

上海交通大学试卷 (A 卷)

(2009 至 2010 学年 第 1 学期)

班级号 _____ 学号 _____

姓名 _____

课程名称 离散数学

成绩 _____

一、 选择题 (40', 每题 2')

A 卷: CBB CD CDAAB D (C) CDD B DACCC

B 卷: BCCBA BADD C A (B) BAD C AABBB

二、 填空题 (20', 每空 2')

1. $Q \rightarrow P$

2. $(\neg P \wedge \neg Q) \vee (\neg P \wedge Q) \vee (P \wedge Q)$ 或 $\vee_{0, 1, 3}$

3. $(P \downarrow Q) \downarrow (P \downarrow Q)$

4. 每个人都有唯一的父亲

5. $(\forall y)(\forall z) P(a, y, z, f(y, z))$

6. $(P(1, 1) \vee P(2, 1)) \wedge (P(1, 2) \vee P(2, 2))$

7. 5

8. $n-k$

9. 50

10. 1

三. (6') 公安机关正在调查一宗盗窃案, 现获得事实如下:

1. A 或 B 盗窃了文物

2. 若 A 盗窃了文物, 则作案时间不可能在午夜前

3. 若 B 证词正确, 则在午夜前屋里灯光未灭

4. 若 B 证词不正确, 则作案时间发生在午夜前

5. 午夜时屋里灯光灭了

试问谁是盗窃犯? 试写出推导过程. 设 P: “A 盗窃了文物”, Q: “B 盗窃了文物”, R: “作案时间发生在午夜前”, S: “午夜前屋里灯光灭了”, T: “B 证词正确”。

解答: B 是盗窃犯 或 Q -----1'

(1) $P \vee Q$

(2) $P \rightarrow \neg R$

(3) $T \rightarrow \neg S$

(4) $\neg T \rightarrow R$

(5) S-----2'

证:

(1) S 前提引入

(2) $T \rightarrow \neg S$ 前提引入

(3) $S \rightarrow \neg T$ (2) 置换

(4) $\neg T$ (1), (3) 分离

(5) $\neg T \rightarrow R$ 前提引入

(6) R (4), (5) 分离

(7) $P \rightarrow \neg R$ 前提引入

(8) $R \rightarrow \neg P$ (7) 置换

(9) $\neg P$ (6), (8) 分离

(10) $P \vee Q$ 前提引入

(11) Q (9), (10) 永真蕴涵-----3'

四. (6') 任用一种推理方法证明: $(P \rightarrow Q) \rightarrow ((R \rightarrow Q) \rightarrow ((P \vee R) \rightarrow Q))$

用等值演算证明:

$$\begin{aligned} & (P \rightarrow Q) \rightarrow ((R \rightarrow Q) \rightarrow ((P \vee R) \rightarrow Q)) \\ &= \neg(\neg P \vee Q) \vee (\neg(\neg R \vee Q) \vee \neg(P \vee R \vee Q)) \\ &= (P \wedge \neg Q) \vee (R \wedge \neg Q) \vee \neg((P \vee R) \wedge \neg Q) \\ &= ((P \vee R) \wedge \neg Q) \vee \neg((P \vee R) \wedge \neg Q) \\ &= T \end{aligned}$$

五. (6') 求公式 $(\exists x)P(x) \rightarrow \neg((\exists y)Q(y) \wedge (\forall x)R(x))$ 的前束范式。

$$\begin{aligned} \text{原式} &= \neg((\exists x)P(x) \vee (\forall y)\neg Q(y) \vee (\exists x)\neg R(x)) \\ &= (\forall x)\neg P(x) \vee (\forall y)\neg Q(y) \vee (\exists z)\neg R(z) \\ &= (\forall x)(\forall y)(\exists z)(\neg P(x) \vee \neg Q(y) \vee \neg R(z)) \end{aligned}$$

六. (6') 判断以下公式是否是普遍有效式并说明理由。

$$((\exists x)P(x) \rightarrow (\exists x)Q(x)) \rightarrow (\exists x)(P(x) \rightarrow Q(x))$$

答案: 是普遍有效式。-----2'

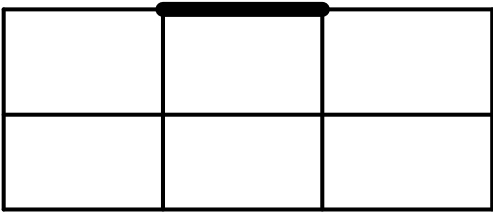
$$\begin{aligned} & ((\exists x)P(x) \rightarrow (\exists x)Q(x)) \rightarrow (\exists x)(P(x) \rightarrow Q(x)) \\ &= \neg(\neg(\exists x)P(x) \vee (\exists x)Q(x)) \vee (\exists x)(\neg P(x) \vee Q(x)) \\ &= (\neg \neg(\exists x)P(x) \wedge \neg(\exists x)Q(x)) \vee (\exists x)\neg P(x) \vee (\exists x)Q(x) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= ((\exists x)P(x) \vee (\exists x) \neg P(x)) \wedge (\neg (\exists x)Q(x) \vee (\exists x) \neg P(x)) \vee (\exists x)Q(x) \\
&= \neg (\exists x)Q(x) \vee (\exists x) \neg P(x) \vee (\exists x)Q(x) \\
&= \text{T} \text{-----4}
\end{aligned}$$

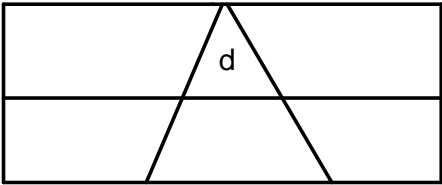
七. (8') 现有 100 个字符组成的字符串, 这些字符取自集合 {a, b, c, d, e, f, g, h, i}, 在 100 个字符中, a 出现了 8 次, b 出现了 20 次, c 出现了 3 次, d 出现了 12 次, e 出现了 12 次, f 出现了 10 次, g 出现了 12 次, h 出现了 5 次, i 出现了 18 次。请对字符集合 {a, b, c, d, e, f, g, h, i} 中的每个字符编码成二进制比特串, 使得这 100 个字符组成的字符串编码后长度最短。试求各字符的二进制编码以及这 100 个字符最优编码的二进制长度。

304-----2'
a, b, c, d, e, f, g, h, i 编码不唯一, 长度分别为 4, 2, 5, 3, 3, 3, 3, 5, 3-----6'

八. (8') 下图是一所房子的俯视图, 除了粗边代表的墙以外, 每一面墙都有一个门。问能否从某个房间开始过每扇门一次且仅一次最后返回。



答: 将粗边缩为一个点, 问题归结为下图的对偶图是否存在欧拉回路。



由于 d 的在的域的边界为 3, 则相应对偶图该点的度为 3, 根据欧拉回路的充要条件知无欧拉回路,
-----5'
所以不可能从某个房间开始过每扇门一次且仅一次最后返回。-----3'