理论力学 CAI

刚体平面运动学

- 前言
- 刚体的连体基 刚体位形的描述
- 刚体的平面运动
- 刚体的姿态及其变化
- 基点的位置、速度与加速度
- 刚体上给定点的位置、速度与加速度
- 相对刚体运动的任意点的位置、速度与加速度

刚体姿态变化的描述

理论力学 CAI

刚体平面运动学

- 前言
- 刚体的连体基 刚体位形的描述
- 刚体的平面运动
- 刚体的姿态及其变化
- 基点的位置、速度与加速度
- 刚体上给定点的位置、速度与加速度
- 相对刚体运动的任意点的位置、速度与加速度

基点的位置速度与加速度

刚体姿态变化的描述

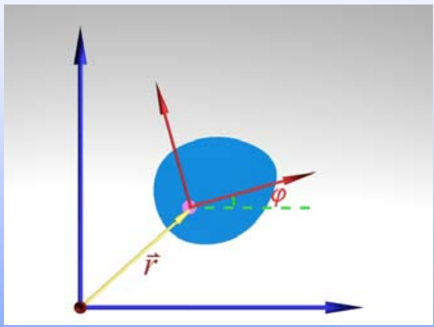
- 前言
- 刚体的角速度与角加速度
- 矢量在不同基上对时间的导数
- 角速度矢量的叠加原理
- 刚体绕平行轴转动的合成

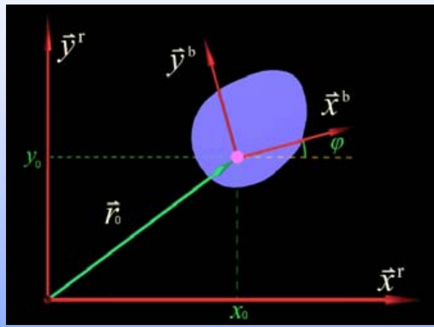
刚体平面运动学

刚体姿态变化的描述

- 前言
- 刚体的角速度与角加速度
- 矢量在不同基上对时间的导数
- 角速度矢量的叠加原理
- 刚体绕平行轴转动的合成

前言





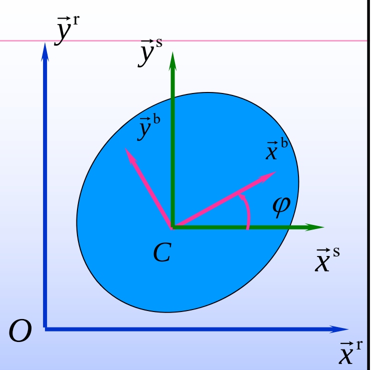
研究刚体的姿态变化与连体基基点的移动无关

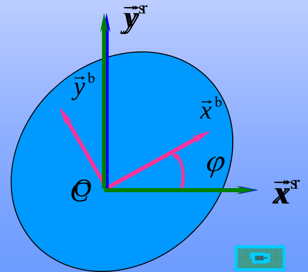
前言

在研究刚体一般运动的姿态变化时可不考虑基点的移动

平面一般运动刚体的姿态变化 ⟺ 刚体绕连体基基点定轴转动的姿态变化

刚体定轴转动运动学（相对平移参考系）





刚体姿态变化的描述

- 前言
- 刚体的角速度与角加速度
- 矢量在不同基上对时间的导数
- 角速度矢量的叠加原理
- 刚体绕平行轴转动的合成

刚体的角速度与角加速度

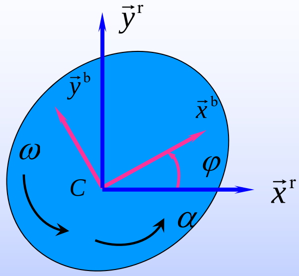
- 平面一般运动/定轴转动刚体的角速度与角加速度

$\omega = \dfrac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}t} = \dot{\varphi}$　　$\vec{\omega} = \omega \vec{z}$

角速度　　角速度矢量　　$\vec{\omega}^{\mathrm{rb}}$

$\alpha = \dfrac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}t} = \ddot{\varphi}$　　$\vec{\alpha} = \alpha \vec{z}$

角加速度　　角加速度矢量　　$\vec{\alpha}^{\mathrm{rb}}$



角速度描述刚体的姿态变化

角加速度描述刚体的角速度变化

平动刚体角速度、角加速度 为零

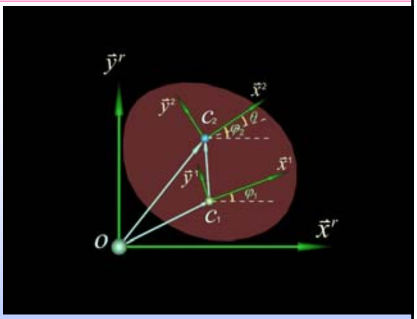
不同的连体基描述同一刚体位形的姿态角的关系

$$\varphi_2 = \varphi_1 + \theta = \varphi_1 + 常数$$

$$\dot{\varphi}_1 = \dot{\varphi}_2 \qquad \ddot{\varphi}_1 = \ddot{\varphi}_2$$

$$\omega \qquad \alpha$$

刚体的 角速度 角加速度



- **平面一般运动刚体的角速度和角加速度与连体基基点的选取无关**
  - 刚体绕某基点转动角速度矢量与角加速度矢量统称为**刚体的角速度矢量与角加速度矢量**

刚体姿态变化的描述

- 前言
- 刚体的角速度与角加速度
- 矢量在不同基上对时间的导数
- 角速度矢量的叠加原理
- 刚体绕平行轴转动的合成

矢量在不同基上对时间的导数

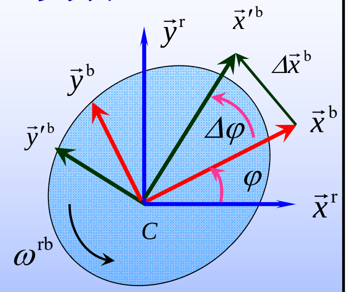
- 刚体转动时基矢量的变化

$$\vec{x}^{\mathrm{b}}(t) \qquad \vec{x}^{\mathrm{b}}(t+\Delta t) \qquad \Delta\vec{x}^{\mathrm{b}}$$

$$\varphi \qquad \varphi+\Delta\varphi \qquad \vec{z}\times\left(\vec{x}^{\mathrm{b}}\Delta\varphi\right)$$

$$\frac{{}^{\mathrm{r}}\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\vec{x}^{\mathrm{b}} = \lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta\vec{x}^{\mathrm{b}}}{\Delta t} = \lim_{\Delta t\to 0}\frac{\vec{z}\times\left(\vec{x}^{\mathrm{b}}\Delta\varphi\right)}{\Delta t}$$

$$= (\vec{z}\times\vec{x}^{\mathrm{b}})\frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}t} = \underbrace{\frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}t}\vec{z}}_{\vec{\omega}^{\mathrm{rb}}}\times\vec{x}^{\mathrm{b}}$$



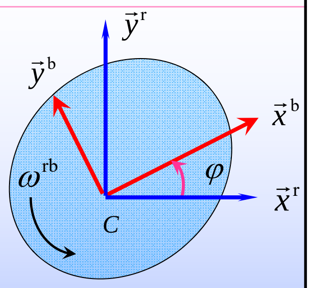
$$\frac{{}^{\mathrm{r}}\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\vec{x}^{\mathrm{b}} = \vec{\omega}^{\mathrm{rb}}\times\vec{x}^{\mathrm{b}}$$

$$\frac{{}^{\mathrm{r}}\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\vec{x}^{\mathrm{b}} = \vec{\omega}^{\mathrm{rb}}\times\vec{x}^{\mathrm{b}}$$

$$\frac{{}^{\mathrm{r}}\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\vec{y}^{\mathrm{b}} = \vec{\omega}^{\mathrm{rb}}\times\vec{y}^{\mathrm{b}}$$

$$\vec{\boldsymbol{e}}^{\mathrm{b}}$$

$$\frac{{}^{\mathrm{r}}\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\vec{\boldsymbol{e}}^{\mathrm{b}} = \vec{\omega}^{\mathrm{rb}}\times\vec{\boldsymbol{e}}^{\mathrm{b}}$$



- **连体基的基矢量在参考基上对时间的导数等于该基相对于参考基的角速度矢量与其的叉积**

- 任意矢量 $\vec{b}$ 在基r上对时间的导数

$$\vec{b}=\boldsymbol{b}^{\mathrm{bT}}\vec{\boldsymbol{e}}^{\mathrm{b}}$$

$$\frac{{}^{\mathrm{r}}\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\vec{\boldsymbol{e}}^{\mathrm{b}}=\vec{\omega}^{\mathrm{rb}}\times\vec{\boldsymbol{e}}^{\mathrm{b}}$$

$$\frac{{}^{\mathrm{r}}\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\vec{b}=\frac{{}^{\mathrm{r}}\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\boldsymbol{b}^{\mathrm{bT}}\vec{\boldsymbol{e}}^{\mathrm{b}}\right)=\underline{\left(\frac{{}^{\mathrm{r}}\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{b}^{\mathrm{bT}}\right)}\vec{\boldsymbol{e}}^{\mathrm{b}}+\boldsymbol{b}^{\mathrm{bT}}\underline{\left(\frac{{}^{\mathrm{r}}\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\vec{\boldsymbol{e}}^{\mathrm{b}}\right)}$$

$$\left(\frac{{}^{\mathrm{r}}\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{b}^{\mathrm{bT}}\right)\vec{\boldsymbol{e}}^{\mathrm{b}}=\left(\frac{{}^{\mathrm{b}}\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{b}^{\mathrm{bT}}\right)\vec{\boldsymbol{e}}^{\mathrm{b}}=\underline{\frac{{}^{\mathrm{b}}\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}}\vec{b}$$

$$\boldsymbol{b}^{\mathrm{bT}}\left(\frac{{}^{\mathrm{r}}\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\vec{\boldsymbol{e}}^{\mathrm{b}}\right)=\boldsymbol{b}^{\mathrm{bT}}\vec{\omega}^{\mathrm{rb}}\times\vec{\boldsymbol{e}}^{\mathrm{b}}=\vec{\omega}^{\mathrm{rb}}\times\boldsymbol{b}^{\mathrm{bT}}\vec{\boldsymbol{e}}^{\mathrm{b}}$$

$$=\underline{\vec{\omega}^{\mathrm{rb}}\times\vec{b}}$$

$$\frac{{}^{\mathrm{r}}\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\vec{b}=\frac{{}^{\mathrm{b}}\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\vec{b}+\vec{\omega}^{\mathrm{rb}}\times\vec{b}$$

$$\dot{\vec{b}}=\mathring{\vec{b}}+\vec{\omega}^{\mathrm{rb}}\times\vec{b}$$

任意矢量在基r上对时间的导数等于它在基b上对时间的导数加上基b相对于基r的角速度矢量与该矢量的叉积

$$\frac{{}^{\mathrm{r}}\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\vec{b}=\frac{{}^{\mathrm{b}}\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\vec{b}+\vec{\omega}^{\mathrm{rb}}\times\vec{b}\qquad \dot{\vec{b}}=\mathring{\vec{b}}+\vec{\omega}^{\mathrm{rb}}\times\vec{b}$$

- 与基b固结的任意矢量在基r上对时间的导数

$$\frac{{}^{\mathrm{b}}\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\vec{b}=\vec{0}$$

$$\frac{{}^{\mathrm{r}}\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\vec{b}=\vec{\omega}^{\mathrm{rb}}\times\vec{b}\qquad \dot{\vec{b}}=\vec{\omega}^{\mathrm{rb}}\times\vec{b}$$

- 矢量 $\vec{b}$ 在基r上对时间的二阶导数

$$\frac{{}^{\mathrm{r}}\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}t^2}\vec{b}=\frac{{}^{\mathrm{r}}\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{{}^{\mathrm{r}}\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\vec{b}\right)=\frac{{}^{\mathrm{r}}\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{{}^{\mathrm{b}}\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\vec{b}+\vec{\omega}^{\mathrm{rb}}\times\vec{b}\right)$$

$$\frac{{}^{\mathrm{r}}\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\vec{b}=\frac{{}^{\mathrm{b}}\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\vec{b}+\vec{\omega}^{\mathrm{rb}}\times\vec{b}$$

$$\frac{{}^{\mathrm{r}}\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{{}^{\mathrm{b}}\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\vec{b}\right)=\frac{{}^{\mathrm{b}}\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{{}^{\mathrm{b}}\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\vec{b}\right)+\vec{\omega}^{\mathrm{rb}}\times\frac{{}^{\mathrm{b}}\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\vec{b}=\frac{{}^{\mathrm{b}}\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}t^2}\vec{b}+\vec{\omega}^{\mathrm{rb}}\times\frac{{}^{\mathrm{b}}\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\vec{b}$$

$$\frac{{}^{\mathrm{r}}\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\vec{\omega}^{\mathrm{rb}}\times\vec{b}\right)=\frac{{}^{\mathrm{r}}\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\vec{\omega}^{\mathrm{rb}}\times\vec{b}+\vec{\omega}^{\mathrm{rb}}\times\frac{{}^{\mathrm{r}}\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\vec{b}=\frac{{}^{\mathrm{r}}\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\vec{\omega}^{\mathrm{rb}}\times\vec{b}+\vec{\omega}^{\mathrm{rb}}\times\left(\frac{{}^{\mathrm{b}}\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\vec{b}+\vec{\omega}^{\mathrm{rb}}\times\vec{b}\right)$$

$$\ddot{\vec{b}}=\mathring{\mathring{\vec{b}}}+\vec{\alpha}^{\mathrm{rb}}\times\vec{b}+2\vec{\omega}^{\mathrm{rb}}\times\mathring{\vec{b}}+\vec{\omega}^{\mathrm{rb}}\times\left(\vec{\omega}^{\mathrm{rb}}\times\vec{b}\right)$$

$$\ddot{\vec{b}}=\mathring{\mathring{\vec{b}}}+\vec{\alpha}^{\mathrm{rb}}\times\vec{b}+2\vec{\omega}^{\mathrm{rb}}\times\mathring{\vec{b}}+\vec{\omega}^{\mathrm{rb}}\times\left(\vec{\omega}^{\mathrm{rb}}\times\vec{b}\right)$$

- 与基b固结的矢量 $\vec{b}$ 在基r上对时间的二阶导数

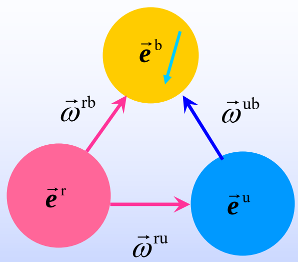
$$\mathring{\mathring{\vec{b}}}=\mathring{\vec{b}}=\vec{0}$$

$$\ddot{\vec{b}}=\vec{\alpha}^{\mathrm{rb}}\times\vec{b}+\vec{\omega}^{\mathrm{rb}}\times\left(\vec{\omega}^{\mathrm{rb}}\times\vec{b}\right)$$

刚体姿态变化的描述

- 前言
- 刚体的角速度与角加速度
- 矢量在不同基上对时间的导数
- **角速度矢量的叠加原理**
- 刚体绕平行轴转动的合成

角速度矢量的叠加原理



对于与基**b**固结的矢量 $\vec{b}$

在基**u**上对时间的导数 $\dfrac{{}^{\mathrm{u}}\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\vec{b} = \vec{\omega}^{\mathrm{ub}} \times \vec{b}$

在基**r**上对时间的导数 $\dfrac{{}^{\mathrm{r}}\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\vec{b} = \vec{\omega}^{\mathrm{rb}} \times \vec{b}$

或 $\dfrac{{}^{\mathrm{r}}\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\vec{b} = \dfrac{{}^{\mathrm{u}}\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\vec{b} + \vec{\omega}^{\mathrm{ru}} \times \vec{b}$

$$\frac{{}^{\mathrm{r}}\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\vec{b} = \frac{{}^{\mathrm{b}}\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\vec{b} + \vec{\omega}^{\mathrm{rb}} \times \vec{b}$$

$r \to u \qquad b \to u$

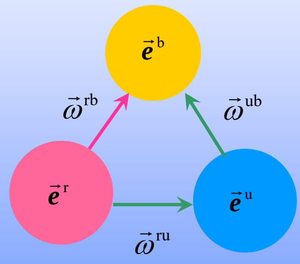
$$\vec{\omega}^{\mathrm{rb}} \times \vec{b} = \vec{\omega}^{\mathrm{ub}} \times \vec{b} + \vec{\omega}^{\mathrm{ru}} \times \vec{b} = \left(\vec{\omega}^{\mathrm{ru}} + \vec{\omega}^{\mathrm{ub}}\right) \times \vec{b}$$

$$\vec{\omega}^{\mathrm{rb}} = \vec{\omega}^{\mathrm{ru}} + \vec{\omega}^{\mathrm{ub}}$$

$$\vec{\omega}^{\mathrm{rb}} = \vec{\omega}^{\mathrm{ru}} + \vec{\omega}^{\mathrm{ub}}$$ 矢量和

基（刚体）b相对于基（刚体）r的角速度矢量等于该基（刚体）相对于基（刚体）u与基（刚体）u相对于基（刚体）b两个角速度矢量的和

角速度矢量叠加原理



- 对于作平面运动的刚体系

$$\omega^{\mathrm{rb}} = \omega^{\mathrm{ru}} + \omega^{\mathrm{ub}}$$ 标量和

- 对于作平面运动的刚体系角加速度可叠加

$$\alpha^{\mathrm{rb}} = \alpha^{\mathrm{ru}} + \alpha^{\mathrm{ub}}$$ 标量和

$$\alpha = \frac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}t}$$

刚体姿态变化的描述

- 前言
- 刚体的角速度与角加速度
- 矢量在不同基上对时间的导数
- 角速度矢量的叠加原理
- **刚体绕平行轴转动的合成**

系统有两个可动的刚体

小齿轮（研究对象）

连杆（小齿轮的另一个参考物）

运动分析

连杆

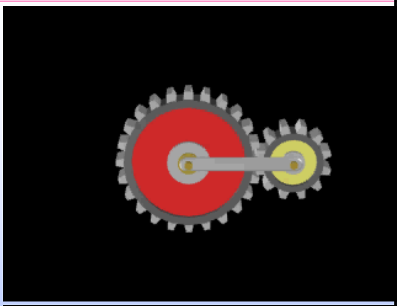
相对定空间作刚体定轴转动

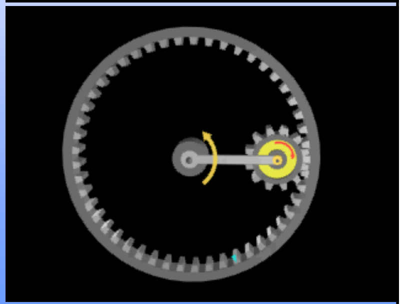
小齿轮

相对连杆定轴转动

相对定空间作特殊的平面一般运动

刚体绕平行轴转动





- 考察刚体姿态的变化

参考基 $\vec{e}^{\,r}$ 定基

相对定基运动的基 $\vec{e}^{\,u}$ 动基

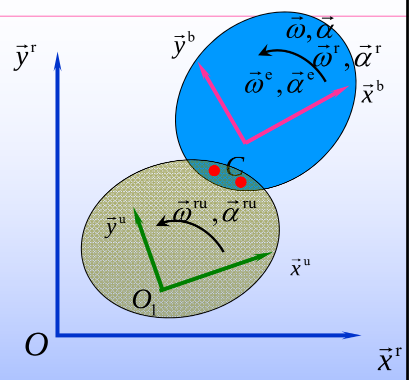
对象的基 $\vec{e}^{\,b}$ 连体 基

在定基上考察刚体运动 $\vec{e}^{\,r}/\vec{e}^{\,b}$ $\vec{\omega},\vec{\alpha}$ 刚体绝对角(加)速度

在定基上考察动基运动 $\vec{e}^{\,r}/\vec{e}^{\,u}$ $\vec{\omega}^{ru},\vec{\alpha}^{ru}$ 动基绝对角(加)速度

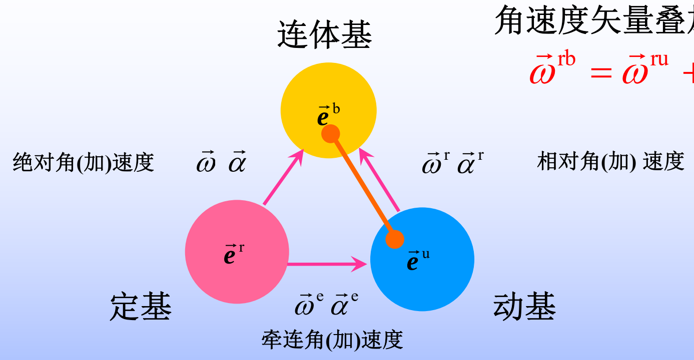
刚体与动基固接，在定基上考察到的刚体运动 $\vec{e}^{\,r}/\vec{e}^{\,u}+\vec{e}^{\,b}$ $\vec{\omega}^{e}=\vec{\omega}^{ru},\vec{\alpha}^{e}=\vec{\alpha}^{ru}$ 刚体的牵连角(加) 速度

在动基上考察刚体运动 $\vec{e}^{\,u}/\vec{e}^{\,b}$ $\vec{\omega}^{r},\vec{\alpha}^{r}$ 刚体相对角(加) 速度



角速度矢量叠加原理

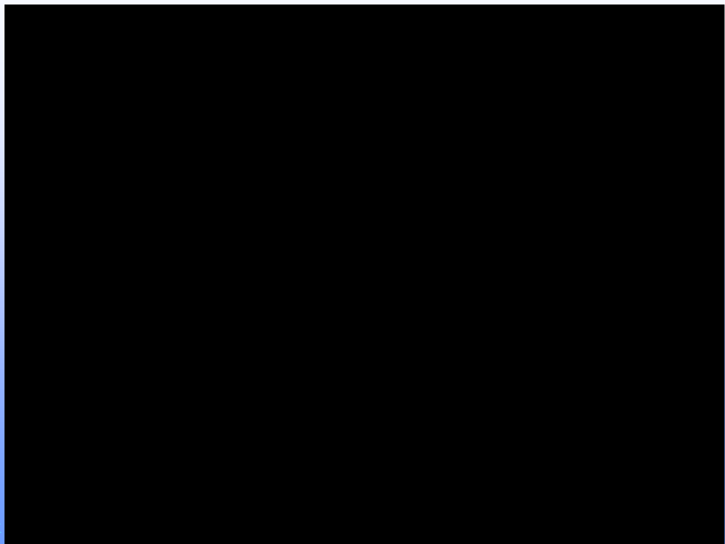
$$\vec{\omega}^{\mathrm{rb}} = \vec{\omega}^{\mathrm{ru}} + \vec{\omega}^{\mathrm{ub}}$$



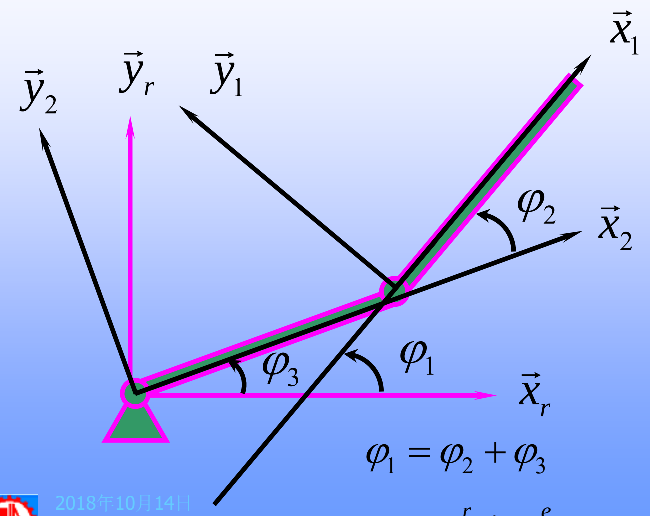
$$\omega = \omega^{\mathrm{r}} + \omega^{\mathrm{e}} \qquad \alpha = \alpha^{\mathrm{r}} + \alpha^{\mathrm{e}}$$

对于刚体平面运动, 刚体的绝对角(加)速度等于刚体相对于动基的相对(加)角速度与刚体牵连(加)角速度之代数和

- 机械臂



- 机械臂外臂的绝对角（加）速度、相对角（加）速度、牵连角（加）。



$$\omega = \frac{\mathrm{d}\varphi_1}{\mathrm{d}t}$$

$$\omega^r = \frac{\mathrm{d}\varphi_2}{\mathrm{d}t}$$

$$\omega^e = \frac{\mathrm{d}\varphi_3}{\mathrm{d}t}$$

$$\varphi_1 = \varphi_2 + \varphi_3$$

$$\omega = \omega^r + \omega^e$$

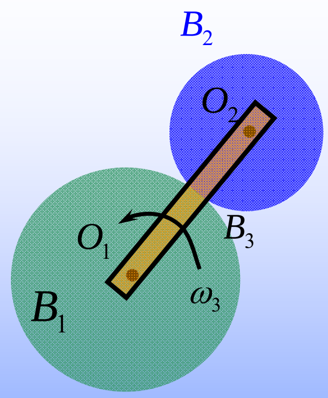
注意角速度方向

- **[例]**

图示一对外接齿轮，齿轮$\mathbf{B_1}$与机座固结，齿轮$\mathbf{B_2}$由连杆$\mathbf{B_3}$带动在齿轮$\mathbf{B_1}$上滚动

$\mathbf{B_1}$与齿轮$\mathbf{B_2}$的节圆半径分别为$\boldsymbol{R_1}$与$\boldsymbol{R_2}$

连杆$\mathbf{B_3}$相对机座的角速度为$\boldsymbol{\omega_3}$



求:齿轮$\mathbf{B_2}$相对于连杆$\mathbf{B_3}$的角速度

[解]　方法 一

$\mathbf{B_2}$对$\mathbf{B_3}$的相对转角为

$\vec{x}_2$ 相对 $\vec{x}_3$ 的夹角

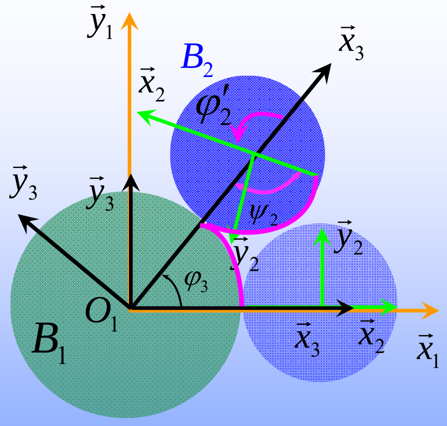
$$\varphi_2' = \psi_2$$

齿轮啮合条件

$$\psi_2 R_2 = \varphi_3 R_1$$

$$\varphi_2' = \frac{R_1}{R_2}\varphi_3$$

$$\omega_2^{\mathrm{r}} = \dot{\varphi}_2 = \frac{R_1}{R_2}\dot{\varphi}_3 = \frac{R_1}{R_2}\omega_3$$



方法 二

定基:齿轮$\mathbf{B_1}$　$\vec{e}^1$

动基:连杆$\mathbf{B_3}$　$\vec{e}^3$

连体基:齿轮$\mathbf{B_2}$　$\vec{e}^2$

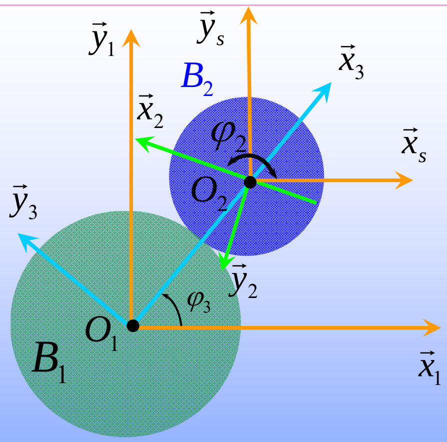
牵连角速度已知

$$\omega_2^{\mathrm{e}} = \dot{\varphi}_3 = \omega_3$$

待求齿轮$\mathbf{B_2}$相对角速度　ω_2^{r}

先计算齿轮$\mathbf{B_2}$绝对角速度

$$\omega_2 = \dot{\varphi}_2$$



$$\omega_2^{\mathrm{e}} = \dot{\varphi}_3 = \omega_3$$

先计算齿轮B_2绝对角速度

齿轮啮合条件

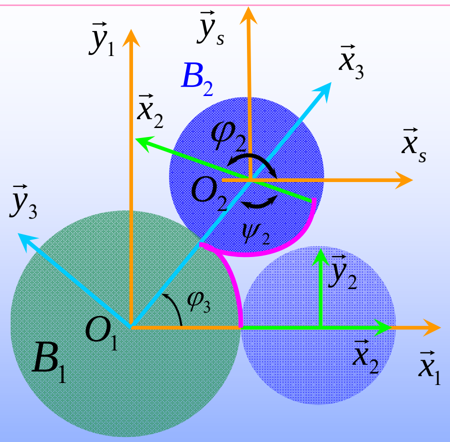
$$\psi_2 R_2 = \varphi_3 R_1$$

$$\varphi_2 = \psi_2 + \varphi_3 = \frac{R_1 + R_2}{R_2}\varphi_3$$

$$\omega_2 = \frac{R_1 + R_2}{R_2}\omega_3$$

相对角速度 $\omega = \omega^{\mathrm{r}} + \omega^{\mathrm{e}}$

$$\omega_2^{\mathrm{r}} = \omega_2 - \omega_2^{\mathrm{e}} = \frac{R_1}{R_2}\omega_3$$



? 有无其他求解方法

小结

- **刚体的姿态描述** $\boldsymbol{A}^{\mathrm{rb}}$
  - **平面刚体姿态角** φ

$$\boldsymbol{A}^{\mathrm{rb}} = \begin{pmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix}$$

- **刚体的角速度矢量与角加速度矢量** $\vec{\omega}^{\mathrm{rb}}$ $\vec{\alpha}^{\mathrm{rb}}$
  - **平面运动**

$$\vec{\omega}^{\mathrm{rb}} = \omega^{\mathrm{rb}}\vec{z} \quad \vec{\alpha}^{\mathrm{rb}} = \alpha^{\mathrm{rb}}\vec{z}$$

- **角速度矢量的叠加原理** $\vec{\omega}^{\mathrm{rb}} = \vec{\omega}^{\mathrm{ru}} + \vec{\omega}^{\mathrm{ub}}$
  - **平面刚体** $\omega^{\mathrm{rb}} = \omega^{\mathrm{ru}} + \omega^{\mathrm{ub}}$ $\alpha^{\mathrm{rb}} = \alpha^{\mathrm{ru}} + \alpha^{\mathrm{ub}}$
- **刚体绕平行轴转动的合成(平面问题)**

刚体绝对角(加)速度 $\vec{\omega}, \vec{\alpha}$

刚体的牵连角(加) 速度 $\vec{\omega}^{\mathrm{e}} = \vec{\omega}^{\mathrm{ru}}, \vec{\alpha}^{\mathrm{e}} = \vec{\alpha}^{\mathrm{ru}}$

刚体相对角(加) 速度 $\vec{\omega}^{\mathrm{r}}, \vec{\alpha}^{\mathrm{r}}$

$$\omega = \omega^{\mathrm{r}} + \omega^{\mathrm{e}} \qquad \alpha = \alpha^{\mathrm{r}} + \alpha^{\mathrm{e}}$$

- **矢量在不同基上对时间的导数**

$$\dot{\vec{b}} = \overset{\circ}{\vec{b}} + \vec{\omega}^{\mathrm{rb}} \times \vec{b} \qquad \ddot{\vec{b}} = \overset{\circ\circ}{\vec{b}} + \vec{\alpha}^{\mathrm{rb}} \times \vec{b} + 2\vec{\omega}^{\mathrm{rb}} \times \overset{\circ}{\vec{b}} + \vec{\omega}^{\mathrm{rb}} \times \left(\vec{\omega}^{\mathrm{rb}} \times \vec{b}\right)$$

$$\dot{\vec{b}} = \vec{\omega}^{\mathrm{rb}} \times \vec{b} \qquad \ddot{\vec{b}} = \vec{\alpha}^{\mathrm{rb}} \times \vec{b} + \vec{\omega}^{\mathrm{rb}} \times \left(\vec{\omega}^{\mathrm{rb}} \times \vec{b}\right)$$