主要内容

- **图的基本概念**
  - Ch1
- **道路与回路**
  - Ch2：2.1，2.3，2.4
- **树**
  - Ch3：3.1，3.6，3.7

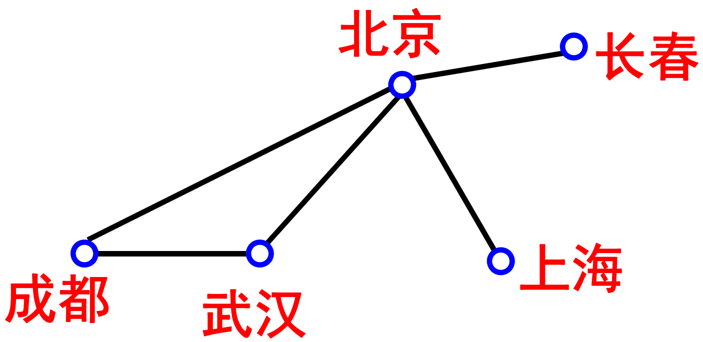
图的基本概念

我们所讨论的图(Graph)与人们通常所熟悉的图，例如圆、椭圆、函数图表等是很不相同的。图论中所谓的图是指某类具体离散事物集合和该集合中的每对事物间以某种方式相联系的数学模型。如果我们用点表示具体事物，用连线表示一对具体事物之间的联系。那么，一个图就是由一个表示具体事物的点的集合和表示事物之间联系的一些线的集合所构成，至于点的位置和连线的长短曲直是无关紧要的。

图的基本概念

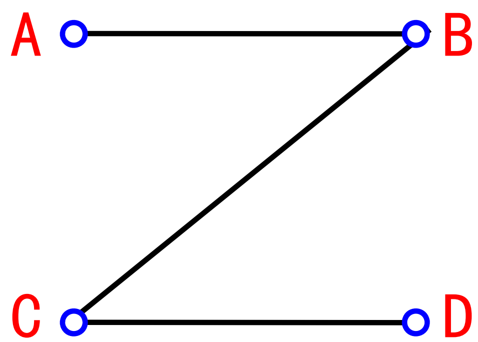
图的定义

例（1）考虑一张航线地图，图中用点表示城市，当两个城市间有直达航班时，就用一条线将相应的点连接起来。这种航线地图的一部分如下图所示；



图的基本概念

例（2）假设有4台计算机，分别标记为A、B、C和D，在计算机A和B、C和D以及B和C之间有信息流。这种情形可用下图表示，通常称这种图为通信网络；



图的定义

图的定义

一个图(Graph)是一个二元组<V, E>，记为G = <V, E>，其中：

（1） $V = \{v_1, v_2, \cdots, v_n\}$是有限非空集合，$v_i$称为结点(Vertex)，V称为结点集。

（2） E是有限集合，称为边集。E中的每个元素都有V中的结点对与之对应，称之为边(Edge)。

与边相关的几个概念

上述定义中的结点对即可以是无序的，也可以是有序的。

若边e与无序结点对(u,v)相对应，则称e为无向边(Undirected Edge)，记为e = (u, v) = (v, u)，这时称u、v是边e的两个端点。

若边e与有序结点对<u, v>相对应，则称e为有向边(Directed Edge)(或弧)，记为e = <u, v>，这时称u为e的始点，v为e的终点。

图的表示

对于一个图G，如果将其记为G = <V, E>，并写出V和E的集合表示，这称为**图的集合表示**。

而为了描述简便起见，在一般情况下，往往只画出它的图形：用小圆圈表示V中的结点，用由u指向v的有向线段或曲线表示有向边<u, v>，无向线段或曲线表示无向边(u, v)，这称为**图的图形表示**。

图的表示

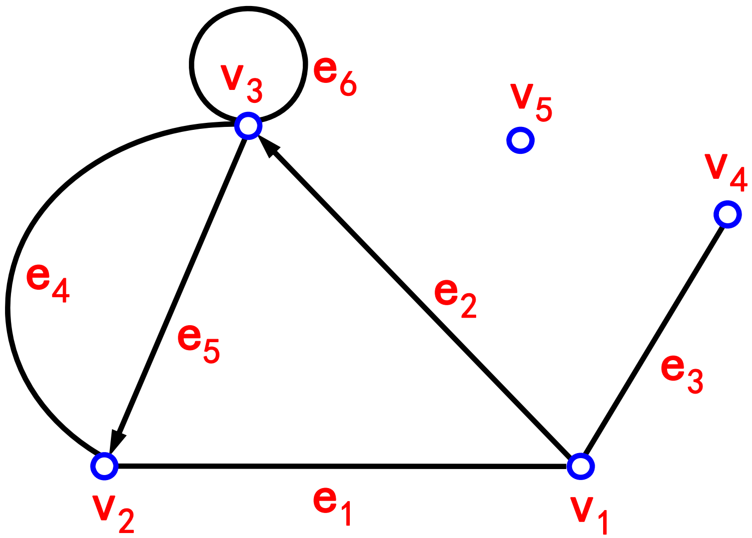
设图$G=\langle V, E\rangle$，这里$V=\{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5\}$，$E=\{e_1, e_2, e_3, e_4, e_5, e_6\}$，其中$e_1=(v_1, v_2)$，$e_2=\langle v_1, v_3\rangle$，$e_3=(v_1, v_4)$，$e_4=(v_2, v_3)$，$e_5=\langle v_3, v_2\rangle$，$e_6=(v_3, v_3)$。试画出图G的图形，并指出哪些是有向边，哪些是无向边？

图的表示

分析　由于V中有5个结点，因此要用5个小圆圈分别表示这5个结点，点的具体摆放位置可随意放。而对E中的6条边，圆括号括起的结点对表示无向边，直接用直线或曲线连接两个端点，尖括号括起的结点对表示有向边，前一个是始点，后一个终点，用从始点指向终点的有向直线或曲线连接。

图的表示

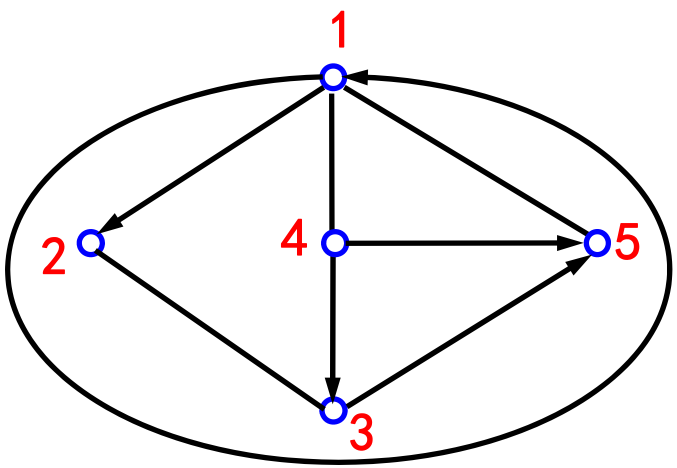
G的图形如下图所示。



G中的e_1、e_3、e_4、e_6是无向边，e_2、e_5是有向边。

图的表示

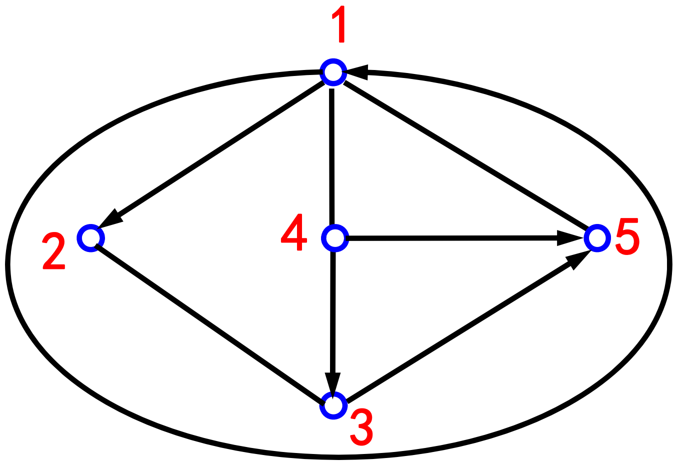
设图G = <V, E>的图形如下图所示，试写出G的集合表示。



分析　将所有小圆圈的记号构成结点集合，将连接结点对的直线或曲线用圆括号括起该结点对表示无向边，将连接结点对的有向直线或曲线用尖括号括起该结点对表示有向边，这里箭头指向的结点放在后面。

图的表示

设图G = <V， E>的图形如下图所示，试写出G的集合表示。



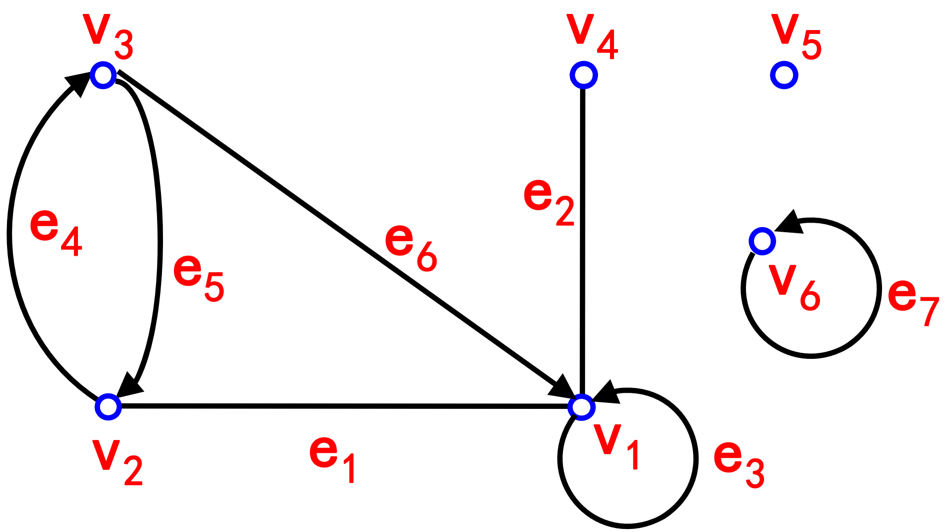
解　图G的集合表示为G = <V， E> = <{1， 2， 3， 4， 5}，{<1， 1>，<1， 2>，(1， 4)，(1， 5)，(2， 3)，<3， 5>，<4， 3>，<4， 5>}>。

邻接点与邻接边

定义　在图G = <V，E>中，若两个结点v_i和v_j是边e的端点，则称v_i与v_j互为邻接点(Adjacent Point)，否则v_i与v_j称为不邻接的；具有公共结点的两条边称为邻接边(Adjacent Edge)；两个端点相同的边称为环(Ring)或自回路(Self-Loop)；图中不与任何结点相邻接的结点称为孤立结点(Isolated Point)；仅由孤立结点组成的图称为零图(Null Graph)；仅含一个结点的零图称为平凡图(Trivial Graph)； 含有n个结点，m条边的图，称为(n，m)图。

邻接点与邻接边

试写出下图所示图G的所有结点的邻接点、所有边的邻接边，并指出所有的孤立结点和环。



邻接点与邻接边

根据定义，如果两个结点间有边相连，那么它们互为邻接点；如果两条边有公共结点，那么它们互为邻接边。需要注意的是，只要当一个结点处于环上时，它才是自己的邻接点；由于一条边有两个端点，在计算邻接边时要把这两个端点都算上，例如e_2和e_4都是e_1的邻接边。所有边都是自己的邻接边。

邻接点与邻接边

图G所有结点的邻接点和孤立结点，所有边的邻接边和环如下表所示。图G既不是平凡图，也不是零图，而是一个(6，7)图。

结点	邻接点	是否孤立结点
v_1	V_1, v_2, v_3, v_4	否
v_2	v_1, v_3	否
v_3	v_1, v_2	否
v_4	v_1	否
v_5		是
v_6	v_6	否

边	邻接边	是否环
e_1	$e_1, e_2, e_3, e_4, e_5, e_6$	否
e_2	e_1, e_2, e_3, e_6	否
e_3	e_1, e_2, e_3, e_6	是
e_4	e_1, e_4, e_5, e_6	否
e_5	e_1, e_4, e_5, e_6	否
e_6	$e_1, e_2, e_3, e_4, e_5, e_6$	否
e_7	e_7	是

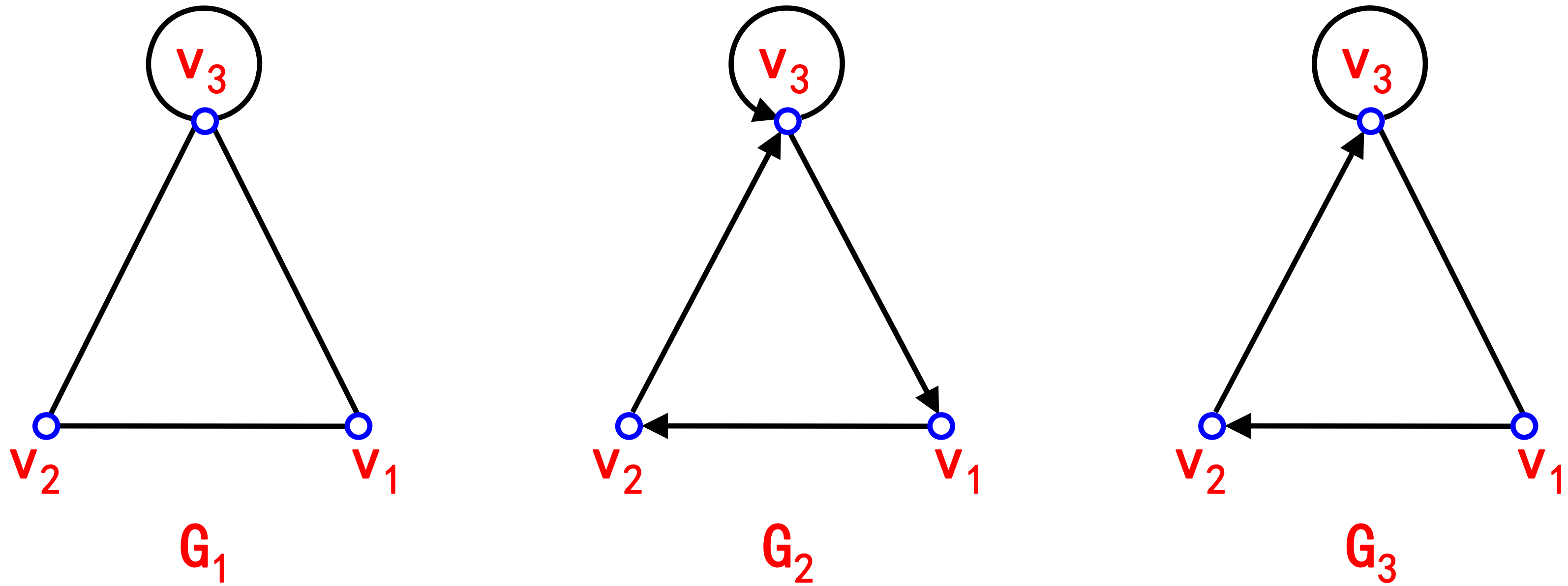
图的分类

1. 按边有无方向分类

定 义　　每条边都是无向边的图称为无向图(Undirected Graph)；每条边都是有向边的图称为有向图(Directed Graph)；有些边是无向边，而另一些边是有向边的图称为混合图(Mixed Graph)。

图的分类

试判断下图所示的三个图是无向图、有向图，还是混合图?

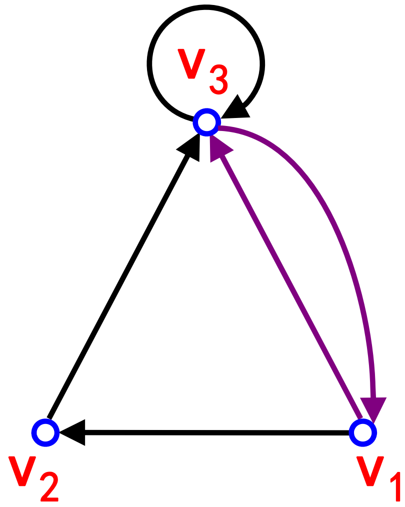


分析：判断无向图、有向图和混合图，仅仅看边有无方向就行了。

解：G_1为无向图，G_2为有向图，G_3为混合图。

图的分类

说明　我们仅讨论无向图和有向图，至于混合图，我们可将其中的无向边看成方向相反的两条有向边，从而转化为有向图来研究。例如可将图G_3转化为下图。



G_3

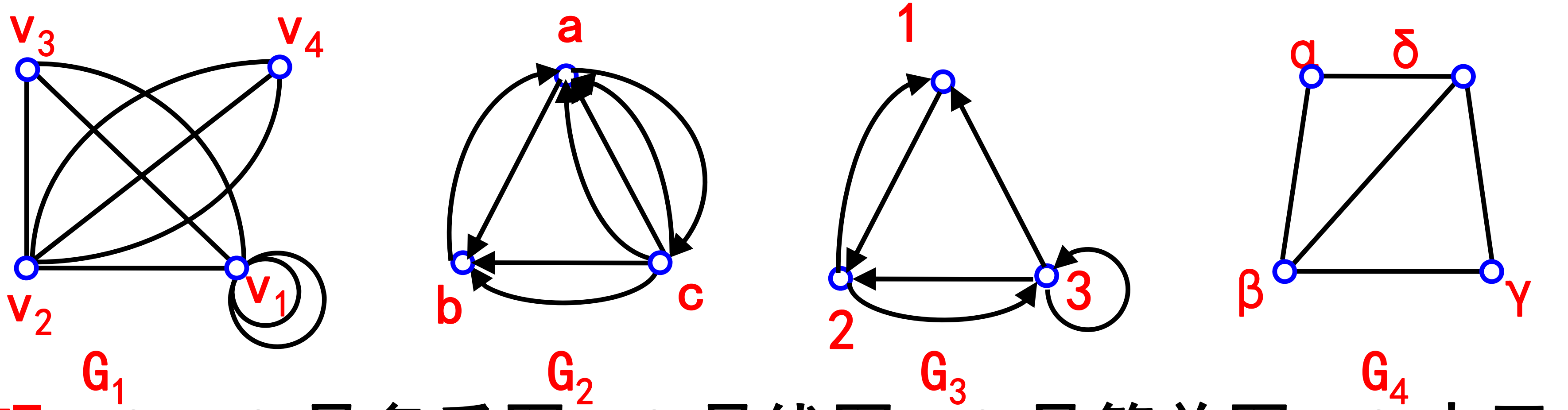
图的分类

2. 按有无平行边分类

定义　在有向图中，两结点间(包括结点自身间)若有同始点和同终点的几条边，则这几条边称为**平行边**(Parallel Edge)；在无向图中，两结点间(包括结点自身间)若有几条边，则这几条边称为**平行边**。两结点a、b间相互平行的边的条数称为边(a，b)或<a，b>的**重数**(Repeated Number)。含有平行边的图称为**多重图**(Multigraph)；非多重图称为**线图**(Line Graph)；无环的线图称为**简单图**(Simple Graph)。

图的分类

试判断下图所示的4个图是多重图、线图，还是简单图？并指出多重图中所有平行边的重数。



解 G_1、G_2是多重图，G_3是线图，G_4是简单图。G_1中平行边（v_1，v_2）的重数为2，（v_3，v_4）的重数为2，（v_2，v_4）的重数为3；G_2中平行边<c，a>的重数为3，<c，b>的重数为2。

分析 多重图和线图，仅仅看有无平行边；简单图是一种特殊的线图，仅仅无环而已。两个端点都相同的无向边是平行边，但端点都相同的有向边不一定是平行边，例如G_2中的<a，c>和<c，a>就不是平行边，因此<c，a>的重数是3，而不是4。

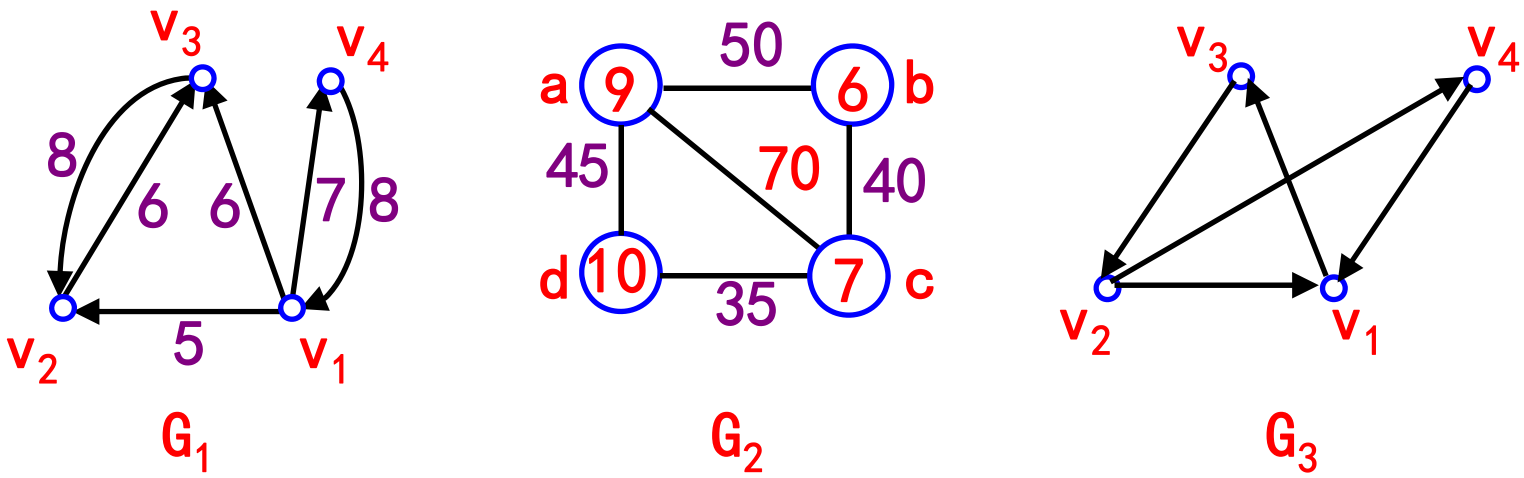
图的分类

3. 按边或结点是否含权分类

定义　**赋权图**(Weight Graph)G是一个**三重组<V, E, g>**或**四重组<V, E, f, g>**，其中V是结点集合，E是边的集合，f是从V到非负实数集合的**函数**，g是从E到非负实数集合的**函数**。

图的分类

下图所示的图哪个是赋权图，哪个是无权图？是赋权图的请写出相应的函数。



分析　对每条边都赋予非负实数值，或者对每条边和每个结点都赋予非负实数值的图就是赋权图。图G_1的每条边都赋予了非负实数值，因此图G_1是赋权图。图G_2的每条边和每个结点都赋予了非负实数值，因此图G_2是赋权图。而图G_3的边没有赋予非负实数值，因此图G_3不是赋权图。

图的分类

在图中，G_1、G_2是赋权图，G_3不是赋权图。记图

$G_1=\langle V_1, E_1, g_1\rangle$和$G_2=\langle V_2, E_2, f_2, g_2\rangle$，其中：

$g_1(\langle v_1, v_2\rangle)=5$，$g_1(\langle v_1, v_3\rangle)=6$，

$g_1(\langle v_1, v_4\rangle)=7$，$g_1(\langle v_2, v_3\rangle)=6$

$g_1(\langle v_3, v_2\rangle)=8$，$g_1(\langle v_4, v_1\rangle)=8$。

$f_2(a)=9$，$f_2(b)=6$，$f_2(c)=7$，$f_2(d)=10$；

$g_2((a, b))=50$，$g_2((a, c))=70$，

$g_2((a, d))=45$，$g_2((b, d))=40$，

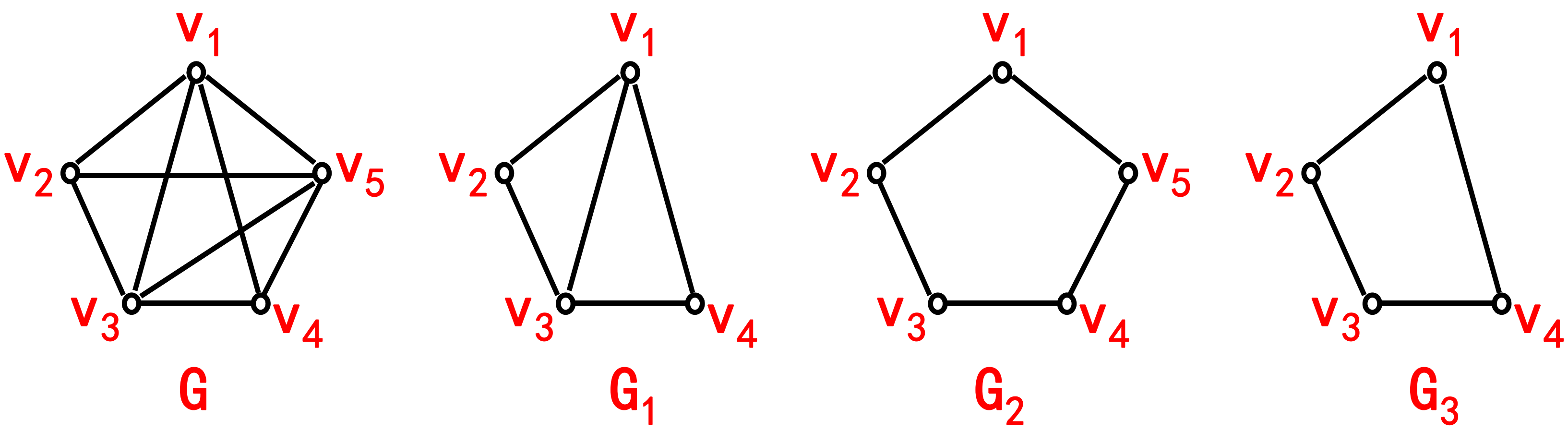
$g_2((c, d))=35$，

子图与补图

定义 设有图$G = \langle V, E\rangle$和图$G_1 = \langle V_1, E_1\rangle$。

1. 若$V_1 \subseteq V$，$E_1 \subseteq E$，则称G_1是G的**子图**(Subgraph)，记为$G_1 \subseteq G$。
2. 若$G_1 \subseteq G$，且$G_1 \neq G$(即$V_1 \subset V$或$E_1 \subset E$)，则称G_1是G的**真子图**(Proper Subgraph)，记为$G_1 \subset G$。
3. 若$V_1 = V$，$E_1 \subseteq E$，则称G_1是G的**生成子图**(Spanning Subgraph)。
4. 若$V_1 \subseteq V$，且E_1包含了G在结点子集V_1之间的所有边，则称G_1是G的**导出子图**。

子图与补图



判断下图中，图G_1、G_2和G_3是否是图G的子图、真子图、生成子图？

分析 由于子图、真子图和生成子图只需要判断结点集和边集是否是图G的结点集和边集，因此容易得出G_1、G_2和G_3都是图G的子图、真子图，只有G_2是图G的生成子图。

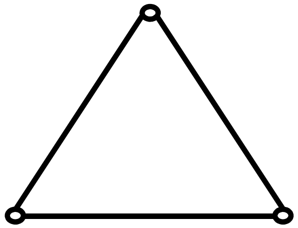
注 每个图都是它自身的子图、生成子图

子图与补图

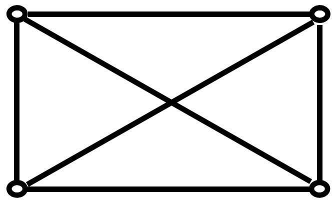
定义　设G = <V, E>为一个具有n个结点的无向简单图，如果G中任意两个结点间都有边相连，则称G为无向完全图(Undirected Complete Graph)，简称G为完全图(Complete Graph)，记为K_n。

　　设G = <V, E>为一个具有n个结点的有向简单图，如果G中任意两个结点间都有两条方向相反的有向边相连，则称G为有向完全图(directed Complete Graph)，在不发生误解的情况下，也记为K_n。

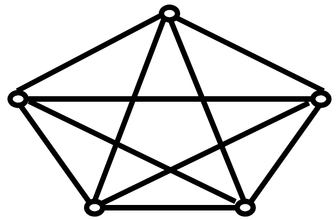
子图与补图



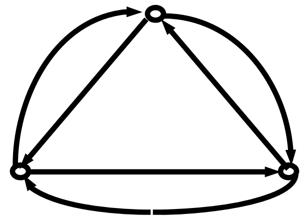
K_3



K_4



K_5



K_3

无向完全图K_n的边数为 $C(n,2)=\frac{1}{2}n(n-1)$

有向完全图K_n的边数为 $P(n,2)=n(n-1)$

子图与补图

设$G = \langle V, E\rangle$为简单图，$G' = \langle V, E_1\rangle$为完全图，则称$G_1 = \langle V, E_1-E\rangle$为G的补图（Complement of Graph），记为$\overline{G}$。

注　上述定义中，当G为有向图时，则G'为有向完全图；当G为无向图时，则G'为无向完全图。

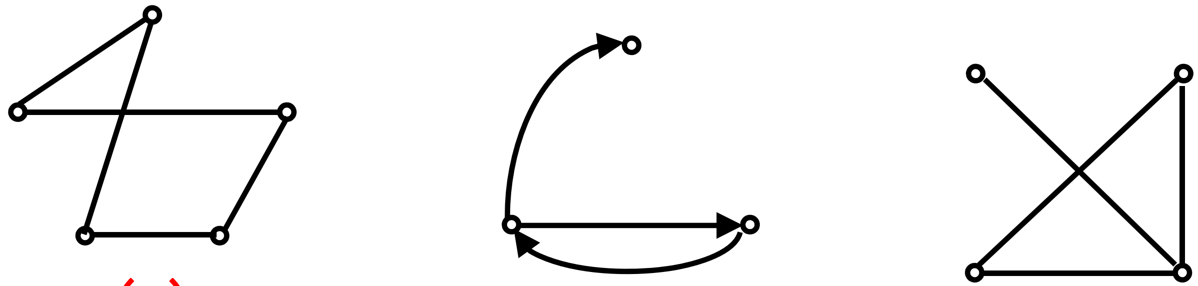
G的补图也可理解为从结点集V的完全图中删除G中的边剩下的图，即G与其补图的结点集是相同的，边集是相对于完全图的边集为全集的补集。

显然，若$G_1=\overline{G}$，则$G=\overline{G_1}$，即它们互为补图。

K_n的补图为n个结点的零图。

子图与补图

求下图中图(a)、(b)、(c)的补图。

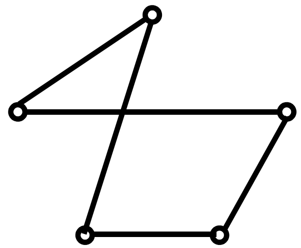


(a)　　　　(b)　　　　(c)

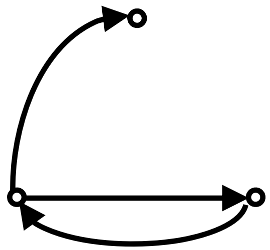
分析　互为补图的两个图的结点集相同，边集是相对于完全图的边集为全集的补集。具体做的时候，可先补充一些边使其变为完全图，然后再删除原来图中的边得到。

子图与补图

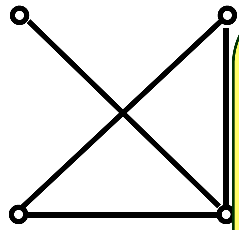
求下图中图(a)、(b)、(c)的补图。



(a)



(b)

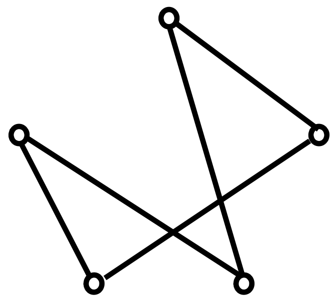


(c)

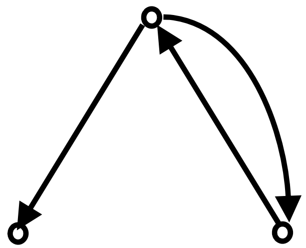
注意，孤立结点一定不要漏了，否则结点集就不同。

解　上图中图(a)、(b)、(c)的补图分别

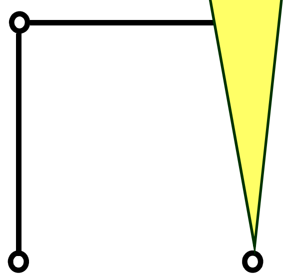
(a)、(b)、(c)。



(a)



(b)



(c)

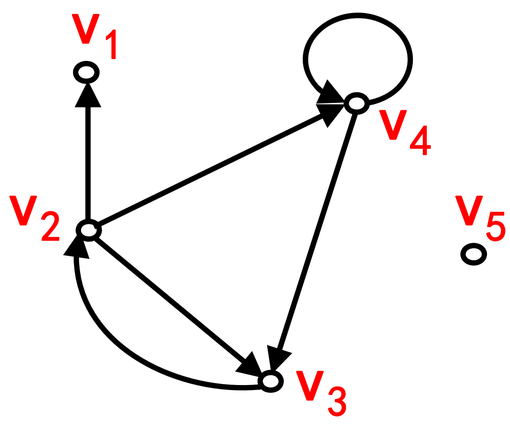
结点的度数与握手定理

定义　（1）无向图G = <V, E>中以结点v∈V为端点的边数（有环时计算两次）称为结点v的度数(Degree)，简称度，记为deg(v)。

（2）有向图G = <V, E>中以结点v为始点的边数称为v的出度(Out-Degree)，记为$deg^+(v)$；以结点v为终点的边数称为v的入度(In-Degree)，记为$deg^-(v)$。显然，$deg(v) = deg^+(v)+deg^-(v)$。

结点的度数与握手定理

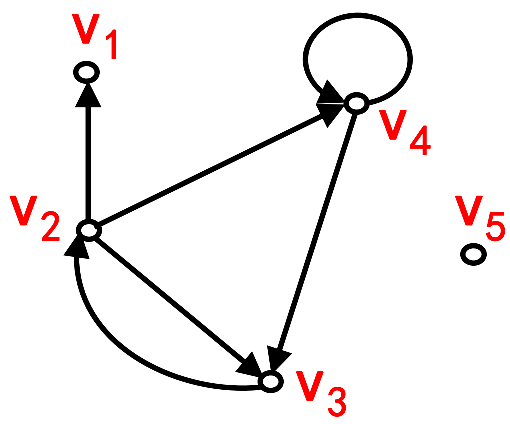
求右图中所有结点的度数、出度和入度。



分析　求结点的度数非常简单，只需要数一下以该结点为端点的边数，出度只需要数一下以其为始点的边数，入度只需要数一下以其为终点的边数，无向环算2度，有向环出度和入度各算1度。

结点的度数与握手定理

求右图中所有结点的度数、出度和入度。



解 $\deg(v_1)=1$，$\deg^+(v_1)=0$，$\deg^-(v_1)=1$

$\deg(v_2)=4$，$\deg^+(v_2)=3$，$\deg^-(v_2)=1$

$\deg(v_3)=3$，$\deg^+(v_3)=1$，$\deg^-(v_3)=2$

$\deg(v_4)=4$，$\deg^+(v_4)=2$，$\deg^-(v_4)=2$

$\deg(v_5)=\deg^+(v_5)=\deg^-(v_5)=0$

结点的度数与握手定理

定理 图中结点度数的总和等于边数的二倍，即设图G = <V， E>，则有 $\sum_{v \in V} \deg(v) = 2|E|$

证明 因为每条边都有两个端点(环的两个端点相同)，所以加上一条边就使得各结点的度数之和增加2，因此结论成立。

这个结果是图论的第一个定理，它是由欧拉于1736年最先给出的。欧拉曾对此定理给出了这样一个形象论断：如果许多人在见面时握了手，两只手握在一起，被握过手的总次数为偶数。故此定理称为图论的基本定理或握手定理。

结点的度数与握手定理

推论 图中度数为奇数的结点个数为偶数。

证明 设图$G = \langle V, E\rangle$， $V_1 = \{v \mid v \in V$且$\deg(v)$为奇数$\}$， $V_2 = \{v \mid v \in V$且$\deg(v)$为偶数$\}$。

显然，$V_1 \cap V_2 = \phi$，且$V_1 \cup V_2 = V$，于是

$$\sum_{v \in V} \deg(v) = \sum_{v \in V_1} \deg(v) + \sum_{v \in V_2} \deg(v) = 2|E|,$$

式中$2|E|$和$\sum_{v \in V_2} \deg(v)$（偶数之和为偶数）均为偶数，因而$\sum_{v \in V_1} \deg(v)$也为偶数。于是$|V_1|$为偶数，即度数为奇数的结点个数为偶数。

结点的度数与握手定理

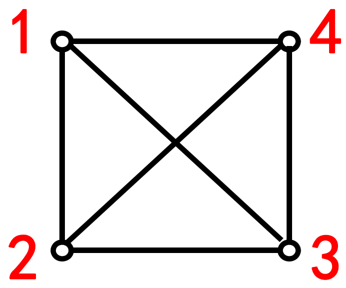
定理 有向图中各结点的出度之和等于各结点的入度之和，等于边数，即设有向图G = <V, E>，则有

$$\sum_{v\in V}\deg^{+}(v)=\sum_{v\in V}\deg^{-}(v)=|E|$$

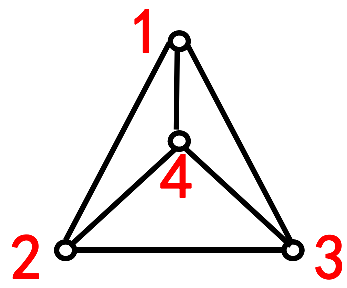
证明 因为每条有向边具有一个始点和一个终点(环的始点和终点是同一个结点)，因此，每条有向边对应一个出度和一个入度。图G中有|E|条有向边，则G中必产生|E|个出度，这|E|个出度即为各结点的出度之和，G中也必产生|E|个入度，这|E|个入度即为各结点的入度之和。因而，在有向图中，各结点的出度之和等于各结点的入度之和，都等于边数|E|。

图的同构

图是表达事物之间关系的工具，因此，图的最本质的内容是结点和边的关联关系。而在实际画图时，由于结点的位置不同，边的长短曲直不同，同一事物间的关系可能画出不同形状的图来。例如下图中的两个图G_1和G_2实际上是同一个图K_4。



G_1



G_2

图的同构

设两个图G = <V, E>和G’ = <V’, E’>，如果存在双射函数g：V→V’，使得对于任意的e = (v_i, v_j)（或者$\langle v_i, v_j\rangle$）∈E当且仅当e’ = $(g(v_i), g(v_j))$（或者$\langle g(v_i), g(v_j)\rangle$）∈E’，并且e与e’的重数相同，则称G与G’同构，记为G≌G’。

对于同构，形象地说，若图的结点可以任意挪动位置，而边是完全弹性的，只要在不拉断的条件下，一个图可以变形为另一个图，那么这两个图是同构的。

图的同构

两个图同构的必要条件

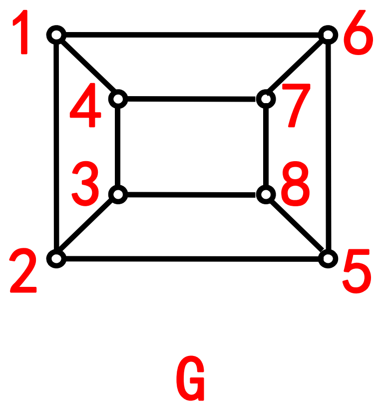
（1）结点数目相同；

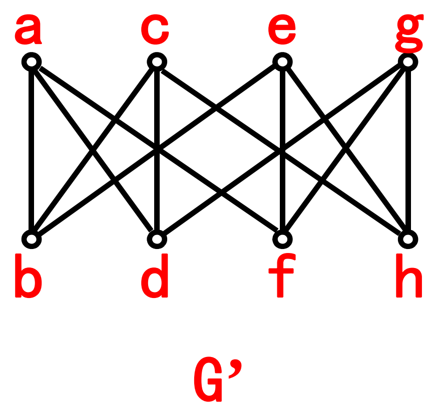
（2）边数相同；

（3）度数相同的结点数相同。

图的同构

试证明下图中，G≌G’。





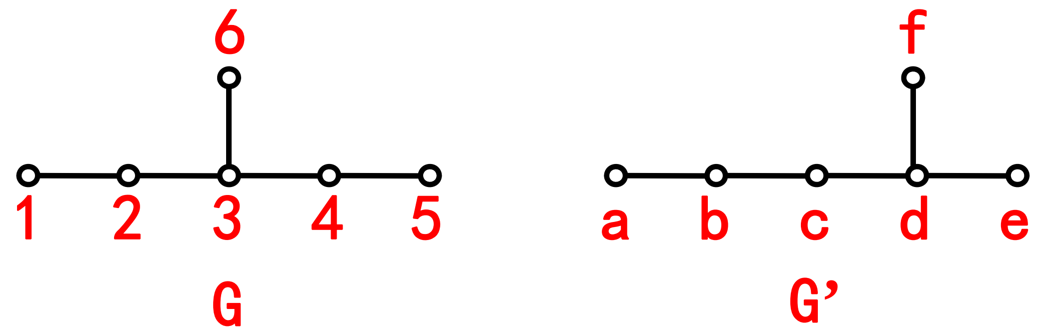
证明　构造结点之间的双射函数f如下：

f(1)=a，f(2)=b，f(3)=c，f(4)=d，f(5)=e，f(6)=f，f(7)=g，f(8)=h

容易验证，f满足同构定义，所以G≌G’。

图的同构

证明下图中，G与G’不同构



分析　证明两个图不同构，通常用反证法。

证明　假设G≌G’，双射函数为f。由定义可知，v与f(v)的度数一定相同，因此有f(3)=d。G中3与一个度数为1的结点6邻接，而G’中d与两个度数为1的结点e、f邻接，矛盾。

图的同构

注意　**图同构的三个必要条件不是充分条件**。在上图的G与G’两个图，虽然满足以上三个条件，但不同构。

寻找一种简单而有效的方法来判断图的同构，是图论中一个重要而未解决的问题。

图的操作

定义 设图 $G = \langle V, E \rangle$。

1. 设 $e \in E$，用 $G-e$ 表示从 G 中去掉边 e 得到的图，称为**删除边 e**。又设 $E' \subseteq E$，用 $G-E'$ 表示从 G 中删除 E' 中所有边得到的图，称为**删除 E'**。
2. 设 $v \in V$，用 $G-v$ 表示从 G 中去掉结点 v 及 v 关联的所有边得到的图，称为**删除结点 v**。又设 $V' \subset V$，用 $G-V'$ 表示从 G 中删除 V' 中所有结点及关联的所有边得到的图，称为**删除 V'**。
3. 在 G 中删去一个子图 H，指删掉 H 中的各条边，记作 $G-H$。特别地，G 的补图 $\overline{G} = K_n - G$。

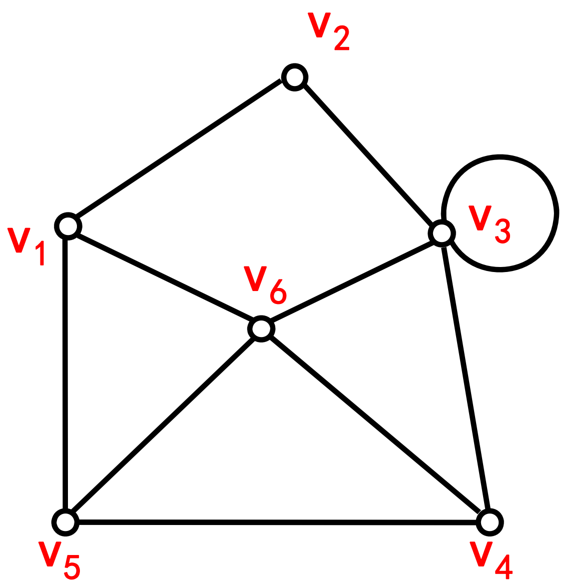
图的表示：邻接矩阵

设图G = <V, E>，其中V = $\{v_1, v_2, \cdots, v_n\}$，并假定结点已经有了从$v_1$到$v_n$的次序，则n阶方阵$A_G$ = $(a_{ij})_{n\times n}$称为G的**邻接矩阵**，其中

$$a_{ij}=\begin{cases}1, & \text{若}(v_i,v_j)\in E\text{或}<v_i,v_j>\in E\\0, & \text{否则}\end{cases}$$

图的表示：邻接矩阵

试写出下图所示图G的邻接矩阵。



分析 可在矩阵的行与列前按结点排序标上结点，若第i行的结点到第j列的结点有边相连，则在邻接矩阵的第i行第j列元素为1，否则为0。若结点排序为$v_1v_2v_3v_4v_5v_6$，则可标记如下：

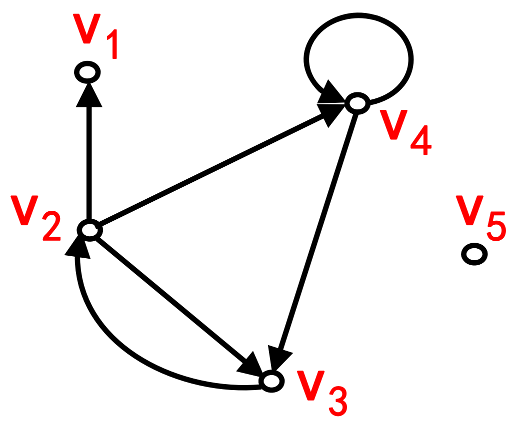
$$A=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

无向图的邻接矩阵是一个对称阵

图的表示：邻接矩阵

试写出下图所示图G的邻接矩阵。

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$



图的表示：邻接矩阵

若G是有向图，则A中第i行元素是由结点v_i为始点的边所决定，其中为1的元素数目等于v_i的出度，即

$$\deg^+(v_i) = \sum_{k=1}^{n} a_{ik}$$

A中第i列元素是由结点v_i为终点的边所决定，其中为1的元素数目等于v_i的入度，即

$$\deg^-(v_i) = \sum_{k=1}^{n} a_{ki}$$

图的表示：邻接表

- 设有向图或无向图具有 n 个结点，可以用结点表表示该有向图或无向图。
- 结点表：用**单链表**的形式存放所有的结点。

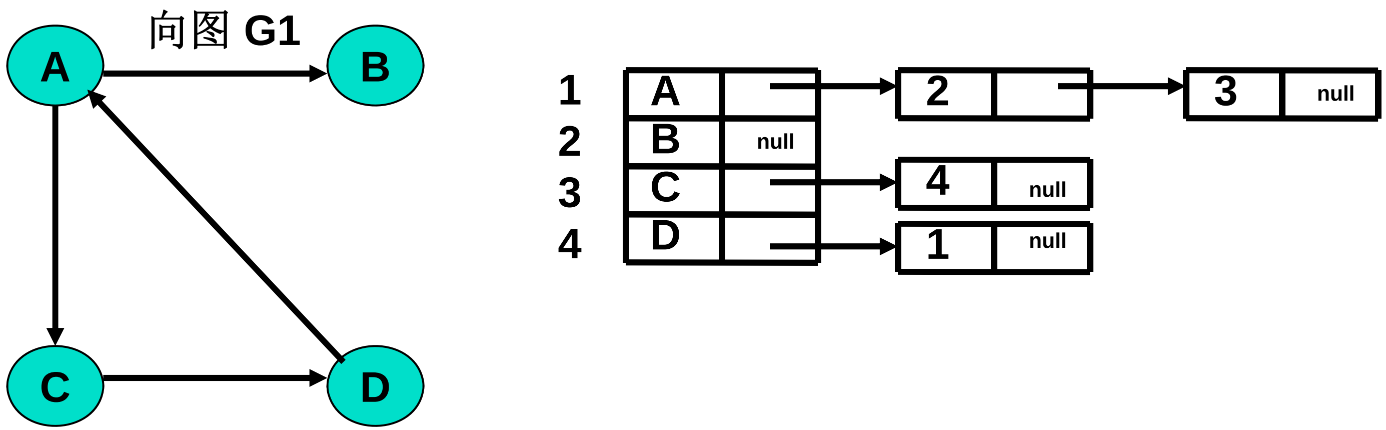
a	b	c

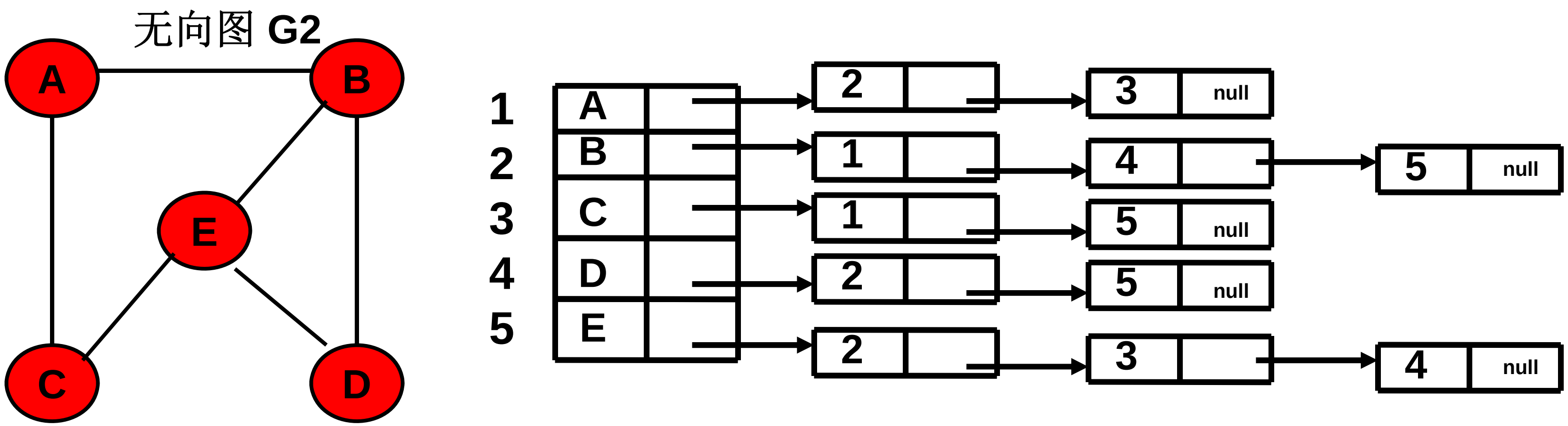
邻接点域a： 存放该节点的编号

数据域b： 存放相应边的数值

链域c： 存放下一个结点的地址指针

图的表示：邻接表


向图 G1
A
B
C
D
1
2
3
4
A
B
C
D
2
3
null
null
4
null
1
null


无向图 G2
A
B
E
C
D
1
2
3
4
5
A
B
C
D
E
2
3
null
1
4
5
null
1
5
null
2
5
null
2
3
4
null

总结

- 图是由两个集合构成的，可以利用集合的有关知识来研究它，如子图、完全图、补图等；
- 图的计算机表示就是它的邻接矩阵，实际中的图都是很大的，可能有成千上万的结点和边，用手工处理是很难想象的；
- 判断图的同构，是图论中一个重要而未解决的问题。现在还没有好的办法，只有凭经验按定义去试；
- 握手定理是图论的基本定理，很多理论都是以它为基础的，必须熟练掌握，并能灵活运用。