, \cdots, \alpha_s$  线性表示, 且  $\beta_1, \cdots, \beta_t$  线性无关, 则  $t \leq s$ .

**推论 2** 若秩  $\{\alpha_1, \cdots, \alpha_s\} = r$ , 则  $\alpha_1, \cdots, \alpha_s$  中任何  $r+1$  个向量都是线性相关的.

**证** 不妨设  $\alpha_1, \cdots, \alpha_r$  是向量组  $\alpha_1, \cdots, \alpha_s$  中的  $r$  个线性无关的向量, 由于该向量组中任一个向量可由  $\alpha_1, \cdots, \alpha_r$  线性表示, 所以由定理 4 立即可得其中任何  $r+1$  个向量都线性相关.

如此, 向量组的秩可等价地定义为: 若向量组中存在  $r$  个线性无关的向量, 且任何  $r+1$  个向量都线性相关, 就称数  $r$  为向量组的秩.

由此可知, 秩为  $r$  的向量组中, 任一个线性无关的部分组最多只含  $r$  个向量. 因此, 秩为  $r$  的向量组中含有  $r$  个向量的线性无关组, 称为该向量组的极大线性无关组. 一般情况下, 极大线性无关组不唯一, 但不同的极大线性无关组所含向量个数是相同的, 如图 3.4 中,  $\alpha_1, \alpha_2$  和  $\alpha_1, \alpha_3$  都是极大线性无关组.

**推论 3** 设秩  $\{\alpha_1, \cdots, \alpha_s\} = p$ , 秩  $\{\beta_1, \cdots, \beta_t\} = r$ , 如果向量组

$\beta_1, \dots, \beta_r$  可由向量组  $\alpha_1, \dots, \alpha_p$  线性表示, 则  $r \leq p$ .

证 不妨设  $\alpha_1, \dots, \alpha_p$  和  $\beta_1, \dots, \beta_r$  分别是两个向量组的极大线性无关组, 因此有

$$\alpha_i = \sum_{j=1}^p c_{ij} \alpha_j \quad (i=1, \dots, s).$$

又已知

$$\beta_k = \sum_{i=1}^s b_{ki} \alpha_i \quad (k=1, \dots, r, \dots, t).$$

所以

$$\beta_k = \sum_{i=1}^s b_{ki} \left( \sum_{j=1}^p c_{ij} \alpha_j \right) = \sum_{j=1}^p \left( \sum_{i=1}^s b_{ki} c_{ij} \right) \alpha_j,$$

即  $\beta_1, \dots, \beta_r$  可由  $\alpha_1, \dots, \alpha_p$  线性表示, 于是由推论 1 可得  $r \leq p$ .

由推论 3 立即可得, 等价向量组的秩相等.

关于如何求向量组的秩及其极大线性无关组, 在下一节再作介绍.

### 3.2 矩阵的秩 相抵标准形

对于矩阵  $A$ , 我们把它的每一行(列)称为  $A$  的一个行(列)向量, 把  $A$  的行(列)向量组的秩称为  $A$  的行(列)秩. 显然,  $m \times n$  矩阵  $A$  的行秩  $\leq m$ , 列秩  $\leq n$ .

阶梯形矩阵

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} & a_{15} \\ 0 & 0 & a_{23} & a_{24} & a_{25} \\ 0 & 0 & 0 & a_{34} & a_{35} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

(其中  $a_{11} \neq 0, a_{23} \neq 0, a_{34} \neq 0$ ) 的行秩 = 3, 列秩 = 3, 这时因为: 把  $A$  按行和按列分块为

$$A = \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \\ \alpha_4 \end{bmatrix}, \quad A = [\beta_1, \beta_2, \beta_3, \beta_4, \beta_5],$$

则: (i) 由  $x_1\alpha_1 + x_2\alpha_2 + x_3\alpha_3 = 0$  可推出数  $x_1, x_2, x_3$  必须全为零, 故  $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$  线性无关, 而  $\alpha_4 = 0$ , 因此  $A$  的行秩等于 3.

(ii) 由  $y_1\beta_1 + y_3\beta_3 + y_4\beta_4 = 0$  可推出数  $y_1, y_2, y_4$  必须全为零, 故  $\beta_1, \beta_3, \beta_4$  线性无关, 又易见  $A$  的任意 4 个列向量都线性相关 (因为任意 4 个三维向量都线性相关), 因此  $A$  的列秩也等于 3.

由此例我们可得一般的结论: 阶梯形矩阵的行秩等于列秩, 其值等于阶梯形矩阵的非零行的行数.

用高斯消元法解线性方程组  $AX=b$  的消元步骤, 是对增广矩阵  $[A, b]$  作初等行变换将其化为阶梯形矩阵, 而初等行变换的倍乘、倍加变换实际是对行向量作线性运算, 因此, 我们需要研究初等变换是否改变矩阵的行秩和列秩.

**定理 1** 如果对矩阵  $A$  作初等行变换将其化为  $B$ , 则  $B$  的行秩等于  $A$  的行秩.

**证** 只需证明每作一次倍乘、倍加和对换行变换, 矩阵的行秩都不变.

设  $A$  是  $m \times n$  矩阵,  $A$  的  $m$  个行向量记作  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m$ .

(i) 对换  $A$  的某两行位置, 所得到的矩阵  $B$  的  $m$  个行向量仍是  $A$  的  $m$  个行向量, 显然  $B$  的行秩等于  $A$  的行秩.

(ii) 把  $A$  的第  $i$  行乘非零常数  $c$  得  $B$ , 则  $B$  的  $m$  个行向量为  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, c\alpha_i, \dots, \alpha_m$ , 显然  $B$  的行向量组与  $A$  的行向量组是等价的, 根据 3.1 节定理 4 的推论 3,  $B$  的行秩等于  $A$  的行秩.

$$(iii) \quad A = \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_i \\ \vdots \\ \alpha_j \\ \vdots \\ \alpha_m \end{bmatrix} \xrightarrow[\text{加到 } j \text{ 行}]{i \text{ 行乘 } c} \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_i \\ \vdots \\ c\alpha_i + \alpha_j \\ \vdots \\ \alpha_m \end{bmatrix} \quad \text{记作} \quad \begin{bmatrix} \zeta_1 \\ \vdots \\ \zeta_i \\ \vdots \\ \zeta_j \\ \vdots \\ \zeta_m \end{bmatrix} = B.$$

显然,  $B$  的行向量组可由  $A$  的行向量组线性表示, 又  $\alpha_j = -c\zeta_i + \zeta_j$ ,  $\alpha_k = \zeta_k (k \neq j)$ , 所以  $A$  的行向量组也可由  $B$  的行向量组线性表示, 因此  $A$  与  $B$  的行秩也相等. ■

由定理 1 可知, 对线性方程组  $AX=b$  的增广矩  $[A, b]$ , 不论怎样作初等行变换将其化为阶梯形矩阵, 其非零行的行数都等于  $[A, b]$  的行秩.

初等行变换也不改变矩阵的列秩, 这是因为:

**定理 2** 对矩阵  $A$  作初等行变换化为  $B$ , 则  $A$  与  $B$  的任何对应的列向量组有相同的线性相关性, 即:

$$A = [\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n] \xrightarrow{\text{初等行变换}} [\zeta_1, \zeta_2, \dots, \zeta_n] = B,$$

则向量组  $\alpha_{i_1}, \alpha_{i_2}, \dots, \alpha_{i_r}$  与  $\zeta_{i_1}, \zeta_{i_2}, \dots, \zeta_{i_r} (1 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_r \leq n)$  有相同的线性相关性.

**证** 对  $A$  作初等行变换化为  $B$ , 就是用若干初等阵  $P_1, \dots, P_s$  左乘  $A$  使之等于  $B$ , 记  $P = P_s \cdots P_2 P_1$ , 即有

$$PA = B.$$

从而

$$P\alpha_j = \zeta_j, \quad j = 1, 2, \dots, n.$$

取

$$A_1 = [\alpha_{i_1}, \alpha_{i_2}, \dots, \alpha_{i_r}], B_1 = [\zeta_{i_1}, \zeta_{i_2}, \dots, \zeta_{i_r}], X_1 = [x_{i_1}, x_{i_2}, \dots, x_{i_r}]^T$$

则齐次线性方程组  $A_1 X_1 = O$  与  $B_1 X_1 = O$  (即  $PA_1 X_1 = O$ ) 显然是

同解方程组. 因此, 根据 3.1 节中的定理 2 即得,  $A_1$  与  $B_1$  的列向量组有相同的线性相关性. ■

定理 2 也提供了求向量组的秩及其极大线性无关组的一个简便而有效的方法.

**例 1** 设向量组:  $\alpha_1 = [-1, -1, 0, 0]^T$ ,  $\alpha_2 = [1, 2, 1, -1]^T$ ,  $\alpha_3 = [0, 1, 1, -1]^T$ ,  $\alpha_4 = [1, 3, 2, 1]^T$ ,  $\alpha_5 = [2, 6, 4, -1]^T$ . 试求向量组的秩及其一个极大线性无关组, 并将其余向量用这个极大线性无关组线性表示.

**解** 作矩阵  $A = [\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4, \alpha_5]$ , 对  $A$  作初等行变换将其化为阶梯阵, 即

$$\begin{aligned}
 A &= \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 & 1 & 2 \\ -1 & 2 & 1 & 3 & 6 \\ 0 & 1 & 1 & 2 & 4 \\ 0 & -1 & -1 & 1 & -1 \end{bmatrix} \\
 &\xrightarrow[\text{②}+\text{①}]{\text{①} \times (-1)} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & -1 & -2 \\ 0 & 1 & 1 & 2 & 4 \\ 0 & 1 & 1 & 2 & 4 \\ 0 & -1 & -1 & 1 & -1 \end{bmatrix} \\
 &\xrightarrow[\text{④}+\text{②}]{\text{③}+\text{②} \times (-1)} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & -1 & -2 \\ 0 & 1 & 1 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 3 \end{bmatrix} \\
 &\xrightarrow[\text{③} \leftrightarrow \text{④}]{\text{④} \times \frac{1}{3}} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & -1 & -2 \\ 0 & 1 & 1 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}
 \end{aligned}$$

$$\begin{array}{l} \xrightarrow[\text{②+③} \times (-2)]{\text{①+③}} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \\ \xrightarrow{\text{①+②}} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = U. \end{array}$$

把上面最后一个矩阵  $U$  记作  $[\zeta_1, \zeta_2, \zeta_3, \zeta_4, \zeta_5]$ .

易见  $\zeta_1, \zeta_2, \zeta_4$  是  $U$  的列向量组的一个极大线性无关组, 所以  $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_4$  也是  $A$  的列向量组的一个极大线性无关组, 故秩  $\{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4, \alpha_5\} = 3$ , 令

$$x_1 \alpha_1 + x_2 \alpha_2 + x_4 \alpha_4 = \alpha_3,$$

$$y_1 \alpha_1 + y_2 \alpha_2 + y_4 \alpha_4 = \alpha_5.$$

用高斯消元法解这两个线性方程组可利用阶梯阵  $U$ , 得

$$\alpha_3 = \alpha_1 + \alpha_2,$$

$$\alpha_5 = \alpha_1 + 2\alpha_2 + \alpha_4.$$

如果只需求向量组的秩和极大线性无关组, 只要对  $A$  作初等行变换将其化为一般的阶梯阵, 而不必化为行简化阶梯阵.

由定理 1 和定理 2 可以推出: 初等列变换也不改变矩阵的列秩和行秩. 因为对  $A$  作列变换就是对  $A^T$  作行变换,  $A^T$  的行(列)秩就是  $A$  的列(行)秩. 于是综上所述就有

**定理 3** 初等变换不改变矩阵的行秩和列秩.

由定理 1 和定理 2 还可推出下面的定理.

**定理 4** 矩阵  $A$  的行秩等于其列秩.

**证** 对  $A$  作初等行变换将其化为阶梯阵  $U$ , 则有

$$\begin{aligned} A \text{ 的行秩} &= U \text{ 的行秩} \\ &= U \text{ 的列秩} = A \text{ 的列秩}. \end{aligned}$$

由于矩阵  $A$  的行秩与列秩相等, 所以我们给出下面的定义:

**定义 1** 矩阵  $A$  的行秩的数值称为**矩阵  $A$  的秩**, 记作: 秩( $A$ ) 或  $r(A)$ .

**定理 5**  $n$  阶矩阵  $A$  的秩等于  $n$  的充要条件是  $A$  为非奇异矩阵(即  $|A| \neq 0$ ).

**证** 若  $r(A) = n$ , 则对  $A$  作初等行变换可以将其化为有  $n$  个非零行的行简化阶梯阵(即单位阵  $I$ ), 也就是, 存在可逆阵  $P$ , 使  $PA = I$ , 故  $|A| \neq 0$ ; 反之, 若  $|A| \neq 0$ , 则齐次线性方程组  $AX = 0$  只有零解, 故  $A$  的  $n$  个列向量线性无关, 即  $r(A) = n$ . ■

对于一般的  $m \times n$  矩阵  $A$ ,  $A$  的秩与  $A$  的子行列式也有密切的关系.

**定义 2** 矩阵  $A = [a_{ij}]_{m \times n}$  的任意  $k$  个行( $i_1, i_2, \dots, i_k$  行)和任意  $k$  个列( $j_1, j_2, \dots, j_k$  列)的交点上的  $k^2$  个元素按原顺序排成的  $k$  阶行列式

$$\begin{vmatrix} a_{i_1 j_1} & a_{i_1 j_2} & \cdots & a_{i_1 j_k} \\ a_{i_2 j_1} & a_{i_2 j_2} & \cdots & a_{i_2 j_k} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{i_k j_1} & a_{i_k j_2} & \cdots & a_{i_k j_k} \end{vmatrix} \quad (3.13)$$

称为  $A$  的  $k$  阶**子行列式**, 简称  $A$  的  $k$  阶**子式**. 当(3.13)式等于零(不等于零)时, 称为  $k$  阶**零子式**(**非零子式**). 当(3.13)式的  $j_1 = i_1, j_2 = i_2, \dots, j_k = i_k$  时, 称为  $A$  的  $k$  阶**主子式**.

如果矩阵  $A$  存在  $r$  阶非零子式, 而所有  $r+1$  阶子式(如果有  $r+1$  阶子式)都等于零, 则矩阵  $A$  的非零子式的最高阶数为  $r$ , 因为由所有  $r+1$  阶子式都等于零可推出所有更高阶的子式都等于零.

**定理 6** 秩( $A$ ) =  $r$  的充要条件是  $A$  的非零子式的最高阶数为  $r$ .

**证** 先证必要性, 设  $r(A)=r$ , 即  $A$  的行秩为  $r$ , 不妨设  $A$  的前  $r$  个行向量线性无关, 把  $A$  的前  $r$  个行作成的矩阵记作  $A_1$ , 则  $A_1$  的列秩  $= A_1$  的行秩  $= r$ , 不妨再设  $A_1$  的前  $r$  个列向量线性无关. 如此, 由定理 5 可知  $A$  的左上角  $r$  阶子式为非零子式. 又因为  $A$  的任意  $r+1$  个行向量线性相关, 因此, 在  $A$  的任意  $r+1$  个行中作成的任一个  $r+1$  阶子式都是零子式. 故  $A$  的非零子式的最高阶数为  $r$ .

再证充分性. 不妨设  $A$  的左上角  $r$  阶子式为非零子式, 令  $A$  的前  $r$  个行作成的矩阵为  $A_1$ , 由于  $A_1$  中前  $r$  个列作成的  $r$  阶子式 (即  $A$  的左上角  $r$  阶子式) 是非零子式, 所以  $A_1$  的前  $r$  个列向量线性无关, 而  $A_1$  的列秩  $= A_1$  的行秩  $\leq r$ , 故  $A_1$  的列秩等于  $r$ , 从而  $A_1$  的行秩等于  $r$ , 因此  $A$  的前  $r$  个行向量线性无关. 要证  $r(A)=r$  (即  $A$  的行秩  $= r$ ), 还需证明  $A$  的其余各行可由  $A$  的前  $r$  行线性表示, 这里用反证法, 假设某行 (不妨设第  $r+1$  行) 不能用前  $r$  行线性表示, 于是  $A$  的前  $r+1$  行线性无关, 如此, 由  $A$  的前  $r+1$  行作成的矩阵  $A_2$  的秩等于  $r+1$ , 由必要性的证明可知  $A_2$  存在  $r+1$  阶非零子式, 这与题设矛盾. 故  $r(A)=r$ . ■

综上所述, 关于矩阵的秩的基本结论是: 矩阵的秩  $=$  矩阵的行秩  $=$  矩阵的列秩  $=$  矩阵的非零子式的最高阶数; 初等变换不改变矩阵的秩.

矩阵的秩对线性方程组的解有十分重要的意义, 在以后两节我们将予以阐明.

现在我们研究矩阵相加、相乘以后的秩的情况:

**性质 1**  $r(A+B) \leq r(A) + r(B)$

**证** 设  $A, B$  均是  $m \times n$  矩阵,  $r(A)=p, r(B)=q$ , 将  $A, B$  按列分块为

$$A = [a_1, a_2, \dots, a_n], \quad B = [\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n],$$

于是



$$A+B=[\alpha_1+\beta_1, \alpha_2+\beta_2, \dots, \alpha_n+\beta_n].$$

不妨设  $A$  和  $B$  的列向量组的极大线性无关组分别为  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_p$  和  $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_q$ , 于是  $A+B$  的列向量组可由向量组  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_p, \beta_1, \beta_2, \dots, \beta_q$  线性表示, 因此,

$$r(A+B) = A+B \text{ 的列秩}$$

$$\leq \text{秩}\{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_p, \beta_1, \beta_2, \dots, \beta_q\} \leq p+q.$$

**性质 2**  $r(AB) \leq \min(r(A), r(B))$  ■

**证** 设  $A, B$  分别是  $m \times n, n \times s$  矩阵, 将  $A$  按列分块, 则

$$AB = [\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n] \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1s} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2s} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ b_{n1} & b_{n2} & \cdots & b_{ns} \end{bmatrix}$$

的列向量组  $\gamma_1, \dots, \gamma_s$  可由  $A$  的列向量组  $\alpha_1, \dots, \alpha_n$  线性表示, 故  $r(AB) = AB$  的列秩  $\leq A$  的列秩  $= r(A)$ . 类似地, 将  $B$  按行分块, 可得  $r(AB) \leq r(B)$ . ■

**性质 3** 设  $A$  是  $m \times n$  矩阵,  $P, Q$  分别是  $m$  阶、 $n$  阶可逆矩阵, 则

$$r(A) = r(PA) = r(AQ) = r(PAQ).$$

**证** 由于可逆阵  $P, Q$  可以表示为若干个初等阵的乘积, 而初等变换不改变矩阵的秩, 故结论成立. 或者根据  $A = P^{-1}(PA)$ , 利用性质 2 得

$$r(A) = r[P^{-1}(PA)] \leq r(PA) \leq r(A),$$

故  $r(PA) = r(A)$ , 同理可证其余等式. ■

**例 2** 设  $A$  是  $m \times n$  矩阵,  $m < n$ , 证明:  $|A^T A| = 0$ .

**证** 由于  $r(A) = r(A^T) \leq \min(m, n) < n$ , 根据性质 2, 有

$$r(A^T A) \leq \min(r(A^T), r(A)) < n,$$

而  $A^T A$  是  $n$  阶矩阵, 利用定理 5 或定理 6 的结论, 即得  $|A^T A| = 0$ . ■

\* 最后我们讨论,一个秩为  $r$  的矩阵通过初等变换可以化为怎样的最简单的矩阵,也就是矩阵的相抵标准形(或说等价标准形).

**定义 3** 若矩阵  $A$  经过初等变换化为  $B$ (或:若存在可逆阵  $P$  和  $Q$ ,使得  $PAQ=B$ ),就称  $A$  相抵于  $B$ ,记作  $A \cong B$ .

根据定义,容易证明矩阵的相抵关系有以下性质:

(i) 反身性,即  $A \cong A$ ;

(ii) 对称性,即若  $A \cong B$ ,则  $B \cong A$ (由于有对称性, $A \cong B$  一般就说  $A$  和  $B$  相抵);

(iii) 传递性,即若  $A \cong B, B \cong C$ ,则  $A \cong C$ .

所以相抵是一种等价关系.

**定理 7** 若  $A$  为  $m \times n$  矩阵,且  $r(A)=r$ ,则一定存在可逆阵  $P$ ( $m$  阶)和  $Q$ ( $n$  阶),使得

$$PAQ = \begin{bmatrix} I_r & O \\ O & O \end{bmatrix}_{m \times n} \quad (3.14)$$

其中  $I_r$  为  $r$  阶单位阵.

**证** 对  $A$  作初等行变换,将  $A$  化为有  $r$  个非零行的阶梯阵,即

$$P_r \cdots P_2 P_1 A = \begin{bmatrix} 1 & \cdots & * & \cdots & * & * & \cdots & * \\ 0 & \cdots & 1 & \cdots & * & * & \cdots & * \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & \cdots & 0 & \cdots & 1 & * & \cdots & * \\ 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix} \text{记作 } U_1$$

其中  $P_1, P_2, \cdots, P_r$  是初等矩阵. 再对  $U_1$  作倍加初等列变换和列对换,可将  $U_1$  化为(3.14)式右端的形式,即

$$U_1 Q_1 Q_2 \cdots Q_t = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I_r & O \\ O & O \end{bmatrix},$$

其中  $Q_1, Q_2, \dots, Q_t$  是初等矩阵.

所以存在可逆阵  $P = P_t \cdots P_2 P_1, Q = Q_1 Q_2 \cdots Q_t$ , 使 (3.14) 式成立. ■

我们把 (3.14) 式右端的矩阵称为  $A$  的相抵标准形. 由定理 7 可知, 秩相同的同型矩阵必相抵于同一相抵标准形. 因此, 任意两个秩相同的同型矩阵是相抵的.

**例 3** 设  $A$  是  $m \times n$  矩阵 ( $m > n$ ), 秩  $(A) = n$ . 证明: 存在  $n \times m$  矩阵  $B$ , 使得  $BA = I_n$ .

**证** 根据定理 7, 存在  $m$  阶可逆阵  $P$  和  $n$  阶可逆阵  $Q$ , 使得,

$$PAQ = \begin{bmatrix} I_n \\ O_1 \end{bmatrix}, \text{ 于是 } PA = \begin{bmatrix} I_n \\ O_1 \end{bmatrix} Q^{-1} = \begin{bmatrix} Q^{-1} \\ O_1 \end{bmatrix},$$

其中  $O_1$  是  $(m-n) \times n$  零矩阵, 取  $C = [Q, O_2]$  其中  $O_2$  是  $n \times (m-n)$  零矩阵, 则

$$CPA = [Q, O_2] \begin{bmatrix} Q^{-1} \\ O_1 \end{bmatrix} = QQ^{-1} + O_2 O_1 = I_n,$$

故存在  $B = CP$ , 使得  $BA = I_n$ .

此例更简便的解法是, 对  $A$  只作初等行变换即可将其化为标准形, 即存在  $m$  阶可逆阵  $P$ , 使  $PA = \begin{bmatrix} I_n \\ O_1 \end{bmatrix}$ .

### 3.3 齐次线性方程组有非零解的条件及解的结构

对于以  $m \times n$  矩阵  $A$  为系数矩阵的齐次线性方程组

$$AX = O. \quad (3.15)$$

如果把  $A$  按列分块为  $A = [\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n]$ , 它就可以表示为向量等式

$$x_1 \alpha_1 + x_2 \alpha_2 + \dots + x_n \alpha_n = O. \quad (3.16)$$

因此, (3.15) 有非零解的充要条件是  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$  线性相关, 秩  $(A) = \text{秩}\{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n\} < n$ , 于是有

**定理 1** 设  $A$  是  $m \times n$  矩阵, 则齐次线性方程组  $AX = O$  有非零解的充要条件为秩  $(A) < n$ .

这个定理也可用下面的证法:

设秩  $(A) = r$ , 则矩阵  $A$  存在  $r$  个线性无关的行向量, 其余  $m - r$  个行向量可由这  $r$  个线性无关的行向量线性表示. 因此, 对  $A$  作初等行变换可将其化为有  $r$  个非零行的阶梯阵

$$U = \begin{bmatrix} c_{11} & \cdots & c_{12} & \cdots & c_{1i_r} & \cdots & c_{1n} \\ 0 & \cdots & c_{22} & \cdots & c_{2i_r} & \cdots & c_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & \cdots & 0 & \cdots & c_{ri_r} & \cdots & c_{rn} \\ 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix}$$

由  $UX = O$  与  $AX = O$  是同解方程组, 以及  $UX = O$  有非零解的充要条件为  $r < n$ , 就使本定理得证. ■

定理 1 的等价命题是: 齐次线性方程组  $AX = O$  只有零解的充要条件是秩  $(A) = A$  的列数.

当  $A$  为  $n$  阶矩阵时,  $AX=O$  有非零解(只有零解)的充要条件还可叙述为  $|A|=0$  ( $|A|\neq 0$ ).

**例 1** 设  $A$  是  $n$  阶矩阵, 证明: 存在  $n\times s$  矩阵  $B\neq O$ , 使得  $AB=O$  的充要条件是  $|A|=0$ .

**证** 将  $B$  按列分块为  $B=[B_1, B_2, \dots, B_s]$ , 则  $AB=O$  等价于

$$AB_j=O, \quad j=1, 2, \dots, s,$$

即  $B$  的每一列都是齐次线性方程组  $AX=O$  的解.

若  $AB=O, B\neq O$ , 则  $AX=O$  有非零解, 故  $|A|=0$ ; 反之, 若  $|A|=0$ , 取  $AX=O$  的  $s$  个非零解作为  $B$  的  $s$  个列, 则  $B\neq O$ , 但它使得  $AB=O$ . ■

为了研究齐次线性方程组的解的结构, 我们先讨论它的解的性质, 并给出基础解系的概念.

**定理 2** 若  $X_1, X_2$  是齐次线性方程组  $AX=O$  的两个解, 则  $k_1X_1+k_2X_2$  ( $k_1, k_2$  为任意常数)也是它的解.

**证** 因为  $A(k_1X_1+k_2X_2)=k_1AX_1+k_2AX_2=k_1O+k_2O=O$ , 故  $k_1X_1+k_2X_2$  是  $AX=O$  的解.

定理 2 的结论显然对有限多个解也成立.

**定义 1** 设  $X_1, X_2, \dots, X_p$  是  $AX=O$  的解向量, 如果: (1)  $X_1, X_2, \dots, X_p$  线性无关; (2)  $AX=O$  的任一个解向量可由  $X_1, X_2, \dots, X_p$  线性表示. 则称  $X_1, X_2, \dots, X_p$  是  $AX=O$  的一个**基础解系**.

如果找到了  $AX=O$  的基础解系  $X_1, X_2, \dots, X_p$ , 那末  $k_1X_1+k_2X_2+\dots+k_pX_p$  对任意常数  $k_1, k_2, \dots, k_p$  作成的集合, 就是  $AX=O$  的全部解的解集合. 下面证明有非零解的齐次线性方程组存在基础解系.

**定理 3** 设  $A$  是  $m\times n$  矩阵, 若秩  $(A)=r<n$ , 则齐次线性方程组  $AX=O$  存在基础解系, 且基础解系含  $n-r$  个解向量.

**证** 先证存在  $n-r$  个线性无关的解向量. 按高斯消元法步骤对  $A$  作初等行变换, 将  $A$  化为行简化的阶梯阵  $U$ , 不失一般性,

可设

$$U = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 & c_{1,r+1} & \cdots & c_{1n} \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & c_{2,r+1} & \cdots & c_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & c_{r,r+1} & \cdots & c_{rn} \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix}$$

 $UX=0$ , 即

[illegible]

是  $AX=O$  的同解方程组, 取  $x_{r+1}, x_{r+2}, \dots, x_n$  为自由未知量, 将它们的下列  $n-r$  组值:

1, 0, 0, ..., 0; 0, 1, 0, ..., 0; ..., 0, 0, 0, ..., 1 分别代入 (3.17)

式,相应地求得  $n-r$  个解:

$$X_1 = [d_{11}, d_{21}, \dots, d_{r1}, 1, 0, 0, \dots, 0]^T,$$

$$X_2 = [d_{12}, d_{22}, \dots, d_{r2}, 0, 1, 0, \dots, 0]^T,$$

• • • • • 9

$$X_{n-r} = [d_{1,n-r}, d_{2,n-r}, \dots, d_{r,n-r}, 0, 0, 0, \dots, 1]^T.$$

显然,  $X_1, X_2, \dots, X_{n-r}$  是线性无关的.

再证  $AX=O$  的任一个解  $X$  可由  $X_1, X_2, \dots, X_{n-r}$  线性表示.

为此任取自由未知量的一组值  $k_1, k_2, \dots, k_{n-r}$  代入(3)式, 得一个解

$$X = [d_1, d_2, \dots, d_r, k_1, k_2, \dots, k_{n-r}]^T.$$

由于

$$X^* = k_1 X_1 + k_2 X_2 + \dots + k_{n-r} X_{n-r}$$

也是一个解,所以

$$X - X^* = \begin{bmatrix} d_1 \\ d_2 \\ \vdots \\ d_r \\ k_1 \\ k_2 \\ \vdots \\ k_{n-r} \end{bmatrix} - k_1 \begin{bmatrix} d_{11} \\ d_{21} \\ \vdots \\ d_{r1} \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} - k_2 \begin{bmatrix} d_{12} \\ d_{22} \\ \vdots \\ d_{r2} \\ 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} - \cdots - k_{n-r} \begin{bmatrix} d_{1n-r} \\ d_{2n-r} \\ \vdots \\ d_{rn-r} \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} d'_1 \\ d'_2 \\ \vdots \\ d'_r \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}$$

是相应于自由未知量  $x_{r+1}, x_{r+2}, \dots, x_n$  全取零时的  $AX=O$  的一个解, 这个解是  $AX=O$  的零解, 故

$$X - X^* = O,$$

即  $X = X^* = k_1 X_1 + k_2 X_2 + \cdots + k_{n-r} X_{n-r}.$

因此,  $X_1, X_2, \dots, X_{n-r}$  是  $AX=O$  的一个含有  $n-r$  个解向量的基础解系. ■

定理的证明过程, 提供了求  $AX=O$  的基础解系的方法. 但是对  $n-r$  个自由未知量也可以取另外的  $n-r$  组数而求得  $n-r$  个线性无关的解, 此外, 自由未知量的选择也不是唯一的, 事实上, 在  $UX=O$  中, 任何  $r$  个未知量只要它们的系数行列式不等于零, 都可以作基本未知量, 其余的  $n-r$  个未知量为自由未知量. 因此, 基础解系不是唯一的. 但是不难证明(证明留给读者).

如果  $X_1, X_2, \dots, X_p$  和  $X_1^*, X_2^*, \dots, X_p^*$  是  $AX=O$  的两个基础解系, 则两个解集合

$$S = \{k_1 X_1 + k_2 X_2 + \cdots + k_p X_p \mid k_1, k_2, \dots, k_p \text{ 为任意常数}\}$$

与  $S^* = \{l_1 X_1^* + l_2 X_2^* + \cdots + l_p X_p^* \mid l_1, l_2, \dots, l_p \text{ 为任意常数}\}$  是相等的(只要证明:  $S \subseteq S^*$  且  $S^* \subseteq S$ ).

这里的解集合  $S$  与  $S^*$  显然是  $AX=O$  的全部解的集合, 集合中元素的一般表示式

$$X = k_1 X_1 + k_2 X_2 + \cdots + k_p X_p$$

称为  $AX=O$  的一般解(或通解),它清楚地揭示了齐次线性方程组的解的结构. 求解有非零解的齐次线性方程组通常是先求基础解系,然后写出它的一般解.

**例 2** 求齐次线性方程组  $AX=O$  的一般解,其系数矩阵为

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 4 & 3 & 1 & 1 \\ -1 & -2 & 1 & 3 & -3 \\ 0 & 0 & 2 & 5 & -2 \end{bmatrix}.$$

**解** 对矩阵  $A$  作初等行变换,将其化为行简化阶梯矩阵

$$U = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

选  $x_2, x_5$  为自由未知量,取

$x_2=1, x_5=0$  和  $x_2=0, x_5=1$ , 得基础解系:

$$X_1 = [-2, 1, 0, 0, 0]^T, X_2 = [-2, 0, 1, 0, 1]^T,$$

于是,  $AX=O$  的一般解为

$$X = k_1 X_1 + k_2 X_2,$$

即

$$X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{bmatrix} = k_1 \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + k_2 \begin{bmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix},$$

其中  $k_1, k_2$  为任意常数. ■

**例 3** 设  $A, B$  分别是  $m \times n$  和  $n \times s$  矩阵, 且  $AB=O$ . 证明:

$$r(A) + r(B) \leq n.$$

**证** 将  $B$  按列分块为  $B = [B_1, B_2, \dots, B_s]$ , 由  $AB=O$  得



$$AB_j=O, \quad j=1,2,\cdots,s.$$

即  $B$  的每一列都是  $AX=O$  的解. 而  $AX=O$  的基础解系含  $n-r(A)$  个解, 即  $AX=O$  的任何一组解中至多含  $n-r(A)$  个线性无关的解, 因此,

$$r(B)=\text{秩}[B_1, B_2, \cdots, B_s] \leq n-r(A),$$

故  $r(A)+r(B) \leq n$ . ■

\* 例 4 设  $A$  是  $m \times n$  实矩阵, 证明:  $r(A^T A) = r(A)$ .

证 根据 3.2 节中性质 2,  $r(A^T A) \leq r(A)$ , 因此只需证明:  $r(A) \leq r(A^T A)$ . 为此, 只要证明:  $(A^T A)X=O$  的解集合含于  $AX=O$  的解集合.

由于当  $(A^T A)X=O (X \in R^n)$  时, 必有  $X^T (A^T A)X=0$ , 即  $(AX)^T (AX)=0$ , 令

$$AX=[b_1, b_2, \cdots, b_m]^T,$$

(显然  $AX \in R^m$ ), 于是  $b_1^2 + b_2^2 + \cdots + b_m^2 = 0$ , 因此必有  $b_1 = b_2 = \cdots = b_m = 0$ , 即必有  $AX=O$ , 故方程组  $(A^T A)X=O$  的解必满足方程组  $AX=O$ , 所以

$$n-r(A^T A) \leq n-r(A),$$

从而  $r(A) \leq r(A^T A)$ . ■

定理 3 揭示了矩阵  $A$  的秩与  $AX=O$  的解的关系, 它不仅对求  $AX=O$  的解有重要意义, 而且如例 3、例 4 所表明的那样, 也可以通过研究线性方程组的解来讨论矩阵的秩.

### 3.4 非齐次线性方程组有解的条件及解的结构

以  $m \times n$  矩阵  $A$  为系数矩阵的非齐次线性方程组

$$AX=b \tag{3.18}$$

可以表示为一个向量等式

$$x_1 a_1 + x_2 a_2 + \cdots + x_n a_n = b \quad (3.19)$$

其中  $a_1, a_2, \dots, a_n$  是  $A$  的  $n$  个列向量, 因此, 方程组 (3.18) 有解的充要条件是  $b$  可由  $A$  的列向量组线性表示, 从而

$$\text{秩}\{a_1, a_2, \dots, a_n, b\} = \text{秩}\{a_1, a_2, \dots, a_n\},$$

即

$$r([A, b]) = r(A).$$

于是有下面的定理.

**定理 1** 对于非齐次线性方程组  $AX=b$ , 下列条件等价:

- (i)  $AX=b$  有解(或相容);
- (ii)  $b$  可由  $A$  的列向量组线性表示;
- (iii) 增广矩阵  $[A, b]$  的秩等于系数矩阵  $A$  的秩.

这个定理也可作如下的证明:

对增广矩阵  $[A, b]$  作初等行变换将其化为阶梯阵.

$$[C, d] = \begin{bmatrix} 1 & \cdots & c_{1r} & c_{1,r+1} & \cdots & c_{1n} & d_1 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & \cdots & 1 & c_{r,r+1} & \cdots & c_{rn} & d_r \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 & d_{r+1} \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (3.20)$$

则  $CX=d$  与  $AX=b$  是同解方程组, 因此,

$$AX=b \text{ 有解} (\text{即 } CX=d \text{ 有解}) \Leftrightarrow d_{r+1}=0,$$

$$\text{而 } d_{r+1}=0 \Leftrightarrow r([C, d]) = r(C),$$

$$\text{又 } r([C, d]) = r([A, b]), r(C) = r(A),$$

$$\text{故 } AX=b \text{ 有解} \Leftrightarrow r([A, b]) = r(A), \text{ 即}$$

$$\text{秩}\{a_1, a_2, \dots, a_n, b\} = \text{秩}\{a_1, a_2, \dots, a_n\}, \quad (3.21)$$

其中  $a_1, a_2, \dots, a_n$  是  $A$  列向量组. 显然, (3.21) 式成立的充要条件

是  $b$  可由  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$  线性表示, 不然的话,

$$\text{秩}\{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n, b\} = \text{秩}\{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n\} + 1.$$

**推论**  $AX=b$  有唯一解的充要条件是  $r([A, b]) = r(A) = A$  的列数. (3.22)

这是因为,  $b$  可由  $A$  的列向量组  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$  线性表示, 且表示法唯一的充要条件是  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$  线性无关. 或者由 (3.20) 式得

$$AX=b \text{ 有唯一解} \Leftrightarrow d_{r+1}=0, \text{ 且 } r=n, \Leftrightarrow (3.22) \text{ 式成立.}$$

下面讨论非齐次线性方程组  $AX=b$  的解的结构. 为此我们先讨论  $AX=b$  的解的性质.

需要注意, 若  $X_1, X_2$  是  $AX=b$  的两个解, 则  $k_1X_1+k_2X_2$  ( $k_1, k_2$  为常数) 一般不是  $AX=b$  的解, 因为

$$\begin{aligned} A(k_1X_1+k_2X_2) &= k_1AX_1+k_2AX_2 = k_1b+k_2b \\ &= (k_1+k_2)b. \end{aligned}$$

但是, 非齐次线性方程组的解有如下的性质:

**定理 2** 若  $X_1, X_2$  是  $AX=b$  的解, 则  $X_1-X_2$  是对应齐次方程组  $AX=0$  的解.

**证** 因为  $A(X_1-X_2) = AX_1-AX_2 = b-b=0$ , 故  $X_1-X_2$  是  $AX=0$  的解.

由此进一步可得非齐次线性方程组的解的结构定理.

**定理 3** 若  $AX=b$  有解, 则其一般解为

$$X = X_0 + \bar{X},$$

其中  $X_0$  是  $AX=b$  的一个特解 (某一个解);

$\bar{X} = k_1X_1 + \dots + k_pX_p$  是  $AX=0$  的一般解.

**证** 由于  $A(X_0 + \bar{X}) = AX_0 + A\bar{X} = b$ , 所以  $X_0 + \bar{X}$  是  $AX=b$  的解. 设  $X^*$  是  $AX=b$  的任一个解, 则  $X^* - X_0$  是  $AX=0$  的解, 而

$$X^* = X_0 + (X^* - X_0).$$

因此  $X^*$  可以表示为  $X_0 + \bar{X}$  的形式, 所以它是  $AX=b$  的一般解.

**例 1** 设非齐次线性方程组  $AX=b$  的增广矩阵

$$[A, b] = \left[ \begin{array}{ccccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & -1 & -1 & -2 & 1 \\ 2 & 2 & 0 & -1 & -2 & 1 \\ 5 & 5 & -3 & -4 & -8 & 4 \end{array} \right],$$

试求  $AX=b$  的一般解.

**解**

$$[A, b] \xrightarrow{\text{初等行变换}} \left[ \begin{array}{ccccc|c} 1 & 1 & 0 & -\frac{1}{2} & -1 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{2} & 1 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right] = [U, d].$$

取  $x_2 = x_4 = x_5 = 0$  代入  $UX=d$ , 求得  $AX=b$  的一个特解

$$X_0 = \left[ \frac{1}{2}, 0, -\frac{1}{2}, 0, 0 \right]^T.$$

取自由未知量  $x_2, x_4, x_5$  的三组值  $(1, 0, 0), (0, 1, 0), (0, 0, 1)$ , 并依次代入  $UX=0$ , 得  $AX=0$  的基础解系:

$$X_1 = [-1, 1, 0, 0, 0]^T, \quad X_2 = \left[ \frac{1}{2}, 0, -\frac{1}{2}, 1, 0 \right]^T,$$

$$X_3 = [1, 0, -1, 0, 1]^T.$$

显然, 基础解系也可取:

$$X_1^* = [-1, 1, 0, 0, 0]^T, \quad X_2^* = [1, 0, -1, 2, 0]^T,$$

$$X_3^* = [1, 0, -1, 0, 1]^T.$$

于是  $AX=b$  的一般解为

$$X = X_0 + k_1 X_1^* + k_2 X_2^* + k_3 X_3^*$$

$$= \begin{bmatrix} \frac{1}{2} \\ 0 \\ -\frac{1}{2} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + k_1 \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + k_2 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix} + k_3 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix},$$

其中  $k_1, k_2, k_3$  为任意常数.

## 例2 设线性方程组

$$\begin{cases} px_1 + x_2 + x_3 = 4, \\ x_1 + tx_2 + x_3 = 3, \\ x_1 + 2tx_2 + x_3 = 4. \end{cases}$$

试就  $p, t$  讨论方程组的解的情况, 有解时并求出解.

解 对方程组的增广矩阵  $[A, b]$  作初等行变换

$$\begin{aligned} [A, b] &\xrightarrow{\text{行对换}} \left[ \begin{array}{ccc|c} 1 & t & 1 & 3 \\ 1 & 2t & 1 & 4 \\ p & 1 & 1 & 4 \end{array} \right] \\ &\xrightarrow[\text{③}+\text{①}\times(-p)]{\text{②}+\text{①}\times(-1)} \left[ \begin{array}{ccc|c} 1 & t & 1 & 3 \\ 0 & t & 0 & 1 \\ 0 & 1-pt & 1-p & 4-3p \end{array} \right] \\ &\xrightarrow{\text{③}+\text{②}\times p} \left[ \begin{array}{ccc|c} 1 & t & 1 & 3 \\ 0 & t & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1-p & 4-2p \end{array} \right] \\ &\xrightarrow[\text{②}\leftrightarrow\text{③}]{\text{②}+\text{③}\times(-t)} \left[ \begin{array}{ccc|c} 1 & t & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 1-p & 4-2p \\ 0 & 0 & (p-1)t & 1-4t+2pt \end{array} \right]. \end{aligned}$$

(i) 当  $(p-1)t \neq 0$  (即  $p \neq 1, t \neq 0$ ) 时, 有唯一解:

$$x_1 = \frac{2t-1}{(p-1)t}, \quad x_2 = \frac{1}{t}, \quad x_3 = \frac{1-4t+2pt}{(p-1)t}.$$

(ii) 当  $p=1$ , 且  $1-4t+2pt=1-2t=0$  即  $t=\frac{1}{2}$  时, 有无穷多

解,此时

$$[A, b] \Rightarrow \left[ \begin{array}{ccc|c} 1 & \frac{1}{2} & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right] \Rightarrow \left[ \begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right].$$

于是方程组的一般解为:

$$X = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix} + k \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad (k \text{ 为任意常数}),$$

(iii) 当  $p=1$ , 但  $1-4t+2pt=1-2t \neq 0$ , 即  $t \neq \frac{1}{2}$  时, 方程组无解.

(iv) 当  $t=0$  时,  $1-4t+2pt=1 \neq 0$ , 故方程组也无解. 此时, 方程组中第二与第三方程矛盾.

**例 3** 证明: 若  $X_0$  是  $AX=b$  的一个特解,  $X_1, \dots, X_p$  是  $AX=O$  的基础解系, 则  $X_0, X_0+X_1, \dots, X_0+X_p$  线性无关, 且  $AX=b$  的任一个解可表示为

$$X = k_0 X_0 + \sum_{i=1}^p k_i (X_0 + X_i),$$

其中  $k_0 + k_1 + \dots + k_p = 1$ .

**证** 设  $c_0 X_0 + c_1 (X_0 + X_1) + \dots + c_p (X_0 + X_p) = O$ , 即

$$(c_0 + c_1 + \dots + c_p) X_0 + c_1 X_1 + \dots + c_p X_p = O,$$

则必有  $c_0 + c_1 + \dots + c_p = 0$  (否则,  $X_0 = l_1 X_1 + \dots + l_p X_p$  是  $AX=O$  的解, 与题设矛盾), 再由  $X_1, \dots, X_p$  线性无关得  $c_1, \dots, c_p$  必须全为零, 从而  $c_0 = 0$ , 故  $X_0, X_0 + X_1, \dots, X_0 + X_p$  线性无关.

根据定理 3,  $AX=b$  的任一个解  $X$  可表示为

$$X = X_0 + k_1 X_1 + \dots + k_p X_p$$

$$= (1 - k_1 - \dots - k_p) X_0 + k_1 (X_0 + X_1) + \dots + k_p (X_0 + X_p),$$

令  $1 - k_1 - \dots - k_p = k_0$ , 则  $k_0 + k_1 + \dots + k_p = 1$ , 命题第二部分得证.

## 习题 补充题 答案

### 习题

将 1, 2 题中的向量  $\alpha$  表示成  $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$  的线性组合:

$$1. \alpha = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \alpha_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \alpha_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \\ -1 \end{bmatrix},$$

$$\alpha_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}, \alpha_4 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

$$2. \alpha = [0, 0, 0, 1], \alpha_1 = [1, 1, 0, 1], \alpha_2 = [2, 1, 3, 1],$$

$$\alpha_3 = [1, 1, 0, 0], \alpha_4 = [0, 1, -1, -1].$$

判别 3, 4 题中的向量组的线性相关性:

$$3. \alpha_1 = [1, 1, 1]^T, \alpha_2 = [0, 2, 5]^T, \alpha_3 = [1, 3, 6]^T.$$

$$4. \beta_1 = [1, -1, 2, 4]^T, \beta_2 = [0, 3, 1, 2]^T, \beta_3 = [3, 0, 7, 14]^T.$$

5. 论述单个向量  $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)$  线性相关和线性无关的条件.

6. 证明: 如果向量组线性无关, 则向量组的任一部分组都线性无关.

7. 证明: 若  $\alpha_1, \alpha_2$  线性无关, 则  $\alpha_1 + \alpha_2, \alpha_1 - \alpha_2$  也线性无关.

8. 设有两个向量组  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s$  和  $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_t$ , 其中

$$\alpha_1 = \begin{bmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{k1} \end{bmatrix}, \alpha_2 = \begin{bmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ \vdots \\ a_{k2} \end{bmatrix}, \dots, \alpha_s = \begin{bmatrix} a_{1s} \\ a_{2s} \\ \vdots \\ a_{ks} \end{bmatrix}.$$

$\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_s$  是分别在  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s$  的  $k$  个分量后面任意添加  $m$  个分量  $b_{1j}, b_{2j}, \dots, b_{mj} (j=1, 2, \dots, s)$  的  $k+m$  维向量.

证明:

(1) 若  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s$  线性无关, 则  $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_s$  也线性无关;

(2) 若  $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_s$  线性相关, 则  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s$  也线性相关.

并在  $R^2$  和  $R^3$  中各取两个向量(即取  $s=2, k=2, m=1$ )作几何解释.

9. 证明:  $\alpha_1 + \alpha_2, \alpha_2 + \alpha_3, \alpha_3 + \alpha_1$  线性无关的充要条件是  $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$  线性无关.

10. 下列命题(或说法)是否正确? 如正确, 证明之; 如不正确, 举反例:

(1)  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m (m > 2)$  线性无关的充要条件是任意两个向量线性无关;

(2)  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m (m > 2)$  线性相关的充要条件是有  $m-1$  个向量线性相关;

(3) 若  $\alpha_1, \alpha_2$  线性相关,  $\beta_1, \beta_2$  线性相关, 则有不全为 0 的数  $k_1$  和  $k_2$ , 使  $k_1\alpha_1 + k_2\alpha_2 = 0$  且  $k_1\beta_1 + k_2\beta_2 = 0$ , 从而使  $k_1(\alpha_1 + \beta_1) + k_2(\alpha_2 + \beta_2) = 0$ , 故  $\alpha_1 + \beta_1, \alpha_2 + \beta_2$  线性相关;

(4) 若  $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$  线性无关, 则  $\alpha_1 - \alpha_2, \alpha_2 - \alpha_3, \alpha_3 - \alpha_1$  线性无关;

(5) 若  $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$  线性无关, 则  $\alpha_1 + \alpha_2, \alpha_2 + \alpha_3, \alpha_3 + \alpha_4, \alpha_4 + \alpha_1$  线性无关(对  $n$  个向量的情况, 给出一般的结论);

(6) 若  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$  线性相关, 则  $\alpha_1 + \alpha_2, \alpha_2 + \alpha_3, \dots, \alpha_{n-1} + \alpha_n, \alpha_n + \alpha_1$  线性相关.

11. 如果  $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$  线性相关, 但其中任意三个向量都线性无关, 证明必存在一组全不为 0 的数  $k_1, k_2, k_3, k_4$ , 使得

$$k_1\alpha_1 + k_2\alpha_2 + k_3\alpha_3 + k_4\alpha_4 = 0.$$

12. 若  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_r$  线性无关, 证明:  $\beta, \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_r$  线性无关的充要条件是  $\beta$  不能由  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_r$  线性表示.



13. 求下列向量组的秩及其一个极大线性无关组,并将其余向量用极大线性无关组线性表示:

$$(1) \alpha_1 = [6, 4, 1, 9, 2], \quad \alpha_2 = [1, 0, 2, 3, -4],$$

$$\alpha_3 = [1, 4, -9, -6, 22], \quad \alpha_4 = [7, 1, 0, -1, 3];$$

$$(2) \alpha_1 = [1, -1, 2, 4], \quad \alpha_2 = [0, 3, 1, 2], \quad \alpha_3 = [3, 0, 7, 14],$$

$$\alpha_4 = [2, 1, 5, 6], \quad \alpha_5 = [1, -1, 2, 0];$$

$$(3) \alpha_1 = [1, 1, 1], \quad \alpha_2 = [1, 1, 0], \quad \alpha_3 = [1, 0, 0],$$

$$\alpha_4 = [1, 2, -3].$$

14. 设向量组:  $\xi_1 = [1, -1, 2, 4], \xi_2 = [0, 3, 1, 2], \xi_3 = [3, 0, 7, 14], \xi_4 = [1, -1, 2, 0], \xi_5 = [2, 1, 5, 6]$ .

(1) 证明  $\xi_1, \xi_2$  线性无关;

(2) 求向量组包含  $\xi_1, \xi_2$  的极大线性无关组.

\* 15. 设  $A, B$  皆为  $n$  阶矩阵,  $r(A) \leq n, r(B) \leq n$ , 证明:

$$(1) \text{秩} \begin{bmatrix} A & O \\ O & B \end{bmatrix} = r(A) + r(B);$$

$$(2) \text{秩} \begin{bmatrix} A & C \\ O & B \end{bmatrix} \geq r(A) + r(B) \quad (C \text{ 为任意的 } n \text{ 阶矩阵}).$$

\* 16. 证明  $r(AB) \leq \min(r(A), r(B))$ .

17. 设  $A$  是  $m \times n$  矩阵,  $B$  是  $n \times m$  矩阵,  $n < m$ , 证明: 齐次线性方程组  $(AB)X = O$  有非零解.

\* 18. 设  $A$  是  $s \times n$  矩阵,  $B$  是由  $A$  的前  $m$  行构成的  $m \times n$  矩阵. 证明: 若  $A$  的行向量组的秩为  $r$ , 则  $r(B) \geq r + m - s$ .

求下列(19—22题)矩阵的秩,并指出该矩阵的一个最高阶的非零子式:

$$19. \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & -1 & -2 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & -1 \end{bmatrix}.$$

$$20. \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 & 1 & 0 \\ 2 & -2 & 4 & -2 & 0 \\ 3 & 0 & 6 & -1 & 1 \\ 0 & 3 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

$$21. \begin{bmatrix} 3 & 2 & -1 & -3 & -2 \\ 2 & -1 & 3 & 1 & -3 \\ 4 & 5 & -5 & -6 & 1 \end{bmatrix}.$$

$$22. \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \end{bmatrix}.$$

23. 设  $A$  是一个  $m \times n$  矩阵. 证明: 存在非零的  $n \times s$  矩阵  $B$ , 使  $AB=O$  的充要条件是  $r(A) < n$ .

\*24. 设  $A, B$  是同型矩阵, 证明:  $A$  与  $B$  相抵的充分必要条件是  $r(A) = r(B)$ .

\*25. 设  $A$  是  $m \times n$  矩阵 ( $m < n$ ),  $r(A) = m$ , 证明: 存在  $n \times m$  矩阵  $B$ , 使  $AB = I_m$ .

\*26. 证明: 若  $n$  阶方阵  $A$  的秩为  $r$ , 则必有秩为  $n-r$  的  $n$  阶方阵  $B$ , 使  $BA=O$ .

\*27. 证明: 任何秩为  $r$  的矩阵可以表示为  $r$  个秩为 1 的矩阵之和, 但不能表示为少于  $r$  个秩为 1 的矩阵之和.

28. 求下列齐次线性方程组的一个基础解系及一般解:

$$(1) \begin{cases} x_1 - x_2 + 5x_3 - x_4 = 0, \\ x_1 + x_2 - 2x_3 + 3x_4 = 0, \\ 3x_1 - x_2 + 8x_3 + x_4 = 0, \\ x_1 + 3x_2 - 9x_3 + 7x_4 = 0. \end{cases}$$

$$(2) \begin{cases} 3x_1 + x_2 - 8x_3 + 2x_4 + x_5 = 0, \\ 2x_1 - 2x_2 - 3x_3 - 7x_4 + 2x_5 = 0, \\ x_1 + 11x_2 - 12x_3 + 34x_4 - 5x_5 = 0, \\ x_1 - 5x_2 + 2x_3 - 16x_4 + 3x_5 = 0. \end{cases}$$

29. 求下列非齐次线性方程组的一般解:

$$(1) \begin{cases} 2x_1 + 7x_2 + 3x_3 + x_4 = 6, \\ 3x_1 + 5x_2 + 2x_3 + 2x_4 = 4, \\ 9x_1 + 4x_2 + x_3 + 7x_4 = 2. \end{cases}$$

$$(2) \begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 7, \\ 3x_1 + 2x_2 + x_3 + x_4 - 3x_5 = -2, \\ x_2 + 2x_3 + 2x_4 + 6x_5 = 23, \\ 5x_1 + 4x_2 + 3x_3 + 3x_4 - x_5 = 12. \end{cases}$$

30. 讨论  $p, q$  取何值时, 下列线性方程组有解、无解, 有解时求其解:

$$(1) \begin{cases} (p+3)x_1 + x_2 + 2x_3 = p, \\ px_1 + (p-1)x_2 + x_3 = 2p, \\ 3(p+1)x_1 + px_2 + (p+3)x_3 = 3. \end{cases}$$

$$(2) \begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 1, \\ 3x_1 + 2x_2 + x_3 + x_4 - 3x_5 = p, \\ x_2 + 2x_3 + 2x_4 + 6x_5 = 3, \\ 5x_1 + 4x_2 + 3x_3 + 3x_4 - x_5 = q. \end{cases}$$

31. 设  $A$  为  $m \times n$  矩阵, 证明: 若任一个  $n$  维向量都是  $AX = O$  的解, 则  $A = O$ .

32. 设  $A$  是  $m \times s$  矩阵,  $B$  是  $s \times n$  矩阵,  $X$  是  $n$  维列向量. 证明: 若  $(AB)X = O$  与  $BX = O$  是同解方程组, 则  $r(AB) = r(B)$ .

33. 设  $A$  是  $m \times n$  矩阵,  $B$  是  $n \times s$  矩阵. 证明: 若  $AB = O$ , 则  $r(A) + r(B) \leq n$  (提示:  $B$  的列向量是  $AX = O$  的解).

34. 设  $A^*$  是  $n$  阶矩阵  $A$  的伴随矩阵. 证明:

$$(1) r(A^*) = \begin{cases} n & \text{当 } r(A) = n, \\ 1 & \text{当 } r(A) = n-1, \\ 0 & \text{当 } r(A) < n-1. \end{cases}$$

$$(2) |A^*| = |A|^{n-1}.$$

35. 设  $A$  是  $n$  阶可逆矩阵 ( $n > 2$ ), 证明:  $(A^*)^* = |A|^{n-2}A$ .

36. 设  $A$  是  $n$  阶矩阵. 证明: 非齐次线性方程组  $AX=b$  对任何  $b$  都有解的充分必要条件是  $|A| \neq 0$ .

37. 设  $x_1 - x_2 = a_1, x_2 - x_3 = a_2, x_3 - x_4 = a_3, x_4 - x_5 = a_4, x_5 - x_1 = a_5$ . 证明: 这个方程组有解的充分必要条件为  $\sum_{i=1}^5 a_i = 0$ . 在有解的情形, 求出它的一般解.

### 补充题

38. 设  $n$  阶矩阵  $A$  分块为

$$A = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix},$$

其中  $A_{11}$  为  $k$  阶可逆矩阵 ( $k < n$ ), 证明: 存在主对角元为 1 的上三角阵  $U$  和下三角阵  $L$ , 使得

$$LAU = \begin{bmatrix} A_{11} & O \\ O & B \end{bmatrix}.$$

39. 设  $A, B$  皆为  $n$  阶矩阵. 证明:

$$(1) \begin{vmatrix} I & B \\ A & I \end{vmatrix} = |I - AB|.$$

$$(2) |I - AB| = |I - BA|.$$

$$(3) \det(\lambda I - AB) = \det(\lambda I - BA) \quad (\lambda \text{ 为任意常数}).$$

40. 证明: 若  $A$  是  $m \times n$  矩阵,  $r(A) = r$ , 则存在  $m \times r$  矩阵  $B$ ,  $r \times n$  矩阵  $C$ , 且  $r(B) = r(C) = r$ , 使得  $A = BC$  (提示: 利用相抵标准形).

41. 设  $A, B$  皆为  $n$  阶矩阵,  $r(A) + r(B) < n$ , 证明: 存在可逆

矩阵  $R$ , 使  $ARB=0$ . [提示: 利用相抵标准形,  $A \cong \text{diag}(1, \dots, 1, 0, \dots, 0)$ ,  $B \cong \text{diag}(0, \dots, 0, 1, \dots, 1)$ ].

42. 证明:  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_r$  (其中  $\alpha_1 \neq 0$ ) 线性相关的充要条件是存在一个  $\alpha_i$  ( $1 < i \leq r$ ) 使得  $\alpha_i$  可以由  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_{i-1}$  线性表示, 且表示法唯一.

43. 证明: 向量组  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s$  线性无关的充要条件是

$$\alpha_i \neq \sum_{j=1}^{i-1} k_j \alpha_j \quad (i=2, 3, \dots, s).$$

44. 设向量组  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_r$  线性无关, 如在向量组的前面加入一个向量  $\beta$ , 证明: 在向量组  $\beta, \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_r$  中至多有一个向量  $\alpha_i$  ( $1 \leq i \leq r$ ) 可经其前面的  $i$  个向量  $\beta, \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_{i-1}$  线性表示. 并在  $R^3$  中作几何解释.

45. 证明: 在  $n$  维向量空间  $R^n$  中, 若向量  $\alpha$  可经向量组  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_r$  线性表示, 则表示法唯一的充分必要条件是向量组  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_r$  线性无关.

46. 设  $A$  是  $n$  阶矩阵,  $r(A)=1$ . 证明

$$(1) A = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix} [b_1, b_2, \dots, b_n].$$

$$(2) A^2 = kA.$$

$$47. \text{ 设 } A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}, \quad Y = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix},$$

$$b = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix}, \quad X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_m \end{bmatrix}.$$

(1) 证明 若  $AY=b$  有解, 则  $A^T X=0$  的任一组解  $x_1, x_2, \dots, x_m$  必满足方程

$$b_1 x_1 + b_2 x_2 + \dots + b_m x_m = 0.$$

(2) 方程组  $AY=b$  有解的充要条件是方程组

$$\begin{bmatrix} A^T \\ b^T \end{bmatrix} X = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

无解(其中  $O$  是  $n \times 1$  零矩阵).

48. 设  $A$  是一个  $m \times n$  矩阵,  $m < n$ ,  $r(A) = m$ , 齐次线性方程组  $AX=0$  的一个基础解系为

$$b_i = [b_{i1}, b_{i2}, \dots, b_{in}]^T, \quad i = 1, 2, \dots, (n-m).$$

试求齐次线性方程组

$$\sum_{j=1}^n b_{ij} y_j = 0, \quad j = 1, 2, \dots, (n-m)$$

的基础解系所含解向量的个数, 并求出一个基础解系.

49. 设  $m \times n$  矩阵  $A$  的  $m$  个行向量是齐次线性方程组  $CX=0$  的一个基础解系, 又  $B$  是一个  $m$  阶可逆矩阵. 证明:  $BA$  的行向量也是  $CX=0$  的一个基础解系.

50. 证明: 若  $A$  为  $n$  阶矩阵 ( $n > 1$ ), 且  $|A|=0$ , 则  $|A|$  中任意两行(或列)对应元素的代数余子式成比例.

51. 设  $A$  是  $(n-1) \times n$  矩阵,  $|A_j|$  表示  $A$  中划去第  $j$  列所构成的行列式. 证明:

(1)  $[-|A_1|, |A_2|, \dots, (-1)^n |A_n|]^T$  是  $AX=0$  的一个解.

(2) 若  $|A_j|$  ( $j=1, 2, \dots, n$ ) 不全为 0, 则(1)中的解是  $AX=0$  的一个基础解系.

52. 若  $A$  为一个  $n$  阶矩阵, 且  $A^2=A$ , 证明

$$r(A) + r(A-I) = n.$$

53. 若  $A$  为一个  $n$  阶矩阵, 且  $A^2=I$ , 证明

$$r(A+I) + r(A-I) = n.$$

54. 设  $A, B$  皆为  $n$  阶方阵, 证明

$$r(AB) \geq r(A) + r(B) - n.$$

并问:  $A = [a_{ij}]_{n \times n}, B = [b_{ij}]_{n \times m}$ , 上述结论是否成立?

(提示: 利用 3.2 节定理 7、性质 3 及 18 题结论. 或利用 15 题结论.)

55. 设向量组  $\alpha_j = [a_{1j}, a_{2j}, \dots, a_{nj}]^T \quad (j=1, 2, \dots, n)$ .

证明: 如果

$$|a_{ii}| > \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n |a_{ij}|, \quad i=1, 2, \dots, n,$$

则向量组  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$  线性无关.

(提示: 用反证法, 取  $A = [\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n]$ , 设  $AX=O$  的非零解  $X$  的分量  $|x_i| \geq |x_j|, j \neq i$ .)

答案

1.  $\frac{5}{4}\alpha_1 + \frac{1}{4}\alpha_2 - \frac{1}{4}\alpha_3 - \frac{1}{4}\alpha_4$ . 2.  $\alpha_1 - \alpha_3$ . 3. 线性相关.

4. 线性相关. 5.  $\alpha=0$  线性相关,  $\alpha \neq 0$  线性无关.

8. 利用 3.1 节定理 2.

9. 必要性用反证法, 并利用 3.1 节定理 4.

10. (1) 充分性不成立. (2) 必要性不成立. (3) 推理不正确, 结论不成立. (4) 命题不正确,  $\alpha_1 - \alpha_2, \alpha_2 - \alpha_3, \alpha_3 - \alpha_1$  是线性相关的. (5) 命题不正确 ( $n$  为奇数时, 线性无关;  $n$  为偶数时, 线性相关). (6) 命题正确.

11. 用反证法. 12. 必要性和充分性都用反证法.

13. (1) 秩为 3;  $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_4; \alpha_3 = \alpha_1 - 5\alpha_2$ . (2) 秩为 3;  $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_4; \alpha_3 = 3\alpha_1 + \alpha_2; \alpha_5 = \alpha_4 - \alpha_1 - \alpha_2$ . (3) 秩为 3;  $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3; \alpha_4 = 5\alpha_2 - 3\alpha_1 - \alpha_3$ .

14. (2)  $\xi_1, \xi_2, \xi_4$ .

15. (1) 用秩的定义或用初等变换化为标准形. (2) 用秩的定义及第 8 题中命题 (2) 的逆命题不成立.

17. 用 16 题的结论, 证明秩 $(AB) < m$ .

18.  $A$  的前  $m$  个行向量的极大无关组(其中有  $r(B)$  个向量), 与  $A$  的后  $s-m$  个行向量合在一起构成的向量组, 其向量个数  $\geq r$ .

$$19. \begin{vmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 0 & -1 & -3 \\ 0 & 0 & 4 \end{vmatrix}. \quad 20. \begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & -2 & -2 \\ 3 & 0 & -1 \end{vmatrix}.$$

22. 非零子式最高阶数为 4.

25. 利用  $A$  的相抵标准形, 即  $PAQ = [I_m, O]$ ,  $AQ = [P^{-1}, O]$ .

26. 由  $PAQ = \begin{bmatrix} I_r & O \\ O & O \end{bmatrix}$  得  $PA = \begin{bmatrix} C \\ O \end{bmatrix}$ ,  $C$  是  $r \times n$  矩阵.

27. 将相抵标准形化为  $r$  个秩为 1 的矩阵之和, 后一部分的证明, 用反证法及 3.2 节性质 1.

28. (1)  $k_1[-\frac{3}{2}, \frac{7}{2}, 1, 0]^T + k_2[-1, -2, 0, 1]^T$ ; (2)  $k_1[\frac{19}{8}, \frac{7}{8}, 1, 0, 0]^T + k_2[\frac{3}{8}, -\frac{25}{8}, 0, 1, 0]^T + k_3[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 0, 0, 1]^T$ .

29. (1)  $[8, 0, 0, -10]^T + k_1[-9, 1, 0, 11]^T + k_2[-4, 0, 1, 5]^T$ ; (2)  $[-16, 23, 0, 0, 0]^T + k_1[1, -2, 1, 0, 0]^T + k_2[1, -2, 0, 1, 0]^T + k_3[5, -6, 0, 0, 1]^T$ .

30. (1)  $p=0$  或  $p=1$  无解,  $p \neq 0$  且  $p \neq 1$  有唯一解:  $x_1 = \frac{p^3 + p^2 - 15p + 9}{p^2(p-1)}$ ,  $x_2 = \frac{p^3 + 12p - 9}{p^2(p-1)}$ ,  $x_3 = \frac{-4p^3 + 3p^2 + 12p - 9}{p^2(p-1)}$ ; (2)  $p \neq 0$  或  $q \neq 2$  无解,  $p=0$  且  $q=2$  有无穷多解:  $[-2, 3, 0, 0, 0]^T + k_1[1, -2, 1, 0, 0]^T + k_2[1, -2, 0, 1, 0]^T + k_3[5, -6, 0, 0, 1]^T$ .

31.  $\epsilon_i = [0, \dots, 0, 1, 0, \dots, 0]^T (i=1, 2, \dots, n)$  是解, 即  $A\epsilon_i = 0$ , 再利用矩阵分块乘法.

34. 利用  $A^*$  的定义,  $AA^* = |A|I$ , 及 33 题的结论.

36. 必要性用反证法. 设  $|A| = 0$ , 证明存在  $b$ , 使得秩 $[A, b]$



$\neq \text{秩}(A)$ .

37.  $[a_1+a_2+a_3+a_4, a_2+a_3+a_4, a_3+a_4, a_4, 0]^T + k[1, 1, 1, 1, 1]^T$ .

$$38. L = \begin{bmatrix} I_k & O \\ -A_{12}A_{11}^{-1} & I_{n-k} \end{bmatrix}, U = \begin{bmatrix} I_k & -A_{11}^{-1}A_{12} \\ O & I_{n-k} \end{bmatrix}.$$

$$39. \text{利用} \begin{bmatrix} I & O \\ -A & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I & B \\ A & I \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I & B \\ O & I-AB \end{bmatrix},$$
$$\begin{bmatrix} I & -B \\ O & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I & B \\ A & I \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I-BA & O \\ A & I \end{bmatrix}.$$

$$40. \text{利用相抵标准形得 } A = P^{-1} \begin{bmatrix} I_r & O \\ O & O \end{bmatrix} Q^{-1}, \text{并用} \begin{bmatrix} I_r & O \\ O & O \end{bmatrix}_{m \times n}$$
$$= \begin{bmatrix} I_r & O \\ O & O \end{bmatrix}_{m \times n} \begin{bmatrix} I_r & O \\ O & O \end{bmatrix}_{n \times n}.$$

42. 必要性: 使  $k_1\alpha_1 + k_2\alpha_2 + \cdots + k_r\alpha_r = O$  成立的所有不为零的系数中, 必有一个最小的下标  $i$ , 使  $k_i \neq 0$ , 但  $k_j = 0 (j > i)$ ; 再证  $1 < i \leq r$ , 且  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_{i-1}$  线性无关 (这里的证明用反证法).

44. 用反证法, 设有两个向量  $\alpha_i$  与  $\alpha_j$  分别可用其前面的向量线性表示.

45. 必要性用反证法.

46.  $r(A) = 1$  即有  $A$  的每行向量成比例.

47. (1) 利用  $b^T = Y^T A^T$  证明  $b^T X = O$ .

48. 利用非齐次线性方程组有解的充要条件为增广矩阵的秩等于系数矩阵的秩.

49. 记  $B = [b_1, b_2, \dots, b_{n-m}]$ , 根据  $AB = O$  及  $B^T A^T = O$ , 讨论  $B^T Y = O$  的解.

50. 利用 34 题的结论.

52, 53. 利用 3.3 节例 3 的结论及 3.2 节性质 1.

## 4 向量空间与线性变换

向量空间与线性变换是线性代数的核心内容,由于受学时的限制,我们只能介绍它们的一些基本内容.

首先,我们将在上一章给出的  $n$  维实向量空间  $R^n$  的定义及线性相关性概念的基础上,讨论  $R^n$  的基与向量在基下的坐标以及基变换和坐标变换,进而在  $R^n$  中引入向量的内积运算,建立  $n$  维欧氏空间的概念并讨论它的结构. 然后,我们再在  $R^n$  的基础上进一步抽象出一般线性空间(向量空间)的概念,并讨论有限维线性空间的结构. 关于内积空间和一般欧氏空间的基本概念,仅在附录中作简要的介绍.

关于线性变换,我们主要是讨论  $R^n$  的线性变换以及它的矩阵表示.

### 4.1 $R^n$ 的基与向量关于基的坐标

我们知道  $R^n$  中的  $n$  个单位向量  $\varepsilon_i = [0, \dots, 0, 1, 0, \dots, 0]$  ( $i = 1, \dots, n$ ), 是线性无关的; 一个  $n$  阶实矩阵  $A = [a_{ij}]_{n \times n}$ , 如果  $|A| \neq 0$ , 则  $A$  的  $n$  个行向量和  $n$  个列向量也都是线性无关的. 在上一章还讲过,  $R^n$  中任何  $n+1$  个向量都是线性相关的, 因此,  $R^n$  中任一向量  $\alpha$  都可用  $R^n$  中  $n$  个线性无关的向量来表示, 且表示法唯一.  $R^n$  中向量之间的这种关系就是本节将要讨论的“基”与“坐标”的概念.

**定义 1** 设有序向量组  $B = \{\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n\} \subset R^n$ , 如果  $B$  线性无关, 且对于  $\alpha \in R^n$  有

$$\alpha = a_1\beta_1 + a_2\beta_2 + \cdots + a_n\beta_n, \quad (4.1)$$

就称  $B$  是  $R^n$  的一组基(或基底),有序数组  $(a_1, a_2, \cdots, a_n)$  是向量  $\alpha$  关于基  $B$ (或说在基  $B$  下)的坐标,记作

$$\alpha_B = [a_1, a_2, \cdots, a_n] \text{ 或 } \alpha_B = [a_1, a_2, \cdots, a_n]^T,$$

并称之为  $\alpha$  的坐标向量.

显然  $R^n$  的基不是唯一的,而  $\alpha$  关于给定的基的坐标是唯一确定的.以后,我们把  $n$  个单位向量组成的基称为自然基或标准基.

在三维几何向量空间  $R^3$  中,  $i, j, k$  是一组标准基,  $R^3$  中任一个向量  $\alpha$  可以唯一地表示为

$$\alpha = a_1i + a_2j + a_3k,$$

这里有序数组  $(a_1, a_2, a_3)$  称为  $\alpha$  在基  $i, j, k$  下的坐标.如果  $\alpha$  的起点在原点,  $(a_1, a_2, a_3)$  就是  $\alpha$  的终点  $P$  的直角坐标.(以后我们常利用  $R^3$  中向量  $\alpha$  与空间点  $P$  的一一对应关系,对  $R^n$  中的一些问题及其结论在  $R^3$  中作几何解释).为了讨论问题方便,本书对于向量及其坐标常采用列向量的形式  $[a_1, a_2, \cdots, a_n]^T$ , 如此, (4.1) 式可表示为

$$\alpha = [\beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_n] \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix}, \quad (4.2)$$

**例 1** 设  $R^n$  的两组基为:自然基  $B_1$  和  $B_2 = \{\beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_n\}$ , 其中,

$$\beta_1 = [1, -1, 0, \cdots, 0]^T, \beta_2 = [0, 1, -1, 0, \cdots, 0]^T, \cdots, \beta_{n-1} = [0, \cdots, 0, 1, -1]^T, \beta_n = [0, \cdots, 0, 1]^T.$$

求向量  $\alpha = [a_1, a_2, \cdots, a_n]^T$  分别在两组基下的坐标.

**解**  $\alpha$  关于自然基  $B_1 = \{\epsilon_1, \epsilon_2, \cdots, \epsilon_n\}$ , 显然有  $\alpha = a_1\epsilon_1 + a_2\epsilon_2 +$

$\cdots + a_n \varepsilon_n$ , 所以  $\alpha_{B_1} = [a_1, a_2, \cdots, a_n]^T$ . 设  $\alpha$  关于  $B_2$  有

$$\alpha = x_1\beta_1 + x_2\beta_2 + \cdots + x_n\beta_n = [\beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_n] \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}, \quad (1)$$

将以列向量形式表示的  $\alpha, \beta_1, \beta_2, \dots, \beta_{n-1}, \beta_n$  代入①式,得

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ -1 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & -1 & \cdots & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_{n-1} \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_{n-1} \\ a_n \end{bmatrix}. \quad (2)$$

解非齐次线性方程组②, 即得

$$\alpha_{B_2} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_{n-1} \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_1 + a_2 \\ \vdots \\ a_1 + a_2 + \dots + a_{n-1} \\ a_1 + a_2 + \dots + a_{n-1} + a_n \end{bmatrix}.$$

由例 1 可见,  $R^n$  中同一个向量关于不同基的坐标一般是不同的. 因此需要一般地讨论基变换与坐标变换的问题.

为了得到  $R^n$  中同一向量关于两组基所对应的坐标之间的关系, 先证明下面的定理.

**定理 1** 设  $B = \{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n\}$  是  $R^n$  的一组基, 且

$$\begin{cases} \eta_1 = a_{11}\alpha_1 + a_{21}\alpha_2 + \dots + a_{n1}\alpha_n, \\ \eta_2 = a_{12}\alpha_1 + a_{22}\alpha_2 + \dots + a_{n2}\alpha_n, \\ \dots\dots\dots, \\ \eta_s = a_{1s}\alpha_1 + a_{2s}\alpha_2 + \dots + a_{ns}\alpha_n. \end{cases} \quad (4.3)$$

则  $\eta_1, \eta_2, \dots, \eta_n$  线性无关的充要条件是

$$\det A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} \neq 0. \quad (4.4)$$

证 由(3)式得  $\eta_j = \sum_{i=1}^n a_{ij} \alpha_i$ , ( $j=1, 2, \dots, n$ ),  $\eta_1, \eta_2, \dots, \eta_n$  线性无关的充要条件是方程

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^n x_j \eta_j &= \sum_{j=1}^n x_j \left( \sum_{i=1}^n a_{ij} \alpha_i \right) \\ &= \sum_{i=1}^n \left( \sum_{j=1}^n a_{ij} x_j \right) \alpha_i = 0 \end{aligned} \quad (1)$$

只有零解  $x_j = 0$  ( $j=1, 2, \dots, n$ ).

由于  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$  线性无关, 由①式得

$$\sum_{j=1}^n a_{ij} x_j = 0 \quad (i=1, 2, \dots, n) \quad (2)$$

因此, 方程①只有零解(即齐次线性方程组②只有零解)的充要条件是②的系数行列式不等于零, 即(4.4)式成立. ■

设  $B_1 = \{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n\}$  和  $B_2 = \{\eta_1, \eta_2, \dots, \eta_n\}$  是  $R^n$  的两组基(分别称为旧基和新基), 它们的关系如(4.3)式所示, 将(4.3)式表示成矩阵形式

$$[\eta_1, \eta_2, \dots, \eta_n] = [\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n] \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}. \quad (4.5)$$

记(4.5)式右面的矩阵为  $A$ (注意:  $A$  是(4.3)式中  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$  的系数矩阵的转置), 为叙述简便, (4.5)式可写作

$$[\eta_1, \eta_2, \dots, \eta_n] = [\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n] A. \quad (4.6)$$

**定义 2** 设  $R^n$  的两组基  $B_1 = \{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n\}$  和  $B_2 = \{\eta_1, \eta_2,$

$\cdots, \eta_n\}$  满足 (4.5) 式的关系, 则 (4.5) 中矩阵  $A$  称为旧基  $B_1$  到新基  $B_2$  的过渡矩阵.

根据定理 1, 过渡矩阵  $A$  是可逆的,  $A$  中第  $j$  列是新基的基向量  $\eta_j$  在旧基  $\{\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n\}$  下的坐标.

**定理 2** 设向量  $\alpha$  在两组基  $B_1 = \{\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n\}$  和  $B_2 = \{\eta_1, \eta_2, \cdots, \eta_n\}$  下的坐标向量分别为

$$x = [x_1, x_2, \cdots, x_n]^T \text{ 和 } y = [y_1, y_2, \cdots, y_n]^T.$$

基  $B_1$  到基  $B_2$  的过渡矩阵为  $A$ , 则

$$Ay = x \text{ 或 } y = A^{-1}x. \quad (4.7)$$

**证** 由已知条件, 有 (4.6) 式成立, 且

$$\begin{aligned} \alpha &= x_1\alpha_1 + x_2\alpha_2 + \cdots + x_n\alpha_n \\ &= y_1\eta_1 + y_2\eta_2 + \cdots + y_n\eta_n, \end{aligned}$$

故

$$\begin{aligned} \alpha &= [\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n] \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = [\eta_1, \eta_2, \cdots, \eta_n] \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix} \\ &= ([\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n]A) \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix} = [\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n] \left[ A \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix} \right]. \end{aligned}$$

由于  $\alpha$  在基  $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n$  下的坐标是唯一的, 所以

$$Ay = x \text{ 或 } y = A^{-1}x. \quad \blacksquare$$

**例 2** 已知  $R^3$  的一组基  $B = \{\beta_1, \beta_2, \beta_3\}$  为  $\beta_1 = [1, 2, 1]^T$ ,  $\beta_2 = [1, -1, 0]^T$ ,  $\beta_3 = [1, 0, -1]^T$ , 求自然基  $B_1 = \{\epsilon_1, \epsilon_2, \epsilon_3\}$  到  $B_2$  的过渡矩阵  $A$ .

$$\text{解 由 } \begin{cases} \beta_1 = \epsilon_1 + 2\epsilon_2 + \epsilon_3, \\ \beta_2 = \epsilon_1 - \epsilon_2, \\ \beta_3 = \epsilon_1 - \epsilon_3, \end{cases}$$

即

$$[\beta_1, \beta_2, \beta_3] = [\epsilon_1, \epsilon_2, \epsilon_3] \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{bmatrix},$$

得

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{bmatrix}.$$

由例 2 可见, 在  $R^n$  中由自然基  $B_1 = \{\epsilon_1, \epsilon_2, \dots, \epsilon_n\}$  到基  $B_2 = \{\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n\}$  的过渡矩阵  $A$ , 就是将  $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n$  按列排成的矩阵, 即

$$A = \begin{bmatrix} | & | & & | \\ \beta_1 & \beta_2 & \cdots & \beta_n \\ | & | & & | \end{bmatrix}.$$

**例 3** 已知  $R^3$  的两组基为:  $B_1 = \{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3\}$ ,  $B_2 = \{\beta_1, \beta_2, \beta_3\}$ , 其中

$$\alpha_1 = [1, 1, 1]^T, \quad \alpha_2 = [0, 1, 1]^T, \quad \alpha_3 = [0, 0, 1]^T,$$

$$\beta_1 = [1, 0, 1]^T, \quad \beta_2 = [0, 1, -1]^T, \quad \beta_3 = [1, 2, 0]^T.$$

(i) 求基  $B_1$  到基  $B_2$  的过渡矩阵  $A$ ; (ii)  $\alpha$  在基  $B_1$  下的坐标为  $[1, -2, -1]^T$ , 求  $\alpha$  在基  $B_2$  下的坐标.

**解** (i) 设

$$[\beta_1, \beta_2, \beta_3] = [\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3] \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}.$$

将以列向量形式表示的两组基向量代入上式, 得

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix},$$

故过渡矩阵

$$\begin{aligned}
 A &= \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & 0 \end{bmatrix} \\
 &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & -2 \end{bmatrix}.
 \end{aligned}$$

(ii) 根据定理 2 的 (4.7) 式, 得  $\alpha$  在基  $B_2$  下的坐标

$$\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix} = A^{-1} \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -2 & -1 \\ -1 & -3 & -2 \\ 1 & 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \\ 7 \\ -4 \end{bmatrix}.$$

此题的另一解法: 先求出

$$\alpha = \alpha_1 - 2\alpha_2 - \alpha_3 = [1, -1, -2]^T,$$

然后按  $\alpha = y_1\beta_1 + y_2\beta_2 + y_3\beta_3$ , 解出坐标  $[y_1, y_2, y_3]^T$ .

利用定理 2 的结论, 容易得到平面直角坐标系中坐标轴旋转的坐标变换公式.

设平面直角坐标系逆时针旋转  $\theta$  角 (如图 4.1 所示), 在  $oxy$  坐标系中, 取基  $\epsilon_1 = i, \epsilon_2 = j$ ; 在  $ox'y'$  坐标系中取基  $\epsilon'_1 = i', \epsilon'_2 = j'$ . 则

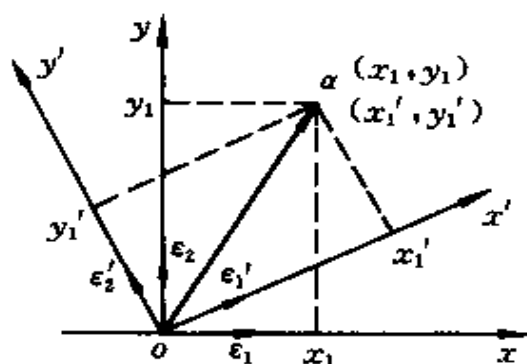


图 4.1



$$\begin{cases} \epsilon_1' = (\cos\theta)\epsilon_1 + (\sin\theta)\epsilon_2, \\ \epsilon_2' = (-\sin\theta)\epsilon_1 + (\cos\theta)\epsilon_2, \end{cases}$$

即

$$[\epsilon_1', \epsilon_2'] = [\epsilon_1, \epsilon_2] \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}.$$

于是向量  $\alpha$  在基  $\epsilon_1, \epsilon_2$  和  $\epsilon_1', \epsilon_2'$  下的坐标  $[x_1, y_1]'$  和  $[x_1', y_2']'$  满足关系式

$$\begin{bmatrix} x_1' \\ y_1' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \end{bmatrix}.$$

## 4.2 $R^n$ 中向量的内积 标准正交基和正交矩阵

### 4.2.1 $n$ 维实向量的内积, 欧氏空间

在前面讨论的  $n$  维实向量空间中, 我们只定义了向量的线性运算, 它不能描述向量的度量性质, 如长度、夹角等. 在三维几何空间中, 向量的内积 (即点积或数量积) 描述了内积与向量的长度及夹角间的关系. 由内积定义

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = |\mathbf{a}| |\mathbf{b}| \cos \langle \mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle,$$

可以得到

$$\cos \langle \mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle = \frac{\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}}{|\mathbf{a}| |\mathbf{b}|},$$

$$|\mathbf{a}| = \sqrt{\mathbf{a} \cdot \mathbf{a}}.$$

若  $\mathbf{a} = a_1\mathbf{i} + a_2\mathbf{j} + a_3\mathbf{k}$ , 简记为  $\mathbf{a} = (a_1, a_2, a_3)$ ,

$\mathbf{b} = b_1\mathbf{i} + b_2\mathbf{j} + b_3\mathbf{k}$  简记为  $\mathbf{b} = (b_1, b_2, b_3)$ .

由内积的运算性质和内积的定义, 可得

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3.$$

现在我们把三维向量的内积推广到  $n$  维实向量, 在  $n$  维实向量空间中定义内积运算, 进而定义向量的长度和夹角, 使  $n$  维实向

量具有度量性.

**定义 1** 设  $\alpha = [a_1, a_2, \dots, a_n]^T$  和  $\beta = [b_1, b_2, \dots, b_n]^T \in R^n$  规定  $\alpha$  与  $\beta$  的内积为:

$$(\alpha, \beta) = a_1 b_1 + a_2 b_2 + \dots + a_n b_n$$

当  $\alpha, \beta$  为列向量时,  $(\alpha, \beta) = \alpha^T \beta = \beta^T \alpha$ .

根据定义, 容易证明内积具有以下运算性质:

- (i)  $(\alpha, \beta) = (\beta, \alpha)$ ;
  - (ii)  $(\alpha + \beta, \gamma) = (\alpha, \gamma) + (\beta, \gamma)$ ;
  - (iii)  $(k\alpha, \beta) = k(\alpha, \beta)$ ;
  - (iv)  $(\alpha, \alpha) \geq 0$ , 等号成立当且仅当  $\alpha = 0$ .
- (4.8)

其中  $\alpha, \beta, \gamma \in R^n, k \in R$ .

由于向量  $\alpha$  与自身的内积是非负数, 于是我们如三维几何空间中那样, 用内积定义  $n$  维向量  $\alpha$  的长度.

**定义 2** 向量  $\alpha$  的长度  $|\alpha| = \sqrt{(\alpha, \alpha)}$ . (4.9)

**定理 1** 向量的内积满足

$$|(\alpha, \beta)| \leq |\alpha| |\beta|. \quad (4.10)$$

(4.10) 式称为 Cauchy-Schwarz 不等式.

**证** 当  $\beta = 0$  时,  $(\alpha, \beta) = 0, |\beta| = 0$ , (4.10) 式显然成立.

当  $\beta \neq 0$  时, 作向量  $\alpha + t\beta (t \in R)$ , 由性质 (iv) 得

$$(\alpha + t\beta, \alpha + t\beta) \geq 0.$$

再由性质 (i), (ii), (iii) 得:

$$(\alpha, \alpha) + 2(\alpha, \beta)t + (\beta, \beta)t^2 \geq 0.$$

上式左端是  $t$  的二次三项式, 且  $t^2$  系数  $(\beta, \beta) > 0$ , 因此便有

$$4(\alpha, \beta)^2 - 4(\alpha, \alpha)(\beta, \beta) \leq 0,$$

即  $(\alpha, \beta)^2 \leq (\alpha, \alpha)(\beta, \beta) = |\alpha|^2 |\beta|^2$ ,

故  $|(\alpha, \beta)| \leq |\alpha| |\beta|$ . ■

读者不难证明, 定理 1 中 (4.10) 式等号成立的充分必要条件为  $\alpha$  与  $\beta$  线性相关.

当  $\alpha = [\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n]^T, \beta = [b_1, b_2, \dots, b_n]^T$  时, 利用定理 1 可得

$$(\sum_{i=1}^n \alpha_i b_i)^2 \leq (\sum_{i=1}^n \alpha_i^2) (\sum_{i=1}^n b_i^2). \quad (4.11)$$

由于内积满足 Cauchy-Schwarz 不等式, 于是我们可以利用内积定义向量之间的夹角.

**定义 3** 向量  $\alpha, \beta$  之间的夹角

$$\langle \alpha, \beta \rangle = \arccos \frac{(\alpha, \beta)}{|\alpha| |\beta|} \quad (4.12)$$

由定义 3 立即可得:

**定理 2** 非零向量  $\alpha, \beta$  正交(或垂直)的充分必要条件是  $(\alpha, \beta) = 0$ .

由于零向量与任何向量的内积为 0, 因此, 我们也说零向量与任何向量正交.

在三维几何空间中, 向量  $\alpha, \beta, \alpha + \beta$  构成三角形, 三个向量的长度满足三角形不等式

$$|\alpha + \beta| \leq |\alpha| + |\beta|. \quad (4.13)$$

当  $\alpha \perp \beta$  时, 满足勾股定理

$$|\alpha + \beta|^2 = |\alpha|^2 + |\beta|^2. \quad (4.14)$$

在定义了内积运算的  $n$  维向量空间中, 三角形不等式和勾股定理仍然成立. 下面给出它们的证明:

$$|\alpha + \beta|^2 = (\alpha + \beta, \alpha + \beta) = (\alpha, \alpha) + 2(\alpha, \beta) + (\beta, \beta) \quad ①$$

$$\leq |\alpha|^2 + 2|\alpha| |\beta| + |\beta|^2 \quad ②$$

$$= (|\alpha| + |\beta|)^2,$$

故  $|\alpha + \beta| \leq |\alpha| + |\beta|$ .

上面①式到②式是利用了 Cauchy-Schwarz 不等式.

当  $\alpha \perp \beta$  时, ①式中  $(\alpha, \beta) = 0$ , 于是就有

$$|\alpha + \beta|^2 = |\alpha|^2 + |\beta|^2.$$

**定义 4** 定义了内积运算的  $n$  维实向量空间称为  $n$  维欧氏空

间,仍记作  $R^n$ .

#### 4.2.2 标准正交基

在  $n$  维欧氏空间  $R^n$  中,长度为 1 的单位向量组:

$$\varepsilon_1 = [1, 0, 0, \dots, 0]^T, \varepsilon_2 = [0, 1, 0, \dots, 0]^T, \dots, \varepsilon_n = [0, 0, 0, \dots, 1]^T.$$

显然是两两正交的线性无关的向量组,我们称它为  $R^n$  的一组标准正交基. 然而,  $n$  维欧氏空间的标准正交基不是唯一的,为了说清楚这个问题,我们先证明下面的定理,给出标准正交基的一般定义,然后介绍由  $R^n$  中  $n$  个线性无关的向量构造一组标准正交基的施密特正交化方法.

**定理 3**  $R^n$  中两两正交且不含零向量的向量组(称为非零正交向量组)  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s$  是线性无关的.

证 设  $k_1\alpha_1 + k_2\alpha_2 + \dots + k_s\alpha_s = 0$ ,

则  $(\alpha_i, \sum_{j=1}^s k_j\alpha_j) = k_i(\alpha_i, \alpha_i) = 0, i = 1, 2, \dots, s$ .

由于  $(\alpha_i, \alpha_i) > 0$ , 故  $k_i = 0, i = 1, 2, \dots, s$ . 因此,  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s$  线性无关. ■

**定义 5** 设  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n \in R^n$ , 若

$$(\alpha_i, \alpha_j) = \begin{cases} 1, & i = j, \\ 0, & i \neq j, \end{cases} \quad i, j = 1, 2, \dots, n \quad (4.15)$$

则称  $\{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n\}$  是  $R^n$  的一组标准正交基.

**例 1** 设  $B = \{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n\}$  是  $R^n$  的一组标准正交基, 求  $R^n$  中向量  $\beta$  在基  $B$  下的坐标.

解 设  $\beta = x_1\alpha_1 + x_2\alpha_2 + \dots + x_n\alpha_n$ ,

将上式两边对  $\alpha_j (j = 1, 2, \dots, n)$  分别求内积, 得

$$\begin{aligned} (\beta, \alpha_j) &= (x_1\alpha_1 + x_2\alpha_2 + \dots + x_n\alpha_n, \alpha_j) \\ &= \sum_{i=1}^n x_i(\alpha_i, \alpha_j) = x_j, \end{aligned}$$

故  $\beta$  在标准正交基  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$  下的坐标向量的第  $j$  个分量为

$$x_j = (\beta, \alpha_j), j = 1, 2, \dots, n.$$

在  $R^3$  中取  $i, j, k$  为标准正交基, 例 1 中的  $x_1, x_2, x_3$  就是  $\alpha$  在  $i, j, k$  上的投影.

#### 4.2.3 施密特(Schmidt)正交化方法

施密特正交化方法是将在  $R^n$  中一组线性无关的向量  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ , 作一种特定的线性运算, 构造出一组标准正交向量组的方法.

我们先从  $R^3$  的一组基  $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$  构造出一组标准正交基, 以揭示施密特正交化方法的思路 and 过程.

令  $\beta_1 = \alpha_1$ , 将  $\alpha_2$  在  $\beta_1$  上的投影向量  $(\alpha_2)_{\beta_1} = k_{12} \beta_1$  (其中  $k_{12} = \frac{(\alpha_2, \beta_1)}{(\beta_1, \beta_1)}$ ) 记作  $\gamma_{12}$ , 再取

$$\beta_2 = \alpha_2 - \gamma_{12} = \alpha_2 - k_{12} \beta_1,$$

则  $\beta_2 \perp \beta_1$  (如图 4.2 所示). 由于  $\alpha_3$  与  $\alpha_1, \alpha_2$  不共面, 所以  $\alpha_3$  也与  $\beta_1, \beta_2$  不共面, 如果记  $\alpha_3$  在  $\beta_1, \beta_2$  平面上的投影向量为  $\gamma_3$ , 即

$$\gamma_3 = (\alpha_3)_{\beta_1} + (\alpha_3)_{\beta_2} = \gamma_{13} + \gamma_{23} = k_{13} \beta_1 + k_{23} \beta_2.$$

并取

$$\beta_3 = \alpha_3 - \gamma_3 = \alpha_3 - k_{13} \beta_1 - k_{23} \beta_2,$$

则  $\beta_3 \perp \beta_1$  且  $\beta_3 \perp \beta_2$  (如图 4.3 所示).

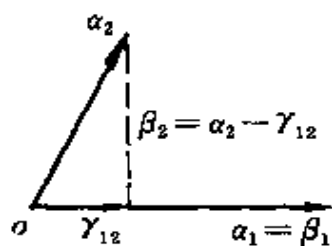


图 4.2

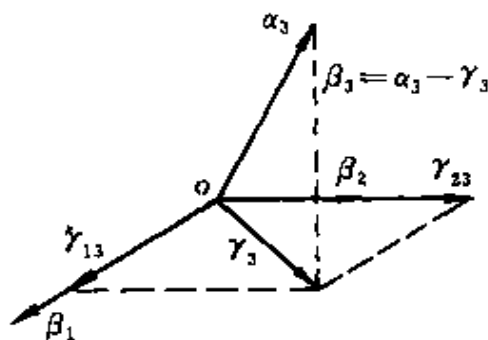


图 4.3

如此求得的  $\beta_1, \beta_2, \beta_3$  是两两正交的非零向量组. 再将  $\beta_1, \beta_2, \beta_3$  单位化, 即取

$$\eta_j = \frac{1}{|\beta_j|} \beta_j, \quad j=1,2,3.$$

则  $\eta_1, \eta_2, \eta_3$  就是  $R^3$  的一组标准正交基.

从上述正交化过程所获得的启示,由  $R^n$  中线性无关的向量组  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m$  也可类似地构造出一组标准正交的向量组  $\eta_1, \eta_2, \dots, \eta_m$ , 其步骤如下: 取

$$\begin{aligned}\beta_1 &= \alpha_1, \\ \beta_2 &= \alpha_2 + k_{12}\beta_1,\end{aligned}$$

由于  $\beta_1, \alpha_2$  线性无关, 所以  $\beta_2 \neq 0$ , 为使  $\beta_1, \beta_2$  正交, 即

$$\begin{aligned}(\beta_2, \beta_1) &= (\alpha_2 + k_{12}\beta_1, \beta_1) \\ &= (\alpha_2, \beta_1) + k_{12}(\beta_1, \beta_1) = 0,\end{aligned}$$

便得

$$k_{12} = -\frac{(\alpha_2, \beta_1)}{(\beta_1, \beta_1)}.$$

再取

$$\beta_3 = \alpha_3 + k_{23}\beta_2 + k_{13}\beta_1,$$

使  $(\beta_3, \beta_1) = (\beta_3, \beta_2) = 0$ , 又得

$$k_{13} = -\frac{(\alpha_3, \beta_1)}{(\beta_1, \beta_1)}, \quad k_{23} = -\frac{(\alpha_3, \beta_2)}{(\beta_2, \beta_2)}.$$

继续上述步骤, 假定已求出两两正交的非零向量  $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_{j-1}$ , 再取

$$\beta_j = \alpha_j + k_{j-1,j}\beta_{j-1} + \dots + k_{2,j}\beta_2 + k_{1,j}\beta_1,$$

为使  $\beta_j$  与  $\beta_i$  ( $i=1, 2, \dots, j-1$ ) 正交, 即

$$(\beta_j, \beta_i) = (\alpha_j, \beta_i) + k_{i,j}(\beta_i, \beta_i) = 0,$$

即得

$$k_{i,j} = -\frac{(\alpha_j, \beta_i)}{(\beta_i, \beta_i)}, \quad i=1, 2, \dots, j-1.$$

故

$$\beta_j = \alpha_j - \frac{(\alpha_j, \beta_1)}{(\beta_1, \beta_1)}\beta_1 - \frac{(\alpha_j, \beta_2)}{(\beta_2, \beta_2)}\beta_2 - \cdots - \frac{(\alpha_j, \beta_{j-1})}{(\beta_{j-1}, \beta_{j-1})}\beta_{j-1} \quad (4.16)$$

因此, 令  $\beta_1 = \alpha_1$ , 并在 (4.16) 式中取  $j = 2, 3, \dots, m$ , 就得到两两正交的非零向量组  $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_m$  (它们都是非零向量的证明留给读者去完成). 再将它们单位化为:

$$\eta_1, \eta_2, \dots, \eta_m,$$

其中  $\eta_j = \frac{1}{|\beta_j|}\beta_j, j = 1, 2, \dots, m$ , 这就由线性无关的  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m$  构造出了标准正交向量组  $\eta_1, \eta_2, \dots, \eta_m$ . 这个正交化过程称为施密特正交化方法.

如果  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$  是  $R^n$  的一组基, 按施密特正交化方法, 必可构造出  $R^n$  的一组标准正交基  $\eta_1, \eta_2, \dots, \eta_n$ . 由此可见,  $R^n$  的标准正交基不唯一.

**例 2** 已知  $B = \{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3\}$  是  $R^3$  的一组基, 其中

$$\alpha_1 = [1, -1, 0], \alpha_2 = [1, 0, 1], \alpha_3 = [1, -1, 1].$$

试用 Schmidt 正交化方法, 由  $B$  构造  $R^3$  的一组标准正交基.

**解** 取  $\beta_1 = \alpha_1 = [1, -1, 0]$ ,

$$\begin{aligned} \beta_2 &= \alpha_2 - \frac{(\alpha_2, \beta_1)}{(\beta_1, \beta_1)}\beta_1 \\ &= [1, 0, 1] - \frac{1}{2}[1, -1, 0] = \left[\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 1\right], \\ \beta_3 &= \alpha_3 - \frac{(\alpha_3, \beta_1)}{(\beta_1, \beta_1)}\beta_1 - \frac{(\alpha_3, \beta_2)}{(\beta_2, \beta_2)}\beta_2 \\ &= [1, -1, 1] - \frac{2}{3}\left[\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 1\right] - \frac{2}{2}[1, -1, 0] \\ &= \left[-\frac{1}{3}, -\frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right]. \end{aligned}$$

再将  $\beta_1, \beta_2, \beta_3$  单位化, 得  $R^3$  的标准正交基:

$$\eta_1 = \frac{1}{|\beta_1|}\beta_1 = \left[\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{-1}{\sqrt{2}}, 0\right],$$

$$\eta_2 = \frac{1}{|\beta_2|} \beta_2 = \left[ \frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{2}{\sqrt{6}} \right],$$

$$\eta_3 = \frac{1}{|\beta_3|} \beta_3 = \left[ -\frac{1}{\sqrt{3}}, -\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}} \right]. \quad \blacksquare$$

#### 4.2.4 正交矩阵及其性质

正交矩阵是一种重要的实方阵,它的行、列向量组皆是标准正交向量组.下面先给出正交矩阵的定义,然后讨论它的性质.

**定义 6** 设  $A \in R^{n \times n}$ , 如果  $A^T A = I$ , 就称  $A$  为正交矩阵.

**定理 4**  $A$  为  $n$  阶正交矩阵的充分必要条件是  $A$  的列向量组为  $R^n$  的一组标准正交基.

证 设

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}, \text{按列分块为 } [a_1, a_2, \cdots, a_n],$$

于是

$$A^T A = \begin{bmatrix} a_1^T \\ a_2^T \\ \vdots \\ a_n^T \end{bmatrix} [a_1, a_2, \cdots, a_n] = \begin{bmatrix} a_1^T a_1 & a_1^T a_2 & \cdots & a_1^T a_n \\ a_2^T a_1 & a_2^T a_2 & \cdots & a_2^T a_n \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_n^T a_1 & a_n^T a_2 & \cdots & a_n^T a_n \end{bmatrix}.$$

因此,  $A^T A = I$  的充分必要条件是:

$$a_i^T a_i = (a_i, a_i) = 1, \quad i = 1, 2, \cdots, n;$$

且

$$a_i^T a_j = (a_i, a_j) = 0, \quad j \neq i, \quad i, j = 1, 2, \cdots, n.$$

即  $A$  的列向量组  $\{a_1, a_2, \cdots, a_n\}$  为  $R^n$  的一组标准正交基.  $\blacksquare$

**定理 5** 设  $A, B$  皆是  $n$  阶正交矩阵, 则:

(i)  $\det A = 1$  或  $-1$ ; (ii)  $A^{-1} = A^T$ ; (iii)  $A^T$  (即  $A^{-1}$ ) 也是正交矩阵; (iv)  $AB$  也是正交矩阵.



证 (i), (ii) 的证明留给读者练习.

(iii) 由于  $(A^T)^T A^T = A A^T = A A^{-1} = I$ , 所以  $A^T$  (即  $A^{-1}$ ) 也是正交矩阵, 从而  $A$  的行向量组也是  $R^n$  的一组标准正交基.

(iv) 由  $(AB)^T (AB) = B^T (A^T A) B = B^T B = I$ , 即得  $AB$  也是正交矩阵.

**定理 6** 若列向量  $X, Y \in R^n$  在  $n$  阶正交矩阵  $A$  作用下变换为  $AX, AY \in R^n$ , 则向量的内积与长度及向量间的夹角都保持不变, 即

$$\begin{aligned}(AX, AY) &= (X, Y), |AX| = |X|, \\ \langle AX, AY \rangle &= \langle X, Y \rangle.\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\text{证 } (AX, AY) &= (AX)^T (AY) = X^T (A^T A) Y \\ &= X^T Y = (X, Y).\end{aligned}$$

当  $Y = X$  时, 有  $(AX, AX) = (X, X)$ , 即  $|AX| = |X|$ , 因此,

$$\cos \langle AX, AY \rangle = \frac{(AX, AY)}{|AX||AY|} = \frac{(X, Y)}{|X||Y|} = \cos \langle X, Y \rangle,$$

所以向量  $AX$  与  $AY$  的夹角等于  $X$  与  $Y$  的夹角. ■

欧氏空间中向量  $X$  在正交矩阵作用下变换为  $AX$ , 通常称之为**欧氏空间的正交变换**. 它在第 6 章中研究二次型的标准形时起着重要作用.

### \* 4.3 线性空间的定义及简单性质

线性空间是我们碰到的第一个抽象的代数结构, 它是三维几何向量空间和  $n$  维向量空间进一步推广而抽象出来的一个概念.

在解析几何中讨论的三维几何向量, 它的加法和数与向量的乘法运算可以描述一些几何和力学问题的有关属性. 为了研究一般线性方程组的解的理论, 我们把三维向量推广为  $n$  维向量, 定义了  $n$  维向量的加法和数量乘法运算, 讨论了  $n$  维向量空间中的向

量关于线性运算的线性相关性,完满地阐明了线性方程组的解的理论.

在全体  $n$  维实向量作成的集合中,定义了向量的加法运算和实数与向量的数乘运算,就称为实数域上的  $n$  维向量空间(记作  $R^n$ ), $R^n$  对两种运算封闭且满足八条规则(见本节定义).

在数学研究的对象中,有很多类型的集合,也可在其中定义加法运算及由给定数域中的数与集合中的元素之间定义数乘运算,使集合对两种运算封闭并满足相同的八条规则.因此,我们撇开集合的具体对象和两种运算的具体含义,把集合对两种运算的封闭性及运算满足的规则抽象出来,就形成了抽象的线性空间的概念,这种抽象将使得我们进一步研究的线性空间的理论可以在相当广泛的领域内得到应用.

**定义** 数域  $F$  上的线性空间  $V$  是一个非空集合,它带有两个运算——加法(记作  $\alpha+\beta$ )和数量乘法(简称数乘,是  $F$  中的数  $\lambda$  与  $V$  中元素  $\alpha$  相乘,记作  $\lambda\alpha$ ),且  $V$  对两种运算封闭(即运算结果仍属于  $V$ )并满足以下八条运算规则:

- (1)  $\alpha+\beta=\beta+\alpha$ ; (交换律)
- (2)  $(\alpha+\beta)+\gamma=\alpha+(\beta+\gamma)$ ; (结合律)
- (3) 存在  $\theta\in V$ ,使  $\alpha+\theta=\alpha$ ,其中  $\theta$  称为  $V$  的零元素;
- (4) 存在  $-\alpha\in V$ ,使  $\alpha+(-\alpha)=\theta$ ,其中  $-\alpha$  称为  $\alpha$  的负元素;
- (5)  $1\alpha=\alpha$ ;
- (6)  $k(l\alpha)=(kl)\alpha$ ; (结合律)
- (7)  $(k+l)\alpha=k\alpha+l\alpha$ ; (分配律)
- (8)  $k(\alpha+\beta)=k\alpha+k\beta$ . (分配律)

其中  $\alpha, \beta, \gamma$  是  $V$  中任意元素,  $k, l$  是  $F$  中任意数.

$F$  为实(复)数域时,称为实(复)线性空间,简称实(复)空间.

线性空间  $V$  中元素也常称为向量,线性空间中的加法和数乘运算称为线性运算.

显然,三维几何向量空间和  $R^n$  都是线性空间的具体模型,下面再列举一些线性空间的例子.

**例 1** 数域  $F$  上的全体多项式  $F[x]$ ,对通常的多项式加法和数乘多项式的运算构成数域  $F$  上的线性空间, $F[x]$  的零元素是系数全为零的多项式(称为零多项式),任一个元素  $f(x)$  的负元素是  $(-1)f(x)$ . 如果只考虑次数小于  $n$  的多项式,那么它们连同零多项式一起也构成数域  $F$  上的线性空间,记作  $F[x]_n$ .

**例 2** 全体  $m \times n$  实矩阵,对矩阵的加法和数乘运算构成实数域上的线性空间,记作  $R^{m \times n}$ , $R^{m \times n}$  的零元素是  $m \times n$  零矩阵,任一元素  $A$  的负元素是  $(-1)A$ .

**例 3** 区间  $[a, b]$  上的全体实连续函数,对通常的函数加法和数与函数的乘法运算构成实数域上的线性空间,记作  $C[a, b]$ . 在  $(a, b)$  上全体  $k$  阶导数连续的实函数  $C^k(a, b)$  对同样的加法和数乘运算也构成实线性空间.

对于给定的非空集合  $V$  和数域  $F$ ,如果定义的加法和数乘运算不封闭(即运算的结果不属于  $V$ ),或者运算不能完全满足 8 条规则,那末  $V$  对定义的运算就不能构成数域  $F$  上的线性空间. 例如,全体  $n$  阶实矩阵对矩阵的加法和数乘运算不能构成复数域上的线性空间,全体非零的三维实向量对向量的加法和数乘运算也不构成实的线性空间.

由线性空间的定义可以得到线性空间的下列简单性质.

(i) 线性空间的零元素是唯一的.

假设  $\theta_1, \theta_2$  是线性空间的两个零元素,则

$$\theta_1 = \theta_1 + \theta_2 = \theta_2 + \theta_1 = \theta_2.$$

(ii) 线性空间中任一元素  $\alpha$  的负元素是唯一的.

假设  $\beta_1, \beta_2$  是  $\alpha$  的两个负元素,即

$$\alpha + \beta_1 = \alpha + \beta_2 = \theta.$$

于是

$$\begin{aligned}\beta_1 &= \beta_1 + \theta = \beta_1 + (\alpha + \beta_2) \\ &= (\beta_1 + \alpha) + \beta_2 = \theta + \beta_2 = \beta_2.\end{aligned}$$

利用负元素, 定义减法如下:

$$\beta - \alpha = \beta + (-\alpha).$$

(iii) 若  $\alpha, \beta \in V; k, l \in F$ , 则有

$$\begin{aligned}k(\alpha - \beta) &= k\alpha - k\beta, \\ (k - l)\alpha &= k\alpha - l\alpha.\end{aligned}$$

这是因为

$$\begin{aligned}k(\alpha - \beta) + k\beta &= k[(\alpha - \beta) + \beta] = k[\alpha + ((-\beta) + \beta)] \\ &= k[\alpha + \theta] = k\alpha, \\ (k - l)\alpha + l\alpha &= [(k - l) + l]\alpha = k\alpha.\end{aligned}$$

在上述两式的两端, 分别加  $-k\beta$  和  $-l\alpha$ , 即得所要的结果.

由性质(iii), 令  $\alpha = \beta, \alpha = \theta, k = l, k = 0$ , 分别可得

(iv)  $k\theta = \theta, k(-\beta) = -(k\beta), 0\alpha = \theta, (-l)\alpha = -(l\alpha)$ , 特别,  $(-1)\alpha = -\alpha$ . 以后,  $-(l\alpha)$  简记作  $-l\alpha$ .

(v) 设  $\alpha \in V, k \in F$ , 若  $k\alpha = \theta$ , 则  $k = 0$  或  $\alpha = \theta$ .

假设  $k \neq 0$ , 则  $\alpha = 1\alpha = \frac{1}{k}(k\alpha) = \frac{1}{k}\theta = \theta$ .

由于线性空间具有上述简单性质, 对于线性空间中元素作线性运算所得的方程, 如

$$k\beta + k_1\alpha_1 + \cdots + k_r\alpha_r = \theta \quad (k \neq 0),$$

就容易解得

$$\beta = -\frac{k_1}{k}\alpha_1 - \cdots - \frac{k_r}{k}\alpha_r.$$

## \* 4.4 线性子空间

对于数域  $F$  上的线性空间  $V$  (简记作  $V(F)$ ), 它的子集合  $W$  关于  $V(F)$  中的两种运算可能是封闭的, 也可能是不封闭的. 例

如  $R^3$  的下列子集合:

$$W_1 = \{[x_1, x_2, x_3] | x_1 - x_2 + 5x_3 = 0\},$$

$$W_2 = \{[x_1, x_2, x_3] | x_1 - x_2 + 5x_3 = 1\}.$$

它们分别是由起点在原点, 终点在过原点的平面  $x_1 - x_2 + 5x_3 = 0$  上和终点在不过原点的平面  $x_1 - x_2 + 5x_3 = 1$  上的全体向量所组成的  $R^3$  的两个子集合. 以后, 我们常简称:  $W_1$  是过原点的平面  $x_1 - x_2 + 5x_3 = 0$  上的全体向量;  $W_2$  是不过原点的平面  $x_1 - x_2 + 5x_3 = 1$  上的全体向量. 容易验证,  $W_1$  关于向量的加法和数乘运算是封闭的, 而  $W_2$  关于这两种运算是不封闭的. 事实上, 如果:

$$\alpha = [a_1, a_2, a_3], \beta = [b_1, b_2, b_3] \in W_2, \lambda \in F (\lambda \neq 1),$$

则

$$\alpha + \beta = [a_1 + b_1, a_2 + b_2, a_3 + b_3] \notin W_2,$$

$$\lambda\alpha = [\lambda a_1, \lambda a_2, \lambda a_3] \notin W_2.$$

这是因为:

$$\begin{aligned} & (a_1 + b_1) - (a_2 + b_2) + 5(a_3 + b_3) \\ &= (a_1 - a_2 + 5a_3) + (b_1 - b_2 + 5b_3) = 1 + 1 \neq 1. \\ & \lambda a_1 - \lambda a_2 + 5(\lambda a_3) = \lambda(a_1 - a_2 + 5a_3) = \lambda \neq 1. \end{aligned}$$

由于  $W_1$  关于  $R^3$  的线性运算是封闭的, 所以  $W_1$  关于  $R^3$  的线性运算也构成一个线性空间(下面将给出一般的证明), 并称之为  $R^3$  的子空间. 而  $W_2$  关于  $R^3$  的线性运算是不封闭的, 自然它对  $R^3$  的线性运算不能构成一个线性空间, 也就不能成为  $R^3$  的一个子空间. 下面给出线性空间的子空间的一般定义.

**定义 1** 设  $V(F)$  是一个线性空间,  $W$  是  $V$  的一个非空子集合, 如果  $W$  对  $V(F)$  中定义的线性运算也构成数域  $F$  上的线性空间, 就称  $W$  为  $V(F)$  的一个**线性子空间**(或简称**子空间**).

**定理 1** 线性空间  $V(F)$  的非空子集合  $W$  为  $V$  的子空间的充分必要条件是  $W$  对于  $V$  的两种运算封闭.

**证** 必要性是显然的. 下面证充分性. 此时只需验证  $W$  中

的向量满足线性空间定义中的八条规则. 由于  $W$  是  $V$  的非空子集合, 所以规则(1), (2), (5), (6), (7), (8)显然成立. 因此, 只需证明  $\theta \in W$ ;  $W$  中每个向量  $\alpha$  的负向量  $(-\alpha)$  也在  $W$  中. 由于  $W$  对数乘运算封闭, 即  $\forall \lambda \in F, \forall \alpha \in W$ , 均有  $\lambda\alpha \in W$ . 取  $\lambda=0, -1$ , 则有  $0\alpha=\theta \in W, (-1)\alpha=-\alpha \in W$ . ■

**例 1** 在线性空间  $V$  中, 由单个的零向量组成的子集合  $\{\theta\}$  是  $V$  的一个子空间, 叫做**零子空间**;  $V$  本身也是  $V$  的一个子空间. 这两个子空间也叫做  $V$  的**平凡子空间**, 而  $V$  的其它子空间叫做**非平凡子空间**.

**例 2** 设  $A \in F^{m \times n}$ , 则齐次线性方程组  $AX=O$  的解集合

$$S = \{X | AX=O\}$$

是  $F^n$  的一个子空间, 叫做齐次线性方程组的**解空间**(也称矩阵  $A$  的**零空间**, 记作  $N(A)$ ). 但是非齐次线性方程组  $AX=b$  的解集合不是  $F^n$  的子空间.

**例 3** 全体  $n$  阶实数量阵、实对角阵、实对称阵、实上(下)三角阵分别组成的集合, 都是  $R^{n \times n}$  的子空间.

**例 4** 设  $R^3$  的子集合

$$V_1 = \{(x_1, 0, 0) | x_1 \in R\},$$

$$V_2 = \{(1, 0, x_3) | x_3 \in R\},$$

则  $V_1$  是  $R^3$  的子空间,  $V_2$  不是  $R^3$  的子空间, 它们的几何意义是:  $V_1$  是  $x$  轴上的全体向量;  $V_2$  是过点  $(1, 0, 0)$  与  $z$  轴平行的直线上的全体向量. 在三维几何向量空间中, 凡是过原点的平面或直线上的全体向量组成的子集合都是  $R^3$  的子空间, 而不过原点的平面或直线上的全体向量组成的子集合都不是  $R^3$  的子空间.

**定理 2** 设  $V$  是数域  $F$  上的线性空间,  $S$  是  $V$  的一个非空子集合, 则  $S$  中一切向量组的所有线性组合组成的集合

$$W = \{k_1\alpha_1 + \cdots + k_m\alpha_m | \alpha_i \in S, k_i \in F, i=1, \cdots, m\}$$

是  $V$  中包含  $S$  的最小的子空间.

证  $W$  显然包含  $S$ , 设  $\alpha, \beta \in W$ , 则存在  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m, \beta_1, \dots, \beta_n \in S$  及  $k_1, k_2, \dots, k_m, l_1, \dots, l_n \in F$ , 使得

$$\begin{aligned}\alpha &= k_1\alpha_1 + k_2\alpha_2 + \dots + k_m\alpha_m, \\ \beta &= l_1\beta_1 + \dots + l_n\beta_n.\end{aligned}$$

于是  $\alpha + \beta = (k_1\alpha_1 + \dots + k_m\alpha_m) + (l_1\beta_1 + \dots + l_n\beta_n) \in W$ .

又  $\forall k \in F$ , 也有

$$k\alpha = k(k_1\alpha_1 + \dots + k_m\alpha_m) = kk_1\alpha_1 + \dots + kk_m\alpha_m \in W.$$

所以  $W$  是  $V$  的一个子空间.

再设  $W^*$  是  $V$  中包含  $S$  的任一个子空间. 则

$$\forall \alpha = k_1\alpha_1 + \dots + k_m\alpha_m \in W.$$

由於  $\alpha_1, \dots, \alpha_m \in S \subseteq W^*$ , 所以必有  $\alpha \in W^*$ , 从而  $W \subseteq W^*$ , 因此  $W$  是  $V$  中包含  $S$  的最小子空间. ■

定理 2 中的  $W$  称为由  $V$  的非空子集  $S$  生成的  $V$  的子空间, 或者说  $S$  生成  $W$ , 当  $S$  为有限子集  $\{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m\}$  时, 记  $W = L(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m)$ , 并称  $W$  是由向量组  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m$  生成的子空间.

例如, 齐次线性方程组  $AX=O$  的解空间是由它的基础解系生成的子空间;  $R^3$  中任一个过原点的平面上的全体向量所构成的子空间, 是由该平面上任意两个线性无关的向量生成的子空间.

**定理 3** 设  $W_1, W_2$  是数域  $F$  上的线性空间  $V$  的两个子空间, 且  $W_1 = L(\alpha_1, \dots, \alpha_s), W_2 = L(\beta_1, \dots, \beta_t)$ , 则  $W_1 = W_2$  的充要条件是两个向量组  $\alpha_1, \dots, \alpha_s$  与  $\beta_1, \dots, \beta_t$  可以互相线性表示 (即两个向量组中的每个向量都可由另一个向量组线性表示).

证 必要性是显然的, 下面证充分性.

设  $\alpha = k_1\alpha_1 + \dots + k_s\alpha_s \in W_1$ , 由於  $\alpha_i (i=1, \dots, s)$  可由向量组  $\beta_1, \dots, \beta_t$  线性表出, 所以  $\alpha$  也可由  $\beta_1, \dots, \beta_t$  线性表示, 即存在  $l_1, \dots, l_t \in F$ , 使

$$\alpha = l_1\beta_1 + \dots + l_t\beta_t \in W_2,$$

因此,  $W_1 \subseteq W_2$ .

同理可证,  $W_2 \subseteq W_1$ , 从而有  $W_1 = W_2$ . ■

**定义 2** 设  $W_1, W_2$  是线性空间  $V$  的两个子空间, 则  $V$  的子集合

$$W_1 \cap W_2 = \{\alpha \mid \alpha \in W_1 \text{ 且 } \alpha \in W_2\},$$

$$W_1 + W_2 = \{\alpha_1 + \alpha_2 \mid \alpha_1 \in W_1, \alpha_2 \in W_2\},$$

分别称为两个子空间的交与和. 如果  $W_1 \cap W_2 = \{\theta\}$ , 就称  $W_1 + W_2$  为直和, 记作  $W_1 \oplus W_2$ .

需要注意的是, 子空间  $W_1$  与  $W_2$  的和  $W_1 + W_2$  是由  $W_1$  中的任意向量与  $W_2$  中的任意向量的和组成的集合, 这与两个集合的并的概念是不一致的.

**定理 4** 线性空间  $V(F)$  的两个子空间  $W_1, W_2$  的交与和仍是  $V$  的子空间.

**证** 设  $\alpha, \beta \in W_1 \cap W_2$ , 即  $\alpha, \beta \in W_1$  且  $\alpha, \beta \in W_2$ .

于是  $\alpha + \beta \in W_1$  且  $\alpha + \beta \in W_2$ , 从而  $\alpha + \beta \in W_1 \cap W_2$ .

同理  $\lambda\alpha \in W_1 \cap W_2, \lambda \in F$ ,

所以,  $W_1 \cap W_2$  是  $V$  的一个子空间.

设  $\alpha, \beta \in W_1 + W_2$ , 即存在  $\alpha_1, \beta_1 \in W_1; \alpha_2, \beta_2 \in W_2$ , 使

$$\alpha = \alpha_1 + \alpha_2, \beta = \beta_1 + \beta_2,$$

于是 
$$\begin{aligned} \alpha + \beta &= (\alpha_1 + \alpha_2) + (\beta_1 + \beta_2) \\ &= (\alpha_1 + \beta_1) + (\alpha_2 + \beta_2) \in W_1 + W_2, \end{aligned}$$

再设  $\lambda \in F$ , 则  $\lambda\alpha = \lambda(\alpha_1 + \alpha_2) = \lambda\alpha_1 + \lambda\alpha_2 \in W_1 + W_2$ .

故  $W_1 + W_2$  也是  $V$  的一个子空间. ■

下面介绍有用的矩阵列空间和行空间以及  $R^n$  的正交子空间的概念.

**定义 3** 矩阵  $A$  的列(行)向量组生成的子空间, 称为矩阵  $A$  的列(行)空间, 记作  $R(A)(R(A^T))$ .

若  $A$  是  $m \times n$  实矩阵,  $A$  列向量组  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n \in R^m$ , 行向量组  $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_m \in R^n$ , 则



$R(A)=L(\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n)$  是  $R^n$  的一个子空间;

$R(A^T)=L(\beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_n)$  是  $R^n$  的一个子空间.

第3章讲过, 非齐次线性方程组  $AX=b$  有解的充要条件之一: “ $b$  是  $A$  的列向量组的线性组合”. 根据矩阵列空间的定义, 这个充要条件也可叙述为 “ $b$  属于  $A$  的列空间, 即  $b \in R(A)$ ”.

**例5** 设

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 3 & 2 \\ 2 & 6 & 9 & 5 \\ -1 & -3 & 3 & 0 \end{bmatrix},$$

求  $A$  的列空间  $R(A)$  和行空间  $R(A^T)$  的基.

**解** 求  $A$  的列(行)空间的基只要求  $A$  的列(行)向量组的一个极大线性无关组就可以了. 将

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 3 & 2 \\ 2 & 6 & 9 & 5 \\ -1 & -3 & 3 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow{\text{初等行变换}} \begin{bmatrix} 1 & 3 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = U,$$

$U$  的第1,3列是  $U$  的列向量组的极大线性无关组, 与之对应的  $A$  的第1,3列是  $A$  的列向量组的极大线性无关组, 所以  $\alpha_1 = [1, 2, -1]^T$ ,  $\alpha_3 = [3, 9, 3]^T$  是  $R(A)$  的一组基. 类似地可求得  $R(A^T)$  的基为  $\beta_1 = [1, 3, 3, 2]$ ,  $\beta_2 = [2, 6, 9, 5]$ .

由于  $A, U$  的行向量组可以互相线性表示, 根据定理3,  $R(A^T) = R(U^T)$ , 所以  $U$  的行空间的基  $\gamma_1 = [1, 3, 3, 2]$ ,  $\gamma_2 = [0, 0, 3, 1]$  也是  $R(A^T)$  的基. 但必须注意  $R(A) \neq R(U)$ .

**定义4** 设向量  $\alpha \in R^n$ ,  $W$  是  $R^n$  的一个子空间, 如果对于任意的  $\gamma \in W$ , 都有  $(\alpha, \gamma) = 0$ , 就称  $\alpha$  与子空间  $W$  正交, 记作  $\alpha \perp W$ .

**定义5** 设  $V$  和  $W$  是  $R^n$  的两个子空间, 如果对于任意的  $\alpha \in V$ ,  $\beta \in W$ , 都有  $(\alpha, \beta) = 0$ , 就称  $V$  和  $W$  正交, 记作  $V \perp W$ .

例如,  $R^3$  中  $oxy$  平面上的全体向量和  $z$  轴上的全体向量, 分别是  $R^3$  的二维和一维子空间, 它们是两个正交的子空间. 但是过

齐次线性方程组  $AX=O$ , 即

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = 0, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = 0, \\ \dots\dots\dots, \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = 0. \end{cases}$$

$$N(A) \mid R(A^T).$$
$$W = \{ \alpha \mid \alpha \in V, \alpha \in R^n \}$$

**证** 因为零向量与任何子空间正交, 所以  $W$  是非空集合. 设  $\alpha_1, \alpha_2 \in W$ , 于是对任意的  $\gamma \in V$ , 都有  $(\alpha_1, \gamma) = 0, (\alpha_2, \gamma) = 0$ , 从而有

$$(a_1 + a_2, \gamma) = 0, (ka_1, \gamma) = 0 \quad (k \in R),$$

**定义 6**  $R^n$  中与子空间  $V$  正交的全体向量构成的子空间  $W$ , 称为  $V$  的正交补, 记作  $W=V^\perp$ .

$$N(A) = (R(A^T))^{\perp}.$$

#### \* 4.5 线性空间的基 维数 向量的坐标

• 175 •

的向量,例如  $\epsilon_1, \epsilon_2, \dots, \epsilon_n$  是线性无关的,任何秩为  $n$  的  $n$  阶矩阵的列(行)向量组也都是线性无关的;  $F^n$  中任意  $n+1$  个向量都是线性相关的;因此,  $F^n$  中任一个向量都可以由任意给定的  $n$  个线性无关的向量线性表出. 向量空间  $F^n$  的这些属性就是本节要讨论的问题. 为此,我们首先要讨论线性空间中元素(向量)的线性相关性.

由于线性空间关于两种运算和  $F^n$  关于其线性运算一样满足相同的 8 条规则和简单的性质,因此,  $F^n$  中向量的线性相关性的定义及有关的基本结论也都适用于一般的线性空间  $V$ . 对此,我们不再重复叙述,但要注意,那里的向量  $\alpha, \beta, \gamma, \dots$ , 在这里是  $V$  中的元素,那里的零向量是这里  $V$  中的零元素.

**例 1** 证明:线性空间  $R[X]_n$  中元素  $f_0=1, f_1=x, f_2=x^2, \dots, f_{n-1}=x^{n-1}$  是线性无关的.

**证** 设  $k_0f_0+k_1f_1+k_2f_2+\dots+k_{n-1}f_{n-1}=0(x)$ ,

即  $k_0+k_1x+k_2x^2+\dots+k_{n-1}x^{n-1}=0(x)$ ,

上式中的  $0(x)$  是  $R[X]_n$  的零元素,即零多项式. 因此要使  $1, x, x^2, \dots, x^{n-1}$  的线性组合等于零多项式,仅当系数  $k_0, k_1, k_2, \dots, k_{n-1}$  全为零才能成立. 故  $1, x, x^2, \dots, x^{n-1}$  是线性无关的.

**例 2** 证明:线性空间  $R^{2 \times 2}$  中的元素

$$A_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, A_2 = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, A_3 = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, A_4 = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

是线性无关的.

**证** 设  $k_1A_1+k_2A_2+k_3A_3+k_4A_4=O_{2 \times 2}$ , (\*)

即 
$$\begin{bmatrix} k_1+k_2+k_3+k_4 & k_2+k_3+k_4 \\ k_3+k_4 & k_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

于是 
$$\begin{cases} k_1+k_2+k_3+k_4=0, \\ k_2+k_3+k_4=0, \\ k_3+k_4=0, \\ k_4=0. \end{cases}$$

而此方程组只有零解,因此,仅当  $k_1=k_2=k_3=k_4=0$  时, (\*) 式才成立,故  $A_1, A_2, A_3, A_4$  是线性无关的.

显然,在  $R^{2 \times 2}$  中,矩阵

$$e_{11} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, e_{12} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, e_{21} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, e_{22} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

也是线性无关的,且  $R^{2 \times 2}$  中任一个矩阵

$$A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = ae_{11} + be_{12} + ce_{21} + de_{22}.$$

读者也不难证明,在  $R^{2 \times 2}$  中任意五个元素(二阶矩阵)  $A, B, C, D, Q$  是线性相关的,如果  $A, B, C, D$  线性无关,则  $Q$  可由  $A, B, C, D$  线性表出,且表示法唯一,  $R^{2 \times 2}$  的这些属性与  $R^4$  是类似的,现在我们把线性空间的这些属性抽象为基、维数和坐标的概念.

**定义 1** 如果线性空间  $V(F)$  中存在线性无关的向量组  $B = \{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n\}$ , 且任一  $\alpha \in V$  都可由  $B$  线性表示为

$$\alpha = x_1\alpha_1 + x_2\alpha_2 + \dots + x_n\alpha_n, \quad (4.17)$$

则称  $V$  是  $n$  维线性空间(或说  $V$  的维数为  $n$ , 记作  $\dim V = n$ );  $B$  是  $V$  的一个基;有序数组  $(x_1, x_2, \dots, x_n)$  为  $\alpha$  关于基  $B$  (或说在基  $B$  下)的坐标(向量),记作

$$\alpha_B = [x_1, x_2, \dots, x_n]^T \in F^n. \quad (4.18)$$

如果  $V(F)$  中有任意多个线性无关的向量,则称  $V$  是无限维线性空间.

容易证明,在  $F[X]$  中,  $1, x, x^2, \dots, x^n$  ( $n$  为任意正整数)是线性无关的,因此,  $F[X]$  是无限维线性空间.  $C[a, b]$  也是无限维线性空间. 在我们的课程里,只讨论有限维线性空间.

在  $n$  维线性空间  $V$  中,任意  $n+1$  个元素  $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_{n+1}$  都可以由  $V$  的一个基  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$  线性表出,因此,根据 3.1 节定理 4 可知,  $n$  维线性空间中任意  $n+1$  个元素都是线性相关的. 所以,  $n$  维线性空间  $V$  中,任何  $n$  个线性无关的向量都是  $V$  的一个基.

例如:  $F[X]_n$  是  $n$  维线性空间,  $\{1, x, x^2, \dots, x^{n-1}\}$  是它的一个基;  $R^{2 \times 2}$  是 4 维线性空间,  $\{e_{11}, e_{12}, e_{21}, e_{22}\}$  和例 2 中的  $\{A_1, A_2, A_3, A_4\}$  都是它的基;  $F^{m \times n}$  是  $m \times n$  维线性空间, 这是因为  $F^{m \times n}$  中存在  $m \times n$  个线性无关的元素  $e_{ij}, i=1, \dots, m, j=1, \dots, n$ , ( $e_{ij}$  是第  $i$  行第  $j$  列为 1, 其余元素全为零的  $m \times n$  矩阵), 而且任一个  $m \times n$  矩阵可由它们线性表出.

在线性空间  $V$  中, 由向量组  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_r$  生成的子空间  $L(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_r)$  的维数等于向量组  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_r$  的秩, 向量组  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_r$  的极大线性无关组是  $L(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_r)$  的基. 矩阵  $A$  的列空间  $R(A)$  和行空间  $R(A^T)$  的维数都等于秩  $(A)$ .  $V$  的零子空间  $\{\theta\}$  的维数为零.

齐次线性方程组  $AX=O$  的基础解系是其解空间  $N(A)$  的基, 如果  $A$  是  $m \times n$  矩阵, 秩  $(A)=r$ , 则解空间  $N(A)$  的维数为  $n-r$ , 所以

$$\dim(R(A^T)) + \dim(N(A)) = n. \quad (4.19)$$

这是  $AX=O$  的解空间的又一个基本性质.

**定理 1** 设  $V$  是  $n$  维线性空间,  $W$  是  $V$  的  $m$  维子空间, 且  $B_1 = \{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m\}$  是  $W$  的一组基, 则  $B_1$  可以扩充为  $V$  的基 (即在  $B_1$  的基础上可以添加  $n-m$  个向量而成为  $V$  的一组基).

**证** 如果  $m=n$ ,  $B_1$  就是  $V$  的基. 如果  $m < n$ , 则必存在  $\alpha_{m+1} \in V$ , 使  $\alpha_1, \dots, \alpha_m, \alpha_{m+1}$  线性无关, 否则,  $\dim V = m$ , 这与  $\dim V = n$  矛盾. 如果  $m+1=n$ , 定理得证, 如果  $m+1 < n$ , 继续上述步骤, 必存在  $\alpha_{m+2}, \dots, \alpha_n \in V$ , 使  $\{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m, \alpha_{m+1}, \dots, \alpha_n\}$  线性无关, 这就是  $V$  的基. ■

下面给出子空间的维数公式. 设  $W_1, W_2$  是线性空间  $V(F)$  的两个子空间, 则

$$\dim W_1 + \dim W_2 = \dim(W_1 + W_2) + \dim(W_1 \cap W_2) \quad (4.20)$$

关于 (4.20) 式的证明, 有兴趣的读者可参看有关书籍.

关于  $n$  维线性空间  $V(F)$  中向量在基  $B$  下的坐标的概念,是与  $F^n$  中向量关于基  $B$  的坐标概念是完全类似的,那里的主要结论:

(i) 向量在给定基下的坐标是唯一确定的;

(ii) 由基  $B_1$  到基  $B_2$  的过渡矩阵的概念以及过渡矩阵是可逆的,即 4.1 的定义 2 与定理 1;

(iii) 基变换与坐标变换的公式,即定理 2.

在这里都是适用的. 除此之外,我们还要进一步指出:

给定了  $n$  维线性空间  $V(F)$  的基  $B = \{\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n\}$ ,  $V(F)$  中的向量与其坐标 ( $F^n$  中的向量) 不仅是一一对应的,而且这种对应保持线性运算关系不变,即:

$$V(F) \text{ 中 } \alpha + \zeta \text{ 对应于 } F^n \text{ 中 } \alpha_B + \zeta_B;$$

$$V(F) \text{ 中 } \lambda\alpha \text{ 对应于 } F^n \text{ 中 } \lambda\alpha_B.$$

事实上,如果  $\alpha = x_1\beta_1 + x_2\beta_2 + \dots + x_n\beta_n$ ,  $\zeta = y_1\beta_1 + y_2\beta_2 + \dots + y_n\beta_n$ ,  $\lambda \in F$ , 便有

$$\alpha + \zeta = (x_1 + y_1)\beta_1 + (x_2 + y_2)\beta_2 + \dots + (x_n + y_n)\beta_n,$$

$$\lambda\alpha = (\lambda x_1)\beta_1 + (\lambda x_2)\beta_2 + \dots + (\lambda x_n)\beta_n,$$

故  $(\alpha + \zeta)_B = \alpha_B + \zeta_B$ ,  $(\lambda\alpha)_B = \lambda\alpha_B$ .

具有上述对应关系的两个线性空间  $V(F)$  与  $F^n$ , 我们称它们是同构的. 上述对应关系表明, 研究任何  $n$  维线性空间  $V(F)$ , 都可以通过基和坐标, 转化为研究  $n$  维向量空间  $F^n$ . 这样, 我们对不同的  $n$  维线性空间就有了统一的研究方法, 统一到研究  $F^n$ , 因此, 通常把线性空间也称为向量空间, 线性空间中的元素也称为向量.

**例 3** 证明:  $B = \{f_0, f_1, f_2, \dots, f_{n-1}\}$  (其中  $f_0 = 1, f_1 = x, f_2 = x^2, \dots, f_{n-1} = x^{n-1}$ ) 是  $R[x]_n$  的一组基, 并求  $p(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_{n-1}x^{n-1}$  在基  $B$  下的坐标.

**解** 在例 1 中已证  $B$  是线性无关的, 而且

$$\forall p(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_{n-1}x^{n-1} \in R[x]_n,$$

$$\text{有 } p(x) = a_0f_0 + a_1f_1 + a_2f_2 + \cdots + a_{n-1}f_{n-1}. \quad \textcircled{1}$$

故  $B$  是  $R[x]_n$  的一组基(通常称自然基), 因此  $R[x]_n$  是  $n$  维实线性空间. 由①式也可知  $p(x)$  在基  $B$  下的坐标

$$(p(x))_B = [a_0, a_1, a_2, \cdots, a_{n-1}]^T.$$

且①式借助于矩阵乘法可以形式地表示为

$$p(x) = [1, x, \cdots, x^{n-1}] \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ \vdots \\ a_{n-1} \end{bmatrix}.$$

**例 4** 设  $B_1 = \{g_1, g_2, g_3\}, B_2 = \{h_1, h_2, h_3\}$ , 其中:

$$g_1 = 1, \quad g_2 = -1 + x, \quad g_3 = 1 - x + x^2,$$

$$h_1 = 1 - x - x^2, \quad h_2 = 3x - 2x^2, \quad h_3 = 1 - 2x^2.$$

(i) 证明  $B_1, B_2$  都是  $R[x]_3$  的基;

(ii) 求基  $B_1$  到基  $B_2$  的过渡矩阵;

(iii) 已知  $[p(x)]_{B_1} = [1, 4, 3]^T$ , 求  $[p(x)]_{B_2} = [y_1, y_2, y_3]^T$ .

**解** (i) 已知  $\dim R[x]_3 = 3$ , 所以只要证明  $B_1$  与  $B_2$  都是线性无关的. 将  $B_1$  中每个元素用  $R[x]_3$  的自然基  $B = \{f_0, f_1, f_2\}$  线性表示, 得

$$\begin{cases} g_1 = 1 \cdot f_0 \\ g_2 = -1 \cdot f_0 + 1 \cdot f_1, \\ g_3 = 1 \cdot f_0 - 1 \cdot f_1 + 1 \cdot f_2. \end{cases} \quad \textcircled{1}$$

①式可形式地表示为

$$[g_1, g_2, g_3] = [f_0, f_1, f_2] \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}. \quad \textcircled{2}$$

由于②式中右端矩阵

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (3)$$

的行列式等于  $1 \neq 0$ , 根据 4.1 节定理 1, 即得  $B_1 = \{g_1, g_2, g_3\}$  是线性无关的. 同理可证  $B_2 = \{h_1, h_2, h_3\}$  也是线性无关的.

(ii) 与①式相类似, 同样可写出基  $B_2$  与自然  $B$  的关系, 得到

$$[h_1, h_2, h_3] = [f_0, f_1, f_2] \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 3 & 0 \\ -1 & -2 & -2 \end{bmatrix}. \quad (4)$$

将④式右端矩阵记作

$$P = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 3 & 0 \\ -1 & -2 & -2 \end{bmatrix}.$$

上述  $A, P$  分别是基  $B$  到基  $B_1$  和基  $B$  到基  $B_2$  的过渡矩阵. 再由②式得

$$[f_0, f_1, f_2] = [g_1, g_2, g_3] A^{-1}, \quad (5)$$

将⑤式代入④式, 即得

$$[h_1, h_2, h_3] = [g_1, g_2, g_3] (A^{-1}P),$$

因此, 基  $B_1$  到基  $B_2$  的过渡矩阵为

$$C = A^{-1}P = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 3 & 0 \\ -1 & -2 & -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 3 & 1 \\ -2 & 1 & -2 \\ -1 & -2 & -2 \end{bmatrix}.$$

$$(iii) \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix} = C^{-1} \begin{bmatrix} 1 \\ 4 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 & -4 & 7 \\ 2 & -1 & 2 \\ -5 & 3 & -6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 4 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 11 \\ 4 \\ -11 \end{bmatrix}.$$



## \* 4.6 向量空间的线性变换

首先,我们给出映射的定义.

**定义 1** 设  $X, Y$  是两个非空集合,如果有一个法则  $\sigma$ ,它使  $X$  中每个元素  $\alpha$  都有  $Y$  中唯一确定的一个元素  $\beta$  与之对应,那么就称  $\sigma$  是  $X$  到  $Y$  的一个映射,记作

$$\sigma: X \rightarrow Y,$$

并称  $\beta$  为  $\alpha$  在  $\sigma$  下的象,  $\alpha$  为  $\beta$  在  $\sigma$  下的一个原象,记作:

$$\sigma: \alpha \rightarrow \beta \quad \text{或} \quad \sigma(\alpha) = \beta.$$

注意,  $\alpha$  的象是唯一的,但  $\beta$  的原象不一定是唯一的.

由  $X$  到自身的映射  $\sigma$ ,常称之为变换.

如果  $\forall \alpha_1, \alpha_2 \in X, \alpha_1 \neq \alpha_2$ , 都有  $\sigma(\alpha_1) \neq \sigma(\alpha_2)$ , 就称  $\sigma$  为单射.

如果  $\forall \beta \in Y$ , 都有  $\alpha \in X$ , 使  $\sigma(\alpha) = \beta$ , 就称  $\sigma$  为满射.

如果  $\sigma$  既是单射, 又是满射, 就称  $\sigma$  为双射(或称一一对应).

**例**  $f(x) = \sin x$ , 是  $R \rightarrow [-1, 1]$  的一个映射, 这个映射  $f$  是满射, 而不是单射.

$f(x) = e^x$ , 是  $R \rightarrow R$  的一个映射, 它是单射而不是满射.

大家熟知的一元函数中的线性函数:

$$y = f(x) = ax \quad (4.21)$$

(其一般形式  $y = ax + b$  可以通过坐标平移化为上述形式) 是  $R \rightarrow R$  (或者说  $R^1 \rightarrow R^1$ ) 的映射, 它显然是双射. 这个映射具有以下性质:

$$(i) \quad f(x_1 + x_2) = f(x_1) + f(x_2); \quad (4.22)$$

$$(ii) \quad f(\lambda x) = \lambda f(x), \quad \lambda \text{ 是常数.}$$

现在, 我们把一元线性函数推广到  $n$  维向量空间, 设  $A \in R^{n \times n}$ , 如果对每一个列向量  $X \in R^n$ , 映射

$$\sigma: X \rightarrow AX \quad \text{即} \quad \sigma(X) = AX,$$

(是  $R^n \rightarrow R^n$  的一个映射)满足以下性质:

$$\sigma(X_1 + X_2) = A(X_1 + X_2) = AX_1 + AX_2 = \sigma(X_1) + \sigma(X_2);$$

$$\sigma(\lambda X) = A(\lambda X) = \lambda AX = \lambda \sigma(X), \quad \lambda \in R.$$

我们把这个映射  $\sigma$  称为  $R^n \rightarrow R^n$  的线性映射(也称线性变换).

更一般,如果  $A \in R^{m \times n}$ ,  $X \in R^n$ , 则映射

$$\sigma: X \rightarrow AX \in R^m$$

是  $R^n$  到  $R^m$  的线性映射. 例如,二元线性函数

$$y = f(x_1, x_2) = a_1 x_1 + a_2 x_2 = [a_1, a_2] \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

就是  $R^2 \rightarrow R^1$  的线性映射.

本节主要是讨论  $R^n \rightarrow R^n$  的线性映射(也称  $R^n$  的线性变换). 下面,先把一元线性函数(4.21)的定义域和值域(都是实数域)推广到一般的向量空间  $V(F)$ ,并保留(4.22)式所表示的性质,就得向量空间  $V(F)$  的线性变换的概念,然后再研究它的简单性质及其矩阵表示.

#### 4.6.1 线性变换的定义及其简单性质

**定义 1** 设  $V(F)$  是一个向量空间,如果  $V(F)$  的一个变换  $\sigma$ , 满足条件:  $\forall \alpha, \beta \in V$  和  $\lambda \in F$ ,

$$(i) \quad \sigma(\alpha + \beta) = \sigma(\alpha) + \sigma(\beta), \quad (4.23)$$

$$(ii) \quad \sigma(\lambda\alpha) = \lambda\sigma(\alpha).$$

就称  $\sigma$  是  $V(F)$  的一个线性变换,并称  $\sigma(\alpha)$  为  $\alpha$  的象,  $\alpha$  为  $\sigma(\alpha)$  的原象.

(4.23)式也可等价地写作:  $\forall \alpha, \beta \in V$  和  $\lambda, \mu \in F$ , 都有

$$\sigma(\lambda\alpha + \mu\beta) = \lambda\sigma(\alpha) + \mu\sigma(\beta). \quad (4.23)'$$

本书采用黑体字母表示线性变换,以区分线性变换和线性变换在一组基下对应的矩阵.

**例 1** 旋转变换—— $R^2$  ( $oxy$  平面上以原点为始点的全体向

量)中每个向量绕原点按逆时针方向旋转  $\theta$  角的变换  $R_\theta$  是  $R^2$  的一个线性变换(图 4.4). 即  $\forall \alpha = (x, y) \in R^2$ ,

$$R_\theta(\alpha) = \alpha'$$

其中

$$\alpha' = (x', y') = (x \cos \theta - y \sin \theta, x \sin \theta + y \cos \theta). \quad (4.24)$$

事实上,  $\forall \alpha_1 = (x_1, y_1), \alpha_2 = (x_2, y_2) \in R^2$  和  $\forall \lambda, \mu \in R$ ,

$$R_\theta(\lambda \alpha_1 + \mu \alpha_2) = R_\theta(\lambda x_1 + \mu x_2, \lambda y_1 + \mu y_2) \quad \text{由 (4.24) 式即得}$$

$$= ((\lambda x_1 + \mu x_2) \cos \theta - (\lambda y_1 + \mu y_2) \sin \theta, (\lambda x_1 + \mu x_2) \sin \theta + (\lambda y_1 + \mu y_2) \cos \theta)$$

$$= \lambda (x_1 \cos \theta - y_1 \sin \theta, x_1 \sin \theta + y_1 \cos \theta) + \mu (x_2 \cos \theta - y_2 \sin \theta, x_2 \sin \theta + y_2 \cos \theta)$$

$$= \lambda R_\theta(x_1, y_1) + \mu R_\theta(x_2, y_2) = \lambda R_\theta(\alpha_1) + \mu R_\theta(\alpha_2).$$

故  $R_\theta$  是  $R^2$  的一个线性变换.

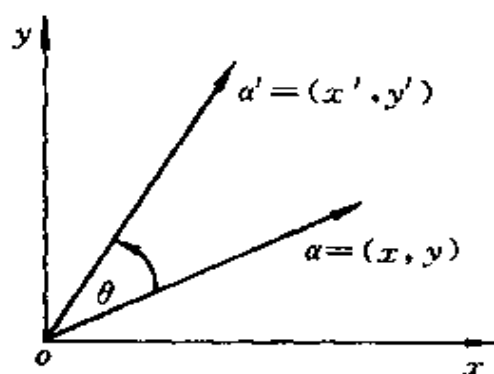


图 1.1

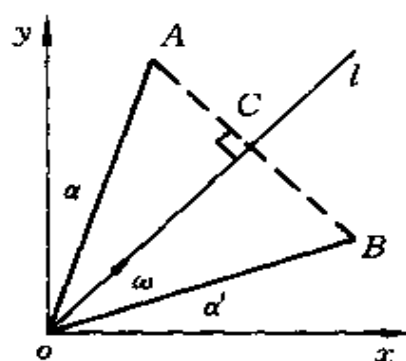


图 1.2

**例 2** 镜象变换(镜面反射)—— $R^2$  中每个向量关于过原点的直线  $l$ (看作镜面)相对称的变换  $\varphi$  也是  $R^2$  的一个线性变换, 即

$$\varphi(\alpha) = \alpha'.$$

(如图 4.5,  $l$  是  $AB$  的垂直平分线.)

设直线  $l$  的一个方向的单位向量为  $\omega$ , 于是

$$\overrightarrow{OC} = (\alpha, \omega) \omega,$$

其中 $(\alpha, \omega)$ 是 $\alpha$ 与 $\omega$ 的内积,从而

$$\begin{aligned}\alpha' &= \alpha + \overrightarrow{AB} = \alpha + 2\overrightarrow{AC} = \alpha + 2(\overrightarrow{OC} - \alpha) \\ &= -\alpha + 2(\alpha, \omega)\omega,\end{aligned}$$

因此,  $\varphi(\alpha) = -\alpha + 2(\alpha, \omega)\omega$ . (4.25)

下面验证 $\varphi$ 是线性变换.  $\forall \alpha_1, \alpha_2 \in R^2, \lambda, \mu \in R$ , 有

$$\begin{aligned}\varphi(\lambda\alpha_1 + \mu\alpha_2) &= -(\lambda\alpha_1 + \mu\alpha_2) + 2(\lambda\alpha_1 + \mu\alpha_2, \omega)\omega \\ &= \lambda(-\alpha_1 + 2(\alpha_1, \omega)\omega) + \mu(-\alpha_2 + 2(\alpha_2, \omega)\omega) \\ &= \lambda\varphi(\alpha_1) + \mu\varphi(\alpha_2),\end{aligned}$$

故镜象变换 $\varphi$ 是 $R^2$ 的一个线性变换.

**例3** 把 $R^3$ 中每个向量 $\alpha$ 投影为 $xoy$ 平面上的向量 $\beta$ 的投影变换 $P$ (即 $P(\alpha) = \beta$ ), 是 $R^3$ 的一个线性变换(图4.6).

以自然基 $\epsilon_1, \epsilon_2, \epsilon_3$ 作为 $R^3$ 的标准正交基,  $\alpha$ 在基下的坐标为 $(x_1, x_2, x_3)$ , 则 $\beta$ 在基下坐标为 $(x_1, x_2, 0)$ , 即

$$P(x_1, x_2, x_3) = (x_1, x_2, 0) \quad (4.26)$$

对于任意的 $\alpha_1 = (a_1, a_2, a_3), \alpha_2 = (b_1, b_2, b_3), k \in R$ , 根据(4.26)式容易证明:

$$P(\alpha_1 + \alpha_2) = P(\alpha_1) + P(\alpha_2)$$

$$P(\lambda\alpha) = \lambda P(\alpha)$$

故投影变换 $P$ 是 $R^3$ 的一个线性变换.

这里如果把 $\alpha$ 在基下的坐标向量表示为列的形式 $[x_1, x_2, x_3]^T$ ,  $\beta$ 在基下的坐标向量为 $[y_1, y_2, y_3]^T$ , 显然有

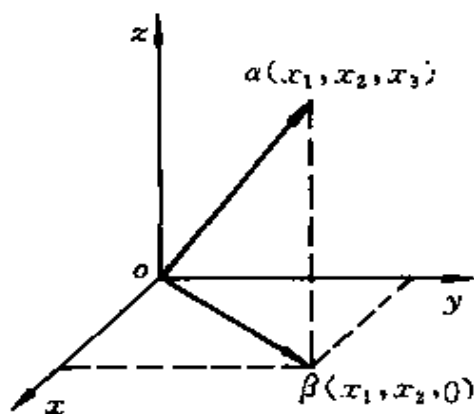


图 4.6

$$\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & & \\ & 1 & \\ & & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}. \quad (4.27)$$

这是以后要讲的线性变换的矩阵表示.

**例 4**  $R^n$  的下列变换:

恒等变换  $\sigma(\alpha) = \alpha, (\forall \alpha \in R^n)$

零变换  $\sigma(\alpha) = 0, (\forall \alpha \in R^n)$

数乘变换  $\sigma(\alpha) = \lambda\alpha, (\forall \alpha \in R^n, \text{给定 } \lambda \in R)$

都是  $R^n$  的线性变换(证明留给读者练习).

**例 5** 在  $R^3$  中定义变换

$$\sigma(x_1, x_2, x_3) = (x_1 + x_2, x_2 - 4x_3, 2x_3),$$

则  $\sigma$  是  $R^3$  的一个线性变换. 这是因为:

对于任意的  $\alpha = (a_1, a_2, a_3), \beta = (b_1, b_2, b_3) \in R^3$ , 有

$$\begin{aligned} \sigma(\alpha + \beta) &= \sigma(a_1 + b_1, a_2 + b_2, a_3 + b_3) \\ &= (a_1 + a_2 + b_1 + b_2, a_2 - 4a_3 + b_2 - 4b_3, 2a_3 + 2b_3) \\ &= (a_1 + a_2, a_2 - 4a_3, 2a_3) + (b_1 + b_2, b_2 - 4b_3, 2b_3) \\ &= \sigma(\alpha) + \sigma(\beta). \end{aligned}$$

同理, 对于任意的  $\alpha \in R^3, k \in R$ , 也有

$$\sigma(k\alpha) = k\sigma(\alpha).$$

**例 6** 在  $R^3$  中定义变换

$$\sigma(x_1, x_2, x_3) = (x_1^2, x_2 + x_3, x_2),$$

则  $\sigma$  不是  $R^3$  的一个线性变换.

因为对于任意的  $\alpha = (a_1, a_2, a_3), \beta = (b_1, b_2, b_3) \in R^3$ ,

$$\begin{aligned} \sigma(\alpha + \beta) &= \sigma(a_1 + b_1, a_2 + b_2, a_3 + b_3) \\ &= ((a_1 + b_1)^2, a_2 + a_3 + b_2 + b_3, a_2 + b_2) \\ &\neq (a_1^2, a_2 + a_3, a_2) + (b_1^2, b_2 + b_3, b_2) \\ &= \sigma(\alpha) + \sigma(\beta). \end{aligned}$$

故  $\sigma$  不是  $R^3$  的线性变换. 此例也可检验  $\sigma(\lambda\alpha) \neq \lambda\sigma(\alpha)$  以说明  $\sigma$

不是线性变换.

由例 5 可见,  $R^n$  的变换

$$\sigma(x_1, x_2, \dots, x_n) = (y_1, y_2, \dots, y_n),$$

当  $y_i (i=1, 2, \dots, n)$  都是  $x_1, x_2, \dots, x_n$  的线性组合时,  $\sigma$  是  $R^n$  的线性变换. 例 6 中  $y_1 = x_1^2$ , 所以不是线性变换, 如果  $y_1 = x_1 x_2$ , 也不是线性变换.

下面讨论线性变换的简单性质.

数域  $F$  上的向量空间  $V$  的线性变换  $\sigma$ , 有以下性质:

(1)  $\sigma(O) = O, \sigma(-\alpha) = -\sigma(\alpha), (\forall \alpha \in V)$ .

这个性质由  $\sigma(\lambda\alpha) = \lambda\sigma(\alpha)$ , 取  $\lambda=0, -1$ , 就立即可得.

(2) 如果  $\alpha = k_1\alpha_1 + k_2\alpha_2 + \dots + k_n\alpha_n (k_i \in F, \alpha_i \in V, i=1, 2, \dots, n)$ , 则

$$\sigma(\alpha) = k_1\sigma(\alpha_1) + k_2\sigma(\alpha_2) + \dots + k_n\sigma(\alpha_n).$$

**证** 根据线性变换满足的两个条件, 可得

$$\begin{aligned}\sigma(\alpha) &= \sigma(k_1\alpha_1 + k_2\alpha_2 + \dots + k_n\alpha_n) \\ &= \sigma(k_1\alpha_1) + \sigma(k_2\alpha_2) + \dots + \sigma(k_n\alpha_n) \\ &= k_1\sigma(\alpha_1) + k_2\sigma(\alpha_2) + \dots + k_n\sigma(\alpha_n)\end{aligned}$$

(3) 如果  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$  线性相关, 则其象向量组  $\sigma(\alpha_1), \sigma(\alpha_2), \dots, \sigma(\alpha_n)$  也线性相关.

利用  $\sigma(O) = O$ , 设性质(2)中的  $\alpha = O$ , 相应地  $\sigma(\alpha) = O$ , 于是由性质(2)可知, 不全为 0 的  $k_1, k_2, \dots, k_n$ , 使

$$k_1\alpha_1 + k_2\alpha_2 + \dots + k_n\alpha_n = O,$$

也必使  $k_1\sigma(\alpha_1) + k_2\sigma(\alpha_2) + \dots + k_n\sigma(\alpha_n) = O$ .

必须注意, 性质(3)的逆不成立. 如例 3 中

$$\alpha_1 = (1, 1, 2), \alpha_2 = (2, 2, 2),$$

线性无关, 而  $P(\alpha_1) = (1, 1, 0), P(\alpha_2) = (2, 2, 0)$  线性相关.

#### 4.6.2 线性变换的矩阵表示

本节开始时我们讲过,  $n$  阶矩阵  $A$  把  $X$  变换为  $AX$  是  $R^n$  的

线性变换. 例 3 中也讲过, 投影变换  $P(\alpha) = \beta$  可用 (4.27) 式描述, (4.27) 中的矩阵

$$P = \begin{bmatrix} 1 & & \\ & 1 & \\ & & 0 \end{bmatrix}$$

表示了这个投影变换, 即  $PX$  是  $X$  在  $oxy$  平面上的投影向量. 这些事实表明  $n$  维向量空间  $V(F)$  的线性变换  $\sigma$  与  $n$  阶矩阵之间有着一定的联系. 下面我们一般地讨论它们之间的对应关系, 首先讨论一个线性变换如何用矩阵表示.

设  $\{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n\}$  是  $V(F)$  的一组基,  $\sigma$  是  $V(F)$  的一个线性变换, 若  $\alpha \in V(F)$ , 且

$$\alpha = x_1\alpha_1 + x_2\alpha_2 + \dots + x_n\alpha_n, \quad (4.28)$$

由于性质 (2) 揭示了线性变换保持线性关系不变,  $\alpha$  的象  $\sigma(\alpha)$  与基象  $\sigma(\alpha_1), \sigma(\alpha_2), \dots, \sigma(\alpha_n)$  之间也有 (4.25) 式那样的线性关系, 即

$$\sigma(\alpha) = x_1\sigma(\alpha_1) + x_2\sigma(\alpha_2) + \dots + x_n\sigma(\alpha_n). \quad (4.29)$$

因此, 对于  $\sigma$  来讲, 如果知道了  $\sigma$  关于  $V(F)$  的基的象  $\sigma(\alpha_1), \sigma(\alpha_2), \dots, \sigma(\alpha_n)$ , 则任一个向量  $\alpha$  的象  $\sigma(\alpha)$  就知道了. 下面的定理又进一步说明一个线性变换完全被它在一组基上的象所确定.

**定理 1** 设  $\{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n\}$  是  $V(F)$  的一组基, 如果  $V(F)$  的两个线性变换  $\sigma$  和  $\tau$  关于这组基的象相同, 即

$$\sigma(\alpha_i) = \tau(\alpha_i), \quad i = 1, 2, \dots, n.$$

则  $\sigma = \tau$ .

**证**  $\sigma = \tau$  的意义是每个向量在它们的作用下的象相同, 即对于任意的  $\alpha \in V$ , 有  $\sigma(\alpha) = \tau(\alpha)$ . 设任一个  $\alpha$  如 (4.28) 式所示, 则

$$\begin{aligned} \sigma(\alpha) &= x_1\sigma(\alpha_1) + x_2\sigma(\alpha_2) + \dots + x_n\sigma(\alpha_n) \\ &= x_1\tau(\alpha_1) + x_2\tau(\alpha_2) + \dots + x_n\tau(\alpha_n) = \tau(\alpha). \quad \blacksquare \end{aligned}$$

由于基象  $\sigma(\alpha_i) \in V(F)$ , ( $i = 1, 2, \dots, n$ ), 所以它们可经  $V(F)$  的基  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$  线性表出, 即有





证 已知  $\sigma[\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n] = [\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n]A$ , ①

$$\alpha = x_1\alpha_1 + x_2\alpha_2 + \dots + x_n\alpha_n = [\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n] \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix},$$

则  $\sigma(\alpha) = x_1\sigma(\alpha_1) + x_2\sigma(\alpha_2) + \dots + x_n\sigma(\alpha_n)$

$$= [\sigma(\alpha_1), \sigma(\alpha_2), \dots, \sigma(\alpha_n)] \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{\text{(把①式代入)}} [\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n]A \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}.$$

故  $\sigma(\alpha)$  在基  $\{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n\}$  下的坐标向量

$$\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix} = A \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}, \text{ 即 } Y = AX. \quad \blacksquare$$

**例 7** 求例 1 中的旋转变换  $R_\theta$  在  $R^2$  的标准正交基  $\epsilon_1 = [1, 0]^T, \epsilon_2 = [0, 1]^T$  下的矩阵(图 4.7).

**解** 先求基象  $R_\theta(\epsilon_1), R_\theta(\epsilon_2)$ , 由于它们是长度为 1 的向量, 所以

$$\begin{cases} R_\theta(\epsilon_1) = (\cos\theta)\epsilon_1 + (\sin\theta)\epsilon_2, \\ R_\theta(\epsilon_2) = (-\sin\theta)\epsilon_1 + (\cos\theta)\epsilon_2, \end{cases}$$

即

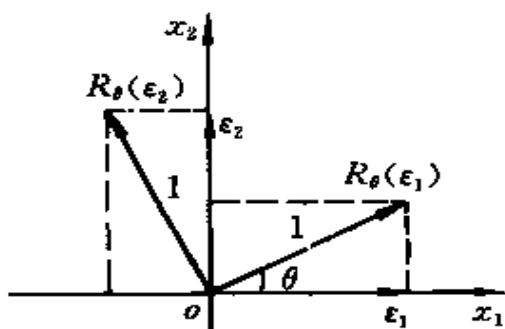


图 4.7

$$R_\theta[\varepsilon_1, \varepsilon_2] = [R_\theta(\varepsilon_1), R_\theta(\varepsilon_2)] = [\varepsilon_1, \varepsilon_2] \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix},$$

故初等旋转变换  $R_\theta$  在标准正交基  $\varepsilon_1, \varepsilon_2$  下的矩阵为

$$R = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}. \quad (4.34)$$

**例 8** 对例 2 中的镜象变换  $\varphi$ , 求它在  $R^2$  的标准正交基  $\{\omega, \eta\}$  (其中  $\eta$  是与  $\omega$  正交的单位向量) 下所对应的矩阵  $H$ .

**解** 根据镜象变换的定义, 显然有

$$\begin{cases} \varphi(\omega) = \omega, \\ \varphi(\eta) = -\eta, \end{cases} \quad \text{即} \quad \varphi[\omega, \eta] = [\omega, \eta] \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix},$$

所以  $\varphi$  在标准正交基  $\{\omega, \eta\}$  下的矩阵为

$$H = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}. \quad (4.35)$$

(4.34), (4.35) 式中矩阵分别称为**初等旋转阵**和**反射阵**, 它们都是正交矩阵. 对应的初等旋转变换和镜象变换称为**正交变换**, 它们都使变换后的向量保持长度不变.

**例 9**  $R^n$  的恒等变换、零变换和数乘变换 (见例 4) 在任何基下的矩阵分别都是  $I_n, O_{n \times n}, \lambda I_n$ . (证明留给读者练习)

**例 10** 设  $\sigma$  是  $R^3$  的一个线性变换,  $B = \{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3\}$  是  $R^3$  的一

组基, 已知

$$\alpha_1 = [1, 0, 0]^T, \alpha_2 = [1, 1, 0]^T, \alpha_3 = [1, 1, 1]^T,$$

$$\sigma(\alpha_1) = [1, -1, 0]^T, \sigma(\alpha_2) = [-1, 1, -1]^T, \sigma(\alpha_3) = [1, -1, 2]^T.$$

(1) 求  $\sigma$  在基  $B$  下对应的矩阵;

(2) 求  $\sigma^2(\alpha_1), \sigma^2(\alpha_2), \sigma^2(\alpha_3)$ ;

(3) 已知  $\sigma(\beta)$  在基  $B$  下的坐标为  $[2, 1, -2]^T$ , 问:  $\sigma(\beta)$  的原象  $\beta$  是否唯一? 并求  $\beta$  在基  $B$  下的坐标.

解 (1) 法 1: 将  $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3; \sigma(\alpha_1), \sigma(\alpha_2), \sigma(\alpha_3)$  以列向量形式代入 (4.32) 式, 得

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} A.$$

因此,  $\sigma$  在基  $B$  下的矩阵为

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & -2 & 2 \\ -1 & 2 & -3 \\ 0 & -1 & 2 \end{bmatrix}.$$

法 2: 将  $\sigma(\alpha_1), \sigma(\alpha_2), \sigma(\alpha_3)$  用基  $B = \{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3\}$  线性表示, 这里容易看出

$$\begin{cases} \sigma(\alpha_1) = 2\alpha_1 - \alpha_2, \\ \sigma(\alpha_2) = -2\alpha_1 + 2\alpha_2 - \alpha_3, \\ \sigma(\alpha_3) = 2\alpha_1 - 3\alpha_2 + 2\alpha_3. \end{cases}$$

上述向量方程组右端系数矩阵的转置, 就是  $\sigma$  在基  $B$  下的矩阵.

(2) 先求得  $(\sigma(\alpha_1))_B = [x_1, x_2, x_3]^T = [2, -1, 0]^T$ , 将它和上面求得的  $A$  代入 (13) 式, 即得  $\sigma^2(\alpha) = \sigma(\sigma(\alpha))$  在基  $B$  下的坐标向量

$$\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & -2 & 2 \\ -1 & 2 & -3 \\ 0 & -1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 \\ -4 \\ 1 \end{bmatrix},$$

所以  $\sigma^2(\alpha_1) = 6\alpha_1 - 4\alpha_2 + \alpha_3 = [3, -3, 1]^T$ . 同理可求  $\sigma^2(\alpha_2), \sigma^2(\alpha_3)$ .

另一解法: 利用

$$\sigma[\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3] = [\sigma(\alpha_1), \sigma(\alpha_2), \sigma(\alpha_3)] = [\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3]A,$$

将等式两边再用  $\sigma$  作用, 就有

$$\begin{aligned} \sigma[\sigma(\alpha_1), \sigma(\alpha_2), \sigma(\alpha_3)] &= \sigma([\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3]A) \\ &= (\sigma[\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3])A = [\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3]A^2 \\ &= [\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3] \begin{bmatrix} 6 & -10 & 14 \\ -4 & 9 & -14 \\ 1 & -4 & 7 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

由此即得

$$\sigma^2(\alpha_1) = \sigma(\sigma(\alpha_1)) = 6\alpha_1 - 4\alpha_2 + \alpha_3 = [3, -3, 1]^T,$$

$$\sigma^2(\alpha_2) = \sigma(\sigma(\alpha_2)) = -10\alpha_1 + 9\alpha_2 - 4\alpha_3 = [-5, 5, -4]^T,$$

$$\sigma^2(\alpha_3) = \sigma(\sigma(\alpha_3)) = 14\alpha_1 - 14\alpha_2 + 7\alpha_3 = [7, -7, 7]^T.$$

(3) 设  $(\beta)_B = [x_1, x_2, x_3]^T$ , 由 (4.33) 式得

$$\begin{bmatrix} 2 & -2 & 2 \\ -1 & 2 & -3 \\ 0 & -1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ -2 \end{bmatrix},$$

解此方程组得

$$[x_1, x_2, x_3]^T = [3, 2, 0]^T + k[1, 2, 1]^T.$$

其中  $k$  为任意常数, 故  $\sigma(\beta)$  的原象  $\beta$  不唯一. ■

线性变换用矩阵表示是与空间的一组基相联系的, 一般情况下, 线性变换在不同基下的矩阵是不相同的, 下面我们揭示同一个线性变换在不同基下的矩阵之间的相互关系.

**定理 3** 设线性变换在基  $B_1 = \{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n\}$  和基  $B_2 = \{\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n\}$  下的矩阵分别为  $A$  和  $B$ , 且基  $B_1$  到基  $B_2$  的过渡矩阵为  $C$ , 则

$$B = C^{-1}AC. \quad (4.36)$$

证 根据已知条件有

$$\sigma[\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n] = [\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n]A, \quad (1)$$

$$[\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n] = [\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n]C. \quad (2)$$

由②得  $[\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n] = [\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n]C^{-1}, \quad (3)$

$$\sigma[\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n] = \sigma[\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n]C$$

$$\stackrel{(1)}{=} [\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n]AC \stackrel{(3)}{=} [\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n]C^{-1}AC.$$

由此即得  $B = C^{-1}AC$ . ■

定理 3 表明, 同一个线性变换在不同基下的矩阵是相似矩阵; 反之, 两个如(4.36)式所示的相似矩阵  $A, B$ , 若  $A$  是  $\sigma$  在基  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$  下的矩阵, 则  $B$  必是  $\sigma$  在另一组基(有兴趣的读者自己找出来)下的矩阵.

例 11 设  $R^3$  的线性变换  $\sigma$  在自然基  $\{\epsilon_1, \epsilon_2, \epsilon_3\}$  下的矩阵

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{bmatrix}.$$

(1) 求  $\sigma$  在基  $\{\beta_1, \beta_2, \beta_3\}$  下的矩阵, 其中  $\beta_1 = [1, 1, 1]^T, \beta_2 = [-1, 1, 0]^T, \beta_3 = [-1, 0, 1]^T$ ;

(2)  $\alpha = [1, 2, 3]^T$ , 求  $\sigma(\alpha)$  在基  $\{\beta_1, \beta_2, \beta_3\}$  下的坐标向量  $[y_1, y_2, y_3]^T$  及  $\sigma(\alpha)$ .

解 (1) 先求自然基  $\{\epsilon_1, \epsilon_2, \epsilon_3\}$  到基  $\{\beta_1, \beta_2, \beta_3\}$  的过渡矩阵  $C$ , 根据

$$[\beta_1, \beta_2, \beta_3] = [\epsilon_1, \epsilon_2, \epsilon_3]C,$$

得

$$C = \begin{bmatrix} | & | & | \\ \beta_1 & \beta_2 & \beta_3 \\ | & | & | \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

$$C^{-1} = \frac{1}{3} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{bmatrix}.$$

由定理 3 的 (4.36) 式可知,  $\sigma$  在基  $\{\beta_1, \beta_2, \beta_3\}$  下的矩阵为

$$\begin{aligned} B &= C^{-1}AC \\ &= \frac{1}{3} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

(2) 先求  $\alpha$  在基  $\{\beta_1, \beta_2, \beta_3\}$  下的坐标向量  $[x_1, x_2, x_3]^T$ , 由于  $\alpha$  在自然基  $\{\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3\}$  下的坐标向量就是  $\alpha$  自身, 即  $[1, 2, 3]^T$ , 因此, 根据坐标变换公式, 得

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = C^{-1} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} = \frac{1}{3} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

再根据定理 2 中 (4.33) 式,  $\sigma(\alpha)$  在基  $\{\beta_1, \beta_2, \beta_3\}$  下的坐标向量

$$\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix} = B \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 3 \end{bmatrix},$$

从而  $\sigma(\alpha) = 0\beta_1 + 0\beta_2 + 3\beta_3 = [-3, 0, 3]^T$ . ■

前面讲过的问题是, 给定  $R^n$  的一个线性变换  $\sigma$  和  $R^n$  的一组基  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ ,  $\sigma$  就被基象  $\sigma(\alpha_1), \sigma(\alpha_2), \dots, \sigma(\alpha_n)$  完全确定, 从而  $\sigma$  在这组基下可用唯一确定的一个矩阵来表示. 现在讨论反问题, 即任意给定一个  $n$  阶矩阵  $A$ , 它是否必是某个线性变换在给定的

$$[\sigma(\alpha_1), \sigma(\alpha_2), \dots, \sigma(\alpha_n)]$$

$$= [\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n] \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} \xrightarrow{\text{记作}} [\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n]$$

(其中  $\beta_j = \sum_{i=1}^n a_{ij} \alpha_i, j=1, 2, \dots, n$ ) 可知, 给定了  $R^n$  的一组基  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ , 在  $R^n$  中任给一个向量组  $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n$  就等价于任给上式中的一个矩阵  $A$ . 因此反问题的提法是, 给定  $R^n$  的基  $\{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n\}$ , 对于任给的  $n$  个向量  $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n$ , 是否存在唯一的一个线性变换  $\sigma$ , 使得  $\sigma(\alpha_j) = \beta_j, j=1, 2, \dots, n$ . 下面的定理对这个问题作了肯定的回答.

**定理 4** 设  $\{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n\}$  是  $R^n$  的一组基,  $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n$  是在  $R^n$  中任意给定的  $n$  个向量, 则一定存在唯一的线性变换  $\sigma$ , 使得

$$\sigma(\alpha_j) = \beta_j, \quad j=1, 2, \dots, n.$$

**证** 证明存在性的方法是, 先定义一个满足 (4.37) 式的变换, 然后证明这个变换是线性的.

设  $\zeta = x_1 \alpha_1 + x_2 \alpha_2 + \cdots + x_n \alpha_n, (x_j \in R, j=1, 2, \dots, n)$

定义变换  $\sigma(\zeta) = x_1 \beta_1 + x_2 \beta_2 + \cdots + x_n \beta_n. \quad ①$

当  $\zeta = \alpha_j = 0\alpha_1 + \cdots + 0\alpha_{j-1} + 1\alpha_j + 0\alpha_{j+1} + \cdots + 0\alpha_n$  时, 根据①式的定义, 显然有

$$\sigma(\alpha_j) = \beta_j, \quad j=1, 2, \dots, n. \quad ②$$

又对于  $R^n$  中任意两个向量  $\zeta_1 = \sum_{j=1}^n a_j \alpha_j$  和  $\zeta_2 = \sum_{j=1}^n b_j \alpha_j$ , 及对于任意数  $k \in R$ , 有

$$\begin{aligned} \sigma(\zeta_1 + \zeta_2) &= \sigma\left(\sum_{j=1}^n (a_j + b_j) \alpha_j\right) \\ &\stackrel{①}{=} \sum_{j=1}^n (a_j + b_j) \beta_j = \sum_{j=1}^n a_j \beta_j + \sum_{j=1}^n b_j \beta_j \\ &\stackrel{①}{=} \sigma(\zeta_1) + \sigma(\zeta_2), \end{aligned} \quad ③$$

$$\begin{aligned}\sigma(k\xi) &= \sigma\left(\sum_{j=1}^n kx_j\alpha_j\right) \stackrel{\textcircled{1}}{=} \sum_{j=1}^n kx_j\beta_j \\ &= k\sum_{j=1}^n x_j\beta_j \stackrel{\textcircled{1}}{=} k\sigma(\xi).\end{aligned}\quad \textcircled{4}$$

由②, ③, ④式可知, ①式定义的变换  $\sigma$  是满足定理要求的线性变换, 存在性得证. 唯一性由定理 1 保证.  $\blacksquare$

综合本小节前后所述, 就可得到一个重要的结论: 给定了  $R^n$  的一组基以后,  $R^n$  中的线性变换与  $R^{n \times n}$  (表示全体  $n$  阶实矩阵的集合) 中的矩阵一一对应.

### 4.6.3 线性变换的运算

**定义 3** 设  $\sigma$  与  $\tau$  是线性空间  $V(F)$  的两个线性变换,  $\lambda \in F$ , 我们定义  $\sigma$  与  $\tau$  之和  $\sigma + \tau$ , 数量  $\lambda$  与  $\sigma$  之乘积  $\lambda\sigma$  以及  $\sigma$  与  $\tau$  之乘积  $\sigma\tau$  如下:

$\forall \alpha \in V$ ,

$$(\sigma + \tau)(\alpha) = \sigma(\alpha) + \tau(\alpha);$$

$$(\lambda\sigma)(\alpha) = \lambda\sigma(\alpha);$$

$$(\sigma\tau)(\alpha) = \sigma(\tau(\alpha)).$$

上述定义的  $\sigma + \tau$ ,  $\lambda\sigma$  和  $\sigma\tau$  仍是  $V(F)$  的线性变换, 对此只要验证它们满足线性变换的条件. 事实上,  $\forall \alpha_1, \alpha_2 \in V, k_1, k_2 \in F$ , 有

$$\begin{aligned}(\sigma + \tau)(k_1\alpha_1 + k_2\alpha_2) &= (\sigma + \tau)(k_1\alpha_1) + (\sigma + \tau)(k_2\alpha_2) \\ &= \sigma(k_1\alpha_1) + \tau(k_1\alpha_1) + \sigma(k_2\alpha_2) + \tau(k_2\alpha_2) \\ &= k_1\sigma(\alpha_1) + k_1\tau(\alpha_1) + k_2\sigma(\alpha_2) + k_2\tau(\alpha_2) \\ &= k_1(\sigma + \tau)(\alpha_1) + k_2(\sigma + \tau)(\alpha_2),\end{aligned}$$

所以  $\sigma + \tau$  是一个线性变换. 再由

$$\begin{aligned}(\sigma\tau)(k_1\alpha_1 + k_2\alpha_2) &= \sigma(\tau(k_1\alpha_1 + k_2\alpha_2)) \\ &= \sigma(k_1\tau(\alpha_1) + k_2\tau(\alpha_2)) \\ &= k_1\sigma(\tau(\alpha_1)) + k_2\sigma(\tau(\alpha_2))\end{aligned}$$



$$=k_1(\sigma\tau)(\alpha_1)+k_2(\sigma\tau)(\alpha_2),$$

所以  $\sigma\tau$  也是一个线性变换.  $\lambda\sigma$  也是线性变换的验证留给读者练习.

此外读者也容易验证, 线性变换的加法与乘法都满足结合律, 即  $\forall$  线性变换  $\sigma, \tau, \varphi$ , 有

$$(\sigma+\tau)+\varphi=\sigma+(\tau+\varphi);$$

$$(\sigma\tau)\varphi=\sigma(\tau\varphi).$$

加法还满足交换律, 但乘法不满足交换律, 即

$$\sigma+\tau=\tau+\sigma.$$

在一般情况下,  $\sigma\tau \neq \tau\sigma$ .

乘法对加法满足左分配律和右分配律, 即

$$\sigma(\tau+\varphi)=\sigma\tau+\sigma\varphi;$$

$$(\tau+\varphi)\sigma=\tau\sigma+\varphi\sigma.$$

在前面, 我们讲过给定了线性空间  $V(F)$  的一组基  $\{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n\}$ ,  $V(F)$  的线性变换与  $F^{n \times n}$  中的元素 (数域  $F$  上的  $n$  阶矩阵) 一一对应, 这种对应的重要性还表现在保持运算关系不变, 即有如下定理:

**定理 5** 设线性空间  $V(F)$  的线性变换  $\sigma$  和  $\tau$  在  $V$  的基  $\{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n\}$  下所对应的矩阵分别为  $A$  和  $B$ . 则  $\sigma+\tau, \lambda\sigma$  和  $\sigma\tau$  在该组基下对应的矩阵分别为  $A+B, \lambda A$  和  $AB$ .

**证** 设  $A=[a_{ij}]_{n \times n}, B=[b_{ij}]_{n \times n}$ , 根据 (4.32) 式, 有

$$\sigma(\alpha_j)=\sum_{i=1}^n a_{ij}\alpha_i, \quad \tau(\alpha_j)=\sum_{i=1}^n b_{ij}\alpha_i, \quad j=1, \dots, n.$$

于是

$$\begin{aligned} (\sigma+\tau)(\alpha_j) &= \sigma(\alpha_j) + \tau(\alpha_j) = \sum_{i=1}^n a_{ij}\alpha_i + \sum_{i=1}^n b_{ij}\alpha_i \\ &= \sum_{i=1}^n (a_{ij}+b_{ij})\alpha_i, \quad j=1, \dots, n. \end{aligned}$$

这表明  $\sigma+\tau$  所对应的矩阵的第  $i$  行、第  $j$  列元素为  $a_{ij}+b_{ij}=(A+$

$B$ ) 的第  $i$  行、第  $j$  列元素, 所以  $\sigma + \tau$  对应的矩阵为  $A + B$ . 再由

$$\begin{aligned} (\sigma\tau)(\alpha_j) &= \sigma(\tau(\alpha_j)) = \sigma\left(\sum_{i=1}^n b_{ij}\alpha_i\right) \\ &= \sum_{i=1}^n b_{ij}\sigma(\alpha_i) = \sum_{i=1}^n b_{ij}\left(\sum_{k=1}^n a_{ki}\alpha_k\right) \\ &= \sum_{k=1}^n \left(\sum_{i=1}^n a_{ki}b_{ij}\right)\alpha_k = \sum_{k=1}^n C_{kj}\alpha_k, \end{aligned}$$

所以  $\sigma\tau$  所对应的矩阵的第  $k$  行、第  $j$  列元素  $c_{kj} = \sum_{i=1}^n a_{ki}b_{ij} = (AB)_{kj}$ , (即  $AB$  的第  $k$  行、第  $j$  列元素), 因此  $\sigma\tau$  对应的矩阵为  $AB$ .

同样  $\lambda\sigma$  对应的矩阵为  $\lambda A$ . (证明留给读者) ■

如果线性变换  $\sigma$  对应的矩阵  $A$  为可逆矩阵, 我们就称  $\sigma$  是可逆的线性变换.  $\sigma$  可逆也可定义为: 如果存在线性变换  $\tau$ , 使

$$\sigma\tau = \tau\sigma = I \quad (\text{恒等变换})$$

就称  $\sigma$  为可逆的线性变换.

由于线性变换与矩阵之间一一对应(在给定基的前提下), 而且保持运算关系不变, 因此, 可以用矩阵研究线性变换, 也可以用线性变换研究矩阵.

## 习题 补充题 答案

### 习题

1. 证明:  $\alpha_1 = [1, 1, 1, 1]^T$ ,  $\alpha_2 = [1, 1, -1, -1]^T$ ,  $\alpha_3 = [1, -1, 1, -1]^T$ ,  $\alpha_4 = [1, -1, -1, 1]^T$  是  $R^4$  的一组基, 并求  $\beta = [1, 2, 1, 1]^T$  在这组基下的坐标.

2. 已知  $R^3$  的两组基为:

$$\alpha_1 = [1, 2, 1]^T, \alpha_2 = [2, 3, 3]^T, \alpha_3 = [3, 7, 1]^T,$$

$$\beta_1 = [3, 1, 4]^T, \beta_2 = [5, 2, 1]^T, \beta_3 = [1, 1, -6]^T.$$

求: (1) 向量  $\gamma = [3, 6, 2]^T$  在基  $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$  下的坐标;

(2) 基  $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$  到基  $\beta_1, \beta_2, \beta_3$  的过渡矩阵;

(3) 用公式(4.7)求  $\gamma$  在基  $\beta_1, \beta_2, \beta_3$  下的坐标.

3. 已知  $R^4$  的两组基为:

$$\alpha_1 = [1, 2, -1, 0]^T, \alpha_2 = [1, -1, 1, 1]^T, \alpha_3 = [-1, 2, 1, 1]^T,$$

$$\alpha_4 = [-1, -1, 0, 1]^T.$$

$$\beta_1 = [2, 1, 0, 1]^T, \beta_2 = [0, 1, 2, 2]^T, \beta_3 = [-2, 1, 1, 2]^T, \beta_4 = [1, 3, 1, 2]^T.$$

(1) 求基  $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$  到基  $\beta_1, \beta_2, \beta_3, \beta_4$  的过渡矩阵; 若  $\gamma$  在基  $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$  下的坐标为  $[1, 0, 0, 0]^T$ , 求  $\gamma$  在基  $\beta_1, \beta_2, \beta_3, \beta_4$  下的坐标.

(2) 求基  $\beta_1, \beta_2, \beta_3, \beta_4$  到基  $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$  的过渡矩阵; 若  $\xi$  在  $\beta_1, \beta_2, \beta_3, \beta_4$  下的坐标为  $[1, 2, -1, 0]^T$ , 求  $\xi$  在基  $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$  下的坐标.

(3) 已知向量  $\alpha$  在基  $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$  下的坐标为  $[1, 2, -1, 0]^T$ , 求它在基  $\beta_1, \beta_2, \beta_3, \beta_4$  下的坐标.

4. 在  $R^4$  中找一个向量  $\gamma$ , 它在自然基  $\epsilon_1, \epsilon_2, \epsilon_3, \epsilon_4$  和基  $\beta_1 =$

$[2, 1, -1, 1]^T, \beta_2 = [0, 3, 1, 0]^T, \beta_3 = [5, 3, 2, 1]^T, \beta_4 = [6, 6, 1, 3]^T$ 下有相同的坐标.

5. 已知  $\alpha = [1, 2, -1, 1], \beta = [2, 3, 1, -1], \gamma = [-1, -1, -2, 2]$ .

(1) 求  $\alpha, \beta, \gamma$  的长度及  $\langle \alpha, \beta \rangle, \langle \alpha, \gamma \rangle$ ;

(2) 求与  $\alpha, \beta, \gamma$  都正交的所有向量.

6. 求与  $[1, 1, -1, 1], [1, -1, -1, 1], [2, 1, 1, 3]$  都正交的单位向量.

7. 已知向量  $\beta$  与向量组  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m$  中每个向量都正交, 求证  $\beta$  与  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m$  的任一个线性组合正交.

8. 用施密特正交化方法, 由下列向量组分别构造一组标准正交向量组:

(1)  $[1, 2, 2, -1], [1, 1, -5, 3], [3, 2, 8, -7]$ ;

(2)  $[1, 1, -1, -2], [5, 8, -2, -3], [3, 9, 3, 8]$ ;

(3)  $[2, 1, 3, -1], [7, 4, 3, -3], [1, 1, -6, 0], [5, 7, 7, 8]$ .

9. 用施密特正交化方法, 由下列  $R^3$  的基构造  $R^3$  的一组标准正交基, 并求向量  $\alpha = [1, -1, 0]$  在此标准正交基下的坐标.

(1)  $[1, 1, 1], [0, 1, 1], [1, 0, 1]$ ;

(2)  $[1, -1, 1], [-1, 1, 1], [1, 1, -1]$ .

10. 设  $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$  是  $R^3$  的一组标准正交基, 证明:  $\beta_1 = \frac{1}{3}(2\alpha_1 + 2\alpha_2 - \alpha_3), \beta_2 = \frac{1}{3}(2\alpha_1 - \alpha_2 + 2\alpha_3), \beta_3 = \frac{1}{3}(\alpha_1 - 2\alpha_2 - 2\alpha_3)$  也是  $R^3$  的一组标准正交基.

11. 已知

$$Q = \begin{bmatrix} a & -\frac{3}{7} & \frac{2}{7} \\ b & c & d \\ -\frac{3}{7} & \frac{2}{7} & e \end{bmatrix}$$

为正交矩阵,试求  $a, b, c, d, e$  的值.

12. 证明:若  $A$  是正交矩阵,则  $A$  的伴随矩阵  $A^*$  也是正交矩阵.

13. 证明:若  $A$  是正交矩阵,则:(i)  $A$  的行列式等于 1 或  $-1$ ;  
(ii)  $A^{-1} = A^T$ .

14. 定义:若  $A^2 = I$ ,称  $A$  为对合矩阵.

证明:任意一个方阵如果有三个性质(对称阵,正交阵,对合阵)中的任两个性质,则必有第三个性质.

15. 验证下列矩阵是对称阵、正交阵和对合阵.

$$(1) \begin{bmatrix} \frac{1}{3} & -\frac{2}{3} & -\frac{2}{3} \\ -\frac{2}{3} & \frac{1}{3} & -\frac{2}{3} \\ -\frac{2}{3} & -\frac{2}{3} & \frac{1}{3} \end{bmatrix}; (2) \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix}.$$

\* 16. 如果一个三角形矩阵是正交矩阵,证明这个矩阵是主对角元为  $+1$  或  $-1$  的对角阵.

17. 检验下列集合对指定的加法和数量乘法运算,是否构成实数域上的线性空间:

(1) 全体  $n$  阶实对称(反对称、上三角)矩阵,对矩阵的加法和数量乘法;

(2) 全体  $n$  阶可逆矩阵(正交矩阵),对矩阵的加法和数量乘法;

(3) 全体  $n$  次实系数多项式( $n \geq 1$ ),对多项式的加法和数量乘法;

(4) 平面上不平行于某一向量的全体向量,对向量的加法和数量乘法;

(5) 平面上全体向量,对通常的向量加法和如下定义的数量乘法

$$k \cdot \alpha = O,$$

其中  $k \in R, \alpha$  为任意的平面向量,  $O$  为零向量;

(6) 齐次线性微分方程  $y''' + 3y'' + 3y' + y = 0$  的全体解,对函数加法及数与函数的乘法;

(7) 非齐次线性微分方程  $y''' + 3y'' + 3y' + y = x + 1$  的全体解,对函数的加法及数与函数的乘法;

(8) 全体正实数  $R^+$ ,加法与数量乘法定义为

$$a \oplus b = ab, \quad k \cdot a = a^k,$$

其中  $a, b \in R^+, k \in R$ .

18. 全体复数在实数域上和复数域上,对通常的加法和数乘运算是否都构成线性空间? 如构成线性空间,其维数是多少? 并给出一组基.

19.  $R^3$  的下列子集合,是  $R^3$  的子空间吗? 用定义证明你的结论,并说明几何意义.

(1)  $W_1 = \{(x_1, x_2, x_3) \mid x_1 - x_2 + x_3 = 0\};$

(2)  $W_2 = \{(x_1, x_2, x_3) \mid x_1 + x_2 = 1\};$

(3)  $W_3 = \{(1, x_2, x_3) \mid x_2, x_3 \in R\};$

(4)  $W_4 = \{(x_1, 0, x_3) \mid x_1, x_3 \in R\};$

(5)  $W_5 = \left\{ (x_1, x_2, x_3) \mid x_1 = \frac{x_2}{2} = \frac{x_3}{3} \right\};$

(6)  $W_6 = \left\{ (x_1, x_2, x_3) \mid \frac{x_1 - 1}{2} = \frac{x_2}{3} = \frac{x_3 - 5}{-1} \right\}.$

20. 求 18 题中子空间  $W_1, W_4, W_5$  的基和维数.

21. 设

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & -1 & 1 & -3 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 3 & 2 & -1 & 1 & -2 \end{bmatrix},$$

求齐次线性方程组  $AX=O$  的解空间的维数和解空间的一组标准正交基.

22. 设  $V$  是  $R^5$  的一个二维子空间, 它的一组基为  $\alpha_1=[1, 1, 1, 1, 1], \alpha_2=[1, 1, 0, 1, 1]$ , 试将  $V$  的基扩充为  $R^5$  的基.

23. 求  $R^4$  的子空间

$$V=\{(x_1, x_2, x_3, x_4) | x_1-x_2+x_3-x_4=0\}$$

的基和维数, 并将  $V$  的基扩充为  $R^4$  的基.

24. 在  $R^4$  中, 求下列向量组生成的子空间的基和维数, 并求子空间的一组标准正交基.

$$(1) \begin{cases} \alpha_1=[2, 1, 3, 1], \\ \alpha_2=[1, 2, 0, 1], \\ \alpha_3=[-1, 1, -3, 0], \\ \alpha_4=[1, 1, 1, 1]; \end{cases}$$

$$(2) \begin{cases} \beta_1=[2, 1, 3, -1], \\ \beta_2=[-1, 1, -3, 1], \\ \beta_3=[4, 5, 3, -1], \\ \beta_4=[1, 5, -3, 1]; \end{cases}$$

\* 25. 设  $\alpha, \beta, \gamma \in R^n, c_1, c_2, c_3 \in R$ , 且  $c_1, c_3 \neq 0$ , 证明:

若  $c_1\alpha + c_2\beta + c_3\gamma = 0$ , 则  $L(\alpha, \beta) = L(\beta, \gamma)$ .

26. 对第 1 题中的各线性空间, 求维数及一组基.

27. 设  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$  是  $n$  维线性空间  $V$  的一组基, 又  $V$  中向量  $\alpha_{n+1}$  在这组基下的坐标  $(x_1, x_2, \dots, x_n)$  全不为零. 证明:  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n, \alpha_{n+1}$  中任意  $n$  个向量必构成  $V$  的一组基. 并求  $\alpha_1$  在基  $\alpha_2, \dots, \alpha_n, \alpha_{n+1}$  下的坐标.

28. 设  $R[x]_5$  的旧基为  $1, x, x^2, x^3, x^4$ ; 新基为  $1, 1+x, 1+x+x^2, 1+x+x^2+x^3, 1+x+x^2+x^3+x^4$ .

(1) 求由旧基到新基的过渡矩阵;

(2) 求多项式  $1+2x+3x^2+4x^3+5x^4$  在新基下的坐标;

(3) 若多项式  $f(x)$  在新基下的坐标为  $(1, 2, 3, 4, 5)$ , 求它在旧基下的坐标.

29. 设

$$e_{11} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, e_{12} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, e_{21} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, e_{22} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix},$$

$$g_1 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}, g_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}, g_3 = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, g_4 = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

(1) 证明  $g_1, g_2, g_3, g_4$  是  $R^{2 \times 2}$  的一组基;

(2) 求从基  $e_{11}, e_{12}, e_{21}, e_{22}$  到基  $g_1, g_2, g_3, g_4$  的过渡矩阵;

(3) 求矩阵  $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 2 & -3 \end{bmatrix}$  分别在两组基下的坐标(列)向量.

30. 设

$$A = \begin{bmatrix} 1 & & \\ & \omega & \\ & & \omega^2 \end{bmatrix}, \text{ 其中 } \omega = \frac{-1 + \sqrt{3}i}{2}.$$

(1) 证明  $A$  的全体实系数多项式, 对于矩阵多项式的加法和数量乘法, 构成实数域上的线性空间.

(2) 求这个线性空间的维数及一组基.

31. 设  $A \in R^{n \times n}$ .

(1) 证明全体与  $A$  可交换的矩阵组成  $R^{n \times n}$  的一个子空间, 记作  $C(A)$ ;

(2) 当  $A = I$  时, 求  $C(A)$ ;

(3) 当  $A = \text{diag}(1, 2, \dots, n)$  时, 求  $C(A)$  的维数及一组基.

32. 设

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & 2 \end{bmatrix},$$

求  $R^{3 \times 3}$  中全体与  $A$  可交换的矩阵所组成的子空间的维数及一组



基.

\* 33. 设  $V_1$  和  $V_2$  分别是向量组  $\{\alpha_i\}$  和  $\{\beta_i\}$  生成的子空间, 求  $V_1 \cap V_2, V_1 + V_2$  的基和维数. 设:

$$(1) \begin{cases} \alpha_1 = [1, 2, 1, 0], \\ \alpha_2 = [-1, 1, 1, 1]; \end{cases} \quad \begin{cases} \beta_1 = [2, -1, 0, 1], \\ \beta_2 = [1, -1, 3, 7]; \end{cases}$$
$$(2) \begin{cases} \alpha_1 = [1, 2, -1, -2], \\ \alpha_2 = [3, 1, 1, 1], \\ \alpha_3 = [-1, 0, 1, -1]; \end{cases} \quad \begin{cases} \beta_1 = [2, 5, -6, -5], \\ \beta_2 = [-1, 2, -7, 3]. \end{cases}$$

34. 设  $V_1, V_2$  分别是齐次线性方程组  $x_1 + x_2 + \cdots + x_n = 0$  与  $x_1 = x_2 = \cdots = x_n$  的解空间. 证明  $R^n = V_1 \oplus V_2$ .

35. 设  $W_1$  是  $R^n$  的一个子空间, 且  $W_1 \neq R^n$ . 证明: 在  $R^n$  中必存在另一个子空间  $W_2$ , 使得  $R^n = W_1 \oplus W_2$ .

\* 36. 设

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 & 0 & 1 \\ 2 & 3 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & -1 & -2 \\ 4 & 1 & -13 & 3 & 10 \end{bmatrix}.$$

(1) 求矩阵  $A$  的列空间和行空间的基和维数;

(2) 求矩阵  $A$  的零空间的基和维数;

(3) 求  $A$  的行空间的正交补的维数.

\* 37. 在  $R^3$  中, 下列子空间哪些是正交子空间? 哪些互为正交补? 并说明理由.

$$(1) W_1 = \{(x, y, z) \mid 3x - y + 2z = 0\};$$

$$(2) W_2 = \{(x, y, z) \mid x - y - 2z = 0\};$$

$$(3) W_3 = \left\{ (x, y, z) \mid \frac{x}{3} = \frac{y}{-1} = \frac{z}{2} \right\};$$

$$(4) W_4 = \left\{ (x, y, z) \mid \frac{x}{3} = \frac{y}{5} = \frac{z}{-2} \right\}.$$

38. 设  $\alpha = [x_1, x_2, x_3] \in R^3$ , 下列变换  $\sigma$  是否为  $R^3$  的线性变

换? 并证明之.

$$(1) \sigma(\alpha) = [2x_1, 0, 0]; \quad (2) \sigma(\alpha) = [x_1x_2, 0, x_2];$$

$$(3) \sigma(\alpha) = [x_1, x_2, -x_3]; \quad (4) \sigma(\alpha) = [1, 1, x_3];$$

$$(5) \sigma(\alpha) = \alpha_0 + \alpha, \text{ 其中 } \alpha_0 \in R^3 \text{ 是一固定向量.}$$

39. 若上题中  $[x_1, x_2, x_3]$  是向量  $\alpha$  在自然基  $\{\epsilon_1, \epsilon_2, \epsilon_3\}$  下的坐标, 试说明 (1), (3) 两个线性变换的几何意义.

40. 对上题中 (1), (3) 两个线性变换, 分别求:

(1)  $\sigma$  在自然基  $\{\epsilon_1, \epsilon_2, \epsilon_3\}$  下的对应矩阵;

(2)  $\sigma$  在基  $\alpha_1 = [1, 0, 0], \alpha_2 = [-1, 1, 0], \alpha_3 = [1, -1, 1]$  下的对应矩阵.

41. 在  $R^3$  中定义线性变换

$$\sigma[x_1, x_2, x_3]^T = [x_1 + x_2, x_1 - x_2, x_3]^T.$$

(1) 求  $\sigma$  在自然基  $\{\epsilon_1, \epsilon_2, \epsilon_3\}$  下的对应矩阵;

(2) 求  $\sigma$  在基  $\beta_1 = [1, 0, 0]^T, \beta_2 = [1, 1, 0]^T, \beta_3 = [1, 1, 1]^T$  下的对应矩阵.

42. 设  $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$  和  $\beta_1, \beta_2, \beta_3$  是  $R^3$  的两组基, 已知:  $\beta_1 = 2\alpha_1 + \alpha_2 + 3\alpha_3, \beta_2 = \alpha_1 + \alpha_2 + 2\alpha_3, \beta_3 = -\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3$ ;  $\sigma$  在基  $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$  下的对应矩阵为

$$A = \begin{bmatrix} 5 & 7 & -5 \\ 0 & 4 & -1 \\ 2 & 8 & 3 \end{bmatrix}$$

试求: (1)  $\sigma$  在基  $-\alpha_2, 2\alpha_1, \alpha_3$  下的对应矩阵.

(2)  $\sigma$  在基  $\beta_1, \beta_2, \beta_3$  下的对应矩阵.

43. 已知  $R^3$  的线性变换  $\sigma$  对于基

$$\alpha_1 = [-1, 0, 2]^T, \alpha_2 = [0, 1, 1]^T, \alpha_3 = [3, -1, -6]^T$$

的象为:  $\sigma(\alpha_1) = \beta_1 = [-1, 0, 1]^T, \sigma(\alpha_2) = \beta_2 = [0, -1, 2]^T,$

$$\sigma(\alpha_3) = \beta_3 = [-1, -1, 3]^T.$$

(1) 求  $\sigma$  在基  $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$  下的矩阵表示;

(2) 求  $\sigma(\beta_1), \sigma(\beta_2), \sigma(\beta_3)$ ;

(3)  $\alpha$  在基  $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$  的坐标向量为  $[5, 1, 1]^T$ , 求  $\sigma(\alpha)$  在基  $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$  下的坐标向量;

(4)  $\beta = [1, 1, 1]^T$ , 求  $\sigma(\beta)$ ;

(5)  $\sigma(\gamma)$  在基  $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$  下的坐标向量为  $[2, -4, -2]^T$ , 问: 原象  $\gamma$  是否唯一? 如不唯一, 求所有的原象  $\gamma$ .

44. 在  $R^{n \times n}$  中定义变换  $\sigma(X) = BXC$ , 其中  $B, C \in R^{n \times n}$  是两个固定的矩阵. 证明  $\sigma$  是  $R^{n \times n}$  的线性变换.

45. 求  $R[x]_4$  的微分变换  $D(f(x)) = f'(x)$  在其  $1, 1+x, 1+x+x^2, 1+x+x^2+x^3$  下的对应矩阵.

46. 设 13 题中的

$$B=C=\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}.$$

求  $\sigma(X) = BXC$  在基  $e_{11}, e_{12}, e_{21}, e_{22}$  (如 6 题所给) 下的对应矩阵.

47. 设  $\sigma$  是线性空间  $V$  上的线性变换. 如果  $\sigma^k(\xi) \neq 0$ , 但  $\sigma^{k+1}(\xi) = 0$ , 求证  $\xi, \sigma(\xi), \sigma^2(\xi), \dots, \sigma^k(\xi)$  线性无关 ( $k > 0$ ).

### 补充题

48. 设  $A$  为正交阵,  $I+A$  可逆, 证明:

(1)  $(I-A)(I+A)^{-1}$  可交换;

(2)  $(I-A)(I+A)^{-1}$  为反对称矩阵.

49. 证明: (1) 若  $\det A = 1$ , 则  $A$  为正交矩阵的充分必要条件是,  $A$  的每个元素等于自己的代数余子式; (2) 若  $\det A = -1$ , 则  $A$  为正交阵的充要条件是,  $A$  的每个元素等于其代数余子式乘以  $-1$ .

50. 设  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m \in R^n$ , 证明:  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m$  线性无关的充要条件是

$$\det \begin{bmatrix} (a_1, a_1) & (a_1, a_2) & \cdots & (a_1, a_m) \\ (a_2, a_1) & (a_2, a_2) & \cdots & (a_2, a_m) \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ (a_m, a_1) & (a_m, a_2) & \cdots & (a_m, a_m) \end{bmatrix} \neq 0$$

51. 证明:  $L(a_1, a_2, \cdots, a_i) + L(\beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_i) = L(a_1, \cdots, a_i, \beta_1, \cdots, \beta_i)$ .

52. 设秩  $\{a_1, a_2, \cdots, a_i\} = r$ , 秩  $\{\beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_i\} = p$ .

证明:

$$\dim L(a_1, a_2, \cdots, a_i, \beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_i) \leq r + p$$

53. 设  $A$  是  $m \times n$  的矩阵,  $B$  是  $s \times n$  矩阵, 两个齐次线性方程组  $AX=0, BX=0$  的解空间的交是什么意思? 如何求它们的交?

54. 如何求两个子空间  $L(a_1, a_2, \cdots, a_i)$  与  $L(\beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_i)$  的交.

55. 设  $A$  为  $n$  阶矩阵, 问: 下列命题是否正确? 并说明理由.

(1) 若  $\dim R(A) = n$ , 则  $R(A) = R(A^T)$ ;

(2) 若  $\dim R(A) = m < n$ , 则  $R(A) \neq R(A^T)$ .

56. 设  $V_1, V_2$  是  $R^n$  的两个非平凡子空间, 证明: 在  $R^n$  中存在向量  $\alpha$ , 使  $\alpha \in V_1$ , 且  $\alpha \in V_2$ , 并在  $R^3$  中举例说明此结论.

## 答案

1.  $\frac{1}{4}[5, 1, -1, -1]^T$ .

2. (1)  $[-2, 1, 1]^T$ .

(2)  $\begin{bmatrix} -27 & -71 & -41 \\ 9 & 20 & 9 \\ 4 & 12 & 8 \end{bmatrix}$ . (3)  $\frac{1}{4}[153, -106, 83]^T$ .

$$3. (1) \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

$$(2) \begin{bmatrix} 0 & 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}.$$

$$(3) [3, 1, 0, -2]^T$$

$$4. k[1, 1, 1, -1]^T.$$

$$5. (2) k_1[-5, 3, 1, 0]^T + k_2[5, -3, 0, 1]^T.$$

$$6. \frac{1}{\sqrt{26}}[4, 0, 1, -3]^T.$$

$$8. (1) \frac{1}{\sqrt{10}}[1, 2, 2, -1]^T, \frac{1}{\sqrt{26}}[2, 3, -3, 2]^T, \frac{1}{\sqrt{10}}[2, -1, -1, -2]^T.$$

$$(2) \frac{1}{\sqrt{7}}[1, 1, -1, -2]^T, \frac{1}{\sqrt{39}}[2, 5, 1, 3]^T.$$

$$(3) \frac{1}{\sqrt{15}}[2, 1, 3, -1]^T, \frac{1}{\sqrt{23}}[3, 2, -3, -1]^T,$$

$$\frac{1}{\sqrt{127}}[1, 5, 1, 10]^T.$$

$$9. (1) \frac{1}{\sqrt{3}}[1, 1, 1]^T, \frac{1}{\sqrt{6}}[-2, 1, 1]^T, \frac{1}{\sqrt{2}}[0, -1, 1]^T; \\ \left[0, -\frac{\sqrt{6}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right]^T.$$

$$(2) \frac{1}{\sqrt{3}}[1, -1, 1]^T, \frac{1}{\sqrt{6}}[-1, 1, 2]^T,$$

$$\frac{1}{\sqrt{2}}[1, 1, 0]^T, \left[\frac{2\sqrt{3}}{3}, -\frac{\sqrt{6}}{3}, 0\right]^T.$$

11.  $-\frac{6}{7}, \frac{2}{7}, -\frac{6}{7}, -\frac{3}{7}, -\frac{6}{7}$ , 或  $-\frac{6}{7}, -\frac{2}{7}, \frac{6}{7}, \frac{3}{7}, -\frac{6}{7}$ .

16. 利用列向量组是标准正交向量组或用数学归纳法作证明.

17. (1)是, (2)否, (3)否, (4)否, (5)否, (6)是, (7)否, (8)是.

18. 是; 在实数域上是 2 维, 基  $\{1, i\}$ ; 在复数域上是 1 维, 基  $\{1\}$ .

19. (1), (4), (5)是; (2); (3), (6)不是.

20.  $W_1: 2; [1, 1, 0]^T, [0, 1, 0]^T$ .  $W_4: 2; [1, 0, 0]^T, [0, 0, 1]^T$ ,  $W_5: 1; [1, 2, 3]^T$ .

21.  $2; \frac{1}{\sqrt{3}}[-1, 1, 0, 1, 0]^T, \frac{1}{\sqrt{15}}[1, -2, 0, 3, 1]^T$ .

22.  $[1, 1, 1, 1, 1]^T, [1, 1, 0, 1, 1]^T, [0, 0, 0, 1, 0]^T, [0, 0, 0, 0, 1]^T, [1, 0, 0, 0, 0]^T$ .

23.  $3; [1, 1, 0, 0, 0]^T, [1, 0, -1, 0]^T, [1, 0, 0, 1]^T; [1, 1, 0, 0]^T, [1, 0, -1, 0]^T, [1, 0, 0, 1]^T, [1, 0, 0, 0]^T$ .

24. (1)  $3; \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3; \frac{1}{\sqrt{15}}[2, 1, 3, 1]^T, \frac{1}{\sqrt{39}}[1, 5, -3, 2]^T, \frac{1}{\sqrt{390}}[-4, -7, -1, 18]^T$ . (2)  $2; \beta_1, \beta_2; \frac{1}{\sqrt{15}}[2, 1, 3, -1]^T, \frac{1}{\sqrt{885}}[7, 26, -12, 4]^T$ .

36. (1)  $2; \alpha_1, \alpha_2, 2; \beta_1, \beta_2$ . (2)  $3; [4, -3, 1, 0, 0]^T, [-1, 1, 0, 1, 0]^T, [-3, 2, 0, 0, 1]^T$ . (3) 3.

37.  $W_1 \perp W_3$  且  $W_1 = W_3^\perp, W_2 \perp W_4$ .

38. (1), (3)是; (2), (4)否.

40. (1)  $\begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix},$

$$(2) \begin{bmatrix} 2 & -2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}.$$

$$41. (1) \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, (2) \begin{bmatrix} 0 & 2 & 2 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

$$42. (1) \begin{bmatrix} 4 & 0 & 1 \\ \frac{7}{2} & -5 & \frac{5}{2} \\ -8 & 4 & 3 \end{bmatrix}, (2) \begin{bmatrix} 37 & 24 & 12 \\ -54 & -34 & -18 \\ 18 & 12 & 9 \end{bmatrix}.$$

$$43. (1) \begin{bmatrix} -2 & 9 & 7 \\ -1 & 2 & 1 \\ -1 & 3 & 2 \end{bmatrix}, (2) [3, 2, 7]^T, [-12, -5, 22]^T, [-9,$$

$-3, 15]^T, (3) [6, -2, 0]^T, (4) [-7, -5, 17]^T, (5) [8-k, 2-k, k]^T, k$  为任意常数.

48. (1) 利用  $(I+A)(I-A) = (I-A)(I+A)$ .

(2) 利用  $I = A^T A$ .

49. 利用  $A^T = A^{-1} = \frac{1}{|A|} A^*$ .

50. 用反证法.

55. (1) 正确. (2) 不正确, 反例:  $A$  为非满秩的实对称矩阵.

56. 存在  $\alpha_1 \notin V_2$ , 但  $\alpha_1 \in V_1$ ;  $\alpha_2 \notin V_1$ , 但  $\alpha_2 \in V_2$ , 证明  $\alpha_1 + \alpha_2$  满足要求.

## 5 特征值和特征向量 矩阵的对角化

前两章讨论的问题,几乎都涉及到线性方程组求解,为此而把矩阵简化为阶梯形所采用的主要方法是初等变换.今后要讨论的主要问题,虽然仍要把矩阵简化为对角形或上三角形,但是主要的技巧不再是初等变换,尽管解决问题时仍要用到初等变换,但它仅起辅助的作用.这一章主要讨论:矩阵的特征值和特征向量;矩阵在相似意义下化为对角形;实对称矩阵的对角化.

### 5.1 矩阵的特征值和特征向量 相似矩阵

#### 5.1.1 特征值和特征向量的基本概念

**定义 1** 设  $A$  为复数域  $K$  上的  $n$  阶矩阵,如果存在数  $\lambda \in K$  和非零的  $n$  维向量  $X$ ,使得

$$AX = \lambda X, \quad (5.1)$$

就称  $\lambda$  是矩阵  $A$  的**特征值**,  $X$  是  $A$  的属于(或对应于)特征值  $\lambda$  的**特征向量**.

注意:特征向量  $X \neq 0$ ;特征值问题是对方阵而言的,本章的矩阵如不加说明,都是方阵.

根据定义, $n$  阶矩阵  $A$  的特征值,就是使齐次线性方程组

$$(\lambda I - A)X = 0$$

有非零解的  $\lambda$  值.即满足方程

$$\det(\lambda I - A) = 0 \quad (5.2)$$



的  $\lambda$  都是矩阵  $A$  的特征值. 因此, 特征值是  $\lambda$  的多项式  $\det(\lambda I - A)$  的根.

**定义 2** 设  $n$  阶矩阵  $A = [a_{ij}]$ , 则

$$f(\lambda) = \det(\lambda I - A) = \begin{vmatrix} \lambda - a_{11} & -a_{12} & \cdots & -a_{1n} \\ -a_{21} & \lambda - a_{22} & \cdots & -a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ -a_{n1} & -a_{n2} & \cdots & \lambda - a_{nn} \end{vmatrix} \quad (5.3)$$

称为矩阵  $A$  的**特征多项式**,  $\lambda I - A$  称为  $A$  的**特征矩阵**, (5.2) 式称为  $A$  的**特征方程**.

显然,  $n$  阶矩阵  $A$  的特征多项式是  $\lambda$  的  $n$  次多项式. 特征多项式的  $k$  重根也称为  $k$  重特征值. 当  $n \geq 5$  时, 特征多项式没有一般的求根公式, 即使是三阶矩阵的特征多项式, 一般也难以求根, 所以求矩阵的特征值一般要采用近似计算的方法, 它是计算方法课中的一个专题.

**例 1** 求矩阵

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 \\ -4 & 3 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

的特征值和特征向量.

**解** 矩阵  $A$  的特征方程为

$$\det(\lambda I - A) = \begin{vmatrix} \lambda + 1 & -1 & 0 \\ 4 & \lambda - 3 & 0 \\ -1 & 0 & \lambda - 2 \end{vmatrix} = 0,$$

化简得  $(\lambda - 2)(\lambda - 1)^2 = 0$ ,  $A$  的特征值为  $\lambda_1 = 2, \lambda_2 = 1$  (二重特征值).

当  $\lambda_1 = 2$  时, 由  $(\lambda_1 I - A)X = O$ , 即

$$\begin{bmatrix} 3 & -1 & 0 \\ 4 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix},$$

得其基础解系为  $X_1 = (0, 0, 1)^T$ , 因此  $k_1 X_1$  ( $k_1 \neq 0$  为常数) 是  $A$  的对应于  $\lambda_1 = 2$  的特征向量.

当  $\lambda_2 = 1$  时, 由  $(\lambda_2 I - A) = 0$ , 即

$$\begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 4 & -2 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

得基础解系是  $X_2 = (1, 2, -1)^T$ , 因此  $k_2 X_2$  ( $k_2 \neq 0$  为常数) 是  $A$  的对应于  $\lambda_2 = 1$  的特征向量.

**例 2** 主对角元为  $a_{11}, a_{22}, \dots, a_{nn}$  的对角阵  $A$  或上(下)三角阵  $B$  的特征多项式是

$$|\lambda I - A| = |\lambda I - B| = (\lambda - a_{11})(\lambda - a_{22}) \cdots (\lambda - a_{nn}),$$

故  $A, B$  的  $n$  个特征值就是  $n$  个主对角元.

### 5.1.2 特征值和特征向量的性质

**定理 1** 若  $X_1$  和  $X_2$  都是  $A$  的属于特征值  $\lambda_0$  的特征向量, 则  $k_1 X_1 + k_2 X_2$  也是  $A$  的属于  $\lambda_0$  的特征向量 (其中  $k_1, k_2$  是任意常数, 但  $k_1 X_1 + k_2 X_2 \neq 0$ ).

**证** 由于  $X_1, X_2$  是齐次线性方程组

$$(\lambda_0 I - A)X = 0$$

的解, 因此  $k_1 X_1 + k_2 X_2$  也是上式的解, 故当  $k_1 X_1 + k_2 X_2 \neq 0$  时, 是  $A$  的属于  $\lambda_0$  的特征向量. ■

在  $(\lambda_0 I - A)X = 0$  的解空间中, 除零向量以外的全体解向量就是  $A$  的属于特征值  $\lambda$  的全体特征向量, 因此,  $(\lambda I - A)X = 0$  的解空间也称为矩阵  $A$  关于特征值  $\lambda$  的特征子空间, 记作  $V_\lambda$ .  $n$  阶矩阵  $A$  的特征子空间是  $n$  维向量空间的子空间, 它的维数为

$$\dim V_\lambda = n - r(\lambda I - A).$$

需要注意的是,  $n$  阶实矩阵的特征值可能是复数, 所以特征子空间一般是  $n$  维复向量空间  $K^n$  (见附录) 的子空间.

例 1 中矩阵  $A$  的两个特征子空间为

$$V_{\lambda_1} = \{kX | X = (0, 0, 1)'\}, k \in K,$$

$$V_{\lambda_2} = \{kX | X = (1, -2, -1)'\}, k \in K.$$

**定理 2** 设  $n$  阶矩阵  $A = [a_{ij}]$  的  $n$  个特征值为  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ . 则

$$(i) \sum_{i=1}^n \lambda_i = \sum_{i=1}^n a_{ii};$$

$$(ii) \prod_{i=1}^n \lambda_i = \det A.$$

(其中  $\sum_{i=1}^n a_{ii}$  是  $A$  的主对角元之和, 称为矩阵  $A$  的迹, 记作  $\text{tr}(A)$ .)

证 设

$$\det(\lambda I - A) = \begin{vmatrix} \lambda - a_{11} & 0 - a_{12} & \cdots & 0 - a_{1n} \\ 0 - a_{21} & \lambda - a_{22} & \cdots & 0 - a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 - a_{n1} & 0 - a_{n2} & \cdots & \lambda - a_{nn} \end{vmatrix} \quad (5.4)$$

$$= \lambda^n + c_1 \lambda^{n-1} + c_2 \lambda^{n-2} + \cdots + c_{n-1} \lambda + c_n.$$

解成  $2^n$  个行列式之和, 其中展开后含  $\lambda^{n-1}$  项的行列式有下面  $n$  个

$$\begin{vmatrix} -a_{11} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ -a_{21} & \lambda & 0 & \cdots & 0 \\ -a_{31} & 0 & \lambda & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ -a_{n1} & 0 & 0 & \cdots & \lambda \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} \lambda & -a_{12} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & -a_{22} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & -a_{32} & \lambda & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & -a_{n2} & 0 & \cdots & \lambda \end{vmatrix}, \dots,$$

$$\begin{vmatrix} \lambda & 0 & 0 & \cdots & -a_{1n} \\ 0 & \lambda & 0 & \cdots & -a_{2n} \\ 0 & 0 & \lambda & \cdots & -a_{3n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & -a_{nn} \end{vmatrix}.$$

它们之和等于

$$-(a_{11} + a_{22} + \cdots + a_{nn})\lambda^{n-1} = \left(-\sum_{i=1}^n a_{ii}\right)\lambda^{n-1},$$

即(5.5)式中的  $c_1 = -\sum_{i=1}^n a_{ii}$ .

又(5.4)式展开后不含  $\lambda$  的常数项为

$$\begin{vmatrix} -a_{11} & -a_{12} & \cdots & -a_{1n} \\ -a_{21} & -a_{22} & \cdots & -a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ -a_{n1} & -a_{n2} & \cdots & -a_{nn} \end{vmatrix} = (-1)^n \det A,$$

即(5.5)式中的  $c_n = (-1)^n \det A$ .

假设  $A$  的  $n$  个特征值为  $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n$ , 根据  $n$  次多项式根和系数的关系, 得

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n \lambda_i &= -c_1 = \sum_{i=1}^n a_{ii}, \\ (-1)^n \prod_{i=1}^n \lambda_i &= c_n = (-1)^n \det A, \end{aligned}$$

故

$$\prod_{i=1}^n \lambda_i = \det A. \quad \blacksquare$$

由定理 1(ii)可知: 当  $\det A \neq 0$  时,  $A$  的特征值全为非零数; 当  $\det A = 0$  时,  $A$  至少有一个零特征值.

有兴趣的读者, 可以证明(5.5)式中一般的  $c_k$  为:

$$c_k = (-1)^k s_k, \quad k = 1, 2, \cdots, n.$$

其中  $s_k$  为  $n$  阶矩阵  $A$  的全体  $k$  阶主子式之和.

矩阵的特征向量总是相对于矩阵的特征值而言的. 一个特征向量不能属于不同的特征值, 这是因为, 如果  $X$  同时是  $A$  的属于特征值  $\lambda_1, \lambda_2 (\lambda_1 \neq \lambda_2)$  的特征向量, 即有

$$AX = \lambda_1 X \text{ 且 } AX = \lambda_2 X,$$

则  $\lambda_1 X = \lambda_2 X$  即  $(\lambda_1 - \lambda_2)X = O$ .

由于  $\lambda_1 - \lambda_2 \neq 0$ , 则  $X = O$ , 而这是不可能的.

矩阵的特征值和特征向量还有以下性质:

**性质 1** 若  $\lambda$  是矩阵  $A$  的特征值,  $X$  是  $A$  的属于  $\lambda$  的特征向量, 则

(i)  $k\lambda$  是  $kA$  的特征值 ( $k$  是任意常数),

(ii)  $\lambda^m$  是  $A^m$  的特征值 ( $m$  是正整数),

(iii) 当  $A$  可逆时,  $\lambda^{-1}$  是  $A^{-1}$  的特征值;

且  $X$  仍是矩阵  $kA, A^m, A^{-1}$  的分别对应于特征值  $k\lambda, \lambda^m, \frac{1}{\lambda}$  的特征向量.

**证** (i) 的证明留给读者练习.

(ii) 由已知条件  $AX = \lambda X$ , 可得

$$A(AX) = A(\lambda X) = \lambda(AX) = \lambda(\lambda X),$$

即  $A^2 X = \lambda^2 X$ .

再继续施行上述步骤  $m-2$  次, 就得

$$A^m X = \lambda^m X,$$

故  $\lambda^m$  是矩阵  $A^m$  的特征值, 且  $X$  也是  $A^m$  对应于  $\lambda^m$  的特征向量.

(iii) 当  $A$  可逆时,  $\lambda \neq 0$ , 由  $AX = \lambda X$  可得

$$A^{-1}(AX) = A^{-1}(\lambda X) = \lambda A^{-1}X,$$

因此  $A^{-1}X = \lambda^{-1}X$ ,

故  $\lambda^{-1}$  是  $A^{-1}$  的特征值, 且  $X$  也是  $A^{-1}$  对应于  $\lambda^{-1}$  的特征向量. ■

**性质 2** 矩阵  $A$  和  $A^T$  的特征值相同.

证 因为  $(\lambda I - A)^T = (\lambda I)^T - A^T = \lambda I - A^T$ ,  
所以  $\det(\lambda I - A) = \det(\lambda I - A^T)$ .

因此,  $A$  和  $A^T$  有完全相同的特征值. ■

**定理 3** 设  $A = (a_{ij})$  是  $n$  阶矩阵, 若

$$(1) \sum_{j=1}^n |a_{ij}| < 1 \quad (i = 1, 2, \dots, n)$$

$$(2) \sum_{i=1}^n |a_{ij}| < 1 \quad (j = 1, 2, \dots, n)$$

有一个成立, 则  $A$  的所有特征值  $\lambda_k (k=1, 2, \dots, n)$  的模 (当  $\lambda$  为实数时, 是指  $\lambda_k$  的绝对值)  $|\lambda_k|$  小于 1.

证 设  $\lambda$  为  $A$  的任一特征值,  $X$  为  $\lambda$  对应的特征向量, 由  $AX = \lambda X$ , 即

$$\sum_{j=1}^n a_{ij} x_j = \lambda x_i \quad (i = 1, 2, \dots, n).$$

记  $\max_{1 \leq j \leq n} |x_j| = x_k$ , 则有

$$|\lambda| = \left| \frac{\lambda x_k}{x_k} \right| = \left| \frac{\sum_{j=1}^n a_{kj} x_j}{x_k} \right| \leq \sum_{j=1}^n |a_{kj}| \left| \frac{x_j}{x_k} \right| \leq \sum_{j=1}^n |a_{kj}|.$$

由此可见, 若 (1) 成立, 则  $|\lambda| < 1$ . 因此, 由  $\lambda$  的任意性即得  $|\lambda_k| < 1$  ( $k=1, \dots, n$ ). 同理, 若 (2) 成立, 则  $A^T$  的所有特征值即  $A$  的所有特征值的模小于 1.

**例 3** 设

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & -2 & 2 \\ -1 & 1 & -1 \end{bmatrix}.$$

(i) 求  $A$  的特征值和特征向量;

(ii) 求可逆阵  $P$ , 使  $P^{-1}AP$  为对角阵.

**解** (i)

$$\begin{aligned}
 |\lambda I - A| &= \begin{vmatrix} \lambda - 1 & 1 & -1 \\ -2 & \lambda + 2 & -2 \\ 1 & -1 & \lambda + 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \lambda - 1 & 0 & -1 \\ -2 & \lambda & -2 \\ 1 & \lambda & \lambda + 1 \end{vmatrix} \\
 &= \begin{vmatrix} \lambda - 1 & 0 & -1 \\ -2 & \lambda & -2 \\ 3 & 0 & \lambda + 3 \end{vmatrix} = \lambda[(\lambda - 1)(\lambda + 3) + 3] \\
 &= \lambda^2(\lambda + 2),
 \end{aligned}$$

$A$  的特征值  $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$  (二重特征值) 和  $\lambda_3 = -2$ .

当  $\lambda_1 = 0$  时, 由  $(\lambda_1 I - A)X = O$  即  $AX = O$  得基础解系  $X_1 = (1, 1, 0)^T$  和  $X_2 = (-1, 0, 1)^T$ , 故  $A$  对应于  $\lambda_1 = 0$  的全体特征向量为  $k_1 X_1 + k_2 X_2 = k_1 (1, 1, 0)^T + k_2 (-1, 0, 1)^T$  (其中  $k_1, k_2$  为不全为零的任意常数).

当  $\lambda_3 = -2$  时, 由  $(\lambda_3 I - A)X = O$ , 即

$$\begin{bmatrix} -3 & 1 & -1 \\ -2 & 0 & -2 \\ 1 & -1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix},$$

得基础解系为  $X_3 = (-1, -2, 1)^T$ ,  $A$  对应于  $\lambda_3 = -2$  的全体特征向量为  $k_3 X_3 = k_3 (-1, -2, 1)^T$ , ( $k_3$  为非零任意常数).

(ii) 将  $AX_i = \lambda_i X_i$  ( $i=1, 2, 3$ ) 排成矩阵等式

$$A \begin{bmatrix} | & | & | \\ X_1 & X_2 & X_3 \\ | & | & | \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} | & | & | \\ X_1 & X_2 & X_3 \\ | & | & | \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{bmatrix},$$

取

$$P = \begin{bmatrix} | & | & | \\ X_1 & X_2 & X_3 \\ | & | & | \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}, \quad \Lambda = \begin{bmatrix} 0 & & \\ & 0 & \\ & & -2 \end{bmatrix},$$

则  $AP = P\Lambda$ , 且  $|P| = 2 \neq 0$ , 因此就得

$P^{-1}AP = \Lambda$  为对角阵.

### 5.1.3 相似矩阵及其性质

**定义 3** 对于矩阵  $A$  和  $B$ , 若存在可逆矩阵  $P$ , 使  $P^{-1}AP = B$ , 就称  $A$  相似于  $B$ , 记作  $A \sim B$ .

矩阵的相似关系也是一种等价关系, 即也有以下三条性质.

(i) 反身性:  $A \sim A$ .

(ii) 对称性: 若  $A \sim B$ , 则  $B \sim A$ .

(iii) 传递性: 若  $A \sim B, B \sim C$ , 则  $A \sim C$ .

它们的证明, 留给读者作为练习.

相似矩阵有以下性质:

(1)  $P^{-1}(k_1A_1 + k_2A_2)P = k_1P^{-1}A_1P + k_2P^{-1}A_2P$  (其中  $k_1, k_2$  是任意常数).

(2)  $P^{-1}(A_1A_2)P = (P^{-1}A_1P)(P^{-1}A_2P)$ .

(3) 若  $A \sim B$ , 则  $A^m \sim B^m$ , ( $m$  为正整数).

**证** 因为  $A \sim B$ , 所以存在可逆矩阵  $P$ ,

使

$$P^{-1}AP = B,$$

于是

$$\begin{aligned} B^m &= (P^{-1}AP)(P^{-1}AP)\cdots(P^{-1}AP) \\ &= P^{-1}A^mP, \end{aligned}$$

故

$$A^m \sim B^m.$$

(4) 若  $A \sim B$ , 则  $f(A) \sim f(B)$ , 其中

$$f(x) = a_nx^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1x + a_0,$$

$$f(A) = a_nA^n + a_{n-1}A^{n-1} + \cdots + a_1A + a_0I.$$

利用性质(1), (3)的结论, 容易证明性质(4).

第(5)条性质是一个重要的结论, 我们把它写成一个定理.

**定理 4** 相似矩阵的特征值相同.

**证** 只需证明相似矩阵有相同的特征多项式. 设  $A \sim B$ , 则存在可逆矩阵  $P$ , 使得

$$P^{-1}AP = B.$$



于是

$$\begin{aligned} |\lambda I - B| &= |\lambda I - P^{-1}AP| \\ &= |P^{-1}(\lambda I - A)P| = |P^{-1}| |\lambda I - A| |P| \\ &= |\lambda I - A| \quad (\text{因 } |P^{-1}| |P| = 1) \quad \blacksquare \end{aligned}$$

必须注意,定理 4 的逆命题不成立,例如

$$I = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix},$$

都以 1 为二重特征值,但对于任何可逆矩阵  $P$ ,都有  $P^{-1}IP = I \neq A$ ,故  $A$  和  $I$  不相似.

## 5.2 矩阵可对角化的条件

所谓矩阵可对角化指的是,矩阵与对角阵相似.本节讨论矩阵可对角化的条件.其主要结论是:矩阵可对角化的充分必要条件是  $n$  阶矩阵有  $n$  个线性无关的特征向量,或矩阵的每个特征值的(代数)重数等于对应特征子空间的(几何)维数.

今后我们常将主对角元为  $a_1, a_2, \dots, a_n$  的对角阵记作  $\text{diag}(a_1, a_2, \dots, a_n)$ ,或记作  $\Lambda$ .

从 5.1 节例 3 可见,当三阶矩阵  $A$  有三个线性无关的特征向量  $X_1, X_2, X_3$  时,取  $P = [X_1, X_2, X_3]$  就有

$$P^{-1}AP = \text{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3),$$

其中  $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$  分别是特征向量  $X_1, X_2, X_3$  所对应的特征值.这表明,三阶矩阵  $A$  有三个线性无关的特征向量是  $A$  与对角阵相似的充分条件.事实上它也是必要条件.下面给出一般结论.

**定理 1**  $n$  阶矩阵  $A$  与对角阵相似的充要条件是: $A$  有  $n$  个线性无关的特征向量.

**证** 必要性:设

$$P^{-1}AP = \text{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n) \xrightarrow{\text{记作}} \Lambda,$$

即  $AP = P\Lambda$ .

将  $P$  矩阵按列分块, 表示成

$$P = \left[ \begin{array}{c|c|c|c} | & | & & | \\ X_1 & X_2 & \cdots & X_n \\ | & | & & | \end{array} \right] \xrightarrow{\text{记作}} [X_1, X_2, \dots, X_n],$$

则

$$A[X_1, X_2, \dots, X_n] = [X_1, X_2, \dots, X_n] \begin{bmatrix} \lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n \end{bmatrix},$$

即  $[AX_1, AX_2, \dots, AX_n] = [\lambda_1 X_1, \lambda_2 X_2, \dots, \lambda_n X_n]$ ,

于是

$$AX_i = \lambda_i X_i \quad (i = 1, 2, \dots, n).$$

故  $X_1, X_2, \dots, X_n$  是  $A$  分别对应于特征值  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$  的特征向量. 由于  $P$  可逆, 所以它们是线性无关的, 必要性得证.

上述步骤显然可逆, 所以充分性也成立. ■

例 1 中的  $A$  只存在两个线性无关的特征向量, 所以不可对角化.

由 5.1 节定理 4 可知: 若  $A$  与对角阵  $\Lambda$  相似, 则  $\Lambda$  的主对角元都是  $A$  的特征值. 若不计  $\lambda_i$  的排列顺序, 则  $\Lambda$  是唯一的, 称  $\Lambda$  为  $A$  的相似标准形.

**定理 2** 矩阵  $A$  的属于不同特征值的特征向量是线性无关的.

**证** 设  $A$  的  $m$  个互不相同的特征值为  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_m$ , 其相应的特征向量分别为  $X_1, X_2, \dots, X_m$ .

对  $m$  作归纳法, 证明  $X_1, X_2, \dots, X_m$  线性无关.

当  $m=1$  时, 结论显然成立 (因为特征向量  $X_1 \neq 0$ ).

设  $k$  个不同特征值  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_k$  的特征向量  $X_1, X_2, \dots, X_k$  线

性无关,下面考虑  $k+1$  个不同特征值的特征向量的情况.

$$\text{设 } a_1X_1 + a_2X_2 + \cdots + a_kX_k + a_{k+1}X_{k+1} = O, \quad (1)$$

$$\text{则 } A(a_1X_1 + a_2X_2 + \cdots + a_kX_k + a_{k+1}X_{k+1}) = O,$$

$$\text{即 } a_1\lambda_1X_1 + a_2\lambda_2X_2 + \cdots + a_k\lambda_kX_k + a_{k+1}\lambda_{k+1}X_{k+1} = O. \quad (2)$$

将①式乘  $\lambda_{k+1}$ ,再减去②式得

$$a_1(\lambda_{k+1}-\lambda_1)X_1 + a_2(\lambda_{k+1}-\lambda_2)X_2 + \cdots + a_k(\lambda_{k+1}-\lambda_k)X_k = O.$$

根据归纳假设  $X_1, X_2, \cdots, X_k$  线性无关,所以

$$a_i(\lambda_{k+1}-\lambda_i) = 0, i = 1, 2, \cdots, k.$$

$$\text{由于 } \lambda_{k+1} \neq \lambda_i, i = 1, 2, \cdots, k,$$

$$\text{所以 } a_i = 0, i = 1, 2, \cdots, k. \quad (3)$$

将③式代入①式,得

$$a_{k+1}X_{k+1} = O$$

由于特征向量  $X_{k+1} \neq O$ ,故  $a_{k+1} = 0$ ,故  $X_1, X_2, \cdots, X_{k+1}$  线性无关. ■

**推论** 若  $n$  阶矩阵  $A$  有  $n$  个互不相同的特征值,则  $A$  与对角阵相似.

但必须注意,推论的逆不成立,如 5.1 节例 3,  $A$  与对角阵相似,但特征值中 0 是二重特征根.

**定理 3** 设  $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_m$  是  $n$  阶矩阵  $A$  的  $m$  个互异特征值,对应于  $\lambda_i$  的线性无关的特征向量为  $X_{i1}, X_{i2}, \cdots, X_{ir_i} (i = 1, 2, \cdots, m)$ ,则由所有这些特征向量(共  $r_1 + r_2 + \cdots + r_m$  个)构成的向量组  $\{X_{i1}, \cdots, X_{ir_i} | i = 1, 2, \cdots, m\}$  是线性无关的.

$$\text{证 设 } \sum_{i=1}^m (k_{i1}X_{i1} + k_{i2}X_{i2} + \cdots + k_{ir_i}X_{ir_i}) = O, \quad (1)$$

$$\text{记 } Y_i = k_{i1}X_{i1} + k_{i2}X_{i2} + \cdots + k_{ir_i}X_{ir_i}. \quad (2)$$

①式化为

$$Y_1 + Y_2 + \cdots + Y_m = O, \quad (3)$$

其中  $Y_i$  是对应于  $\lambda_i$  的特征向量或零向量( $i = 1, \cdots, m$ ). 根据定理

2, ③式中的  $Y_1, Y_2, \dots, Y_m$  都不是特征向量(因为它们中如有一个或几个是特征向量, 则由其线性无关性可知它们之和不等于 0), 所以

$$Y_i = 0, \quad i = 1, 2, \dots, m. \quad (4)$$

由于  $X_{i_1}, X_{i_2}, \dots, X_{i_{r_i}}$  是线性无关的, 因此由④和②可得

$$k_{i_1} = k_{i_2} = \dots = k_{i_{r_i}} = 0, \quad i = 1, 2, \dots, m.$$

故定理的结论成立. ■

由定理 3 可知, 5.1 节例 3 中  $A$  的特征向量  $X_1, X_2, X_3$  是线性无关的.

**定理 4** 设  $\lambda_0$  是  $n$  阶矩阵  $A$  的一个  $k$  重特征值, 对应于  $\lambda_0$  的特征向量线性无关的最大个数为  $l$ , 则  $k \geq l$ .

**证** 用反证法. 设  $l > k$ , 由于

$$AX_i = \lambda_0 X_i, \quad X_i \neq 0, \quad i = 1, 2, \dots, l. \quad (1)$$

将  $X_1, X_2, \dots, X_l$  扩充为  $n$  维向量空间  $K^n$  的一组基:

$$X_1, X_2, \dots, X_l, X_{l+1}, \dots, X_n,$$

其中  $X_{l+1}, \dots, X_n$  一般不是  $A$  的特征向量, 但  $AX_m \in K^n$ , 可用上述的一组基线性表示, 即

$$\begin{aligned} AX_m &= a'_{1m}X_1 + a'_{2m}X_2 + \dots + a'_{lm}X_l \\ &\quad + a'_{l+1m}X_{l+1} + \dots + a'_{nm}X_n. \end{aligned} \quad (2)$$

$(m = l+1, \dots, n)$

将①, ②中的  $n$  个等式写成一个矩阵等式

$$A[X_1, \dots, X_l, X_{l+1}, \dots, X_n] = [X_1, \dots, X_l, X_{l+1}, \dots, X_n] \begin{bmatrix} \lambda_0 & & & a'_{1\ l+1} & \dots & a'_{1n} \\ & \lambda_0 & & \vdots & & \vdots \\ & & \ddots & \vdots & & \vdots \\ & & & \lambda_0 & a'_{l\ l+1} & \dots & a'_{ln} \\ & & & & a'_{l+1\ l+1} & \dots & a'_{l+1n} \\ & & & & \vdots & & \vdots \\ & & & & a'_{n\ l+1} & \dots & a'_{nn} \end{bmatrix}, \quad (3)$$

其中  $\lambda_0$  有  $l$  个.

记  $P = [X_1, \dots, X_l, \dots, X_n]$ ,

并将③式右端矩阵分块表示,则有

$$P^{-1}AP = \begin{bmatrix} \lambda_0 I_l & A_1 \\ O & A_2 \end{bmatrix}.$$

根据相似矩阵有相同的特征多项式,得

$$\begin{aligned} |\lambda I_n - A| &= |\lambda I_n - P^{-1}AP| \\ &= \begin{vmatrix} (\lambda - \lambda_0)I_l & -A_1 \\ O & \lambda I_{n-l} - A_2 \end{vmatrix} \\ &= |(\lambda - \lambda_0)I_l| |\lambda I_{n-l} - A_2| \\ &= (\lambda - \lambda_0)^l g(\lambda). \end{aligned} \quad ①$$

其中  $g(\lambda) = |\lambda I_{n-l} - A_2|$  是  $\lambda$  的  $n-l$  次多项式.

由④式可知,  $\lambda_0$  至少是  $A$  的  $l$  ( $l > k$ ) 重特征值, 与  $\lambda_0$  是  $k$  重特征值矛盾. 所以  $l \leq k$ . ■

由于  $(\lambda_0 I - A)X = O$  的基础解系含  $l = n - r(\lambda_0 I - A)$  个向量, 即特征子空间的维数  $\dim V_{\lambda_0} \leq l$ , 定理 4 也可以叙述为:  $\dim V_{\lambda_0} \leq$  特征值  $\lambda_0$  的重数.

**定理 5**  $n$  阶矩阵  $A$  与对角阵相似的充分必要条件是:  $A$  的每个特征值对应的特征向量线性无关的最大个数等于该特征值的重数(即  $A$  的每个特征子空间  $V_{\lambda_i}$  的维数等于特征值  $\lambda_i$  的重数).

证 设  $|\lambda I - A| = \prod_{i=1}^m (\lambda - \lambda_i)^{r_i},$

其中  $\lambda_1, \dots, \lambda_m \in K$  且互异, 又有  $\sum_{i=1}^m r_i = n$  (在复数域中).

充分性: 由于对应于  $\lambda_i$  的特征向量有  $r_i$  个线性无关, 又  $m$  个特征值互异, 由定理 3,  $A$  有  $n$  个线性无关的特征向量, 依据定理 1,  $A$  与对角阵相似.

必要性: 用反证法, 设有一个特征值  $\lambda_i$  所对应的线性无关的

特征向量的最大个数  $l_i < \lambda_i$  的重数  $r_i$ , 则由定理 4 可知,  $A$  的线性无关的特征向量个数小于  $n$ , 故  $A$  不能与对角阵相似. ■

**例 1** 设实对称矩阵

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & -1 & 1 \end{bmatrix}.$$

问:  $A$  是否与对角阵相似? 若与对角阵相似, 求对角阵  $\Lambda$  及可逆阵  $P$ , 使得  $P^{-1}AP = \Lambda$ . 再求  $A^k$  ( $k$  为正整数).

**解**  $A$  的特征多项式

$$\begin{aligned} |\lambda I - A| &= \begin{vmatrix} \lambda - 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & \lambda - 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & \lambda - 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & \lambda - 1 \end{vmatrix} \\ &= (\lambda + 2) \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & \lambda - 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & \lambda - 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & \lambda - 1 \end{vmatrix} \\ &= (\lambda + 2) \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & \lambda - 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda - 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda - 2 \end{vmatrix} \\ &= (\lambda + 2)(\lambda - 2)^3. \end{aligned}$$

所以  $A$  的特征值  $\lambda_1 = -2$  (单根),  $\lambda_2 = 2$  (三重根).

由  $(\lambda_1 I - A)X = 0$ , 即

$$\begin{bmatrix} -3 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -3 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -3 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

得  $\lambda_1$  对应的特征向量为  $\{k_1 X_1 | X_1 = (1, 1, 1, 1)^T, k_1 \neq 0\}$ .

由  $(\lambda_2 I - A)X = 0$ , 即

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0,$$

得基础解系为  $X_{21} = (1, -1, 0, 0)^T$ ,  $X_{22} = (1, 0, -1, 0)^T$ ,  $X_{23} = (1, 0, 0, -1)^T$ . 故有 3 个线性无关的特征向量, 故  $A$  与对角阵相似.

取

$$P = (X_1, X_{21}, X_{22}, X_{23}) = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix},$$

则

$$P^{-1}AP = \begin{bmatrix} -2 & & & \\ & 2 & & \\ & & 2 & \\ & & & 2 \end{bmatrix} = \Lambda.$$

$\Lambda$  的 4 个对角元依次是 4 个特征向量所对应的特征值. 由于特征向量 (或  $(\lambda I - A)X = 0$  的基础解系) 不唯一, 所求  $P$  也不唯一.

由  $A = PAP^{-1}$ , 可得

$$A^k = (PAP^{-1})^k = PAP^{-1} \cdot PAP^{-1} \cdots PAP^{-1} = PA^k P^{-1}$$

$$\begin{aligned} &= \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} (-2)^k & & & \\ & 2^k & & \\ & & 2^k & \\ & & & 2^k \end{bmatrix} \\ &\times \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -3 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -3 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & -3 \end{bmatrix} \cdot \frac{1}{4} \end{aligned}$$

$$= \begin{cases} 2^{k+1}I_4, & \text{当 } k \text{ 为偶数,} \\ 2^k \begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & -1 & 1 \end{bmatrix}, & \text{当 } k \text{ 为奇数.} \end{cases}$$

**例 2** 设  $A = (a_{ij})_{n \times n}$  是主对角元全为 2 的上三角阵, 且存在  $a_{ij} \neq 0 (i < j)$ , 问  $A$  是否与对角阵相似?

**解** 设

$$A = \begin{bmatrix} 2 & * & \cdots & * \\ 0 & 2 & \cdots & * \\ & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & 2 \end{bmatrix},$$

(其中  $*$  为不全为零的任意常数). 则

$$|\lambda I - A| = (\lambda - 2)^n,$$

即  $\lambda = 2$  是  $A$  的  $n$  重特征值, 而  $r(2I - A) \geq 1$ , 所以  $(2I - A)X = 0$  的基础解系所含向量个数  $\leq n - 1$  个, 即  $A$  的线性无关的特征向量的个数  $\leq n - 1$  个, 因此,  $A$  不与对角阵相似.

**例 3** 设  $f(x) = x^3 - 2x + 5$ , 矩阵  $A$  同例 1, 求可逆阵  $P$  和对角阵  $\Lambda$ , 使得  $P^{-1}f(A)P = \Lambda$ , 其中  $f(A) = A^3 - 2A + 5I$ .

**解** 利用 5.1 节性质 1, 若  $AX = \lambda X (X \neq 0)$ , 则

$$(kA)X = (k\lambda)X, A^m X = \lambda^m X,$$

(其中  $k \in K, m \in N$ ), 因此对任意多项式  $f(x)$ , 有  $f(A)X = f(\lambda)X$  (请读者自己证明), 即  $f(\lambda)$  是  $f(A)$  的特征值,  $X$  是  $f(A)$  对应的特征向量, 由  $\lambda_1 = -2$ , 和  $\lambda_2 = 2$  得  $f(\lambda_1) = 1, f(\lambda_2) = 9$ , 例 1 中的  $X_1, X_{21}, X_{22}, X_{23}$  是  $f(A)$  的特征值  $f(\lambda_1), f(\lambda_2)$  所分别对应的特征向量. 取  $P = [X_1, X_{21}, X_{22}, X_{23}]$ , 则

$$P^{-1}f(A)P = \text{diag}(f(\lambda_1), f(\lambda_2), f(\lambda_2), f(\lambda_2))$$



$$= \text{diag}(1, 9, 9, 9) = \Lambda_1.$$

本题还有另一种解法,利用例1结果

$$P^{-1}AP = \text{diag}(-2, 2, 2, 2) = \Lambda,$$

即

$$A = P\Lambda P^{-1}.$$

于是

$$\begin{aligned} f(A) &= A^3 - 2A + 5I \\ &= (P\Lambda P^{-1})^3 - 2(P\Lambda P^{-1}) + 5I \\ &= P(\Lambda^3 - 2\Lambda + 5I)P^{-1} \\ &= Pf(\Lambda)P^{-1}, \end{aligned}$$

所以,  $P^{-1}f(A)P = f(\Lambda) = \text{diag}(f(-2), f(2), f(2), f(2))$   
 $= \text{diag}(1, 9, 9, 9).$  ■

**例4** 设  $n$  阶幂等矩阵  $A$  (即  $A^2 = A$ ) 的秩为  $r$  ( $0 < r \leq n$ ). 证明:  $A \sim \text{diag}(1, 1, \dots, 1, 0, \dots, 0)$ , 其中 1 有  $r$  个.

**证** 设  $AX = \lambda X$  ( $X \neq O$ ), 由

$$\lambda X = AX = A^2X = \lambda^2 X \quad (X \neq O),$$

得  $\lambda^2 = \lambda$ , 所以幂等矩阵的特征值为 0 或 1.

当  $\lambda_1 = 1$  时, 其特征矩阵  $I - A$  的秩为  $(n - r)$ . 这是因为  $A - A^2 = A(I - A) = 0$ , 所以

$$r(A) + r(I - A) \leq n.$$

又  $r(A) + r(I - A) \geq r(A + (I - A)) = r(I) = n$ ,

故  $r(A) + r(I - A) = n$ .

因此  $r(I - A) = n - r, \dim V_{\lambda_1} = n - (n - r) = r$ .

于是由  $(I - A)X = 0$ , 可求得对应于  $\lambda_1 = 1$  的  $r$  个线性无关的特征向量  $X_1, X_2, \dots, X_r$ .

当  $\lambda_2 = 0$  时, 由  $(\lambda_2 I - A)X = 0$ , 即  $AX = 0$ , 可求得  $n - r$  个线性无关的特征向量  $X_{r+1}, \dots, X_n$ . 取

$$P = [X_1, X_2, \dots, X_r, X_{r+1}, \dots, X_n],$$

则  $P^{-1}AP = \text{diag}(1, 1, \dots, 1, 0, \dots, 0),$

其中 1 的个数为  $r$  (秩  $A$ ) 个, 0 的个数为  $n - r$  个, 当  $r = n$  时,  $r(I$

$-A)=0, A=I$ , 命题也成立. ■

### 5.3 实对称矩阵的对角化

上一节已指出, 不是任何矩阵都与对角阵相似, 然而实用中很重要的实对称矩阵一定可对角化, 而且对于任一个实对称矩阵  $A$ , 存在正交矩阵  $T$ , 使得  $T^{-1}AT$  为对角阵. 为了证明这个重要结论, 先介绍复矩阵和复向量的有关概念和性质.

**定义 1** 元素为复数的矩阵和向量, 称为复矩阵和复向量.

**定义 2** 设  $a_{ij}$  为复数,  $A=[a_{ij}]_{m \times n}$ ,  $\bar{A}=[\bar{a}_{ij}]_{m \times n}$ ,  $\bar{a}_{ij}$  是  $a_{ij}$  的共轭复数, 则称  $\bar{A}$  是  $A$  的共轭矩阵.

由定义 2 可知:  $\bar{\bar{A}}=A$ ;  $\overline{A^T}=(\bar{A})^T$ ; 当  $A$  为实对称矩阵时,  $\bar{A}^T=A$ .

根据定义及共轭复数的运算性质, 容易证明共轭矩阵有以下性质:

- (1)  $\overline{kA}=\bar{k}\bar{A}$ , ( $k$  为复数);
- (2)  $\overline{A+B}=\bar{A}+\bar{B}$ ;
- (3)  $\overline{AB}=\bar{A}\bar{B}$ ;
- (4)  $\overline{(AB)^T}=\bar{B}^T\bar{A}^T$ ;
- (5) 若  $A$  可逆, 则  $\overline{A^{-1}}=(\bar{A})^{-1}$ ;
- (6)  $\det \bar{A}=\overline{\det A}$ .

$n$  维复向量(以列的形式表示)  $X$  满足性质:

$\bar{X}^T X \geq 0$ , 等号成立当且仅当  $X=0$ .

这是因为, 若  $X=[x_1, x_2, \dots, x_n]^T, x_i \in K \quad (i=1, 2, \dots, n)$ , 则

$\bar{X}^T X = \bar{x}_1 x_1 + \bar{x}_2 x_2 + \dots + \bar{x}_n x_n = |x_1|^2 + |x_2|^2 + \dots + |x_n|^2 \geq 0$ , 其中  $|x_i|$  是复数  $x_i$  的模, 因此  $\bar{X}^T X=0$ , 当且仅当  $x_i=0, (i=1, 2, \dots, n)$ , 即  $X=0$ .

### 5.3.1 实对称矩阵的特征值和特征向量

虽然一般实矩阵的特征多项式是实系数多项式,但其特征根可能是复数,相应的特征向量也可能是复向量.然而实对称矩阵的特征值全是实数,(在实数域上)相应的特征向量是实向量,且不同特征值的特征向量是正交的.下面给以证明.

**定理1** 实对称矩阵  $A$  的任一个特征值都是实数.

**证** 设  $\lambda$  是  $A$  的任一个特征值.由  $\overline{A^T} = A$ , 和  $AX = \lambda X$ , 有

$$\begin{aligned}\overline{(AX)^T} &= \overline{(\lambda X)^T}, \\ \overline{X^T A^T} \overline{X} &= \overline{\lambda} \overline{X^T X}, \\ \overline{X^T} A X &= \lambda \overline{X^T} X = \overline{\lambda} \overline{X^T} X.\end{aligned}$$

又  $X \neq 0, \overline{X^T} X > 0$ , 所以  $\lambda = \overline{\lambda}$ , 即  $\lambda$  为实数. ■

**定理2** 实对称矩阵  $A$  对应于不同特征值的特征向量是正交的.

**证** 设  $AX_i = \lambda_i X_i, (X_i \neq 0, i = 1, 2), \lambda_1 \neq \lambda_2, A^T = A$ , 则

$$\begin{aligned}\lambda_1 X_2^T X_1 &= X_2^T A X_1 = X_2^T A^T X_1 = (A X_2)^T X_1 \\ &= (\lambda_2 X_2)^T X_1 = \lambda_2 X_2^T X_1.\end{aligned}$$

由于  $\lambda_1 \neq \lambda_2$ , 所以  $X_2^T X_1 = 0$ , 即  $(X_2, X_1) = 0$ , 故当  $X_1, X_2$  为实的特征向量时,  $X_1$  与  $X_2$  正交. ( $X_1, X_2$  为复的情形, 利用附录 A 的知识, 也可证明二者正交.) ■

### 5.3.2 实对称矩阵的对角化

**定理3** 对于任一个  $n$  阶实对称矩阵  $A$ , 存在  $n$  阶正交阵  $T$ , 使得

$$T^{-1} A T = \text{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n).$$

**证** 用数学归纳法.  $n=1$  时, 结论显然成立.

假设定理对任一个  $n-1$  阶实对称矩阵  $B$  成立, 即存在  $n-1$  阶正交矩阵  $Q$ , 使得  $Q^{-1} B Q = \Lambda_1$ . 下面证明, 对  $n$  阶实对称矩阵  $A$  也成

立.

设  $AX_1 = \lambda_1 X_1$  其中  $X_1$  是长度为 1 的特征向量. 现将  $X_1$  扩充为  $R^n$  的一组标准正交基

$$X_1, X_2, \dots, X_n,$$

(其中  $X_2, \dots, X_n$  不一定是  $A$  的特征向量), 于是就有

$$\begin{aligned} A[X_1, X_2, \dots, X_n] &= [AX_1, AX_2, \dots, AX_n] \\ &= [X_1, X_2, \dots, X_n] \cdot \begin{bmatrix} \lambda_1 & b_{12} & \cdots & b_{1n} \\ 0 & b_{22} & \cdots & b_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & b_{n2} & \cdots & b_{nn} \end{bmatrix}. \end{aligned} \quad (1)$$

记

$$P = \begin{bmatrix} | & | & & | \\ X_1 & X_2 & \cdots & X_n \\ | & | & & | \end{bmatrix}, (P \text{ 为正交矩阵})$$

并将①式右端矩阵用分块矩阵表示, ①式可写为

$$P^{-1}AP = \begin{bmatrix} \lambda_1 & b \\ 0 & B \end{bmatrix}. \quad (2)$$

由于  $P^{-1} = P^T$ ,  $(P^{-1}AP)^T = P^T A^T (P^{-1})^T = P^{-1}AP$ , 所以

$$\begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 \\ b^T & B^T \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda_1 & b \\ 0 & B \end{bmatrix}.$$

因此,  $b=0$ ,  $B^T=B$  (即  $B$  为  $n-1$  阶实对称矩阵), 代入②式得

$$P^{-1}AP = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & B \end{bmatrix}.$$

根据归纳假设, 构造一个正交矩阵

$$S = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & Q \end{bmatrix},$$

(读者不难验证  $S^T S = I_n$ ), 便有

$$\begin{aligned}
S^{-1}(P^{-1}AP)S &= \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & Q^{-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & B \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & Q \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & Q^{-1}BQ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & A_1 \end{bmatrix} \\
&= \text{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n).
\end{aligned}$$

取  $T=PS$  (两个正交阵之积仍是正交阵),  $T^{-1}=S^{-1}P^{-1}$ , 则

$$T^{-1}AT = \text{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n),$$

其中  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$  是  $A$  的特征值. ■

给定一个  $n$  阶实对称矩阵  $A$ , 如何求正交矩阵  $T$ , 使  $T^{-1}AT = \Lambda$  呢? 首先由特征多项式  $|\lambda I - A| = \prod (\lambda - \lambda_i)^{r_i}$  得到全部互异特征值  $\lambda_1, \dots, \lambda_m$ . 由于  $A$  可对角化, 根据 5.2 节定理 5,  $r_i$  重特征值  $\lambda_i$  对应  $r_i$  个线性无关的特征向量  $X_{i_1}, \dots, X_{i_{r_i}}$ , 利用 Schmidt 正交化方法得到  $r_i$  个相互正交的单位向量  $Y_{i_1}, \dots, Y_{i_{r_i}}$ , 由定理 2, 不同特征值对应的特征向量正交, 得到  $\{Y_{i_1}, \dots, Y_{i_{r_i}} | i=1, \dots, m\}$  为  $n$  个相互正交的单位特征向量, 将其按列排成  $n$  阶矩阵, 就是所求的正交阵  $T$ .

**例1** 设

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 2 \\ -2 & -2 & 4 \\ 2 & 4 & -2 \end{bmatrix},$$

求正交阵  $T$ , 使  $T^{-1}AT$  为对角阵.

**解**

$$\begin{aligned}
|\lambda I - A| &= \begin{vmatrix} \lambda - 1 & 2 & -2 \\ 2 & \lambda + 2 & -4 \\ -2 & -4 & \lambda + 2 \end{vmatrix} \\
&= \begin{vmatrix} 0 & -2(\lambda - 2) & (\lambda + 3)(\lambda - 2)/2 \\ 0 & \lambda - 2 & \lambda - 2 \\ -2 & -4 & \lambda + 2 \end{vmatrix}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= (\lambda - 2)^2(-2) \begin{vmatrix} -2 & (\lambda + 3)/2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} \\
 &= (\lambda - 2)^2(\lambda + 7),
 \end{aligned}$$

得  $\lambda_1 = 2$  (二重) 和  $\lambda_2 = -7$ . 对于  $\lambda_1 = 2$ , 由  $(\lambda_1 I - A)X = 0$ , 即

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 2 & 4 & -4 \\ -2 & -4 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix},$$

得线性无关的特征向量  $X_1 = [2, -1, 0]^T$ ,  $X_2 = [2, 0, 1]^T$ . 用 Schmidt 正交化方法, 先正交化, 得

$$\beta_1 = X_1,$$

$$\beta_2 = X_2 - \frac{(X_2, \beta_1)}{(\beta_1, \beta_1)} \beta_1$$

$$= \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} - \frac{4}{5} \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix} = \frac{1}{5} \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \\ 5 \end{bmatrix},$$

再将  $\beta_1, \beta_2$  单位化得

$$Y_1 = \left[ \frac{2\sqrt{5}}{5}, -\frac{\sqrt{5}}{5}, 0 \right]^T,$$

$$Y_2 = \left[ \frac{2\sqrt{5}}{15}, \frac{4\sqrt{5}}{15}, \frac{\sqrt{5}}{3} \right]^T.$$

对于  $\lambda_2 = -7$ , 由  $(\lambda_2 I - A)X = 0$ , 即

$$\begin{bmatrix} -8 & 2 & -2 \\ 2 & -5 & -4 \\ -2 & -4 & -5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix},$$

得特征向量  $X_3 = [1, 2, -2]^T$ , 单位化得  $Y_3 = \left[ \frac{1}{3}, \frac{2}{3}, \frac{-2}{3} \right]^T$ , 取正交阵

$$T = [Y_1, Y_2, Y_3] = \begin{bmatrix} \frac{2\sqrt{5}}{5} & \frac{2\sqrt{5}}{15} & \frac{1}{3} \\ -\frac{\sqrt{5}}{5} & \frac{4\sqrt{5}}{15} & \frac{2}{3} \\ 0 & \frac{\sqrt{5}}{3} & \frac{2}{3} \end{bmatrix}.$$

则  $T^{-1}AT = \text{diag}(\lambda_1, \lambda_1, \lambda_2) = \text{diag}(2, 2, -7)$ .

**例2** 设实对称矩阵  $A$  和  $B$  是相似矩阵, 证明: 存在正交矩阵  $T$ , 使得  $T^{-1}AT = B$ .

**证** 由于  $A \sim B$ , 所以  $A$  和  $B$  有相同的特征值  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ . 根据定理3, 对  $A$  和  $B$  分别存在正交矩阵  $T_1$  和  $T_2$ , 使得

$$T_1^{-1}AT_1 = \text{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n) = T_2^{-1}BT_2,$$

所以  $T_2T_1^{-1}AT_1T_2^{-1} = B$ .

取  $T = T_1T_2^{-1}$  (仍是正交阵), 则  $T^{-1} = T_2T_1^{-1}$ , 如此就得

$$T^{-1}AT = B. \quad \blacksquare$$

**例3** 设  $n$  阶实对称矩阵  $A, B$  有完全相同的  $n$  个特征值, 证明: 存在正交阵  $T$  和  $n$  阶矩阵  $Q$  使得  $A = QT$  和  $B = TQ$  同时成立.

**证** 由于实对称矩阵与对角阵  $\Lambda$  相似,  $\Lambda$  的对角元为  $n$  个特征值, 所以,  $A \sim \Lambda \sim B$ , 即  $A \sim B$ . 由例2知存在正交阵  $T_1$ , 使得  $T_1^{-1}AT_1 = B$ , 即  $AT_1 = T_1B$ , 记  $Q = AT_1$ , 则  $A = QT_1^{-1} = QT$ ,  $B = T_1^{-1}Q = TQ$  (其中  $T = T_1^{-1}$  仍为正交阵) 同时成立.

**例4** 设  $A, B$  都是  $n$  阶实对称阵, 若存在正交阵  $T$  使  $T^{-1}AT, T^{-1}BT$  都是对角阵, 则  $AB$  是实对称阵.

**证** 由  $(AB)^T = B^T A^T = BA$  可知, 此时  $AB$  对称的充要条件是  $AB$  可交换. 因此只需证明  $AB = BA$ . 根据已知条件, 有

$$T^{-1}AT = \text{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n),$$

$$T^{-1}BT = \text{diag}(\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_n),$$

于是  $(T^{-1}AT)(T^{-1}BT) = (T^{-1}BT)(T^{-1}AT) = \text{diag}(\lambda_1\mu_1, \dots, \lambda_n\mu_n)$ , 因此,  $AB=BA, (AB)^T=BA=AB$ . ■

## 习 题 补 充 题 答 案

### 习题

1. 求下列矩阵的特征值和特征向量

$$\begin{array}{ll} (1) \begin{bmatrix} 2 & -3 \\ -3 & 1 \end{bmatrix}; & (2) \begin{bmatrix} 3 & -1 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \end{bmatrix}; \\ (3) \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 3 \end{bmatrix}; & (4) \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}; \\ (5) \begin{bmatrix} 4 & 5 & -2 \\ -2 & -2 & 1 \\ -1 & -1 & 1 \end{bmatrix}; & (6) \begin{bmatrix} 2 & -2 & 0 \\ -2 & 1 & -2 \\ 0 & -2 & 0 \end{bmatrix}. \end{array}$$

2. 已知矩阵

$$A = \begin{bmatrix} 7 & 4 & -1 \\ 4 & 7 & -1 \\ -4 & -4 & x \end{bmatrix}$$

的特征值  $\lambda_1=3$ (二重),  $\lambda_2=12$ , 求  $x$  的值, 并求其特征向量.

3. 设  $X_1, X_2$  是矩阵  $A$  不同特征值的特征向量, 证明  $X_1 + X_2$  不是  $A$  的一个特征向量.

\* 4. 设  $X_1, X_2, X_3$  分别是矩阵  $A$  对应于互不相同的特征值  $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$  的特征向量, 证明  $X_1 + X_2 + X_3$  不是  $A$  的特征向量.

5. 证明对合矩阵  $A$  (即  $A^2=I$ ) 的特征值只能为 1 或 -1.

6. 设  $A$  可逆, 讨论  $A$  与  $A^*$  的特征值(特征向量)之间的相互



关系.

7. 若  $P^{-1}AP=B$ , 问:  $P^{-1}(A-2I)P=B-2I$  是否成立?

8. 已知  $A \sim \Lambda = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$ , 求  $\det(A-I)$ .

9. 已知:  $P = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 3 & -2 \end{bmatrix}$ ,  $P^{-1}AP = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$ , 求  $A^*$ .

\*10. 设  $B=P^{-1}AP$ ,  $X$  是矩阵  $A$  属于特征值  $\lambda_0$  的特征向量.  
证明:  $P^{-1}X$  是矩阵  $B$  对应其特征值  $\lambda_0$  的一个特征向量.

\*11. 设  $A$  为非奇异矩阵, 证明  $AB$  与  $BA$  相似.

\*12. 设  $A \sim B, C \sim D$ , 证明:

$$\begin{bmatrix} A & 0 \\ 0 & C \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} B & 0 \\ 0 & D \end{bmatrix}.$$

\*13. 证明:  $m$  阶矩阵

$$J = \begin{bmatrix} 0 & 1 & & \\ & 0 & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ & & & 0 \end{bmatrix}$$

只有零特征值, 且其特征子空间是  $R^m$  的一维子空间, 并求它的基.

14. 若  $I+A$  可逆,  $I-A$  不可逆, 那么, 关于  $A$  的特征值能做出怎样的断语?

15. 若  $\det(I-A^2)=0$ , 证明: 1 或 -1 至少有一个是  $A$  的特征值.

16. 在第1题中, 哪些矩阵可对角化? 并对可对角化的矩阵  $A$ , 求矩阵  $P$  和对角阵  $\Lambda$ , 使得  $P^{-1}AP=\Lambda$ .

17. 主对角元互不相等的上(下)三角形矩阵是否与对角阵相似(说明理由)?

18. 设  $n$  阶矩阵  $A$  的  $n^2$  个元素全为 1, 试求可逆阵  $P$ , 使  $P^{-1}$

$AP$  为对角阵,并写出与  $A$  相似的对角阵.

19. 已知4阶矩阵  $A$  的特征值  $\lambda_1=1$  (三重),  $\lambda_2=-3$ ; 对应于  $\lambda_1$  的特征向量有  $X_1=[1, -1, 0, 0]^T$ ,  $X_2=[-1, 1, -1, 0]^T$ ,  $X_3=[0, -1, 1, -1]^T$ , 对应于  $\lambda_2$  的特征向量为  $X_4=[0, 0, -1, 1]^T$ . 问:  $A$  可否对角化? 如能对角化, 求出  $A$  及  $A^n$  ( $n$  为正整数).

20. 设3阶矩阵  $A$  有二重特征值  $\lambda_1$ , 如果  $X_1=[1, 0, 1]^T$ ,  $X_2=[-1, 0, -1]^T$ ,  $X_3=[1, 1, 0]^T$ ,  $X_4=[0, 1, -1]^T$  都是对应于  $\lambda_1$  的特征向量, 问:  $A$  可否对角化?

21. 已知  $A = \begin{bmatrix} -3 & 2 \\ -2 & 2 \end{bmatrix}$ .

(1) 求  $A^4, A^5, A^k$  ( $k$  为正整数).

(2) 若  $f(x) = \begin{vmatrix} x^4-1 & x \\ x^3 & x^5+1 \end{vmatrix}$ , 求  $f(A)$ .

22. 设  $A = \begin{bmatrix} 3 & 4 & 0 & 0 \\ 4 & -3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$ , 求  $A^k$  ( $k$  为正整数).

(提示: 按对角块矩阵求  $A^k$ .)

23. 对5.2节例1的矩阵  $A$ , 求正交阵  $T$ , 使  $T^{-1}AT$  为对角阵.

24. 对下列实对称矩阵  $A$ , 求正交矩阵  $T$  和对角阵  $\Lambda$ , 使  $T^{-1}AT = \Lambda$

(1)  $\begin{bmatrix} 3 & 2 & 4 \\ 2 & 0 & 2 \\ 4 & 2 & 3 \end{bmatrix}$ ; (2)  $\begin{bmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 3 & 4 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}$ ; (3)  $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & -1 \end{bmatrix}$ ;

(4)  $\begin{bmatrix} 0 & 0 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 4 \\ 4 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 4 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ ; (5)  $\begin{bmatrix} -1 & -3 & 3 & -3 \\ -3 & -1 & -3 & 3 \\ 3 & -3 & -1 & -3 \\ -3 & 3 & -3 & -1 \end{bmatrix}$ .

25. 设  $A$  是  $n$  阶实对称矩阵, 且  $A^2=A$ , 证明存在正交阵  $T$ ,

使得

$$T^{-1}AT = \text{diag}(1, 1, \dots, 1, 0, \dots, 0).$$

\* 26. 设  $n$  阶实对称矩阵  $A$  的特征值  $\lambda_i \geq 0 (i=1, 2, \dots, n)$ , 证明存在特征值非负的实对称矩阵  $B$ , 使得  $A=B^2$ .

\* 27. 设  $A$  为  $n$  阶实对称幂等矩阵 ( $A^2=A$ ),  $r(A)=r$ , 试求  $\det(A-2I)$ .

### 补充题

28. 设多项式  $f(x)=a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$ ,  $\lambda_0$  是矩阵  $A$  的一个特征值,  $X$  是  $A$  对应于  $\lambda_0$  的特征向量. 证明  $f(\lambda_0)$  是  $f(A)$  的特征值, 且  $X$  仍是  $f(A)$  对应于  $f(\lambda_0)$  的特征向量.

29. 设  $A \sim B$ ,  $f(A)=A^3+2A-3I$ , 证明:  $f(A) \sim f(B)$ .

30. 设  $A=[a_{ij}]_{4 \times 4}$ , 已知 0 是  $A$  的二重特征值, 1 是  $A$  的(一重)特征值, 求矩阵  $A$  的特征多项式  $\det(\lambda I - A)$ .

31. 设  $n$  阶矩阵  $A$  的每行元素之和皆为 1. 问: 能否至少求得  $A$  的一个特征值?

32. 设  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$  是矩阵  $A=[a_{ij}]_{n \times n}$  的  $n$  个特征值, 证明:

$$\sum_{i=1}^n \lambda_i^2 = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_{ij} a_{ji}.$$

33. 设  $AB=BA$ ,  $X$  是  $A$  对应于特征值  $\lambda_0$  的特征向量, 证明:

$$BX \in V_{\lambda_0} \quad (A \text{ 的特征子空间}).$$

34. 证明: 若  $n$  阶矩阵  $A$  有  $n$  个互不相同的特征值, 则  $AB=BA$  的充要条件是,  $A$  的特征向量也是  $B$  的特征向量.

35. 设  $A, B$  皆为  $n$  阶矩阵,  $\varphi(\lambda)=|\lambda I - B|$ . 证明:  $\varphi(A)$  可逆的充要条件为  $B$  的任一特征值都不是  $A$  的特征值.

(提示: 设  $\varphi(\lambda)=|\lambda I - B|=(\lambda-\lambda_1)(\lambda-\lambda_2)\cdots(\lambda-\lambda_n)$ , 利用  $\mu$  不是  $A$  的特征值时,  $|\mu I - A| \neq 0$ , 讨论  $|\varphi(A)| \neq 0$  的充分必要条件.)

36. 证明反对称实矩阵的特征值是0或纯虚数.

37. 已知  $R^n$  中两个非零的正交向量

$$\alpha = [a_1, a_2, \dots, a_n], \beta = [b_1, b_2, \dots, b_n].$$

证明: 矩阵  $A = \alpha^T \beta$  的特征值全为0, 且  $A$  不可对角化.

38. 设  $\alpha = [a_1, a_2, \dots, a_n] \in R^n$ , 且  $a_i \neq 0 (i=1, 2, \dots, n)$ .

试求矩阵  $A = \alpha^T \alpha$  的特征值, 并求可逆阵  $P$ , 使  $P^{-1}AP$  成对角形.

### 答案

1. (1)  $\frac{3}{2} \pm \frac{\sqrt{37}}{2}, [6, 1 \mp \sqrt{37}]^T$ . (2) 1,  $[0, 1, 1]^T$ ; 2(二重),  $[1, 1, 0]^T$ . (3) 2(三重),  $[1, 1, 0]^T, [0, 1, 1]^T$ . (4) 1(四重),  $[1, 0, 0, 0]^T$ . (5) 1(三重),  $[-1, 1, 1]^T$ . (6) 1,  $[-2, -1, 2]^T$ ; 4,  $[2, -2, 1]^T$ ; -2,  $[1, 2, 2]^T$ .

2.  $x=4$ ; 3(二重),  $[1, -1, 0]^T, [1, 0, 4]^T$ ; 12,  $[-1, -1, 1]^T$ .

3. 用反证法, 一个特征向量不能属于不同的特征值.

5. 用定义证.

6. 若  $AX = \lambda X$ , 则  $A^* X = \frac{|A|}{\lambda} X$ .

7. 成立

8. -2.

9.  $\begin{bmatrix} 2^2(-1)^n - 3 \cdot 2^n & 2(-1)^{n+1} + 2^{n+1} \\ 6(-1)^n - 3 \cdot 2^n & 3(-1)^{n+1} + 2^{n+2} \end{bmatrix}$ .

10. 用定义证明  $B(P^{-1}X) = \lambda_0(P^{-1}X)$ .

11. 利用  $A^{-1}A = I$ .

13.  $[1, 0, \dots, 0]^T$ .

14. 1是  $A$  的特征值, -1不是.

16. (1), (6)可对角化.

(6)  $\Lambda = \text{diag}(1, 4, -2)$ .

$$P = \begin{bmatrix} 2 & 2 & 1 \\ -1 & -2 & 2 \\ 2 & 1 & 2 \end{bmatrix}.$$

17. 可以, 因有  $n$  个互不相等的特征值.

18.

$$\begin{bmatrix} 1 & & & 1 \\ -1 & 1 & & 0 \\ & -1 & \ddots & \\ 0 & \ddots & \ddots & \\ & & -1 & 1 \end{bmatrix}, \Lambda = \text{daig}(0, \dots, 0, n).$$

19. 可对角化,

$$A^n = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 + (-3)^n & -1 + (-3)^n & 1 & 1 - (-3)^n \\ 1 - (-3)^n & 1 - (-3)^n & 0 & (-3)^n \end{bmatrix}.$$

20. 可对角化.

21.

$$(1) \begin{bmatrix} 21 & -10 \\ 10 & -4 \end{bmatrix}; \quad \begin{bmatrix} -43 & 22 \\ -22 & 12 \end{bmatrix};$$

$$\frac{1}{3} \begin{bmatrix} -1 + (-2)^{k+2} & 2 + (-2)^{k+1} \\ -2 - (-2)^{k+1} & 2^2 - (-2)^k \end{bmatrix}.$$

$$(2) \begin{bmatrix} 1270 & -640 \\ 640 & -321 \end{bmatrix}.$$

22.

$$\begin{bmatrix} 4(5)^{k-1} - (-5)^{k-1} & 2(5)^{k-1} + 2(-5)^{k-1} & 0 & 0 \\ 2(5)^{k-1} + (-5)^{k-1} & 5^{k-1} - 4(-5)^{k-1} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2^k & 4k2^{k-1} \\ 0 & 0 & 0 & 2^k \end{bmatrix}.$$

23.

$$\begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & & & \\ & 2 & & \\ & & 2 & \\ & & & -2 \end{bmatrix}.$$

24.

$$(1) \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{5}} & \frac{4}{\sqrt{45}} & \frac{2}{3} \\ -\frac{2}{\sqrt{5}} & \frac{2}{\sqrt{45}} & \frac{1}{3} \\ 0 & -\frac{5}{\sqrt{45}} & \frac{2}{3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & & \\ & -1 & \\ & & 8 \end{bmatrix}.$$

$$(2) \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{10}} & -\frac{3}{\sqrt{14}} & -\frac{3}{\sqrt{35}} \\ 0 & \frac{2}{\sqrt{14}} & -\frac{5}{\sqrt{35}} \\ \frac{3}{\sqrt{10}} & \frac{1}{\sqrt{14}} & \frac{1}{\sqrt{35}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & & \\ & -1 & \\ & & 6 \end{bmatrix}.$$

$$(3) \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & 0 & -\frac{2}{\sqrt{6}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & & \\ & 1 & \\ & & -3 \end{bmatrix}.$$

$$(4) \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & & & \\ & -3 & & \\ & & 5 & \\ & & & -5 \end{bmatrix}.$$

$$(5) \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -4 & & & \\ & -4 & & \\ & & -4 & \\ & & & 8 \end{bmatrix}.$$

26. 利用  $(PAP^{-1})^2 = P\Lambda^2P^{-1}$ .

27.  $(-1)^n 2^{n-r}$ .

30.  $\lambda^2(\lambda - 1)\left(\lambda - \sum_{i=1}^n a_{ii} - 1\right)$ .

31. 1.

33. 证  $A(BX) = \lambda_0(BX)$ .

34. 必要性用33题结果及  $A$  的每个特征子空间是一维子空间;充分性证存在同一个  $P$ ,使得  $P^{-1}AP$  和  $P^{-1}BP$  皆为对角阵.

37. 先证  $A^2=0$ ,再利用  $\dim R(A)=1$ .

38.  $\lambda_1 = \sum_{i=1}^n a_i^2$ ,  $\lambda_2 = 0$  ( $n-1$  重),

$$P = \begin{bmatrix} a_1 & a_2 & \cdots & a_n \\ a_2 & -a_1 & & \\ \vdots & & \ddots & \\ a_n & & & -a_1 \end{bmatrix}.$$

## 6 二 次 型

二次型就是二次齐次多项式. 在解析几何中讨论的有心二次曲线, 当中心与坐标原点重合时, 其一般方程是

$$ax^2 + 2bxy + cy^2 = f, \quad (1)$$

方程的左端就是  $x, y$  的一个二次齐次多项式. 为了便于研究这个二次曲线的几何性质, 我们通过基变换(坐标变换), 把方程①化为不含  $x, y$  混合项的标准方程

$$a'x'^2 + c'y'^2 = f. \quad (2)$$

在二次曲面的研究中也有类似的问题. 二次齐次多项式不仅在几何问题中出现, 而且在数学的其它分支及物理、力学和网络计算中也常会碰到.

二次型的一个基本问题是如同中心在原点的一般二次曲线方程化为标准方程那样, 把一般的二次齐次多项式化为只含纯平方项的代数和. 本章除了重点讨论这个基本问题外, 还将讨论有重要应用的有定二次型(主要是正定二次型)的性质、判定, 并介绍它的一些应用. 我们将用矩阵工具来研究二次型, 因此首先要讨论二次型的矩阵表示.

### 6.1 二次型的定义和矩阵表示 合同矩阵

**定义 1**  $n$  元变量  $x_1, x_2, \dots, x_n$  的二次齐次多项式

$$\begin{aligned} f(x_1, x_2, \dots, x_n) \\ = a_{11}x_1^2 + 2a_{12}x_1x_2 + 2a_{13}x_1x_3 + \dots + 2a_{1n}x_1x_n \\ + a_{22}x_2^2 + 2a_{23}x_2x_3 + \dots + 2a_{2n}x_2x_n \end{aligned}$$



$$\dots\dots\dots + a_{nn}x_n^2. \quad (6.1)$$

当系数属于数域  $F$  时,称为数域  $F$  上的一个  $n$  元二次型.本章讨论实数域上的  $n$  元二次型,简称二次型.

由于  $x_i x_j = x_j x_i$ ,具有对称性,若令

$$a_{ji} = a_{ij}, \quad i < j, \quad (6.2)$$

则  $2a_{ij}x_i x_j = a_{ij}x_i x_j + a_{ji}x_i x_j (i < j)$ ,于是(6.1)可以写成对称形式

$$\begin{aligned} f(x_1, x_2, \dots, x_n) &= a_{11}x_1^2 + a_{12}x_1x_2 + \dots + a_{1n}x_1x_n \\ &\quad + a_{21}x_2x_1 + a_{22}x_2^2 + \dots + a_{2n}x_2x_n \\ &\quad \dots\dots\dots \\ &\quad + a_{n1}x_nx_1 + a_{n2}x_nx_2 + \dots + a_{nn}x_n^2 \\ &= \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_{ij}x_i x_j. \end{aligned} \quad (6.3)$$

记

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots\dots\dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix}, \quad (6.4)$$

$X = [x_1, x_2, \dots, x_n]^T$ . 二次型(6.3)可以用矩阵乘积形式简单表示为

$$f(x_1, x_2, \dots, x_n) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_{ij}x_i x_j = X^T A X, \quad (6.5)$$

我们把  $A$  称为二次型(6.3)对应的矩阵.对于任意一个二次型(6.1),总可以通过(6.2),使其写成对称形式(6.3),并对应矩阵  $A$ .由(6.2)知,  $A$  为对称矩阵.又若  $A, B$  为  $n$  阶对称方阵,且

$$f(x_1, x_2, \dots, x_n) = X^T A X = X^T B X,$$

则必有  $A = B$ . (证明留作练习.)故二次型和它的矩阵是相互唯一确定的.所以,研究二次型的性质转化为研究  $A$  所具有的性质.

**例 1** 设  $f(x_1, x_2, x_3, x_4) = 2x_1^2 + x_1x_2 + 2x_1x_3 + 4x_2x_4 + x_3^2 + 5x_4^2$ , 则它的矩阵为

$$A = \begin{bmatrix} 2 & \frac{1}{2} & 1 & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 5 \end{bmatrix}.$$

一个二次型  $X^TAX$  也可看成  $n$  维向量  $\alpha$  的一个函数, 即

$$f(\alpha) = X^TAX, \quad (6.6)$$

其中  $X = [x_1, x_2, \dots, x_n]^T$  是  $\alpha$  在  $R^n$  的一组基下的坐标向量. 所以二次型  $X^TAX$  是向量  $\alpha$  的  $n$  个坐标的二次齐次函数. 因此二次型作为  $n$  维向量  $\alpha$  的函数, 它的矩阵是与一组基相联系的.

如果  $n$  维向量  $\alpha$  在两组基  $\{\epsilon_1, \epsilon_2, \dots, \epsilon_n\}$  和  $\{\eta_1, \eta_2, \dots, \eta_n\}$  下的坐标向量分别为

$$X = [x_1, x_2, \dots, x_n]^T \text{ 和 } Y = [y_1, y_2, \dots, y_n]^T,$$

$$\text{又 } [\eta_1, \eta_2, \dots, \eta_n] = [\epsilon_1, \epsilon_2, \dots, \epsilon_n]C,$$

$$\text{于是 } X = CY. \quad (6.7)$$

如此则有二次型

$$f(\alpha) = X^TAX = Y^T(C^TAC)Y, \quad (6.8)$$

即二次型  $f(\alpha)$  在两组基  $\{\epsilon_1, \epsilon_2, \dots, \epsilon_n\}$  和  $\{\eta_1, \eta_2, \dots, \eta_n\}$  下所对应的矩阵分别为

$$A \text{ 和 } C^TAC,$$

其中  $C^TAC$  仍是对称阵,  $Y^T(C^TAC)Y$  是  $y_1, y_2, \dots, y_n$  的一个二次型.

**例 2** 设向量  $\alpha$  在自然基  $\{\epsilon_1, \epsilon_2\}$  下的坐标  $[x_1, x_2]^T$  满足方程

$$5x_1^2 + 5x_2^2 - 6x_1x_2 = 4. \quad (1)$$

如果作基变换, 将  $\epsilon_1$  和  $\epsilon_2$  逆时针旋转  $45^\circ$  变为  $\eta_1$  和  $\eta_2$ , 即

$$[\eta_1, \eta_2] = [\epsilon_1, \epsilon_2] \begin{bmatrix} \cos 45^\circ & -\sin 45^\circ \\ \sin 45^\circ & \cos 45^\circ \end{bmatrix}, \quad (2)$$

则  $\alpha$  在基  $\{\eta_1, \eta_2\}$  下的坐标  $[y_1, y_2]^T$  满足

$$X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos 45^\circ & -\sin 45^\circ \\ \sin 45^\circ & \cos 45^\circ \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} = CY. \quad (3)$$

将③式代入①式

$$X^T A X = [x_1, x_2] \begin{bmatrix} 5 & -3 \\ -3 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = 4,$$

得

$$X^T A X = Y^T C^T A C Y = 2y_1^2 + 8y_2^2 = 4,$$

即

$$\frac{1}{2}y_1^2 + 2y_2^2 = 1,$$

其中

$$\begin{aligned} C^T A C &= \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \\ -\frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 5 & -3 \\ -3 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 8 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

这样,我们就把方程①化成了在基  $\{\eta_1, \eta_2\}$  的坐标系下的标准方程④,它的图形是一个椭圆(图 6.1).

对于一般的二次型  $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ , 将其化为  $y_1, y_2, \dots, y_n$  的纯平方项之代数和(简称平方和), 是研究二次型的一个基本问题. 解决这个问题的基本方法是作一个非退化的线性变换

$$X = CY,$$

其中  $C$  为可逆阵, 这个变换也可看成向量  $\alpha$  在基变换下的坐标变换), 使得

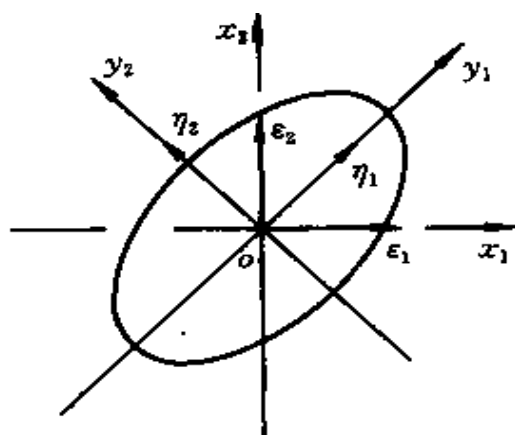


图 6.1

$$X^T A X = Y^T (C^T A C) Y$$

成为  $y_1, y_2, \dots, y_n$  的平方和.

这个基本问题,从矩阵的角度来说,就是对于一个实对称矩阵,寻找一个可逆矩阵  $C$ ,使得  $C^T A C$  成为对角形.

**定义 2** 对于两个矩阵  $A$  和  $B$ ,如果存在可逆阵  $C$ ,使得  $C^T A C = B$ ,就称  $A$  合同于  $B$ ,记作  $A \simeq B$ .

由定义容易证明,矩阵之间的合同关系也具有反身性,对称性和传递性.由于合同关系有对称性,所以  $A$  合同于  $B$ ,也说成  $A$  与  $B$  是合同的,或  $A, B$  是合同矩阵.

## 6.2 化二次型为标准形

本节讨论的问题是:如何通过非退化线性变换  $X = CY$ ,把二次型  $f(x_1, x_2, \dots, x_n) = X^T A X$  化为  $y_1, y_2, \dots, y_n$  的平方和,即化为  $d_1 y_1^2 + d_2 y_2^2 + \dots + d_n y_n^2$ . 我们把含平方项而不含混合项的二次

型称为标准的二次型. 如果一个二次型  $X^T A X = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_{ij} x_i x_j$ ,

通过非退化线性变换  $X=CY$ , 化成了  $\sum_{i=1}^n d_i y_i^2$ , 我们就称它为二次型  $X^T A X$  的标准型.

化二次型为标准型, 就是对实对称矩阵  $A$ , 寻找可逆阵  $C$ , 使  $C^T A C$  成对角形.

下面介绍三种化二次型为标准形的方法, 并证明任何实对称矩阵  $A$ , 一定存在可逆阵  $C$ , 使  $C^T A C$  为对角阵.

### 6.2.1 正交变换法

在 5.3 节中讲过, 对于任一个  $n$  个阶实对称矩阵  $A$ , 一定存在正交矩阵  $Q$ , 使得  $Q^T A Q = \Lambda$ . 由于  $Q^{-1} = Q^T$ , 所以有

$$Q^T A Q = \text{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n).$$

因此, 对于任一个二次型  $f(x_1, x_2, \dots, x_n) = X^T A X$ , 有下面的重要定理.

**定理 1(主轴定理)** 对于任一个  $n$  元二次型

$$f(x_1, x_2, \dots, x_n) = X^T A X,$$

存在正交变换  $X=QY$  ( $Q$  为  $n$  阶正交矩阵), 使得

$$X^T A X = Y^T (Q^T A Q) Y = \lambda_1 y_1^2 + \lambda_2 y_2^2 + \dots + \lambda_n y_n^2, \quad (6.9)$$

其中  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$  是实对称矩阵  $A$  的  $n$  个特征值,  $Q$  的  $n$  个列向量  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$  是  $A$  对应于特征值  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$  的标准正交特征向量.

**例 3** 用正交变换法, 将二次型  $f(x_1, x_2, x_3) = 2x_1^2 + 5x_2^2 + 5x_3^2 + 4x_1x_2 - 4x_1x_3 - 8x_2x_3$  化成标准形.

**解** 二次型对应矩阵为

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 2 & -2 \\ 2 & 5 & -4 \\ -2 & -4 & 5 \end{bmatrix},$$

其特征多项式

$$|\lambda I - A| = (\lambda - 1)^2(\lambda - 10).$$

$A$  的特征值  $\lambda_1=1, \lambda_2=1, \lambda_3=10$ . 由方程组

$$\begin{bmatrix} -1 & -2 & 2 \\ -2 & -4 & 4 \\ 2 & 4 & -4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix},$$

和

$$\begin{bmatrix} 8 & -2 & 2 \\ -2 & 5 & 4 \\ 2 & 4 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix},$$

分别求得对应  $\lambda_{1,2}=1$  的线性无关特征向量

$$X_1 = [-2, 1, 0]^T, \quad X_2 = [2, 0, 1]^T,$$

和  $\lambda_3$  的特征向量

$$X_3 = [1, 2, -2]^T.$$

对  $X_1, X_2$  用 Schmidt 正交化并单位化, 再对  $X_3$  单位化, 记相应的向量为

$$\xi_1 = \left[ -\frac{2\sqrt{5}}{5}, \frac{\sqrt{5}}{5}, 0 \right]^T, \quad \xi_2 = \left[ \frac{2\sqrt{5}}{15}, \frac{4\sqrt{5}}{15}, \frac{\sqrt{5}}{3} \right]^T,$$

$$\xi_3 = \left[ \frac{1}{3}, \frac{2}{3}, -\frac{2}{3} \right]^T.$$

取正交阵

$$Q = \begin{bmatrix} | & | & | \\ \xi_1 & \xi_2 & \xi_3 \\ | & | & | \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{2\sqrt{5}}{5} & \frac{2\sqrt{5}}{15} & \frac{1}{3} \\ \frac{\sqrt{5}}{5} & \frac{4\sqrt{5}}{15} & \frac{2}{3} \\ 0 & \frac{\sqrt{5}}{3} & -\frac{2}{3} \end{bmatrix},$$

则  $Q^{-1}AQ = Q^T A Q = \text{diag}(1, 1, 10)$ .

令  $X = [x_1, x_2, x_3]^T, Y = [y_1, y_2, y_3]^T$ , 作正交变换,  $X = QY$ , 原二次型就化成标准形

$$X^T A X = Y^T (Q^T A Q) Y = y_1^2 + y_2^2 + 10y_3^2.$$

我们可以给这个例子一个几何解释. 对在自然坐标系(基) $\epsilon_1, \epsilon_2, \epsilon_3$  下的二次曲面

$$2x_1^2 + 5x_2^2 + 5x_3^2 + 4x_1x_2 - 4x_1x_3 - 8x_2x_3 = 1,$$

若将坐标系  $\epsilon_1, \epsilon_2, \epsilon_3$  变换为另一直角坐标系

$$\xi_1 = \begin{bmatrix} -\frac{2\sqrt{5}}{5} \\ \frac{\sqrt{5}}{5} \\ 0 \end{bmatrix}, \xi_2 = \begin{bmatrix} \frac{2\sqrt{5}}{15} \\ \frac{4\sqrt{5}}{15} \\ \frac{\sqrt{5}}{3} \end{bmatrix}, \xi_3 = \begin{bmatrix} \frac{1}{3} \\ \frac{2}{3} \\ -\frac{2}{3} \end{bmatrix},$$

即

$$[\xi_1, \xi_2, \xi_3] = [\epsilon_1, \epsilon_2, \epsilon_3] \begin{bmatrix} -\frac{2\sqrt{5}}{15} & \frac{2\sqrt{5}}{15} & \frac{1}{3} \\ \frac{\sqrt{5}}{5} & \frac{4\sqrt{5}}{15} & \frac{2}{3} \\ 0 & \frac{\sqrt{5}}{3} & -\frac{2}{3} \end{bmatrix},$$

则在  $\xi_1, \xi_2, \xi_3$  坐标系下, 二次曲面方程为

$$y_1^2 + y_2^2 + 10y_3^2 = 1.$$

由解析几何知, 这是一个椭球面. 该椭球的三个主轴长度分别为  $1, 1, \frac{1}{\sqrt{10}}$ , 与特征值的关系为  $\frac{1}{\sqrt{|\lambda_1|}}, \frac{1}{\sqrt{|\lambda_2|}}, \frac{1}{\sqrt{|\lambda_3|}}$ . 特征值的

符号则决定了二次曲面的类型. ■

**例 4** 将一般二次曲面方程

$$\begin{aligned} x^2 - 2y^2 + 10z^2 + 28xy - 8yz + 20zx - 26x \\ + 32y + 28z - 38 = 0 \end{aligned} \quad \textcircled{1}$$

化为标准方程(只含纯平方项和常数项的方程).

**解** 首先将①式中的二次型部分

$$x^2 - 2y^2 + 10z^2 + 28xy - 8yz + 20zx, \quad (2)$$

采用类似例 3 的正交变换法,通过求②式对应矩阵  $A$  的特征值和特征向量,并对特征向量进行 Schmidt 正交化,则可得一正交矩阵

$$Q = \begin{bmatrix} \frac{1}{3} & \frac{2}{3} & \frac{2}{3} \\ \frac{2}{3} & \frac{1}{3} & -\frac{2}{3} \\ -\frac{2}{3} & \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} \end{bmatrix},$$

使得  $Q^T A Q = \text{diag}(9, 18, -18)$ . 作正交变换  $X = QY$ ,  $X = [x, y, z]^T$ ,  $Y = [x', y', z']^T$ , 代入②式  $X^T A X$ , 得

$$\begin{aligned} X^T A X &= Y^T (Q^T A Q) Y \\ &= [x', y', z'] \begin{bmatrix} 9 & 0 & 0 \\ 0 & 18 & 0 \\ 0 & 0 & -18 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{bmatrix} \\ &= 9x'^2 + 18y'^2 - 18z'^2. \end{aligned}$$

再令  $X = QY$ , 即

$$\begin{cases} x = \frac{1}{3}x' + \frac{2}{3}y' + \frac{2}{3}z', \\ y = \frac{2}{3}x' + \frac{1}{3}y' - \frac{2}{3}z', \\ z = -\frac{2}{3}x' + \frac{2}{3}y' - \frac{1}{3}z'. \end{cases} \quad (3)$$

代入曲面方程①的一次项部分,整个曲面方程①就化为

$$x'^2 + 2y'^2 - 2z'^2 - \frac{2}{3}x' + \frac{4}{3}y' - \frac{16}{3}z' - \frac{38}{9} = 0,$$

配方得

$$\left(x' - \frac{1}{3}\right)^2 + 2\left(y' + \frac{1}{3}\right)^2 - 2\left(z' + \frac{4}{3}\right)^2 = 1. \quad (4)$$



再令

$$x'' = x' - \frac{1}{3}, y'' = y' + \frac{1}{3}, z'' = z' + \frac{4}{3}. \quad (5)$$

将⑤代入方程④,得曲面方程①的标准方程

$$x''^2 + 2y''^2 - 2z''^2 = 1, \quad (6)$$

故方程的图形为单叶双曲面.

例4中①式是曲面在空间直角坐标系  $Oxyz$  下的方程,方程中的  $x, y, z$  是空间向量(即空间点)在自然基  $\epsilon_1, \epsilon_2, \epsilon_3$  下的坐标.当基  $\epsilon_1, \epsilon_2, \epsilon_3$  变换为  $\xi_1, \xi_2, \xi_3$ ,

$$\begin{aligned}\xi_1 &= \left[ \frac{1}{3}, \frac{2}{3}, -\frac{2}{3} \right]^T, \xi_2 = \left[ \frac{2}{3}, \frac{1}{3}, \frac{2}{3} \right]^T \\ \xi_3 &= \left[ \frac{2}{3}, -\frac{2}{3}, -\frac{1}{3} \right]^T\end{aligned}$$

时,坐标向量  $X = [x, y, z]^T$  变换为  $Y = [x', y', z']^T$ ,二者的关系即为正交变换  $X = QY$ .因此④式是曲面在基  $\xi_1, \xi_2, \xi_3$  下的坐标方程.⑤式表示平移变换(不是线性变换,请读者证明),就得到了曲面在空间坐标系  $O''x''y''z''$  下的标准方程⑥.新坐标系的原点  $O''$  在坐标系  $Ox'y'z'$  下的坐标为  $\left[ \frac{1}{3}, -\frac{1}{3}, -\frac{4}{3} \right]^T$ ,在  $Oxyz$  的坐标为  $[-1, 1, 0]^T$ . ■

从本例中可以看出,当二次曲面的中心与坐标原点重合时,总可以通过正交变换(线性变换)将其化成标准形.对中心不在坐标原点的二次曲面,可以通过一个正交变换和一个平移变换(非线性变换)使其成为标准形.

### 6.2.2. 配方法

对任一个二次型  $f = X^T A X$ ,也可用配方法找到非退化线性变换  $X = CY$ ,使得  $X^T A X$  化成标准形.

配方法的主要步骤为:

(i) 如果(6.1)式的二次型  $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$  中至少有一个平方项系数不为零, 不妨设  $a_{11} \neq 0$ , 则可对所有含  $x_1$  的项进行配方, 即

$$\begin{aligned} f(x_1, x_2, \dots, x_n) &= a_{11}x_1^2 + 2 \sum_{j=2}^n a_{1j}x_1x_j + \sum_{i=2}^n \sum_{j=2}^n a_{ij}x_ix_j \\ &= \frac{1}{a_{11}} \left( a_{11}^2 x_1^2 + 2a_{11}x_1 \sum_{j=2}^n a_{1j}x_j \right) + \sum_{i=2}^n \sum_{j=2}^n a_{ij}x_ix_j \\ &= \frac{1}{a_{11}} \left( \sum_{j=2}^n a_{1j}x_j \right)^2 - \frac{1}{a_{11}} \left( \sum_{j=2}^n a_{1j}x_j \right)^2 + \sum_{i=2}^n \sum_{j=2}^n a_{ij}x_ix_j. \end{aligned}$$

令

$$\begin{aligned} g(x_2, x_3, \dots, x_n) &= \sum_{i=2}^n \sum_{j=2}^n a_{ij}x_ix_j - \left( \frac{1}{a_{11}} \sum_{j=2}^n a_{1j}x_j \right)^2 \\ &= \sum_{i=2}^n \sum_{j=2}^n b_{ij}x_ix_j, \end{aligned}$$

并作变换

$$\begin{cases} y_1 = a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n, \\ y_2 = x_2, \\ \dots\dots\dots, \\ y_n = x_n, \end{cases}$$

即

$$Y = DX,$$

其中  $D = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ & 1 & \dots & 0 \\ & & \ddots & \vdots \\ & & & 1 \end{bmatrix},$

则  $\det(D) = a_{11} \neq 0$ . 记  $C = D^{-1}$ , 则当  $X = CY$  时, 有

$$f(x_1, x_2, \dots, x_n) = \frac{1}{a_{11}}y_1^2 + g(y_2, y_3, \dots, y_n).$$

在作  $X = CY$  变换后,  $g(y_2, y_3, \dots, y_n)$  为只含变量  $y_2, y_3, \dots,$

$y_n$  的二次型. 若相应的平方项系数还有不为零时, 重复以上步骤可以再次用配方法化简. 当所有平方项系数都为零时, 则讨论下种情况.

(ii) 若二次型的所有平方项系数都为零, 即二次型  $h(x_1, x_2, \dots, x_n)$  具有下述形式

$$\begin{aligned} h(x_1, x_2, \dots, x_n) &= 2h_{12}x_1x_2 + 2h_{13}x_1x_3 + \dots + 2h_{1n}x_1x_n + \dots + 2h_{n-1,n}x_{n-1}x_n \\ &= 2 \sum_{1 \leq i < j \leq n} h_{ij}x_ix_j, \end{aligned}$$

取一个不为零的  $h_{ij}$ , 不妨设  $h_{12} \neq 0$ , 作

$$\begin{aligned} x_1 &= y_1 + y_2, \\ x_2 &= y_1 - y_2, \\ x_k &= y_k, k \neq 1, 2. \end{aligned}$$

即

$$X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & -1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix} = CY,$$

则有  $\det(C) = -2 \neq 0$ , 这时(ii)类型问题转化成(i)类型问题.

对于一个二次型, 用上面的配方算法, 总可以使所有混合项消失, 变成标准形. 以上二种情况的变换矩阵都是可逆矩阵, 因此, 总存在一系列可逆阵  $C_1, C_2, \dots, C_s$ , 使得

$$\begin{aligned} f(x_1, x_2, \dots, x_n) &= X^T A X \\ &= Y^T (C_s^T \dots C_2^T C_1^T) A (C_1 C_2 \dots C_s) Y = \sum_{i=1}^n d_i y_i^2. \end{aligned}$$

从上面关于配方法化二次型为标准形的讨论中, 我们可以用归纳法证得下面定理(证明留作练习).

**定理 2** 对于任一个  $n$  元二次型  $X^TAX$ , 都存在非退化线性变换  $X=CY$ , 使得

$$X^TAX = d_1y_1^2 + d_2y_2^2 + \cdots + d_ny_n^2,$$

或: 对于任一个  $n$  阶实对称矩阵  $A$ , 都存在可逆阵  $C$ , 使得

$$C^TAC = \text{diag}(d_1, d_2, \cdots, d_n). \quad (6.10)$$

**例 5** 用配方法化二次型

$$f(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + 2x_1x_2 + 2x_1x_3 + 8x_2x_3$$

为标准形, 并求所作的非退化线性变换.

**解** 先将含  $x_1^2$  及含  $x_1$  的混合项部分, 配成含  $x_1$  的某个一次式的完全平方中的一部分, 得到

$$\begin{aligned} f(x_1, x_2, x_3) &= x_1^2 + 2(x_2 + x_3)x_1 + (x_2 + x_3)^2 \\ &\quad - (x_2 + x_3)^2 + x_2^2 + x_3^2 + 8x_2x_3 \\ &= (x_1 + x_2 + x_3)^2 + 6x_2x_3. \end{aligned} \quad (1)$$

令

$$\begin{cases} y_1 = x_1 + x_2 + x_3, \\ y_2 = x_2, \\ y_3 = x_3. \end{cases} \quad (2)$$

将②式代入①式, 二次型  $f(x_1, x_2, x_3)$  化成

$$f(x_1, x_2, x_3) = y_1^2 + 6y_2y_3. \quad (3)$$

由于③式中关于  $y_2, y_3$  无平方项, 再令

$$\begin{cases} y_1 = z_1, \\ y_2 = z_2 + z_3, \\ y_3 = z_2 - z_3. \end{cases} \quad (4)$$

④式变换成标准形

$$f(x_1, x_2, x_3) = z_1^2 + 6z_2^2 - 6z_3^2. \quad (5)$$

从②式中解出  $x_1, x_2, x_3$  得

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix}, \text{记成 } X = C_1 Y.$$

将④式的变换写成矩阵形式,则有

$$\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \end{bmatrix}, \text{记成 } Y = C_2 Z.$$

那么

$$\begin{aligned} C &= C_1 C_2 = \begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

为二次型  $f(x_1, x_2, x_3)$  化成标准形⑤所作的非退化线性变换的变换矩阵. ■

**例 6** 用配方法化二次型  $f(x_1, x_2, x_3) = 2x_1x_2 + 4x_1x_3$  为标准形, 并求所作的非退化线性变换.

**解** 因为二次型中没有平方项, 无法配方, 所以先作一个非退化线性变换, 使其出现平方项. 根据  $x_1x_2$ , 利用平方差公式, 令

$$\begin{cases} x_1 = y_1 + y_2, \\ x_2 = y_1 - y_2, \\ x_3 = y_3. \end{cases} \quad \text{①}$$

将①式代入二次型, 得

$$\begin{aligned} f(x_1, x_2, x_3) &= 2(y_1 + y_2)(y_1 - y_2) + 4(y_1 + y_2)y_3 \\ &= 2y_1^2 - 2y_2^2 + 4y_1y_3 + 4y_2y_3. \end{aligned}$$

再用例 5 中的配方法, 先对含  $y_1$  的项配完全平方, 然后对含  $y_2$  的

项配完全平方,得到

$$\begin{aligned} f(x_1, x_2, x_3) &= 2(y_1^2 + 2y_1y_3 + y_3^2) - 2y_3^2 - 2y_2^2 + 4y_2y_3 \\ &= 2(y_1 + y_3)^2 - 2(y_2 - y_3)^2. \end{aligned} \quad (2)$$

$$\text{令} \begin{cases} z_1 = y_1 + y_3, \\ z_2 = y_2 - y_3, \\ z_3 = y_3, \end{cases} \quad \text{即} \quad \begin{cases} y_1 = z_1 - z_3, \\ y_2 = z_2 + z_3, \\ y_3 = z_3. \end{cases} \quad (3)$$

将③式代入②式,二次型  $f(x_1, x_2, x_3)$  就化成了标准形,即

$$f(x_1, x_2, x_3) = 2z_1^2 - 2z_2^2. \quad (4)$$

这里把二次型  $2x_1x_2 + 4x_1x_3$  化成标准形  $2z_1^2 - 2z_2^2$ ,作了①式和③式所示的两次线性变换,把它们分别记作

$$X = C_1Y \text{ 和 } Y = C_2Z,$$

其中

$$C_1 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad C_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad (5)$$

$$X = [x_1, x_2, x_3]^T, Y = [y_1, y_2, y_3]^T, Z = [z_1, z_2, z_3]^T.$$

于是  $X = (C_1C_2)Z$  就是二次型化成④式标准形所作的非退化线性变换,其中变换的矩阵

$$C = C_1C_2 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

这里原二次型  $2x_1x_2 + 4x_1x_3$  及其标准形  $2z_1^2 - 2z_2^2$  所对应的矩阵,分别是

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \Lambda = \begin{bmatrix} 2 & & \\ & -2 & \\ & & 0 \end{bmatrix}.$$

读者不难验证,  $C^TAC = \text{diag}(2, -2, 0)$ . ■

对于一般的  $n$  元二次型,利用例 5 和例 6 中用的配方方法,都

可化成不超过  $n$  个一次式平方项之和;再作非退化线性变换,就可化成新变元的二次型的标准形.在用配方法化二次型为标准形的过程中,可能要作多次非退化线性变换(例 5 和例 6 都作了两次),但变换的矩阵只有例 5 和例 6 中两类可逆阵.这里必须强调,化  $X^T A X$  为  $Y^T (C^T A C) Y$  的变换  $X = CY$  必须是非退化的(即  $C$  是可逆阵).当  $C$  可逆时,  $X$  与  $Y$  一一对应;当  $C$  不可逆时,  $X$  与  $Y$  不一一对应(包括有的  $X$  没有  $Y$  与之对应),这种变换称为退化的.显然,我们不能由退化线性变换所得的新二次型去研究原二次型的性质.为了保证变换的非退化性,在例 6 的①、③式中,不能令  $x_3 = 0, z_3 = 0$ .

### 6.2.3 初等变换法

这一段的结论是,任一个  $n$  阶实对称矩阵  $A$ ,一定可以通过一系列相同类型的初等行、列变换化成对角形.

用数学归纳法证明这个结论.  $n=1$  时结论显然成立.假设结论对  $n-1$  阶实对称矩阵成立.现考虑  $n$  阶的情形.设

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}, a_{ij} = a_{ji} (i, j = 1, 2, \cdots, n).$$

(i) 如果  $a_{11} \neq 0$ ,则第 1 列(行)乘  $-\frac{a_{1j}}{a_{11}}$  加到第  $j$  列(行),就使第 1 行的  $a_{1j}$ (第 1 列的  $a_{j1}$ )化为 0,  $j=2, 3, \cdots, n$ .这是用同样类型的初等列、行变换,把第 1 行和第 1 列除  $a_{11}$  以外的全部元素化成了 0.  $A$  经过这样的初等变换所化成的矩阵仍是对称矩阵.为了说明这一点,我们把  $A$  分块表示为

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & \alpha \\ \alpha^T & A_1 \end{bmatrix},$$

其中  $A_1$  为  $n-1$  阶实对称矩阵. 要把  $\alpha$  和  $\alpha^T$  化为  $O$ , 只要取分块初等矩阵

$$\begin{aligned} C_1 &= \begin{bmatrix} 1 & -a_{11}^{-1}\alpha \\ 0 & I_{n-1} \end{bmatrix}, \\ C_1^T &= \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -a_{11}^{-1}\alpha^T & I_{n-1} \end{bmatrix}, \end{aligned} \quad (1)$$

就有

$$C_1^T A C_1 = \begin{bmatrix} a_{11} & O \\ O & A_1 - a_{11}^{-1}\alpha^T\alpha \end{bmatrix}. \quad (2)$$

由于  $C_1^T A C_1$  仍是对称阵, 所以  $A_1 - a_{11}^{-1}\alpha^T\alpha$  是  $n-1$  阶实对称矩阵. 根据归纳假设, 对②的右端矩阵作一系列相同类型初等行、列变换, 可以化成对角形.

(ii) 若  $a_{11}=0$ , 但存在  $a_{ii} \neq 0$  ( $2 \leq i \leq n$ ), 将  $A$  的第 1 行与第  $i$  行及第 1 列与第  $i$  列对换, 就可化成第(1)种情形. 即取初等对换阵  $E_{1i}$  就得

$$E_{1i}^T A E_{1i} = \begin{bmatrix} a_{ii} & a_{i2} & \cdots & a_{i,i-1} & a_{i1} & a_{i,i+1} & \cdots & a_{in} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{1i} & a_{12} & \cdots & a_{1,i-1} & a_{11} & a_{1,i+1} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{ni} & a_{n2} & \cdots & a_{n,i-1} & a_{n1} & a_{n,i+1} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}. \quad (3)$$

(iii) 若  $a_{ii}=0$  ( $i=1, 2, \cdots, n$ ), 必存在  $a_{ij}=a_{ji} \neq 0$  ( $i < j$ ), 将  $A$  的第  $j$  行加到第  $i$  行, 第  $j$  列加到第  $i$  列, 就可化成第(ii)种情形. 即取初等倍加阵

$$E_{ij}(1) = \begin{bmatrix} 1 & & & & & & \\ & \ddots & & & & & \\ & & 1 & & & & \\ & & \vdots & \ddots & & & \\ & & 1 & \cdots & 1 & & \\ & & & & & \ddots & \\ & & & & & & 1 \end{bmatrix} \begin{matrix} \cdots \text{第 } i \text{ 行} \\ \cdots \text{第 } j \text{ 行} \end{matrix}$$



就得

$$E_{ij}^T(1)AE_{ij}(1) = \begin{bmatrix} 0 & & & & & \\ & \ddots & & & & \\ & & 0 & & & * \\ & & & 2a_{ij} & \cdots & a_{ij} \\ & & & \vdots & \ddots & \vdots \\ & & & a_{ji} & \cdots & 0 \\ & * & & & & \ddots \\ & & & & & & 0 \end{bmatrix}. \quad (4)$$

上述②,③,④式表明:初等倍加阵  $E_{ij}(c)$  和初等对换阵  $E_{ij}$  右乘  $A$ , 它们的转置  $E_{ij}^T(c)$  和  $E_{ij}^T$  再左乘  $A$ , 是作了同样类型的倍加列、行变换和同样类型的列、行对换. 此外,  $E_i^T(c)AE_i(c) = E_i(c)AE_i(c)$  表示  $A$  的第  $i$  列和第  $i$  行都乘  $c$ , 也是作了同样类型的倍乘列、行变换. 因此上面证明的结论可叙述为:

**定理 3** 对任一个实对称矩阵  $A$ , 一定存在一系列初等矩阵  $E_1, E_2, \dots, E_s$ , 使得

$$E_s^T \cdots E_2^T E_1^T A E_1 E_2 \cdots E_s = \text{diag}(d_1, d_2, \dots, d_n), \quad (6.11)$$

记

$$C = E_1 E_2 \cdots E_s = I E_1 E_2 \cdots E_s. \quad (6.12)$$

(6.11) 和 (6.12) 式表明, 将  $A$  合同变换为对角阵所作的一系列初等列变换同样施加于单位阵, 就得到矩阵  $C$ , 使得  $C^T A C = \text{diag}(d_1, d_2, \dots, d_n)$ .

**例 7** 用初等变换法将例 3 中的二次型

$$f(x_1, x_2, x_3) = [x_1, x_2, x_3] \begin{bmatrix} 2 & 2 & -2 \\ 2 & 5 & -4 \\ -2 & -4 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$$

化为标准形,并求所作的非退化线性变换  $X=CY$ .

**解** 下面的变换中,符号  $[i]$  表示第  $i$  列,符号  $\textcircled{i}$  表示第  $i$  行,  $[2]+[1]\times(-1)$  表示在第 2 列上加第 1 列乘  $(-1)$ .

$$\begin{aligned}
 \begin{bmatrix} A \\ \dots \\ I \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 2 & 2 & -2 \\ 2 & 5 & -4 \\ -2 & -4 & 5 \\ \hline 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{\substack{[2]+[1]\times(-1) \\ [3]+[1]}} \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & -2 \\ -2 & -2 & 3 \\ \hline 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \\
 &\xrightarrow{\substack{\text{行变换} \\ \textcircled{2}+\textcircled{1}\times(-1) \\ \textcircled{3}+\textcircled{1} \\ \text{不变换}}} \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & -2 \\ 0 & -2 & 3 \\ \hline 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{\substack{[3]+[2]\times\frac{2}{3} \\ \textcircled{3}+\textcircled{2}\times\frac{2}{3} \\ [3]+[2]\times\frac{2}{3}}} \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{5}{3} \\ \hline 1 & -1 & \frac{1}{3} \\ 0 & 1 & \frac{2}{3} \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \Lambda \\ \dots \\ C \end{bmatrix}.
 \end{aligned}$$

上述过程是对实对称阵  $A$  作一系列同样类型的初等行、列变换,将  $A$  化成了对角阵  $\Lambda$ . 把一系列初等列变换对应的初等阵的乘积记作  $C$ , 则  $C^T AC = \Lambda$ . 由于对单位阵施行了对  $A$  所作的同样的列变换,即可用分块矩阵表示为

$$\begin{aligned}
 [C^T \mid I] \begin{bmatrix} A \\ \dots \\ I \end{bmatrix} C &= \begin{bmatrix} C^T AC \\ \dots \\ C \end{bmatrix} \\
 &= \begin{bmatrix} \Lambda \\ \dots \\ C \end{bmatrix},
 \end{aligned}$$

所以原  $\begin{bmatrix} A \\ \cdots \\ J \end{bmatrix}$  中  $I$  所在的位置就变成了  $C$ , 且  $C$  显然是可逆阵, 于是作非退化线性变换  $X=CY$ , 原二次型就化成了标准形, 且有

$$\begin{aligned} X^T A X &= Y^T (C^T A C) Y = Y^T \Lambda Y \\ &= 2y_1^2 + 3y_2^2 + \frac{5}{3}y_3^2. \end{aligned}$$

**例 8** 用初等变换法将例 6 的  $f(x_1, x_2, x_3) = 2x_1x_2 + 4x_1x_3$  化为标准形, 并求所作的非退化线性变换  $X=CY$ .

解  $f(x_1, x_2, x_3) = [x_1, x_2, x_3] \cdot \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}.$

同例 7 相同的记号  $[i]$  和  $\textcircled{i}$ , 则初等变换可以写成:

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} A \\ \cdots \\ J \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow[\begin{smallmatrix} [1]+[2] \\ \textcircled{1}+\textcircled{2} \end{smallmatrix}]{\begin{smallmatrix} [1]+[2] \\ \textcircled{1}+\textcircled{2} \end{smallmatrix}} \begin{bmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \\ &\xrightarrow[\begin{smallmatrix} [2]+[1] \times (-\frac{1}{2}) \\ \textcircled{2}+\textcircled{1} \times (-\frac{1}{2}) \\ [2]+[1] \times (-\frac{1}{2}) \end{smallmatrix}]{\begin{smallmatrix} [2]+[1] \times (-1) \\ \textcircled{2}+\textcircled{1} \times (-1) \\ [2]+[1] \times (-1) \end{smallmatrix}} \begin{bmatrix} 2 & 0 & 2 \\ 0 & -\frac{1}{2} & -1 \\ 2 & -1 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ 1 & -\frac{1}{2} & 0 \\ 1 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow[\begin{smallmatrix} [3]+[1] \times (-1) \\ \textcircled{3}+\textcircled{1} \times (-1) \\ [3]+[1] \times (-1) \end{smallmatrix}]{\begin{smallmatrix} [3]+[1] \times (-1) \\ \textcircled{3}+\textcircled{1} \times (-1) \\ [3]+[1] \times (-1) \end{smallmatrix}} \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2} & -1 \\ 0 & -1 & -2 \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ 1 & -\frac{1}{2} & -1 \\ 1 & \frac{1}{2} & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

$$\begin{array}{c} [3] + [2] \times (-2) \\ \textcircled{5} + \textcircled{2} \times (-2) \\ \hline [3] + [2] \times (-2) \end{array} \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ \hline 1 & -\frac{1}{2} & 0 \\ 1 & \frac{1}{2} & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \Lambda \\ \vdots \\ C \end{bmatrix}.$$

于是,作非退化线性变换  $X=CY$ , 其中

$$C = \begin{bmatrix} 1 & -\frac{1}{2} & 0 \\ 1 & \frac{1}{2} & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

则二次型  $f(x_1, x_2, x_3)$  化为标准形

$$\begin{aligned} f(x_1, x_2, x_3) &= X^T A X = Y^T (C^T A C) Y = Y^T \Lambda Y \\ &= 2y_1^2 - \frac{1}{2}y_2^2. \end{aligned}$$

对此例 3 和例 7、例 6 和例 8 的两种解法,我们可以看到,用不同的非退化线性变换化二次型为标准形,其标准形一般是不同的,这个事实再次表明,作为  $n$  维向量函数的二次型,它在不同基下的坐标表示式( $n$  个坐标的二次齐次多项式)一般是不同的.然而,在同一个二次型所化成的不同的标准形中,正平方项的项数和负平方项的项数是不变的.如例 3 和例 7 中都是三个正平方项,例 6 和例 8 中都是一个正、负和零平方项.这不是偶然的巧合,而是必然的结果,下一节将给以证明.

### 6.3 惯性定理和二次型的规范形

**定理 4(惯性定理)** 对于一个  $n$  元二次型  $X^TAX$ , 不论作怎样的非退化线性变换使之化为标准形, 其中正平方项的项数  $p$  和负平方项的项数  $q$  都是唯一确定的. 或者说, 对于一个  $n$  阶实对称矩阵  $A$ , 不论取怎样的可逆阵  $C$ , 只要使

$$C^TAC = \begin{bmatrix} d_1 & & & & & \\ & \ddots & & & & \\ & & d_p & & & \\ & & & -d_{p+1} & & \\ & & & & \ddots & \\ & & & & & -d_{p+q} \\ & & & & & & 0 \\ & & & & & & & \ddots \\ & & & & & & & & 0 \end{bmatrix}$$

$d_i > 0$  ( $i=1, 2, \dots, p+q$ )  $p+q \leq n$  成立, 则  $p$  和  $q$  是由  $A$  唯一确定的. (6.13)

\*证 由于秩( $A$ ) = 秩( $C^TAC$ ) =  $p+q$ , 所以  $p+q$  由  $A$  的秩唯一确定. 因此, 只需证明  $p$  由  $A$  唯一确定.

设  $p+q=r(A)=r$ , 二次型  $f=X^TAX$  经非退化线性变换

$$X = BY \text{ 和 } X = CZ \quad (1)$$

都可化成标准形, 其标准形分别为

$$f = b_1y_1^2 + b_2y_2^2 + \dots + b_p y_p^2 - b_{p+1}y_{p+1}^2 - \dots - b_r y_r^2, \quad (2)$$

$$f = c_1z_1^2 + c_2z_2^2 + \dots + c_t z_t^2 - c_{t+1}z_{t+1}^2 - \dots - c_r z_r^2, \quad (3)$$

式②, ③中  $b_i > 0, c_i > 0$  ( $i=1, 2, \dots, r$ ).

要证正平方项的项数唯一确定, 即证  $p=t$ .

用反证法. 假设  $p > t$ , 由②, ③可得

$$\begin{aligned} f &= b_1 y_1^2 + \cdots + b_i y_i^2 \mid + b_{i+1} y_{i+1}^2 + \cdots + b_p y_p^2 \mid \\ &\quad - b_{p+1} y_{p+1}^2 - \cdots - b_r y_r^2 \\ &= c_1 x_1^2 + \cdots + c_i x_i^2 \mid - c_{i+1} x_{i+1}^2 \\ &\quad - \cdots - c_p x_p^2 \mid - c_{p+1} x_{p+1}^2 - \cdots - c_r x_r^2. \end{aligned} \quad (4)$$

由①式得  $Z=C^{-1}BY$  (记  $D=C^{-1}B$ ),  $Z=DY$ , 即

[illegible]

为了从④式中找到矛盾,我们令  $z_1 = z_2 = \cdots = z_r = 0, y_{p+1} = \cdots = y_n = 0$ , 再利用⑤式,得到  $y_1, y_2, \cdots, y_n$  的方程组

$$\left\{ \begin{array}{l} d_{11}y_1 + d_{12}y_2 + \cdots + d_{1n}y_n = 0, \\ \dots\dots\dots \\ d_{i1}y_1 + d_{i2}y_2 + \cdots + d_{in}y_n = 0, \\ \dots\dots\dots \\ y_{p+1} = 0, \\ \dots\dots\dots \\ y_n = 0. \end{array} \right. \quad (6)$$

齐次线性方程组⑥有  $n$  个未知量, 但方程个数  $= t + (n - p) = n - (p - t) < n$ , 故必有非零解. 由于  $y_{p+1} = \cdots = y_n = 0$ , 所以⑥的非零解中  $y_1, y_2, \cdots, y_p$  不全为零, 代入④式得

$$f = b_1 y_1^2 + b_2 y_2^2 + \dots + b_i y_i^2 + \dots + b_s y_s^2 > 0. \quad (7)$$

将⑥的非零解代入⑤式得到  $z_1, z_2, \dots, z_t, \dots, z_n$  一组值 (这时  $z_1 = z_2 = \dots = z_t = 0$ ), 将它们代入④式, 又得

$$f = -c_{i+1}z_{i+1}^2 - \dots - c_pz_p^2 - \dots - c_rz_r^2 \leq 0. \quad (8)$$

显然⑦、⑧是矛盾的,故假设的  $p > t$  不能成立.

同理可证  $p < t$  也不成立. 故  $p = t$ . 这就证明了二次型的标准形中, 正平方项的项数与所作的非退化线性变换无关, 它是由二次型本身(或者说二次型矩阵  $A$ )所确定的. 由于  $q = r(A) - p$ , 所以  $q$  也是由  $A$  唯一确定的. ■

**定义 3** 二次型  $X^T A X$  (所化成) 的标准形中, 正平方项的项数(即与  $A$  合同的对角阵中正对角元的个数), 称为二次型(或  $A$ ) 的正惯性指数; 负平方项的项数(即与  $A$  合同的对角阵中负对角元的个数), 称为二次型(或  $A$ ) 的负惯性指数; 正、负惯性指数的差称为负号差.

$n$  阶实对称矩阵  $A$  的秩为  $r$ , 正惯性指数为  $p$ , 则负惯性指数  $q = r - p$ , 符号差  $p - q = 2p - r$ , 与  $A$  合同的对角阵的零对角元个数为  $n - r$ .

由惯性定理可得下面的推论.

**推论** 设  $A$  为  $n$  阶实对称矩阵, 若  $A$  的正、负惯性指数分别为  $p$  和  $q$ , 则

$$A \simeq \text{diag}(1, \dots, 1, -1, \dots, -1, 0, \dots, 0) \quad (6.14)$$

其中 1 有  $p$  个,  $-1$  有  $q$  个,  $0$  有  $n - (p + q)$  个.

或者说, 对于二次型  $X^T A X$ , 存在非退化线性变换  $X = CY$ , 使得

$$X^T A X = y_1^2 + \dots + y_p^2 - y_{p+1}^2 - \dots - y_{p+q}^2. \quad (6.15)$$

并把(6.15)式右端的二次型称为  $X^T A X$  的规范形; 把(6.14)式中的对角阵称为  $A$  的合同规范形.

**证** 根据 6.2 节中定理 2 及惯性定理, 存在可逆阵  $C_1$ , 使得  $C_1^T A C_1 = \text{diag}(d_1, \dots, d_p, -d_{p+1}, \dots, -d_{p+q}, 0, \dots, 0)$ , 其中  $d_i > 0 (i = 1, \dots, p, p+1, \dots, p+q)$ . 取可逆阵

$$C_2 = \text{diag}\left(\frac{1}{\sqrt{d_1}}, \dots, \frac{1}{\sqrt{d_p}}, \frac{1}{\sqrt{d_{p+1}}}, \dots, \frac{1}{\sqrt{d_{p+q}}}, 1, \dots, 1\right),$$

则  $C_2^T C_1^T A C_1 C_2 = C_2^T A C_2$ , 并有

$$C_1^T(C_1^T A C_1)C_2 = \text{diag}(1, \dots, 1, -1, \dots, -1, 0, \dots, 0),$$

其中 $\pm 1$ 分别有 $p, q$ 个,  $0$ 有 $n-(p+q)$ 个.

取 $C=C_1C_2$ , (6.14)式就成立; 取 $X=CY$  ( $C$ 可逆) (6.15)式就成立. ■

如果两个 $n$ 阶实对称矩阵 $A, B$ 合同, 我们也称它们对应的二次型 $X^T A X$ 和 $Y^T B Y$ 合同.

根据以上的结果, 读者不难证明以下的结论.

(i) 两个对称矩阵 $A, B$ 合同的充要条件是,  $A, B$ 有相同的正惯性指数和相同的负惯性指数.

(ii) 全体 $n$ 阶实对称矩阵, 按其合同规范形(不考虑 $+1, -1, 0$ 的排列次序)分类, 共有 $\frac{(n+1)(n+2)}{2}$ 类.

## 6.4 正定二次型和正定矩阵

$n$ 元正定二次型是正惯性指数为 $n$ 的二次型,  $n$ 阶正定矩阵是正惯性指数为 $n$ 的实对称矩阵, 它们在工程技术和最优化等问题中有着广泛的应用. 现在我们从二元函数极值点的判别问题, 引入二次型正定的概念, 例如, 对于

$$f(x, y) = 2x^2 + 4xy + 5y^2, \quad (1)$$

易知:  $f(0, 0) = 0, f'_x(0, 0) = f'_y(0, 0) = 0$ , 所以原点 $O(0, 0)$ 是 $f(x, y)$ 的驻点. 由

$$f(x, y) = 2(x + y)^2 + 3y^2,$$

又可知, 当 $x, y$ 不全为零即 $\alpha = [x, y]^T \neq 0$ 时,  $f(x, y)$ 恒大于零, 所以 $O(0, 0)$ 是 $f(x, y)$ 的极小值点. 这里的二次型①就是本节要讨论的正定二次型. 再如,

$$F(x, y) = 4 + 4xy + 2x \sin x + 5y \sin y, \quad (2)$$

易知:  $F(0, 0) = 4, F'_x(0, 0) = F'_y(0, 0) = 0$ . 因此原点 $O(0, 0)$ 是



$F(x, y)$  的驻点. 在多元函数微分学中讲过, 要判别原点  $O(0, 0)$  是否是  $F(x, y)$  的极值点, 要将  $F(x, y)$  在原点处展成一阶台劳公式

$$\begin{aligned} F(x, y) &= F(0, 0) + F'_x(0, 0)x + F'_y(0, 0)y \\ &+ \frac{1}{2!} [F''_{xx}(0, 0)x^2 + F''_{xy}(0, 0)xy + F''_{yx}(0, 0)yx \\ &+ F''_{yy}(0, 0)y^2] + O(x^2 + y^2). \end{aligned}$$

其中  $O(x^2 + y^2)$  是比  $x^2 + y^2$  高阶的无穷小量. 经过计算可得

$$\begin{aligned} F''_{xx}(0, 0) &= 4, F''_{xy}(0, 0) = F''_{yx}(0, 0) = 4, \\ F''_{yy}(0, 0) &= 10. \end{aligned}$$

于是

$$F(x, y) = 4 + (2x^2 + 4xy + 5y^2) + O(x^2 + y^2).$$

因此, 判别  $F(0, 0) = 4$  是否是  $F(x, y)$  的极小(大)值, 就是要判别, 在原点  $(0, 0)$  的某个邻域内

$$(2x^2 + 4xy + 5y^2) + O(x^2 + y^2),$$

是否恒正(负). 而上式  $O(x^2 + y^2)$  是比  $x^2 + y^2$  高阶的无穷小量, 故上式的正负号取决于  $2x^2 + 4xy + 5y^2$  的正负号. 根据前面对①式的讨论, 可知原点  $O(0, 0)$  也是②中函数  $F(x, y)$  的极小值点.

对于一般的  $n$  元函数, 其驻点是否极值点的问题, 需要讨论一个  $n$  元二次型是否恒正、恒负的问题, 这就是二次型是否正定、负定的问题. 现在我们先讨论正定二次型.

**定义 4** 如果对于任意的非零向量  $X = [x_1, x_2, \dots, x_n]^T$ , 恒有

$$\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_{ij} x_i x_j = X^T A X > 0, \quad (6.16)$$

就称  $X^T A X$  为正定二次型, 称  $A$  为正定矩阵.

根据定义 4, 可得以下结论:

(i) 二次型  $f(y_1, y_2, \dots, y_n) = d_1 y_1^2 + d_2 y_2^2 + \dots + d_n y_n^2$  正定的充分必要条件是  $d_i > 0$  ( $i = 1, 2, \dots, n$ ). 充分性是显然的. 用反证法证必要性. 设  $d_i \leq 0$ , 取  $y_i = 1, y_j = 0$  ( $j \neq i$ ), 代入二次型, 得

$$f(0, \dots, 0, 1, 0, \dots, 0) = d_i \leq 0,$$

与二次型  $f(y_1, y_2, \dots, y_n)$  正定矛盾.

(ii) 一个二次型  $X^T A X$ , 经过非退化线性变换  $X = CY$ , 化为  $Y^T (C^T A C) Y$ , 其正定性保持不变. 即当

$$X^T A X \xrightarrow{X=CY} Y^T (C^T A C) Y \quad (C \text{ 可逆})$$

时, 等式两端的二次型有相同的正定性. 这是因为: 对于任意的  $Y_0 \neq 0$ , 即  $[y_1^{(0)}, y_2^{(0)}, \dots, y_n^{(0)}]^T \neq 0$ , 由于  $X = CY$  ( $C$  可逆), 所以与  $Y_0$  相对应的  $X_0 \neq 0$  (如果  $X_0 = 0$ , 则  $Y_0 = C^{-1} X_0 = 0$ , 与  $Y_0 \neq 0$  矛盾), 若  $X^T A X$  正定, 则  $X_0^T A X_0 > 0$ . 如此就有:

对于任意的  $Y_0 \neq 0$ ,  $Y_0^T (C^T A C) Y_0 = X_0^T A X_0 > 0$ , 故  $Y^T (C^T A C) Y$  是正定二次型.

由上述两个结论可见, 一个二次型  $X^T A X$  (或实对称矩阵  $A$ ), 通过非退化线性变换  $X = CY$ , 将其化成标准形 (或规范形)  $Y^T (C^T A C) Y = \sum_{i=1}^n d_i y_i^2$  (或将  $A$  合同于对角阵, 即  $C^T A C = \Lambda$ ), 就容易判别其正定性.

就二次型的标准形 (或规范形) 来判别二次型的正定性, 有下列重要的结果.

**定理 5** 若  $A$  是  $n$  阶实对称矩阵, 则下列命题等价:

- (i)  $X^T A X$  是正定二次型 (或  $A$  是正定矩阵);
- (ii)  $A$  的正惯性指数为  $n$ , 即  $A \simeq I$ ;
- (iii) 存在可逆阵  $P$ , 使得  $A = P^T P$ ;
- (iv)  $A$  的  $n$  个特征值  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$  全大于零.

定理中四个命题等价, 其意义是任两个命题都互为充要条件. 证明若干个命题等价, 可采用下列循环证法.

**证** (i)  $\Rightarrow$  (ii) 根据 6.2 节中定理 2, 对于  $A$ , 存在可逆阵  $C$ , 使得

$$C^T A C = \text{diag}(d_1, d_2, \dots, d_n).$$

假设正惯性指数  $< n$ , 则至少存在一个  $d_i \leq 0$ , 作变换  $X = CY$ , 则

$$X^T A C = Y^T (C^T A C) Y = d_1 y_1^2 + d_2 y_2^2 + \cdots + d_n y_n^2$$

不恒大于零(见定义 4 后的结论(i)), 与命题(i)矛盾, 故  $A$  的正惯性指数为  $n$ , 从而  $A \simeq I$ .

(ii)  $\Rightarrow$  (iii) 由  $C^T A C = I$  ( $C$  可逆), 得  $A = (C^T)^{-1} C^{-1} = (C^{-1})^T C^{-1}$ , 取  $P = C^{-1}$ , 则有  $A = P^T P$ .

(iii)  $\Rightarrow$  (iv) 设  $AX = \lambda X$ , 即  $(P^T P)X = \lambda X$ , 于是便有

$$X^T P^T P X = \lambda X^T X, \text{ 即 } (PX, PX) = \lambda (X, X).$$

由于特征向量  $X \neq O$ , 从而  $PX \neq O$ , 故  $A$  的特征值

$$\lambda = \frac{(PX, PX)}{(X, X)} > 0.$$

(iv)  $\Rightarrow$  (i) 对于  $n$  阶实对称矩阵  $A$ , 存在正交阵  $Q$ , 使得

$$Q^T A Q = \text{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n),$$

作正交变换  $X = QY$ , 得

$$X^T A X = \lambda_1 y_1^2 + \lambda_2 y_2^2 + \cdots + \lambda_n y_n^2.$$

由于已知特征值  $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n$  都大于零, 故  $X^T A X$  正定. ■

**例 9** 证明: 若  $A$  是正定矩阵, 则  $A^{-1}$  也是正定矩阵.

**证** 正定矩阵是满秩矩阵, 所以  $A^{-1}$  是存在的, 正定矩阵是对称阵, 可逆对称阵的逆矩阵仍是对称阵, 故  $A^{-1}$  也是对称阵. 证明  $A^{-1}$  正定的方法很多.

法 1: 用定义证,

$$\begin{aligned} X^T A^{-1} X &= (X, A^{-1} X) && \text{(作变换 } X = AY) \\ &= (AY, A^{-1} AY) = (AY, Y) = Y^T AY. \end{aligned}$$

由于当  $X = AY$  ( $A$  可逆) 时,  $X \neq O \Leftrightarrow Y \neq O$ ; 又已知对任意的  $Y \neq O$ , 恒有  $Y^T AY > 0$ . 故对任意的  $X \neq O$ , 恒有  $X^T A^{-1} X > 0$ , 因此  $A^{-1}$  正定.

法 2: 利用定理 5 中, (i)  $\Leftrightarrow$  (ii).

已知  $A$  正定, 所以存在可逆阵  $C$ , 使得  $C^T A C = I$ .

将  $C^T AC = I$  两边求逆, 得  $C^{-1} A^{-1} (C^{-1})^T = I$ , 取  $D = (C^{-1})^T$ , 则  $D^T A^{-1} D = I$ , ( $D$  可逆), 故  $A^{-1}$  正定.

法 3: 利用定理 5 中, (i)  $\Leftrightarrow$  (iii).

$A$  正定, 所以存在可逆阵  $P$ , 使得  $A = P^T P$ , 于是  $A^{-1} = P^{-1} (P^{-1})^T = S^T S$  (其中  $S = (P^{-1})^T$  是可逆阵), 故  $A^{-1}$  正定.

法 4: 利用定理 5 中, (i)  $\Leftrightarrow$  (iv).

根据  $AX = \lambda X$ , 则  $A^{-1}X = \frac{1}{\lambda}X$  (其中  $\lambda \neq 0$ ). 已知  $A$  的特征值全大于零, 所以  $A^{-1}$  的特征值也全大于零, 故  $A^{-1}$  正定. ■

### 例 10 判断二次型

$$f(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 + 2x_2^2 + 3x_3^2 - 2x_1x_2 - 2x_2x_3$$

是否是正定二次型.

解 法 1 用配方法得

$$\begin{aligned} f(x_1, x_2, x_3) &= (x_1 - 2x_1x_2 + x_2^2) + (x_2^2 - 2x_2x_3 + x_3^2) + 2x_3^2 \\ &= (x_1 - x_2)^2 + (x_2 - x_3)^2 + 2x_3^2 \geq 0. \end{aligned}$$

等号成立的充分必要条件是

$$x_1 - x_2 = 0, x_2 - x_3 = 0, x_3 = 0,$$

即  $x_1 = x_2 = x_3 = 0$ , 故  $f(x_1, x_2, x_3)$  正定.

法 2 求特征值法. 二次型对应的矩阵为

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 3 \end{bmatrix}.$$

由

$$\begin{aligned} |\lambda I - A| &= \begin{vmatrix} \lambda - 1 & 1 & 0 \\ 1 & \lambda - 2 & 1 \\ 0 & 1 & \lambda - 3 \end{vmatrix} \\ &= (\lambda - 2)(\lambda^2 - 4\lambda + 1) = 0, \end{aligned}$$

解得  $\lambda_1 = 2, \lambda_2 = 2 + \sqrt{3}, \lambda_3 = 2 - \sqrt{3}$ . 因  $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$  均大于零, 由定

理 5,  $f(x_1, x_2, x_3)$  正定. ■

下面, 我们从二次型矩阵  $A$  的子式, 来判别二次型  $X^TAX$  的正定性. 先给出  $A$  正定的两个必要条件, 再给一个充分必要条件.

**定理 6** 若二次型  $X^TAX$  正定, 则:

- (i)  $A$  的主对角元  $a_{ii} > 0$  ( $i=1, 2, \dots, n$ );
- (ii)  $A$  的行列式  $|A| > 0$ .

**证** (i) 因为  $X^TAX = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_{ij}x_ix_j$  正定, 所以取  $X_i = [0, \dots, 0, 1, 0, \dots, 0]^T \neq 0$  (其中第  $i$  个分量  $x_i = 1$ ), 则必有  $X_i^TAX_i = a_{ii}x_i^2 = a_{ii} > 0$  ( $i=1, 2, \dots, n$ ).

(ii) 因为  $A$  正定, 所以存在可逆阵  $P$ , 使得  $A = P^TP$ , 因此  $|A| = |P^T||P| = |P|^2 > 0$ .

或根据正定矩阵  $A$  的特征值全大于零, 即得  $|A| = \lambda_1\lambda_2\cdots\lambda_n > 0$ . ■

定理 6 是  $A$  正定的必要条件, 由该定理很易验证

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 4 & 5 \\ 5 & 2 \end{bmatrix}, C = \begin{bmatrix} -3 & 2 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$$

这样的矩阵不是正定的, 这是因为  $\det(A) = 0$ ,  $\det(B) < 0$  和  $C$  中  $c_{11} < 0$ . 而对于

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \end{bmatrix},$$

虽有  $a_{ii} > 0$ , 且  $\det(A) = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix}^2 = 9 > 0$ . 但用定理 5 可以验证 (留给读者)  $A$  不是正定阵.

**定理 7**  $n$  元二次型  $X^TAX$  正定的充要条件是,  $A$  的  $n$  个顺序主子式全大于零.

证 设  $A = [a_{ij}]_{n \times n}$ , 则

$$\det A_k = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1k} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2k} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{k1} & a_{k2} & \cdots & a_{kk} \end{vmatrix},$$

称为  $n$  阶矩阵  $A$  的  $k$  阶顺序(或左上角)主子式. 当  $k$  取  $1, 2, \dots, n$  时, 就得  $A$  的  $n$  个顺序主子式.

**必要性** 取  $X_k = [x_1, \dots, x_k]^T \neq 0$ ,  $X = [x_1, \dots, x_k, 0, \dots, 0]^T \neq 0$ , 记  $X = [X_k^T, 0]^T$ , 则必有

$$\begin{aligned} X^T A X &= [X_k^T, 0] \begin{bmatrix} A_k & * \\ * & * \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_k \\ 0 \end{bmatrix} = [X_k^T A_k, *] \begin{bmatrix} X_k \\ 0 \end{bmatrix} \\ &= X_k^T A_k X_k > 0 \end{aligned}$$

对于一切  $X_k \neq 0$  都成立. 故  $x_1, x_2, \dots, x_k$  的  $k$  元二次型  $X_k^T A_k X_k$  是正定的, 根据定理 6, 必有  $|A_k| > 0$ . 必要性得证.

**充分性** 对  $n$  作数学归纳法. 当  $n=1$  时,  $a_{11} > 0$ ,  $X^T A X = a_{11} x_1^2 > 0$  ( $\forall x_1 \neq 0$ ), 故充分性成立. 假设充分性对  $n-1$  元二次型成立, 下面证明对  $n$  元二次型也成立. 将  $A$  分块表示为

$$A = \begin{bmatrix} A_{n-1} & \alpha \\ \alpha^T & a_{nn} \end{bmatrix},$$

其中  $\alpha^T = [a_{n1}, a_{n2}, \dots, a_{n, n-1}]$ .

根据定理 5, 只需证明  $A$  合同于单位阵. 取

$$C_1^T = \begin{bmatrix} I_{n-1} & 0 \\ -\alpha^T A_{n-1}^{-1} & 1 \end{bmatrix}, \text{ 则 } C_1 = \begin{bmatrix} I_{n-1} & -A_{n-1}^{-1} \alpha \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

作  $C_1^T A C_1$  的乘法运算, 得

$$C_1^T A C_1 = \begin{bmatrix} A_{n-1} & 0 \\ 0 & a_{nn} - \alpha^T A_{n-1}^{-1} \alpha \end{bmatrix} \stackrel{\text{记作}}{=} \begin{bmatrix} A_{n-1} & 0 \\ 0 & a \end{bmatrix}.$$

根据充分性条件  $|A| > 0$ ,  $|A_{n-1}| > 0$ , 由上式易得  $a > 0$ . 根据归纳

假设  $A_{n-1}$  正定, 故存在  $n-1$  阶可逆阵  $G$ , 使得  $G^T A_{n-1} G = I_{n-1}$ . 所以再取

$$C_2^T = \begin{bmatrix} G^T & 0 \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{a}} \end{bmatrix}, \quad \text{则 } C_2 = \begin{bmatrix} G & 0 \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{a}} \end{bmatrix}.$$

就立即可得  $C_2^T (C_1^T A C_1) C_2 = I_n$ , 故  $A$  合同于单位阵, 因此  $A$  正定. ■

用定理 7 容易判断

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

不是正定的. 这是因为  $\det(A_2) = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = -3 < 0$ .

**例 11** 证明: 若  $A$  是  $n$  阶正定矩阵, 则存在正定矩阵  $B$ , 使得  $A = B^2$ .

**证** 因为正定阵  $A$  是实对称阵, 且特征值全大于 0, 所以存在正交阵  $Q$ , 使得

$$A = Q \operatorname{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n) Q^T, \quad (1)$$

其中  $\lambda_i > 0$  ( $i=1, 2, \dots, n$ ). 利用  $Q^T Q = I$ , 及

$$\operatorname{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n) = [\operatorname{diag}(\sqrt{\lambda_1}, \sqrt{\lambda_2}, \dots, \sqrt{\lambda_n})]^2,$$

可将①式表示成

$$\begin{aligned} A &= Q \operatorname{diag}(\sqrt{\lambda_1}, \sqrt{\lambda_2}, \dots, \sqrt{\lambda_n}) \\ &\quad \times Q^T Q \operatorname{diag}(\sqrt{\lambda_1}, \sqrt{\lambda_2}, \dots, \sqrt{\lambda_n}) Q^T, \end{aligned} \quad (2)$$

$$\text{因此取 } B = Q \operatorname{diag}(\sqrt{\lambda_1}, \sqrt{\lambda_2}, \dots, \sqrt{\lambda_n}) Q^T, \quad (3)$$

就得  $A = B^2$ .

由于③式中 $\sqrt{\lambda}$ 是 $B$ 的特征值,且 $\sqrt{\lambda} > 0$  ( $i=1,2,\cdots,n$ ),故 $B$ 也是正定矩阵.于是命题得证.

这里的 $B$ 通常记作 $A^{\frac{1}{2}}$ .

## \* 6.5 其它有定二次型

正定和半正定以及负定和半负定二次型,统称为有定二次型.本节简要介绍半正定、负定和半负定二次型的性质及判别定理.

**定义 5** 如果对于任意的向量 $X=[x_1, x_2, \cdots, x_n]^T \neq O$ ,恒有二次型

(i)  $X^T A X \geq 0$ ,但至少存在一个 $X_0 \neq O$ ,使得 $X_0^T A X_0 = 0$ ,就称 $X^T A X$ 是半正定二次型, $A$ 是半正定矩阵;

(ii)  $X^T A X < 0$ ,称 $X^T A X$ 是负定二次型, $A$ 是负定矩阵.

(iii)  $X^T A X \leq 0$ ,但至少存在一个 $X_0 \neq O$ ,使得 $X_0^T A X_0 = 0$ ,就称 $X^T A X$ 是半负定二次型, $A$ 是半负定矩阵.

如果二次型不是有定的,就称为不定二次型.

例如: $X^T A X = d_1 x_1^2 + d_2 x_2^2 + \cdots + d_n x_n^2$ ,当 $d_i < 0$  ( $i=1,2,\cdots,n$ ),是负定的;当 $d_i \geq 0$  ( $i=1,2,\cdots,n$ ),但至少有一个为0,是半正定的;当 $d_i \leq 0$  ( $i=1,2,\cdots,n$ ),但至少有一个为0,是半负定的.

显然,如果 $A$ 是正定(半正定)矩阵,则 $(-A)$ 是负定(半负定)矩阵.反之亦然.

根据定义并利用上节中的方法,可以证明下面的定理.

**定理 8** 设 $A$ 是 $n$ 阶实对称矩阵,则下列命题等价:

- (i)  $X^T A X$  负定;
- (ii)  $A$  的负惯性指数为 $n$ ,即 $A \simeq -I$ ;
- (iii) 存在可逆阵 $P$ ,使得 $A = -P^T P$ ;
- (iv)  $A$  的特征值全小于0;



(v)  $A$  的奇数阶顺序主子式全小于 0, 偶数阶顺序主子式全大于 0.

**定理 9** 设  $A$  是  $n$  阶实对称矩阵, 则下列命题等价:

- (i)  $X^T A X$  半正定;
- (ii)  $A$  的正惯性指数  $= r(A) = r$  ( $r < n$ ), 或  $A \simeq \text{diag}(1, 1, \dots, 1, 0, \dots, 0)$ , 1 有  $r$  个;
- (iii)  $A$  的特征值都大于等于 0, 但至少有一个等于 0;
- (iv) 存在非满秩矩阵  $P$  ( $r(P) < n$ ), 使得  $A = P^T P$ .
- (v)  $A$  的各阶主子式  $\geq 0$ , 但至少有一个主子式等于 0. (主子式的定义见第三章 3.3)

关于半负定的相应的定理, 读者不难自行写出.

关于定理的证明, 如果用循环证法证明定理 8, (iv)  $\Rightarrow$  (v) 的证明较难, 定理 9 中的 (v) 作为半正定的充要条件, 其充分性的证明也较难. 我们略去这些证明.

**例 12** 判断二次型  $n \sum_{i=1}^n x_i^2 - \left( \sum_{i=1}^n x_i \right)^2$  是否是有定二次型.

**解 法 1**

$$\begin{aligned}
 \text{原式} &= (n-1) \sum_{i=1}^n x_i^2 - \sum_{1 \leq i < j \leq n} 2x_i x_j & \text{①} \\
 &= (x_1 - x_2)^2 + (x_1 - x_3)^2 + \dots + (x_1 - x_n)^2 \\
 &\quad + (x_2 - x_3)^2 + \dots + (x_2 - x_n)^2 + \dots \\
 &\quad + (x_{n-1} - x_n)^2 = \sum_{1 \leq i < j \leq n} (x_i - x_j)^2 \geq 0.
 \end{aligned}$$

当  $x_1 = x_2 = \dots = x_n$  时, 等号成立. 故原二次型是半正定的.

**法 2** 利用①式二次型矩阵  $A$  的特征值来作出判断.

$$|M - A| = \begin{vmatrix} \lambda - (n-1) & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & \lambda - (n-1) & \cdots & 1 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 1 & 1 & \cdots & \lambda - (n-1) \end{vmatrix}$$

$$= \lambda \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 0 & \lambda - n & 0 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \lambda - n \end{vmatrix}$$

$$= \lambda(\lambda - n)^{n-1},$$

$A$  的特征值为  $\lambda_1 = 0, \lambda_2 = n(n-1 \text{ 重})$ , 故二次型是半正定的.

## 习 题 补 充 题 答 案

### 习题

将下列 1—3 题的二次型表示成矩阵形式.

1.  $f(x, y) = 4x^2 - 6xy - 7y^2.$

2.  $f(x, y, z) = 3x^2 + 4xy - y^2 - 6yz + z^2.$

3.  $f(x_1, x_2, x_3, x_4) = x_1^2 + x_3^2 + 2x_4^2 + 4x_1x_2 + 2x_1x_4$   
 $- 2x_2x_3 - 6x_2x_4 + 4x_3x_4.$

4. 设  $n$  元二次型  $f(x_1, x_2, \cdots, x_n)$  的矩阵为  $n$  阶三对角对称阵

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & & & \\ -1 & 1 & -1 & & \\ & -1 & 1 & \ddots & \\ & & \ddots & \ddots & -1 \\ & & & -1 & 1 \end{bmatrix},$$

试写出二次型(二次齐次多项式)的表示式.

5. 若二次型  $f(x_1, x_2, x_3, x_4) = X^T A X$ , 对于一切  $X = [x_1, x_2, x_3, x_4]^T$  恒有  $f(x_1, x_2, x_3, x_4) = 0$ , 证明  $A$  为 4 阶零矩阵. (提示: 取一些特殊的  $X$ , 如  $[1, 0, 0, 0]^T, [0, 1, 0, 0]^T, [1, 0, 1, 0]^T, [0, 1, 1, 0]^T$  等, 来论证  $A = O$ .)

6. 证明:若  $A, B$  均为三阶对称矩阵,且对一切  $X$  有  $X^T A X = X^T B X$ , 则  $A = B$ .

7. 设  $A \simeq B, C \simeq D$ , 且它们均为  $n$  阶对称矩阵, 问下列结论成立吗? 若成立, 则证明之.

$$(1) (A+C) \simeq (B+D).$$

$$(2) \begin{bmatrix} A & 0 \\ 0 & C \end{bmatrix} \simeq \begin{bmatrix} B & 0 \\ 0 & D \end{bmatrix}.$$

8. 用正交变换  $X = QY$ , 将下列二次型化为标准形, 并求正交矩阵  $Q$ :

$$(1) f = 2x_1^2 + 3x_2^2 + 3x_3^2 + 4x_2x_3.$$

$$(2) f = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 + 2x_1x_2 - 2x_1x_4 - 2x_2x_3 - 2x_3x_4.$$

9. 设

$$A = \begin{bmatrix} 4 & -2 & & & \\ -2 & 1 & & & \\ & & 5 & & \\ & & & -4 & 6 \\ & & & 6 & 1 \end{bmatrix},$$

试求正交矩阵  $Q$ , 使得  $Q^T A Q$  为对角阵.

10. 用配方法将下列二次型化为标准形, 并写出所用的非退化线性变换.

$$(1) x_1^2 + 4x_1x_2 - 3x_2x_3.$$

$$(2) x_1x_2 + x_1x_3 - 3x_2x_3.$$

$$(3) 2x_1^2 + 5x_2^2 + 4x_3^2 + 4x_1x_2 - 8x_2x_3 - 4x_3x_1.$$

11. 用初等变换法将下列二次型化为标准形, 并求相应的非退化线性变换.

$$(1) x_1x_2 + x_2x_3 + x_3x_1$$

$$(2) x_1^2 - 2x_2^2 + x_3^2 + 2x_1x_2 + 4x_1x_3 + 2x_2x_3.$$

$$(3) x_1^2 + 5x_2^2 + 4x_3^2 - x_4^2 + 6x_1x_2 - 4x_1x_3 - 4x_2x_4 - 8x_3x_4.$$

12. 设  $C$  为可逆矩阵, 且  $C^TAC = \text{diag}(d_1, d_2, \dots, d_n)$ , 问: 对角阵的对角元是否都是  $A$  的特征值? 并说明理由.

13. 设  $n$  阶实对称矩阵  $A$  的秩为  $r (r < n)$ , 试证明:

(1) 存在可逆阵  $C$ , 使得  $C^TAC = \text{diag}(d_1, d_2, \dots, d_r, 0, \dots, 0)$ , 其中  $d_i \neq 0, (i=1, 2, \dots, r)$ .

\* (2)  $A$  可表示为  $r$  个秩为 1 的对称矩阵之和.

\* 14. 设  $n$  阶实对称幂等矩阵  $A$  (满足  $A^2=A$ ) 的秩为  $r$ , 试求:

(1) 二次型  $X^TAX$  的一个标准形.

(2)  $\det(I+A+A^2+\dots+A^n)$ .

\* 15. 设  $A$  为  $n$  阶实对称矩阵, 且其正负惯性指数都不为零. 证明: 存在非零向量  $X_1, X_2$  和  $X_3$ , 使得  $X_1^TAX_1 > 0, X_2^TAX_2 = 0$  和  $X_3^TAX_3 < 0$ .

\* 16. 设  $A$  是奇数阶实对称矩阵, 且  $\det(A) > 0$ . 证明: 存在非零向量  $X_0$ , 使  $X_0^TAX_0 > 0$ .

17. 把 11 题中的二次型化为规范形, 并求变换矩阵  $C$ .

18. 对 9 题中的矩阵  $A$ , 求可逆阵  $C$ , 使  $C^TAC$  成规范形.

\* 19. 证明本节末尾的结论(i).

\* 20. 证明本节末尾的结论(ii).

21. 判断下列矩阵是否是正定矩阵.

$$(1) \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{bmatrix}, \quad (2) \begin{bmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{bmatrix}$$

$$(3) \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}.$$

22. 判断下列二次型是否是正定二次型.

$$(1) x_1^2 + 3x_2^2 + 20x_3^2 - 2x_1x_2 - 2x_1x_3 - 10x_2x_3.$$

$$(2) 3x_1^2 + 4x_2^2 + 5x_3^2 + 4x_1x_2 - 4x_2x_3.$$

$$(3) x_1^2 + 2x_2^2 + 3x_3^2 + 4x_4^2 - 2x_1x_2 + 4x_2x_3 - 8x_3x_4.$$

23. 用正交变换法化二次型  $\sum_{i=1}^n x_i^2 + \sum_{i<j} x_i x_j$  为标准形. 并说明它是否是正定二次型. 在  $n=3$  的情况下, 求出正交变换的矩阵  $Q$ .

24. 对上题中  $n=3$  时的二次型矩阵  $A$ , 求正定矩阵  $B$ , 使得  $A=B^2$ .

25. 求下列二次型中的参数  $t$ , 使得二次型正定.

$$(1) 5x_1^2 + x_2^2 + tx_3^2 + 4x_1x_2 - 2x_1x_3 - 2x_2x_3.$$

$$(2) 2x_1^2 + x_2^2 + 3x_3^2 + 2tx_1x_2 + 2x_1x_3.$$

26. 用矩阵的特征值和特征向量的定义及正定二次型的定义, 证明正定矩阵的特征值大于零.

27. 设  $P$  为可逆阵, 用正定二次型的定义证明,  $P^T P$  是正定矩阵.

28. 设  $A$  是正定矩阵,  $C$  是实可逆矩阵, 证明:  $C^T A C$  是实对称阵, 而且也是正定矩阵.

29. 设  $A$  是正定矩阵, 证明  $A$  的伴随矩阵  $A^*$  也是正定矩阵.

30. 设  $A, B$  均是  $n$  阶正定矩阵,  $k, l$  都是正数, 用定义证明  $kA + lB$  也是正定矩阵.

31. 判断下列矩阵是否负定, 半正定, 半负定

$$(1) \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & -3 \end{bmatrix}, (2) \begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 3 \end{bmatrix}.$$

$$(3) \begin{bmatrix} 0 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{bmatrix}, (4) \begin{bmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \end{bmatrix}.$$

32. 证明负定矩阵的主对角元必须全小于 0.

33. 设  $X^T A X$  为半负定二次型, 问: (1)  $X^T (-A) X$  是否半正定? (2)  $A$  的各阶主子式是否全都  $\leq 0$ ?

34. 判断下列二次型是否有定二次型

(1)  $-x_1^2 - 2x_2^2 - 5x_3^2 - 2x_1x_2 + 4x_2x_3.$

(2)  $x_1^2 + 2x_2^2 + 4x_3^2 + 2x_1x_2 - 4x_2x_3.$

(3)  $x_1^2 + 2x_2^2 + 3x_3^2 + 2x_1x_2 - 4x_2x_3.$

35. 证明  $A$  是负定矩阵的充要条件是, 存在可逆矩阵  $P$ , 使得  $A = -P^T P$ .

36. 设  $B$  是一个  $n$  阶矩阵,  $r(B) < n$ . 证明  $B^T B$  是半正定矩阵.

37. 证明 若  $A$  是半正定矩阵, 则存在半正定矩阵  $B$ , 使得  $A = B^2$ .

### 补充题

38. 若对于任意的全不为 0 的  $x_1, x_2, \dots, x_n$ , 二次型  $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$  恒大于 0, 问二次型  $f$  是否正定?

39. 设  $A$  是实对称矩阵, 证明: 当  $t$  充分大时,  $A + tI$  是正定矩阵.

40. 设  $n$  阶实对称矩阵  $A$  的特征值为  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ , 问:  $t$  满足什么条件时,  $A - tI$  为正定矩阵.

41. 设  $A$  是实对称矩阵,  $B$  是正定矩阵, 证明: 存在可逆阵  $C$ , 使得  $C^T A C$  和  $C^T B C$  都成对角形.

42. 设  $A, B$  皆是正定矩阵, 且  $AB = BA$ , 证明  $AB$  是正定矩阵.

(提示: 存在正交阵  $C, D$ ; 使得  $D^T (C^T A C) D = D^T \Lambda_1 D$ ,  $D^T (C^T B C) D = \Lambda_2$ , 并利用定理 7 的充分条件.)

43. 设  $A = [a_{ij}]$  是  $n$  阶正定矩阵,  $X = [x_1, x_2, \dots, x_n]^T$ . 证

明:

$$f(X) = \det \begin{bmatrix} 0 & X^T \\ X & A \end{bmatrix}$$

是一个负定二次型.

44. 设  $A=[a_{ij}]$  是  $n$  阶正定矩阵, 证明:

$$\det A \leq \prod_{i=1}^n a_{ii}.$$

45. 设  $B=[b_{ij}]$  是  $n$  阶实可逆矩阵, 证明:

$$|B|^2 \leq \prod_{i=1}^n (b_{1i}^2 + b_{2i}^2 + \cdots + b_{ni}^2).$$

答案

6. 利用第 5 题的结果.

7. (1) 不成立. (2) 成立.

$$8. (1) \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}, y_1^2 + 2y_2^2 + 5y_3^2.$$

$$(2) \frac{1}{2} \begin{bmatrix} \sqrt{2} & 0 & -\sqrt{2} & 0 \\ -1 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & \sqrt{2} & 0 & \sqrt{2} \\ 1 & 1 & 1 & -1 \end{bmatrix}, (1 - \sqrt{2})y_1^2 \\ + (1 - \sqrt{2})y_2^2 + (1 + \sqrt{2})y_3^2 + (1 + \sqrt{2})y_4^2.$$

$$9. \begin{bmatrix} \frac{2}{\sqrt{5}} & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{\sqrt{5}} \\ -\frac{1}{\sqrt{5}} & 0 & 0 & 0 & \frac{2}{\sqrt{5}} \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{2}{\sqrt{13}} & 0 & \frac{3}{\sqrt{13}} & 0 \\ 0 & \frac{3}{\sqrt{13}} & 0 & -\frac{2}{\sqrt{13}} & 0 \end{bmatrix},$$

$$\begin{bmatrix} 5 & & & & \\ & 5 & & & \\ & & 5 & & \\ & & & -8 & \\ & & & & 0 \end{bmatrix}.$$

$$10. (1) y_1^2 - 4y_2^2 + \frac{9}{16}y_3^2; \begin{cases} x_1 = y_1 - 2y_2 + \frac{3}{4}y_3, \\ x_2 = y_2 - \frac{3}{8}y_3, \\ x_3 = y_3. \end{cases}$$

$$(2) z_1^2 - \frac{1}{2}z_2^2 + 3z_3^2; \begin{cases} x_1 = z_1 + \frac{1}{2}z_2 - 3z_3, \\ x_2 = z_1 + \frac{1}{2}z_2 - z_3, \\ x_3 = z_3. \end{cases}$$

$$(3) 2y_1^2 + 3y_2^2 + \frac{2}{3}y_3^2; \begin{cases} x_1 = y_1 - y_2 + \frac{1}{3}y_3, \\ x_2 = y_2 + \frac{2}{3}y_3, \\ x_3 = y_3. \end{cases}$$



$$11. (1) z_1^2 - z_2^2 - z_3^2; \begin{cases} x_1 = z_1 + z_2 - z_3, \\ x_2 = z_1 - z_2 - z_3, \\ x_3 = z_3. \end{cases}$$

$$(2) y_1^2 - 3y_2^2 - \frac{8}{3}y_3^2; \begin{cases} x_1 = y_1 - y_2 + \frac{5}{3}y_3, \\ x_2 = y_2 - \frac{1}{3}y_3, \\ x_3 = y_3. \end{cases}$$

$$(3) y_1^2 - 4y_2^2 + 9y_3^2 - \frac{49}{9}y_4^2; \begin{cases} x_1 = y_1 + 3y_2 - \frac{5}{2}y_3 - \frac{4}{9}y_4, \\ x_2 = y_2 + \frac{3}{2}y_3 + \frac{2}{3}y_4, \\ x_3 = y_3 + \frac{7}{9}y_4, \\ x_4 = y_4. \end{cases}$$

$$14. (1) y_1^2 + y_2^2 + \cdots + y_r^2. (2) (n+1)^r.$$

15. 将  $A$  化成规范形, 由正负惯性指数都不为零, 构造  $X_1, X_2$  和  $X_3$ .

16. 利用 15 题结论, 先证  $A$  必有正特征值.

$$17. (1) y_1^2 - y_2^2 - y_3^2, \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

$$(2) y_1^2 - y_2^2 - y_3^2, \begin{bmatrix} 1 & -\frac{\sqrt{3}}{3} & -\frac{5}{\sqrt{24}} \\ 0 & \frac{\sqrt{3}}{3} & -\frac{1}{\sqrt{24}} \\ 0 & 0 & \frac{3}{\sqrt{24}} \end{bmatrix}.$$

$$(3) \quad y_1^2 + y_2^2 - y_3^2 - y_4^2, \quad \begin{bmatrix} 1 & -\frac{5}{6} & -\frac{3}{2} & -\frac{4}{7} \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{2}{7} \\ 0 & \frac{1}{3} & 0 & \frac{1}{3} \\ 0 & 0 & 0 & \frac{3}{7} \end{bmatrix}.$$

21. (1) 正定, (2)(3) 不正定.

22. 都正定.

23.  $\frac{n+1}{2}y_1^2 + \frac{1}{2}(y_2^2 + y_3^2 + \cdots + y_n^2)$ , 正定,

$$24. \quad \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & 0 & -\frac{2}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \end{bmatrix}.$$

$$\begin{bmatrix} \frac{2\sqrt{2}}{3} & \frac{\sqrt{2}}{6} & \frac{\sqrt{2}}{6} \\ \frac{\sqrt{2}}{6} & \frac{2\sqrt{2}}{3} & \frac{\sqrt{2}}{6} \\ \frac{\sqrt{2}}{6} & \frac{\sqrt{2}}{6} & \frac{2\sqrt{2}}{3} \end{bmatrix}.$$

25. (1)  $t > 2$ , (2)  $|t| < \sqrt{\frac{5}{3}}$ .

27. 用定义证明  $X^T Q^T Q X > 0 (\forall X \neq 0)$ .

28. 用定义证明  $X^T C^T A C X > 0 (\forall X \neq 0)$ .

30. 用定义证明.

31. (1) 负定, (2) 不定, (3) 不定, (4) 半负定.

34. (1) 负定, (2) 半正定, (3) 不定.

38. 否.

39. 考虑  $A+tI$  的特征值.

40.  $t < \min(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n)$ .

41. 存在可逆阵  $C_1$ , 使得  $C_1^T B C_1 = I$ , 又  $C_1^T A C_1$  为实对称矩阵.

43. 将分块矩阵第二行左乘  $-X^T A^{-1}$  加到第一行, 并利用  $A^{-1}$  正定.

44. 用数学归纳法. 把  $A$  分块表示为  $\begin{bmatrix} A_{n-1} & \alpha \\ \alpha^T & a_{nn} \end{bmatrix}$ , 并用初等变换将其化为上三角矩阵.

45. 利用 44 题的结果.

## \*7 应用问题

### 7.1 人口模型

人口增长的问题是关系到国计民生的重大问题之一. 为了预测和控制人口的增长, 从 18 世纪以来各国人口学家、数学家不断地提出各种人口模型, 有确定性的, 有随机性的; 有连续的, 有离散的. 本节介绍的 Leslie 人口模型是 20 世纪 40 年代提出的, 它是预测人口按年龄组变化的离散模型.

#### 7.1.1 Leslie 人口模型

这个模型仅考虑女性人口的发展变化, 因为一般男女人口的比例变化不大. 假设女性最大年龄为  $s$  岁, 分  $s$  为  $n$  个年龄区间

$$\Delta t_i = \left[ (i-1) \frac{s}{n}, i \frac{s}{n} \right], \quad i = 1, 2, \dots, n.$$

年龄属于  $\Delta t_i$  的女性称为第  $i$  组, 设第  $i$  组人数为  $x_i$  ( $i=1, 2, \dots, n$ ), 称  $X = [x_1, x_2, \dots, x_n]^T$  为 (女性) 人口年龄分布向量. 考虑  $X$  随时间  $T_k$  的变化情况, 每隔  $s/n$  年观察一次, 不考虑同一时间间隔内的变化 (即将时间离散化了). 设初始时间为  $T_0$ ,  $T_k = T_0 + ks/n$ ,  $T_k$  时的年龄分布向量为  $X^{(k)} = [x_1^{(k)}, x_2^{(k)}, \dots, x_n^{(k)}]^T$ , 这里只考虑由生育、老化和死亡引起的人口演变, 而不考虑迁移、战争、意外灾难等社会因素的影响.

设第  $i$  组女性的生育率 (已扣除女婴死亡率) 为  $a_i$  (第  $i$  组每位女性在  $s/n$  年中平均生育的女婴数,  $a_i \geq 0$ ), 存活率为  $b_i$  (第  $i$  组女

性经过  $s/n$  年仍活着的人数与原人数之比  $0 < b_i \leq 1$ ). 死亡率  $= 1 - b_i$ , 假设  $a_i, b_i$  在同一时间间隔内不变, 它可由人口统计资料获得.

$T_k$  时第一组女性的总数  $x_1^{(k)}$  是  $T_{k-1}$  时各组女性 (人数为  $x_i^{(k-1)}, i=1, \dots, n$ ) 所生育的女婴的总数, 即

$$x_1^{(k)} = a_1 x_1^{(k-1)} + a_2 x_2^{(k-1)} + \dots + a_n x_n^{(k-1)}, \quad (7.1)$$

$T_k$  时第  $i+1$  组 ( $i \geq 1$ ) 女性人数  $x_{i+1}^{(k)}$  是  $T_{k-1}$  时第  $i$  组的女性经  $s/n$  年存活下来的人数, 即

$$x_{i+1}^{(k)} = b_i x_i^{(k-1)}, i = 1, 2, \dots, n-1. \quad (7.2)$$

将 (7.1)、(7.2) 以矩阵形式表示为

$$X^{(k)} = L X^{(k-1)}, \quad k = 1, 2, \dots, n. \quad (7.3)$$

其中

$$L = \begin{bmatrix} a_1 & a_2 & \dots & a_{n-1} & a_n \\ b_1 & 0 & & & 0 \\ 0 & b_2 & & & \\ \vdots & & \ddots & 0 & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & b_{n-1} & 0 \end{bmatrix}, \quad (7.4)$$

称  $L$  为 Leslie 矩阵, 由 (7.3) 式递推得

$$X^{(k)} = L^k X^{(0)}. \quad (7.5)$$

利用 (7.5) 可算出  $T_k$  时间各年龄组人口总数, 人口增长率及各年龄组人口占总人口的百分数. 此模型也适用于动物群.

**例 1** 某饲养场的某种动物所能达到的最大年龄为 6 岁, 1990 年观测的数据如表 7-1 所示.

问: 1998 年各年龄组的动物数量及分布比例是多少? 总数的增长率为多少?

**解** 由所给表格得到动物 1990 年的年龄分布向量及 Leslie 矩阵分别为

表 7-1

年龄	$[0,2)$	$[2,4)$	$[4,6)$
头数	160	320	80
生育率	0	4	3
存活率	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	0

$$X^{(0)} = \begin{bmatrix} 160 \\ 320 \\ 80 \end{bmatrix}, \quad L = \begin{bmatrix} 0 & 4 & 3 \\ \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{4} & 0 \end{bmatrix}.$$

1998 年的年龄分布向量为

$$\begin{aligned} X^{(4)} &= L^4 X^{(0)} = \begin{bmatrix} 0 & 4 & 3 \\ 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 1/4 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 160 \\ 320 \\ 80 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 4 & 3 & 9/8 \\ 3/16 & 4 & 3 \\ 1/4 & 3/32 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 160 \\ 320 \\ 80 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1690 \\ 1550 \\ 70 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

所以, 1998 年动物总数为 3310 头; 小于 2 岁的有 1690 头, 占 51.06%; 2—4 岁的有 1550 头, 占 46.83%; 4—6 岁的有 70 头, 占 21.14%. 增长总数为  $3310 - 560 = 2750$  头, 8 年总增长率为 491.07%.

利用 Leslie 模型分析人口增长, 发现观察时间充分长后人口增长率和年龄分布结构均趋于一个稳定状态, 这与矩阵  $L$  的特征值、特征向量有关.

### 7.1.2 Leslie 矩阵的优势特征值及其实际意义

**定理 1** (7.4) 式中的矩阵  $L$  有唯一的单重正特征值  $\lambda_1$ , 对应

的特征向量为  $X_1 = [1, b_1/\lambda_1, b_1 b_2/\lambda_1^2, \dots, b_1 b_2 \dots b_{n-1}/\lambda_1^{n-1}]^T$  (各分量全为正数).

证

$$\begin{aligned}
 P_n(\lambda) = |\lambda I - L| &= \begin{vmatrix} \lambda - a_1 & -a_2 & \cdots & -a_{n-1} & -a_n \\ -b_1 & \lambda & & & \\ & -b_2 & \ddots & & \\ & & \ddots & \lambda & \\ & & & -b_{n-1} & \lambda \end{vmatrix} \\
 &= \lambda p_{n-1}(\lambda) + b_{n-1} \begin{vmatrix} \lambda - a_1 & -a_2 & \cdots & -a_{n-2} & -a_n \\ -b_1 & \lambda & & & \\ & -b_2 & \ddots & & \\ & & \ddots & \lambda & \\ & & & -b_{n-2} & 0 \end{vmatrix} \\
 &= \lambda p_{n-1}(\lambda) + b_{n-1}(-a_n)(-1)^n(-1)^{n-2}b_1 b_2 \cdots b_{n-2} \\
 &= \lambda p_{n-1}(\lambda) - a_n b_1 b_2 \cdots b_{n-1}. \quad (*)
 \end{aligned}$$

记  $\beta_i = a_i b_1 b_2 \cdots b_{i-1}$  ( $b_0 = 1$ ), 由于  $a_i \geq 0$  且不全为 0,  $b_i > 0$ , 所以  $\beta_i \geq 0$  ( $i = 1, 2, \dots, n$ ) 且不全为 0. 由递推关系 (\*) 得

$$\begin{aligned}
 p_n(\lambda) &= \lambda p_{n-1}(\lambda) - \beta_n = \lambda(\lambda p_{n-2}(\lambda) - \beta_{n-1}) - \beta_n \\
 &= \lambda^2 p_{n-2}(\lambda) - \lambda \beta_{n-1} - \beta_n = \cdots \\
 &= \lambda^n - \beta_1 \lambda^{n-1} - \beta_2 \lambda^{n-2} - \cdots - \beta_{n-1} \lambda - \beta_n. \quad (7.6)
 \end{aligned}$$

$$\text{记 } q(\lambda) = \beta_1/\lambda + \beta_2/\lambda^2 + \cdots + \beta_n/\lambda^n \quad (\lambda \neq 0), \quad (7.7)$$

则特征方程

$$p_n(\lambda) = 0 \quad (7.8)$$

等价于方程

$$q(\lambda) = 1. \quad (7.9)$$

显然当  $\lambda > 0$  时  $q(\lambda)$  是连续的单调减函数, 且  $\lim_{\lambda \rightarrow 0^+} q(\lambda) = +\infty$ ,  $\lim_{\lambda \rightarrow +\infty} q(\lambda) = 0$ , 所以存在唯一的  $\lambda_1 \in (0, +\infty)$  使得  $q(\lambda_1) = 1$ , 或

$p_n(\lambda_1)=0$ , 即  $\lambda_1$  为唯一的正特征值. 下面证明  $\lambda_1$  是单根, 用反证法.

设  $\lambda_1$  是  $p_n(\lambda)=0$  的  $k$  重根 ( $k \geq 2$ ), 则  $p'_n(\lambda_1)=0$ , 即

$$p'_n(\lambda_1) = n\lambda_1^{n-1} - (n-1)\beta_1\lambda_1^{n-2} - \cdots - 2\beta_{n-2}\lambda_1 - \beta_{n-1} = 0,$$

即

$$1 = \frac{n-1}{n} \frac{\beta_1}{\lambda_1} + \frac{n-2}{n} \frac{\beta_2}{\lambda_1^2} + \cdots + \frac{2\beta_{n-2}}{n\lambda_1^{n-2}} + \frac{\beta_{n-1}}{n\lambda_1^{n-1}} < q(\lambda_1) = 1,$$

(因为  $(n-i)/n < 1$ ) 矛盾, 所以  $\lambda_1$  为单根.

解方程组  $(\lambda_1 I - L)X = 0$ , 容易得到  $\lambda_1$  对应的特征向量为定理给出的  $X_1$ . ■

**定理 2** 若  $\lambda_1$  是矩阵  $L$  的正特征值, 则  $L$  的任一个(实的或复的)特征值  $\lambda$  都满足

$$|\lambda| \leq \lambda_1. \quad (7.10)$$

证 若  $\lambda=0$ , 显然成立; 设  $\lambda=re^{i\theta}$ , 且  $r>0$ , 用反证法. 假设  $|\lambda|=r>\lambda_1$ , 由(7.9)和(7.7)式,

$$q(\lambda) = q(re^{i\theta}) = \frac{\beta_1}{r}e^{-i\theta} + \frac{\beta_2}{r^2}e^{-2i\theta} + \cdots + \frac{\beta_n}{r^n}e^{-ni\theta} = 1,$$

得  $q(\lambda)$  的实部为 1, 即

$$\begin{aligned} 1 &= \frac{\beta_1}{r}\cos\theta + \frac{\beta_2}{r^2}\cos 2\theta + \cdots + \frac{\beta_n}{r^n}\cos n\theta \\ &\leq \beta_1/r + \beta_2/r^2 + \cdots + \beta_n/r^n \\ &< \beta_1/\lambda_1 + \beta_2/\lambda_1^2 + \cdots + \beta_n/\lambda_1^n \\ &= q(\lambda_1) = 1, \end{aligned}$$

矛盾. 所以对任一特征值  $\lambda$ , 有  $|\lambda| \leq \lambda_1$ . ■

我们把  $L$  矩阵的唯一的正特征值  $\lambda_1$  称为**优势特征值**. 如果  $L$  的任一个特征值  $\lambda \neq \lambda_1$ , 均满足  $|\lambda| < \lambda_1$ , 则称  $\lambda_1$  为  $L$  的**严格优势特征值**.

**定理 3** 若矩阵  $L$  的第一行有两个顺序元素  $a_i, a_{i+1} > 0$ , 则  $L$



的正特征值是严格优势特征值.

证 由定理 2,  $|\lambda| \leq \lambda_1$ , 只须证等号不成立, 用反证法, 假设存在  $\lambda \neq \lambda_1$  有  $|\lambda| = \lambda_1$ , 则

$$\begin{aligned} 1 &= q(\lambda) = \beta_1/\lambda + \beta_2/\lambda^2 + \cdots + \beta_n/\lambda^n \\ &\leq |\beta_1/\lambda| + |\beta_2/\lambda^2| + \cdots + |\beta_i/\lambda^i + \beta_{i+1}/\lambda^{i+1}| + \cdots + |\beta_n/\lambda^n| \\ &= \beta_1/\lambda_1 + \beta_2/\lambda_1^2 + \cdots + |\beta_i\lambda_1 + \beta_{i+1}|/\lambda_1^{i+1} + \cdots + \beta_n/\lambda_1^n \\ &< \beta_1/\lambda_1 + \beta_2/\lambda_1^2 + \cdots + \beta_i/\lambda_1^i + \beta_{i+1}/\lambda_1^{i+1} + \cdots + \beta_n/\lambda_1^n = q(\lambda_1) = 1. \end{aligned}$$

矛盾, 所以  $|\lambda| < \lambda_1$ . (上式“ $<$ ”是根据  $|\beta_i\lambda_1 + \beta_{i+1}| < \beta_i|\lambda| + \beta_{i+1}$ , 因为  $\beta_i = a_i b_1 \cdots b_{i-1} > 0$ ,  $\beta_{i+1} > 0$ , 且  $\lambda$  为非正实数, 据定理 1,  $\lambda_1$  是唯一的正特征值).

定理 3 的条件在人口模型中是能保证的, 所以  $L$  矩阵必有严格优势特征值  $\lambda_1$ .

**定理 4** 若矩阵  $L$  有严格优势特征值  $\lambda_1$ , 对应的特征向量为  $X_1$ , 则

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} \frac{1}{\lambda_1^k} X^{(k)} = cX_1, \quad (7.11)$$

其中  $X^{(k)}$  由 (7.5) 式确定,  $c$  为常数.

证 设  $L$  可对角化 (对一般情况要用附录 2 中的约旦标准形来证明), 即存在线性无关的特征向量  $X_1, X_2, \cdots, X_n$  及  $P = [X_1, \cdots, X_n]$ , 使得

$$P^{-1}LP = \text{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n),$$

$$\begin{aligned} \text{则} \quad L^k &= [P \text{diag}(\lambda_1, \cdots, \lambda_n) P^{-1}]^k \\ &= P \text{diag}(\lambda_1^k, \cdots, \lambda_n^k) P^{-1}. \end{aligned}$$

由 (7.5) 式得

$$\begin{aligned} \frac{1}{\lambda_1^k} X^{(k)} &= \frac{1}{\lambda_1^k} L^k X^{(0)} = \frac{1}{\lambda_1^k} P \text{diag}(\lambda_1^k, \cdots, \lambda_n^k) P^{-1} X^{(0)} \\ &= P \text{diag}\left(1, \left(\frac{\lambda_2}{\lambda_1}\right)^k, \cdots, \left(\frac{\lambda_n}{\lambda_1}\right)^k\right) P^{-1} X^{(0)}. \end{aligned}$$

记  $P^{-1}X^{(0)} = [c, d_2, \dots, d_n]^T$ , 由于  $\lim_{k \rightarrow +\infty} \left(\frac{\lambda_i}{\lambda_1}\right)^k = 0, (i=2, \dots, n)$ , 所以有

$$\begin{aligned} \lim_{k \rightarrow +\infty} \frac{1}{\lambda_1^k} X^{(k)} &= \lim_{k \rightarrow +\infty} P \operatorname{diag} \left( 1, \left(\frac{\lambda_2}{\lambda_1}\right)^k, \dots, \left(\frac{\lambda_n}{\lambda_1}\right)^k \right) P^{-1} X^{(0)} \\ &= P \operatorname{diag}(1, 0, \dots, 0) (c, d_2, \dots, d_n)^T \\ &= [X_1, X_2, \dots, X_n] \begin{bmatrix} 1 & & \\ & 0 & \\ & & \ddots \\ & & & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c \\ d_2 \\ \vdots \\ d_n \end{bmatrix} \\ &= cX_1. \end{aligned}$$

由(7.11)式, 当  $k$  充分大后

$$X^{(k)} \approx c\lambda_1^k X_1 = \lambda_1 (c\lambda_1^{k-1} X_1) \approx \lambda_1 X^{(k-1)}.$$

这表明时间  $T_k$  充分大后, 年龄分布向量趋于稳定状态, 即各年龄

组人数  $x_i^{(k)}$  占总人数  $\sum_{i=1}^n x_i^{(k)}$  的百分比几乎等于特征向量  $X_1$  中相

应分量  $x_i$  占分量总和  $\sum_{i=1}^n x_i$  的百分比, 同时  $I_k$  充分大后, 人口增长率  $(x_i^{(k+1)} - x_i^{(k)})/x_i^{(k)}$  趋于  $(\lambda_1 - 1)\%$ , 或说  $\lambda_1 > 1$  时, 人口递增;  $\lambda_1 < 1$  时人口递减;  $\lambda_1 = 1$  时人口总数稳定不变. 由式(7.7)和(7.9)容易得到如下定理.

**定理 5**  $L$  矩阵的正特征值  $\lambda_1 = 1$  的充要条件是  $\beta_1 + \beta_2 + \dots + \beta_n = 1$ .

记  $R = \beta_1 + \dots + \beta_n = a_1 + a_2 b_1 + \dots + a_n b_1 \cdots b_{n-1}$ , 我们称  $R$  为净再生(繁殖)率, 它表示每名女性一生中平均所生育的女婴数. 不难证明: 当  $R > 1, < 1$  和  $= 1$  时, 相应的  $\lambda_1 > 1, < 1$  和  $= 1$  (利用(7.7)、(7.9)式), 从而当  $T_k$  充分大后, 它们分别表示人口递增, 递减和稳定不变.

如例 1 中  $L$  的特征多项式为

$$P(\lambda) = |\lambda I - L| = \lambda^3 - 2\lambda - \frac{3}{8} = 0,$$

得严格优势特征值  $\lambda_1 = 3/2$ , 相应特征向量  $X_1 = [1, b_1/\lambda_1, b_1 b_2/\lambda_1^2]^T = [1, 1/3, 1/18]^T$ , 当  $T$  充分大后, 极限增长率为  $(\lambda_1 - 1)\% = 50\%$ ; 三个年龄组的动物头数之比为  $1 : 1/3 : 1/18$  或  $18 : 6 : 1$ , 即小于 2 岁的占 72%, 2—4 岁的占 24%, 4—6 岁的占 4%.

例 2 根据表 7-2 加拿大 1965 年的统计资料(由于  $\geq 50$  岁的妇女生育者极少, 我们只讨论 0—50 岁之间的人口增长问题, 资料中  $a_2, a_3$  可能有误).

表 7-2

年龄组 $i$	年龄区间	$a_i$	$b_i$
1	[0, 5)	0.00000	0.99651
2	[5, 10)	0.00024	0.99820
3	[10, 15)	0.05861	0.99802
4	[15, 20)	0.28608	0.99729
5	[20, 25)	0.44791	0.99694
6	[25, 30)	0.36399	0.99621
7	[30, 35)	0.22259	0.99460
8	[35, 40)	0.10459	0.99184
9	[40, 45)	0.02826	0.98700
10	[45, 50)	0.00240	--

应用数值方法, 可得矩阵  $L$  的严格优势特征值及相应的特征向量  $X_1$  如下:

$$\lambda_1 = 1.07622, X_1 = \begin{bmatrix} 1.00000 \\ 0.92594 \\ 0.85881 \\ 0.79641 \\ 0.73800 \\ 0.68364 \\ 0.63281 \\ 0.58482 \\ 0.53897 \\ 0.49429 \end{bmatrix}.$$

如果加拿大妇女生育率和存活率保持 1965 年的状况,那么经过较长时间以后,50 岁以内的人口总数每五年将递增 7.622%;由特征向量可算得各年龄组人口占总人口的比例数依次为 13.79%, 12.77%, 11.84%, 10.98%, 10.17%, 9.42%, 8.72%, 8.06%, 7.43%, 6.82%.

## 7.2 马尔可夫链

考虑一系列有随机因素影响的试验,每次实验结果出现事件  $S_1, \dots, S_m$  中的一个且仅出现一个,称这些  $S_i (i=1, \dots, m)$  为状态,出现  $S_i$  就称系统处于  $S_i$  状态. 系统在每一时刻所处的状态是随机的. 若下一时刻的状态仅取决于这一时刻的状态和转移概率,与这一时刻以前的状态无关,则称此为无后效性,通俗地说,将来的状态只与现在的已知状态有关,与过去的历史无关. 马氏链是时间和状态都已离散化的无后效性的随机过程. 马氏链在经济、社会、生态和遗传等学科中均有广泛的应用.

以  $x_i(n)$  ( $n=0, 1, 2, \dots$ ) 表示系统在时刻  $t_n$  处于状态  $S_i$  的概率,  $X(n) = [x_1(n), \dots, x_m(n)]^T$  称为概率向量,其中  $0 \leq x_i(n) \leq 1$

且  $x_1(n) + \cdots + x_m(n) = 1$ , 以  $p_{ij}(i, j = 1, 2, \cdots, m)$  表示现时刻系统处于状态  $S_j$  而下一时刻处于状态  $S_i$  的概率, 称为**转移概率**. 称  $P = (p_{ij})_{m \times m}$  为**转移矩阵**.  $P$  的每一列的列和都是 1, (由于  $p_{ij} \geq 0$ , 我们以后把这样的矩阵  $P$ , 记作  $P \geq 0$ ). 根据无后效性得到马氏链的基本方程为

$$\begin{aligned} x_i(n+1) &= p_{i1}x_1(n) + p_{i2}x_2(n) + \cdots + p_{im}x_m(n), \\ i &= 1, 2, \cdots, m. \end{aligned} \quad (7.12)$$

用矩阵表示为

$$X(n+1) = PX(n), \quad (7.12')$$

$$P \geq 0, \sum_{i=1}^m p_{ij} = 1 \quad (7.13)$$

由递推公式得

$$X(n) = P^n X(0), \quad (7.14)$$

其中  $X(0) = [x_1(0), \cdots, x_m(0)]^T$  为**初始概率向量**.

**例 1** 某商店销售某商品有好销( $S_1$ )和不好销( $S_2$ )两种状态, 每月观测一次, 已知本月好销而下月不好销的概率  $p_{21} = \alpha$ , 和本月不好销下月好销的概率  $p_{12} = \beta$ , 其中  $0 \leq \alpha, \beta \leq 1$ , 若初始状态为好销(或不好销), 问经过  $n$  个月后保持好销的概率有多大?

**解** 由列和等于 1 得到转移矩阵为

$$P = \begin{bmatrix} 1-\alpha & \beta \\ \alpha & 1-\beta \end{bmatrix}.$$

由  $|\lambda I - P| = 0$  得特征值  $\lambda_1 = 1$  和  $\lambda_2 = 1 - \alpha - \beta$ .

(1) 若  $\alpha, \beta$  不全为 0 和 1, 则  $|\lambda_2| < \lambda_1 = 1$ .  $\lambda_1, \lambda_2$  所对应的特征向量分别为  $X_1 = [\beta, \alpha]^T, X_2 = [1, -1]^T$ . 取  $R = [X_1, X_2]$ , 则

$$R^{-1}PR = \text{diag}(\lambda_1, \lambda_2),$$

其中

$$R^{-1} = \frac{1}{\alpha + \beta} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ \alpha & -\beta \end{bmatrix}.$$

于是  $X(n) = P^n X(0) = R \text{diag}(\lambda_1^n, \lambda_2^n) R^{-1} X(0)$ ,

$$\begin{aligned}\lim_{n \rightarrow \infty} X(n) &= \frac{1}{\alpha + \beta} \begin{bmatrix} \beta & 1 \\ \alpha & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & \\ & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ \alpha & -\beta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(0) \\ x_2(0) \end{bmatrix} \\ &= \frac{1}{\alpha + \beta} \begin{bmatrix} \beta & \beta \\ \alpha & \alpha \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(0) \\ x_2(0) \end{bmatrix} \\ &= \frac{1}{\alpha + \beta} \begin{bmatrix} \beta \\ \alpha \end{bmatrix} \stackrel{\text{记}}{=} q.\end{aligned}$$

(第三个等号成立是因为  $x_1(0) + x_2(0) = 1$ ), 即  $n \rightarrow \infty$  时  $X(n)$  趋于与  $X(0)$  无关的一个稳定值  $q$ , 称  $q$  为**极限状态概率**,  $q = [q_1, q_2]^T$  有  $q_1 + q_2 = 1$ ,  $q_1$  与  $q_2$  分别表示  $n \rightarrow \infty$  时好销和不好销的概率, 它完全由转移矩阵  $P$  决定.

(2) 若  $\alpha = \beta = 0$ , 则  $P = I, X(n) = X(0)$ .

(3) 若  $\alpha = \beta = 1$ , 则  $P = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ .  $\lambda_1 = 1, \lambda_2 = -1$

$\lim_{n \rightarrow \infty} (-1)^n$  不存在, 且

$$X(n) = P^n X(0) = \begin{cases} X(0), & \text{当 } n \text{ 为偶数,} \\ PX(0), & \text{当 } n \text{ 为奇数.} \end{cases}$$

**定义 1** 若存在某个正整数  $N$  使得  $P^N > 0$  (即  $p_{ij} > 0$  对  $i, j = 1, \dots, m$ ), 则称  $P$  为**正则转移矩阵**. 对应的马氏链称为**正则链**.

**定理 1** 设  $P$  为  $m$  阶正则转移矩阵, 则

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P^n = [q, q, \dots, q] = Q, \quad (7.15)$$

其中  $q = [q_1, q_2, \dots, q_m]^T$ ,  $q_i (i = 1, \dots, m)$  为正数且  $q_1 + q_2 + \dots + q_m = 1$ .

(证明略)

矩阵  $Q$  有如下性质: 对任意的概率向量  $X = [x_1, x_2, \dots, x_m]^T$ , 有

$$QX = \left( \sum_{i=1}^m x_i \right) q = q. \quad (7.16)$$

**定理 2** 正则链存在唯一的极限状态概率向量  $q$ , 使得

$$Pq = q. \quad (7.17)$$

$$\text{证 } \lim_{n \rightarrow \infty} X(n) = \lim_{n \rightarrow \infty} P^n X(0) = QX(0) = q.$$

$$\begin{aligned} \text{由 } & PP^n = P^{n+1} \text{ 及 } \lim_{n \rightarrow \infty} P^n = \lim_{n \rightarrow \infty} P^{n+1} = Q, \\ \text{得 } & PQX(0) = QX(0), \\ \text{即 } & Pq = q. \end{aligned}$$

下证唯一性. 设  $r$  是正则链的任一极限状态概率向量满足  $Pr = r$ , 那么  $P^n r = r$  对  $n=1, 2, \dots$  成立. 取极限, 由 (7.15), (7.16) 及 (7.17) 得

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P^n r = Qr = q = r. \quad \blacksquare$$

由 (7.17) 式知, 对正则链, 其极限状态概率向量  $q$  是方程组

$$(I - P)X = 0$$

的唯一的, 满足  $q_1 + \dots + q_m = 1$  的解. 即  $q$  是矩阵  $P$  对应于特征值  $\lambda_1 = 1$  的特征向量, 其各分量和为 1.

例 1 中解  $(I - P)X = 0$ , 得  $X = [\beta, \alpha]^T$ , 取  $q = 1/(\alpha + \beta) [\beta, \alpha]^T$  使各分量和为 1. 即为所求的极限状态.

例 2 考察微量元素磷在自然界中的转移情况, 假定磷只分布于  $s_1$  (土壤),  $s_2$  (草、羊、牛等生物体) 和  $s_3$  (上述系统之外如河流等), 每月观察一次, 变化情况如图 7.1 所示, 即土壤中的磷 30% 转移到生物体, 20% 排到系统外, 50% 仍在土壤中; 生物体中的磷 40% 回到土壤中, 40% 排出系统外, 遗留下 20%. 若初始  $S_1, s_2, s_3$  中磷的比例为 0.5 : 0.3 : 0.2, 问经过  $n$  个月后磷在三种状态中的分布比例是多少 (图 7.1)?

解 初始概率向量  $X(0) = [0.5, 0.3, 0.2]^T$ , 转移矩阵

$$P = \begin{bmatrix} 0.5 & 0.4 & 0 \\ 0.3 & 0.2 & 0 \\ 0.2 & 0.4 & 1 \end{bmatrix},$$

由于  $p_{33} = 1$ , 即系统一旦进入状态  $s_3$ , 就不再转移出去, 称  $s_3$  为吸

收状态.

**定义 2** 若马氏链中存在吸收状态  $s_i$ , 即  $p_{ii} = 1$ , 且从每一非吸收状态出发能以正的概率经有限次转达到某一吸收状态, 则称马氏链为**吸收链**. 它是不同于正则链的另一类型马氏链.

记

$$P_2 = \begin{bmatrix} 0.5 & 0.4 \\ 0.3 & 0.2 \end{bmatrix}, \quad P_1 = [0.2, 0.4],$$

则

$$P = \begin{bmatrix} P_2 & O_{1 \times 2} \\ P_1 & 1 \end{bmatrix}$$

为下三角块阵,  $P^*$  仍为下三角块阵, 即

$$P^* = \begin{bmatrix} P_2^* & O_{1 \times 2} \\ * & 1 \end{bmatrix}.$$

对任意的  $n \in N$ ,  $[P^*]_{13} = [P^*]_{23} = 0$ , 从而  $P^* \neq O$ . 所以  $P$  不是正则转移矩阵. 计算

$$X(n) = P^n X(0),$$

得表 7-3.

表 7-3

$n$		0	1	2	3	...	10	...	$\infty$
$X(n)$	$x_1(n)$	0.5	0.37	0.27	0.195	...	0.020	...	$\rightarrow 0$
	$x_2(n)$	0.3	0.21	0.15	0.111	...	0.011	...	$\rightarrow 0$
	$x_3(n)$	0.2	0.42	0.58	0.694	...	0.969	...	$\rightarrow 1$

一般说, 对吸收链的  $m$  阶转移矩阵  $P$  可经  $s_i$  下标的重新排列 (即把分块阵  $P$  的第 1, 2 行对换, 第 1, 2 列对换) 表示为

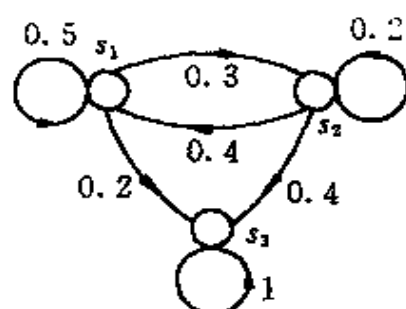


图 7.1



$$P = \begin{bmatrix} I_r & P_1 \\ O & P_2 \end{bmatrix},$$

其中  $I_r$  表示有  $r$  个吸收状态, 有  $m-r$  个非吸收状态. 一般  $P_1 \neq O$ , 所以  $P_2$  的列和  $< 1$ , 因此  $P_2$  的特征值  $\lambda(P_2)$  满足  $|\lambda(P_2)| < 1$ , 且  $(I - P_2)$  可逆, 否则,  $|I - P_2| = 0, \lambda = 1$  为  $P_2$  的一个特征值, 矛盾, 若记

$$M = (I - P_2)^{-1} = I + P_2 + P_2^2 + \cdots + P_2^n + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} P_2^n,$$

$$J = [1, 1, \cdots, 1]_{1 \times (m-r)}^T,$$

则

$$Y = MJ = [y_1, \cdots, y_{m-r}]^T,$$

其中  $y_i$  是从第  $i$  个非吸收状态出发被某个吸收状态吸收的平均转移次数.

例 2 中, 状态排序改为  $(s_3, s_2, s_1)$ , 对应的概率转移矩阵为

$$P = \begin{bmatrix} 1 & P_1 \\ O_{2 \times 1} & P_2 \end{bmatrix}, \quad P_1 = [0.4, 0.2], \quad P_2 = \begin{bmatrix} 0.2 & 0.3 \\ 0.4 & 0.5 \end{bmatrix},$$

$$I - P_2 = \begin{bmatrix} 0.8 & -0.3 \\ -0.4 & 0.5 \end{bmatrix}, \quad (I - P_2)^{-1} = \frac{1}{0.28} \begin{bmatrix} 0.5 & 0.3 \\ 0.4 & 0.8 \end{bmatrix},$$

所以

$$\begin{aligned} Y &= MJ = (I - P_2)^{-1} J \\ &= \frac{1}{0.28} \begin{bmatrix} 0.5 & 0.3 \\ 0.4 & 0.8 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 20/7 \\ 30/7 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

即从状态  $s_2$  和  $s_1$  出发平均经过 3 次和 4.3 次的转移, 被状态  $s_3$  吸收.

### 7.3 投入产出数学模型

本节介绍投入产出的一个线性模型. 它研究一个经济系统中各部门(企业)之间“投入”与“产出”的平衡关系. 在一个经济系统

中,各部门(企业)既是生产者又是消耗者,生产的产品提供给系统内各部门和系统外部(包括出口等)的需求;消耗系统内各部门提供的产品如原材料、设备、运输和能源等,此外还有人力消耗.消耗的的目的是为了生产,生产的结果必然要创造新的价值,以用于支付劳动者的报酬、缴付税金和获取合理的利润.显然,对每个部门(企业)来讲,在物资方面的消耗和新创造的价值,等于它的总产品的价值.这就是“投入”与“产出”之间的总的平衡关系.

这里我们只讨论价值型投入产出数学模型,投入和产出都用货币数值来度量.

### 7.3.1 分配平衡方程组

首先考虑一个系统内部各部门的产品的产销(包括内销和外销)平衡或分配平衡.

设某个经济系统由  $n$  个企业所组成,并用:

$x_i$  表示第  $i$  个企业的总产值,  $x_i \geq 0$ ;

$d_i$  表示系统外部对第  $i$  个企业的产值的需求量,  $d_i \geq 0$ ;

$c_{ij}$  表示第  $j$  个企业生产单位产值需要消耗第  $i$  个企业的产值数,称为第  $j$  个企业对第  $i$  个企业的直接消耗系数,  $c_{ij} \geq 0$ .

为了帮助理解  $x_i, d_i, c_{ij}$  的含义及系统内外的相互关系,我们列出表 7-4.

表 7-4

直接消耗系数 企业		消耗企业				外部需求	总产值	
		1	2	...	$n$			
生 产 企 业	1	$c_{11}$	$c_{12}$	...	$c_{1n}$	$d_1$	$x_1$	
	2	$c_{21}$	$c_{22}$	...	$c_{2n}$	$d_2$	$x_2$	
	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	
	$n$	$c_{n1}$	$c_{n2}$	...	$c_{nn}$	$d_n$	$x_n$	

表中编号相同的生产企业和消耗企业是指同一个企业. 如“1”号表示煤矿, “2”号表示电厂,  $c_{21}$  表示煤矿生产单位产值需要直接消耗电厂的产值数,  $c_{22}$  表示电厂生产单位产值需要直接消耗自身的产值数(即厂用电的消耗数),  $d_2$  表示系统外部对电厂产值的需求量(即所需发电量),  $x_2$  表示电厂的总产值(即总发电量).

根据上面的假设, 从第  $i$  行看, 第  $i$  个企业分配给系统内各企业的产值消耗消耗消耗的产值数为

$$c_{i1}x_1 + c_{i2}x_2 + \cdots + c_{in}x_n.$$

提供给系统外部的产值数为  $d_i$ , 这两部分之和就是第  $i$  个企业的总产值  $x_i$ . 于是可得分配平衡方程组

$$x_i = \left( \sum_{j=1}^n c_{ij}x_j \right) + d_i, \quad i = 1, 2, \cdots, n. \quad (7.18)$$

记

$$C = \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & \cdots & c_{1n} \\ c_{21} & c_{22} & \cdots & c_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ c_{n1} & c_{n2} & \cdots & c_{nn} \end{bmatrix}, X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}, d = \begin{bmatrix} d_1 \\ d_2 \\ \vdots \\ d_n \end{bmatrix}. \quad (7.19)$$

称  $C$  为直接消耗系数矩阵;  $C \geq 0$  (即  $c_{ij} \geq 0$  对  $i, j = 1, 2, \cdots, n$ ), 称之为非负矩阵; 称  $X$  为生产向量;  $X \geq 0$  (即  $x_i \geq 0, i = 1, \cdots, n$ ), 称之为非负向量; 称  $d$  为外部需求向量,  $d \geq 0$  于是(7.18)可表示成矩阵形式

$$X = CX + d, \quad (7.20)$$

或

$$(I - C)X = d, \quad (7.21)$$

(7.20)或(7.21)式是投入产出数学模型之一.

**例 1** 某经济系统有三个企业: 煤矿、电厂和铁路. 设在一年内, 企业之间直接消耗系数及外部对各企业产值需求量如表

7-5.

表 7-5

直接消耗系数 企业		消耗企业			外部需求	总产值
		煤矿	电厂	铁路		
生产企业	煤矿	0	0.65	0.55	50000	$x_1$
	电厂	0.25	0.05	0.10	25000	$x_2$
	铁路	0.25	0.05	0	0	$x_3$

为使各企业产值与系统内外需求平衡,各企业一年内总产值  $x_1, x_2, x_3$  应为多少?

**解** 根据已知条件,直接消耗系数矩阵  $C$ ,外部需求向量  $d$ ,生产向量  $X$  分别为

$$C = \begin{bmatrix} 0 & 0.65 & 0.55 \\ 0.25 & 0.05 & 0.10 \\ 0.25 & 0.05 & 0 \end{bmatrix}, d = \begin{bmatrix} 50000 \\ 25000 \\ 0 \end{bmatrix}, X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}.$$

代入(7.21)式,得

$$\begin{bmatrix} 1.00 & -0.65 & -0.55 \\ -0.25 & 0.95 & -0.10 \\ -0.25 & -0.05 & 1.00 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 50000 \\ 25000 \\ 0 \end{bmatrix},$$

其中系数矩阵  $I-C$  是可逆的,且  $(I-C)^{-1} > 0$ ,求解得

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \frac{1}{503} \begin{bmatrix} 756 & 542 & 470 \\ 220 & 690 & 190 \\ 200 & 170 & 630 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 50000 \\ 25000 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 120087 \\ 56163 \\ 28330 \end{bmatrix}.$$

### 7.3.2 消耗平衡方程组

这里考虑系统内各部门(企业)的总产值与新创造的价值(净产值)和内部的生产性消耗之间的平衡. 已知某系统的直接消耗系数矩阵  $C_{n \times n}$ ,由  $C$  可知,第  $j$  个企业生产产值  $x_j$ ,需要消耗自身和

其它企业的产值数(如原材料、运输、能源、设备等方面的生产性消耗)为

$$c_{1j}x_j + c_{2j}x_j + \cdots + c_{nj}x_j.$$

如果生产产值  $x_j$  所获得的净产值为  $z_j$ , 则

$$x_j = c_{1j}x_j + c_{2j}x_j + \cdots + c_{nj}x_j + z_j,$$

即

$$x_j = \left( \sum_{i=1}^n c_{ij} \right) x_j + z_j, \quad j = 1, 2, \cdots, n. \quad (7.22)$$

方程组(7.22)称为**消耗平衡方程组**. (7.22)式可写成

$$\left( 1 - \sum_{i=1}^n c_{ij} \right) x_j = z_j, \quad j = 1, 2, \cdots, n. \quad (7.23)$$

记

$$D = \text{diag} \left( \sum_{i=1}^n c_{i1}, \sum_{i=1}^n c_{i2}, \cdots, \sum_{i=1}^n c_{in} \right), \quad (7.24)$$

$$Z = [z_1, z_2, \cdots, z_n]^T,$$

$D$  称为**企业消耗矩阵**,  $Z$  称为**净产值向量**. 于是(7.22), (7.23)式可分别写成矩阵形式

$$X = DX + Z, \quad (7.25)$$

和

$$(I - D)X = Z. \quad (7.26)$$

(7.25)或(7.26)式是投入产出数学模型之二. 它揭示了经济系统的生产向量  $X$ , 净产值向量  $Z$  与企业消耗矩阵  $C$  之间的关系.

由(7.18)式和(7.22)式可得

$$\sum_{i=1}^n x_i = \sum_{i=1}^n \left[ \left( \sum_{j=1}^n c_{ij} x_j \right) + d_i \right] = \sum_{j=1}^n \left[ \left( \sum_{i=1}^n c_{ij} x_j \right) + z_j \right],$$

即

$$\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n c_{ij} x_j + \sum_{i=1}^n d_i = \sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^n c_{ij} x_j + \sum_{j=1}^n z_j,$$

故

$$\sum_{i=1}^n d_i = \sum_{j=1}^n z_j. \quad (7.27)$$

(7.27)式表明:系统外部对各企业产值的需求量总和,等于系统内部各企业净产值之总和.

### 7.3.3 分配和消耗平衡方程组的解

在消耗平衡方程组中,显然有

$$x_j > 0, z_j > 0, \quad j = 1, 2, \dots, n. \quad (7.28)$$

于是由(7.23)式可知,企业之间的直接消耗系数具有性质

$$\sum_{i=1}^n c_{ij} < 1, j = 1, 2, \dots, n. \quad (7.29)$$

$$\text{于是又有 } 0 \leq c_{ij} < 1, \quad i, j = 1, 2, \dots, n. \quad (7.30)$$

因此  $I - D = \text{diag}(1 - d_1, 1 - d_2, \dots, 1 - d_n)$  (其中  $d_j = \sum_{i=1}^n c_{ij}$  由(7.24)式给出,  $j = 1, \dots, n$ ), 由  $1 - d_i > 0$  ( $i = 1, 2, \dots, n$ ) 得  $I - D$  可逆, 且  $(I - D)^{-1} > 0$ . 由(7.26)式得

$$X = (I - D)^{-1}Z. \quad (7.31)$$

由(7.29)、(7.30)式知,  $C$  的所有特征值的模小于 1 (见 5.1 节定理 3), 所以  $I - C$  可逆 (否则,  $\lambda = 1$  是  $C$  的一个特征值), 即分配平衡方程组  $(I - C)X = d$  有解

$$X = (I - C)^{-1}d. \quad (7.32)$$

由  $\lim_{k \rightarrow +\infty} C^k = O$  (其证明要用附录中的约当标准形) 及等式

$$(I - C)(I + C + C^2 + \dots + C^{k-1}) = I - C^k \rightarrow I \quad (k \rightarrow +\infty)$$

知  $\sum_{i=0}^{\infty} C^i$  收敛, 且

$$(I - C)^{-1} = \sum_{i=0}^{\infty} C^i > 0$$

即(7.32)是平衡方程组的唯一非负解.

实际问题中求平衡方程组的解一般采用迭代法 (此法在计算方法课中将详细介绍), 当  $n$  较小时也可以用高斯消元法.

## 7.4 图的邻接矩阵

设  $V = \{v_1, \dots, v_n\}$  是顶点集, 称顶点间的有序对  $(v_i, v_j)$  为弧, 以  $A$  表示弧的集合, 则称  $G = (V, A)$  为图. 如五个球队之间的比赛情况可以图 7.2 表示, 其中弧  $(v_i, v_j)$  表示  $v_i$  队胜于  $v_j$  队. 若两点之间存在一条弧, 则称这二点相邻. 称  $v_1 v_2 \dots v_k$  为长为  $k-1$  的路, 若其中任二个顶点互异, 且  $(v_{i-1}, v_i) \in A$  ( $i = 2, \dots, k$ ). 如图 7.2 中的  $v_4 v_5 v_1 v_2 v_3$  为长为 4 的路. 称  $v_1$  为起点,  $v_k$  为终点, 称起终点重合的路为回路, 如图 7.2 中  $v_1, v_2, v_5$  是长为 3 的回路. 若  $v_1, v_k$  之间存在一条路 (记为  $v_1 - v_k$  路) 则称  $v_1$  与  $v_k$  点连通, 任意两点均连通的图称为连通图.

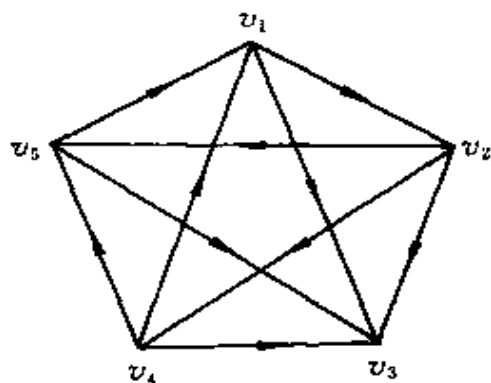


图 7.2

一个图可以用一个矩阵来表示. 称  $M = (a_{ij})_{n \times n}$  为图  $G = (V, A)$  的邻接矩阵, 若

$$a_{ij} = \begin{cases} 1, & (v_i, v_j) \in A, \\ 0, & \text{否则.} \end{cases} \quad (7.33)$$

如图 7.2 的邻接矩阵为

$$M = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

第  $i$  行的行和表示以  $v_i$  为起点的弧的数目, 如  $v_4$  (行和为 3) 胜三场; 第  $j$  列的列和表示以  $v_j$  为终点的弧数, 如  $v_5$  (列和为 2) 负二

场. 图 7.2 中表示的竞赛,  $v_2, v_4$  均胜三个队, 如何判断哪个队为冠军呢? 需要再计算“间接胜”的球队. 如甲队胜乙队, 乙队又胜丙队, 则称甲队间接胜丙队. 即若  $v_i - v_j$  之间存在长为  $k$  的路 ( $k \geq 2$ ) 即称  $v_i$  间接胜于  $v_j$ . 求  $v_i$  到  $v_j$  长为 2 的路的数目, 即求

$$a_{i1}a_{1j} + a_{i2}a_{2j} + \cdots + a_{in}a_{nj} = \sum_{k=1}^n a_{ik}a_{kj}. \quad (7.34)$$

**定理** 设  $M = (a_{ij})_{n \times n}$  为图  $G = (V, A)$  的邻接矩阵, 则  $M^k$  的第  $(i, j)$  元是  $v_i$  到  $v_j$  的长为  $k$  的路的数目.

**证** 对  $k$  归纳,  $k=2$  成立 (见 (7.34)).

设  $M^k$  的第  $(i, j)$  元  $[M^k]_{ij}$  是  $v_i$  到  $v_j$  的长为  $k$  的路的数目, 则由  $M^{k+1} = M^k M$ , 即有

$$[M^{k+1}]_{ij} = \sum_{l=1}^n [M^k]_{il} [M]_{lj},$$

其中  $[M]_{lj} = a_{lj}$  是  $v_l$  到  $v_j$  的长为 1 的路的数目, 所以和式中每项表示从  $v_i$  到  $v_l$  再从  $v_l$  到  $v_j$  的长为  $k+1$  的路的数目, 对所有的  $l$  求和得到从  $v_i$  到  $v_j$  的长为  $k+1$  的路的数目. 所以定理对  $k+1$  成立. ■

**例 1** 五个球队的单循环赛, 比赛结果如图 7.2 所示, 试排出五个球队的名次.

**解** 若行和最大的是  $v_i$ , 则  $v_i$  队胜, 由于  $v_2, v_4$  同时具有行和等于 3, 所以再计算  $M^2$  和  $M + M^2$ .

$$M^2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad M + M^2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 3 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 3 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

$[M + M^2]_{ij}$  表示  $v_i$  到  $v_j$  的路长  $\leq 2$  的路的数目, 即  $v_i$  直接和间接 ( $k=2$ ) 打败  $v_j$  的场数.  $[M + M^2]$  中行和最大的是第 2 行 (为 8), 所



以判  $v_2$  队为冠军,同理  $v_4$  队为亚军, $v_1, v_5, v_3$  分别为第三、四、五名.

若  $M+M^2$  中仍存在行和相等的若干行,则再计算  $M+M^2+M^3$ ,依此类推.

称矩阵  $P=(p_{ij})_{n \times n}$  为可达到矩阵.若

$$p_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{从 } v_i \text{ 到 } v_j \text{ 存在至少一条路,} \\ 0, & \text{不存在 } v_i \text{ 到 } v_j \text{ 的路.} \end{cases} \quad (7.35)$$

由于  $v_i, v_j$  中若存在路,其路长必不超过  $n$ ,因此,计算  $B_n = M+M^2+\cdots+M^n$ ,将  $B_n$  中非零元素均改为 1 即得到可达到矩阵  $P$ ,若  $P$  是元素全为 1 的矩阵,则  $G$  中任两点连通,即  $G$  为连通图.

**例 2** 设四个城市  $v_1, v_2, v_3, v_4$  有航班如图 7.3 所示,问从任一个城市起飞,可否达到其余三个城市?

**解** 图的邻接矩阵为

$$M = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

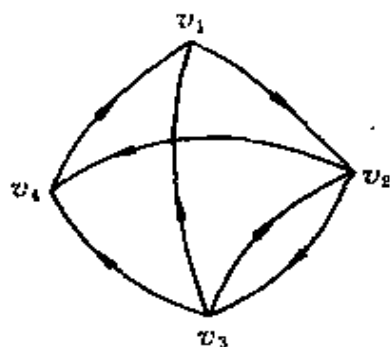


图 7.3

计算  $M^2, M^3, M^4$  和  $M+M^2+M^3+M^4=B_4$  及  $P$  如下:

$$M^2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}, M^3 = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}, M^4 = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 & 3 \\ 3 & 3 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

$$B_4 = \begin{bmatrix} 3 & 4 & 2 & 3 \\ 5 & 5 & 4 & 6 \\ 7 & 7 & 4 & 7 \\ 3 & 2 & 1 & 2 \end{bmatrix}, P = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

所以,图  $G$  为连通图,从任一城市起飞可到达其余的城市.  $[B_4]_{ij}$  表示从  $v_i$  到  $v_j$  的航线数目,如  $[B_4]_{11} = 3$ . 表示从  $v_1$  起航返回  $v_1$  有三条航线:  $v_1v_2v_1v_1, v_1v_2v_3v_1, v_1v_2v_3v_4v_1$ . 路长为 3 的两条 ( $[M^3]_{11} = 2$ ) 路长为 4 的一条 ( $[M^4]_{11} = 1$ ).

## 7.5 递归关系式的矩阵解法

利用矩阵对角化的方法可以解某些递归关系式. 如给出 Fibonacci 数列的通项.

**例** 某君举步上高楼,每跨一次或上一个台阶或上二个台阶,若要上  $n$  个台阶,问有多少种不同的方式?

**解** 设登上  $n$  个台阶的不同方式数为  $F_n$ ,则显然有  $F_1 = 1$  (即登上一个台阶只有一种方式),  $F_2 = 2$  (即登上两个台阶有两种方式),

$$F_n = F_{n-1} + F_{n-2}, \quad n = 3, 4, \dots \quad (1)$$

(因为在登上  $n$  个台阶的所有方式中,跨第一步只有两种可能:①第一步跨一个台阶,后面登  $n-1$  个台阶的方式有  $F_{n-1}$  个;②第一步跨二个台阶,后面登  $n-2$  个台阶的方式有  $F_{n-2}$  个). 这个数列  $\{F_n\}: 1, 2, 3, 5, 8, 13, \dots$  称为 Fibonacci 数列,将方程改写为  $F_0 = 0$ ,

$$\begin{cases} F_{k+2} = F_{k+1} + F_k \\ F_{k+1} = F_{k+1} \end{cases} \quad (k = 0, 1, 2, \dots),$$

$$\text{即} \quad \alpha_{k+1} = A\alpha_k \quad (k = 0, 1, 2, \dots), \quad (2)$$

其中

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \alpha_k = \begin{bmatrix} F_{k+1} \\ F_k \end{bmatrix}, \alpha_0 = \begin{bmatrix} F_1 \\ F_0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

由②式递推可得

$$\alpha_k = A^k \alpha_0, k = 1, 2, \dots \quad (3)$$

于是求  $F_k$  的问题就归结为求  $\alpha_k$ , 也就是求  $A^k$  的问题.

由  $|\lambda I - A| = \begin{vmatrix} \lambda-1 & -1 \\ -1 & \lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - \lambda - 1 = 0$ , 得  $A$  的特征值

$$\lambda_1 = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}, \quad \lambda_2 = \frac{1 - \sqrt{5}}{2}. \quad (4)$$

相应于  $\lambda_1, \lambda_2$  的特征向量分别为

$$X_1 = [\lambda_1, 1]^T, \quad X_2 = [\lambda_2, 1]^T.$$

取

$$P = \begin{bmatrix} | & | \\ X_1 & X_2 \\ | & | \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda_1 & \lambda_2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix},$$

则

$$P^{-1} = \frac{1}{\lambda_1 - \lambda_2} \begin{bmatrix} 1 & -\lambda_2 \\ -1 & \lambda_1 \end{bmatrix}.$$

于是就有  $P^{-1}AP = \text{diag}(\lambda_1, \lambda_2)$  和

$$\begin{aligned} A^k &= P \begin{bmatrix} \lambda_1^k & 0 \\ 0 & \lambda_2^k \end{bmatrix} P^{-1} = \frac{1}{\lambda_1 - \lambda_2} \begin{bmatrix} \lambda_1^{k+1} - \lambda_2^{k+1} & \lambda_1 \lambda_2^{k+1} - \lambda_2 \lambda_1^{k+1} \\ \lambda_1^k - \lambda_2^k & \lambda_1 \lambda_2^k - \lambda_2 \lambda_1^k \end{bmatrix}, \\ \begin{bmatrix} F_{k+1} \\ F_k \end{bmatrix} &= a_k = A^k \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \frac{1}{\lambda_1 - \lambda_2} \begin{bmatrix} \lambda_1^{k+1} - \lambda_2^{k+1} \\ \lambda_1^k - \lambda_2^k \end{bmatrix}. \end{aligned} \quad (5)$$

将④式代入⑤式得

$$F_k = \frac{1}{\sqrt{5}} \left[ \left( \frac{1 + \sqrt{5}}{2} \right)^k - \left( \frac{1 - \sqrt{5}}{2} \right)^k \right]. \quad (6)$$

对于任何正整数  $k$ , 由⑥式求得的  $F_k$  都是正整数, 这可能出乎人们的预料, 然而这是准确无误的.

若某君住在 10 层, 每二层之间有 16 个台阶, 百年共 36525 天, 每天登楼 4 次, 合 14.5 万个台阶而  $F_{30}$  已大于 800 万. 说明 30 个台阶的登楼方式足以 4 年不重复了.

记 
$$r_k = \frac{1}{\sqrt{5}} \left| \left( \frac{1 - \sqrt{5}}{2} \right)^k \right|, \quad (7)$$

$$\text{则 } F_k = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{5}} \left( \frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^k + r_k, & k = \text{奇数}, \\ \frac{1}{\sqrt{5}} \left( \frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^k - r_k, & k = \text{偶数}. \end{cases} \quad (8)$$

由于  $\left| \frac{1-\sqrt{5}}{2} \right| \approx 0.618 < 1$ , 所以  $0 < r_k < \frac{1}{2}$ . 因此由(8)式可知,  $F_k$  是等于  $\frac{1}{\sqrt{5}} \left( \frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^k$  所最接近的正整数. 于是由

$$\frac{1}{\sqrt{5}} \left( \frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^k \approx \begin{cases} 4180.999964, & k = 19, \\ 6765.000052, & k = 20, \end{cases}$$

得到  $F_{19} = 4181, F_{20} = 6765$ . (利用(1)式可验算结果是正确的.)

当  $k$  很大时,  $|\lambda_2|^k \approx (0.618)^k \ll 1$ , 此时

$$\begin{aligned} F_{k+1}/F_k &\approx \lambda_1^{-1}/\lambda_1^k = \lambda_1 \\ &\approx 1.618, \end{aligned}$$

或

$$\begin{aligned} F_k/F_{k+1} &\approx \frac{1}{\lambda_1} = |\lambda_2| \\ &\approx 0.618. \end{aligned}$$

## 7.6 矩阵分析(简介)及其在求解常系数线性微分方程组中的应用

### 7.6.1 矩阵函数的微分与积分(简介)

设  $A(t) = [a_{ij}(t)]_{m \times n}$ , 若  $A$  的每个元素  $a_{ij}(t)$  ( $t \rightarrow t_0$  或  $t \rightarrow \infty$ ) 的极限存在, 则称  $A(t)$  的极限存在, 且

$$\lim A(t) = [\lim a_{ij}(t)]_{m \times n}.$$

若  $a_{ij}(t)$  可微 ( $i = 1, \dots, m; j = 1, \dots, n$ ), 则称  $A(t)$  可微, 且



写成矩阵形式:

$$\frac{dU(t)}{dt} = AU, \quad (7.40)$$

其中  $U = [u_1, u_2, \dots, u_n]^T$ ,  $A = [a_{ij}]_{n \times n}$  为系数矩阵. 令 (7.40) 式的解为

$$U = e^{\lambda t} X, \quad (7.41)$$

即  $[u_1, \dots, u_n]^T = e^{\lambda t} [x_1, x_2, \dots, x_n]^T$ .

将 (7.41) 式代入 (7.40) 式得

$$\lambda e^{\lambda t} X = A e^{\lambda t} X = e^{\lambda t} A X,$$

化简得  $AX = \lambda X$ , 即 (7.41) 式中  $\lambda$  为  $A$  的特征值,  $X$  为  $\lambda$  对应的特征向量, 若  $A$  可对角化, 则存在  $n$  个线性无关的特征向量  $X_1, X_2, \dots, X_n$  于是得到 (7.40) 式的  $n$  个线性无关的特解:

$$U_1 = e^{\lambda_1 t} X_1, U_2 = e^{\lambda_2 t} X_2, \dots, U_n = e^{\lambda_n t} X_n.$$

它们的线性组合

$$U = C_1 e^{\lambda_1 t} X_1 + C_2 e^{\lambda_2 t} X_2 + \dots + C_n e^{\lambda_n t} X_n \quad (7.42)$$

(其中  $C_1, \dots, C_n$  为任意常数) 为 (7.36) 式的一般解, 将 (7.42) 式改写成矩阵形式:

$$U = [X_1, X_2, \dots, X_n] \begin{bmatrix} e^{\lambda_1 t} & & \\ & e^{\lambda_2 t} & \\ & & \ddots \\ & & & e^{\lambda_n t} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} C_1 \\ C_2 \\ \vdots \\ C_n \end{bmatrix},$$

记  $C = [C_1, C_2, \dots, C_n]^T$ ,  $e^{\Lambda t} = \text{diag}(e^{\lambda_1 t}, e^{\lambda_2 t}, \dots, e^{\lambda_n t})$ , 则 (7.36) 式或 (7.40) 式有一般解

$$U = P e^{\Lambda t} C. \quad (7.43)$$

对于初值问题

$$\begin{cases} \frac{dU}{dt} = AU, \\ U|_{t=0} = U_0. \end{cases} \quad (7.44)$$

解为

$$U = Pe^{At}P^{-1}U_0, \quad (7.45)$$

因为  $t=0$  代入(7.43)式得  $C=P^{-1}U_0$ .

**例 1** 如图 7.4 所示电阻、电容线路图, 已知  $R_1=3, R_2=2$  (单位为  $\Omega$ ),  $C_1=1, C_2=2$  (单位为 F), 开关合上时, 容器  $C_1$  上初始电压为 11V, 右边闭合回路的初始电流和  $C_2$  上的初始电压全为 0. 试求: 开关闭合后两个电容器上的电压  $u_1$  和  $u_2$  与时间  $t$  的函数关系, 即求  $u_1(t)$  和  $u_2(t)$ .

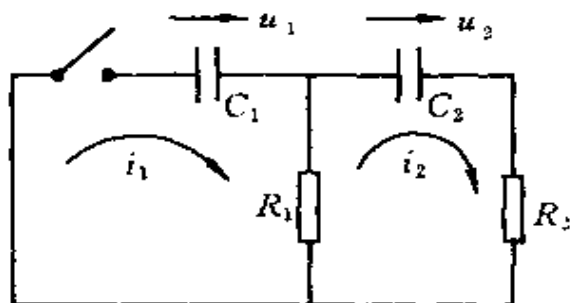


图 7.4

**解** 由物理学的知识可知, 电容器两端电流与电压的关系为

$$i_1 = C_1 \frac{du_1}{dt} = \frac{du_1}{dt}, \quad i_2 = C_2 \frac{du_2}{dt} = 2 \frac{du_2}{dt}.$$

根据基尔霍夫定律, 容易列出两个回路的电压方程

$$\begin{cases} u_1 + 3\left(\frac{du_1}{dt} - 2\frac{du_2}{dt}\right) = 0, \\ u_2 + 4\frac{du_2}{dt} + 3\left(2\frac{du_2}{dt} - \frac{du_1}{dt}\right) = 0. \end{cases}$$

把它化成一阶线性常系数齐次微分方程组的标准形式

$$\begin{cases} \frac{du_1}{dt} = -\frac{5}{6}u_1 - \frac{1}{2}u_2, \\ \frac{du_2}{dt} = -\frac{1}{4}u_1 - \frac{1}{4}u_2, \end{cases} \quad (1)$$

初始条件为  $u_1(0)=11, u_2(0)=0.$  (2)

以矩阵表示①,②,即

$$\begin{cases} \frac{dU}{dt} = AU, \\ U|_{t=0} = U_0 = [11, 0]^T, \end{cases} \quad (3)$$

其中

$$A = \begin{bmatrix} -5/6 & -1/2 \\ -1/4 & -1/4 \end{bmatrix}.$$

先求特征值和特征向量. 由

$|\lambda I - A| = 0$ , 得  $\lambda_1 = -1, \lambda_2 = -1/12$ , 对应的特征向量为  $X_1 = [3, 1]^T, X_2 = [2, -3]^T$ ,

$$e^{tA} = \text{diag}(e^{-t}, e^{-t/12}), \quad P = [X_1, X_2].$$

由(7.45)式得初值问题③的解为

$$U = Pe^{tA}P^{-1}U_0,$$

即

$$\begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 1 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e^{-t} & 0 \\ 0 & e^{-t/12} \end{bmatrix} \frac{1}{11} \begin{bmatrix} -3 & -2 \\ -1 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 11 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 9e^{-t} + 2e^{-t/12} \\ 3e^{-t} - 3e^{-t/12} \end{bmatrix}$$

为所求解.

**例 2** 解线性常系数微分方程组

$$\begin{cases} \frac{dx_1}{dt} = x_1 + x_2, \\ \frac{dx_2}{dt} = -4x_1 + 5x_2, \\ \frac{dx_3}{dt} = x_1 + 2x_3. \end{cases}$$

已知初始值为:  $x_1(0)=1, x_2(0)=-1, x_3(0)=2$ .

**解** 本题的初值问题为:



$$\begin{cases} \frac{dX}{dt} = AX, \\ X(0) = X_0 = [1, -1, 2]^T, \end{cases}$$

其中

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -4 & 5 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{bmatrix}.$$

利用附录 B 中提供的方法, 可得  $A$  的约当标准形, 即有可逆阵

$$P = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 5 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix},$$

使

$$P^{-1}AP = J = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}.$$

根据(7.45)式, 该初值问题的解为

$$X = Pe^{tJ}P^{-1}X_0, \quad (1)$$

其中

$$e^{tJ} = I + tJ + \frac{(tJ)^2}{2!} + \cdots + \frac{(tJ)^n}{n!} + \cdots, \quad (2)$$

$$J^n = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}^n = \begin{bmatrix} 2^n & 0 & 0 \\ 0 & 3^n & 3^{n-1}C_n^1 \\ 0 & 0 & 3^n \end{bmatrix}. \quad (3)$$

将③式代入②式, 得

$$e^{tJ} = \begin{bmatrix} e^{2t} & 0 & 0 \\ 0 & e^{3t} & te^{3t} \\ 0 & 0 & e^{3t} \end{bmatrix}. \quad (4)$$

再将④式及  $P, P^{-1}, X_0$  代入①式,得

$$\begin{aligned} X = \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ x_3(t) \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 5 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e^{2t} & 0 & 0 \\ 0 & e^{3t} & te^{3t} \\ 0 & 0 & e^{3t} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -3 & 1 & 1 \\ 5 & -2 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} (1-3t)e^{3t} \\ (-1-6t)e^{3t} \\ -2e^{2t} + (4-3t)e^{3t} \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

## \* 7.7 不相容方程组的最小二乘解

非齐次线性方程组

$$\sum_{j=1}^m a_{ij}x_j = b_i \quad (i=1,2,\dots,n), \quad (7.46)$$

或  $A_{n \times m}X = b$ .

当  $r(Ab) \neq r(A)$  时称为不相容方程组,在通常意义下无解,即对任意的  $X_{m \times 1}$ ,均有  $AX \neq b$ ,因此  $|AX - b| > 0$ ,其中  $|AX - b|$  表示  $n$  维向量  $AX - b$  的模.现在,我们要求找  $X$ ,使得  $|AX - b|$  达到最小,或使

$$|b - AX|^2 = \sum_{i=1}^n \left( b_i - \sum_{j=1}^m a_{ij}x_j \right)^2$$

达到最小,并称这样的  $X$  为不相容方程组(7.46)的最小二乘解.为求最小二乘解,我们先给出有关向量在子空间上的投影和向量到子空间的垂直距离的概念.

**定义 1** 设  $\alpha, \beta \in R^n$ ,称  $d(\alpha, \beta) = |\alpha - \beta|$  为  $\alpha$  与  $\beta$  之间的距离.若  $\alpha = [a_1, a_2, \dots, a_n]^T, \beta = [b_1, b_2, \dots, b_n]^T$ ,则

$$d(\alpha, \beta) = |\alpha - \beta| = \sqrt{(a_1 - b_1)^2 + (a_2 - b_2)^2 + \dots + (a_n - b_n)^2}. \quad (7.47)$$

读者不难证明, 这样定义的距离, 满足三条基本性质:

- (i)  $d(\alpha, \beta) = d(\beta, \alpha)$ .
- (ii)  $d(\alpha, \beta) \geq 0$ , 等号成立当且仅当  $\alpha = \beta$ . (7.48)
- (iii)  $d(\alpha, \beta) \leq d(\alpha, \gamma) + d(\gamma, \beta)$  (三角不等式).

**定义 2** 设  $\alpha \in R^n$ ,  $W$  为  $R^n$  的子空间, 若  $\beta \in W$ , 且  $(\alpha - \beta) \perp W$ , 则称  $\beta$  为  $\alpha$  在  $W$  上的投影, 记作  $(\alpha)_W = \beta$ , 称  $|\alpha - \beta|$  为  $\alpha$  到  $W$  的垂直距离.

定义 2 在三维几何空间中的几何意义如图 7.5, 7.6 所示. (图中  $W_1$  是  $R^3$  的一维子空间,  $W_2$  是二维子空间.)

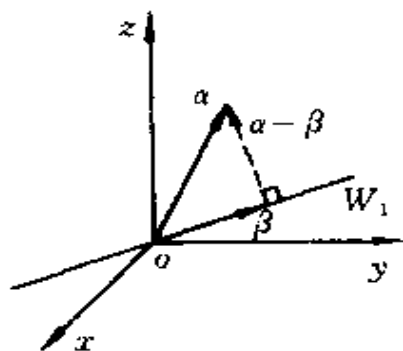


图 7.5

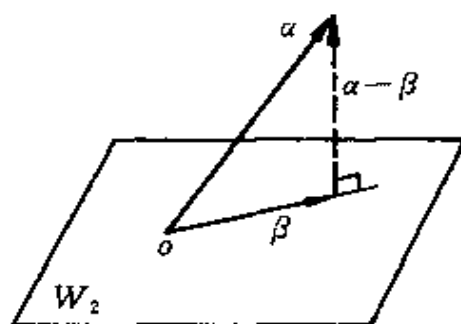


图 7.6

向量在子空间上的投影是唯一的. 这是因为, 如果  $\beta_1, \beta_2$  是  $\alpha$  在子空间  $W$  上的两个投影, 则  $(\alpha - \beta_1) \perp W$ ,  $(\alpha - \beta_2) \perp W$ , 因此, 对于任意的  $\gamma \in W$ , 有  $(\alpha - \beta_1, \gamma) = (\alpha - \beta_2, \gamma) = 0$ , 于是

$$(\beta_1, \gamma) = (\beta_2, \gamma),$$

即

$$(\beta_1 - \beta_2, \gamma) = 0.$$

由于上式对任意的  $\gamma \in W$  都成立, 所以  $\beta_1 = \beta_2$ . (如果  $\beta_1 \neq \beta_2$ , 上式对于  $\gamma = \beta_1 - \beta_2 \in W$ , 就不成立.)

设  $A_{n \times s} = [\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s]$ ,  $R(A) = L(\alpha_1, \dots, \alpha_s)$  为  $A$  的列空间,

显然,

$$\beta \in R(A) \Leftrightarrow \beta = \sum_{i=1}^s x_i \alpha_i = AX.$$

**定理 1** 设  $b \in R^n$ ,  $b$  在  $R(A)$  上的投影  $(b)_{R(A)} = AX^*$ , 则  $X^*$  是方程组  $A^T AX = A^T b$  的解.

**证** 由于  $(b - AX^*) \perp R(A)$ , 所以对  $R(A)$  中的任意向量  $\beta = AX$ , 有  $(b - AX^*) \perp AX$ , 即

$$(AX, b - AX^*) = 0,$$

即  $(AX)^T(b - AX^*) = X^T A^T(b - AX^*) = 0$ .

由  $X$  的任意性, 有  $A^T(b - AX^*) = 0$ , 即  $X^*$  是  $A^T AX = A^T b$  的解. 我们把方程组

$$AA^T X = A^T b \quad (7.49)$$

称为正规方程.

**定理 2** (i) 若  $r(A_{n \times s}) = s$ , 则 (7.49) 式有唯一解.

(ii) 若  $r(A) < s$ , 则 (7.49) 式有无穷多解.

**证** (i)  $A^T A$  是  $s$  阶矩阵, 根据  $r(A^T A) = r(A) = s$  (见第 3.3 节例 4), 所以正规方程有唯一解, 且解为

$$X^* = (A^T A)^{-1} A^T b. \quad (7.50)$$

(ii) 只需证明:  $r[A^T A, A^T b] = r(A^T A)$ . (留作练习) ■

**推论** 若  $r(A) = s$ , 则

$$(b)_{R(A)} = AX^* = A(A^T A)^{-1} A^T b = Pb, \quad (7.51)$$

其中  $P = A(A^T A)^{-1} A^T$ ,

称为投影矩阵,  $P$  满足

(i)  $P^2 = P$  ( $P$  是幂等矩阵),

(ii)  $P^T = P$  ( $P$  是对称阵).

(证明留作练习).

**定理 3** 当  $r(A_{n \times s}) = s$  时, 不相容方程组  $AX = b$  的最小二乘解  $X^*$  是正规方程 (7.49) 的解, 即  $X^* = (A^T A)^{-1} A^T b$ .

证 最小二乘解  $X^*$  满足: 对一切  $X \in R^*$ ,

$$|b - AX^*| \leq |b - AX|. \quad (7.52)$$

由于  $AX^*, AX \in R(A)$ , 当  $AX^* = (b)_{R(A)}$  时, 即  $(b - AX^*) \perp R(A)$ ,  $|b - AX^*|$  是  $b$  到  $R(A)$  的垂直距离, 满足 (7.52) 式, 由定理 1,  $X^*$  是正规方程的解. ■

例 弹簧在弹性限度内的伸长  $x$  与所受的拉力  $y$  满足关系式

$$y = a + bx. \quad (1)$$

试由下列数据, 确定弹性系数  $b$ .

$x_i(\text{cm})$	2.6	3.0	3.5	4.3
$y_i(\text{kg})$	0	1	2	3

解 将表格数据代入 (1) 式得

$$\begin{cases} a + 2.6b = 0, \\ a + 3.0b = 1, \\ a + 3.5b = 2, \\ a + 4.3b = 3. \end{cases} \quad (2)$$

记作  $AX=Y$ ,

其中  $A = \begin{bmatrix} 1 & 2.6 \\ 1 & 3.0 \\ 1 & 3.5 \\ 1 & 4.3 \end{bmatrix}, X = \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}, Y = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}.$

(2) 式是不相容方程组, 其最小二乘解为

$$X^* = (A^T A)^{-1} A^T Y. \quad (3)$$

其中  $A^T A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2.6 & 3.0 & 3.5 & 4.3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2.6 \\ 1 & 3.0 \\ 1 & 3.5 \\ 1 & 4.3 \end{bmatrix}$

$$= \begin{bmatrix} 4 & 13.4 \\ 13.4 & 46.5 \end{bmatrix},$$

$$(A^T A)^{-1} = \frac{1}{6.44} \begin{bmatrix} 46.5 & -13.4 \\ -13.4 & 4 \end{bmatrix}, A^T Y = \begin{bmatrix} 6 \\ 22.9 \end{bmatrix}.$$

代入③式得

$$X^* = \begin{bmatrix} a_0 \\ b_0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -4.326 \\ 1.739 \end{bmatrix}.$$

所以弹簧的弹性系数  $b=b_0=1.739$  公斤/厘米. ■

欲将实验获得的一批数据  $(x_i, y_i)$  ( $i=1, 2, \dots, n$ ) 拟合于一条曲线, 以求得  $x, y$  之间的一个函数  $y=f(x)$ , 常采用最小二乘解法, 一般步骤如下:

(i) 将实验数据点  $(x_i, y_i)$ ,  $i=1, 2, \dots, n$ , 逐个描在坐标纸上, 根据点的分布状况, 判断  $x, y$  间的函数类型. 例如: 图 7.7 的情

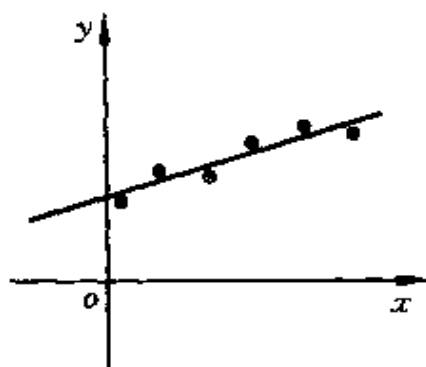


图 7.7

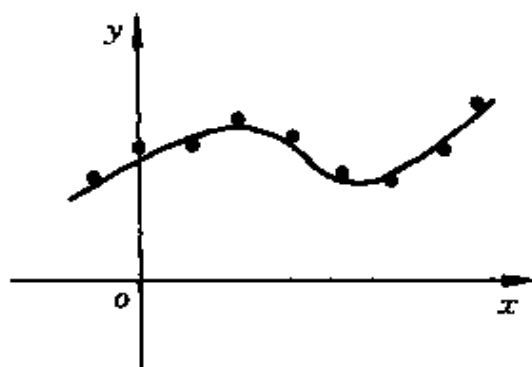


图 7.8

况, 可将实验数据点拟合于一条直线  $y=a+bx$ ; 图 7.8 的情况, 可拟合于一条三次曲线  $y=a+bx+cx^2+dx^3$ .

(ii) 将实验数据代入选定的函数关系, 得到一个非齐次线性方程组. 例如, 选  $y=f(x)$  是  $m$  次多项式

$$y = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_mx^m.$$

代入实验数据  $(x_i, y_i) (i=1, 2, \dots, n)$  得线性方程组

$$AX = Y, \quad (7.53)$$

其中 
$$A = \begin{bmatrix} 1 & x_1 & x_1^2 & \cdots & x_1^m \\ 1 & x_2 & x_2^2 & \cdots & x_2^m \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 1 & x_n & x_n^2 & \cdots & x_n^m \end{bmatrix}, X = \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ \vdots \\ a_m \end{bmatrix}, Y = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix}.$$

通常  $n \gg m$ , 且 (7.53) 式是不相容方程组. 但是, 只要  $x_1, x_2, \dots, x_n$  互异, 就有  $r(A) = m$  (读者自己证明), 因此方程组 (7.53) 的最小二乘解为

$$X' = [a_0, a_1, \dots, a_m]^T = (A^T A)^{-1} A^T Y,$$

所得的曲线方程  $y = a_0 + a_1 x + \dots + a_m x^m$  在工程技术中通常称为**经验公式**. 这个经验公式是在假定了函数类型的情况下, 用最小二乘法求得的, 至于这个假定是否符合实验点所反映的客观数量关系, 用这个经验公式推测一般情况下某个  $x$  值对应的  $y$  值是否可靠, 则要用数理统计的方法作进一步的研究.

用最小二乘法对实验数据配曲线, 函数类型是不易确定的, 实际问题的函数类型是多种多样的, 并不局限于直线和多项式曲线. 有时将实验数据点  $(x_i, y_i), i=1, 2, \dots, n$ , 描出来后, 不易判断  $y = f(x)$  的函数形式, 但是, 如果把这  $n$  个点描在对数坐标纸上, 即令

$$x^* = \lg x, y^* = \lg y,$$

则  $n$  个点  $(x_i^*, y_i^*)$  的分布成直线 (如图 7.9), 这时, 可用最小二乘法将  $n$  个点  $(x_i^*, y_i^*)$  拟合于直线

$$y^* = a + bx^*,$$

即 
$$\lg y = a + b \lg x.$$

再令  $a = \lg c$ , 从而求得

$$y = cx^b.$$

这就是  $n$  个点  $(x_i, y_i)$  所拟合的最小二乘曲线.

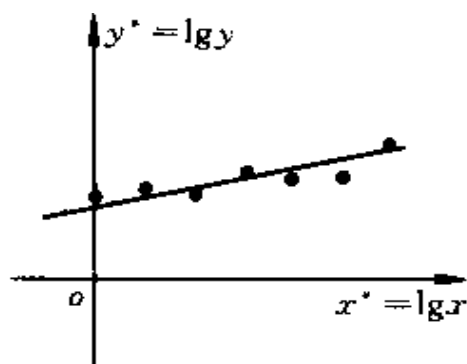


图 7.9

## 习题 补充题 答案

### 习题

1. 设一群动物分成两个年龄组, 每个年龄组的区间长度为一  
年, 其 Leslie 矩阵为

$$L = \begin{bmatrix} 1 & 1/5 \\ 1/2 & 0 \end{bmatrix}.$$

若起始时第 1, 2 年龄组动物头数分别为 100 和 10, 问: 五年内两  
个年龄组的动物每年各递增多少? 动物总数递增多少? 并求过了  
整五年, 两组动物的分布比例.

2. 设一群动物分成四个年龄组, 最大年龄为 8 岁, 已知: 生育  
率  $a_1 = 0, a_2 = 20/9, a_3 = 15/32, a_4 = 0$ ; 存活率  $b_1 = 9/10, b_2 = 8/9, b_3 = 7/8$ ; 开始时, 各组动物头数均为 100. 问: 八年内, 每隔两年各年  
龄组动物和四组动物总数分别递增(减)多少? 并求四组动物的分  
布比例.

3. 求下列 Leslie 矩阵的特征值及严格优势特征值, 并求相应  
于严格优势特征值的特征向量.



$$\begin{aligned}
 (1) & \begin{bmatrix} 0 & \frac{5}{4} & 0 \\ \frac{4}{5} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{3}{4} & 0 \end{bmatrix}, (2) \begin{bmatrix} 0 & \frac{5}{4} & \frac{75}{64} \\ \frac{4}{5} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{3}{4} & 0 \end{bmatrix}, \\
 (3) & \begin{bmatrix} 0 & \frac{20}{9} & \frac{15}{32} & 0 \\ \frac{9}{10} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{8}{9} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{7}{8} & 0 \end{bmatrix}, (4) \begin{bmatrix} \frac{1}{6} & \frac{13}{32} & \frac{1}{4} \\ \frac{2}{3} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{4} & 0 \end{bmatrix}.
 \end{aligned}$$

4. 设动物群的每个年龄组的年龄区间长度为 1 年, 其 Leslie 矩阵为上题的 (2), (3), (4). 问:

(1)  $k$  年以后 ( $k$  充分大), 动物总数每年递增多少? 各年龄组动物各占总数百分之几? 此时的年龄分布状况与起始分布有无关系?

(2) 对于上题 (3) 中的  $L$  矩阵, 已知起始年龄分布向量  $X^{(0)} = [100, 100, 100, 100]^T$ , 试求  $X^{(1)}, X^{(2)}, X^{(3)}, X^{(4)}$ , 并计算每年递增百分之几?

5. 对第 3 题中的  $L$  矩阵, 求净再生率  $R$ .

6. 证明: 人口增长过程充分久以后, (1) 人口总数增加当且仅当净再生率  $R > 1$ ; (2) 人口总数减少当且仅当净再生率  $R < 1$ .

7 某班男女生在节日互赠贺卡, 初始每位女生互赠贺卡, 男生不参加赠卡. 以后每次节日女生收到来自女生和男生赠的贺卡各占 70% 和 30%, 男生收到来自男生和女生的贺卡各占 80% 和 20%. 问经过  $n$  次节日, 男女生收到贺卡的概率为多少? ( $n=1, 2, \dots, 5$ , 及  $n \rightarrow \infty$ )

8. 一卡可从三家图书馆出借图书. 读者借书初始概率向量  $X(0)=[0,1,0]^T$ , 转移概率为

$$P = \begin{bmatrix} 0.8 & 0.3 & 0.2 \\ 0.1 & 0.2 & 0.6 \\ 0.1 & 0.5 & 0.2 \end{bmatrix},$$

问  $n$  次借阅 ( $n=1,2,\dots,5, n \rightarrow \infty$ ) 后, 该卡从每家图书馆借阅的概率为多少?

9. 设  $P$  是  $m$  阶概率转移矩阵, 若  $P$  的每行行和都等于 1 (称每行行和与每列列和均为 1 的非负矩阵为**双随机矩阵**), 问它的稳定概率向量是什么?

10.  $m$  个城市  $s_1, \dots, s_m, s_i$  在时刻  $t (t=0,1,\dots,n)$  空气污染的浓度为  $x_i(t)$ , 从  $t$  到  $t+1$   $s_r$  的污染物扩散到  $s_i$  的比例为  $p_{ij} (0 \leq p_{ij} \leq 1)$ , 扩散到  $s_1, \dots, s_r (r=m-3)$  的污染物被吸收,  $s_{m-2}, s_{m-1}, s_m$  的概率转移矩阵为

$$P_2 = \begin{bmatrix} 1/3 & 1/3 & 0 \\ 0 & 1/3 & 2/3 \\ 1/3 & 1/3 & 1/3 \end{bmatrix}.$$

求污染物从第  $j$  个 ( $j=m-2, m-1, m$ ) 城市出发被某个城市  $s_k (k=1, \dots, r)$  吸收的平均转移次数等多少?

11. 下列直接消耗矩阵  $C$ , 矩阵  $I-C$  是否可逆? (检查是否满足条件(7.29))

$$(1) \begin{bmatrix} 0.8 & 0.1 \\ 0.3 & 0.6 \end{bmatrix}, (2) \begin{bmatrix} 0.70 & 0.30 & 0.25 \\ 0.10 & 0.25 & 0.25 \\ 0.15 & 0.05 & 0.25 \end{bmatrix}, (3) \begin{bmatrix} 0.7 & 0.3 & 0.2 \\ 0.1 & 0.4 & 0.3 \\ 0.2 & 0.4 & 0.1 \end{bmatrix}.$$

12. 由土建师、电气师和机械师三人组成一个技术服务社. 他们商定, 每人收入 1 元需他人提供的服务数为: “电”、“机”给“土”的分别为 0.1 元, 0.3 元; “土”、“机”给“电”的分别为 0.2 元, 0.4 元; “土”、“电”给“机”的分别为 0.3 元, 0.4 元. 各人不必为自己提

供服务数. 如在一段时间内, “土”、“电”“机”三人为外部服务的收入分别为 500 元、700 元、600 元, 问这段时间内, 每人实际收入各是多少元?

13. 已知由三个企业组成的某经济系统, 在一个生产周期内的直接消耗系数矩阵  $C$  及系统外部需求向量  $d$  为:

$$C = \begin{bmatrix} 0.2 & 0.1 & 0.2 \\ 0.1 & 0.2 & 0.2 \\ 0.1 & 0.1 & 0.1 \end{bmatrix}, d = \begin{bmatrix} 75 \\ 120 \\ 225 \end{bmatrix}.$$

(1) 求各企业的总产值  $x_1, x_2, x_3$ ;

(2) 求各企业消耗其它(包括自身)企业的产值数  $x_{ij}$  (即第  $j$  个企业消耗第  $i$  个企业的产值数,  $i, j = 1, 2, 3$ ), 及各企业的净产值  $z_j$  ( $j = 1, 2, 3$ ).

14. 一个包括三个部门的经济系统, 已知计划报告期直接消耗系数矩阵为

$$C = \begin{bmatrix} 0.20 & 0.20 & 0.3125 \\ 0.14 & 0.15 & 0.25 \\ 0.16 & 0.50 & 0.1875 \end{bmatrix}.$$

(1) 如外部需求向量  $d = [60, 55, 120]^T$ , 求各部门总产值.

(2) 如外部需求向量  $d = [70, 55, 120]^T$ , 求各部门总产值.

15. 五个城市之间的铁路线连接以邻接矩阵  $M$  表示, 已知  $a_{12} = a_{21} = a_{31} = a_{13} = a_{33} = 1$  其余的  $a_{ij}$  为零, 试画出图. 问任何两城市之间可否经铁路连通?

16. 五支足球队的锦标赛, 每二队只赛一次, 结果为:  $A$  胜  $B, C, D$ ;  $B$  胜  $C, E$ ;  $C$  胜  $D, E$ ;  $D$  胜  $B$ ;  $E$  胜  $A, D$ .

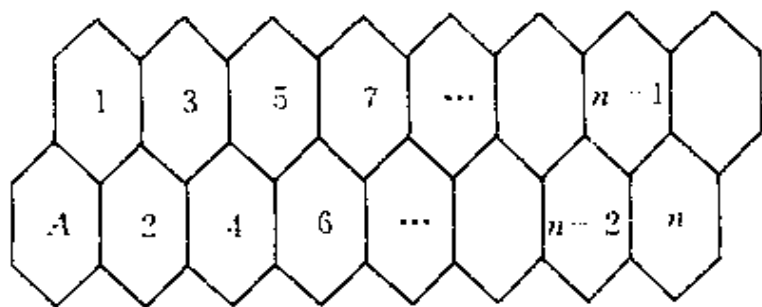
(1) 画出比赛结果图; 给出邻接矩阵  $M$ ;

(2) 评出五支球队的名次.

17. 年初一对小兔(一雌一雄)一个月长大, 至第二月就繁殖出一雌一雄的一对小兔, 以后凡成熟一对就繁殖出雄雌一对小兔.

问一年半后共有多少对兔子？

18. 一只蜜蜂自蜂房  $A$  爬到第  $n$  号蜂房, 每次都从一个蜂房爬向右侧邻近的蜂房而不会逆行(向左). 问有多少种不同的爬行方式?



题 18 图

19. 用矩阵方法解递归关系式:

$$u_n = u_{n-1} + 2u_{n-2}, \quad u_1 = 0, \quad u_2 = 1.$$

20. 设数列  $\{a_k\}$ :  $0, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{3}{8}, \frac{5}{16}, \frac{11}{32}, \dots$  从第三个数起, 每个数是前两个数的平均值, 即

$$a_{k+2} = \frac{1}{2}(a_{k+1} + a_k), \quad k = 0, 1, 2, \dots.$$

且  $a_0 = 0, a_1 = \frac{1}{2}$ , 试求  $a_k$ , 并求  $a_k$  的极限值.

21. 解一阶线性常系数齐次微分方程组的初值问题

$$(1) \quad \begin{cases} \frac{dU}{dt} = AU, \\ U(0) = U_0 \end{cases}, \quad A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & -1 \end{bmatrix}, \quad U_0 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

(2) 方程同(1), 其中

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 4 \\ 4 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 4 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad U(0) = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

22. 求下列微分方程组的一般解:

$$(1) \begin{cases} \frac{dx_1}{dt} = 3x_1 + 2x_2 + 4x_3, \\ \frac{dx_2}{dt} = 2x_1 + 2x_3, \\ \frac{dx_3}{dt} = 4x_1 + 2x_2 + 3x_3. \end{cases} \quad (2) \begin{cases} \frac{dx_1}{dt} = x_1 + 3x_2, \\ \frac{dx_2}{dt} = 3x_1 + 4x_2 - x_3, \\ \frac{dx_3}{dt} = -x_2 + x_3. \end{cases}$$

23. 求方程组  $AX=b$  的最小二乘解, 并求向量  $b$  在矩阵  $A$  的列空间  $R(A)$  上的投影向量和  $b$  到  $R(A)$  的距离.

$$(1) A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, b = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix}.$$

$$(2) A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -1 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, b = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

24. 设

$$\alpha_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \alpha_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \alpha_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \alpha_4 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, b = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

求: (1)  $b$  在  $L(\alpha_1, \alpha_2)$  上的投影向量和  $b$  到  $L(\alpha_1, \alpha_2)$  的距离;

(2)  $b$  在  $L(\alpha_2, \alpha_3, \alpha_4)$  上的投影向量和  $b$  到  $L(\alpha_2, \alpha_3, \alpha_4)$  的距离.

25. 证明: 投影矩阵  $P = A(A'A)^{-1}A'$  是幂等的对称矩阵, 即  $P^2 = P, P' = P$ .

26. 设

$$A = \begin{bmatrix} 1 & x_1 & x_1^2 & \cdots & x_1^m \\ 1 & x_2 & x_2^2 & \cdots & x_2^m \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 1 & x_n & x_n^2 & \cdots & x_n^m \end{bmatrix},$$

证明:当  $n > m$  时,秩  $A = m + 1$  的充要条件是

$x_1, x_2, \dots, x_n$  中至少有  $m + 1$  个互不相同.

27. 求拟合于三个点  $(0, 0), (1, 2), (2, 7)$  的最小二乘直线.

28. 求拟合于四个点  $(0, 1), (2, 0), (3, 1), (3, 2)$  的最小二乘直线.

29. 用最小二乘法,将四个点  $(2, 0), (3, -10), (5, -48), (6, -76)$  拟合于二次多项式曲线.

30. 用最小二乘法将五个点  $(-1, -14), (0, -5), (2, -22), (1, -4), (2, 1)$  拟合于三次多项式曲线.

31. 某商店在一年的前五个月的营业额曲线为二次多项式曲线,已知前五个月的营业额为 4.0, 4.4, 5.2, 6.4 和 8.0 万元.试用最小二乘法求营业额曲线,并估计 12 月份的营业额.

32. 由牛顿第二定律可得到,物体在地球表面附近垂直下落的运动方程为

$$s = s_0 + v_0 t + \frac{1}{2} g t^2.$$

利用这个方程,通过实验测定  $g$ ,已知实验数据为:

$t$ (秒)	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5
$s$ (英尺)	-0.18	0.31	1.03	2.48	3.73

试用最小二乘法求  $g$  的近似值.

### 补充题

33. 生物的外部表征由体内两个基因  $(A, a)$  组成的基因对

$AA, Aa, aa$  所确定. 例如三种基因对确定某种花的三种颜色. 常染色体的遗传是, 母体双方各自的两个基因等可能地遗传给后代一个. 因此母体基因型与后代基因型的关系如下表:

		母体(双方)基因型					
		$AA-AA$	$AA-Aa$	$AA-aa$	$Aa-Aa$	$Aa-aa$	$aa-aa$
后代基因型	$AA$	1	$\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{4}$	0	0
	$Aa$	0	$\frac{1}{2}$	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
	$aa$	0	0	0	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	1

例如第四列表示: 母体皆为  $Aa$  型时, 其后代为  $AA, Aa, aa$  型的可能性分别为  $\frac{1}{4}, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}$ .

(1) 设某植物有三种基因型, 如果它们总是都与  $Aa$  型结合进行繁殖, 问繁殖到第  $n$  代时, 三种基因型植物占总数的百分数  $a_n, b_n, c_n$  各为多少? 并求其极限值. (假定繁殖开始时的初始分布为  $a_0, b_0, c_0$ , 且  $a_0 + b_0 + c_0 = 1$ .)

(2) 在(1)中的植物, 如果初始时都与  $AA$  型结合, 第一代都与  $Aa$  型结合, 第二代又都与  $AA$  型结合, 如此交替下去, 求  $a_n, b_n, c_n$  及其极限值.

## 答案

$$7. \quad X_1 = [0.3, 0.7]^T, X_2 = [0.45, 0.55]^T, X_3 = [0.581, 0.419]^T, X_n = [0.6, 0.4]^T, \quad (n \geq 11).$$

$$8. \quad X_1 = [0.3, 0.2, 0.5]^T, \quad X_3 = [0.533, 0.240, 0.227]^T, \\ X_n = \frac{1}{61} [34, 14, 13]^T.$$

$$9. \quad 1/m.$$

10.  $Y = [y_{m-2}, y_{m-1}, y_m] = [9, 15, 27/2]$ .
15. 可达矩阵  $P$  中  $p_{i3} = 0; p_{i1} = 0, (i \neq 3)$  其余为 1.
16.  $A, E, B, C, D$
17. 第 18 个月有 2584 对.
18.  $F_n$ .
19.  $u_n = \frac{1}{3}(2^n + (-1)^{n-1})$ .
23. (1)  $[-9/11, 5/11]^T; [1, 4, -1]^T; 2$ .  
(2)  $[0, 1/2, 3/4]^T; [-1, 1, -1, 1]^T; \sqrt{3}$ .
24. (1)  $[5, 9, 9, 9]^T; \sqrt{195}$ . (2)  $[0, 4, 6, 6]^T; \sqrt{57}$ .
26. 利用范德蒙行列式的结论.
27.  $y = 7x/2 - 1/2$ .
28.  $y = x/6 + 2/3$ .



## 附录 A 内积空间 厄米特二次型

在  $R^n$  中,不仅有线性空间的加法和数量乘法运算,而且还定义了内积运算,使向量具有几何度量性.向量的度量性质在分析、几何等许多问题中是不可缺少的.因而,我们有必要对一般的实数域和复数域上的线性空间,定义内积运算,使之成为内积空间.我们将在附录 A.1 中讨论实数域上的内积空间,在附录 A.3 中讨论复内积空间(酉空间).

### A.1 实内积空间 欧氏空间

在线性空间的定义中,集合是抽象的,两种线性运算也是抽象的,运算由性质来约定.因此在抽象的线性空间中,也是由性质来约定内积运算.

**定义 1** 设  $V$  是实数域  $R$  上的线性空间,我们对  $V$  中任两个向量  $\alpha, \beta$  确定一个实数  $(\alpha, \beta)$ , 如果它具有以下性质:

- (i)  $(\alpha, \beta) = (\beta, \alpha)$ ;
- (ii)  $(k\alpha, \beta) = k(\alpha, \beta)$ ;
- (iii)  $(\alpha + \beta, \gamma) = (\alpha, \gamma) + (\beta, \gamma)$ ;
- (iv)  $(\alpha, \alpha) \geq 0$ , 等号成立当且仅当  $\alpha = 0$ .

(其中  $\alpha, \beta, \gamma \in V, k \in R$ .) 就称  $(\alpha, \beta)$  是  $\alpha$  与  $\beta$  的内积. 在实数域上定义了内积的  $V$  称为实内积空间, 有限维实内积空间叫做 Euclid 空间(欧氏空间).

定义中性质(i)表明内积是对称的, 因此与(ii), (iii)相当的就有:

$$\begin{aligned}(\alpha, k\beta) &= (k\beta, \alpha) = k(\beta, \alpha) = k(\alpha, \beta); \\(\alpha, \beta + \gamma) &= (\beta + \gamma, \alpha) = (\beta, \alpha) + (\gamma, \alpha) \\&= (\alpha, \beta) + (\alpha, \gamma),\end{aligned}$$

在性质(ii)中取  $k=0$ , 就有  $(O, \beta) = 0$ . 所以线性空间中任何元素与零元素的内积都等于零.

根据内积定义的第(iv)条性质, 我们可用内积定义向量的长度.

**定义 2** 实数域  $R$  上的内积空间  $V$  中向量  $\alpha$  的长度定义为

$$\|\alpha\| = \sqrt{(\alpha, \alpha)}.$$

**例 1** 两个重要的实内积空间

(i)  $R^n$  上定义内积为

$$(\alpha, \beta) = a_1b_1 + a_2b_2 + \cdots + a_nb_n, \quad (\text{A. 1})$$

其中  $\alpha = (a_1, a_2, \cdots, a_n)^T$ ,  $\beta = (b_1, b_2, \cdots, b_n)^T$ .

容易验证(A. 1)满足内积的四条性质,  $R^n$  关于这个内积就构成一个  $n$  维欧氏空间, 这个内积称为  $R^n$  的标准内积, 此时, 向量  $\alpha$  的长度

$$\|\alpha\| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + \cdots + a_n^2}.$$

(ii) 在区间  $[a, b]$  上一切连续的实值函数构成的线性空间  $C[a, b]$  上,  $\forall f(x), g(x)$ , 定义

$$(f, g) = \int_a^b f(x)g(x)dx. \quad (\text{A. 2})$$

(A. 2)是  $f(x)$  与  $g(x)$  的内积, 因为它满足内积的四条性质, 如验证满足(iii)条.

设  $f, g, h \in C[a, b]$ , 则

$$\begin{aligned}(f + g, h) &= \int_a^b (f(x) + g(x))h(x)dx \\&= \int_a^b [f(x)h(x) + g(x)h(x)]dx\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \int_a^b f(x)h(x)dx + \int_a^b g(x)h(x)dx \\
&= (f, h) + (g, h).
\end{aligned}$$

这个内积称为  $C[a, b]$  上的标准内积.

在  $R^n$  中定义内积的方法不是唯一的, 例如,

**例 2** 在  $R^2$  中, 对任意的  $\alpha = (a_1, a_2), \beta = (b_1, b_2)$ , 定义

$$(\alpha, \beta) = a_1b_1 - a_2b_1 - a_1b_2 + 3a_2b_2, \quad (1)$$

容易验证它也满足内积的四条性质, 我们验证第(iv)条:

$$(\alpha, \alpha) = a_1^2 - 2a_1a_2 + 3a_2^2 = (a_1 - a_2)^2 + 2a_2^2 \geq 0,$$

其等号成立当且仅当  $a_1 = a_2 = 0$ , 即  $\alpha = O$ .

故①式也是  $R^2$  的一个内积, 此时向量  $\alpha$  的长度  $\|\alpha\| = \sqrt{(a_1 - a_2)^2 + 2a_2^2}$ .

关于这个内积, 对  $\alpha = (1, 0)$  和  $\beta = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$ ,

有  $\|\alpha\| = \|\beta\| = 1, (\alpha, \beta) = 0$ .

实内积空间的距离同  $R^n$  标准内积所定义的距离有相同的几何解释.

**定理 1** 若  $V$  是一个实内积空间, 则对任意的  $\alpha, \beta \in V$  和  $\lambda \in R$ , 有,

- (i)  $\|\lambda\alpha\| = |\lambda| \|\alpha\|$ ;
- (ii)  $|(\alpha, \beta)| \leq \|\alpha\| \|\beta\|$ ; (Cauchy-Schwarz 不等式)
- (iii)  $\|\alpha + \beta\| \leq \|\alpha\| + \|\beta\|$ . (三角不等式)

证 (i)  $\|\lambda\alpha\| = \sqrt{(\lambda\alpha, \lambda\alpha)} = \sqrt{\lambda^2(\alpha, \alpha)} = |\lambda| \sqrt{(\alpha, \alpha)} = |\lambda| \|\alpha\|$ .

(ii), (iii) 的证明与正文 4.2 节中相同结论的证明是一样的.

把 Cauchy-Schwarz 不等式应用于内积空间  $C[a, b]$ , 可以得到以下不等式

$$\left| \int_a^b f(x)g(x)dx \right| \leq \left( \int_a^b f^2(x)dx \right)^{1/2} \left( \int_a^b g^2(x)dx \right)^{1/2}.$$

证明了 Cauchy-Schwarz 不等式,我们就可以用内积定义两个向量的夹角.

**定义 3** 对于实内积空间  $V$  中的两个非零向量  $\alpha, \beta$ , 定义其夹角

$$\langle \alpha, \beta \rangle = \arccos \frac{(\alpha, \beta)}{\|\alpha\| \|\beta\|}.$$

显然, 当且仅当  $(\alpha, \beta) = 0$  时两个非零向量  $\alpha, \beta$  相互垂直. 由于零向量与任何向量的内积等于零, 所以我们也说零向量与任何向量正交, 于是有下面定义.

**定义 4** 实内积空间  $V$  中两个向量  $\alpha, \beta$ , 如果  $(\alpha, \beta) = 0$ , 则称  $\alpha$  与  $\beta$  正交, 记作  $\alpha \perp \beta$ .

**例 3** 对  $C[-1, 1]$  给定的标准内积, 证明函数

$$P_1(x) = x, \quad P_2(x) = \frac{1}{2}(3x^2 - 1)$$

是正交的, 并求它们的长度.

**证**

$$(P_1, P_2) = \int_{-1}^1 P_1(x) P_2(x) dx = \frac{1}{2} \int_{-1}^1 (3x^3 - x) dx = 0.$$

因此  $P_1$  和  $P_2$  是正交的.

$P_1$  的长度为

$$\|P_1\| = \sqrt{\int_{-1}^1 P_1^2(x) dx} = \sqrt{\int_{-1}^1 x^2 dx} = \sqrt{\frac{2}{3}}.$$

$P_2$  的长度为

$$\|P_2\| = \sqrt{\int_{-1}^1 P_2^2(x) dx} = \sqrt{\frac{2}{5}}.$$

## A. 2 度量矩阵和标准正交基

对于一个  $n$  维实线性空间  $V$ , 要在其中定义内积  $(\alpha, \beta)$ , 只要

确定一组基间的内积就行了.

设  $\{\epsilon_1, \epsilon_2, \dots, \epsilon_n\}$  是  $V$  的一组基, 且

$$(\epsilon_i, \epsilon_j) = a_{ij}, \quad i, j = 1, 2, \dots, n. \quad (\text{A. 3})$$

对  $V$  中任意两个元素(向量)

$$\alpha = x_1 \epsilon_1 + x_2 \epsilon_2 + \dots + x_n \epsilon_n,$$

$$\beta = y_1 \epsilon_1 + y_2 \epsilon_2 + \dots + y_n \epsilon_n.$$

由内积的性质得

$$\begin{aligned} (\alpha, \beta) &= (x_1 \epsilon_1 + x_2 \epsilon_2 + \dots + x_n \epsilon_n, y_1 \epsilon_1 + y_2 \epsilon_2 + \dots + y_n \epsilon_n) \\ &= \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n (\epsilon_i, \epsilon_j) x_i y_j = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_{ij} x_i y_j. \end{aligned} \quad (\text{A. 4})$$

记

$$= \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (\epsilon_1, \epsilon_1) & (\epsilon_1, \epsilon_2) & \dots & (\epsilon_1, \epsilon_n) \\ (\epsilon_2, \epsilon_1) & (\epsilon_2, \epsilon_2) & \dots & (\epsilon_2, \epsilon_n) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ (\epsilon_n, \epsilon_1) & (\epsilon_n, \epsilon_2) & \dots & (\epsilon_n, \epsilon_n) \end{bmatrix}. \quad (\text{A. 5})$$

$\alpha, \beta$  在基  $\epsilon_1, \epsilon_2, \dots, \epsilon_n$  下的坐标列向量

$$X = [x_1, x_2, \dots, x_n]^T \text{ 和 } Y = [y_1, y_2, \dots, y_n]^T,$$

则(A. 4)式可以表示成矩阵形式

$$(\alpha, \beta) = X^T A Y. \quad (\text{A. 6})$$

我们把其中的矩阵  $A$  称为欧氏空间在基  $\{\epsilon_1, \epsilon_2, \dots, \epsilon_n\}$  下的度量矩阵, 简称基  $\{\epsilon_1, \epsilon_2, \dots, \epsilon_n\}$  的度量矩阵. 由于内积具有对称性, 所以度量矩阵  $A$  是实对称矩阵. 上面的讨论表明, 知道了欧氏空间一组基的度量矩阵  $A$ , 空间中任意两个元素的内积, 就可以通过其坐标向量按(A. 6)式来计算, 因而度量矩阵完全确定了内积.

**定理 2** 欧氏空间中两组不同基的度量矩阵是合同的.

**证** 设基  $\{\epsilon_1, \epsilon_2, \dots, \epsilon_n\}$  的度量矩阵为  $A$ , 将(A. 5)式中的  $A$  形式地表示成以向量(不一定是  $R^n$  中的向量)为元素的矩阵的乘积, 即

$$A = \begin{bmatrix} \epsilon_1 \\ \epsilon_2 \\ \vdots \\ \epsilon_n \end{bmatrix} [\epsilon_1, \epsilon_2, \dots, \epsilon_n]. \quad (\text{A. 7})$$

这里作矩阵乘法时,  $\epsilon_i$  和  $\epsilon_j$  相乘是指内积  $(\epsilon_i, \epsilon_j)$ .

设基  $\{\eta_1, \eta_2, \dots, \eta_n\}$  的度量矩阵为

$$B = \begin{bmatrix} \eta_1 \\ \eta_2 \\ \vdots \\ \eta_n \end{bmatrix} [\eta_1, \eta_2, \dots, \eta_n]. \quad (\text{A. 8})$$

基  $\{\epsilon_1, \epsilon_2, \dots, \epsilon_n\}$  到基  $\{\eta_1, \eta_2, \dots, \eta_n\}$  的过渡矩阵为  $C$ , 即

$$[\eta_1, \eta_2, \dots, \eta_n] = [\epsilon_1, \epsilon_2, \dots, \epsilon_n]C. \quad (\text{A. 9})$$

将(A. 9)式代入(A. 8)式, 得到

$$\begin{aligned} B &= C^T \begin{bmatrix} \epsilon_1 \\ \epsilon_2 \\ \vdots \\ \epsilon_n \end{bmatrix} [\epsilon_1, \epsilon_2, \dots, \epsilon_n]C \\ &= C^T A C, \end{aligned} \quad (\text{A. 10})$$

故  $A$  和  $B$  是合同的. ■

**例 4** 设  $\eta_1 = [1, 0, 0, 0]^T$ ,  $\eta_2 = [1, 1, 0, 0]^T$ ,  $\eta_3 = [1, 1, 1, 0]^T$ ,  $\eta_4 = [1, 1, 1, 1]^T$ , 求

$$\alpha = \eta_1 + \eta_2 + \eta_3 + \eta_4,$$

$$\beta = \eta_1 - \eta_2 + \eta_3,$$

在标准内积下的  $(\alpha, \beta)$ .

**解** 很明显  $\{\eta_1, \eta_2, \eta_3, \eta_4\}$  为  $R^4$  的一组基, 因此, 在基  $\{\eta_1, \eta_2,$

$\eta_3, \eta_4\}$ 下的度量矩阵为

$$A = \begin{bmatrix} (\eta_1, \eta_1) & (\eta_1, \eta_2) & (\eta_1, \eta_3) & (\eta_1, \eta_4) \\ (\eta_2, \eta_1) & (\eta_2, \eta_2) & (\eta_2, \eta_3) & (\eta_2, \eta_4) \\ (\eta_3, \eta_1) & (\eta_3, \eta_2) & (\eta_3, \eta_3) & (\eta_3, \eta_4) \\ (\eta_4, \eta_1) & (\eta_4, \eta_2) & (\eta_4, \eta_3) & (\eta_4, \eta_4) \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 3 & 3 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{bmatrix},$$

故有

$$(\alpha, \beta) = [1, 1, 1, 1] A \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} = 6.$$

也可用定理 2, 设  $\{\epsilon_1, \epsilon_2, \epsilon_3, \epsilon_4\}$  为自然基, 则  $\{\epsilon_1, \epsilon_2, \epsilon_3, \epsilon_4\}$  到  $\{\eta_1, \eta_2, \eta_3, \eta_4\}$  的过渡矩阵为

$$C = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

又已知自然基的度量矩阵为  $I$ , 所以基  $\{\eta_1, \dots, \eta_4\}$  的度量矩阵  $A = C^T I C = C^T C$ , 如此即得

$$(\alpha, \beta) = [1, 1, 1, 1] A \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} = [1, 1, 1, 1] C^T C \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} = 6. \quad \blacksquare$$

此外, 根据内积的性质(iv), 对于任意的非零向量  $\alpha$  (即  $\alpha$  在基  $\epsilon_1, \epsilon_2, \dots, \epsilon_n$  下的坐标向量  $X \neq 0$ ), 有

$$(\alpha, \alpha) = X^T A X > 0, \quad (\text{A. 11})$$

因此度量矩阵  $A$  是正定的.

我们在正文 6.4 节中讲过, 正定矩阵一定合同于单位矩阵, 即对于正定矩阵  $A$ , 存在可逆矩阵  $C$ , 使得

$$C^T A C = I.$$

因此, 由定理 2 可知, 欧氏空间中必存在满足关系

$$[\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n] = [\epsilon_1, \epsilon_2, \dots, \epsilon_n] C$$

的一组基  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ , 其度量矩阵为单位矩阵. 即

$$\begin{bmatrix} (\alpha_1, \alpha_1) & (\alpha_1, \alpha_2) & \cdots & (\alpha_1, \alpha_n) \\ (\alpha_2, \alpha_1) & (\alpha_2, \alpha_2) & \cdots & (\alpha_2, \alpha_n) \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ (\alpha_n, \alpha_1) & (\alpha_n, \alpha_2) & \cdots & (\alpha_n, \alpha_n) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & & & \\ & 1 & & \\ & & \ddots & \\ & & & 1 \end{bmatrix}. \quad (\text{A. 12})$$

于是

$$(\alpha_i, \alpha_j) = \begin{cases} 1, & j = i, \\ 0, & j \neq i, \end{cases} \quad i, j = 1, 2, \dots, n. \quad (\text{A. 13})$$

**定义 5** 设  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$  是  $n$  维欧氏空间  $V$  中的  $n$  个向量, 如果  $\alpha_i, \alpha_j$  满足 (A. 13) 式, 则称  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$  为**标准正交基**.

由于标准正交基的度量矩阵是单位阵, 因此当向量  $\alpha, \beta$  在标准正交基下的坐标向量为  $X$  和  $Y$  时, 其内积为  $(\alpha, \beta) = X^T Y$ . 以前在  $R^n$  中定义的内积, 正是在这种意义下的内积 (即把  $R^n$  中的向量自身作为自然标准正交基  $\epsilon_1, \epsilon_2, \dots, \epsilon_n$  下的坐标向量), 所以有时也把它称为**标准的内积**.

从上面的讨论过程中可知, 在一般的欧氏空间中, 一定存在标准正交基. 至于如何求得一组标准正交基, 我们仍采用 Schmidt 标准正交化方法. (读者不难证明, 这个方法也适用于一般的欧氏空间.)

**例 5** 在  $R[x]_3 = \{a_0 + a_1x + a_2x^2 \mid a_0, a_1, a_2 \in R\}$  中定义内积

$$(f, g) = \int_0^1 f(x)g(x)dx \quad (\text{A. 14})$$



试求  $R[x]_3$  在区间  $[0, 1]$  上关于该内积的一组标准正交基.

**解** 容易验证  $f_0=1, f_1=x, f_2=x^2$  是  $R[x]_3$  的一组基. 用 Schmidt 正交化方法可由这组基求得  $R[x]_3$  的一组标准正交基. 先正交化:

$$\text{取 } g_0 = f_0 = 1, |g_0|^2 = (g_0, g_0) = \int_0^1 1^2 dx = 1,$$

$$g_1 = f_1 - \left( \frac{(f_1, g_0)}{(g_0, g_0)} \right) g_0 = x - \frac{1}{1} \left( \int_0^1 x \cdot 1 dx \right) \cdot 1 = x - \frac{1}{2},$$

$$|g_1|^2 = (g_1, g_1) = \int_0^1 \left( x - \frac{1}{2} \right)^2 dx = \frac{1}{3} \left( x - \frac{1}{2} \right)^3 \Big|_0^1 = \frac{1}{12},$$

$$g_2 = f_2 - \frac{(f_2, g_1)}{(g_1, g_1)} g_1 - \frac{(f_2, g_0)}{(g_0, g_0)} g_0$$

$$= x^2 - 12 \left( x - \frac{1}{2} \right) \int_0^1 x^2 \left( x - \frac{1}{2} \right) dx - \int_0^1 x^2 \cdot 1 dx$$

$$= x^2 - \left( x - \frac{1}{2} \right) - \frac{1}{3} = x^2 - x + \frac{1}{6},$$

$$|g_2|^2 = (g_2, g_2) = \int_0^1 \left( x^2 - x + \frac{1}{6} \right)^2 dx = \frac{1}{180}. \text{ 再单位化, 得}$$

$$p_0 = g_0 / |g_0| = 1,$$

$$p_1 = g_1 / |g_1| = \sqrt{3} (2x - 1),$$

$$p_2 = g_2 / |g_2| = \sqrt{5} (6x^2 - 6x + 1),$$

则  $p_0, p_1, p_2$  是  $R[x]_3$  的一组标准正交基. 它是  $R[x]_3$  中关于 (A. 14) 式, 内积的一组标准正交多项式. ■

### A. 3 复向量的内积 酉空间

本节介绍复数域上线性空间的内积和酉空间.

**定义 6** 设  $V$  是复数域  $K$  上的一个线性空间, 我们对  $V$  中任意两个向量  $\alpha, \beta$  确定一个复数  $(\alpha, \beta)$ , 如果它具有以下性质:

$$(i) (\alpha, \beta) = \overline{(\beta, \alpha)};$$

$$(ii) (k\alpha, \beta) = k(\alpha, \beta);$$

$$(iii) (\alpha + \beta, \gamma) = (\alpha, \gamma) + (\beta, \gamma);$$

(iv)  $(\alpha, \alpha) \geq 0$ , 等号成立当且仅当  $\alpha = O$ . (其中  $\alpha, \beta, \gamma \in V, k \in K$ .) 就把  $(\alpha, \beta)$  称为  $\alpha$  与  $\beta$  的内积, 把这个复数域上的线性空间  $V$  称为酉空间.

$$\text{必须注意, } (\alpha, k\beta) = \overline{(k\beta, \alpha)} = \overline{k(\beta, \alpha)} = \bar{k}(\alpha, \beta),$$

$$(O, \beta) = (0\alpha, \beta) = 0(\alpha, \beta) = 0.$$

**例 6** 设列向量  $\alpha = [a_1, a_2, \dots, a_n]^T$  和  $\beta = [b_1, b_2, \dots, b_n]^T$  是  $n$  维复向量空间  $K^n$  中的任两个向量, 我们定义  $\alpha, \beta$  的运算为

$$(\alpha, \beta) = a_1 \bar{b}_1 + a_2 \bar{b}_2 + \dots + a_n \bar{b}_n, \quad (A. 15)$$

则(A. 15)所定义的运算为内积.

**解** 显然  $(\alpha, \beta) = \bar{\beta}^T \alpha$ . 由(A. 15)式, 得

$$\begin{aligned} \overline{(\beta, \alpha)} &= \overline{a_1 b_1 + a_2 b_2 + \dots + a_n b_n}, \\ &= \bar{b}_1 a_1 + \bar{b}_2 a_2 + \dots + \bar{b}_n a_n = (\alpha, \beta). \end{aligned}$$

于是性质(i)成立.

性质(ii)和性质(iii)的验证比较容易. 这里再验证性质(iv), 因为

$$(\alpha, \alpha) = a_1 \bar{a}_1 + a_2 \bar{a}_2 + \dots + a_n \bar{a}_n,$$

其中  $a_i \bar{a}_i = |a_i|^2 \geq 0, i = 1, 2, \dots, n$ . 所以  $(\alpha, \alpha) \geq 0$ , 且  $(\alpha, \alpha) = 0$  当且仅当  $|a_i| = 0, i = 1, 2, \dots, n$ , 即  $\alpha = [a_1, a_2, \dots, a_n]^T = O$ .

由性质(iv), 我们可以定义复向量的长度.

**定义 7** 设  $\alpha$  为酉空间  $V$  中的一个向量, 则定义  $\alpha$  的长度

$$\|\alpha\| = \sqrt{(\alpha, \alpha)}.$$

以下我们用  $|\dots|$  表示复数的模,  $\|\dots\|$  表示复向量的长度(或称范数).

**定理 3** 对于任意两个  $\alpha, \beta \in K^n$ , 都有

$$(i) |(\alpha, \beta)| \leq \|\alpha\| \|\beta\| \quad (\text{Cauchy-Schwarz 不等式}), \quad (A. 16)$$

$$(ii) \|\alpha + \beta\| \leq \|\alpha\| + \|\beta\| \quad (\text{三角不等式}). \quad (A. 17)$$

证 (i) 当  $\beta=0$  时, (A. 16) 式显然成立. 当  $\beta \neq 0$  时,

$$(\alpha+k\beta, \alpha+k\beta) = (\alpha, \alpha) + |k|^2(\beta, \beta) + k(\beta, \alpha) + \bar{k}(\alpha, \beta).$$

由于式中  $\bar{k}(\alpha, \beta) = \overline{k(\beta, \alpha)} = \overline{k(\beta, \alpha)}$ , 又共轭复数之和等于其实部之和, 即  $z + \bar{z} = 2\operatorname{Re} z$ . 于是上式可写成

$$\begin{aligned} (\alpha+k\beta, \alpha+k\beta) &= (\alpha, \alpha) + |k|^2(\beta, \beta) + 2\operatorname{Re}\{\bar{k}(\alpha, \beta)\} \\ &= \|\alpha\|^2 + |k|^2\|\beta\|^2 + 2\operatorname{Re}\{\bar{k}(\alpha, \beta)\} \\ &\geq 0. \end{aligned} \quad (\text{A. 18})$$

取

$$k = -\frac{(\alpha, \beta)}{\|\beta\|^2},$$

则

$$|k|^2 = \bar{k}k = \frac{|(\alpha, \beta)|^2}{\|\beta\|^4}.$$

$$\bar{k}(\alpha, \beta) = -\frac{\overline{(\alpha, \beta)}}{\|\beta\|^2}(\alpha, \beta) = -\frac{|(\alpha, \beta)|^2}{\|\beta\|^2}.$$

于是(A. 18)式两边同乘  $\|\beta\|^2$ , 就得

$$\|\alpha\|^2\|\beta\|^2 \geq |(\alpha, \beta)|^2,$$

故

$$|(\alpha, \beta)| \leq \|\alpha\|\|\beta\|,$$

等号成立, 当且仅当  $\alpha+k\beta=0$ , 即  $\alpha, \beta$  线性相关.

(ii) 在(A. 18)式中, 取  $k=1$ , 利用  $\operatorname{Re}\{(\alpha, \beta)\} \leq |(\alpha, \beta)| \leq \|\alpha\|\|\beta\|$ , 就得

$$\|\alpha + \beta\|^2 = (\alpha + \beta, \alpha + \beta) \leq \|\alpha\|^2 + \|\beta\|^2 + 2\|\alpha\|\|\beta\|,$$

故

$$\|\alpha + \beta\| \leq \|\alpha\| + \|\beta\|. \quad \blacksquare$$

根据 Cauchy-Schwarz 不等式, 非零向量  $\alpha, \beta$  的夹角可定义为:

**定义 8** 对于酉空间中的两非零向量  $\alpha, \beta$  定义其夹角  $\langle \alpha, \beta \rangle$  为

$$\langle \alpha, \beta \rangle = \arccos \frac{(\alpha, \beta)}{\|\alpha\|\|\beta\|}, \quad 0 \leq \langle \alpha, \beta \rangle \leq \pi.$$

当  $(\alpha, \beta)=0$  时, 称  $\alpha$  与  $\beta$  正交或互相垂直, 记作  $\alpha \perp \beta$ .

当  $\alpha$  与  $\beta$  正交时, 由 (A. 18) 式取  $k=1$ , 立即得勾股定理

$$\|\alpha + \beta\|^2 = \|\alpha\|^2 + \|\beta\|^2$$

有限维酉空间与有限维欧氏空间一样, 也有基的度量矩阵; 也存在标准正交基; 也可用 Schmidt 正交化方法, 由一组基构造一组标准正交基. 但是要注意, 基  $\{\epsilon_1, \epsilon_2, \dots, \epsilon_n\}$  的度量矩阵  $A = [a_{ij}]$  中元素满足条件.

$$a_{ji} = (\epsilon_j, \epsilon_i) = \overline{(\epsilon_i, \epsilon_j)} = \overline{a_{ij}}, i, j = 1, 2, \dots, n. \quad (\text{A. 19})$$

故 
$$\overline{A^T} = A. \quad (\text{A. 20})$$

酉空间的基的度量矩阵  $A$  称为厄米特矩阵.

此外, 若  $\alpha, \beta$  在基  $\{\epsilon_1, \epsilon_2, \dots, \epsilon_n\}$  下的坐标向量为  $X$  和  $Y$  ( $X, Y \in K^n$ ), 则

$$(\alpha, \beta) = \overline{Y^T} A X, \quad (\text{A. 21})$$

$$(\alpha, \alpha) = \overline{X^T} A X = (A X, X). \quad (\text{A. 22})$$

(A. 22) 式称为复变量  $x_1, x_2, \dots, x_n$  的厄米特二次型.

## A. 4 酉矩阵和厄米特二次型

**定义 9** 若  $n$  阶复矩阵  $U$  满足条件

$$\overline{U^T} U = I, \quad (\text{A. 23})$$

则称  $U$  为酉矩阵.

酉矩阵有以下性质: (证明留给读者练习)

- (i) 酉矩阵的行列式的模为 1, 即  $|\det U| = 1$ ;
- (ii)  $U^{-1} = \overline{U^T}$ , 且  $\overline{U^T}$  仍是酉矩阵;
- (iii) 两个酉矩阵的乘积仍是酉矩阵;
- (iv) 酉矩阵的列向量组和行向量组都是  $K^n$  的标准正交基.

**定义 10** 若  $A = [a_{ij}]$  为  $n$  阶厄米特矩阵 ( $\overline{A^T} = A$ ), 则

$$\overline{X^T} A X = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_{ij} \overline{x_i} x_j, (a_{ji} = \overline{a_{ij}}), \quad (\text{A. 24})$$

称为  $x_1, x_2, \dots, x_n$  的厄米特二次型.

对于任意的  $X \in K^n$ , 厄米特二次型  $X^T A X$  都是实数, 这是因为

$$\overline{X^T A X} = \overline{(X^T A X)^T} = \overline{X^T A^T X} = \overline{X^T A X}.$$

**定理 4** 厄米特矩阵  $A$  的特征值都是实数, 且属于不同特征值的特征向量是正交的.

**证** 设  $AX = \lambda X, (X \neq 0)$ , 则

$$\overline{X^T A X} = \lambda \overline{X^T X} = \lambda (X, X),$$

$$\lambda = \frac{\overline{X^T A X}}{(X, X)}.$$

因为  $(X, X) > 0, \overline{X^T A X}$  为实数, 所以特征值  $\lambda$  是实数.

设  $AX_1 = \lambda_1 X_1, AX_2 = \lambda_2 X_2, \lambda_1, \lambda_2$  是不等的实数, 则

$$\begin{aligned} \lambda_1 \overline{X_2^T} X_1 &= \overline{X_2^T} A X_1 = \overline{(A X_2)^T} X_1 \\ &= \overline{\lambda_2 X_2^T} X_1 = \lambda_2 \overline{X_2^T} X_1. \end{aligned}$$

由于  $\lambda_1 \neq \lambda_2$ , 故  $\overline{X_2^T} X_1 = (X_1, X_2) = 0$ , 即特征向量  $X_1$  与  $X_2$  正交.

**定理 5** 对于任一个  $n$  阶厄米特矩阵  $A$ , 一定存在酉矩阵  $U$ , 使得

$$U^{-1} A U = \overline{U}^T A U = \text{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n),$$

其中  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$  是  $A$  的  $n$  个特征值,  $U$  的  $n$  个列向量是依次对应于  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$  的标准正交的特征向量.

定理 5 的证明与正文 5.3 节定理 3 的证法类似.

由定理 5 立即可得下面的定理.

**定理 6** 对于任一个厄米特二次型  $\overline{X^T} A X$ , 一定存在酉变换  $X = UY$ , 使得

$$\overline{X^T} A X = \overline{Y^T} (\overline{U}^T A U) Y = \lambda_1 \overline{y_1} y_1 + \lambda_2 \overline{y_2} y_2 + \dots + \lambda_n \overline{y_n} y_n.$$

在第五章中讲过, 不是任何矩阵都能与对角阵相似, 有了酉矩阵的概念, 可以证明任何矩阵都与上三角阵相似. 这个结论在实用上也很有意义.

**定理 7** 对于任一个实的或复的  $n$  阶矩阵,一定存在酉矩阵,使得

$$U^{-1}AU = \begin{bmatrix} \lambda_1 & * & \cdots & * \\ & \lambda_2 & \cdots & * \\ & & \ddots & \vdots \\ & & & \lambda_n \end{bmatrix}. \quad (\text{A.25})$$

可用数学归纳法证明这个定理,与定理 5 的证法基本上一样.

**推论.** 若实矩阵  $A$  的特征值全为实数,则存在正交矩阵  $Q$ ,使得  $Q^{-1}AQ$  成上三角阵.

## 习 题 答 案

### 习题

1. 设  $A$  是一个  $n$  阶正定矩阵,在  $R^n$  中对任两个向量  $\alpha = [x_1, x_2, \dots, x_n]^T, \beta = [y_1, y_2, \dots, y_n]^T$ , 定义

$$(\alpha, \beta) = \alpha^T A \beta.$$

(1) 证明在这个定义之下,  $R^n$  构成欧氏空间(即验证  $(\alpha, \beta)$  满足内积四条性质);

(2) 求  $R^n$  在自然基  $\epsilon_1, \epsilon_2, \dots, \epsilon_n$  下的度量矩阵;

(3) 写出这个空间的 Cauchy-Schwarz 不等式.

2. 设  $\alpha, \beta \in R^3$ , 以下哪些函数  $(\alpha, \beta)$  定义了  $R^3$  上的一个内积?

(1)  $(\alpha, \beta) = a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3 + 2a_2 b_3 - 2a_3 b_2;$

(2)  $(\alpha, \beta) = a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3 - a_2 b_3 - a_3 b_2;$

(3)  $(\alpha, \beta) = a_1^2 b_1^2 + a_2^2 b_2^2 + a_3^2 b_3^2;$

(4)  $(\alpha, \beta) = a_1 b_1 + a_3 b_3.$

3. 以下哪些函数定义了  $C[-1,1]$  上的一个内积?

$$(1) (f, g) = \int_{-1}^1 f^2(x)g^2(x)dx;$$

$$(2) (f, g) = \int_{-1}^1 xf(x)g(x)dx;$$

$$(3) (f, g) = \int_{-1}^1 x^2f(x)g(x)dx;$$

$$(4) (f, g) = - \int_{-1}^1 xf(x)g(x)dx;$$

$$(5) (f, g) = \int_{-1}^1 e^{-x}f(x)g(x)dx.$$

4. 设  $\{\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3, \varepsilon_4, \varepsilon_5\}$  是五维欧氏空间  $V$  的一组标准正交基;  
 $W = L(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$  其中  $\alpha_1 = \varepsilon_1 + \varepsilon_5, \alpha_2 = \varepsilon_1 - \varepsilon_2 + \varepsilon_4, \alpha_3 = 2\varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3$ ,  
求  $W$  的一组标准正交基.

5. 设  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$  是  $n$  维欧氏空间  $V$  的一组标准正交基. 证明:

(1) 如果  $\gamma \in V$ , 使  $(\gamma, \alpha_i) = 0, i = 1, 2, \dots, n$ , 则  $\gamma = 0$ ;

(2) 如果  $\gamma_1, \gamma_2 \in V$ , 使对任一个  $\alpha \in V$ , 有  $(\gamma_1, \alpha) = (\gamma_2, \alpha)$ , 则  $\gamma_1 = \gamma_2$ .

6. 在  $R[x]_4$  中定义内积  $(f, g) = \int_{-1}^1 f(x)g(x)dx$ ; 试求基  $1, x, x^2, x^3$  的度量矩阵, 并由这组基构造  $R[x]_4$  的一组标准正交基.

7. 证明在  $R[x]$  (全体实系数多项式) 中对任意两个多项式  $f(x), g(x)$ , 定义了

$$(f, g) = \int_0^{+\infty} f(x)g(x)e^{-x}dx$$

$R[x]$  就构成一个欧氏空间, 并用 Schmidt 正交化方法由  $f_0 = 1, f_1 = x, f_2 = x^2$  关于这个内积构造三个标准正交多项式.

8. 在  $K^{n \times n}$  中对任两个  $n$  阶复矩阵  $A, B$ , 定义  $(A, B) = \text{tr}(A \bar{B}^T)$ , 验证它满足内积的四条性质.

9. 证明: 对任何复矩阵  $B, A = B \bar{B}^T$  是厄米特矩阵.

10. 证明酉矩阵的四条性质.

11. 设  $U$  是  $n$  阶酉矩阵,  $X, Y$  是  $n$  维复的列向量, 证明  $(UX, UY) = (X, Y)$ .

12. 证明定理 5.

13. 证明定理 7.

14. 对下列厄米特矩阵, 求酉矩阵, 使得  $\bar{U}^T A U$  为对角阵.

$$(1) A = \begin{bmatrix} 1 & 2i \\ -2i & 1 \end{bmatrix}; (2) A = \begin{bmatrix} 2 & 3-3i \\ 3+3i & 5 \end{bmatrix}.$$

15. 设  $P_1, P_2$  均是  $m$  阶矩阵,

$$P = \begin{bmatrix} P_1 & A \\ 0 & P_2 \end{bmatrix}$$

是酉矩阵. 证明:  $A=0$ , 且  $P_1, P_2$  都是酉矩阵.

## 答案

1. (2)  $A$ ; (3)  $|(\alpha, \beta)| \leq \sqrt{\alpha^T A \alpha} \sqrt{\beta^T A \beta}$

2. (1) 满足; (2) 不满足; (3) 不满足; (4) 不满足;

3. (1) 不满足; (2) 不满足; (3) 满足; (4) 不满足; (5) 满足.

$$4. \frac{1}{\sqrt{2}}\epsilon_1 + \frac{1}{\sqrt{2}}\epsilon_5, \frac{1}{\sqrt{10}}\epsilon_1 - \frac{2}{\sqrt{10}}\epsilon_2 + \frac{2}{\sqrt{10}}\epsilon_4 - \frac{\epsilon_5}{\sqrt{10}}, \\ \frac{1}{2}\epsilon_1 + \frac{1}{2}\epsilon_2 + \frac{1}{2}\epsilon_3 - \frac{1}{2}\epsilon_5.$$

$$6. \begin{bmatrix} 2 & 0 & \frac{2}{3} & 0 \\ 0 & \frac{2}{3} & 0 & \frac{2}{5} \\ \frac{2}{3} & 0 & \frac{2}{5} & 0 \\ 0 & \frac{2}{5} & 0 & \frac{2}{7} \end{bmatrix}; \frac{\sqrt{2}}{2}, \sqrt{\frac{3}{2}}x, \frac{3}{4}\sqrt{10}\left(x^2 - \frac{1}{3}\right),$$



$$\frac{5}{4}\sqrt{14}\left(x^3-\frac{3}{5}x\right).$$

7. 三个标准正交多项式:  $1, x-1, \frac{1}{2\sqrt{2}}(x-2)^2$ .

$$14. (1) \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{-i}{\sqrt{2}} & \frac{i}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}; \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}.$$

$$(2) \begin{bmatrix} \frac{i-1}{\sqrt{6}} & \frac{i-1}{\sqrt{3}} \\ \frac{-2}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \end{bmatrix}; \begin{bmatrix} 8 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}.$$

15. 由定义和分块矩阵的性质证明.

## 附录 B 约当(Jordan)标准形(简介)

在第 5 章讲过,复数域上的  $n$  阶矩阵  $A$  与对角阵相似的充分必要条件是,  $A$  是  $n$  个线性无关特征向量,如果只有  $m$  个( $m < n$ )线性无关的特征向量,可以证明  $A$  一定与由约当块组成的约当形矩阵相似. 约当形矩阵的定义如下:

**定义 1** 我们把准对角矩阵

$$J = \begin{bmatrix} J_1 & & & \\ & J_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & J_s \end{bmatrix},$$

其中:

$$J_i = \begin{bmatrix} \lambda_i & 1 & & \\ & \lambda_i & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ & & & \lambda_i \end{bmatrix}, \quad i = 1, 2, \dots, s,$$

叫做约当形矩阵,  $J_i$  叫做约当块.

当  $J_1 = [\lambda_1]$ ,  $J_2 = [\lambda_2]$ ,  $\dots$ ,  $J_s = [\lambda_s]$  都是一阶约当块时,  $J$  为对角阵, 所以对角阵是约当形的特例.

$A$  和约当形矩阵相似, 即存在可逆阵  $P$ , 使得

$$P^{-1}AP = J = \begin{bmatrix} J_1 & & & \\ & J_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & J_s \end{bmatrix},$$

$J_i$  中的  $\lambda_i$  显然是  $A$  的特征值, 但当  $i \neq j$  时,  $\lambda_i$  和  $\lambda_j$  可能相等. 然

而,  $P$  中的列向量却并非都是  $A$  的特征向量.

我们把与  $A$  相似的约当形矩阵称为  $A$  的约当标准形.

约当标准形的理论比较复杂, 我们仅介绍这个理论的要点(不作证明)和求约当标准形的方法.

**定义 2** 若矩阵  $A = [a_{ij}]$  的元素  $a_{ij}$  是  $\lambda$  的多项式, 就称  $A$  为  $\lambda$  矩阵. 记作  $A(\lambda)$ .

例如  $A$  的特征矩阵  $\lambda I - A$  是一个  $\lambda$  矩阵.

$\lambda$  矩阵也可作初等变换, 它的三种初等变换为:

- (i) 矩阵的某行(列)乘以非零常数;
- (ii) 矩阵的某行(列)乘多项式  $\varphi(\lambda)$  加到另一行(列);
- (iii) 矩阵的两行(列)对换位置.

**定义 3**  $\lambda$  矩阵  $A(\lambda)$  经初等变换化为  $B(\lambda)$ , 称  $A(\lambda)$  与  $B(\lambda)$  是相抵的, 记作  $A(\lambda) \cong B(\lambda)$ .

**定理 1** 任一个  $n$  阶矩阵  $A$  的特征矩阵  $A(\lambda) = \lambda I - A$  都相抵于一个对角形  $\lambda$  矩阵, 即

$$A(\lambda) = (\lambda I - A) \cong \begin{bmatrix} d_1(\lambda) & & & \\ & d_2(\lambda) & & \\ & & \ddots & \\ & & & d_n(\lambda) \end{bmatrix} = D(\lambda), \quad (\text{B. 1})$$

且

$$A_k(\lambda) = D_k(\lambda) \quad (k = 1, 2, \dots, n), \quad (\text{B. 2})$$

其中 (i)  $d_i(\lambda)$  ( $i = 1, 2, \dots, n$ ) 是首一多项式(即  $\lambda$  的最高次项系数为 1);

(ii)  $d_i(\lambda) \mid d_{i+1}(\lambda)$  (即  $d_{i+1}(\lambda) = q_i(\lambda)d_i(\lambda)$ ,  $q_i(\lambda)$  也是  $\lambda$  的多项式)  $i = 1, 2, \dots, n-1$ ;

(iii)  $A_k(\lambda)$  和  $D_k(\lambda)$  分别表示  $A(\lambda)$  和  $D(\lambda)$  中全部  $k$  阶子式的最高公因式.

由定理的结论可知:

$$D_k(\lambda) = d_1(\lambda)d_2(\lambda)\cdots d_k(\lambda), k=1, 2, \cdots, n, \quad (\text{B. 3})$$

$$d_1(\lambda) = D_1(\lambda) = A_1(\lambda), \quad (\text{B. 4})$$

$$A_k(\lambda) = D_k(\lambda) = D_{k-1}(\lambda)d_k(\lambda) = A_{k-1}(\lambda)d_k(\lambda),$$

所以  $d_k(\lambda) = A_k(\lambda)/A_{k-1}(\lambda), k=2, 3, \cdots, n. \quad (\text{B. 5})$

由此可见,  $d_1(\lambda), d_2(\lambda), \cdots, d_n(\lambda)$  是由  $A(\lambda) = \lambda I - A$  唯一确定的, 它们称为  $\lambda I - A$  的**不变因子**. (以后简称为  $A$  的不变因子). 由于  $A_n(\lambda) = |\lambda I - A| = D_n(\lambda)$  是  $\lambda$  的  $n$  次多项式, 所以  $n$  个不变因子的次数和等于  $n$ .

**例 1** 求三阶矩阵

$$J = \begin{bmatrix} a & 1 & 0 \\ 0 & a & 1 \\ 0 & 0 & a \end{bmatrix}$$

的特征矩阵  $J(\lambda) = \lambda I - J$  的不变因子.

**解 法 1:** 根据 (B. 4) 式  $d_1(\lambda) = A_1(\lambda)$  及 (B. 5) 式  $d_k(\lambda) = A_k(\lambda)/A_{k-1}(\lambda)$  求不变因子.

先把

$$J(\lambda) = (\lambda I - J) = \begin{bmatrix} \lambda - a & -1 & 0 \\ 0 & \lambda - a & -1 \\ 0 & 0 & \lambda - a \end{bmatrix}$$

的所有一阶、二阶子式及三阶子式求出来, 然后容易求得它们的最高公因式分别为:

$$J_1(\lambda) = 1, J_2(\lambda) = 1, J_3(\lambda) = (\lambda - a)^3,$$

于是得  $J(\lambda)$  的不变因子:

$$d_1(\lambda) = J_1(\lambda) = 1, \quad d_2(\lambda) = J_2(\lambda)/J_1(\lambda) = 1,$$

$$d_3(\lambda) = J_3(\lambda)/J_2(\lambda) = (\lambda - a)^3.$$

**法 2:** 用初等变换, 把  $J(\lambda) = \lambda I - J$  化成 (B. 1) 的形式. (下面的  $\textcircled{i}$  表示第  $i$  行,  $[j]$  表示第  $j$  列)

$$(\lambda I - J) = \begin{bmatrix} \lambda - a & -1 & 0 \\ 0 & \lambda - a & -1 \\ 0 & 0 & \lambda - a \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{[1] + [2] \times (\lambda - a)} \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ (\lambda - a)^2 & \lambda - a & -1 \\ 0 & 0 & \lambda - a \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{\begin{matrix} \textcircled{2} + \textcircled{1} \times (\lambda - a) \\ [1] \leftrightarrow [2] \end{matrix}} \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & (\lambda - a)^2 & -1 \\ 0 & 0 & \lambda - a \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{[2] + [3] \times (\lambda - a)^2} \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & (\lambda - a)^3 & \lambda - a \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{\begin{matrix} \textcircled{3} + \textcircled{2} \times (\lambda - a) \\ [2] \leftrightarrow [3] \end{matrix}} \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & (\lambda - a)^3 & \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{\begin{matrix} \textcircled{1} \times (-1) \\ \textcircled{2} \times (-1) \end{matrix}} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & (\lambda - a)^3 \end{bmatrix},$$

故  $J(\lambda) = \lambda I - J$  的不变因子为  $1, 1, (\lambda - a)^3$ .

由于  $n$  次多项式在复数域上一定可以分解为  $n$  个一次因式的乘积, 因此  $\lambda I - A$  的次数  $\geq 1$  的不变因子都可以分解为若干个一次因式幂的乘积, 这些一次因式的幂称为  $\lambda I - A$  (或简称  $A$ ) 的初

等因子. 但是  $A(\lambda)$  的初等因子中, 同样的一次因式的幂可能重复出现. 如例 1 中  $J(\lambda) = \lambda I - J$  的初等因子为  $(\lambda - a)^2$ . 又如当

$$\lambda I - A \cong \begin{bmatrix} 1 & & & & \\ & 1 & & & \\ & & 1 & & \\ & & & (\lambda - 3)^2 & \\ & & & & (\lambda + 1)(\lambda - 3)^2 \end{bmatrix} \quad (\text{B. 6})$$

时,  $A$  的初等因子为  $(\lambda - 3)^2, (\lambda - 3)^2, (\lambda + 1)$ .

**定理 2**  $A \sim B$  的充要条件是  $\lambda I - A \cong \lambda I - B$ . (证明略)

由于相抵关系具有传递性, 所以  $\lambda I - A \cong \lambda I - B$  的充要条件是它们有完全相同的不变因子. 有相同的不变因子, 则必有相同的初等因子, 反之亦然. 于是有下面的定理.

**定理 3**  $A \sim B$  的充要条件是,  $\lambda I - A$  和  $\lambda I - B$  有完全相同的初等因子.

**定理 4** 若  $n$  阶矩阵  $A$  的特征矩阵  $\lambda I - A$  的初等因子为  $(\lambda - \lambda_1)^{m_1}, (\lambda - \lambda_2)^{m_2}, \dots, (\lambda - \lambda_k)^{m_k}$ , 其中  $\sum_{i=1}^k m_i = n$  则

$$A \sim J = \begin{bmatrix} J_1 & & & \\ & J_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & J_k \end{bmatrix}, \quad (\text{B. 7})$$

其中

$$J_i = \begin{bmatrix} \lambda_i & 1 & & \\ & \lambda_i & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ & & & \lambda_i \end{bmatrix}_{m_i \text{ 阶}}, \quad i = 1, 2, \dots, k.$$

**证** 由例 1 可知,  $\lambda I - J_i$  的不变因子为  $1, \dots, 1, (\lambda - \lambda_i)^{m_i}$ , 初

等因子为  $(\lambda - \lambda_i)^{m_i}, i=1, 2, \dots, k$ , 因此  $\lambda I - J$  与  $\lambda I - A$  有完全相同的初等因子. 根据定理 3,  $A$  与  $J$  相似. ■

由于  $\lambda I - A$  存在初等因子, 且由  $A$  唯一确定, 又  $A$  的初等因子的次数和等于矩阵的阶数, 因此, 由定理 4 可知, 任一个  $n$  阶矩阵在复数域上都与一个约当形矩阵相似.

这里需要作一点说明: 在约当形矩阵  $J$  中改变约当块的排列次序, 不影响  $\lambda I - J$  的初等因子. 因此, 如果不考虑约当块的排列次序, 矩阵  $A$  的约当标准形  $J$  是唯一的.

由定理 4 可知,  $A$  与对角阵相似的充要条件是  $\lambda I - A$  的初等因子都是一次因式.

**例 2** 已知:

$$\lambda I - A \cong \begin{bmatrix} 1 & & & & \\ & 1 & & & \\ & & 1 & & \\ & & & (\lambda - 3)^2 & \\ & & & & (\lambda + 1)(\lambda - 3)^2 \end{bmatrix},$$

$$\lambda I - B \cong \begin{bmatrix} 1 & & & & \\ & 1 & & & \\ & & 1 & & \\ & & & 1 & \\ & & & & (\lambda + 4)(\lambda + 3)^4 \end{bmatrix},$$

试求矩阵  $A, B$  的约当标准形.

**解** 由已知条件可知,  $(\lambda I - A)$  的初等因子为  $(\lambda - 3)^2, (\lambda - 3)^2, (\lambda + 1); (\lambda I - B)$  的初等因子为  $(\lambda + 3)^4, (\lambda + 4)$ . 所以

$$A \sim J = \begin{bmatrix} \boxed{3} & \boxed{1} & & \\ 0 & \boxed{3} & & \\ & & \boxed{3} & \boxed{1} \\ & & 0 & \boxed{3} \\ & & & \boxed{-1} \end{bmatrix} \quad \text{或} \quad A \sim \begin{bmatrix} \boxed{3} & \boxed{1} & & \\ 0 & \boxed{3} & & \\ & & \boxed{-1} & \\ & & & \boxed{3} & \boxed{1} \\ & & & 0 & \boxed{3} \end{bmatrix}$$

$$\text{或} \quad A \sim \begin{bmatrix} \boxed{-1} & & & \\ & \boxed{3} & \boxed{1} & \\ & 0 & \boxed{3} & \\ & & & \boxed{3} & \boxed{1} \\ & & & 0 & \boxed{3} \end{bmatrix}.$$

$$B \sim J = \begin{bmatrix} \boxed{-3} & \boxed{1} & \boxed{0} & \boxed{0} \\ 0 & \boxed{-3} & \boxed{1} & \boxed{0} \\ 0 & 0 & \boxed{-3} & \boxed{1} \\ 0 & 0 & 0 & \boxed{-3} \\ & & & \boxed{-4} \end{bmatrix}$$

$$\text{或} \quad B \sim \begin{bmatrix} \boxed{-4} & & & \\ & \boxed{-3} & \boxed{1} & \boxed{0} \\ & 0 & \boxed{-3} & \boxed{1} \\ & 0 & 0 & \boxed{-3} \\ & 0 & 0 & 0 & \boxed{-3} \end{bmatrix}.$$

例3 求

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 0 \\ -4 & -1 & 0 \\ 4 & -8 & -2 \end{bmatrix}$$

的约当标准形.

解



$$\begin{aligned}
\lambda I - A &= \begin{bmatrix} \lambda-3 & -1 & 0 \\ 4 & \lambda+1 & 0 \\ -4 & 8 & \lambda+2 \end{bmatrix} \cong \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ (\lambda-1)^2 & \lambda+1 & 0 \\ 8\lambda-28 & 8 & \lambda+2 \end{bmatrix} \\
&\cong \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ (\lambda-1)^2 & 0 & 0 \\ 8\lambda-28 & 0 & \lambda+2 \end{bmatrix} \cong \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & (\lambda-1)^2 & 0 \\ 0 & 8\lambda-28 & \lambda+2 \end{bmatrix} \\
&\cong \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & (\lambda-1)^2 & 0 \\ 0 & -44 & \lambda+2 \end{bmatrix} \cong \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{44}(\lambda+2)(\lambda-1)^2 \\ 0 & -44 & \lambda+2 \end{bmatrix} \\
&\cong \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & (\lambda+2)(\lambda-1)^2 \end{bmatrix},
\end{aligned}$$

所以  $\lambda I - A$  的初等因子是  $\lambda+2, (\lambda-1)^2$ , 因此  $A$  的约当标准形为

$$\begin{bmatrix} \boxed{-2} & 0 & 0 \\ 0 & \boxed{1} & 1 \\ 0 & 0 & \boxed{1} \end{bmatrix} \quad \text{或} \quad \begin{bmatrix} \boxed{1} & 1 & 0 \\ 0 & \boxed{1} & 0 \\ 0 & 0 & \boxed{-2} \end{bmatrix}.$$

**例 4** 设

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ -2 & -2 & 1 \end{bmatrix},$$

问:  $A$  是否与对角阵相似? 若不与对角阵相似, 求可逆阵  $P$ , 使  $P^{-1}AP$  为约当标准形.

**解**

$$|\lambda I - A| = \begin{vmatrix} \lambda-1 & -2 & 0 \\ 0 & \lambda-2 & 0 \\ 2 & 2 & \lambda-1 \end{vmatrix} = (\lambda-1)^2(\lambda-2),$$

$A$  的特征值为  $\lambda_1=1$ , (二重),  $\lambda_2=2$ ,

二重特征值  $\lambda_1=1$  的线性无关的特征向量只有一个,即

$$X_1=[0,0,1]^T,$$

故  $A$  不能与对角阵相似.

求  $A$  的约当标准形,可按例 3 或例 1 的解法,得

$$A \sim J = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix},$$

即存在可逆阵  $P$ ,使得  $P^{-1}AP=J$ . 设

$$P=[\xi_1, \xi_2, \xi_3],$$

则

$$AP=PJ,$$

$$A[\xi_1, \xi_2, \xi_3] = [\xi_1, \xi_2, \xi_3] \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix},$$

于是

$$A\xi_1=\xi_1,$$

$$A\xi_2=\xi_1+\xi_2,$$

$$A\xi_3=2\xi_3,$$

其中:  $\xi_1$  是对应于  $\lambda_1=1$  的特征向量,即  $\xi_1=X_1=[0,0,1]^T$ ;  $\xi_3$  是

$A$  的对应于  $\lambda_2=2$  的特征向量,易得  $\xi_3=[2,1,-6]^T$ ;

$\xi_2$  不是  $A$  的特征向量,但将  $\xi_1$  代入

$$A\xi_2=\xi_1+\xi_2$$

即

$$(A-I)\xi_2=\xi_1.$$

便可解得  $\xi_2=\left[-\frac{1}{2}, 0, 0\right]^T$ .

因此取

$$P = [\xi_1, \xi_2, \xi_3] = \begin{bmatrix} 0 & -\frac{1}{2} & 2 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -6 \end{bmatrix},$$

就可使

$$P^{-1}AP = J = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}.$$

由于特征向量  $\xi_1, \xi_3$  的取法可以不同, 从而  $\xi_2$  也可不同, 故  $P$  不是唯一的. ■

由此例求  $P$  的方法可知, 如果  $A$  的约当标准形由  $S$  个约当块组成, 则  $A$  有  $S$  个线性无关的特征向量; 反之亦然. 但是, 读者必须注意, 我们求得了  $A$  的  $S$  个线性无关的特征向量, 并不能立即写出它的  $S$  个约当块. 例如  $\lambda$  是  $A$  的四重特征值,  $A$  属于  $\lambda$  的线性无关的特征向量有两个,  $A$  的约当标准形中以  $\lambda$  为主对角元的约当块必有两块, 但它们可能有两种情况:

$$\begin{bmatrix} \boxed{\begin{matrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{matrix}} & & \\ & \boxed{\begin{matrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{matrix}} & \\ & & \boxed{\begin{matrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{matrix}} \end{bmatrix} \quad \text{或} \quad \begin{bmatrix} \boxed{\lambda} & & \\ & \boxed{\begin{matrix} \lambda & 1 & 0 \\ 0 & \lambda & 1 \\ 0 & 0 & \lambda \end{matrix}} & \end{bmatrix},$$

当然对于给定的  $A$ , 必是二者之一.

## 习 题 答 案

### 习题

求下列 1—8 题矩阵的约当标准形:

$$1. \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -4 & 5 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{bmatrix}, \quad 2. \begin{bmatrix} 3 & 0 & 8 \\ 3 & -1 & 6 \\ -2 & 0 & -5 \end{bmatrix}.$$

$$3. \begin{bmatrix} 4 & 5 & -2 \\ -2 & -2 & 1 \\ -1 & -1 & 1 \end{bmatrix}, \quad 4. \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 3 & -3 & 6 \\ 2 & -2 & 4 \end{bmatrix}.$$

$$5. \begin{bmatrix} 3 & 7 & -3 \\ -2 & -5 & 2 \\ -4 & -10 & 3 \end{bmatrix}, \quad 6. \begin{bmatrix} -4 & 2 & 10 \\ -4 & 3 & 7 \\ -3 & 1 & 7 \end{bmatrix}.$$

$$7. \begin{bmatrix} 3 & 1 & 0 & 0 \\ -4 & -1 & 0 & 0 \\ 7 & 1 & 2 & 1 \\ -7 & -6 & -1 & 0 \end{bmatrix}.$$

$$8. \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

9. 对下列约当块  $J_i$ , 求  $k$  次幂  $J_i^k$ :

$$(1) \begin{bmatrix} \lambda & 1 & 0 \\ 0 & \lambda & 1 \\ 0 & 0 & \lambda \end{bmatrix}; \quad (2) \begin{bmatrix} \lambda & 1 & & \\ & \lambda & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ & & & \lambda \end{bmatrix}_{m\text{阶}};$$

10. 对 1 题的矩阵  $A$ , 求可逆阵  $P$ , 使得  $P^{-1}AP$  成约当标准形, 并求  $A^k$ .

11. 设  $A$  为  $n$  阶幂零矩阵 (即存在正整数  $k$ , 使得  $A^k = O$ ), 试求  $\det(A - 2I)$ .

# 答案

$$1. \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}, 2. \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, 7. \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

8. 特征值为  $n$  个互不相同的单位根, 故相似于对角阵.

$$9. (1) \begin{bmatrix} \lambda^k & k\lambda^{k-1} & \frac{k(k-1)}{2}\lambda^{k-2} \\ 0 & \lambda^k & k\lambda^{k-1} \\ 0 & 0 & \lambda^k \end{bmatrix}.$$

$$(2) k < m-1 \text{ 时, } \begin{bmatrix} \lambda^k & c_k^1 \lambda^{k-1} & \cdots & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ & \lambda^k & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ & & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & 1 \\ & & & \ddots & \ddots & \ddots & k\lambda^{k-1} \\ & & & & \ddots & \ddots & \lambda^k \end{bmatrix}.$$

$$k = m-1 \text{ 时 } \begin{bmatrix} \lambda^k & c_k^1 \lambda^{k-1} & \cdots & c_k^{m-1} \cdot 1 \\ 0 & \lambda^k & \cdots & c_k^{m-2} \lambda \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda^k \end{bmatrix}.$$

$$k > m-1 \text{ 时 } \begin{bmatrix} \lambda^k & c_k^1 \lambda^{k-1} & \cdots & c_k^{m-1} \lambda^{k-m+1} \\ 0 & \lambda^k & \cdots & c_k^{m-2} \lambda^{k-m+2} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda^k \end{bmatrix}.$$

$$10. \quad P = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 5 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}; \quad J = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix};$$

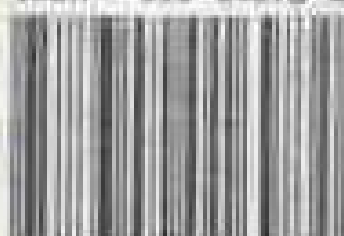
$$A^k = \begin{bmatrix} 5(5 \cdot 3^k - 2 \cdot k 3^{k-1}) - 4 \cdot 3^k & -2 \cdot 3^k + k \cdot 3^{k-1} + 2 \cdot 3^k & 0 \\ 2(5 \cdot 3^k - 2k 3^{k-1}) - 10 \cdot 3^k & 2(-2 \cdot 3^k + k \cdot 3^{k-1} + 5 \cdot 3^k) & 0 \\ -3 \cdot 2^k + 5 \cdot 3^k - 2 \cdot k \cdot 3^{k-1} - 2 \cdot 3^k & 2^k - 2 \cdot 3^k + k \cdot 3^{k-1} + 3^k & 2^k \end{bmatrix}.$$

$$11. (-2)^n$$



2006

ISBN 7-303-05698-4



9 787302 016984 >

定价: 7.30 元