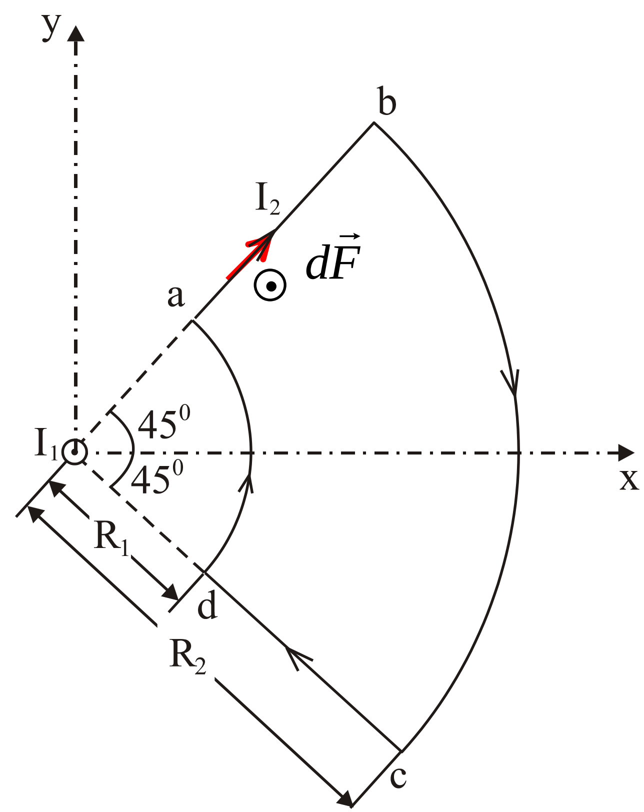
【例】垂直于通电为I_1的导线平面内，有一扇形线框，通电为I_2尺寸位置如图所示。求这扇形线框所受的磁力矩。



【解】方法一，扇形线框的两弧线与电流I_1产生的磁力线方向平行，所以不受力。而径向导线ab和cd垂直与磁力线所受的安培力大小相等，方向相反，对对称轴x轴产生磁力矩。在导线ab一电流元对x轴的磁力矩

$$dM_1 = ydF = y \cdot I_2 B dr$$

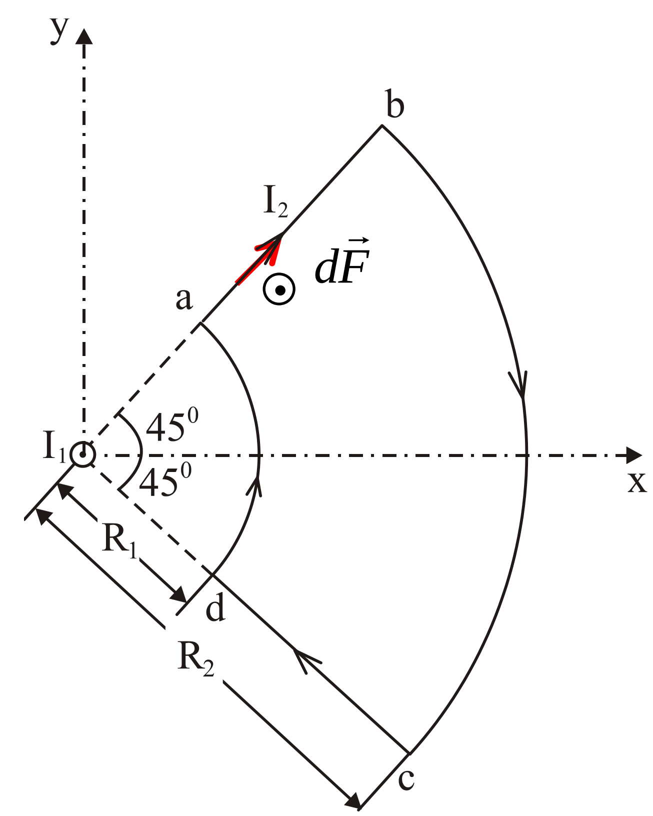
$$= r\sin 45^0 \cdot I_2 \cdot \frac{\mu_0 I_1}{2\pi r} \cdot dr$$

$$= \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{\mu_0 I_1 I_2}{2\pi} \cdot dr$$

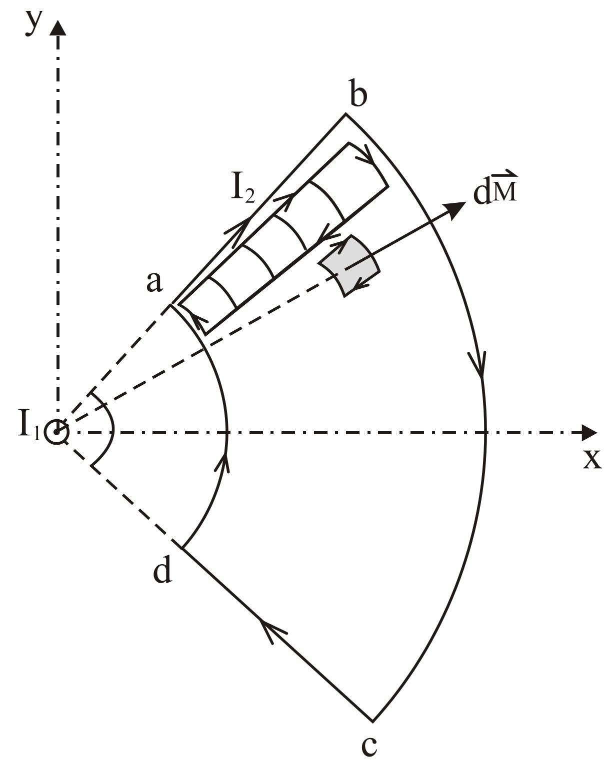
ab，cd两导线产生的磁力矩

$$M = 2M_1 = 2\int_{R_1}^{R_2} \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{\mu_0 I_1 I_2}{2\pi} dr$$

$$= \frac{\sqrt{2}\mu_0 I_1 I_2}{2\pi}(R_2 - R_1)$$



方法二，将线圈如图分解成许多小扇形线框，小线框之间相邻的电流恰好抵消，小线框与大扇形线框相邻处电流一致。所以各小线框所受磁力矩的矢量和就是大扇形线框所受的磁力矩。



任一小线框在磁感应强度为**B**的磁场中所受的磁力矩

$$d\vec{M} = d\vec{m}\times\vec{B} = I_2 d\vec{S}\times\vec{B}$$

方向如图所示。由对称性合力矩的方向沿着**x**轴，所以有

$$dM_x = BI_2 dS\cdot\cos\theta = \frac{\mu_0 I_1}{2\pi r}\cdot I_2\cos\theta\cdot rd\theta\cdot dr = \frac{\mu_0 I_1 I_2}{2\pi}\cdot\cos\theta\cdot d\theta dr$$

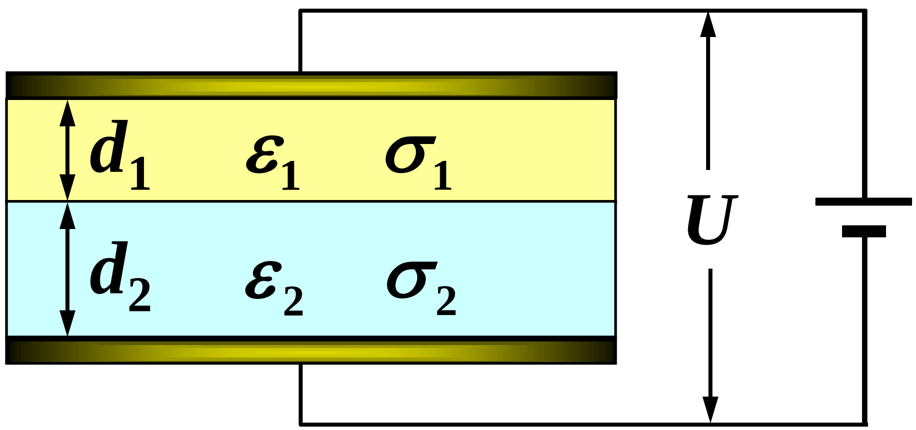
$$M_x = \frac{\mu_0 I_1 I_2}{2\pi}\int_{-\frac{\pi}{4}}^{+\frac{\pi}{4}}\cos\theta d\theta\int_{R_1}^{R_2} dr = \frac{\mu_0 I_1 I_2}{2\pi}\cdot(2\sin\frac{\pi}{4})(R_2 - R_1)$$

$$= \frac{\sqrt{2}\mu_0 I_1 I_2}{2\pi}(R_2 - R_1)$$

补充作业

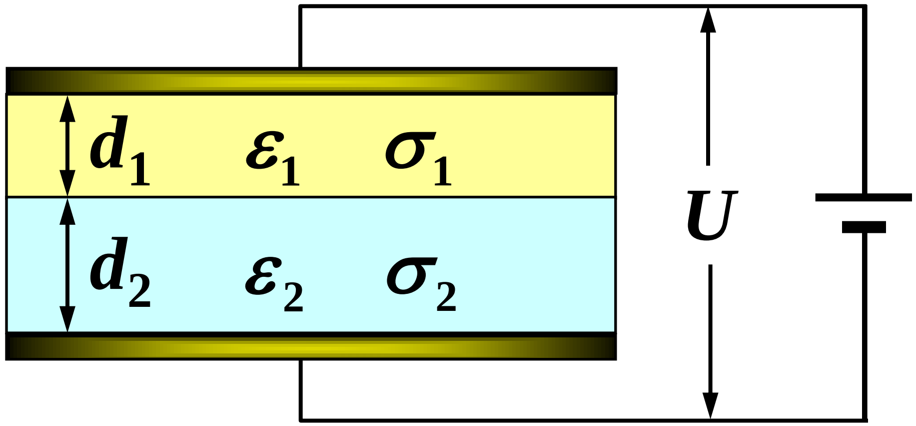
1、2、3必做，4做对加分！

1、在平行板电容器内填充两层导电介质，厚度、介电常数和电导率分别为（$d_1, \varepsilon_1, \sigma_1$）和（$d_2, \varepsilon_2, \sigma_2$），设电容器两端电压为 U。



求：（1）两介质中的电流密度和电场强度;

（2）介质分界面上的总电荷面密度 σ_e 和自由电荷面密度 σ_{e0}。



解：（1）根据对称性和界面关系可知两介质中的电流密度相等：

$$j_1 = j_2 = j$$

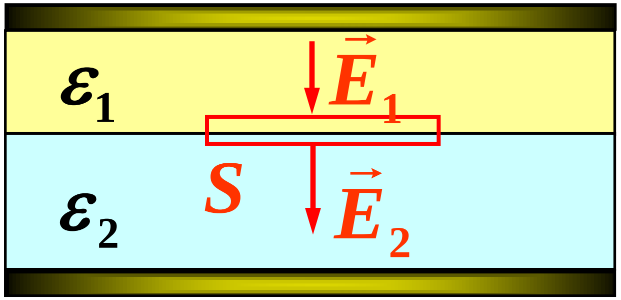
电场强度： $E_1 = \dfrac{j}{\sigma_1}$， $E_2 = \dfrac{j}{\sigma_2}$

电压关系： $U = E_1 d_1 + E_2 d_2$

解得： $j_1 = j_2 = j = \dfrac{\sigma_1\sigma_2}{\sigma_1 d_2 + \sigma_2 d_1} U$

$$E_1 = \frac{\sigma_2}{\sigma_1 d_2 + \sigma_2 d_1} U\,, \quad E_2 = \frac{\sigma_1}{\sigma_1 d_2 + \sigma_2 d_1} U$$

（2）在界面选扁柱面作为高斯面 S：



对此高斯面分别用 $\vec{E}$ 和 $\vec{D}$ 的高斯定理有：

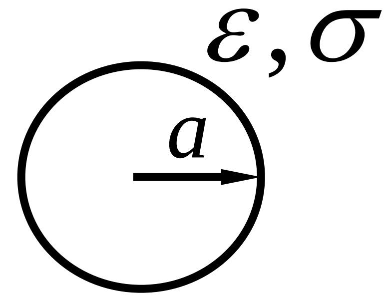
$$\sigma_e = \varepsilon_0(E_2 - E_1) = \frac{\varepsilon_0(\sigma_1 - \sigma_2)}{\sigma_1 d_2 + \sigma_2 d_1} U$$

$$\sigma_{e0} = D_2 - D_1$$

$$= \varepsilon_2 E_2 - \varepsilon_1 E_1$$

$$= \frac{\varepsilon_2 \sigma_1 - \varepsilon_1 \sigma_2}{\sigma_1 d_2 + \sigma_2 d_1} U$$

2、各向同性均匀无限大介质，已知介电常数及电导率为 ε,σ 内有半径为 a 的导体球，$t=0$，带电 Q，求漏电电流随时间变化及总焦耳热。



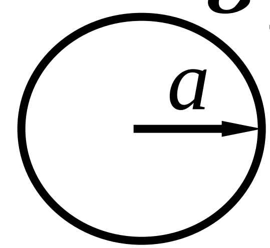
解：设 $q(t)$ $\quad U=\dfrac{q}{4\pi\varepsilon a}$

$$R=\int \mathrm{d}R=\int_a^\infty \frac{1}{\sigma}\frac{\mathrm{d}r}{4\pi r^2}=\frac{1}{4\pi\sigma a}$$

$$I_\mathrm{c}=\frac{U}{R}=\frac{\sigma q}{\varepsilon}=-\frac{\mathrm{d}q}{\mathrm{d}t}$$

$$\int_Q^q\frac{\mathrm{d}q}{q}=\int_0^t-\frac{\sigma}{\varepsilon}\mathrm{d}t \qquad q=Qe^{-\frac{\sigma}{\varepsilon}t} \qquad I_\mathrm{c}=-\frac{\mathrm{d}q}{\mathrm{d}t}=Q\frac{\sigma}{\varepsilon}e^{-\frac{\sigma}{\varepsilon}t}$$

2、各向同性均匀无限大介质，已知介电常数及电导率为 ε,σ 内有半径为 a 的导体球，$t=0$，带电 Q，求漏电电流随时间变化及总焦耳热。



$$I_{\mathrm{c}}=-\frac{\mathrm{d}q}{\mathrm{d}t}=Q\frac{\sigma}{\varepsilon}e^{-\frac{\sigma}{\varepsilon}t}$$

$$j=Q\frac{\sigma}{4\pi r^{2}\varepsilon}e^{-\frac{\sigma}{\varepsilon}t}$$

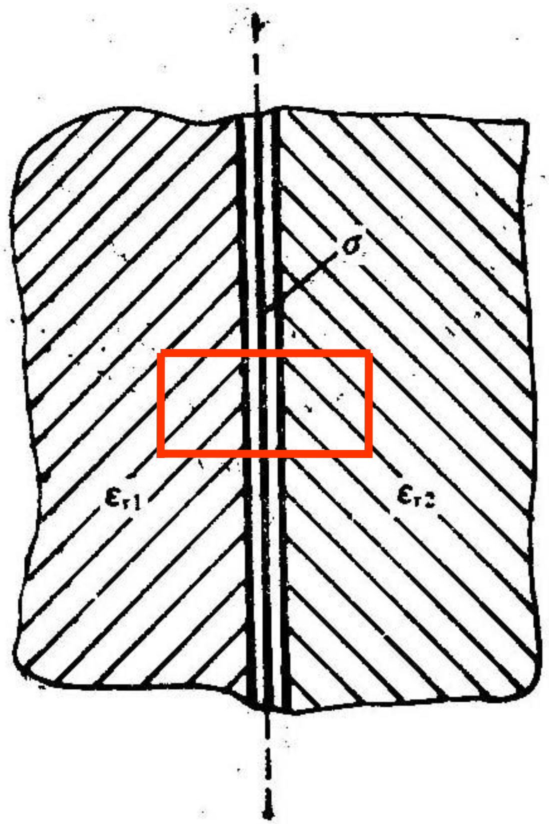
$$E=j/\sigma=\frac{Q}{4\pi r^{2}\varepsilon}e^{-\frac{\sigma}{\varepsilon}t}\qquad w=\sigma E^{2}$$

$$W=\int_{0}^{\infty}dt\int_{a}^{\infty}w\cdot 4\pi r^{2}dr=\frac{Q^{2}}{8\pi\varepsilon a}\qquad \frac{1}{2}UQ=\frac{1}{2}\frac{Q}{4\pi\varepsilon a}Q$$

3、一无限大带电平面，电荷面密度为 σ （>0），左、右两侧分别充满相对介电常数为 ε_{r1} 和 ε_{r2} 的均匀介质。

（1）试问两侧介质中*E*值相等还是*D*值相等，为什么？

（2）分别计算两侧介质中的电位移矢量大小以及介质表面的极化电荷面密度。



（1） *E*值相等，电荷产生电场。

（2） $D_1 = \varepsilon_0 \varepsilon_{r_1} E \qquad D_2 = \varepsilon_0 \varepsilon_{r_2} E$

$$\oiint_S \vec{D} \cdot d\vec{S} = \sum_i q_{0i}$$

$$\varepsilon_0 \varepsilon_{r_1} ES + \varepsilon_0 \varepsilon_{r_2} ES = \sigma S$$

$$\Rightarrow E = \frac{\sigma}{\varepsilon_0 (\varepsilon_{r_1} + \varepsilon_{r_2})}$$

$$D_1 = \varepsilon_0 \varepsilon_{r_1} E = \frac{\varepsilon_{r_1} \sigma}{\varepsilon_{r_1} + \varepsilon_{r_2}}$$

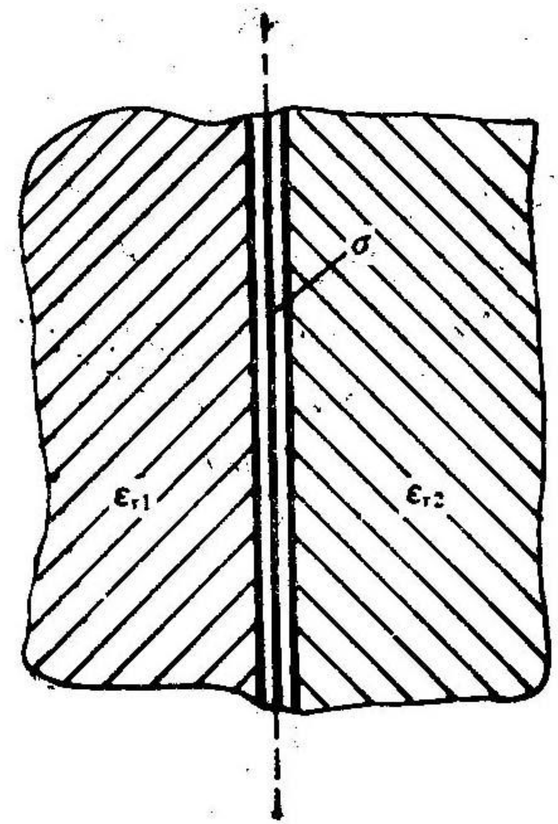
$$D_2 = \varepsilon_0 \varepsilon_{r_2} E = \frac{\varepsilon_{r_2} \sigma}{\varepsilon_{r_1} + \varepsilon_{r_2}}$$

$$P_1 = \varepsilon_0(\varepsilon_{r_1} - 1)E$$

$$\vec{\sigma}_1 = \vec{P}_1 \cdot \vec{e}_n = -\varepsilon_0(\varepsilon_{r_1} - 1)E = \frac{1 - \varepsilon_{r_1}}{\varepsilon_{r_1} + \varepsilon_{r_2}}\sigma$$

$$P_2 = \varepsilon_0(\varepsilon_{r_2} - 1)E$$

$$\vec{\sigma}_2 = \vec{P}_2 \cdot \vec{e}_n = -\varepsilon_0(\varepsilon_{r_2} - 1)E = \frac{1 - \varepsilon_{r_2}}{\varepsilon_{r_1} + \varepsilon_{r_2}}\sigma$$



4、一个很好的电介质模型：直径为d，相距为3d的黄铜球排成点阵，组成一种“电介质”材料，假设每个球仅受外电场的影响（忽略临近球感应电荷重新分布的影响），试求这种材料的介电常数。

由导体球在匀强电场中感应电荷分布知，单个导体球的电偶极矩为

$$p = 4\pi\varepsilon_0 E\left(\frac{d}{2}\right)^3$$

这里E为电介质中总电场

电介质极化强度矢量大小 $P = np$

n为分子数密度

导体球组成一个简立方体 $n=\frac{1}{(3d)^3}$

$$P=\frac{1}{(3d)^3}4\pi\varepsilon_0 E\left(\frac{d}{2}\right)^3=\frac{4\pi\varepsilon_0}{27\times 8}E$$

$\because P=\chi\varepsilon_0 E$ χ 电极化率

$$\chi=\frac{4\pi}{27\times 8}=\frac{\pi}{54} \quad \Rightarrow \varepsilon=(1+\chi)\varepsilon_0=\frac{54+\pi}{54}\varepsilon_0$$