理论力学 CAI 静力学

- 力
- 力偶
- 力系的简化
- 约束
- 力系的平衡
- 摩擦与摩擦力

力系的简化

力系的简化

- 空间一般力系的简化
- 力系简化的最简的结果
- 平行力系的简化
- 平面力系的简化

力系的简化

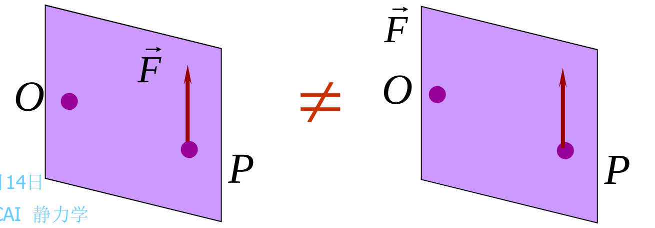
- 空间一般力系的简化
- 力系简化的最简的结果
- 平行力系的简化
- 平面力系的简化

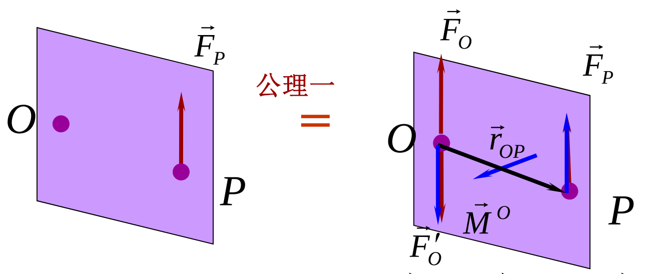
空间一般力系的简化

- 力作用线的平移
- 力系的主矢与主矩
- 力系的简化

力作用线的平移

- 力偶是自由矢量
  - 力偶矩矢量在刚体上移动不改变对刚体的作用效果
  - 对应的力系可一起移动或有条件的改变方向
- 力是滑移矢量
  - 力矢量在刚体上沿作用线移动不改变对刚体的作用效果
  - 力的作用线作平行移动，会改变它对刚体的作用效果





$$\vec{F}_P = (\vec{F}_P, \vec{F}_O, \vec{F}'_O)$$

令 $\vec{F}_P = \vec{F}_O = -\vec{F}'_O$

$$\vec{F}_P = (\vec{F}_O, \vec{M}^O)$$

力偶矩 $\vec{M}^O = \vec{r}_{OP} \times \vec{F}_P = \vec{M}_O(\vec{F}_P)$

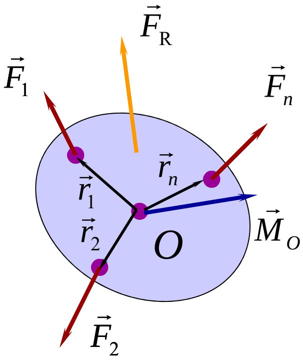
平移力的作用线，必须相应增加一个力偶才可能与原来的力等效，该力偶的力偶矩矢量等于原力对平移点O的力矩

力系的主矢与主矩

- 力系所有力的矢量和称为该力系的主矢

主矢 $\vec{F}_{\mathrm{R}}=\sum_{i=1}^{n}\vec{F}_i$

主矢是自由矢量



- 力系所有力对某点O的矩之矢量和称为该力系对某点O的主矩

主矩 $\vec{M}_O=\sum_{i=1}^{n}\vec{M}_O(\vec{F}_i)=\sum_{k=1}^{n}\vec{r}_k\times\vec{F}_k$

主矩是定位矢量，与矩心绑定

主矢与主矩是描述力系特征的两个计算量

[例]

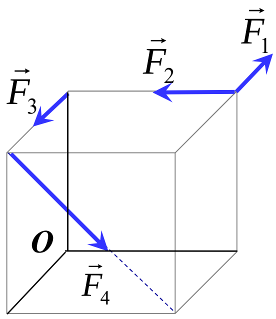
如图所示，一边长为 b 的正立方体所受力系 $(\vec{F}_1,\vec{F}_2,\vec{F}_3,\vec{F}_4)$

其中：

$$F_1=F_2=F_3=F$$

$$F_4=\sqrt{2}F$$

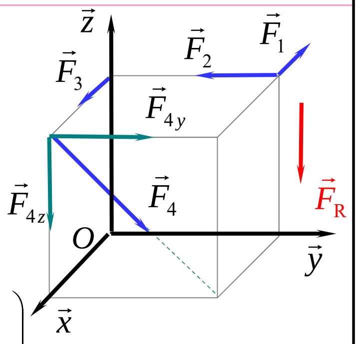
求该力系的主矢与对点O主矩



[解] 建立如图的参考基

各力矢量的坐标阵

$$\boldsymbol{F}_1=\begin{pmatrix}-F\\0\\0\end{pmatrix}\quad \boldsymbol{F}_2=\begin{pmatrix}0\\-F\\0\end{pmatrix}\quad \boldsymbol{F}_3=\begin{pmatrix}F\\0\\0\end{pmatrix}\quad \boldsymbol{F}_4=\begin{pmatrix}0\\F\\-F\end{pmatrix}$$



力系主矢的坐标阵为

$$\boldsymbol{F}_R=\sum_{i=1}^{4}\boldsymbol{F}_i=\begin{pmatrix}-F\\0\\0\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0\\-F\\0\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}F\\0\\0\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0\\F\\-F\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\-F\end{pmatrix}$$

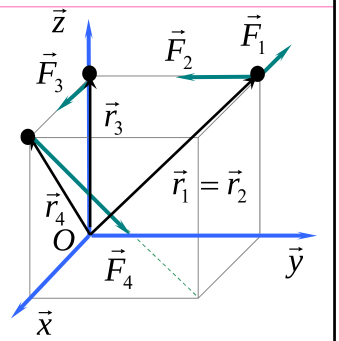
$$F_1=F_2=F_3=F$$

$$F_4=\sqrt{2}F$$

$$F_{4x}=F_{4y}=\sqrt{2}F\cos\frac{\pi}{4}$$

$$\vec{F}_R=\sum_{i=1}^{n}\vec{F}_i \quad\Rightarrow\quad \boldsymbol{F}_R=\sum_{i=1}^{n}\boldsymbol{F}_i$$

$$\boldsymbol{F}_1=\begin{pmatrix}-F\\0\\0\end{pmatrix}\quad \boldsymbol{F}_2=\begin{pmatrix}0\\-F\\0\end{pmatrix}\quad \boldsymbol{F}_3=\begin{pmatrix}F\\0\\0\end{pmatrix}\quad \boldsymbol{F}_4=\begin{pmatrix}0\\F\\-F\end{pmatrix}$$



各力的矢量作用点矢径的坐标阵

$$\boldsymbol{r}_1=\boldsymbol{r}_2=\begin{pmatrix}0\\b\\b\end{pmatrix}\qquad \boldsymbol{r}_3=\begin{pmatrix}0\\0\\b\end{pmatrix}\qquad \boldsymbol{r}_4=\begin{pmatrix}b\\0\\b\end{pmatrix}$$

力系各力对点$\boldsymbol{O}$力矩之坐标阵

$$\boldsymbol{M}_1=\tilde{\boldsymbol{r}}_1\boldsymbol{F}_1=\begin{pmatrix}0&-b&b\\b&0&0\\-b&0&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-F\\0\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\-Fb\\Fb\end{pmatrix}\qquad \boldsymbol{M}_2=\tilde{\boldsymbol{r}}_2\boldsymbol{F}_2=\begin{pmatrix}0&-b&b\\b&0&0\\-b&0&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0\\-F\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}Fb\\0\\0\end{pmatrix}$$

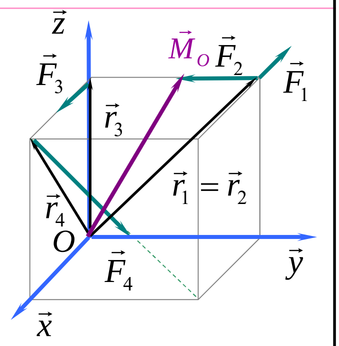
$$\vec{M}_i=\vec{M}_O(\vec{F}_i)=\vec{r}_i\times\vec{F}_i \quad\Rightarrow\quad \boldsymbol{M}_i=\boldsymbol{M}_O(\vec{F}_i)=\tilde{\boldsymbol{r}}_i\boldsymbol{F}_i$$

$$\boldsymbol{M}_3=\tilde{\boldsymbol{r}}_3\boldsymbol{F}_3=\begin{pmatrix}0&-b&0\\b&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}F\\0\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\Fb\\0\end{pmatrix}\qquad \boldsymbol{M}_4=\tilde{\boldsymbol{r}}_4\boldsymbol{F}_4=\begin{pmatrix}0&-b&0\\b&0&-b\\0&b&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0\\F\\-F\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-Fb\\Fb\\Fb\end{pmatrix}$$

$$\boldsymbol{M}_1=\begin{pmatrix}0\\-Fb\\Fb\end{pmatrix}\quad \boldsymbol{M}_2=\begin{pmatrix}Fb\\0\\0\end{pmatrix}\quad \boldsymbol{M}_3=\begin{pmatrix}0\\Fb\\0\end{pmatrix}\quad \boldsymbol{M}_4=\begin{pmatrix}-Fb\\Fb\\Fb\end{pmatrix}$$

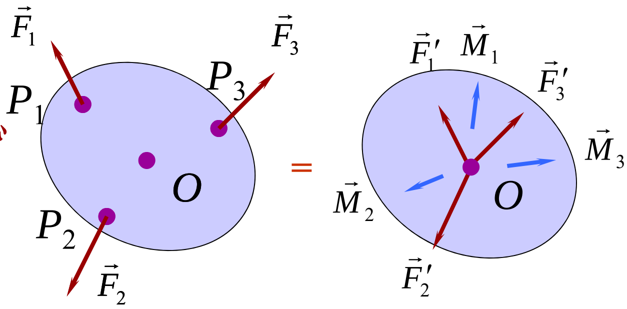
力系对点$\boldsymbol{O}$主矩的坐标阵为

$$\boldsymbol{M}_O=\sum_{i=1}^{4}\boldsymbol{M}_i=\begin{pmatrix}0\\Fb\\2Fb\end{pmatrix}$$



一般力系的简化

- 力系向点$\boldsymbol{O}$简化
  - 点$\boldsymbol{O}$称为简化中心



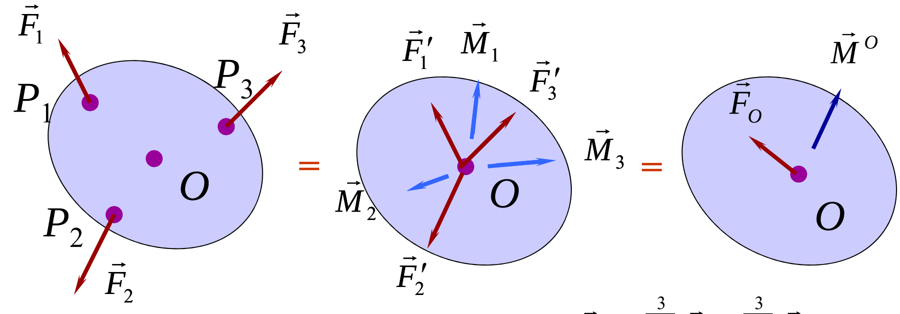
$$(\vec{F}_1,\vec{F}_2,\vec{F}_3)\xrightarrow[\vec{F}_i'=\vec{F}_i\quad \vec{M}_i=\vec{M}_O(\vec{F}_i)]{\vec{F}_i=(\vec{F}_i',\vec{M}_i)}\begin{matrix}(\vec{F}_1',\vec{F}_2',\vec{F}_3')\\+\\(\vec{M}_1,\vec{M}_2,\vec{M}_3)\end{matrix}$$

一般力系

汇交力系（$\boldsymbol{O}$）

力偶系

一般力系可简化为一以简化中心为汇交点的汇交力系与一力偶系



$(\vec{F}_1,\vec{F}_2,\vec{F}_3)$ ⇒ $(\vec{F}_1',\vec{F}_2',\vec{F}_3')$ 汇交力系（$\boldsymbol{O}$） ⇒ $\vec{F}_O=\sum_{i=1}^{3}\vec{F}_i'=\sum_{i=1}^{3}\vec{F}_i$ 汇交力系合力

一般力系

\+

$(\vec{M}_1,\vec{M}_2,\vec{M}_3)$ 力偶系 ⇒ $\vec{M}^O=\sum_{i=1}^{n}\vec{M}_i=\sum_{i=1}^{n}\vec{M}_O(\vec{F}_i)$ 力偶系合力偶

$$(\vec{F}_1,\vec{F}_2,\vec{F}_3)=(\vec{F}_O,\vec{M}^O)$$

- 一般力系简化的结论
  - 向简化中心$\boldsymbol{O}$简化的任意一般力系与一个作用点在简化中心$\boldsymbol{O}$的力和一个力偶等效

$$(\vec{F}_1,\vec{F}_2,\cdots,\vec{F}_n)=(\vec{F}_O,\vec{M}^O)$$

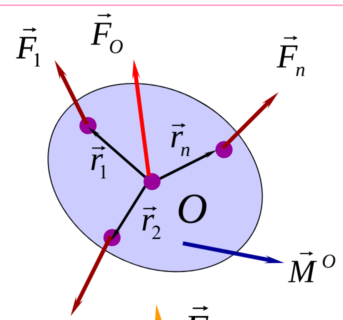
$$\vec{F}_O=\sum_{i=1}^{n}\vec{F}_i \qquad \vec{M}^O=\sum_{i=1}^{n}\vec{M}_O(\vec{F}_i)$$

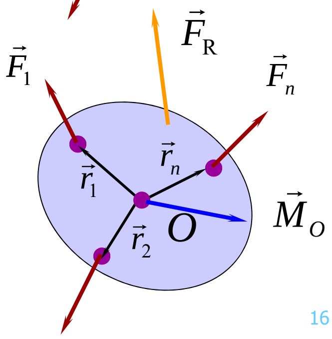
  - 一般力系的特征量

$$\vec{F}_R=\sum_{i=1}^{n}\vec{F}_i \qquad \vec{M}_O=\sum_{i=1}^{n}\vec{M}_O(\vec{F}_i)$$

主矢　　　　主矩

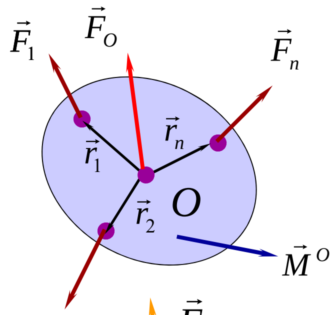
$$\vec{F}_O=\vec{F}_R \qquad \vec{M}^O=\vec{M}_O$$





$\vec{F}_O = \vec{F}_R \qquad \vec{M}^O = \vec{M}_O$

- 任意一般力系向点***O***简化，可简化为一个力与一个力偶
  - 力 $\vec{F}_O$
    - 大小方向等于该力系的主矢
    - 作用点在简化中心
  - 力偶 $\vec{M}^O$
    - 力偶矩的大小方向等于该力系对简化中心的主矩

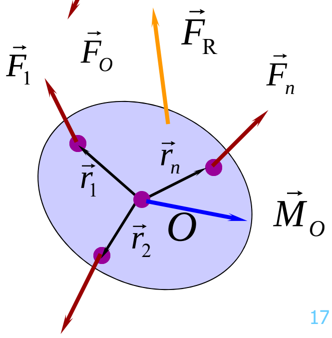


$$(\vec{F}_1,\vec{F}_2,\cdots,\vec{F}_n)=(\vec{F}_O,\vec{M}^O)$$

揭示物理意义

$$(\vec{F}_1,\vec{F}_2,\cdots,\vec{F}_n)\,!\!=(\vec{F}_R,\vec{M}_O)$$

只揭示大小方向



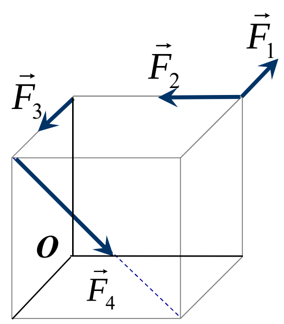
[例]

一边长为 ***b*** 的正立方体所受的力系如图所示，其中

$$F_1 = F_2 = F_3 = F$$

$$F_4 = \sqrt{2}F$$

将力系向点***O***简化



[解]　建立如图的参考基

力系主矢的坐标阵为

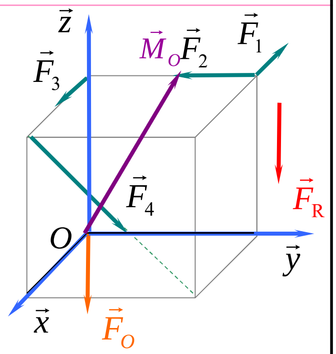
$$\boldsymbol{F}_{\mathrm{R}}=\sum_{i=1}^{4}\boldsymbol{F}_i=\begin{pmatrix}0\\0\\-F\end{pmatrix}$$

力系对点O主矩的坐标阵为

$$\boldsymbol{M}_O=\sum_{i=1}^{4}\boldsymbol{M}_i=\begin{pmatrix}0\\Fb\\2Fb\end{pmatrix}$$

力系向点O简化的力矢量　$\vec{F}_O=\vec{F}_{\mathrm{R}}$

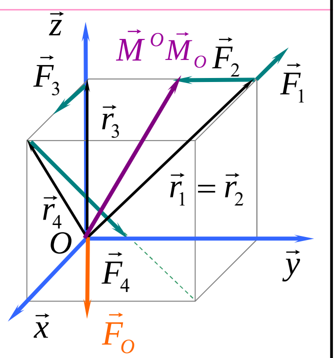
$$\boldsymbol{F}_O=\boldsymbol{F}_{\mathrm{R}}=\begin{pmatrix}0\\0\\-F\end{pmatrix}$$



力系对点O简化的力偶矩

$$\vec{M}^{O}=\vec{M}_O$$

$$\boldsymbol{M}^{O}=\begin{pmatrix}0\\Fb\\2Fb\end{pmatrix}$$



- **小结**
  - 力系对点O的简化
    - 计算力系的主矢
    - 计算力系对点O的主矩
    - 作用于点O的简化力等于主矢
    - 简化力偶矩矢量等于主矩

$$\vec{F}_O = \vec{F}_R = \sum_{i=1}^{n} \vec{F}_i \qquad \vec{M}^O = \vec{M}_O = \sum_{i=1}^{n} \vec{r}_i \times \vec{F}_i$$

力系的简化

- 空间一般力系的简化
- **力系简化的最简的结果**
- 平行力系的简化
- 平面力系的简化

力系简化的最简的结果

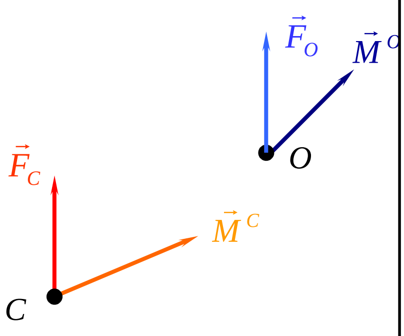
- 力系简化的结果与简化中心的关系
- 力系简化的几种结果

力系简化的结果与简化中心的关系

- 第一不变量

$$(\vec{F}_1,\vec{F}_2,\cdots,\vec{F}_n)\xrightarrow{\text{简化中心}\boldsymbol{O}}(\vec{F}_O,\vec{M}^O)$$

$$(\vec{F}_1,\vec{F}_2,\cdots,\vec{F}_n)\xrightarrow{\text{简化中心}\boldsymbol{C}}(\vec{F}_C,\vec{M}^C)$$

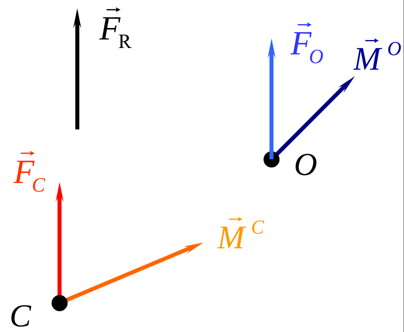


力系简化的结果与简化中心的关系

- 第一不变量

$$(\vec F_1,\vec F_2,\cdots,\vec F_n)\xrightarrow{\text{简化中心}O}(\vec F_O,\vec M^O)$$

$$(\vec F_1,\vec F_2,\cdots,\vec F_n)\xrightarrow{\text{简化中心}C}(\vec F_C,\vec M^C)$$



- 简化力的关系

$$\vec F_O=\vec F_R$$
$$\vec F_C=\vec F_R$$

$$\longrightarrow\quad \vec F_O=\vec F_C=\vec F_R=\sum_{i=1}^{n}\vec F_i$$

第一不变量：同一力系向不同简化中心的简化力均等于主矢，只是作用点不同

- 第二不变量

$$(\vec F_1,\vec F_2,\cdots,\vec F_n)=(\vec F_O,\vec M^O)=(\vec F_C,\vec M^C)$$

$$(\vec F_1,\vec F_2,\cdots,\vec F_n)\xrightarrow{\text{简化中心}C}(\vec F_C,\vec M^C)$$

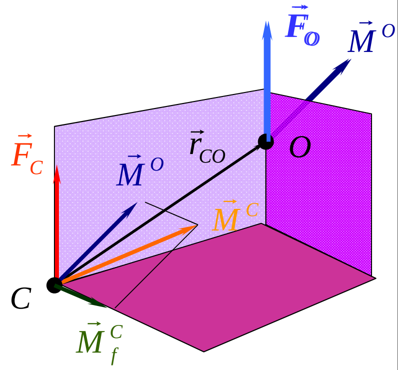
$$\Updownarrow$$

$$(\vec F_O,\vec M^O)\xrightarrow{\text{简化中心}C}(\vec F_C,\vec M^C)$$

$$\vec F_O\xrightarrow{\text{简化中心}C}\vec F_C,\quad \vec M_f^C=\vec M_C(\vec F_O)=\vec r_{CO}\times\vec F_O$$

$$+$$

$$\vec M^O\xrightarrow{\text{简化中心}C}\vec M^O$$



$$\vec M^C=\vec M^O+\vec M_f^C=\vec M^O+\vec r_{CO}\times\vec F_O$$

同一力系向不同简化中心简化力偶的关系

一般情况下不等 $\quad \vec M^C\neq\vec M^O$

- 第二不变量

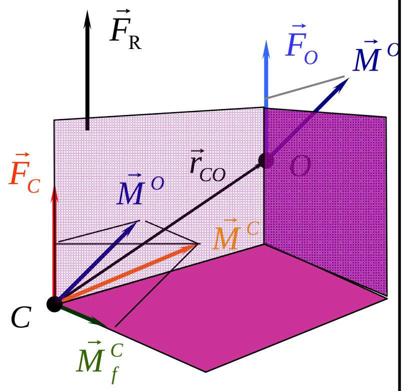
$$(\vec F_1,\vec F_2,\cdots,\vec F_n)=(\vec F_O,\vec M^O)=(\vec F_C,\vec M^C)$$

$$\boxed{\vec F_C=\vec F_O}=\vec F_R=\sum_{i=1}^{n}\vec F_i$$

$$\vec M^C=\vec M^O+\vec r_{CO}\times\vec F_O$$

$$\vec M^C\cdot\vec F_C=(\vec M^O+\vec r_{CO}\times\vec F_O)\cdot\vec F_C$$

$$=(\vec M^O+\cancel{\vec r_{CO}\times\vec F_O})\cdot\vec F_O$$



$$\vec M^C\cdot\vec F_C=\vec M^O\cdot\vec F_O$$

$$\vec M_C\cdot\vec F_R=\vec M_O\cdot\vec F_R$$

第二不变量：同一力系向不同简化中心简化的力与力偶矩的点积相等

同一力系特征量间的关系

力系简化的几种结果

$$\vec F_R=\vec F_C=\vec F_O$$

$$\vec M^C=\vec M^O+\vec r_{CO}\times\underline{\vec F_O}$$

- $\vec F_O=\vec 0\quad \vec M^O=\vec 0$

力系对点C的简化结果 $\vec F_C=\vec 0\quad \vec M^C=\vec 0$

简化结果与简化中心无关 **力系平衡**

该力系的特点

$\vec F_R=\vec 0$ **力系主矢为零矢量**

$\vec M_C=\vec M^C=\vec 0\quad \vec M_O=\vec M^O=\vec 0$ **力系对任意点的主矩为零矢量**

力系平衡充要条件：力系主矢为零矢量

力系对某点的主矩为零矢量

力系简化的几种结果

$$\vec{F}_R = \vec{F}_C = \vec{F}_O$$
$$\vec{M}^C = \vec{M}^O + \vec{r}_{CO} \times \vec{F}_O$$

- $\vec{F}_O = \vec{0} \quad \vec{M}^O \neq \vec{0}$

力系对点*C*的简化结果 $\vec{F}_C = \vec{0} \quad \vec{M}^C = \vec{M}^O$

简化结果与简化中心无关 **力系与一个合力偶等效**

该力系的特点

$\vec{F}_R = \vec{0}$ **力系主矢为零矢量**

$\vec{M}_O = \vec{M}_C$ **力系对任意点的主矩相等**

力系与一个合力偶等效的必要条件： 力系主矢为零矢量

力系简化的几种结果

$$\vec{F}_R = \vec{F}_C = \vec{F}_O$$
$$\vec{M}^C = \vec{M}^O + \vec{r}_{CO} \times \vec{F}_O$$

- $\vec{F}_O \neq \vec{0} \quad \vec{M}^O = \vec{0}$

力系对点*C*的简化结果 $\vec{F}_C = \vec{F}_O \quad \vec{M}^C \neq \vec{M}^O$

简化结果与简化中心有关

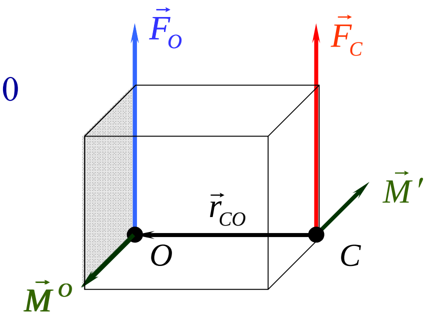
力系只与作用于点*O*的合力等效

力系简化的几种结果

- $\vec{F}_O \neq \vec{0}$ $\vec{M}^O \neq \vec{0}$ $\vec{M}^O \cdot \vec{F}_O = 0$

该力系向某点*C*可进一步简化

以 $\vec{M}_O \vec{F}_O$ 为平面，*OC*垂直该平面，构成立方体， *OC*距离待定



$\vec{F}_O \xrightarrow{\text{简化中心}C} \vec{F}_C$

$\vec{M}' = \vec{M}_C(\vec{F}_O) = \vec{r}_{CO} \times \vec{F}_O$

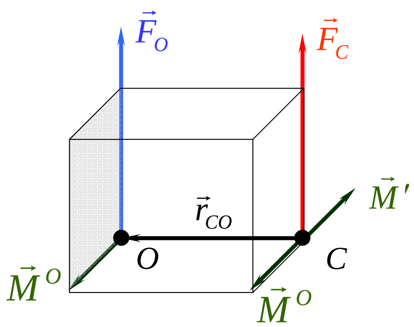
$\vec{M}^C = \vec{M}^O + \vec{M}'$

$\vec{M}^O \xrightarrow{\text{简化中心}C} \vec{M}^O$

$\vec{M}^C = \vec{M}^O + \vec{M}'$

$\Downarrow$ $M' = M^O$

$\vec{M}^C = \vec{0}$



结论

力系	=	
$\vec{M}^O \neq \vec{0}$ $\vec{F}_O \neq \vec{0}$ $\vec{M}^O \cdot \vec{F}_O = 0$	可找到简化中心*C*	$\vec{F}_C = \vec{F}_O = \vec{F}_R$ 合力

$\vec{M}^O \cdot \vec{F}_O = 0$

力系的条件

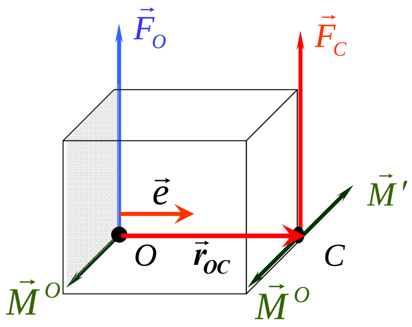
$\vec{M}_O \cdot \vec{F}_R = 0$

- 合力简化中心C的解析式

$$\vec{M}^C = \vec{M}^O + \vec{M}'$$

$M' = M_O$

$$\vec{M}^C = \vec{0}$$



点C的位置

$M' = |OC| F_O \quad |OC| = M_O / F_O$

$$\vec{r}_{OC} = |OC|\vec{e} = |OC| \frac{\vec{F}_O \times \vec{M}^O}{\left|\vec{F}_O \times \vec{M}^O\right|} = \frac{M_O}{F_O} \frac{\vec{F}_O \times \vec{M}^O}{F_O M^O \sin 90^\circ}$$

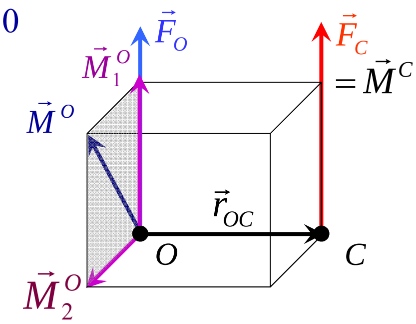
$$= \boxed{\frac{\vec{F}_O \times \vec{M}^O}{F_O^2}} = \frac{\vec{F}_R \times \vec{M}_O}{F_R^2}$$

- $\vec{F}_O \neq \vec{0} \quad \vec{M}^O \neq \vec{0} \quad \vec{M}^O \cdot \vec{F}_O \neq 0$

该力系向某点C还可进一步简化

力偶矩矢量分解 $\vec{M}^O = \vec{M}_1^O + \vec{M}_2^O$

以 $\vec{M}^O \vec{F}_O$为平面，OC垂直该平面，构成立方体，OC距离待定



力系	$\vec{M}^O \neq \vec{0}$ $\vec{F}_O \neq \vec{0}$ $\vec{M}^O \cdot \vec{F}_O \neq 0$	= 可找到简化中心C	$\vec{F}_C, \vec{M}^C$ 同向 力螺旋

•力螺旋的工程实例

• 力螺旋中力、力偶矩矢量的解析式

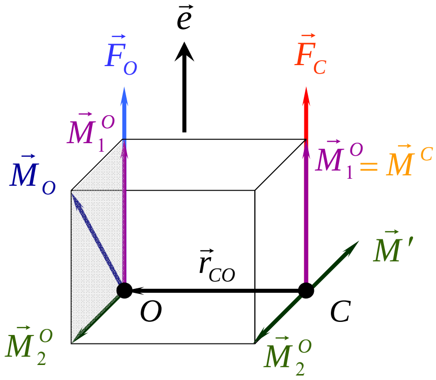
$$\vec{F}_C = \vec{F}_O = \vec{F}_R$$

$$\vec{M}^C = \vec{M}_1^O + \vec{M}_2^O + \vec{M}'$$

$$\vec{M}^C = \vec{M}_1^O = M_e^O \vec{e}$$

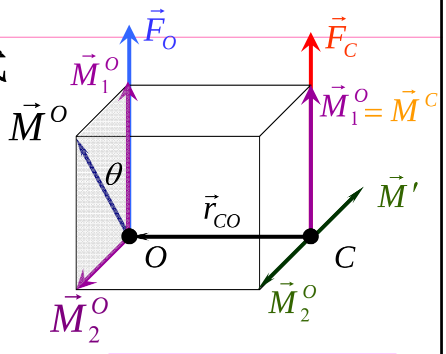
$$= \left(\vec{M}^O \cdot \frac{\vec{F}_O}{F_O} \right) \frac{\vec{F}_O}{F_O}$$

$$= \left(\vec{M}^O \cdot \vec{F}_O \right) \frac{\vec{F}_O}{F_O^2}$$



$$M_e^O = \vec{M}_O \cdot \vec{e} = \vec{M}_O \cdot \frac{\vec{F}_O}{F_O}$$

- 力螺旋简化中心C的解析式



$$\vec{r}_{OC} = \frac{\vec{F}_O \times \boxed{\vec{M}_2^O}}{F_O^2}$$

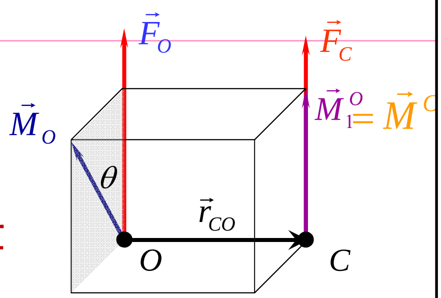
$$= \frac{\vec{F}_O \times \left(\vec{M}^O - \cancel{\vec{M}_1^O}\right)}{F_O^2}$$

$$\boxed{= \frac{\vec{F}_O \times \vec{M}^O}{F_O^2}} = \frac{\vec{F}_R \times \vec{M}_O}{F_R^2}$$

$$\boxed{\vec{M}_2^O = \vec{M}^O - \vec{M}_1^O}$$

$$\vec{F}_O \times \vec{M}_1^O = 0$$

- 一般力系简化的最简结果



$$\vec{F}_O = \vec{F}_R = \vec{F}_C$$ 不变量

$$\vec{M}^O = \vec{M}_O$$

$$\vec{M}^C = (\vec{M}_O \cdot \vec{F}_O)\ \vec{F}_O / F_O^2$$ 不变量

$$\vec{r}_{OC} = \vec{F}_O \times \vec{M}_O / F_O^2$$

- 力系简化的最简的结果
  - 力系平衡 (简化力与力偶矩均为零矢量)
    - 与简化中心无关　　条件：$\vec{F}_{\mathrm{R}}=\vec{0},\quad \vec{M}_O=\vec{0}$
  - 一个合力偶 (简化力为零矢量)
    - 与简化中心无关　　条件：$\vec{F}_{\mathrm{R}}=\vec{0},\quad \vec{M}_O\neq\vec{0}$
  - 一个合力 (简化力偶矩为零矢量)
    - 与简化中心有关

      条件1 : $\vec{F}_{\mathrm{R}}\neq\vec{0},\quad \vec{M}_O=\vec{0}$　　简化中心为***O***

      条件2: $\vec{F}_{\mathrm{R}}\neq\vec{0},\quad \vec{M}_O\neq\vec{0}\quad \vec{M}_O\cdot\vec{F}_{\mathrm{R}}=0$　　此简化中心需另找
  - 力螺旋 (简化力与力偶平行)
    - 与简化中心有关　　条件：$\vec{F}_{\mathrm{R}}\neq\vec{0},\quad \vec{M}_O\neq\vec{0}\quad \vec{M}_O\cdot\vec{F}_{\mathrm{R}}\neq 0$

      此简化中心需另找

[例]

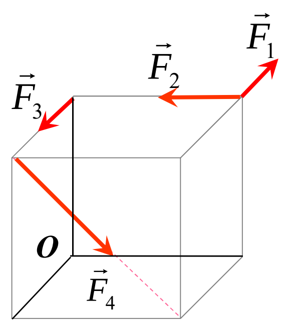
一边长为***b***的正立方体所受的力系如图所示，其中

$$F_1=F_2=F_3=F$$

$$F_4=\sqrt{2}F$$

将力系向点***O***简化

将力系简化到最简

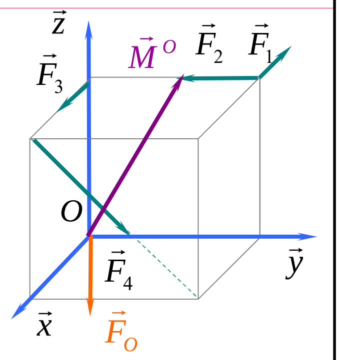


[解] 已知向点O简化的结果

$$\boldsymbol{F}_O=\begin{pmatrix}0\\0\\-F\end{pmatrix}\qquad \boldsymbol{M}^O=\begin{pmatrix}0\\Fb\\2Fb\end{pmatrix}$$

$$\vec{M}^O\cdot\vec{F}_O\neq 0$$

可化简为力螺旋



[解1]几何法 $\boldsymbol{F}_O=(0\quad 0\quad -F)^{\mathrm{T}}$ $\boldsymbol{M}^O=(0\quad Fb\quad 2Fb)^{\mathrm{T}}$

$\vec{M}^O\cdot\vec{F}_O\neq 0$ $\vec{M}^O=\vec{M}_1^O+\vec{M}_2^O$

$\vec{M}_1^O$ 平行于 $\vec{F}_O$ $M_1^O=2Fb$ $M_2^O=Fb$

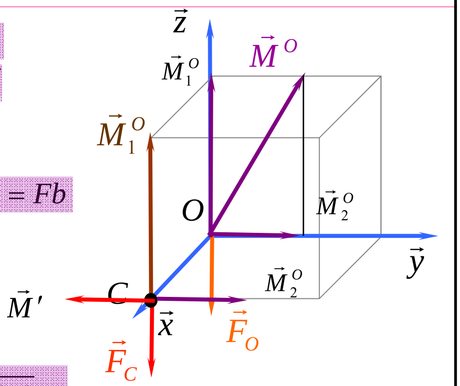
假定中心**C**的位置

垂直于 $\vec{M}^O,\vec{F}_O$ 平面

$\vec{F}_O \xrightarrow{\text{简化中心}C}$ $\vec{F}_C=\vec{F}_O$

$\vec{M}'$ $M'=\overline{OC}F_O=\overline{OCF}$

$\vec{M}^O \xrightarrow{\text{简化中心}C}$ $\vec{M}_1^O+\vec{M}_2^O$



确定中心**C**位置 $M'=M_2^O$

$$\overline{OC}=\frac{M_2^O}{F}=b$$

简化结果

$$F_C=F_O=F$$

$$M_C=M_1^O=2Fb$$

方向如图

[解2] 解析法

$\boldsymbol{F}_O = (0\quad 0\quad -F)^{\mathrm{T}}\quad \boldsymbol{M}^O = (0\quad Fb\quad 2Fb)^{\mathrm{T}}$

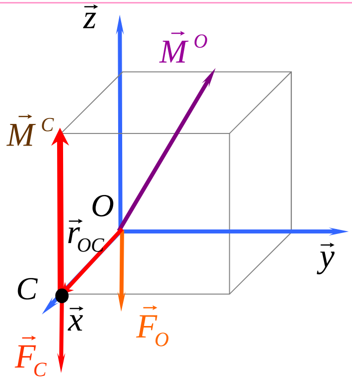
确定简化中心$\boldsymbol{C}$

$\vec{r}_{OC} = \vec{F}_O \times \vec{M}^O / F_O^2 \qquad F_O = F$

$\boldsymbol{r}_{OC} = \tilde{\boldsymbol{F}}_O \boldsymbol{M}^O / F_O^2 = (b\quad 0\quad 0)^{\mathrm{T}}$

简化结果

$\boldsymbol{F}_C = \boldsymbol{F}_O = (0\quad 0\quad -F)^{\mathrm{T}}$

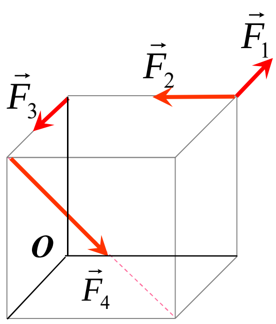


$\vec{M}^C = \vec{F}_O(\vec{M}^O \cdot \vec{F}_O)/F_O^2$

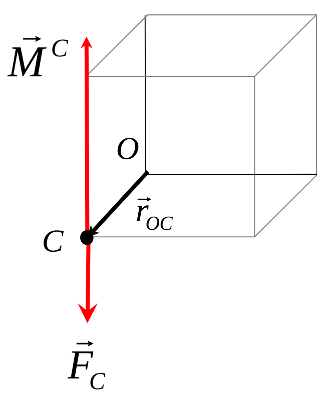
$$\boldsymbol{r}_{OC} = \tilde{\boldsymbol{F}}_O \boldsymbol{M}^O / F_O^2 = \frac{1}{F^2}\begin{pmatrix}0 & F & 0\\ -F & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0\\ Fb\\ 2Fb\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}b\\ 0\\ 0\end{pmatrix}$$

$\underline{\boldsymbol{M}}^C = \boldsymbol{F}_O(\boldsymbol{M}^{OT}\boldsymbol{F}_O)/F_O^2 = 2Fb(0\quad 0\quad 1)^{\mathrm{T}}$

$$M^C = \boldsymbol{F}_O(\boldsymbol{M}^{O\mathrm{T}}\boldsymbol{F}_O / F_O^2) = \begin{pmatrix}0\\ 0\\ -F\end{pmatrix}\left[\frac{1}{F^2}(0\quad Fb\quad 2Fb)\begin{pmatrix}0\\ 0\\ -F\end{pmatrix}\right] = 2Fb\begin{pmatrix}0\\ 0\\ 1\end{pmatrix}$$



=



[例]：向另一点简化

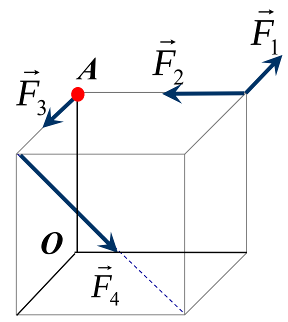
一边长为 b 的正立方体所受的力系如图所示，其中

$$F_1 = F_2 = F_3 = F$$

$$F_4 = \sqrt{2}F$$

将力系向点A简化

将力系简化到最简



[解] 解析法

$$F_A = (0 \quad 0 \quad -F)^{\mathrm{T}}$$

$$M^A = (0 \quad Fb \quad 2Fb)^{\mathrm{T}}$$

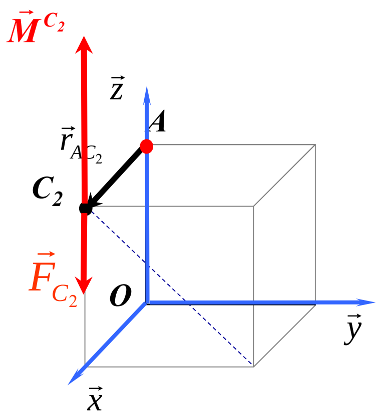
确定简化中心C_2

$$\vec{r}_{AC_2} = \vec{F}_A \times \vec{M}^A / F_A^2$$

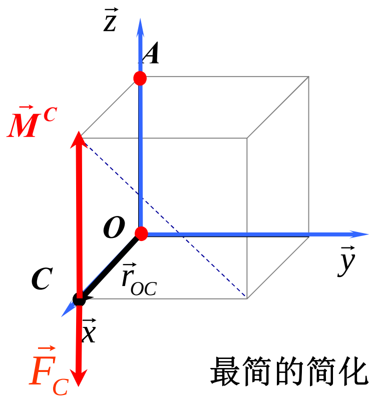
$$\boldsymbol{r}_{AC_2} = \tilde{\boldsymbol{F}}_A \boldsymbol{M}^A / F_A^2 = (b \quad 0 \quad 0)^{\mathrm{T}}$$

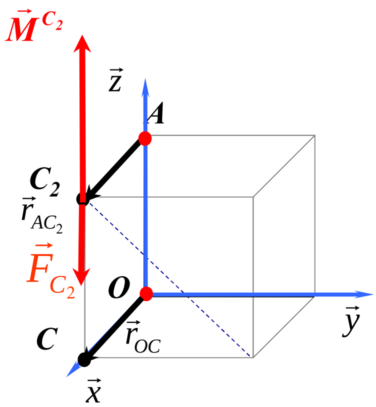
简化结果

$$\boldsymbol{F}_{C_2} = \boldsymbol{F}_A = (0 \quad 0 \quad -F)^{\mathrm{T}} \qquad \boldsymbol{M}^{C_2} = 2Fb(0 \quad 0 \quad 1)^{\mathrm{T}}$$



两种简化情况比较

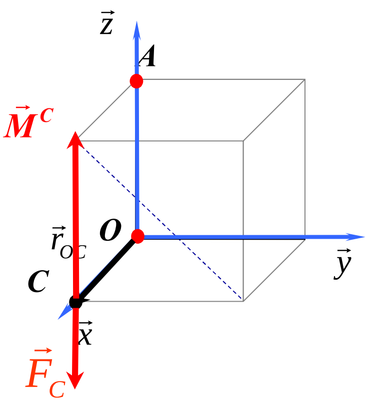


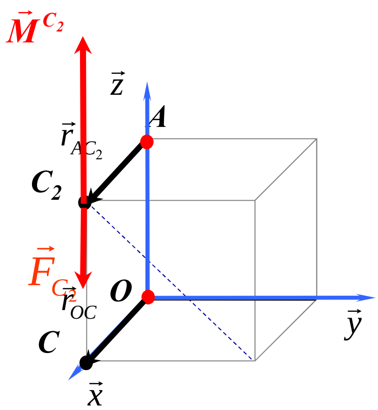


最简的简化中心不唯一

$$\begin{array}{ccc} \boldsymbol{F}_C = \boldsymbol{F}_O = (0 \quad 0 \quad -F)^{\mathrm{T}} & & \boldsymbol{M}^C = 2Fb(0 \quad 0 \quad 1)^{\mathrm{T}} \\ \| & & \| \\ \boldsymbol{F}_{C_2} = \boldsymbol{F}_A = (0 \quad 0 \quad -F)^{\mathrm{T}} & & \boldsymbol{M}^{C_2} = 2Fb(0 \quad 0 \quad 1)^{\mathrm{T}} \end{array}$$

两种简化情况



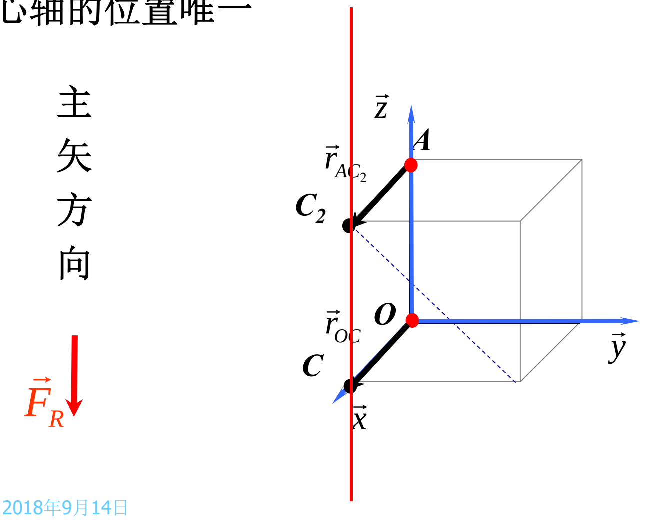


等 效

力系另一不变量：

中心轴的位置唯一

中心轴：力螺旋中力的作用线



力系的简化

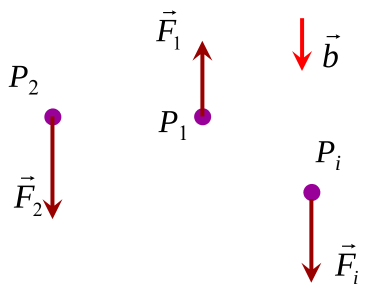
- 空间一般力系的简化
- 力系简化的最简的结果
- 平行力系的简化
- 平面力系的简化

平行力系的简化

- 平行力系中心
- 重心

平行力系简化的可能结果

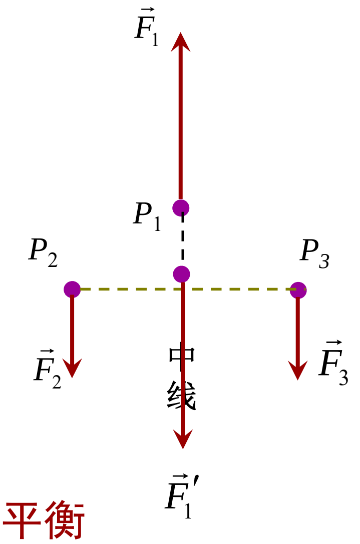
- 平衡
- 力偶
- 力
- 力螺旋



平行力系简化的可能结果

- 平衡
- 力偶
- 力
- 力螺旋

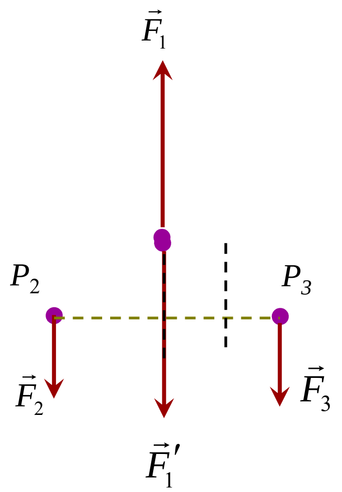
$F_1 = 2F_2 = 2F_3$



主矢为0，平衡

平行力系简化的可能结果

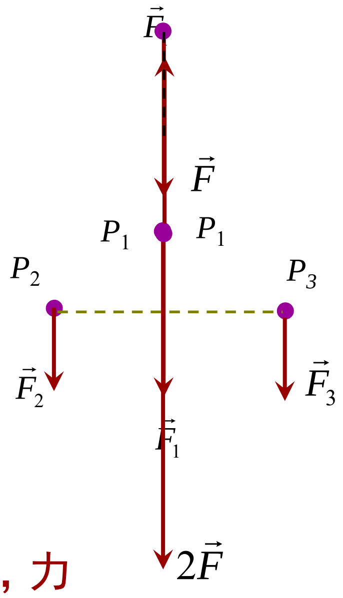
- 平衡
- 力偶
- 力
- 力螺旋



主矢为0，力偶

平行力系简化的可能结果

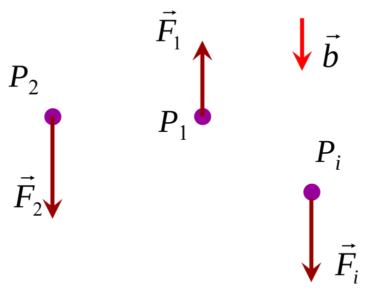
- 平衡
- 力偶
- 力
- 力螺旋



主矢不为0，力

平行力系简化的可能结果

- 平衡
- 力
- 力偶
- 力螺旋 ？ ×



平行力系中心

- 平行力系的主矢与主矩
- 平行力系的最简的简化结果
- 中心位置的确定

平行力系的主矢与主矩

平行力系 $(\vec{F}_1, \vec{F}_2, \cdots, \vec{F}_n)$ 的特征

$$\vec{F}_i = F_i \vec{b} \qquad (i = 1, 2, \cdots, n)$$

$\vec{b}$ 为给定的单位矢量

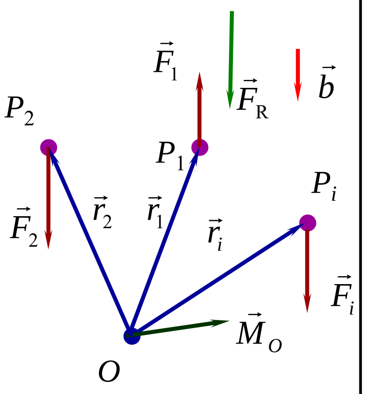
主矢 平行于 $\vec{b}$

$$\vec{F}_R = F_R \vec{b} \qquad F_R = \left(\sum_{i=1}^{n} F_i \right)$$

对点O的主矩

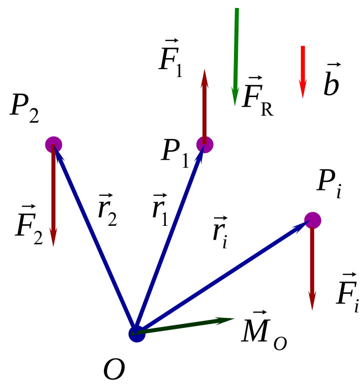
$$\vec{M}_O = \sum_{i=1}^{n} \vec{r}_i \times \vec{F}_i = \left(\sum_{i=1}^{n} F_i \vec{r}_i \right) \times \vec{b}$$

$$= \left(\sum_{i=1}^{n} \vec{r}_i \times F_i \vec{b} \right)$$



$$\vec{F}_R = \left(\sum_{i=1}^{n} F_i \right) \vec{b}$$

平行力系的主矢与主矩



平行力系 $(\vec F_1,\vec F_2,\cdots,\vec F_n)$的特征

主矢 $\vec F_{\mathrm{R}} = F_{\mathrm{R}}\vec b$ $\quad F_{\mathrm{R}} = \left(\sum_{i=1}^{n} F_i\right)$

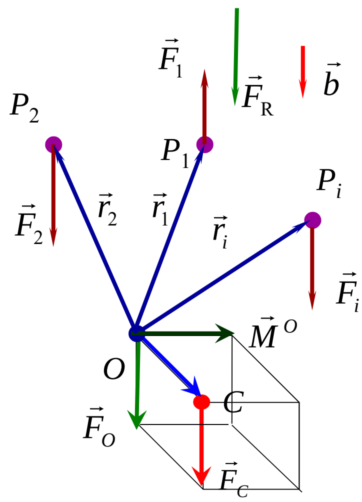
对点O的主矩

$$\vec M_O = \left(\sum_{i=1}^{n} F_i \vec r_i\right)\times \vec b$$

$F_R = 0$：力系平衡或为力偶

$F_R \neq 0$： $\vec F_{\mathrm{R}} \perp \vec M_O \quad \vec M_O \cdot \vec F_{\mathrm{R}} = 0$ 力系简化为一个力

平行力系最简的简化结果



对点O的简化结果

$$(\vec F_1,\vec F_2,\cdots,\vec F_n) = (\vec F_O,\vec M^O)$$

$$\vec F_O = F_{\mathrm{R}}\vec b = \left(\sum_{i=1}^{n} F_i\right)\vec b$$

$$\vec M^O = \vec M_O = \left(\sum_{i=1}^{n} F_i \vec r_i\right)\times \vec b$$

平行力系还可简化为一个合力

合力 $$\vec F_C = F_{\mathrm{R}}\vec b = \left(\sum_{i=1}^{n} F_i\right)\vec b$$

该合力的简化中心C称为平行力系中心

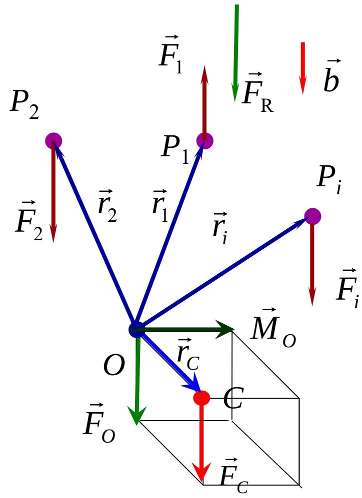
中心位置的确定

- 方法1 $\vec{r}_C = \dfrac{\vec{F}_R \times \vec{M}_O}{F_R^2}$

$\vec{r}_C$ 与 $\vec{F}_R \times \vec{M}_O$方向一致

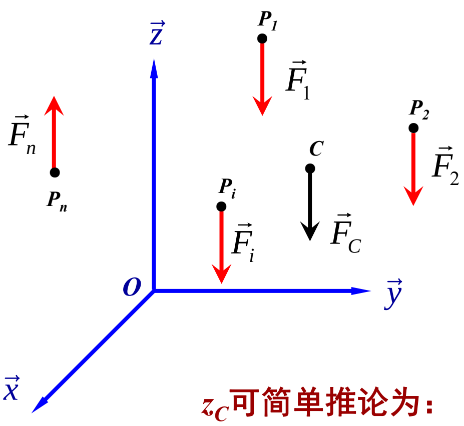
$\vec{M}_O \cdot \vec{F}_R = 0$ $\vec{F}_R \perp \vec{M}_O$

$$r_C = \frac{F_R M_O}{F_R^2} = \frac{M_O}{F_R}$$



- 方法 2

$P_i:(x_i, y_i, z_i)$ $C:(x_C, y_C, z_C)$



z_C可简单推论为：

$\vec{F}_i = F_i \vec{k}$

合力：

$$\vec{F}_C = \sum_{i=1}^{n} \vec{F}_i = \left(\sum_{i=1}^{n} F_i\right)\vec{k} = F_R \vec{k}$$

合力对轴的矩等于所有分力对轴的矩之和，可得：

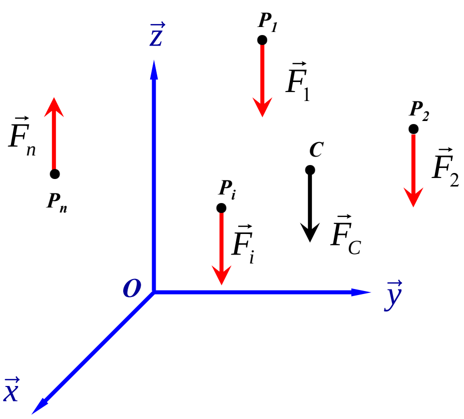
$$F_R x_C = \sum_{i=1}^{n} F_i x_i$$

$$F_R y_C = \sum_{i=1}^{n} F_i y_i$$

$$F_R z_C = \sum_{i=1}^{n} F_i z_i$$

F_R=0 时如何处理？

$P_i:(x_i, y_i, z_i)$　　$C:(x_C, y_C, z_C)$



$$\vec{F}_i = F_i \vec{k}$$

主矢：

$$\vec{F}_R = \sum_{i=1}^{n} \vec{F}_i = \left(\sum_{i=1}^{n} F_i \right) \vec{k}$$

$$= F_R \vec{k}$$

$F_R = 0$：力系平衡或为力偶

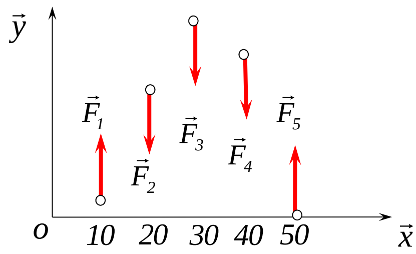
无力系中心 C

如何判断是平衡还是力偶？

若是力偶，如何计算力偶矩？

[习题2-13]

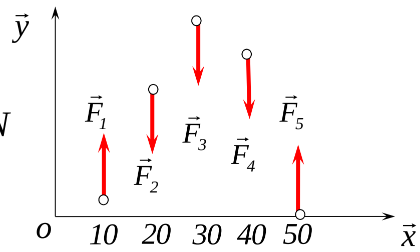
如图所示，一平面平行力系诸力与y轴平行。已知F_1＝14N，F_2＝6N，F_3＝8N，F_4＝8N，F_5＝10N，长度单位按cm计，求该力系最简的简化结果与简化中心的x坐标。



[解]

该平行力系主矢大小

$$F_{\mathrm{R}} = \sum_{i=1}^{n} F_i = 14 - 6 - 8 - 8 + 10 = 2N$$



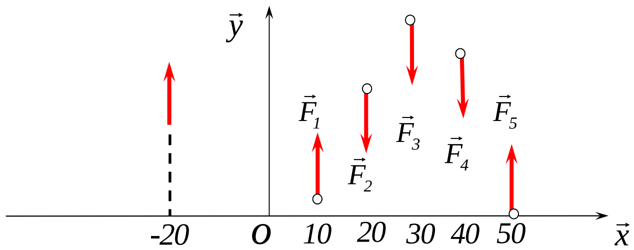
简化中心在x向的位置

$$F_{\mathrm{R}} x_C = \sum_{i=1}^{n} F_i x_i \quad x_C = \sum_{i=1}^{n} F_i x_i \Big/ F_{\mathrm{R}}$$

$$x_C = \frac{14\times 10 - 6\times 20 - 8\times 30 - 8\times 40 + 10\times 50}{2} = -20\,\mathrm{cm}$$

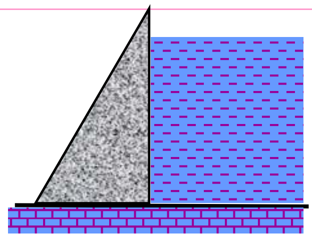
[解]

$$F_{\mathrm{R}} = 2\,\mathrm{N} \qquad x_C = -20\,\mathrm{cm}$$



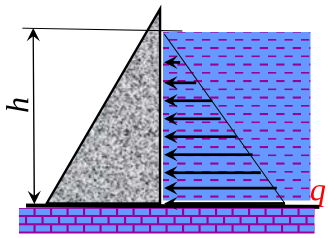
[例]

图示为一水坝的物理模型，水坝上受到很多力，现在考虑水对坝的侧面压力，其力学模型为一**分布载荷**，是一种典型的平行力系。



已经把复杂的工程问题看成一个平面问题。

在**受力面**上，单位长度上受力的大小称为**载荷集度**(单位为牛顿/米)



其上端的集度为零，下端集度为 q。载荷的方向向左。

求水坝侧面压力的合力及作用点

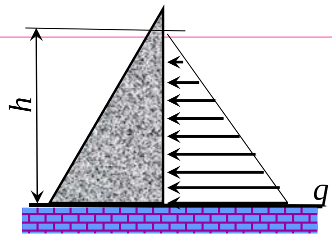
[解]

定研究对象：坝体

定问题性质：平面

建立参考基：

受力分析：平行力系，求合力与中心

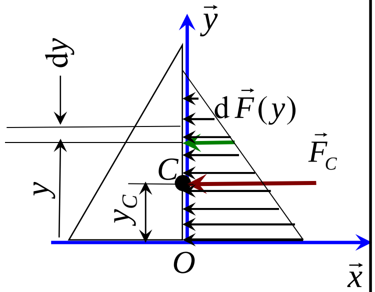


坐标y处取微元dy

$$\mathrm{d}F(y) \approx \frac{q(h-y)}{h}\mathrm{d}y$$

载荷合力

$$F_C = \int_0^h \mathrm{d}F(y) = \int_0^h \frac{q(h-y)}{h}\mathrm{d}y = \frac{qh}{2}$$



$$\boldsymbol{F}_C = \boldsymbol{F}_{\mathrm{R}} = \sum_{i=1}^{n} \boldsymbol{F}_i$$

受力分析：平行力系，求合力与中心

坐标y处取微元$\mathbf{d}y$

$$\mathrm{d}F(y) \approx \frac{q(h-y)}{h}\mathrm{d}y$$

载荷合力

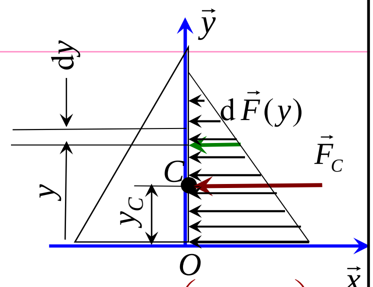
$$F_C = \frac{qh}{2}$$

载荷中心

$$y_C = \frac{1}{F_R}\int_0^h y\,\mathrm{d}F(y) = \frac{1}{F_C}\int_0^h y\frac{q(h-y)}{h}\mathrm{d}y$$

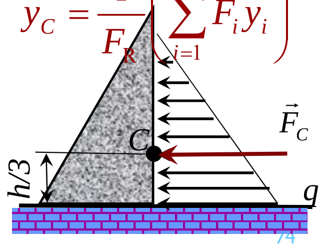
$$= \frac{qh^2}{6}\bigg/\frac{qh}{2} = \frac{1}{3}h$$

平行分布载荷简化结果



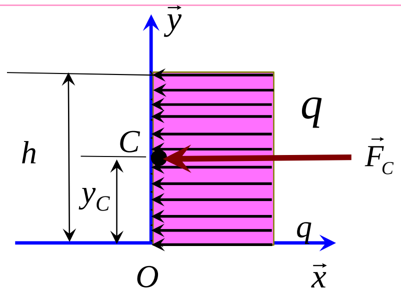
$$\boldsymbol{r}_C = \frac{1}{F_R}\left(\sum_{i=1}^{n} F_i \boldsymbol{r}_i\right)$$

$$y_C = \frac{1}{F_R}\left(\sum_{i=1}^{n} F_i y_i\right)$$



[例]

均布载荷：



载荷合力

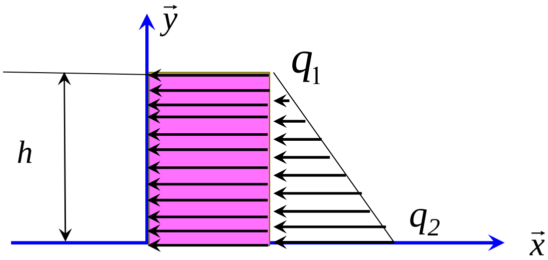
$$F_C = qh$$

载荷中心

$$y_C = \frac{1}{F_R}\int_0^h y\,\mathrm{d}F(y) = \frac{1}{F_C}\int_0^h yq\,\mathrm{d}y \;= \frac{1}{2}h$$

[例]

梯形载荷：



如何简化？

小结

平行力系的特点

$\vec{F}_R = F_R\vec{b} \quad F_R = \sum_{i=1}^{n} F_i \quad \vec{M}_O = \left(\sum_{i=1}^{n} F_i\vec{r}_i\right)\times\vec{b}$

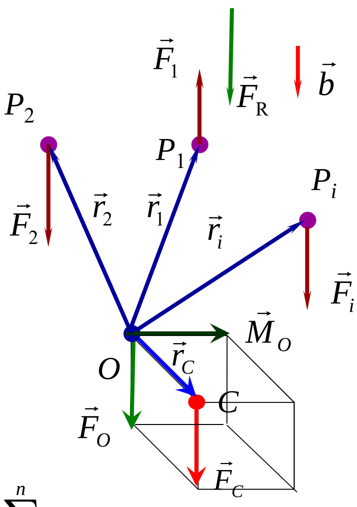
$F_R = 0$：平衡或为力偶

$F_R \neq 0$：$\vec{F}_R \perp \vec{M}_O \quad \vec{M}_O\cdot\vec{F}_R = 0$

力系简化为一个力

平行力系中心位置

$F_R x_C = \sum_{i=1}^{n} F_i x_i, \quad F_R y_C = \sum_{i=1}^{n} F_i y_i, \quad F_R z_C = \sum_{i=1}^{n} F_i z_i$



重心

- **重心的定义**
- **重心的确定**
- **均质几何体的重心**

重心的定义

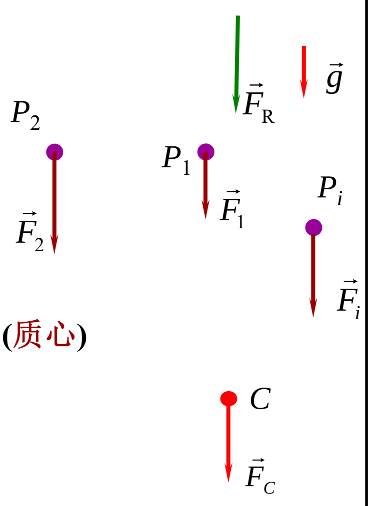
质点系 $(P_1, P_2, \cdots, P_n)$ 在重力场下

构成平行力系 $(\vec{F}_1, \vec{F}_2, \cdots, \vec{F}_n)$

$$\vec{F}_i = m_i \vec{g} \qquad (i = 1, 2, \cdots, n)$$

$\vec{g}$ 为重力加速度矢量

m_i 为质点的质量



该平行力系的中心 C 称为该质点系的**重心(质心)**

定义 m 为质点系的总质量

力系的合力称为质点系的**重力**

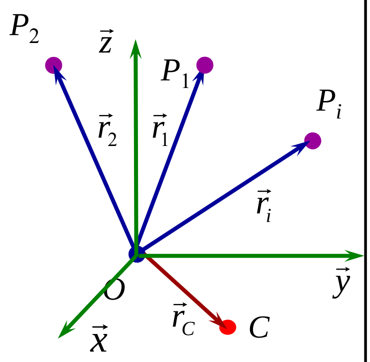
$$\vec{F}_C = \vec{F}_R = \left(\sum_{i=1}^{n} m_i\right)\vec{g} = m\vec{g}$$

重心位置的确定

$$x_C = \frac{1}{m}\sum_{i=1}^{n} m_i x_i$$

$$y_C = \frac{1}{m}\sum_{i=1}^{n} m_i y_i$$

$$z_C = \frac{1}{m}\sum_{i=1}^{n} m_i z_i$$



$$\boldsymbol{r}_C = \begin{pmatrix} x_C & y_C & z_C \end{pmatrix}^{\mathrm{T}}$$

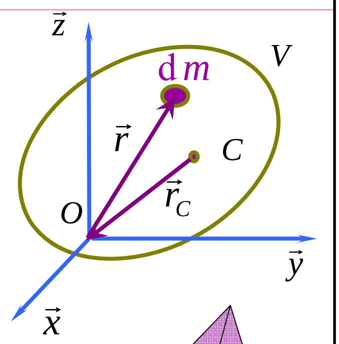
$$\boldsymbol{r}_i = \begin{pmatrix} x_i & y_i & z_i \end{pmatrix}^{\mathrm{T}}$$

连续几何体的重心

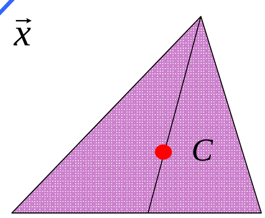
$$mx_C = \int_V x \,\mathrm{d}m$$

$$my_C = \int_V y \,\mathrm{d}m$$

$$mz_C = \int_V z \,\mathrm{d}m$$



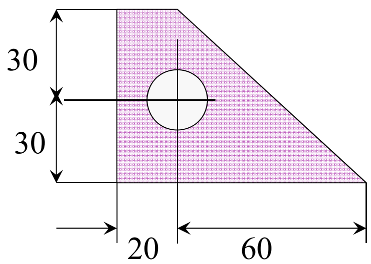
- 对于均质几何体的重心与其形心重合
  - 圆心，椭圆(球)中心，平行四边形中心
- 求解：参考高等数学/积分的应用
- 常见简单均质几何体的重心可查表



重心位于底边中线的1/3处

[例]

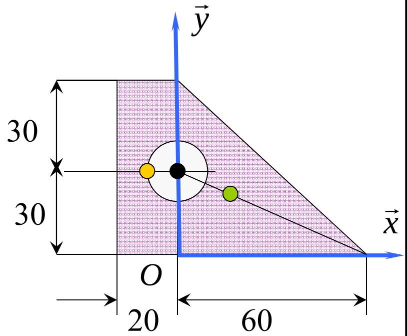
图示均质薄板，中间圆孔的直径为**20mm**，其余尺寸如图所示(单位：**mm**)。



求薄板重心的位置

[解] 建立参考基

将对象理解为



长方形 $\mathbf{B_2}$　$S_2 = 1200$　$x_2 = -10$　$y_2 = 30$

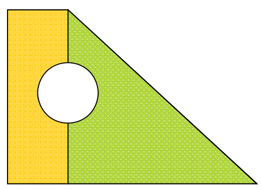
+

三角形$\mathbf{B_3}$　$S_3 = 1800$　$x_3 = 20$　$y_3 = 20$

−

圆形$\mathbf{B_1}$　$S_1 = -314$　$x_1 = 0$　$y_1 = 30$

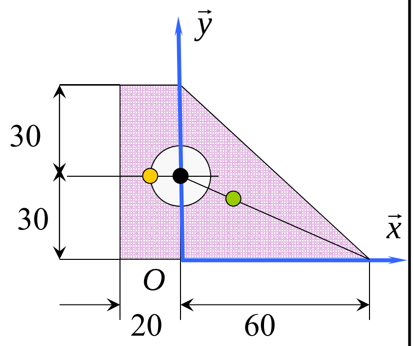
面积**(mm²)**　各物体的重心位置 **(mm)**



$S_1 = -314 \quad S_2 = 1200 \quad S_3 = 1800$

$x_1 = 0 \quad x_2 = -10 \quad x_3 = 20$

$y_1 = 30 \quad y_2 = 30 \quad y_3 = 20$



薄板的密度为ρ

$$m = \rho \sum_{i=1}^{3} S_i \qquad m_i = \rho S_i$$

$$x_C = \frac{1}{m}\sum_{i=1}^{n} m_i x_i, \quad y_C = \frac{1}{m}\sum_{i=1}^{n} m_i y_i$$

$$x_C = \sum_{i=1}^{3} S_i x_i \Big/ \sum_{i=1}^{3} S_i, \quad y_C = \sum_{i=1}^{3} S_i y_i \Big/ \sum_{i=1}^{3} S_i$$

$$x_C = 8.93\,\text{mm}, \quad y_C = 23.3\,\text{mm}$$

小结

- 重力场近似为一特殊的平行力系
- 均质几何体的重心与其形心重合
- 重心的计算公式

$$x_C = \frac{1}{m}\sum_{i=1}^{n} m_i x_i$$

$$y_C = \frac{1}{m}\sum_{i=1}^{n} m_i y_i$$

$$z_C = \frac{1}{m}\sum_{i=1}^{n} m_i z_i$$

力系的简化

- 空间一般力系的简化
- 力系简化的最简的结果
- 平行力系的简化
- 平面力系的简化

平面力系的简化

- 平面力的平移
- 平面力系的简化

平面力的平移

$\vec{F}$: $\quad \boldsymbol{F}=(F_x \quad F_y)^{\mathrm{T}}$ $\quad P$为作用点

力在作用面上平移到点Q

$$\vec{F}=(\vec{F}',\vec{M})$$

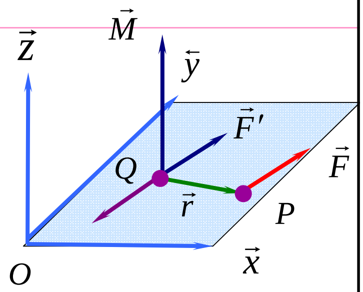
$$\vec{F}'=\vec{F}$$

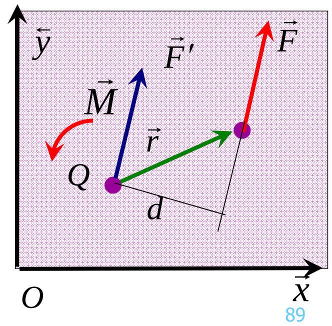
力偶 $\vec{M}=\vec{M}_Q(\vec{F})=\vec{r}\times\vec{F}$

平行于 $\vec{z}$ $\qquad \vec{M}=M\vec{z}$

$$M=M_{Qz}(\vec{F})=\pm Fd$$

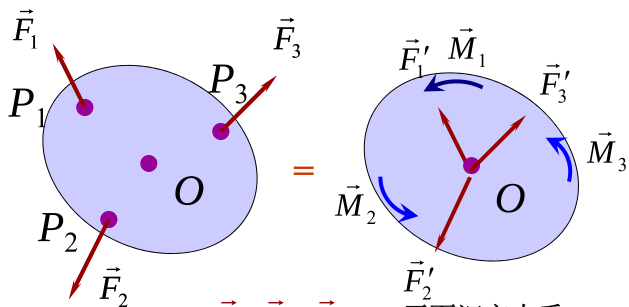
平面力的平移，必须相应增加一个垂直于作用面力偶才可能与原来的力等效





平面力系的简化

- 平面力系向点$\boldsymbol{O}$简化



平面汇交力系($\boldsymbol{O}$)

$(\vec{F}_1,\vec{F}_2,\vec{F}_3)$ $\quad \vec{F}_i=(\vec{F}_i',M_i)$ $\quad (\vec{F}_1',\vec{F}_2',\vec{F}_3')$

平面力系 $\quad \vec{F}_i'=\vec{F}_i \quad \vec{M}_i=M_i\vec{z}$

$+$

(M_1,M_2,M_3) 平行的力偶系

平面力系可简化为一以简化中心为汇交点的平面汇交力系与一平行于法矢量力偶系

$(\vec{F}_1,\vec{F}_2,\vec{F}_3)$

平面力系

$\Rightarrow$

$(\vec{F}_1',\vec{F}_2',\vec{F}_3')$

平面汇交力系(*O*)

$\Rightarrow$ $\vec{F}_O=\sum_{i=1}^{3}\vec{F}_i'=\sum_{i=1}^{3}\vec{F}_i$

平面汇交力系合力

+

(M_1,M_2,M_3)

平行的力偶系

$\Rightarrow$ $M=\sum_{i=1}^{n}M_i=\sum_{i=1}^{n}M_{Oz}(\vec{F}_i)$

平行力偶系合力偶

$$(\vec{F}_1,\vec{F}_2,\vec{F}_3)=(\vec{F}_O,M)$$

向简化中心*O*简化的平面力系与作用点在简化中心*O*的一个平面力和平行于法向的一个力偶等效

$$\vec{F}_O\perp\vec{M}\qquad \vec{F}_O\cdot\vec{M}=0$$

平面力系的最简的结果：平衡　法向的合力偶　平面合力

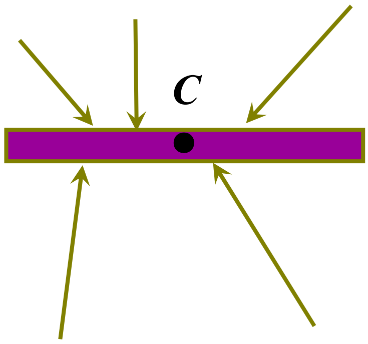
- 小结

- 平面力系力的平移附加力偶矩矢量垂直于该力系所在的平面
  - 主矢与主矩相互垂直
- 平面力系最简的简化结果
  - 合力（在该平面内）
  - 力偶（垂直于该平面）
  - 平衡

【例】力系简化结果与刚体运动（平面内）

向质心*C*简化

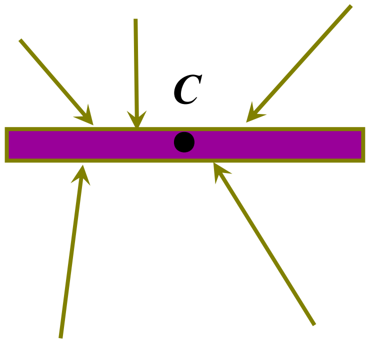
刚体初始静止



力系简化结果与刚体运动（平面内）

向质心*C*简化

刚体初始静止

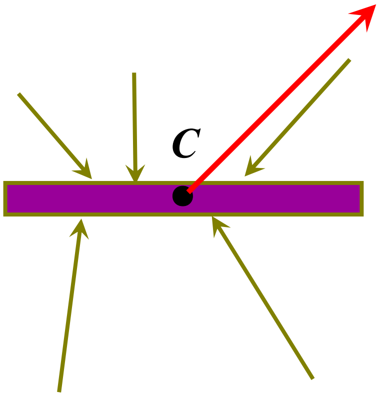


平衡

力系简化结果与刚体运动（平面内）

向质心*C*简化

刚体初始静止

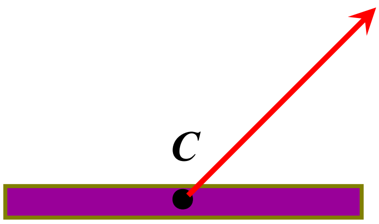


合力

力系简化结果与刚体运动（平面内）

向质心*C*简化

刚体初始静止



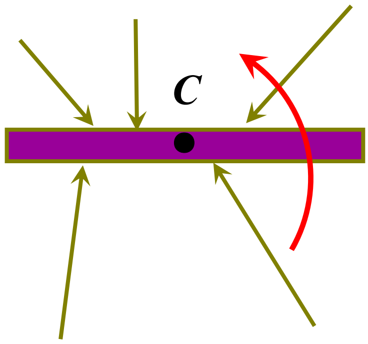
力系有主矢无主矩，质心要运动，无转动

合力

力系简化结果与刚体运动（平面内）

向质心*C*简化

刚体初始静止

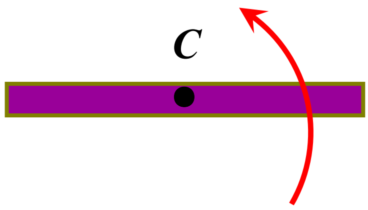


力偶

力系简化结果与刚体运动（平面内）

向质心*C*简化

刚体初始静止

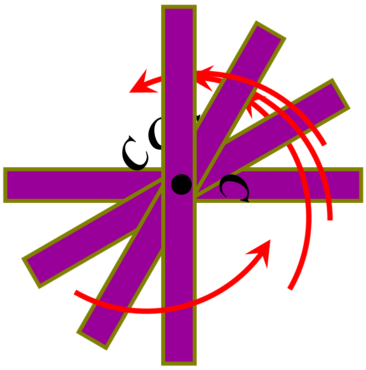


力偶

力系简化结果与刚体运动（平面内）

向质心*C*简化

刚体初始静止



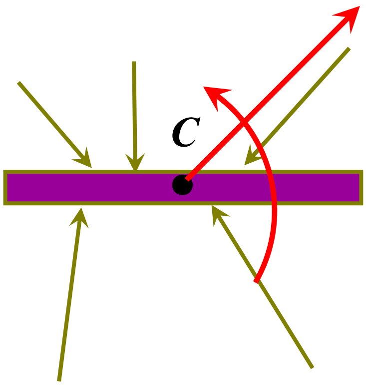
力系无主矢有主矩，质心不运动，有转动

力偶

力系简化结果与刚体运动（平面内）

向质心*C*简化

刚体初始静止

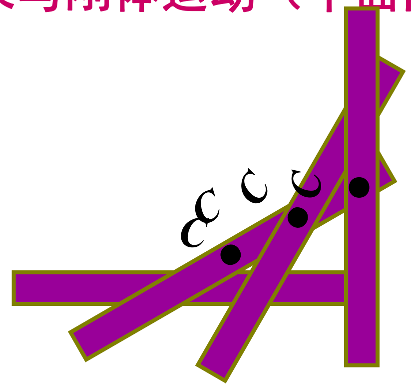


力+力偶

力系简化结果与刚体运动（平面内）

向质心*C*简化

刚体初始静止



力系有主矢有主矩，质心要运动，有转动

力+力偶