上海交通大学理论力学试卷（A 卷）答案

（ 20**10** 至 20**11** 学年 第 1 学期 ）

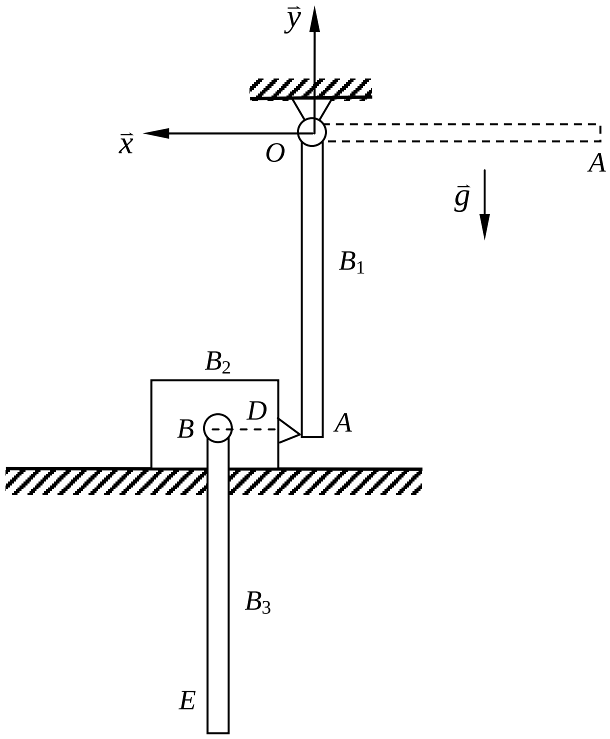
1．(20 分) 如图所示，滑块 B_2 置于光滑的水平面上，匀质杆 B_1 与基座铰接于 O，匀质杆 B_3 与滑块 B_2 铰接于 B。B_1 与 B_3 长均为 l，B_1、B_2 与 B_3 的质量均为 m。初始时 B_2 静止，B_3 静止处在铅垂位置，B_1 在重力作用下无初速自水平位置开始运动。在图示位置，B_1 的端点 A 与 B_2 的边界点 D 发生碰撞，恢复因素为 e = 0.5。（图中 O-$\vec{\boldsymbol{e}}$ 为惯性基）。

求碰撞后

（1） B_1 与 B_3 的角速度

（2） B_1 对 B_2 的碰撞冲量

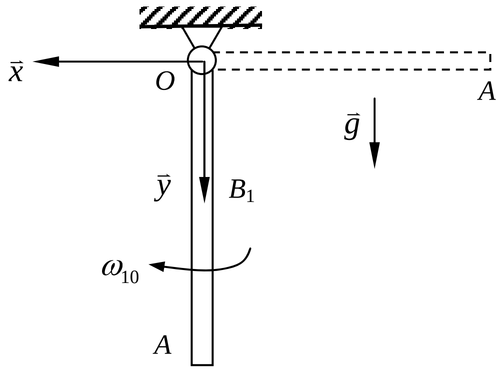
（3） 铰 B 作用于 B_3 的理想约束冲量

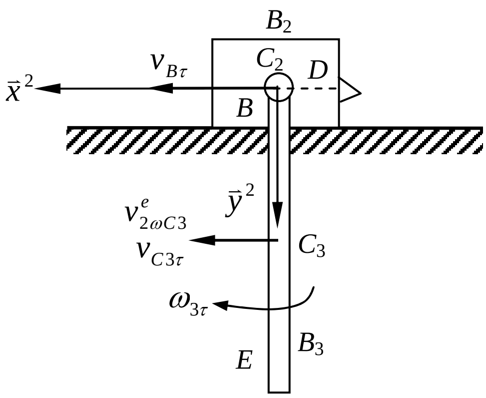


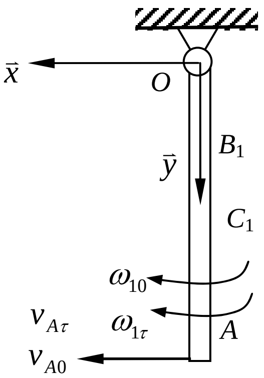
解：设 ω_{10} 为 B_1 运动到铅垂位置时的角速度（ω_{10} 也为 B_1 碰撞前的角速度），在 B_2 从水平位置无初速地运动到铅垂位置过程中，机械能守恒

$$\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3}ml^2\omega_{10}{}^2 = mg\frac{l}{2}$$

$$\omega_{10} = \sqrt{\frac{3g}{l}}$$ **（2 分）**







（1 分）

由于 B_1 绕 O 作定轴转动，碰撞前点 A 的速度 v_{A0} 为：

$v_{A0} = \omega_{10} l$ **（0.5 分）**

设 $\omega_{1\tau}$ 为碰撞后 B_1 的角速度，碰撞后点 A 的速度 $v_{A\tau}$ 为

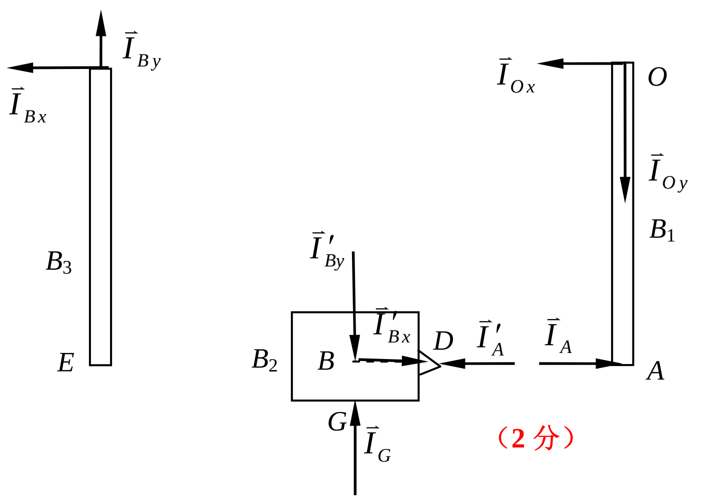
$v_{A\tau} = \omega_{1\tau} l$ **（0.5 分）**

设 $v_{B\tau}$ 为碰撞后点 B 的速度，$\omega_{3\tau}$ 为碰撞后 B_3 的角速度，碰撞后点 C_3 的速度 $v_{C3\tau}$ 为

$\vec{v}_{C3\tau} = \vec{v}^{e}_{2tC3} + \vec{v}^{e}_{2\omega C3}$ **（0.5 分）**

$v^{e}_{2tC3} = v_{B\tau}$，$v^{e}_{2\omega C3} = \omega_{3\tau} l/2$ **（0.5 分）**

$v_{C3\tau} = v_{B\tau} + \omega_{3\tau} l/2$ （水平方向） **（1 分）**



（2 分）

取 B_1 为研究对象，对 O 点应用动量矩定理的积分形式：

$\frac{1}{3} m l^2 (\omega_{1\tau} - \omega_{10}) = -l I_A$ 或 $ml(\omega_{1\tau} - \omega_{10}) = -3 I_A$ （1） **（1 分）**

取 B_2 为研究对象, 应用动量定理的积分形式：

$m(v_{B\tau} - 0) = I_A - I_{Bx}$ 或 $m v_{B\tau} = I_A - I_{Bx}$ （2） **（1 分）**

取 B_3 为研究对象, 应用动量定理的积分形式：

$m(v_{C3\tau} - 0) = I_{Bx}$ 或 $m(v_{B\tau} + \omega_{3\tau} l/2) = I_{Bx}$ （3） **（1 分）**

$m(0-0) = I_{By}$ 或 $I_{By} = 0$ （4） **（1 分）**

对 C_3 点应用动量矩定理的积分形式：

$\frac{1}{12} m l^2 (\omega_{3\tau} - 0) = -\frac{l}{2} I_{Bx}$ （5） **（1 分）**

由恢复因素的定义：

$\frac{v_{B\tau} - v_{A\tau}}{v_{A0} - 0} = e$ **（1 分）**

得到

$(v_{B\tau} - l\omega_{1\tau}) = e l \omega_{10}$ （6）**（1 分）**

解（1），（2），（3），（4），（5）和（6），得到：

$$\omega_{1\tau}=\frac{1}{19}(4-15e)\sqrt{\frac{3g}{l}}，\ \omega_{3\tau}=-\frac{3}{2l}v_{2\tau}=-\frac{6}{19}(e+1)\sqrt{\frac{3g}{l}}，\ v_{B\tau}=\frac{4}{19}(e+1)\sqrt{3gl}$$

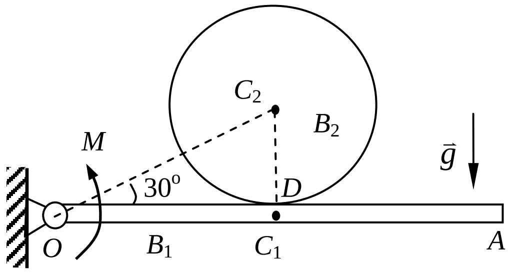
$$I_A=\frac{5}{19}m(1+e)\sqrt{3gl}，\ I_{Bx}=\frac{1}{19}m(e+1)\sqrt{3gl}，\ I_{By}=0$$

将 $e=0.5$ 代入，得到：

$\omega_{1\tau}=-\frac{7}{38}\sqrt{\frac{3g}{l}}$，**（1 分）** $\omega_{3\tau}=-\frac{9}{19}\sqrt{\frac{3g}{l}}$ **（1 分）**

$I_A=\frac{15}{38}m\sqrt{3gl}$，**（1 分）** $I_{Bx}=\frac{3}{38}m\sqrt{3gl}$ **（1 分）**，$I_{By}=0$ **（1 分）**

2．（20 分）均质杆 B_1 与固定铰支座 O 铰接，圆盘 B_2 与杆 B_1 保持接触，可以相对杆 B_1 作无滑动滚动。圆盘 B_2 的半径为 r，质量为 m，杆 B_1 的长度为 $l=2\sqrt{3}r$，质量为 m。力偶 M 作用于杆 B_1，$M=9\sqrt{3}mgr$。图示瞬时杆 B_1 水平，C_1C_2 铅垂，$\overline{OC_1}=\sqrt{3}r$，系统无初速开始运动。

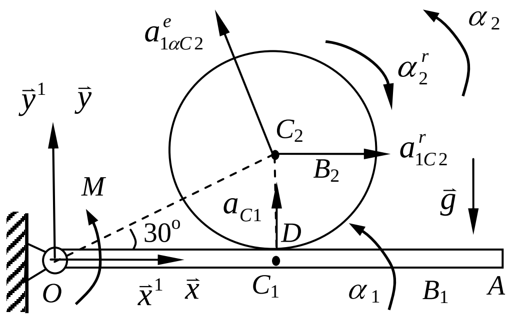


用达朗贝尔原理求该瞬时

(1) 杆 B_1 的角加速度；

(2) 圆盘 B_2 相对杆 B_1 的角加速度；

(3) 接触点 D 作用于圆盘的摩擦力。



解：以 O 为基点，建立惯性基 $\vec{\boldsymbol{e}}$

取 O 为基点，建立圆环 B_1 的连体基 $O-\bar{x}^1\bar{y}^1$

圆环 B_1 作定轴转动，由于系统刚开始运动，$\omega_1=0$，

$$a_{nC1}=0$$

$a_{C1}=a_{\tau C1}=\sqrt{3}r\alpha_1$ **（1 分）**

点 C_2 相对 B_1 的连体基 $O-\bar{x}^1\bar{y}^1$ 作圆周运动

点 C_2 加速度为：

$\vec{a}_{C2}=\vec{a}^e_{1tC2}+\vec{a}^e_{1\alpha C2}+\vec{a}^e_{1\omega C2}+\vec{a}^r_{1C2}+\vec{a}^c_{1C2}$ **（0.5 分）**

$$a^e_{1tC2}=a_O=0$$

由于系统刚开始运动，$\omega_1=0$，$v^r_{C2}=0$

$$\vec{a}^e_{1\omega C2}=\overline{OC_2}\omega_1^2=0，\quad a^c_{1C2}=2\omega_1v^r_{C2}=0$$

于是点 C_2 加速度为：

$\vec{a}_{C2}=\vec{a}^{e}_{1\alpha C2}+\vec{a}^{r}_{1C2}$ （0.5 分）

$a^{e}_{1\alpha C2}=\overline{OC_2}\alpha_1=2r\alpha_1$ （1 分）

圆盘相对 B_1 的连体基 $O-\bar{x}^1\bar{y}^1$ 作纯滚动

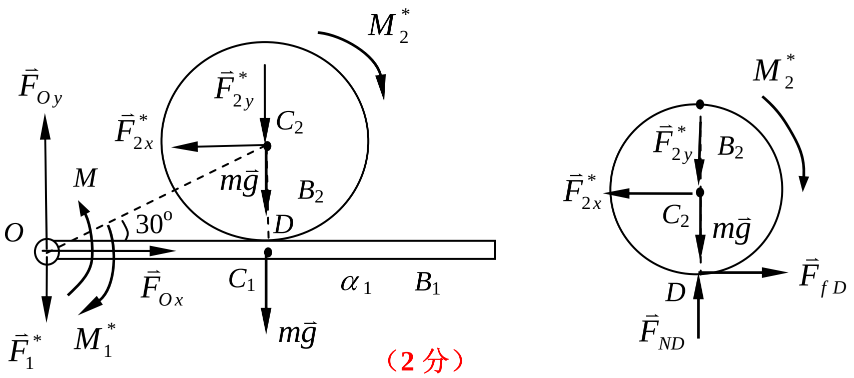
$a^{r}_{1C2}=\alpha^{r}_2 r$ （1 分）

$a_{C2x}=-a^{e}_{1\alpha C2}\sin 30^{\circ}+a^{r}_{1C2}=r\left(\alpha^{r}_2-\alpha_1\right)$ （0.5 分）

$a_{C2y}=\sqrt{3}r\alpha_1$ （0.5 分）

圆盘的绝对角加速度为

$\alpha_2=\alpha_1-\alpha^{r}_2$ （1 分）



（2 分）

圆环 B_1 作定轴转动，惯性力向 O 简化：

$F^*_1=ma_{C1}=\sqrt{3}mr\alpha_1$ （1 分）

$M^*_1=\dfrac{1}{3}m\left(2\sqrt{3}\,r\right)^2\alpha_1=4mr^2\alpha_1$ （1 分）

圆盘 B_2 作平面一般运动，惯性力向 C_2 简化：

$F^*_{2x}=ma_{C2x}=mr\left(\alpha^{r}_2-\alpha_1\right)$ （1 分）

$F^*_{2y}=ma_{C2y}=\sqrt{3}mr\alpha_1$ （1 分）

$M^*_2=\dfrac{1}{2}mr^2\alpha_2=\dfrac{1}{2}mr^2\left(\alpha_1-\alpha^{r}_2\right)$ （1 分）

取系统为研究对象，对 O 取矩：

$M-M^*_1+F^*_{2x}r-F^*_{2y}\sqrt{3}r-M^*_2-2\sqrt{3}rmg=0$ （1 分）

$$M-4mr^2\alpha_1+mr^2\left(\alpha_2^r-\alpha_1\right)-3mr^2\alpha_1-\frac{1}{2}mr^2\left(\alpha_1-\alpha_2^r\right)-2\sqrt{3}rmg=0$$

化简得到：

$$M-\frac{17}{2}mr^2\alpha_1+\frac{3}{2}mr^2\alpha_2^r-2\sqrt{3}rmg=0 \quad （1） \quad \textbf{（1 分）}$$

取圆盘为研究对象，对 D 取矩：

$$F_{2x}^{*}r-M_2^{*}=0 \quad \textbf{（1 分）}$$

$$mr^2\left(\alpha_2^r-\alpha_1\right)-\frac{1}{2}mr^2\left(\alpha_1-\alpha_2^r\right)=0$$

化简得到：

$$\alpha_1=\alpha_2^r \quad （2） \quad \textbf{（1 分）}$$

将（2）代入（1）：

$$M-\frac{17}{2}mr^2\alpha_2^r+\frac{3}{2}mr^2\alpha_2^r-2\sqrt{3}rmg=0$$

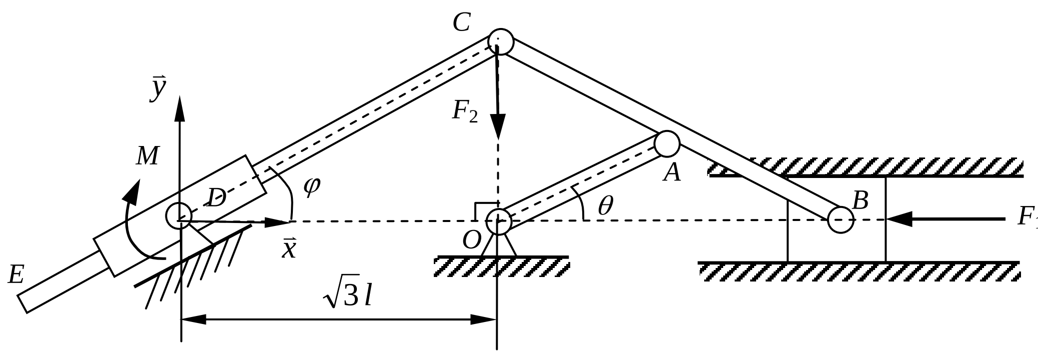
$$M-2\sqrt{3}rmg=7mr^2\alpha_2^r$$

将 $M=9\sqrt{3}mgr$ 代入：

$$\alpha_2^r=\frac{M-2\sqrt{3}rmg}{7mr^2}=\sqrt{3}\frac{g}{r} \quad \textbf{（1 分）}$$

$$\alpha_1=\alpha_2^r=\sqrt{3}\frac{g}{r} \quad \textbf{（1 分）}$$

$$F_{fD}=F_{2x}^{*}=mr\left(\alpha_2^r-\alpha_1\right)=0 \quad \textbf{（1 分）}$$

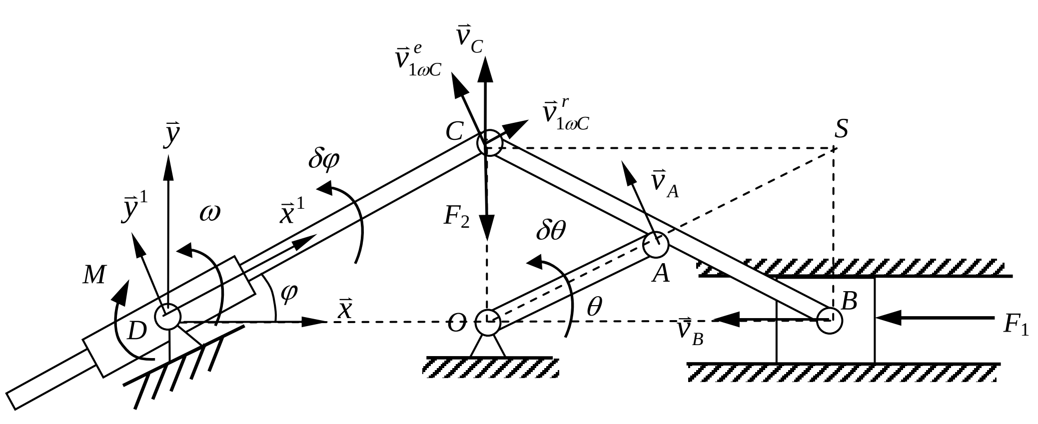


3.（20 分）图示系统由杆 *OA*、杆 *BC*、滑块 *B*、杆 *CE* 和套筒 *D* 组成。铰 *A*、*B*、*C* 为圆柱铰，铰 *O*、*D* 处为固定铰支座，滑块 *B* 可以在水平滑槽内滑动，杆 *CE* 可以相对套筒 *D* 滑动。杆 *OA* 的长度为 l，杆 *BC* 的长度为 $2l$，铰点 *A* 位于 *BC* 的中点，杆 *CE* 的长度为 $3l$。水平力 $\bar{F}_1$ 作用于滑块 *B*，铅垂力 $\bar{F}_2$ 作用于铰点 *C*，力偶 *M* 作用于套筒 *D*，不计各物体的重量和摩擦。系统在图示位置 $\theta=\varphi=30^{\circ}$ 处于平衡。（图中 *D*-$\vec{e}$ 为惯性基）

用虚位移原理求系统平衡时

(1) 主动力（偶）间的关系；
铰点 *D* 沿 *x* 方向的约束力。

解[1]：虚速度法



1. 用虚位移原理求系统平衡时 F_1、F_2 和 *M* 之间的关系这部分 **共 13 分**
系统为一个自由度问题，取 φ 为广义坐标 **（1 分）**
由虚位移原理：

$$\delta W=-F_1\delta x_B-F_2\delta y_C-\delta\varphi M=0 \quad (1)$$ **（3 分）**

由 $\vec{v}_A$ 和 $\vec{v}_B$ 方位确定 *S* 为杆 *BC* 的速度瞬心，可确定 $\vec{v}_C$ 为铅垂方向。**（0.5 分）**

设 $\vec{v}_C$ 为铅垂向上，取套筒的连体基 $\vec{x}^1\vec{y}^1$ 为动基，点 C 相对动基作直线运动，设 ω 为套筒的角速度，$\vec{v}_C$ 可表示为：

$$\vec{v}_C = \vec{v}^e_{1tC} + \vec{v}^e_{1\omega C} + \vec{v}^r_{1\omega C}$$ **（0.5 分）**

$$v^e_{1tC} = v_D = 0$$

$$\vec{v}_C = \vec{v}^e_{1\omega C} + \vec{v}^r_{1\omega C}$$ **（0.5 分）**

$$v^e_{1\omega C} = 2l\omega$$ **（0.5 分）**

在 $\vec{y}^1$ 投影：

$$\frac{\sqrt{3}}{2}v_C = v^e_{1\omega C} = 2l\omega \quad 或 \quad v_C = \frac{4\sqrt{3}}{3}l\omega \quad (2)$$ **（1 分）**

由于 C 和 B 是杆 BC 的给定点，在连线 BC 上的投影相等：

$$\frac{1}{2}v_C = \frac{\sqrt{3}}{2}v_B \quad 或 \quad v_B = \frac{\sqrt{3}}{3}v_C = \frac{4}{3}l\omega \quad (3)$$ **（1 分）**

由关系式

$$\dot{y}_C = v_C = \frac{4\sqrt{3}}{3}l\omega = \frac{4\sqrt{3}}{3}l\dot{\varphi}$$

$$\dot{x}_B = -v_B = -\frac{4}{3}l\omega = -\frac{4}{3}l\dot{\varphi}$$

得到：

$$\delta y_C = \frac{4\sqrt{3}}{3}l\delta\varphi \quad (4)$$ **（1 分）**

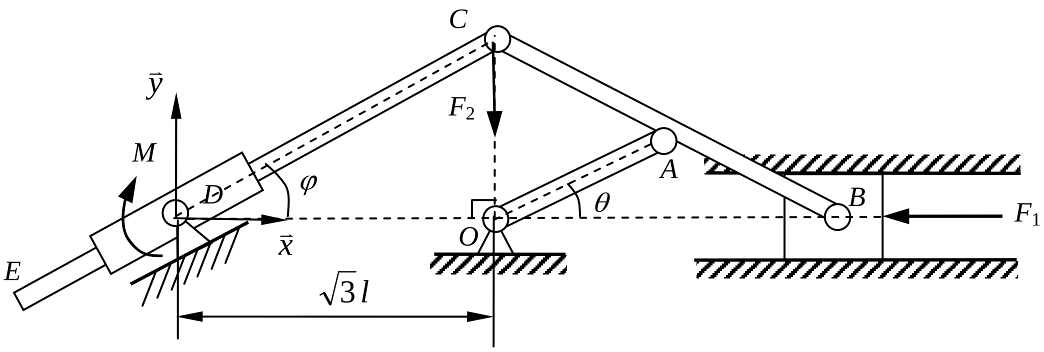
$$\delta x_B = -\frac{4}{3}l\delta\varphi \quad (5)$$ **（1 分）**

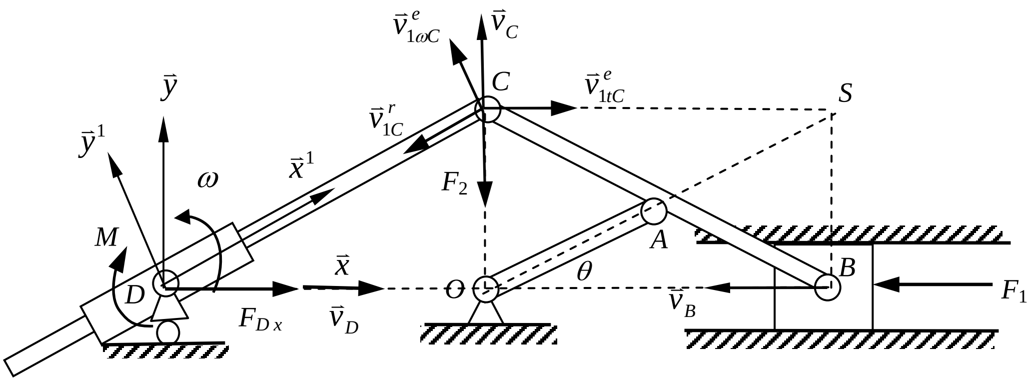
将(4)和(5)代入(1)：

$$\delta W = \left(\frac{4}{3}F_1 l - \frac{4\sqrt{3}}{3}F_2 l - M\right)\delta\varphi = 0$$ **（1 分）**

由 $\delta\varphi$ 的独立性

$$F_1 l - F_2\sqrt{3}l - \frac{3}{4}M = 0$$ **（2 分）**





2. 计算 F_{Dx} 部分 **共 7 分**

为了计算 F_{Dx}，释放 D 点 $\vec{x}$ 方向的约束，在 D 点施加 F_{Dx} 当作主动力处理

由虚位移原理：

$\delta W = -F_1\delta x_B - F_2\delta y_C - \delta\varphi M + F_{Dx}\delta x_D = 0$ (1) **（1 分）**

由 $\vec{v}_A$ 和 $\vec{v}_B$ 方位确定 S 为杆 BC 的速度瞬心，可确定 $\vec{v}_C$ 为铅垂方向。

由于是 2 个自由度问题

(1) 若令 $\delta\theta = 0$， $\omega_{OA} = 0$， $v_A = 0$，取 φ 为广义坐标 **（0.5 分）**

则 $v_C = 0$， $\delta y_C = 0$ **（0.5 分）**

$v_B = 0$， $\delta x_B = 0$ **（0.5 分）**

取套筒的连体基 $\vec{x}^1\vec{y}^1$ 为动基，点 C 相对动基作直线运动，设 ω 为套筒的角速度，$\vec{v}_C$ 可表示为：

$\vec{v}_C = \vec{v}^e_{1tC} + \vec{v}^e_{1\omega C} + \vec{v}^r_{1\omega C} = \vec{0}$

$v^e_{1tC} = v_D$ **（0.5 分）**

$\vec{v}_C = \vec{v}_D + \vec{v}^e_{1\omega C} + \vec{v}^r_{1\omega C} = \vec{0}$ **（0.5 分）**

$v^e_{1\omega C} = 2l\omega$ **（0.5 分）**

在 $\bar{y}^1$ 投影：

$$\frac{1}{2}v_D - v_{1\omega C}^e = 0 \quad 或 \quad v_D = 4l\omega \quad (2) \quad （1 分）$$

得到：

$$\dot{x}_D = 4l\dot{\varphi}, \quad \delta x_D = 4l\delta\varphi \quad (3) \quad （1 分）$$

将(3)代入(1)，计算得到 F_{Dx} 为：

$$F_{Dx} = \frac{1}{4}\frac{M}{l} \quad （1 分）$$

(2) 若令 $\delta\varphi = 0$， $\omega = 0$， 套筒平动，取 x_D 为广义坐标

取套筒的连体基 $\bar{x}^1\bar{y}^1$ 为动基，点 C 相对动基作直线运动， $\bar{v}_C$ 可表示为：

$$\bar{v}_C = \bar{v}_{1tC}^e + \bar{v}_{1\omega C}^e + \bar{v}_{1\omega C}^r$$

$$v_{1tC}^e = v_D, \quad v_{1\omega C}^e = 0$$

$$\bar{v}_C = \bar{v}_D + \bar{v}_{1\omega C}^r$$

在 $\bar{y}^1$ 投影：

$$\frac{\sqrt{3}}{2}v_C = -\frac{1}{2}v_D \quad 或 \quad v_C = -\frac{\sqrt{3}}{3}v_D \quad (4)$$

得到：

$$\dot{y}_C = -\frac{\sqrt{3}}{3}\dot{x}_D, \quad \delta y_C = -\frac{\sqrt{3}}{3}\delta x_D \quad (5)$$

由于 C 和 B 是杆 BC 的给定点，在连线 BC 上的投影相等：

$$\frac{1}{2}v_C = \frac{\sqrt{3}}{2}v_B \quad 或 \quad v_B = \frac{\sqrt{3}}{3}v_C = -\frac{1}{3}v_D \quad (6)$$

得到：

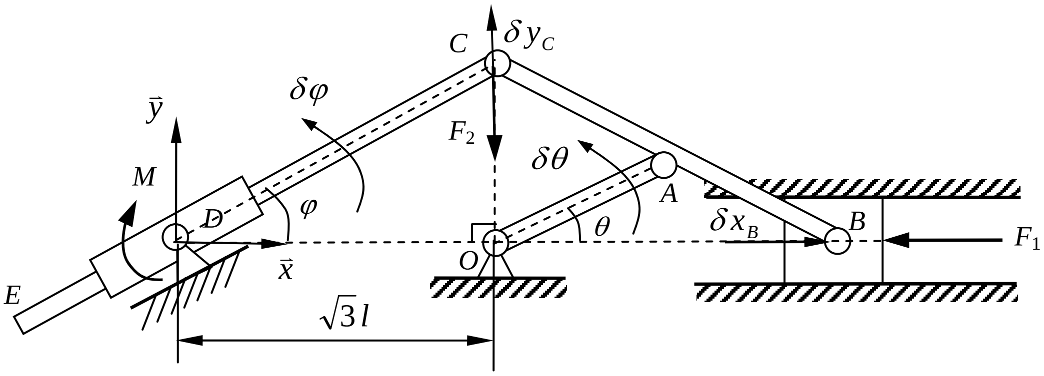
$$\dot{x}_B = -v_B = \frac{1}{3}v_D = \frac{1}{3}\dot{x}_D, \quad \delta x_B = \frac{1}{3}\delta x_D \quad (7)$$

将(5)和(7)代入(1)：

$$\delta W = -\frac{1}{3}F_1\delta x_D + \frac{\sqrt{3}}{3}F_2\delta x_D + F_{Dx}\delta x_D = \left(-\frac{1}{3}F_1 + \frac{\sqrt{3}}{3}F_2 + F_{Dx}\right)\delta x_D = 0$$

由 δx_D 的独立性，计算得到 F_{Dx} 为：

$F_{Dx} = \frac{1}{3}F_1 - \frac{\sqrt{3}}{3}F_2$（由于 $F_1 l - F_2\sqrt{3}l - \frac{3}{4}M = 0$ 成立，与前面得到的 $F_{Dx} = \frac{1}{4}\frac{M}{l}$ 相等）



解[2]：坐标法，为一个自由度问题，取θ为广义坐标（**1 分**）

1. 用虚位移原理求系统平衡时 F_1、F_2 和 M 之间的关系这部分 **共 13 分**

由虚位移原理：

$$\delta W = -F_1\delta x_B - F_2\delta y_C - \delta\varphi M = 0 \quad (1)$$ （**3 分**）

由关系式：

$y_C = 2l\sin\theta$， 得到：$\delta y_C = 2l\cos\theta\,\delta\theta$ (2) （**2 分**）

$2l\sin\theta = \sqrt{3}l\tan\varphi$， 得到：$2l\cos\theta\,\delta\theta = \sqrt{3}l\sec^2\varphi\,\delta\varphi$ (3) （**2 分**）

$x_B = 2l\cos\theta$，$\delta x_B = -2l\sin\theta\delta\theta$ (4) （**2 分**）

将$\theta = \varphi = 30^\circ$代入(2)，(3)和(4)：

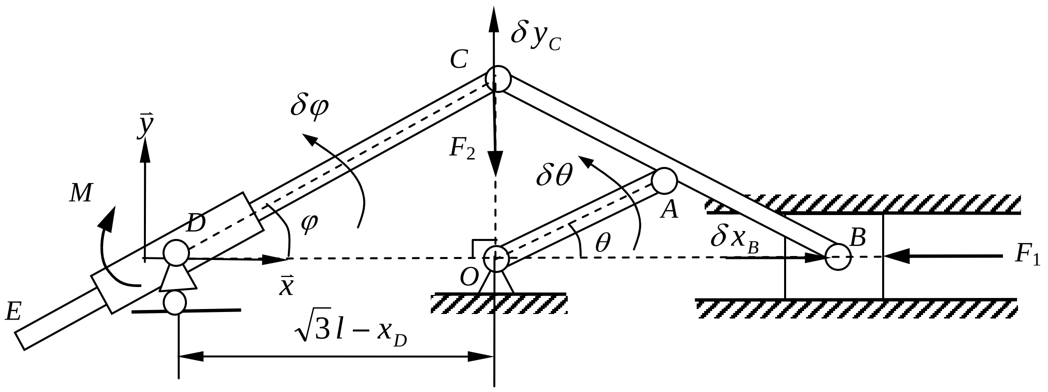
$$\delta y_C = \sqrt{3}\,l\delta\theta, \quad \delta\varphi = \frac{3}{4}\delta\theta, \quad \delta x_B = -l\delta\theta \quad (5)$$

将(5)代入(1)：

$$\delta W = \left(F_1 l - F_2\sqrt{3}\,l - \frac{3}{4}M\right)\delta\theta = 0$$ （**1 分**）

由$\delta\varphi$的独立性

$$F_1 l - F_2\sqrt{3}\,l - \frac{3}{4}M = 0$$ （**2 分**）



2. 计算 F_{Dx} 部分 **共 7 分**

为了计算 F_{Dx}，释放 D 点 $\vec{x}$ 方向的约束，在 D 点施加 F_{Dx} 当作主动力处理

由虚位移原理：

$$\delta W = -F_1\delta x_B - F_2\delta y_C - \delta\varphi M + F_{Dx}\delta x_D = 0 \quad (1)$$ **（1 分）**

由关系式：

$y_C = 2l\sin\theta$， 得到：$\delta y_C = 2l\cos\theta\,\delta\theta$ (2)

$$2l\sin\theta = \left(\sqrt{3}l - x_D\right)\tan\varphi$$

得到：$2l\cos\theta\,\delta\theta = \left(\sqrt{3}l - x_D\right)\sec^2\varphi\,\delta\varphi - \delta x_D\tan\varphi$ (3)

$x_B = 2l\cos\theta$，得到：$\delta x_B = -2l\sin\theta\,\delta\theta$ (4)

由于是 2 个自由度问题

(1) 若令 $\delta\theta = 0$，取 φ 为广义坐标 **（1 分）**

$\delta y_C = 0$，$\delta x_B = 0$ (5) **（1 分）**

$\left(\sqrt{3}l - x_D\right)\sec^2\varphi\,\delta\varphi = \delta x_D\tan\varphi$ **（1 分）**

将 $x_D = 0$ 和 $\varphi = 30^\circ$ 代入上式：

$\delta x_D = 4l\delta\varphi$ (6) **（1 分）**

将(5)和(6)代入(1)：

$\delta W = -\delta\varphi M + F_{Dx}4l\delta\varphi = 0$ **（1 分）**

得到 F_{Dx} 为：

$$F_{Dx} = \frac{1}{4}\frac{M}{l}$$ **（1 分）**

(2) 若令 $\delta\varphi = 0$，取 θ 为广义坐标

将 $x_D = 0$ 和 $\theta = \varphi = 30^{\circ}$ 代入(2)，(3)和(4)：

$$\delta y_C = \sqrt{3}\, l\, \delta\theta，\ \delta x_D = -3l\,\delta\theta，\ \delta x_B = -l\delta\theta \quad (7)$$

将(7)代入(1)：

$$\delta W = F_1 l \delta\theta - F_2\sqrt{3}\, l\,\delta\theta - F_{Dx} 3l\,\delta\theta = 0$$

得到 F_{Dx} 为：

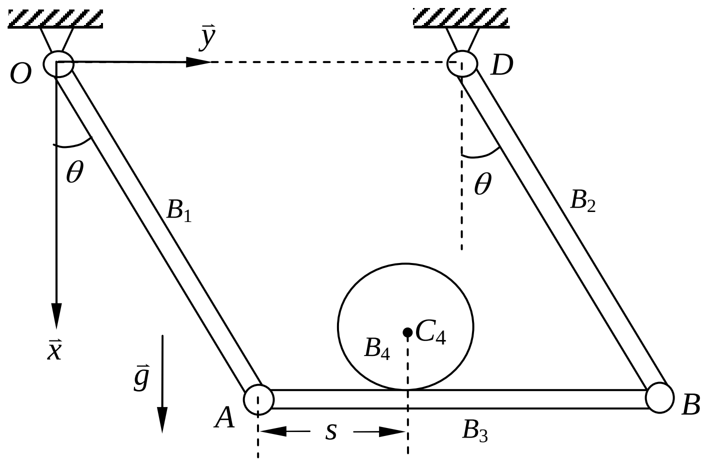
$F_{Dx} = \dfrac{1}{3}F_1 - \dfrac{\sqrt{3}}{3}F_2$（由于 $F_1 l - F_2\sqrt{3}\, l - \dfrac{3}{4}M = 0$ 成立，与前面得到的 $F_{Dx} = \dfrac{1}{4}\dfrac{M}{l}$ 相等）

4.（20 分）长度相等的匀质杆 B_1 和 B_2 分别绕点 O 和点 D 作定轴转动，匀质杆 B_3 作曲线平动，匀质圆盘 B_4 相对 B_3 作无滑动滚动。设杆 B_1，B_2 和 B_3 的长度均为 l，圆盘 B_4 的半径为 r。B_1，B_2，B_3 和 B_4 的质量均为 m。

（1）以 θ 和 s 为广义坐标写出系统的动能和势能；

（2）如果初始时刻，$\theta = \theta_0$，$s = 0.5l$，系统从静止开始运动，写出系统的初积分；

（3）利用初积分求杆 B_1 运动到铅垂位置时匀质圆盘 B_4 的质心 C_4 相对杆 B_3 的速度。（假设圆盘未到达杆 B_3 的端点）



解[1]：速度法：系统为 2 个自由度问题，以 θ 和 s 为广义坐标

杆 B_1 和 B_2 作定轴转动，$\omega_1 = \omega_2 = \dot{\theta}$

（1 分）

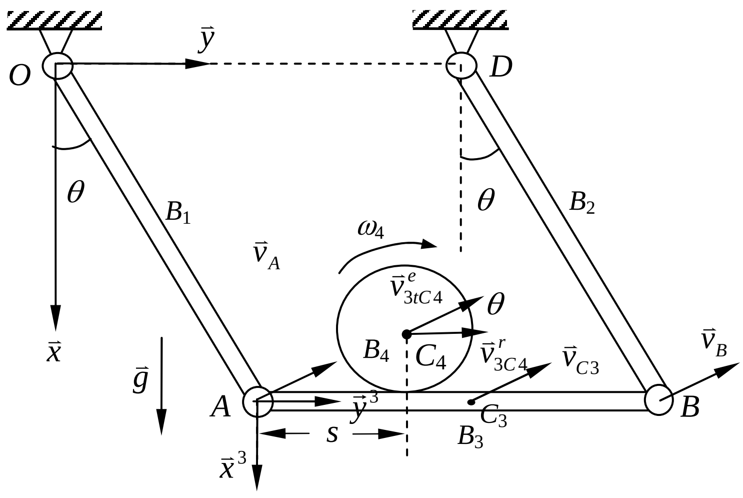
$$T_1 = T_2 = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3}ml^2\dot{\theta}^2 \quad \textbf{（1 分）}$$

B_3 作曲线平动，$\omega_3 = 0$

$$\vec{v}_{C3} = \vec{v}^{\,e}_{3tC3} + \vec{v}^{\,e}_{3\omega C3}，\ v^{e}_{3\omega C3} = 0$$

$$v_{C3} = v^{e}_{3tC3} = v_A = l\omega_1 = l\dot{\theta}$$

$$T_3 = \frac{1}{2}m v_{C3}{}^2 = \frac{1}{2}m v_A{}^2 = \frac{1}{2}ml^2\dot{\theta}^2$$



（1 分）

（**1 分**）

取 B_3 的连体基 $\vec{x}^3\vec{y}^3$ 为动基

$\vec{v}_{C4} = \vec{v}^e_{3tC4} + \vec{v}^e_{3\omega C4} + \vec{v}^r_{3C4}$， $v^e_{3\omega C3} = 0$ （**1 分**）

$v^e_{3tC4} = v_A = l\omega_1 = l\dot{\theta}$，$v^r_{3C4} = \dot{s}$ （**1 分**）

由于圆盘相对连体基 $\vec{x}^3\vec{y}^3$ 作纯滚动

$v^r_{3C4} = \dot{s} = \omega^r_4 r = \omega_4 r$ 或 $\omega_4 = \dfrac{\dot{s}}{r}$ （**1 分**）

$$T_4 = \frac{1}{2}mv_{C4}{}^2 + \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}mr^2\omega_4{}^2 = \frac{1}{2}m\left(l^2\dot{\theta}^2 + \dot{s}^2 + 2l\dot{s}\dot{\theta}\cos\theta\right) + \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}mr^2\left(\frac{\dot{s}}{r}\right)^2$$ （**2 分**）

$$T = T_1 + T_2 + T_3 + T_4$$
$$= 2\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3}ml^2\dot{\theta}^2 + \frac{1}{2}ml^2\dot{\theta}^2 + \frac{1}{2}m\left(l^2\dot{\theta}^2 + \dot{s}^2 + 2l\dot{s}\dot{\theta}\cos\theta\right) + \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}mr^2\left(\frac{\dot{s}}{r}\right)^2$$
$$= \frac{1}{3}ml^2\dot{\theta}^2 + \frac{1}{2}ml^2\dot{\theta}^2 + \frac{1}{2}m\left(l^2\dot{\theta}^2 + \dot{s}^2 + 2l\dot{s}\dot{\theta}\cos\theta\right) + \frac{1}{4}m\dot{s}^2$$
$$= \frac{4}{3}ml^2\dot{\theta}^2 + \frac{3}{4}m\dot{s}^2 + ml\dot{s}\dot{\theta}\cos\theta$$ （**1 分**）

$$V = -2\cdot mg\frac{l}{2}\cos\theta - mgl\cos\theta - mgl\cos\theta + mgr = -3mgl\cos\theta + mgr$$ （**2 分**）

拉格朗日函数为：

$$L = T - V = \frac{4}{3}ml^2\dot{\theta}^2 + \frac{3}{4}m\dot{s}^2 + ml\dot{s}\dot{\theta}\cos\theta + 3mgl\cos\theta - mgr$$ （**1 分**）

由于 L 不显含 s，循环积分：

$$\frac{3}{2}m\dot{s} + ml\dot{\theta}\cos\theta = c_1 \quad (1)$$ （**1 分**）

由于 L 不显含 t，且是定常系统，广义能量守恒：

$$\frac{4}{3}ml^2\dot{\theta}^2 + \frac{3}{4}m\dot{s}^2 + ml\dot{s}\dot{\theta}\cos\theta - 3mgl\cos\theta + mgr = c_2 \quad (2)$$ （**1 分**）

当 $\theta = \theta_0$，系统静止，将 $\theta = \theta_0$， $\dot{\theta} = 0$， $\dot{s} = 0$ 代入(1)和(2)：

$$c_1 = 0,\quad c_2 = -3mgl\cos\theta_0 + mgr \quad (3)$$

将(3)代入(1)和(2)，初积分为：

$$\frac{3}{2}m\dot{s} + ml\dot{\theta}\cos\theta = 0$$ （**1 分**）

$$\frac{4}{3}ml^2\dot{\theta}^2 + \frac{3}{4}m\dot{s}^2 + ml\dot{s}\dot{\theta}\cos\theta - 3mgl\cos\theta = -3mgl\cos\theta_0$$ （**1 分**）

当 $\theta = 0$ 时

$$\frac{3}{2}m\dot{s} + ml\dot{\theta} = 0,\quad l\dot{\theta} = -\frac{3}{2}\dot{s} \quad (4)$$ （**1 分**）

$$\frac{4}{3}ml^2\dot{\theta}^2+\frac{3}{4}m\dot{s}^2+ml\dot{s}\dot{\theta}-3mgl=-3mgl\cos\theta_0 \quad (5)$$ **（1 分）**

将(4)代入(5)：

$$\frac{9}{4}m\dot{s}^2=3mgl-3mgl\cos\theta_0，$$ 解得：

$$\dot{s}^2=\frac{4}{3}(1-\cos\theta_0)gl$$

$$\dot{s}=\frac{2}{3}\sqrt{3(1-\cos\theta_0)gl}$$ **（1 分）**

解[2]：坐标法：系统为 2 个自由度问题，以θ和 s 为广义坐标

杆 B_1 和 B_2 作定轴转动，$\omega_1=\omega_2=\dot{\theta}$ **（1 分）**

$$T_1=T_2=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3}ml^2\dot{\theta}^2$$ **（1 分）**

B_3 作曲线平动，$\omega_3=0$

$$x_{C3}=l\cos\theta，\quad y_{C3}=l\sin\theta+l/2$$ **（1 分）**

$$\dot{x}_{C3}=-l\sin\theta\dot{\theta}，\quad \dot{y}_{C3}=l\cos\theta\dot{\theta}$$

$$v_{C3}{}^2=\dot{x}_{C3}{}^2+\dot{y}_{C3}{}^2=l^2\dot{\theta}^2$$

$$T_3=\frac{1}{2}mv_{C3}{}^2=\frac{1}{2}mv_A{}^2=\frac{1}{2}ml^2\dot{\theta}^2$$ **（1 分）**

$$x_{C4}=l\cos\theta，\quad y_{C4}=l\sin\theta+s$$ **（1 分）**

$$\dot{x}_{C3}=-l\sin\theta\dot{\theta}，\quad \dot{y}_{C3}=l\cos\theta\dot{\theta}+\dot{s}$$

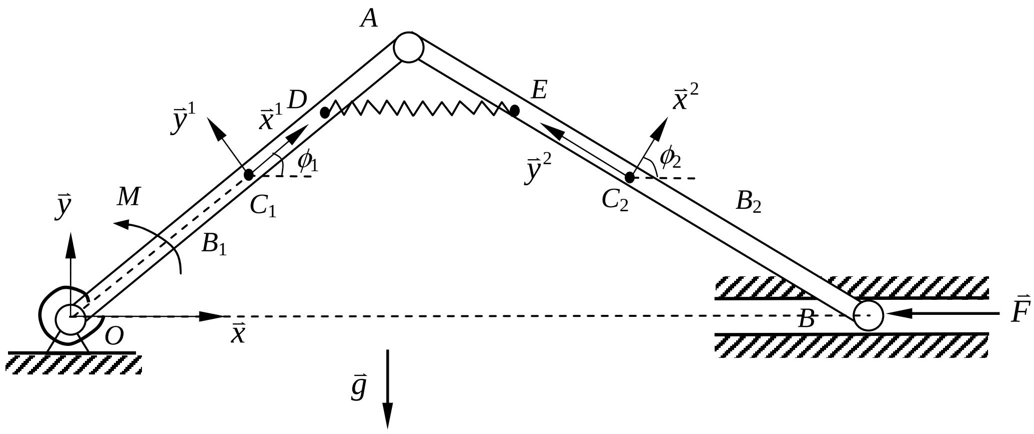
$$v_{C3}{}^2=\dot{x}_{C3}{}^2+\dot{y}_{C3}{}^2=l^2\dot{\theta}^2+\dot{s}^2+2l\dot{s}\dot{\theta}\cos\theta$$ **（1 分）**

由于圆盘相对连体基 $\bar{x}^3\bar{y}^3$ 作纯滚动

$$\dot{s}=\omega_4^r r=\omega_4 r \quad 或 \quad \omega_4=\frac{\dot{s}}{r}$$ **（1 分）**

$$T_4=\frac{1}{2}mv_{C4}{}^2+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}mr^2\omega_4{}^2=\frac{1}{2}m\left(l^2\dot{\theta}^2+\dot{s}^2+2l\dot{s}\dot{\theta}\cos\theta\right)+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}mr^2\left(\frac{\dot{s}}{r}\right)^2$$ **（2 分）**

下面部分与解 1 相同。



5.（20 分）如图动力学系统由均质杆 B_1 和 B_2 组成，杆 B_1 与固定铰支座 O 铰接，杆 B_2 与杆 B_1 在 A 处铰接。杆 B_2 的端点 B 可以在水平滑槽内滑动，不计摩擦。设杆 B_1 和杆 B_2 的长度分别为 l_1 和杆 l_2，杆 B_1 和杆 B_2 的质量均为 m。力偶 M 和水平力 $\vec{F}$ 分别作用于杆 B_1 和杆 B_2 的端点 B。杆 B_1、B_2 间有线弹簧，刚度为 k_1，原长为 l_0，作用点分别为点 D 和点 E，$\overline{AD}=l_1/4$，$\overline{AE}=l_2/4$。O 处在基座和杆 B_1 间有一卷簧，卷簧刚度为 k_2，当 B_1 连体基的基矢量 $\vec{x}^1$ 与惯性的基矢量 $\vec{x}$（图中 O-$\vec{\boldsymbol{e}}$ 为惯性基）重合时，卷簧无力偶。以系统的位形坐标写出封闭的带拉格朗日乘子的第一类拉格朗日方程。

解：首先建立惯性基 $\vec{\boldsymbol{e}}$

分别在三构件的质心建立连体基 $\vec{\boldsymbol{e}}^i\ (i=1,2)$

系统的位形坐标为

$$\boldsymbol{q}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{q}_1^T & \boldsymbol{q}_2^T\end{pmatrix}^T$$ **（1 分）**

$$\boldsymbol{q}_i=\begin{pmatrix}x_i & y_i & \varphi_i\end{pmatrix}^T\ (i=1,2)$$

系统的运动学约束方程为：

$$\boldsymbol{\Phi}=\begin{bmatrix} x_1-0.5l_1\cos\phi_1 \\ y_1-0.5l_1\sin\phi_1 \\ x_2-0.5l_2\sin\phi_2-x_1-0.5l_1\cos\phi_1 \\ y_2+0.5l_2\cos\phi_2-y_1-0.5l_1\sin\phi_1 \\ y_2-0.5l_2\cos\phi_2 \end{bmatrix}=0$$ **（2 分）**

雅可比阵为：

$$\boldsymbol{\Phi}_q = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0.5l_1\sin\phi_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -0.5l_1\cos\phi_1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0.5l_1\sin\phi_1 & 1 & 0 & -0.5l_2\cos\phi_2 \\ 0 & -1 & -0.5l_1\cos\phi_1 & 0 & 1 & -0.5l_2\sin\phi_2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0.5l_2\sin\phi_2 \end{bmatrix}$$ **（2 分）**

加速度约束方程的右项：

$$\boldsymbol{\gamma} = \begin{bmatrix} -0.5l_1\cos\phi_1\dot{\phi}_1^{\,2} \\ -0.5l_1\sin\phi_1\dot{\phi}_1^{\,2} \\ -0.5l_2\sin\phi_2\dot{\phi}_2^{\,2} - 0.5l_1\cos\phi_1\dot{\phi}_1^{\,2} \\ 0.5l_2\cos\phi_2\dot{\phi}_2^{\,2} - 0.5l_1\sin\phi_1\dot{\phi}_1^{\,2} \\ -0.5l_2\cos\phi_2\dot{\phi}_2^{\,2} \end{bmatrix}$$ **（2 分）**

增广质量阵为：

$$\boldsymbol{Z} = diag(\boldsymbol{Z}_1, \boldsymbol{Z}_2)$$

$$\boldsymbol{Z}_1 = \begin{pmatrix} m & 0 & 0 \\ 0 & m & 0 \\ 0 & 0 & ml_1^{\,2}/12 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{Z}_2 = \begin{pmatrix} m & 0 & 0 \\ 0 & m & 0 \\ 0 & 0 & ml_2^{\,2}/12 \end{pmatrix}$$ **（2 分)**

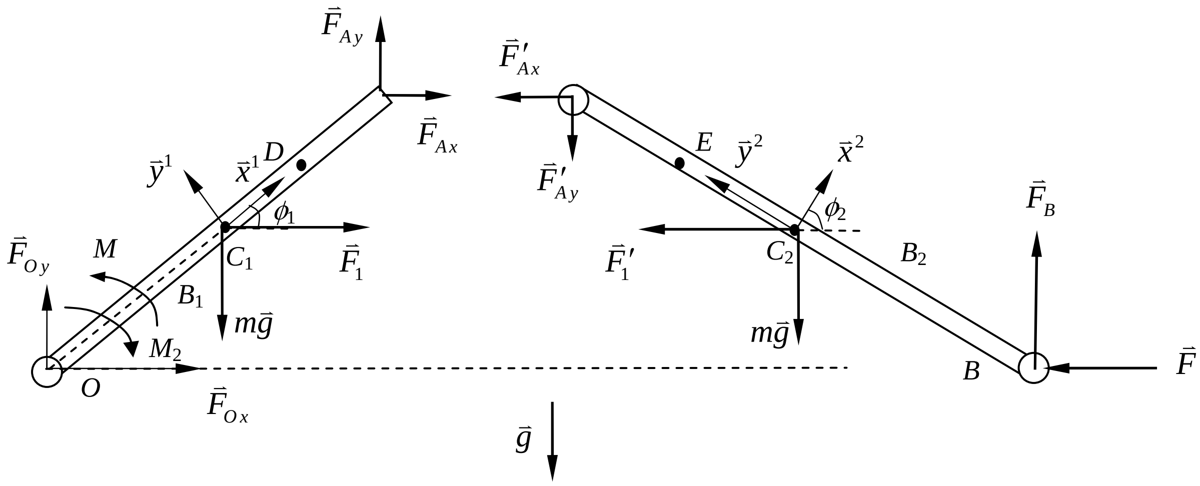
重力的分析

$$\hat{\boldsymbol{F}}_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ -mg \\ 0 \\ 0 \\ -mg \\ 0 \end{pmatrix}$$ **（1 分）**

弹簧力的分析**（3 分）**

$$F_1 = F_1' = k_1\left(\frac{1}{2}(x_2 - x_1) - l_0\right)$$

F_1 作用在 B_1 上， F_1' 作用在 B_2 上。



$$\hat{\boldsymbol{F}}_2=\begin{pmatrix}0\\ k_1\left(\frac{1}{2}(x_2-x_1)-l_0\right)\\ -\frac{l_1}{4}\sin\phi_1 k_1\left(\frac{1}{2}(x_2-x_1)-l_0\right)\\ 0\\ -k_1\left(\frac{1}{2}(x_2-x_1)-l_0\right)\\ \frac{l_2}{4}\cos\phi_2 k_1\left(\frac{1}{2}(x_2-x_1)-l_0\right)\end{pmatrix}$$

卷簧力偶的分析：**（2 分）**

卷簧力偶为：$M_2=k_2(\theta-\theta_0)=k_2(\phi_1-\theta_0)$，作用在 B_1 上。

当连体基的基矢量 $\vec{x}^1$ 与 $\vec{x}$ 重合时，$\phi_1=0$，卷簧无力偶，$\theta_0=0$

卷簧力偶大小为：$M_2=k_2\phi_1$

$$\hat{\boldsymbol{F}}_3=\begin{pmatrix}0\\0\\-k_2\phi_1\\0\\0\\0\end{pmatrix}$$

外力偶分析：

$$\hat{\boldsymbol{F}}_4 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ M \\ -F \\ 0 \\ -0.5Fl_2\cos\phi_2 \end{pmatrix}$$ **（1 分）**

增广主动力阵为：

$$\hat{\boldsymbol{F}} = \hat{\boldsymbol{F}}_1 + \hat{\boldsymbol{F}}_2 + \hat{\boldsymbol{F}}_3 + \hat{\boldsymbol{F}}_4$$ **（1 分）**

封闭的带拉格朗日乘子的第一类拉格朗日方程为：

$$\begin{bmatrix} \boldsymbol{Z} & \boldsymbol{\Phi}_{\boldsymbol{q}}{}^T \\ \boldsymbol{\Phi}_{\boldsymbol{q}} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{\boldsymbol{q}} \\ \boldsymbol{\lambda} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \hat{\boldsymbol{F}} \\ \boldsymbol{\gamma} \end{bmatrix}$$ **（2 分)**

$$\boldsymbol{\lambda} = (\lambda_1 \quad \lambda_2 \quad \lambda_3 \quad \lambda_4 \quad \lambda_5)^T$$ **（1 分）**