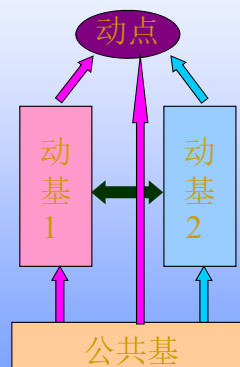


- 某个兴趣点在动基上的类型

- 固结在动基1、动基2上的同一个点
- 动基1上的固定点，动基2上的动点
- 动基1、动基2上均为动点



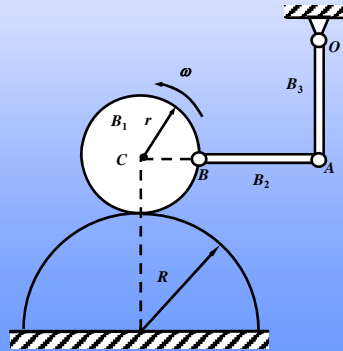
定点公式



[例]

如图，圆盘 B_1 在大圆轮上纯滚动，角速度为 ω ，角加速度为0。 OA 、 AB 杆长度均为 $2r$ ， $R=2r$ 。求图示位置

(1) 杆 B_2 的角速度和角加速度；(2) 杆 B_3 的角速度和角加速度。
(20分)

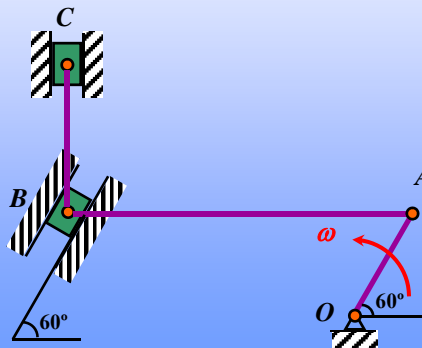


2018年10月31日
理论力学CAI 刚体平面运动学

3

[例]

配气机构中， $OA=r$ ，匀速转动，在某瞬时 $\varphi=60^\circ$ 。 $AB \perp BC$ ， $AB=6r$ ， $BC=3\sqrt{3}r$ 。求该瞬时滑块C的速度和加速度。



2018年10月31日
理论力学CAI 刚体平面运动学

4

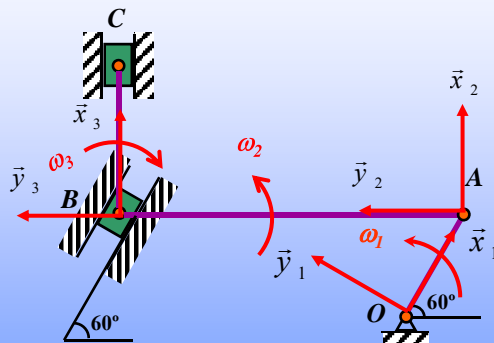
[解] 速度分析

每个刚体只建立1个连体基

已知信息最多的点为连体基基点

连体基

$O-\vec{e}_1 \quad A-\vec{e}_2 \quad B-\vec{e}_3$



$$\begin{aligned}\vec{v}_C &= \vec{v}_{3C} = \vec{v}_{3tC}^e + \vec{v}_{3\omega C}^e \\ &= \vec{v}_B + \vec{v}_{3\omega C}^e\end{aligned}$$

需先求出 v_B

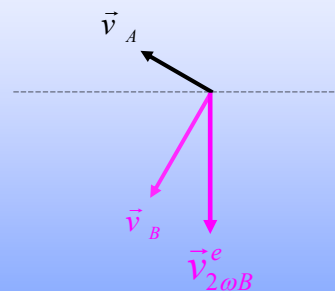
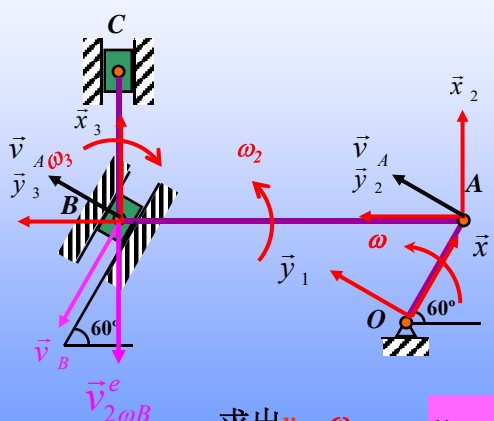
$$\begin{aligned}\vec{v}_B &= \vec{v}_{2B} = \vec{v}_{2tB}^e + \vec{v}_{2\omega B}^e \\ &= \vec{v}_A + \vec{v}_{2\omega B}^e\end{aligned}$$



2018年10月31日
理论力学CAI 刚体平面运动学

5

$$\vec{v}_B = \vec{v}_{2B} = \vec{v}_{2tB}^e + \vec{v}_{2\omega B}^e = \vec{v}_A + \vec{v}_{2\omega B}^e$$



求出 v_B, ω_2

$$v_B = \sqrt{3}r\omega$$

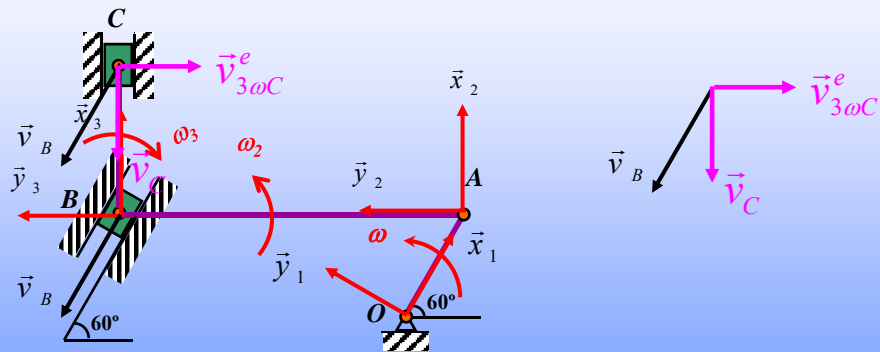
$$\omega_2 = \frac{\omega}{3}$$



2018年10月31日
理论力学CAI 刚体平面运动学

6

$$\vec{v}_C = \vec{v}_{3C} = \vec{v}_{3IC}^e + \vec{v}_{3\omega C}^e = \vec{v}_B + \vec{v}_{3\omega C}^e$$



求出 v_C, ω_3

$$v_C = \frac{3}{2} r \omega$$

$$\omega_3 = \frac{\omega}{6}$$



2018年10月31日
理论力学CAI 刚体平面运动学

7

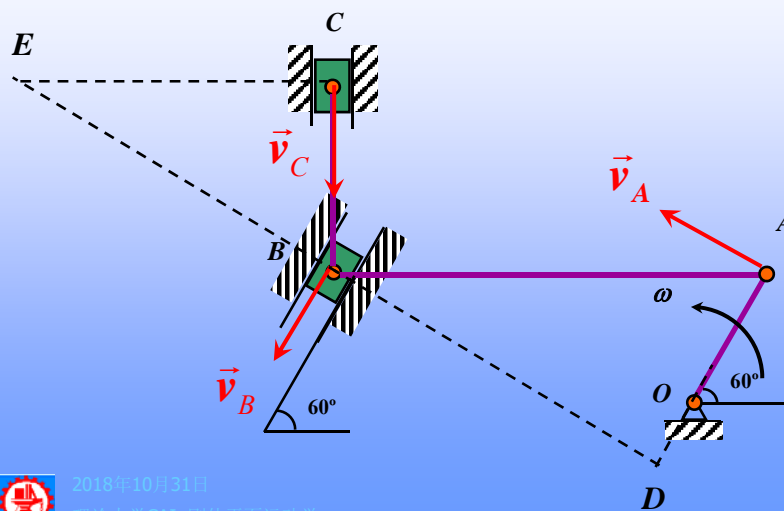
速度分析：瞬心法

$$v_B = \sqrt{3} r \omega$$

$$v_C = \frac{3}{2} r \omega$$

$$\omega_{AB} = \frac{\omega}{3}$$

$$\omega_{BC} = \frac{\omega}{6}$$



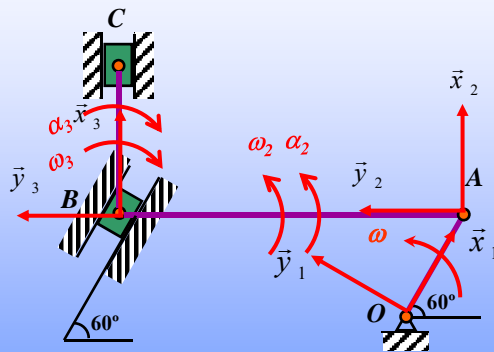
2018年10月31日
理论力学CAI 刚体平面运动学

8

加速度分析：

每个刚体只建立1个连体基

已知信息最多的点为连体基基点



$$\vec{a}_C = \vec{a}_{3C}$$

$$= \vec{a}_{3tC}^e + \vec{a}_{3\omega C}^e + \vec{a}_{3\alpha C}^e$$

$$= \vec{a}_B + \vec{a}_{3\omega C}^e + \vec{a}_{3\alpha C}^e$$

需先求出 a_B

$$\vec{a}_B = \vec{a}_{2B}$$

$$= \vec{a}_{2tB}^e + \vec{a}_{2\omega B}^e + \vec{a}_{2\alpha B}^e$$

$$= \vec{a}_A + \vec{a}_{2\omega B}^e + \vec{a}_{2\alpha B}^e$$

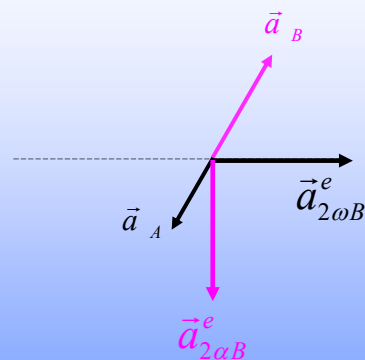
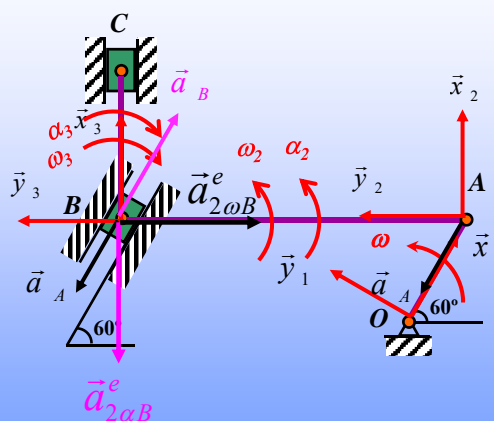


2018年10月31日

理论力学CAI 刚体平面运动学

9

$$\vec{a}_B = \vec{a}_{2B} = \vec{a}_{2tB}^e + \vec{a}_{2\omega B}^e + \vec{a}_{2\alpha B}^e = \vec{a}_A + \vec{a}_{2\omega B}^e + \vec{a}_{2\alpha B}^e$$



$$a_A = \omega^2 r, a_{2\omega B}^e = 6\omega_2^2 r, a_{2\alpha B}^e = 6\alpha_2 r$$

求出 a_B

$$a_B = \frac{\omega^2 r}{3}$$



2018年10月31日

理论力学CAI 刚体平面运动学

10

$$\vec{a}_C = \vec{a}_{3C} = \vec{a}_{3tC}^e + \vec{a}_{3\omega C}^e + \vec{a}_{3\alpha C}^e = \vec{a}_B + \vec{a}_{3\omega C}^e + \vec{a}_{3\alpha C}^e$$

$a_{3\omega C}^e = 3\sqrt{3}\omega_3^2 r$ 求出 a_C $a_C = \frac{\sqrt{3}\omega^2 r}{12}$

2018年10月31日
理论力学CAI 刚体平面运动学

[例]

如图所示，四根杆子长度均为 $l=0.4m$ ，通过平面铰链连接。主动杆 O_1A 、 O_2C 均作匀速转动，角速度 $\omega_1=5rad/s$ ， $\omega_2=3rad/s$ 。求图示位置 AB 杆、 BC 杆的角速度 ($\tan\theta=4/3$)。

瞬心法失效

在两个动基上
考察B点

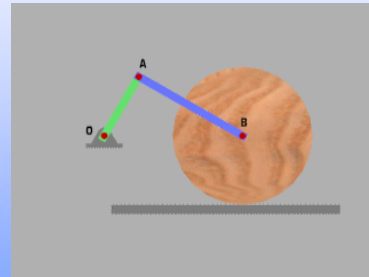
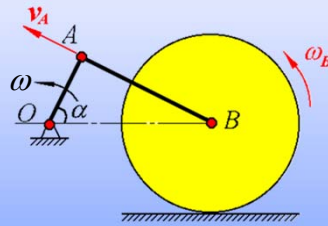
$\omega_{BC} = 4rad/s$ 逆时针

$\omega_{AB} = 6rad/s$ 顺时针

2018年10月31日
理论力学CAI 刚体平面运动学

[例]

曲柄滚轮机构, 滚子半径 $R=15\text{cm}$, 曲柄转速 $n=60\text{ r/min}$, $OA=15\text{cm}$ 。
求: 当 $\alpha=60^\circ$ 时 ($OA \perp AB$), 滚轮的 ω_B , α_B 。



$$\omega_B = 4\sqrt{3}\pi / 3 = 7.25\text{rad/s}$$

$$\alpha_B = a_B / BC_2 = 131.5 / 15 = 8.77\text{rad/s}^2$$



动点公式



2018年10月31日
理论力学CAI 刚体平面运动学

1

刚体系运动学矢量瞬时分析方法/例

[例]

图示为一急回机构

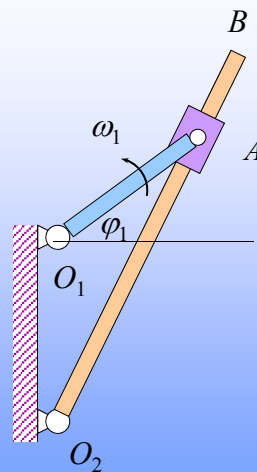
已知长为 l_1 的曲柄 O_1A 以匀角速度 ω_1 转动，杆端为一个套筒，它可绕 A 自由转动，套筒穿在摇杆 O_2B 上，相对摇杆它又能相对滑动。令 O_1 与 O_2 的间距也为 l_1

图示瞬时曲柄的转角为 $\varphi_1 = \pi/6$

求：此瞬时

摇杆 O_2B 的角速度 ω_2 与角加速度 α_2

套筒在摇杆上的滑动速度与加速度



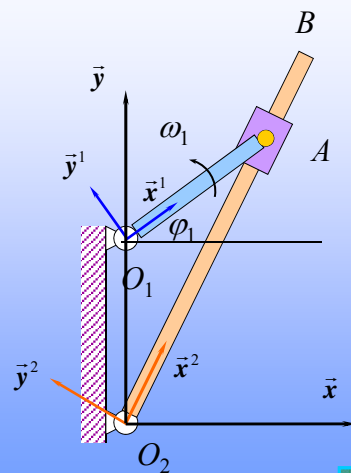
2018年10月31日
理论力学CAI 刚体平面运动学

2

[解] 速度分析

定基 曲柄 B_1 (动基1) 摇杆 B_2 (动基2)

$O_2 - \vec{e}$ $O_1 - \vec{e}^1$ $O_2 - \vec{e}^2$



2018年10月31日
理论力学CAI 刚体平面运动学

3

[解] 速度分析

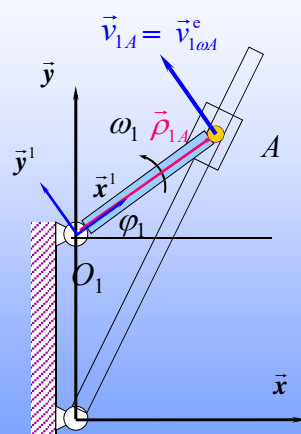
定基 曲柄 B_1 (动基1) 摇杆 B_2 (动基2)

$O_2 - \vec{e}$ $O_1 - \vec{e}^1$ $O_2 - \vec{e}^2$

在曲柄 B_1 上考察点A：给定点

$$\vec{v}_{1A} = \cancel{\vec{v}_{1A}^e} + \vec{v}_{1\omega A}^e = \vec{v}_{1\omega A}^e \quad \text{基点不动}$$

$$\vec{v}_{1\omega A}^e : \quad v_{1\omega A}^e = \omega_1 l_1 \quad \text{方向已知}$$



2018年10月31日
理论力学CAI 刚体平面运动学

4

定基 曲柄 B_1 (动基1) 摇杆 B_2 (动基2)

$$O_2 - \vec{e} \quad O_1 - \vec{e}^1 \quad O_2 - \vec{e}^2$$

在曲柄 B_1 上考察点A: 给定点

$$\vec{v}_{1A} = \cancel{\vec{v}_{1tA}} + \vec{v}_{1\omega A} = \vec{v}_{1\omega A} \quad \text{基点不动}$$

$$\vec{v}_{1\omega A} : v_{1\omega A} = \omega_1 l_1 \quad \text{方向已知}$$

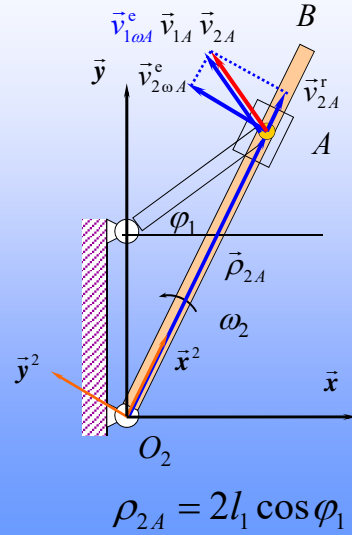
在摇杆 B_2 上考察点A: 动点 基点不动

$$\vec{v}_{2A} = \vec{v}_{2A}^r + \cancel{\vec{v}_{2tA}} + \vec{v}_{2\omega A} = \vec{v}_{2A}^r + \vec{v}_{2\omega A}$$

$$\vec{v}_{2A}^r : \text{套筒相对运动为平动} \quad \text{设定正向}$$

$$\vec{v}_{2\omega A} : v_{2\omega A} = \omega_2 \rho_{2A} \quad \text{设定正向}$$

$$\vec{v}_{1A} = \vec{v}_{2A} \quad \vec{v}_{1\omega A} = \vec{v}_{2A}^r + \vec{v}_{2\omega A}$$



2018年10月31日

理论力学CAI 刚体平面运动学

5

$$v_{1\omega A} = \omega_1 l_1 \quad v_{2\omega A} = \omega_2 \rho_{2A} = \underline{2\omega_2 l_1 \cos \phi_1} \quad \rho_{2A} = 2l_1 \cos \phi_1$$

$$\vec{v}_{1\omega A} = \vec{v}_{2A} + \vec{v}_{2\omega A}$$

未知 $v_{2A}^r \quad \omega_2 \quad (v_{2\omega A})$

在 \vec{e}^2 上的坐标式

$$\vec{x}^2 : v_{1\omega A}^e \sin \phi_1 = v_{2A}^r$$

$$\vec{y}^2 : v_{1\omega A}^e \cos \phi_1 = v_{2\omega A}^e$$

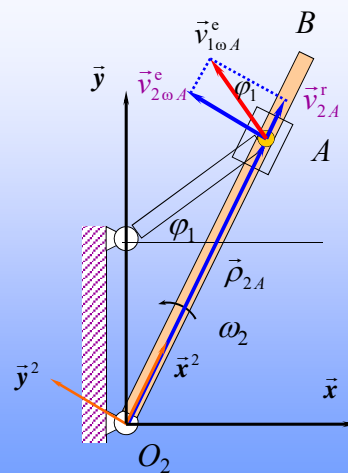
$$\phi_1 = \pi/6$$

$$\omega_2 = \frac{\omega_1}{2}$$

$$v_{2A}^r = \frac{\omega_1 l_1}{2}$$

摇杆 O_2B 的角速度

套筒相对滑动速度



2018年10月31日

理论力学CAI 刚体平面运动学

6

[解] 加速度分析

在摇杆 B_2 上考察点A：动点 基点不动

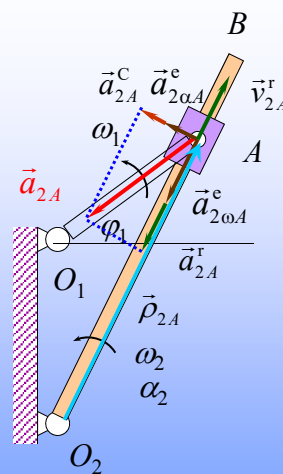
$$\vec{a}_{2A} = \vec{a}_{2A}^r + \cancel{\vec{a}_{2A}^s} + \vec{a}_{2\alpha A}^e + \vec{a}_{2\omega A}^e + \vec{a}_{2A}^C$$

$$\vec{a}_{2\omega A}^e : a_{2\omega A}^e = \omega_2^2 \rho_{2A} \quad \text{方向已知}$$

$$\vec{a}_{2\alpha A}^e : a_{2\alpha A}^e = \alpha_2 \rho_{2A} \quad \text{设定正向}$$

$$\vec{a}_{2A}^C : a_{2A}^C = 2\omega_2 v_{2A}^r \quad \text{方向已知}$$

$$\vec{a}_{2A}^r : \text{套筒相对运动为平动} \quad \text{设定正向}$$



$$\rho_{2A} = 2l_1 \cos \varphi_1$$



2018年10月31日
理论力学CAI 刚体平面运动学

7

[解] 加速度分析

在摇杆 B_2 上考察点A：动点 基点不动

$$\vec{a}_{2A} = \vec{a}_{2A}^r + \cancel{\vec{a}_{2A}^s} + \vec{a}_{2\alpha A}^e + \vec{a}_{2\omega A}^e + \vec{a}_{2A}^C$$

$$\vec{a}_{2\omega A}^e : a_{2\omega A}^e = \omega_2^2 \rho_{2A} \quad \text{方向已知}$$

$$\vec{a}_{2\alpha A}^e : a_{2\alpha A}^e = \alpha_2 \rho_{2A} \quad \text{设定正向}$$

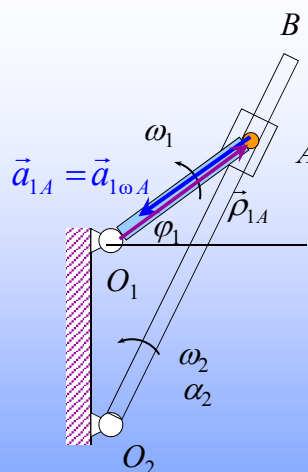
$$\vec{a}_{2A}^C : a_{2A}^C = 2\omega_2 v_{2A}^r \quad \text{方向已知}$$

$$\vec{a}_{2A}^r : \text{套筒相对运动为平动} \quad \text{设定正向}$$

在曲柄 B_1 上考察点A：给定点 基点不动

$$\vec{a}_{1A} = \cancel{\vec{a}_{1A}^r} + \cancel{\vec{a}_{1A}^s} + \vec{a}_{1\omega A}^e \quad \text{匀角速度}$$

$$\vec{a}_{1\omega A}^e : a_{1\omega A}^e = \omega_1^2 \rho_{1A} \quad \text{方向已知}$$



2018年10月31日
理论力学CAI 刚体平面运动学

8

[解] 加速度分析

在摇杆 B_2 上考察点A: 动点 基点不动

$$\vec{a}_{2A} = \vec{a}_{2A}^r + \vec{a}_{2A}^{\omega} + \vec{a}_{2A}^{\alpha} + \vec{a}_{2A}^{\omega} + \vec{a}_{2A}^C$$

$$\vec{a}_{2\omega A}^e: a_{2\omega A}^e = \omega_2^2 \rho_{2A} \quad \text{方向已知}$$

$$\vec{a}_{2\alpha A}^e: a_{2\alpha A}^e = \alpha_2 \rho_{2A} \quad \text{设定正向}$$

$$\vec{a}_{2A}^C: a_{2A}^C = 2\omega_2 v_{2A}^r \quad \text{方向已知}$$

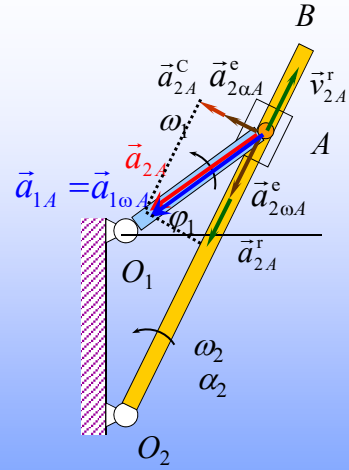
$$\vec{a}_{2A}^r: \text{套筒相对运动为平动} \quad \text{设定正向}$$

在曲柄 B_1 上考察点A: 给定点 基点不动

$$\vec{a}_{1A} = \vec{a}_{1A}^r + \vec{a}_{1A}^{\omega} + \vec{a}_{1A}^{\alpha} \quad \text{匀角速度}$$

$$\vec{a}_{1\omega A}^e: a_{1\omega A}^e = \omega_1^2 \rho_{1A} \quad \text{方向已知}$$

$$\vec{a}_{1A} = \vec{a}_{2A} \quad \vec{a}_{1\omega A}^e = \vec{a}_{2A}^r + \vec{a}_{2A}^{\omega} + \vec{a}_{2A}^{\alpha} + \vec{a}_{2A}^C$$



2018年10月31日

理论力学CAI 刚体平面运动学

9

$$a_{1\omega A}^e = \omega_1^2 l_1 \quad \omega_2 = \omega_1 / 2 \quad v_{2A}^r = \omega_1 l_1 / 2 \quad \rho_{2A} = 2l_1 \sin \varphi_1 \quad B$$

$$a_{2\alpha A}^e = \alpha_2 \rho_{2A} = 2\alpha_2 l_1 \cos \varphi_1$$

$$a_{2\omega A}^e = \omega_2^2 \rho_{2A} = 2\omega_2^2 l_1 \cos \varphi_1 = \omega_1^2 l_1 \cos \varphi_1 / 2$$

$$a_{2A}^C = 2\omega_2 v_{2A}^r = \omega_1 v_{2A}^r = \omega_1^2 l_1 / 2$$

$$\vec{a}_{1\omega A}^e = \vec{a}_{2A}^r + \vec{a}_{2A}^{\omega} + \vec{a}_{2A}^{\alpha} + \vec{a}_{2A}^C$$

在 \vec{e}^2 上的坐标式

$$\vec{x}^2: a_{1\omega A}^e \cos \varphi_1 = a_{2A}^r + a_{2\omega A}^e$$

$$\vec{y}^2: a_{1\omega A}^e \sin \varphi_1 = a_{2\alpha A}^e + a_{2A}^C$$

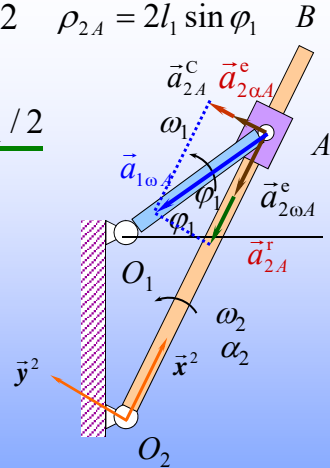
$$\varphi_1 = \pi/6$$

$$a_{2A}^r = -\frac{\sqrt{3}}{4} l_1 \omega_1^2$$

套筒相对滑动加速度

$$\alpha_2 = 0$$

摇杆 O_2B 的角加速度



2018年10月31日

理论力学CAI 刚体平面运动学

10

以下为该题解答过程的简化版



2018年10月31日
理论力学CAI 刚体平面运动学

11

刚体系运动学矢量瞬时分析方法/解

【解】速度分析

定基 摇杆 B_2 (动基)

$O_2 - \bar{e}$ $O_2 - \bar{e}^2$

A点为定轴转动刚体 O_1A 上的定点，
摇杆上的动点

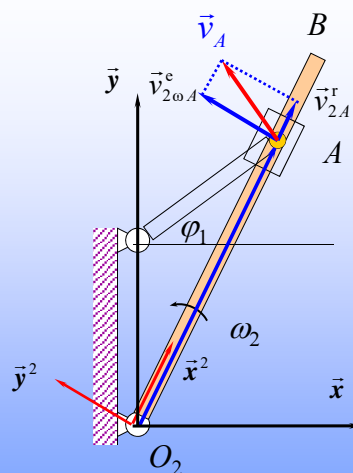
$$\vec{v}_A = \vec{v}_{2A}^r + \vec{v}_{2tA}^e + \vec{v}_{2\omega A}^e = \vec{v}_{2A}^r + \vec{v}_{2\omega A}^e$$

$$v_A = \omega_1 l_1 \quad v_{2\omega A}^e = 2\omega_2 l_1 \cos \varphi_1$$

在 \bar{e}^2 上的坐标式

$$\bar{x}^2: v_A \sin \varphi_1 = v_{2A}^r$$

$$\bar{y}^2: v_A \cos \varphi_1 = v_{2\omega A}^e$$



2018年10月31日
理论力学CAI 刚体平面运动学

$$\omega_2 = \frac{\omega_1}{2} \quad v_{2A}^r = \frac{\omega_1 l_1}{2}$$

12

加速度分析

$$\begin{aligned}\vec{a}_A &= \vec{a}_{\omega A} = \vec{a}_{2A}^r + \vec{a}_{2tA}^e + \vec{a}_{2\alpha A}^e + \vec{a}_{2\omega A}^e + \vec{a}_{2A}^C \\ &= \vec{a}_{2A}^r + \vec{a}_{2\alpha A}^e + \vec{a}_{2\omega A}^e + \vec{a}_{2A}^C\end{aligned}$$

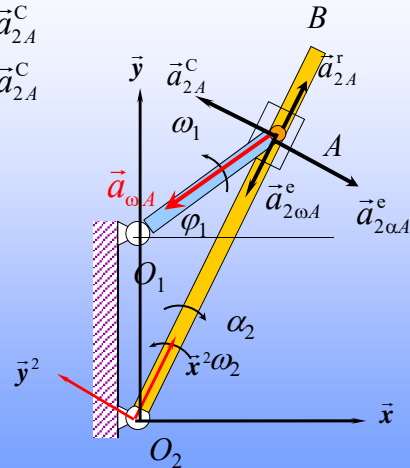
$$a_{\omega A} = \omega_1^2 l_1 \quad a_{2\omega A}^e = 2\omega_2^2 l_1 \cos \varphi_1$$

$$a_{2\alpha A}^e = 2\alpha_2 l_2 \cos \varphi_1 \quad a_{2A}^C = 2\omega_2 v_{2A}^r$$

在 \vec{e}^2 上的坐标式

$$\vec{x}^2: -a_{\omega A} \cos \varphi_1 = a_{2A}^r - a_{2\omega A}^e$$

$$\vec{y}^2: a_{\omega A} \sin \varphi_1 = -a_{2\alpha A}^e + a_{2A}^C$$



2018年10月31日

理论力学CAI 刚体平面运动学

$$a_{2A}^r = \frac{\sqrt{3}}{4} l_1 \omega_1^2 \quad \alpha_2 = 0$$

13

[例]

图示为一急回机构

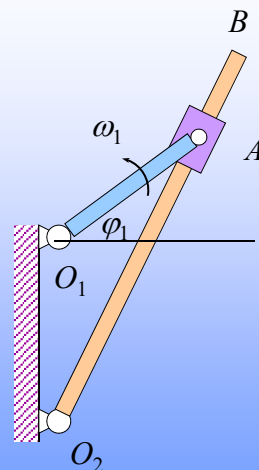
已知长为 l_1 的曲柄 O_1A 以匀角速度 ω_1 转动，杆端为一个套筒，它可绕 A 自由转动，套筒穿在摇杆 O_2B 上，相对摇杆它又能相对滑动。令 O_1 与 O_2 的间距也为 l_1

图示瞬时曲柄的转角为 $\varphi_1 = \pi/6$

求：此瞬时

摇杆 O_2B 的角速度 ω_2 与角加速度 α_2

套筒在摇杆上的滑动速度与加速度



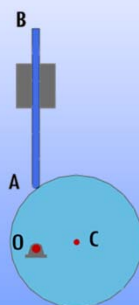
2018年10月31日

理论力学CAI 刚体平面运动学

以 O_2B 杆上的 A 点为兴趣点是否可行？

14

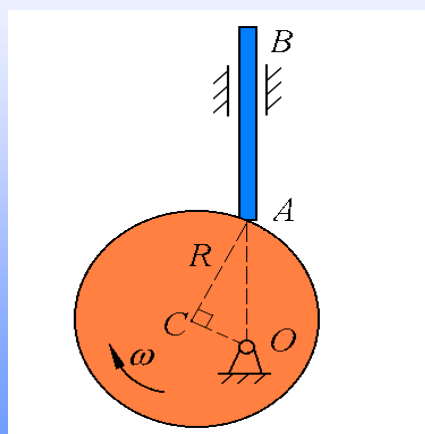
【例】 圆盘凸轮机构，已知： $OC=e$ ， ω 为匀角速度， $R=\sqrt{3}e$ ， 图示瞬时， $OC\perp CA$ 且 O 、 A 、 B 三点共线。
求：从动杆 AB 的速度、加速度。



2018年10月31日
理论力学CAI 刚体平面运动学

15

【例】 圆盘凸轮机构，已知： $OC=e$ ， ω 为匀角速度， $R=\sqrt{3}e$ ， 图示瞬时， $OC\perp CA$ 且 O 、 A 、 B 三点共线。
求：从动杆 AB 的速度、加速度。



(两种动点动系的方法)



2018年10月31日
理论力学CAI 刚体平面运动学

16

【法一】 动点取直杆上A点，动系固结于圆盘，定系固结于基座。

相对运动轨迹为圆轮圆周线

$$\vec{v}_A = \vec{v}_A^r + \vec{v}_{\omega A}^e$$

$$v_A = \frac{2\sqrt{3}}{3} e\omega$$

$$v_A^r = \frac{4\sqrt{3}}{3} e\omega$$

2018年10月31日
理论力学CAI 刚体平面运动学

17

加速度分析：

?√ ?√ √√ √√ √√

$$\vec{a}_A = \vec{a}_{\tau A}^r + \vec{a}_{nA}^r + \vec{a}_{\omega A}^e + \vec{a}_A^C$$

$$a_{nA}^r = \frac{(v_A^r)^2}{R}$$

$$a_{\omega A}^e = 2\omega^2 e$$

$$a_A^C = \frac{8\sqrt{3}}{3} e\omega^2$$

$$a_A = -\frac{2}{9} e\omega^2$$

2018年10月31日
理论力学CAI 刚体平面运动学

矢量等式向y轴投影：

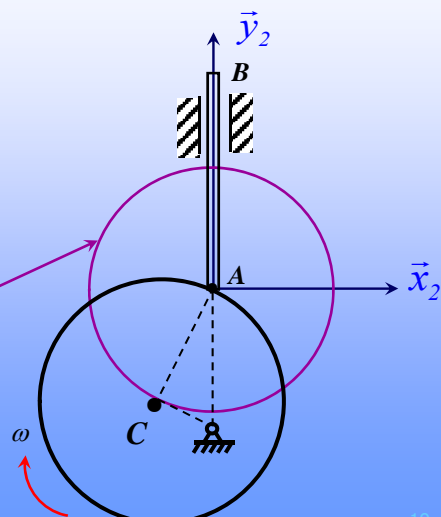
【法二】

动点取圆轮圆心C，动系固结于AB杆，基点A。

动系平移

相对运动轨迹为圆，圆心A

相对运动轨迹



2018年10月31日
理论力学CAI 刚体平面运动学

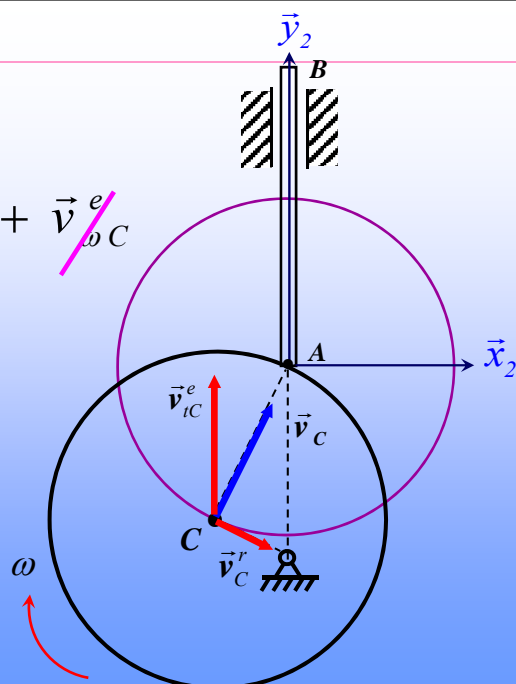
19

速度关系

$$\vec{v}_C = \vec{v}_C^r + \vec{v}_{tC}^e + \cancel{\vec{v}_{\omega C}^e}$$

$$\begin{aligned} v_{AB} &= v_A = v_{tC}^e \\ &= \frac{2\sqrt{3}}{3} e \omega \end{aligned}$$

$$v_C^r = \frac{\sqrt{3}}{3} e \omega$$



2018年10月31日
理论力学CAI 刚体平面运动学

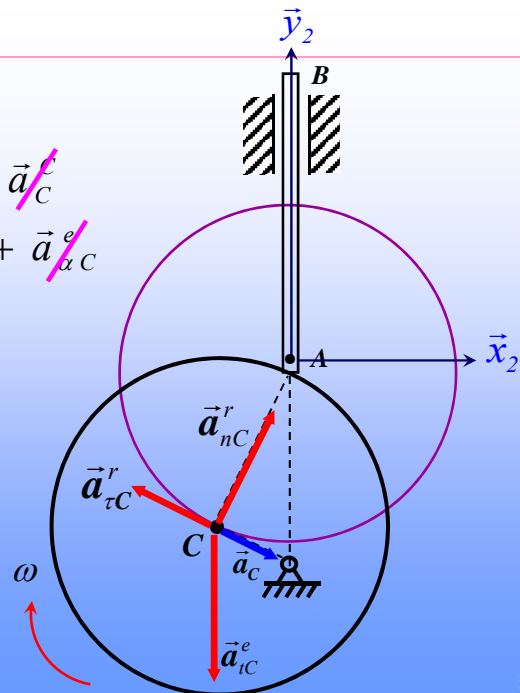
20

加速度关系

$$\vec{a}_C = \vec{a}_{\tau C}^r + \vec{a}_{nC}^r + \vec{a}_C^e + \vec{a}_{tC}^e + \vec{a}_{\omega C}^e + \vec{a}_{\alpha C}^e$$

科氏加速度 $a_C^C = 0$

$$\begin{aligned} a_{AB} &= a_A = a_{tC}^e \\ &= \frac{2}{9} e \omega^2 \end{aligned}$$

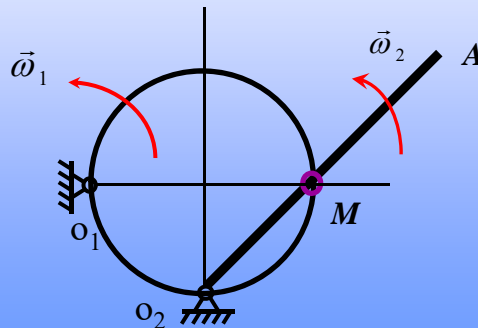


2018年10月31日
理论力学CAI 刚体平面运动学

21

[例]

细杆 O_2A 绕 O_2 轴以匀角速度 ω_2 转动，杆上套有一小环 M ，同时又套在半径为 R 的圆上，圆绕 O_1 匀速转动，求图示瞬时，小环 M 的速度、加速度。



2018年10月31日
理论力学CAI 刚体平面运动学

22

【解】

动基1:

?? ?√ √√

$$\vec{v}_M = \vec{v}_{1M}^r + \vec{v}_{1\omega M}^e$$

动基2:

?? ?√ √√

$$\vec{v}_M = \vec{v}_{2M}^r + \vec{v}_{2\omega M}^e$$

?√ √√ ?√ √√

$$\vec{v}_{1M}^r + \vec{v}_{1\omega M}^e = \vec{v}_{2M}^r + \vec{v}_{2\omega M}^e$$

2018年10月31日

理论力学CAI 刚体平面运动学

23

动点公式

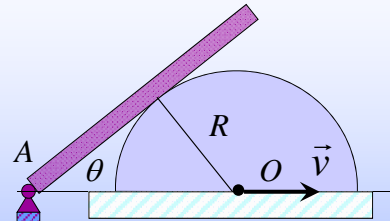
[例]

图示凸轮摆杆机构，半径为 R 的半圆凸轮以 v 匀速向右运动，摆杆搁在凸轮上绕铰 A 转动

当摆杆处于图示瞬时，角 θ 为30度

求此瞬时

摆杆的角速度与角加速度



2018年10月31日

理论力学CAI 刚体平面运动学

1

刚体系运动学矢量瞬时分析方法/解

[解]

公共基 摆杆连体基 滑块连体基

$A - \vec{e}$

$A - \vec{e}^1$

$O - \vec{e}^2$

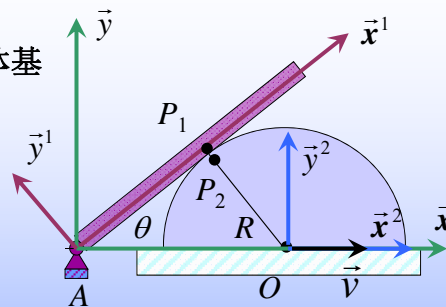
兴趣点的选取

方案1: 摆杆与滑块的接触点 P_1

存在问题:

P_1 与 P_2 不是共点

有相对运动, 规律不清

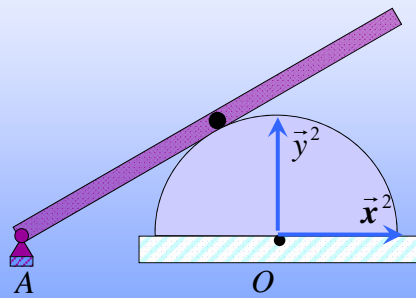


2018年10月31日

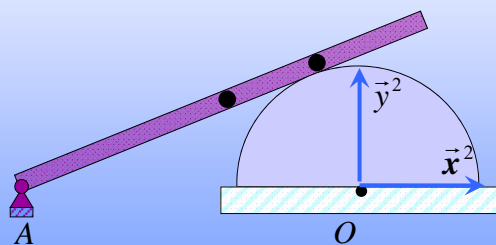
理论力学CAI 刚体平面运动学

2

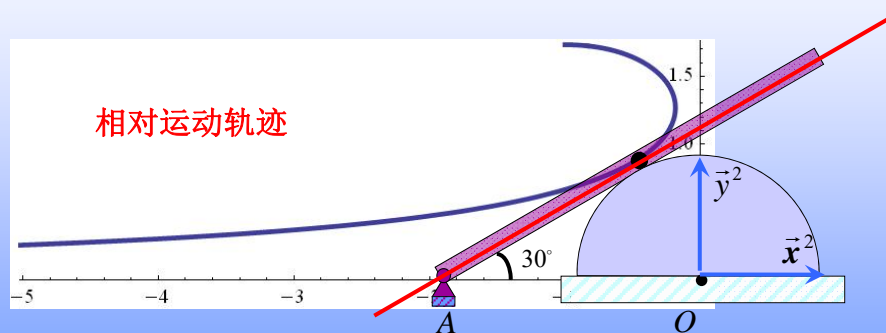
摆杆上的接触点 P_1 为兴趣点，滑块为动基



摆杆上的接触点 P_1 为兴趣点，滑块为动基



摆杆上的接触点 P_1 为兴趣点，滑块为动基



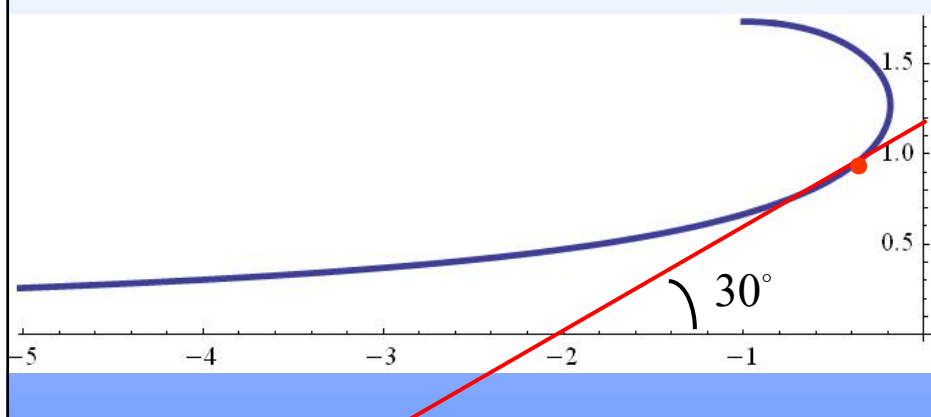
速度分析可行，加速度分析困难



2018年10月31日
理论力学CAI 刚体平面运动学

5

• 半圆为动系，接触点为动点，相对运动轨迹



2018年10月31日
理论力学CAI 刚体平面运动学

6

方案2: 点O

绝对运动已知: 向右平移

$$\vec{v}_O = \vec{v} \quad \vec{a}_O = \vec{0}$$

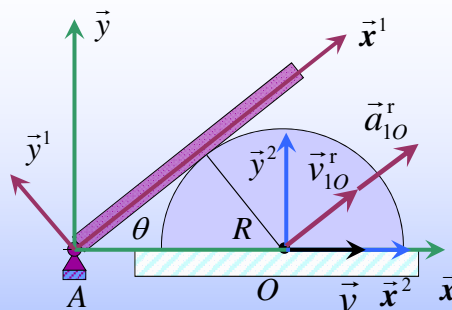
相对摆杆的运动清楚:

滑块在摆杆上又滚又滑

点O的相对运动平行于摆杆

$$\vec{v}_{1O}^r = v_{1O}^r \vec{x}_1$$

$$\vec{a}_{1O}^r = a_{1O}^r \vec{x}_1$$



2018年10月31日

理论力学CAI 刚体平面运动学

7

速度分析

在摆杆上考察点O: 动点 基点不动

$$\vec{v}_{1O} = \vec{v}_{1O}^r + \cancel{\vec{v}_{1tO}^e} + \vec{v}_{1\omega O}^e$$

摆杆定轴转动

$$\vec{v}_{1\omega O}^e: v_{1\omega O}^e = \omega_1 \rho_{1O} \quad \text{设定正向}$$

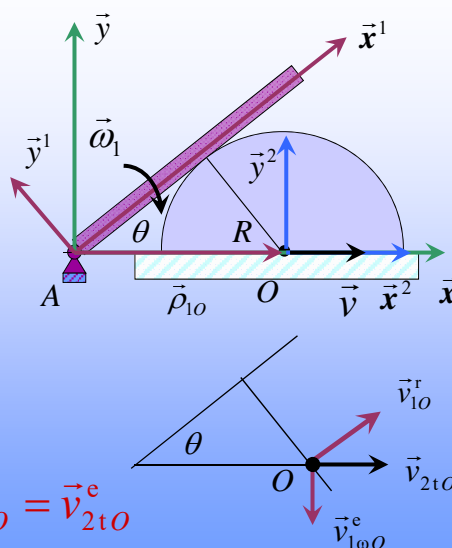
$$\vec{v}_{1O}^r: \quad \text{设定正向}$$

在滑块上考察点O: 定点

$$\vec{v}_{2O} = \vec{v}_{2tO} + \cancel{\vec{v}_{2\omega O}^e}$$

$$\text{滑块平动} \quad \vec{v}_{2tO} = \vec{v}$$

$$\vec{v}_{1O} = \vec{v}_{2O} \quad \vec{v}_{1O}^r + \vec{v}_{1\omega O}^e = \vec{v}_{2tO}$$



2018年10月31日

理论力学CAI 刚体平面运动学

8

刚体系运动学矢量瞬时分析方法/解

$$v_{1\omega O}^e = \omega_1 \rho_{1O} = \omega_1 R / \sin \theta$$

$$v_{2tO}^e = v$$

$$\vec{v}_{1O}^r + \vec{v}_{1\omega O}^e = \vec{v}_{2tO}^e$$

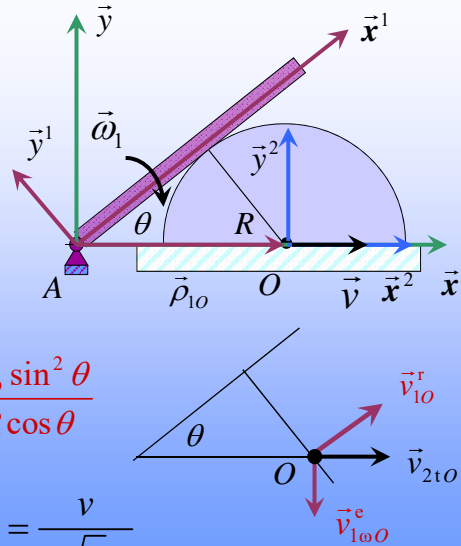
在参考基的坐标式

$$\vec{x}: v_{1O}^r \cos \theta = v_{2tO}^e = v$$

$$\vec{y}: v_{1O}^r \sin \theta - v_{1\omega O}^e = 0$$

$$\vec{x}: v_{1O}^r = \frac{v}{\cos \theta} \quad \vec{y}: \omega_1 = \frac{v_{1O}^r \sin^2 \theta}{R \cos \theta}$$

$$\theta = \frac{\pi}{6} \quad v_{1O}^r = \frac{2}{\sqrt{3}} v \quad \omega_1 = \frac{v}{2\sqrt{3}R}$$



2018年10月31日

理论力学CAI 刚体平面运动学

9

刚体系运动学矢量瞬时分析方法/解

加速度分析

在摆杆上考察点O: 动点 基点不动

$$\vec{a}_{1O} = \vec{a}_{1O}^r + \vec{a}_{1tO}^e + \vec{a}_{1\alpha O}^e + \vec{a}_{1\omega O}^e + \vec{a}_{1O}^C$$

摆杆定轴转动

$$\vec{a}_{1\alpha O}^e: a_{1\alpha O}^e = \alpha_1 \rho_{1O} \quad \text{设定正向}$$

$$\vec{a}_{1\omega O}^e: a_{1\omega O}^e = \omega_1^2 \rho_{1O} \quad \text{方向已知}$$

$$\vec{a}_{1O}^C: a_{1O}^C = 2\omega_1 v_{1O}^r \quad \text{方向已知}$$

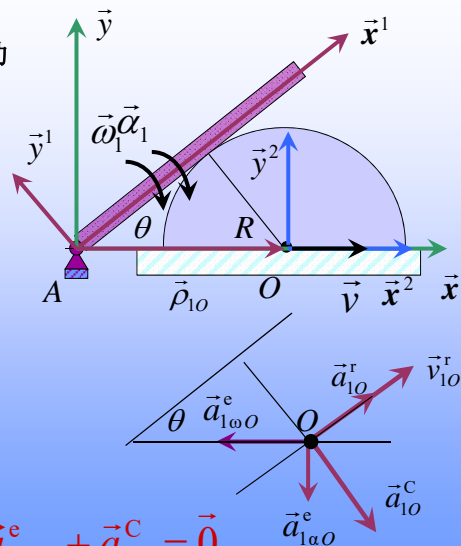
$$\vec{a}_{1O}^r: \quad \text{设定正向}$$

在滑块上考察点O: 定点

$$\vec{a}_{2O} = \vec{a}_{2tO}^e + \vec{a}_{2\alpha O}^e + \vec{a}_{2\omega O}^e$$

$$\text{滑块匀速平动} \quad \vec{a}_{2O} = \vec{a}_{2tO}^e = \vec{0}$$

$$\vec{a}_{1O} = \vec{a}_{2O} \quad \vec{a}_{1O}^r + \vec{a}_{1\alpha O}^e + \vec{a}_{1\omega O}^e + \vec{a}_{1O}^C = \vec{0}$$



2018年10月31日

理论力学CAI 刚体平面运动学

10

刚体系运动学矢量瞬时分析方法/解

速度分析结果 $v_{1O}^r = 2v/\sqrt{3}$ $\omega_1 = v/2\sqrt{3}R$

$$a_{1\alpha O}^e = \alpha_1 \rho_{1O} = 2\alpha_1 R$$

$$a_{1\omega O}^e = \omega_1^2 \rho_{1O} = v^2/6R$$

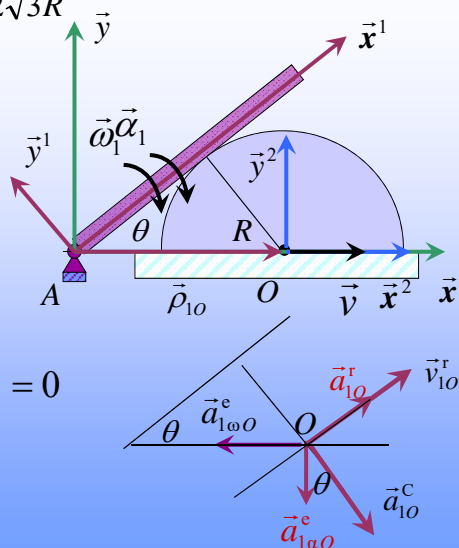
$$a_{1O}^C = 2\omega_1 v_{1O}^r = 2v^2/3R$$

$$\vec{a}_{1O}^r + \vec{a}_{1\alpha O}^e + \vec{a}_{1\omega O}^e + \vec{a}_{1O}^C = \vec{0}$$

在 \vec{y}^1 坐标式

$$a_{1\omega O}^e \sin \theta - a_{1\alpha O}^e \cos \theta - a_{1O}^C = 0$$

$$\alpha_1 = -\frac{7\sqrt{3}v^2}{36R^2}$$



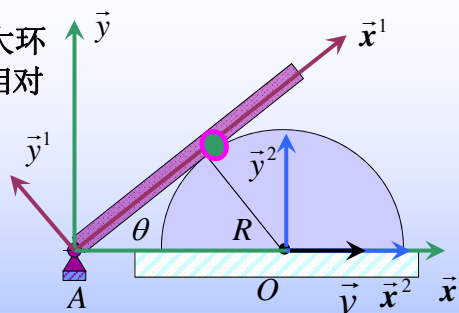
2018年10月31日
理论力学CAI 刚体平面运动学

11

刚体系运动学矢量瞬时分析方法/解

方案3: 虚加一小环, 套在杆上与大环上, 则小环为杆与环上的动点, 相对运动轨迹清楚。

但需补充条件为: 小环相对大半圆环的相对角速度与杆的绝对角速度大小相等



2018年10月31日
理论力学CAI 刚体平面运动学

12

定点、动点综合



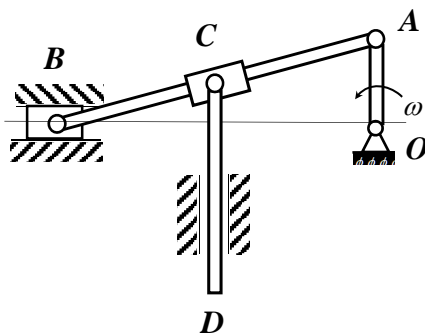
2018年10月31日
理论力学CAI 刚体平面运动学

1

刚体系运动学矢量瞬时分析方法/解

[例] (习题03-34)

一机构曲柄 OA 以匀角速度 ω 转动，在图示瞬时， $OA \perp OB$ ，套筒 C 位于连杆 AB 的中点。求此瞬时杆 CD 的速度和加速度。图中 $OA=r$ ， $AB=4r$ 。

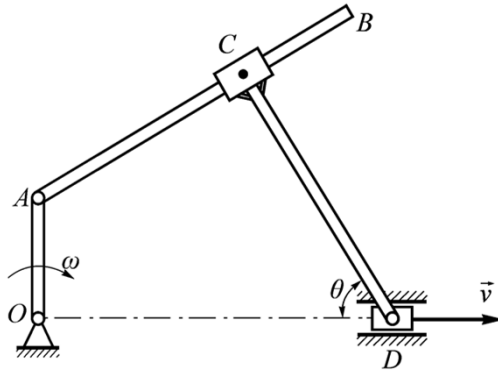


2018年10月31日
理论力学CAI 刚体平面运动学

2

[例]

平面机构如图所示。套筒C与杆CD相互垂直并刚连。已知： $OA=r=10\text{cm}$ ， $CD=20\text{cm}$ 。在图示位置时， OA 铅垂， $\theta=60^\circ$ ，杆 OA 的角速度 $\omega=4\text{rad/s}$ ，滑块D的速度 $v=20\text{cm/s}$ 。试求该瞬时杆 AB 、 CD 的角加速度。

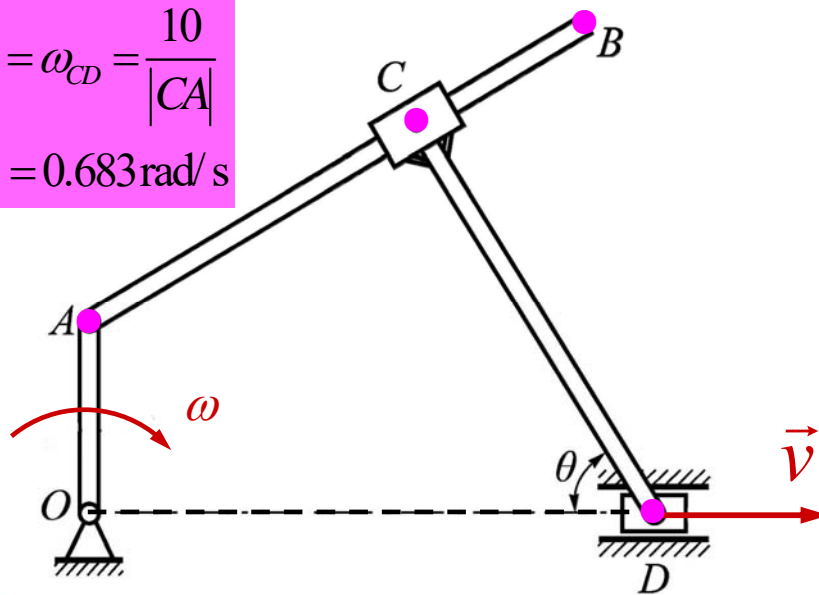


2018年10月31日

理论力学CAI 刚体平面运动学

3

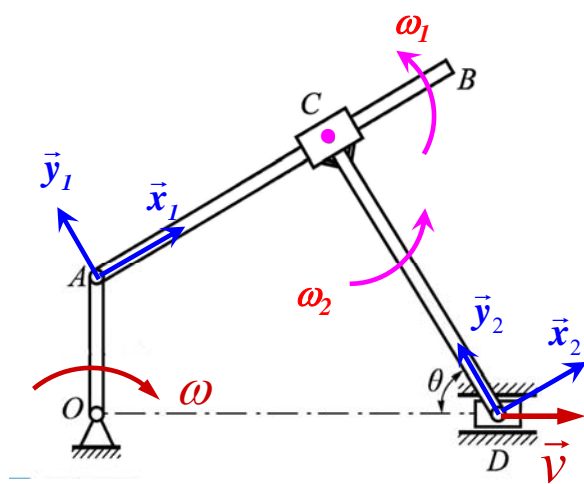
$$\omega_{AB} = \omega_{CD} = \frac{10}{|CA|} = 0.683 \text{ rad/s}$$



理论力学CAI 刚体平面运动学

4

法一



连体基: $A - \vec{e}_1$, $D - \vec{e}_2$

以CD杆上C点为兴趣点

速度分析:

$$\vec{v}_C = \vec{v}_{1C} = \vec{v}_{1C}^r + \vec{v}_{1C}^e + \vec{v}_{1\omega C}^e$$

$$\vec{v}_C = \vec{v}_{2C} = \vec{v}_{2C}^e + \vec{v}_{2\omega C}^e$$

$$\vec{v}_{1C} = \vec{v}_{2C}$$

$$\vec{v}_{1C}^r + \vec{v}_{1C}^e + \vec{v}_{1\omega C}^e = \vec{v}_{2C}^e + \vec{v}_{2\omega C}^e$$

$$v_{1C}^e = v_A = \omega r, \quad v_{2C}^e = v$$

$$v_{1\omega C}^e = \omega_1 |AC|,$$

$$v_{2\omega C}^e = \omega_2 |CD|,$$

$$|AC| = 20(\sqrt{3} - 1),$$

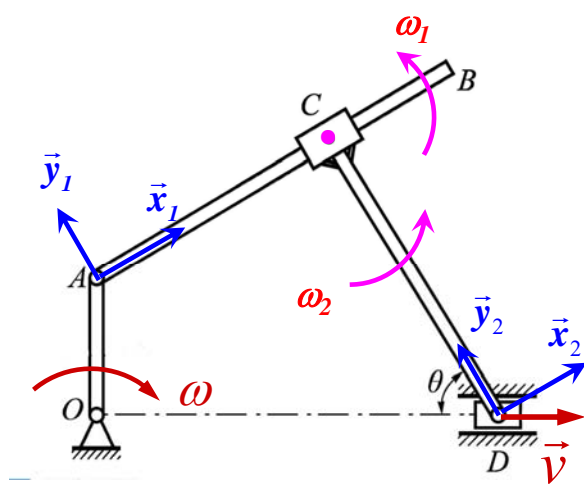


2018年10月31日

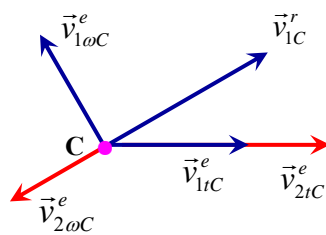
理论力学CAI 刚体平面运动学

5

法一



速度矢量图:



$$\vec{v}_{1C}^r + \vec{v}_{1C}^e + \vec{v}_{1\omega C}^e = \vec{v}_{2C}^e + \vec{v}_{2\omega C}^e$$

$$\omega_1 = \omega_2,$$

坐标方程求出 $\omega_1, \omega_2, v_{1C}^r$

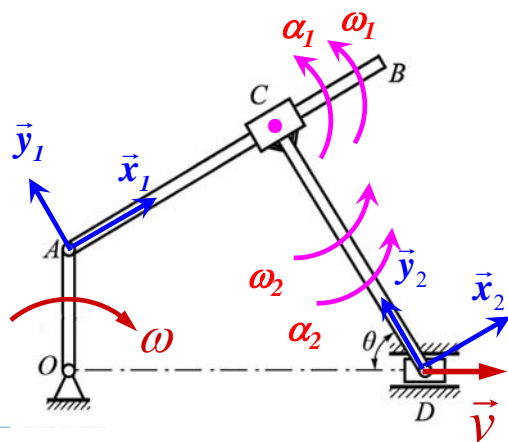


2018年10月31日

理论力学CAI 刚体平面运动学

6

法一



加速度分析:

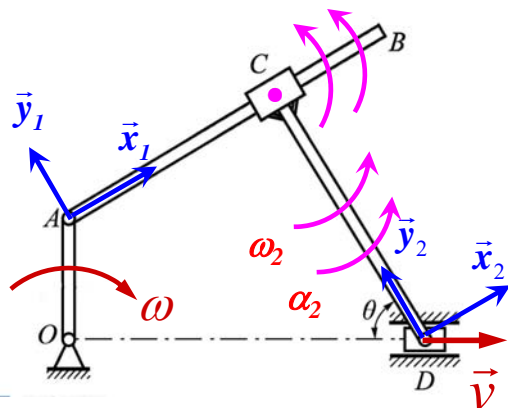
$$\begin{aligned}\vec{a}_C &= \vec{a}_{1C} \\ &= \vec{a}_{1C}^r + \vec{a}_{1C}^e + \vec{a}_{1\omega C}^e + \vec{a}_{1\alpha C}^e + \vec{a}_{1C}^C \\ \vec{a}_C &= \vec{a}_{2C} = \vec{a}_{2C}^e + \vec{a}_{2\omega C}^e + \vec{a}_{2\alpha C}^e \\ \vec{a}_{1C} &= \vec{a}_{2C} \\ \vec{a}_{1C}^r + \vec{a}_{1C}^e + \vec{a}_{1\omega C}^e + \vec{a}_{1\alpha C}^e + \vec{a}_{1C}^C &= \vec{a}_{2C}^e + \vec{a}_{2\omega C}^e + \vec{a}_{2\alpha C}^e \\ a_{1C}^e &= a_A = \omega^2 r, \quad a_{2C}^e = a_D = 0 \\ a_{1\omega C}^e &= \omega_1^2 |AC|, \quad a_{2\omega C}^e = \omega_2^2 |CD|, \\ a_{1\alpha C}^e &= \alpha_1 |AC|, \quad a_{2\alpha C}^e = \alpha_2 |CD|, \\ a_{1C}^C &= 2\omega_1 v_{1C}^r\end{aligned}$$



2018年10月31日
理论力学CAI 刚体平面运动学

7

法一



加速度矢量图:

$$\begin{aligned}\vec{a}_{1C}^r + \vec{a}_{1C}^e + \vec{a}_{1\omega C}^e + \vec{a}_{1\alpha C}^e + \vec{a}_{1C}^C &= \vec{a}_{2C}^e + \vec{a}_{2\omega C}^e + \vec{a}_{2\alpha C}^e\end{aligned}$$

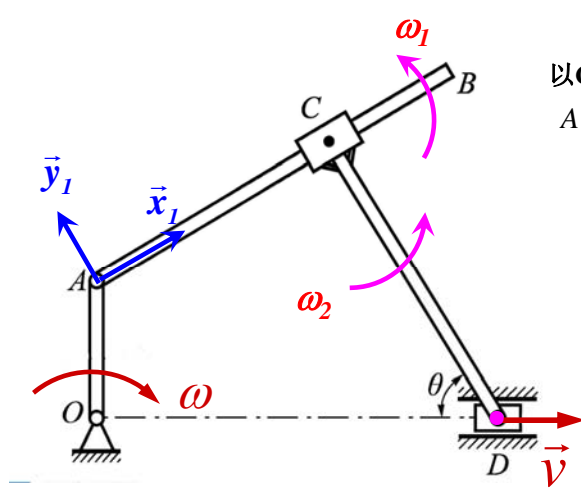
$\alpha_1 = \alpha_2$, 坐标方程求出 $\alpha_1, \alpha_2, a_{1C}^r$



2018年10月31日
理论力学CAI 刚体平面运动学

8

法二



连体基: $A - \vec{e}_1$

以CD杆上D点为兴趣点, 在基 $A - \vec{e}_1$ 上为动点, 相对轨迹为平行于AB的直线

速度分析:

$$\vec{v}_D = \vec{v}_{1D} = \vec{v}_{1D}^r + \vec{v}_{1D}^e + \vec{v}_{1\omega D}^e$$

$$v_{1D}^e = v_A = \omega r,$$

$$v_{1\omega D}^e = \omega_1 |AD|,$$

$$|AD| = 20\sqrt{5 - 2\sqrt{3}}$$

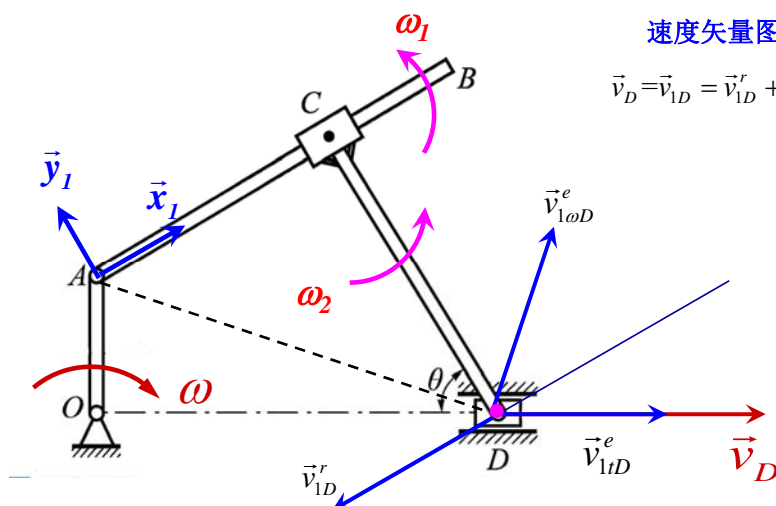


2018年10月31日

理论力学CAI 刚体平面运动学

9

法二



速度矢量图:

$$\vec{v}_D = \vec{v}_{1D} = \vec{v}_{1D}^r + \vec{v}_{1D}^e + \vec{v}_{1\omega D}^e$$

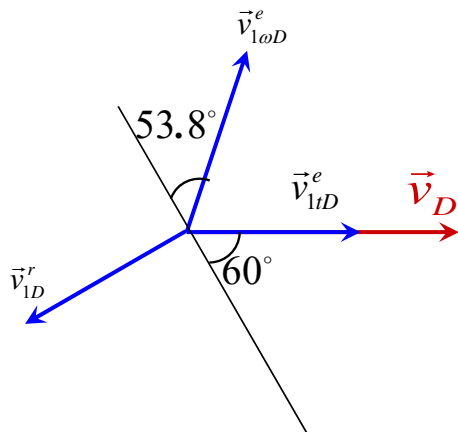


2018年10月31日

理论力学CAI 刚体平面运动学

10

速度矢量图:



$$\vec{v}_D = \vec{v}_{1D} = \vec{v}_{1D}^r + \vec{v}_{1D}^e + \vec{v}_{1\omega D}^e$$

坐标方程求出 ω_1, v_{1C}^r

$$\omega_1 = 0.683 \text{ rad/s}$$



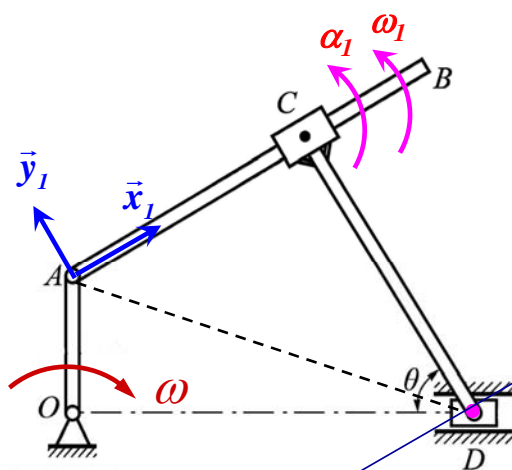
2018年10月31日

理论力学CAI 刚体平面运动学

11

法二

加速度分析:



$$\begin{aligned} \vec{a}_D &= \vec{0} \\ &= \vec{a}_{1D}^r + \vec{a}_{1D}^e + \vec{a}_{1\omega D}^e + \vec{a}_{1\alpha D}^e + \vec{a}_{1D}^C \\ a_{1D}^e &= a_A = \omega^2 r, \\ a_{1\omega D}^e &= \omega_1^2 |AD|, \\ a_{1\alpha D}^e &= \alpha_1 |AD|, \\ a_{1D}^C &= 2\omega_1 v_{1D}^r, \\ |AD| &= 20\sqrt{5-2\sqrt{3}} \end{aligned}$$



2018年10月31日 相对运动轨迹

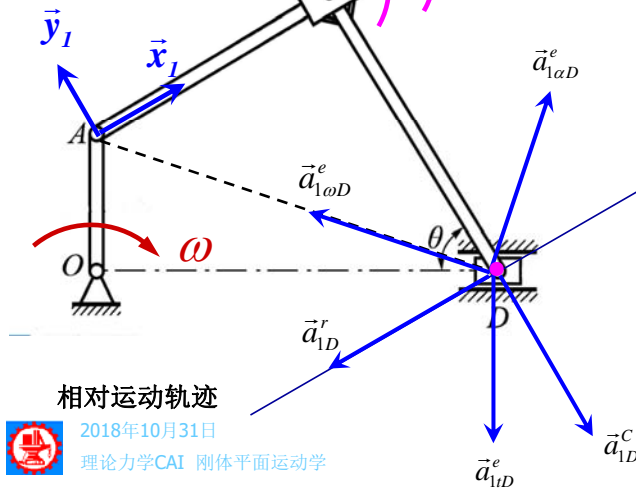
理论力学CAI 刚体平面运动学

12

法二

加速度矢量图

$$\vec{0} = \vec{a}_{1D}^r + \vec{a}_{1tD}^e + \vec{a}_{1\omega D}^e + \vec{a}_{1\alpha D}^e + \vec{a}_{1D}^C$$

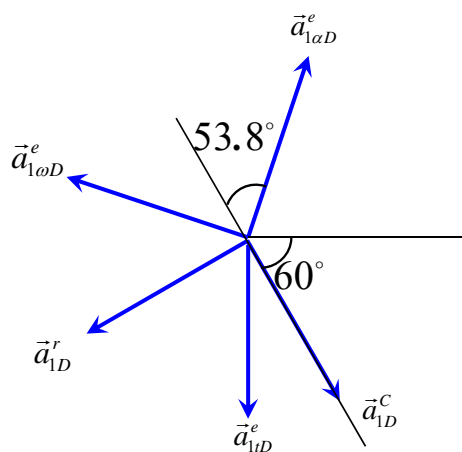


13

法二

加速度矢量图

$$\vec{0} = \vec{a}_{1D}^r + \vec{a}_{1tD}^e + \vec{a}_{1\omega D}^e + \vec{a}_{1\alpha D}^e + \vec{a}_{1D}^C$$



2018年10月31日
理论力学CAI 刚体平面运动学

14

圆盘 B_2 的半径为 r ，圆槽的半径为 $R = 3r$ ，杆 BD 的长度为 $2r$ 。圆盘 B_2 纯滚动，角速度为 ω ，角加速度为 0 。求 (1) 此瞬时杆 AB 的绝对速度和绝对加速度；(2) 杆 BD 的绝对角速度（用速度瞬心法）和绝对角加速度。(25分)

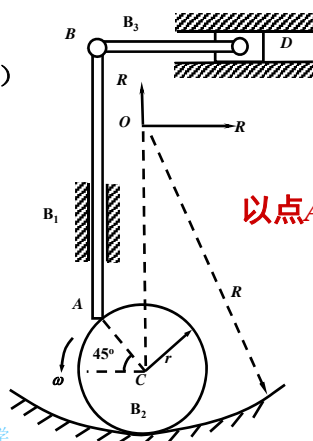
$$v_A = v_C = \omega r \quad (\text{顺})$$

$$a_A = \frac{1}{2}\omega^2 r - 2\sqrt{2}\omega^2 r$$

$$\omega_3 = \omega / 2$$

$$\alpha_3 = \frac{1}{4}\omega^2 - \sqrt{2}\omega^2$$

(逆)



以点A或点C为兴趣点均可



2018年10月31日
理论力学CAI 刚体平面运动学

17