理论力学 CAI 刚体动力学

- 前言
- 刚体的平面运动
- 非惯性基下刚体动力学
- 碰撞
- 刚体的定点运动

刚体的平面运动

刚体的平面运动

- 刚体平面运动的动力学条件
- 处理动力学问题的一般方法
- 处理动力学问题的独立坐标方法
- 处理瞬时动力学问题的直接分析法

说明

- 刚体平面运动动力学条件一般性了解
- 瞬时动力学问题直接分析方法是补充内容

刚体的平面运动

- 刚体平面运动的动力学条件
- 处理动力学问题的一般方法
- 处理动力学问题的独立坐标方法
- 处理瞬时动力学问题的直接分析法

刚体的平面运动

- 刚体平面运动的动力学条件
- 处理动力学问题的一般方法
- 处理动力学问题的独立坐标方法
- 处理瞬时动力学问题的直接分析法

刚体平面运动的动力学条件

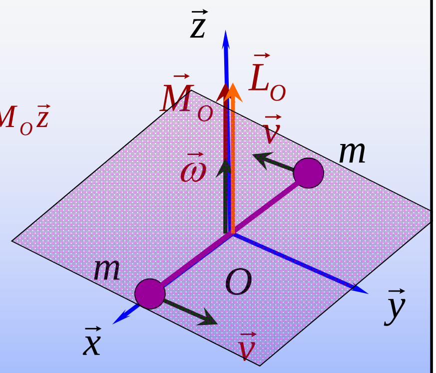
- 刚体在力或力偶的作用下产生运动
- 作用于刚体上的一个平面力系，刚体是否一定作平面运动？

[例1] 对象： 哑铃(间距2*l*)

外力(不考虑重力)：力偶矩矢量 $\vec{M}_O = M_O\vec{z}$

平面力系

假定在平面内绕*Oz*作定轴转动 平面运动



$$\vec{L}_O = J_{Oz}\omega\vec{z} = 2ml^2\omega\vec{z}$$

$$\dot{\vec{L}}_O = J_{Oz}\dot{\omega}\vec{z}$$

动量矩定理 $\dot{\vec{L}}_O = \vec{M}_O$ $J_{Oz}\dot{\omega}\vec{z} = M_O\vec{z}$ 可能成立

哑铃可能在平面内绕*Oz*作定轴转动

关系 $J_{Oz}\alpha = M_O$

平面力系 ⇨ 平面运动

[例2] 对象： 哑铃 $m_1 = m_2 = m$

$\vec{r}_1$ $\boldsymbol{r}_1 = (l \quad 0 \quad -l)^{\mathrm{T}}$

$\vec{r}_2$ $\boldsymbol{r}_2 = (l \quad 0 \quad l)^{\mathrm{T}}$

外力(不考虑重力)： 力偶矩矢量 $\vec{M}_O = M_O\vec{z}$

平面力系

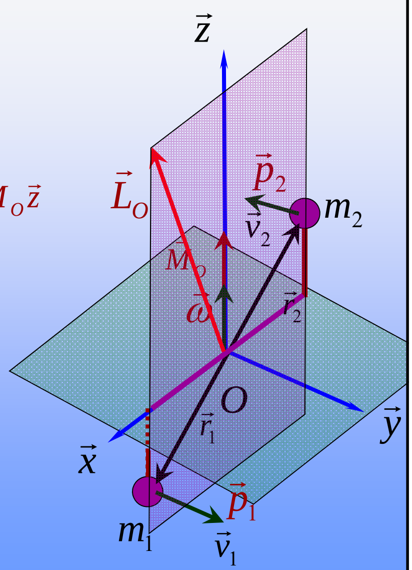
假定在平面内绕*Oz*作定轴转动 平面运动

$$v_1 = v_2 = \omega l$$

动量 $\vec{p}_1 = m\vec{v}_1$ $\vec{p}_2 = m\vec{v}_2$

动量矩 $\vec{L}_O = \vec{r}_1 \times \vec{p}_1 + \vec{r}_2 \times \vec{p}_2$

连体基 $\vec{e}$: $\boldsymbol{L}'_O = (2m\omega l^2 \quad 0 \quad 2m\omega l^2)^{\mathrm{T}}$



假定在平面内绕Oz作定轴转动 $\vec{\omega} = \omega\vec{z}$

动量矩 $\vec{L}_O = \vec{r}_1 \times \vec{p}_1 + \vec{r}_2 \times \vec{p}_2$

连体基 $\vec{e}$： $\underline{L}'_O = \left(2m\omega l^2 \quad 0 \quad 2m\omega l^2\right)^{\mathrm{T}}$

$\vec{L}_O$ 在连体基中为常矢量

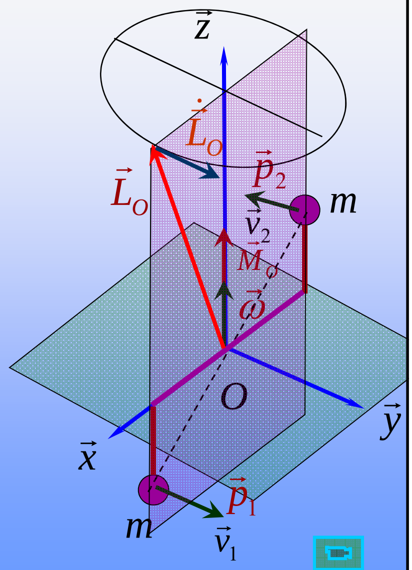
$$\dot{\vec{L}}_O = \cancel{\mathring{\vec{L}}_O} + \vec{\omega} \times \vec{L}_O = \vec{\omega} \times \vec{L}_O$$

矢端作圆周运动

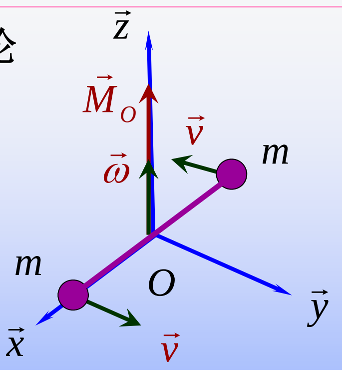
$$\dot{\vec{L}}_O \perp \vec{M}_O$$

动量矩定理要求 $\dot{\vec{L}}_O = \vec{M}_O$ 不可能成立

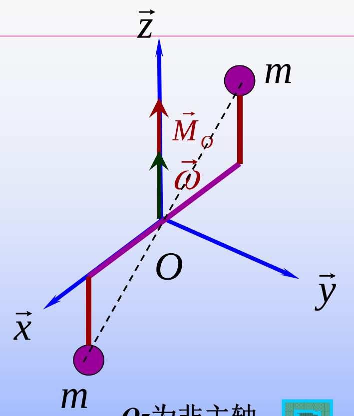
哑铃不可能绕Oz作定轴转动



- 结论



Oz为主轴



Oz为非主轴

刚体作平面运动的惯量条件：刚体运动平面的法线方向应为刚体的一主轴

满足作平面运动动力学条件的刚体称为平面刚体

刚体的平面运动

- 刚体平面运动的动力学条件
- 处理动力学问题的一般方法
- 处理动力学问题的独立坐标方法
- 处理瞬时动力学问题的直接分析法

处理动力学问题的一般方法

- 单刚体动力学方程一般形式
- 单刚体动力学问题
- 刚体系动力学方程一般形式
- 刚体系动力学问题

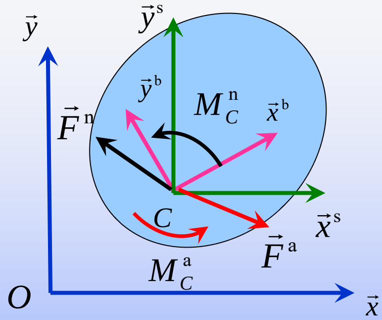
- 单刚体动力学方程一般形式

惯性基 $\vec{e} = (\vec{x} \quad \vec{y})^{\mathrm{T}}$

平动参考基 $\vec{e}^{\mathrm{s}} = (\vec{x}^{\mathrm{s}} \quad \vec{y}^{\mathrm{s}})^{\mathrm{T}}$

连体基 $\vec{e}^{\mathrm{b}} = (\vec{x}^{\mathrm{b}} \quad \vec{y}^{\mathrm{b}})^{\mathrm{T}}$

基点为质心C



作用于受约束刚体的外力

理想约束力系　　通常未知

向质心C简化　主矢 $\vec{F}^{\mathrm{n}}$　　$\vec{e}$: $\boldsymbol{F}^{\mathrm{n}} = (F_x^{\mathrm{n}} \quad F_y^{\mathrm{n}})^{\mathrm{T}}$

主矩 $\vec{M}_C^{\mathrm{n}} = M_C^{\mathrm{n}} \vec{z}$

主动力系

向质心C简化　主矢 $\vec{F}^{\mathrm{a}}$　　$\vec{e}$: $\boldsymbol{F}^{\mathrm{a}} = (F_x^{\mathrm{a}} \quad F_y^{\mathrm{a}})^{\mathrm{T}}$

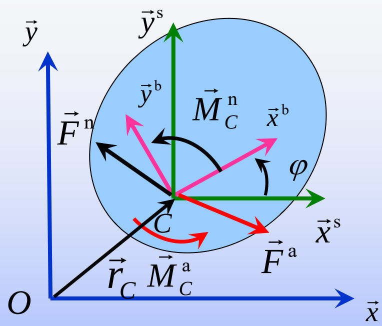
主矩 $\vec{M}_C^{\mathrm{a}} = M_C^{\mathrm{a}} \vec{z}$

惯性基 $\vec{e} = (\vec{x} \quad \vec{y})^{\mathrm{T}}$

平动参考基 $\vec{e}^{\mathrm{s}} = (\vec{x}^{\mathrm{s}} \quad \vec{y}^{\mathrm{s}})^{\mathrm{T}}$

连体基 $\vec{e}^{\mathrm{b}} = (\vec{x}^{\mathrm{b}} \quad \vec{y}^{\mathrm{b}})^{\mathrm{T}}$

基点为质心C



运动描述

位置 $\vec{r}_C$　　$\vec{e}$: $\boldsymbol{r}_C = (x_C \quad y_C)^{\mathrm{T}}$

姿态 φ

动力学方程

质心运动定理　$m\ddot{\boldsymbol{r}}_C = \boldsymbol{F}^{\mathrm{a}} + \boldsymbol{F}^{\mathrm{n}}$

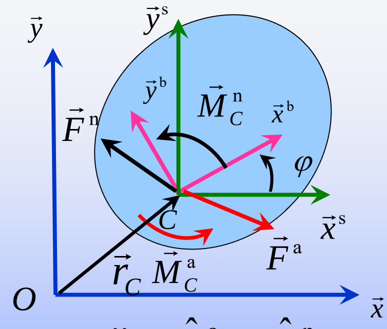
$\vec{e}$: $m\ddot{x}_C = \mathbf{F}_x^{\mathrm{a}} + \mathbf{F}_x^{n}$

$m\ddot{y}_C = \mathbf{F}_y^{\mathrm{a}} + \mathbf{F}_y^{n}$

对质心动量矩定理　$J_C\ddot{\varphi} = M_C^{\mathrm{a}} + M_C^{\mathrm{n}}$　　$\vec{L}_C = J_C\dot{\varphi}\vec{z}$

位置 $\vec{r}_C$ $\quad \vec{e}: \ \boldsymbol{r}_C = (x_C \quad y_C)^{\mathrm{T}}$

姿态 φ



单刚体动力学方程组

$$m\ddot{x}_C = F_x^{\mathrm{a}} + F_x^{\mathrm{n}}$$
$$m\ddot{y}_C = F_y^{\mathrm{a}} + F_y^{\mathrm{n}}$$
$$J_C\ddot{\varphi} = M_C^{\mathrm{a}} + M_C^{\mathrm{n}}$$

单刚体动力学方程组缩并

$$\underbrace{\begin{pmatrix} m & 0 & 0 \\ 0 & m & 0 \\ 0 & 0 & J_C \end{pmatrix}}_{\boldsymbol{Z}} \underbrace{\begin{pmatrix} \ddot{x}_C \\ \ddot{y}_C \\ \ddot{\varphi} \end{pmatrix}}_{\ddot{\boldsymbol{q}}} = \underbrace{\begin{pmatrix} F_x^{\mathrm{a}} \\ F_y^{\mathrm{a}} \\ M_C^{\mathrm{a}} \end{pmatrix}}_{\hat{\boldsymbol{F}}^{\mathrm{a}}} + \underbrace{\begin{pmatrix} F_x^{\mathrm{n}} \\ F_y^{\mathrm{n}} \\ M_C^{\mathrm{n}} \end{pmatrix}}_{\hat{\boldsymbol{F}}^{\mathrm{n}}}$$

$$\underbrace{\boldsymbol{Z}}_{\text{增广质量阵}} \underbrace{\ddot{\boldsymbol{q}}}_{\text{位形加速度坐标阵}} = \underbrace{\hat{\boldsymbol{F}}^{\mathrm{a}}}_{\text{增广主动力阵}} + \underbrace{\hat{\boldsymbol{F}}^{\mathrm{n}}}_{\text{增广理想约束力阵}}$$

单刚体动力学问题

- 单刚体平面运动的动力学微分方程组由三个方程组成

$$m\ddot{x}_C = F_x^{\mathrm{a}} + F_x^{\mathrm{n}}$$
$$m\ddot{y}_C = F_y^{\mathrm{a}} + F_y^{\mathrm{n}}$$
$$J_C\ddot{\varphi} = M_C^{\mathrm{a}} + M_C^{\mathrm{n}}$$

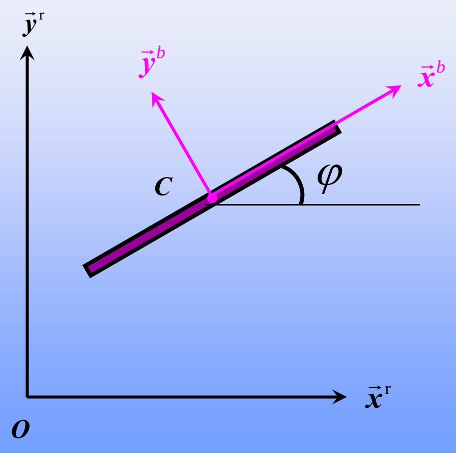
- 动力学逆问题，刚体的运动已知
  - 通过方程组可求得作用于刚体的主动力(偶)与理想约束力(偶)的关系
  - 求解的未知量个数不能超过3

- 动力学正问题，作用于刚体的主动力(偶)已知
  - 如果刚体没受到约束，**3**个位形坐标未知
    - 得到刚体质心的加速度和角加速度与主动力(矩)的关系
    - 可通过积分方程组，得到位形坐标与速度的时间历程

$$m\ddot{x}_C = \boldsymbol{F}_x^{\mathrm{a}} + \cancel{\boldsymbol{F}_x^{\mathrm{n}}}$$
$$m\ddot{y}_C = \boldsymbol{F}_y^{\mathrm{a}} + \cancel{\boldsymbol{F}_y^{\mathrm{n}}}$$
$$J_C\ddot{\varphi} = M_C^{\mathrm{a}} + \cancel{M_C^{\mathrm{n}}}$$

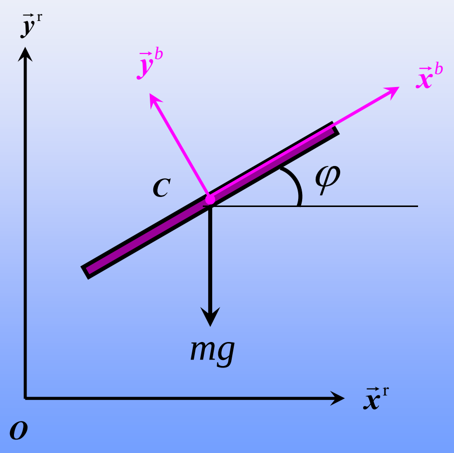
  - 如果刚体受到约束， **3**个位形坐标未知，理想约束力未知
    - 未知的变量超过方程的个数，必须附加方程

[例] 均质杆AB长为l，质量为m。不受约束。



位形坐标

$$\boldsymbol{q} = \begin{pmatrix} x_C & y_C & \varphi \end{pmatrix}^{\mathrm{T}}$$



动力学方程：

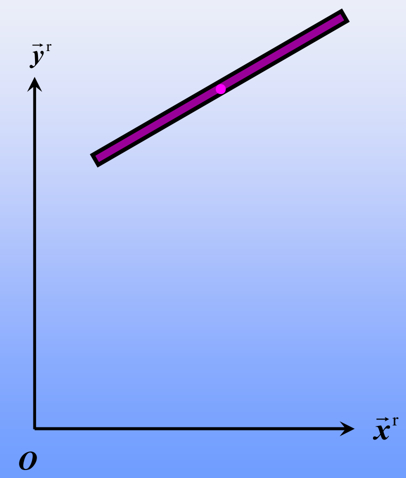
$$m\ddot{x}_C = 0 \qquad \ddot{x}_C = 0$$

$$m\ddot{y}_C = -mg \qquad \ddot{y}_C = -g$$

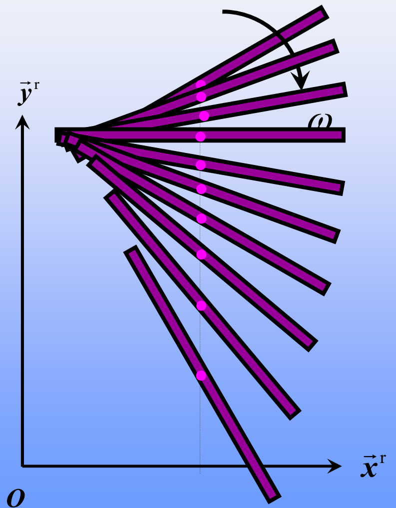
$$J_C\ddot{\varphi} = 0 \qquad \ddot{\varphi} = 0$$

如何运动与初始条件有关

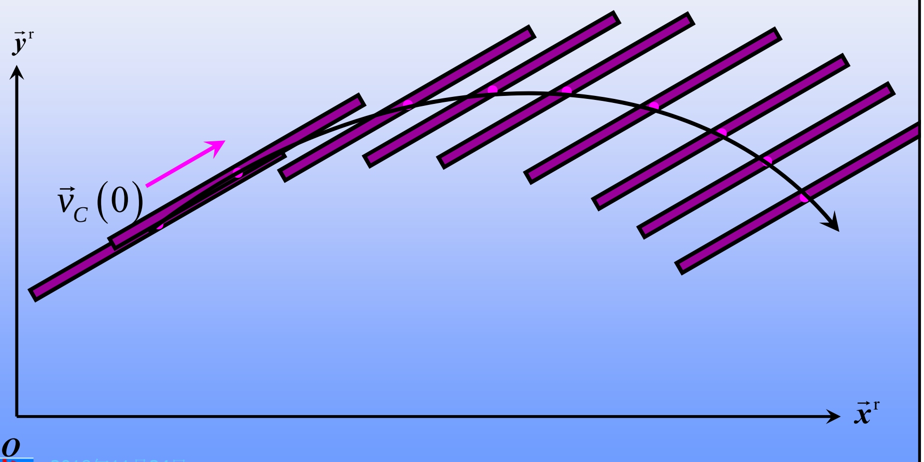
$$\dot{x}_C(0) = 0 \qquad \dot{y}_C(0) = 0 \qquad \dot{\varphi}(0) = 0$$



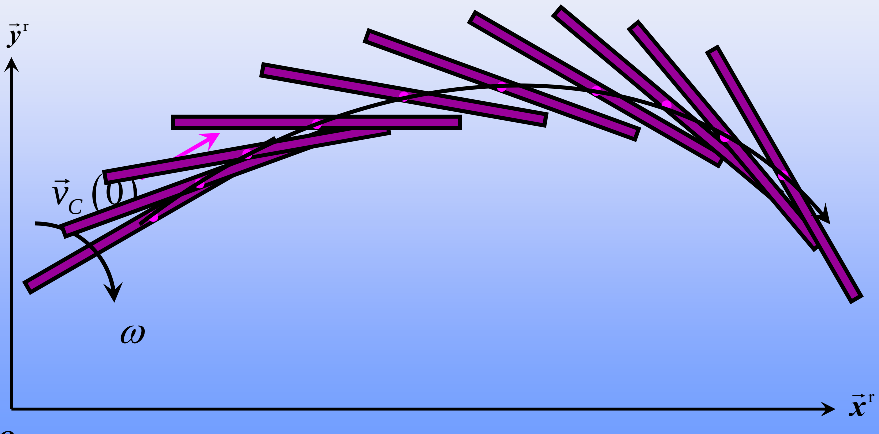
$$\dot{x}_C(0)=0 \quad \dot{y}_C(0)=0 \quad \dot{\varphi}(0)\neq 0$$



$$\dot{x}_C(0)\neq 0 \quad \dot{y}_C(0)\neq 0 \quad \dot{\varphi}(0)=0$$



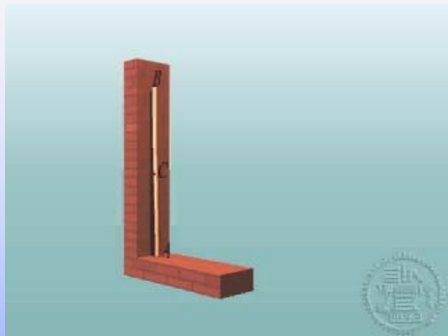
$\dot{x}_C(0) \neq 0 \quad \dot{y}_C(0) \neq 0 \quad \dot{\varphi}(0) \neq 0$



[例]

均质杆AB长为l，质量为m。
当该杆由静止开始，在地面与墙面上无摩擦地滑动

受约束刚体



(a) 试建立立杆的动力学方程

(b)初始为静止状态，初始角为φ_0，计算当杆下滑到角φ位置瞬时的角速度ω

(c) 计算该瞬时杆受到的约束力

(d) 计算当杆与铅垂壁脱离时的角φ_1

(e)计算此瞬时杆的角速度与质心C的水平运动速度

[解]　(a)建动力学方程

惯性基　$O-\vec{e}$　　连体基　$C-\vec{e}^{\,\mathrm{b}}$

杆的运动为平面一般运动

受力分析（一般位置）

主动力　$m\vec{g}$

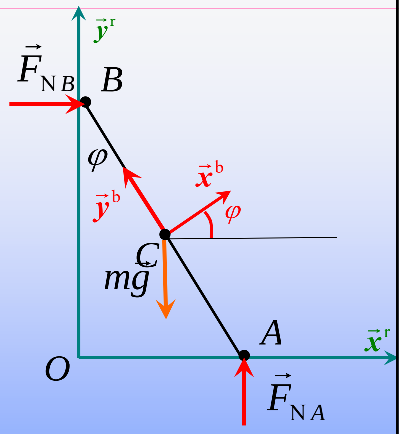
理想约束力　$\vec{F}_{NA}$　$\vec{F}_{NB}$

动力学方程

$$m\ddot{x}_C = F_{NB}$$

$$m\ddot{y}_C = F_{NA} - mg$$

$$\frac{ml^2}{12}\ddot{\varphi} = F_{NA}\frac{l}{2}\sin\varphi - F_{NB}\frac{l}{2}\cos\varphi$$



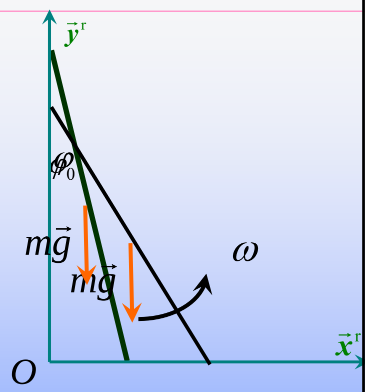
$$J_C = \frac{ml^2}{12}$$

(b)

初始　φ_0　$\omega_0 = 0$

当前　φ　ω?

动力学正问题　　已知主动力求运动



方程（一般位形）

$$m\ddot{x}_C = F_{NB}$$
$$m\ddot{y}_C = F_{NA} - mg$$
$$\frac{ml^2}{12}\ddot{\varphi} = F_{NA}\frac{l}{2}\sin\varphi - F_{NB}\frac{l}{2}\cos\varphi$$

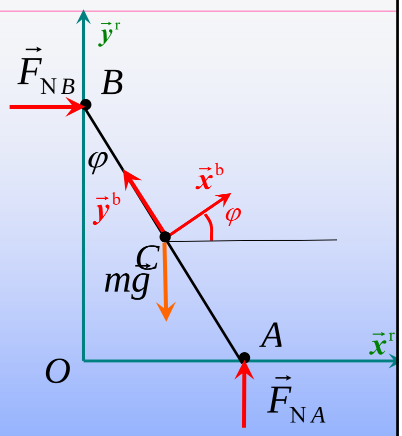
未知量数(5)>方程数(3)　　需附加2个方程

约束方程(一般位置)

$$x_C = \frac{l}{2}\sin\varphi,\quad y_C = \frac{l}{2}\cos\varphi$$

加速度约束方程

$$\ddot{x}_C = \frac{l}{2}\cos\varphi\ddot{\varphi} - \frac{l}{2}\sin\varphi\dot{\varphi}^2$$
$$\ddot{y}_C = -\frac{l}{2}\sin\varphi\ddot{\varphi} - \frac{l}{2}\cos\varphi\dot{\varphi}^2$$



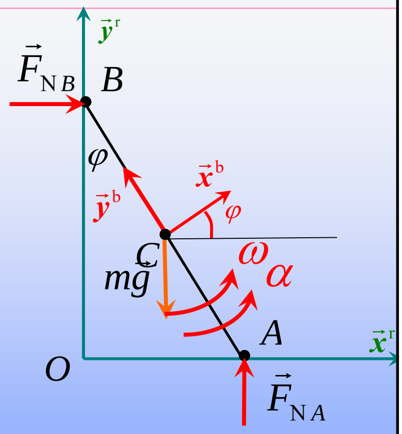
补充运动学方程的另一方法

方程（一般位形）

$$m\ddot{x}_C = F_{NB}$$
$$m\ddot{y}_C = F_{NA} - mg$$
$$\frac{ml^2}{12}\ddot{\varphi} = F_{NA}\frac{l}{2}\sin\varphi - F_{NB}\frac{l}{2}\cos\varphi$$

未知量数(5)>方程数(3)　需附加2个方程

$\ddot{x}_C, \ddot{y}_C, \ddot{\varphi}$　之间的关系？



$$\vec{a}_A = \vec{a}^e_{tA} + \vec{a}^e_{\omega A} + \vec{a}^e_{\alpha A}$$

$$\vec{a}_B = \vec{a}^e_{tB} + \vec{a}^e_{\omega B} + \vec{a}^e_{\alpha B}$$

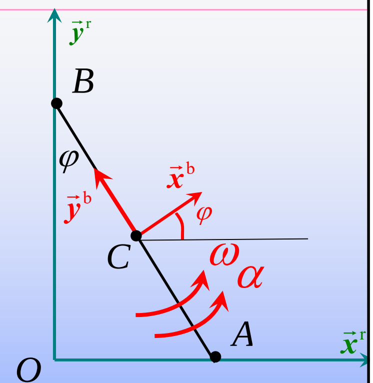
刚体动力学/刚体的平面运动/一般方法/解

方程（一般位形）

$$m\ddot{x}_C = F_{NB}$$
$$m\ddot{y}_C = F_{NA} - mg$$
$$\frac{ml^2}{12}\ddot{\varphi} = F_{NA}\frac{l}{2}\sin\varphi - F_{NB}\frac{l}{2}\cos\varphi$$

未知量数(5)>方程数(3)　需附加2个方程

$\ddot{x}_C, \ddot{y}_C, \ddot{\varphi}$　之间的关系？



$$\vec{a}_A = \vec{a}^e_{tA} + \vec{a}^e_{\omega A} + \vec{a}^e_{\alpha A} \qquad \vec{a}^e_{tA} = \vec{a}_C = \vec{a}_{Cx} + \vec{a}_{Cy}$$

$$a_{Cx} = \ddot{x}_C \qquad a_{Cy} = \ddot{y}_C \qquad a^e_{\omega A} = \dot{\varphi}^2 l/2 \quad a^e_{\alpha A} = \ddot{\varphi} l/2$$

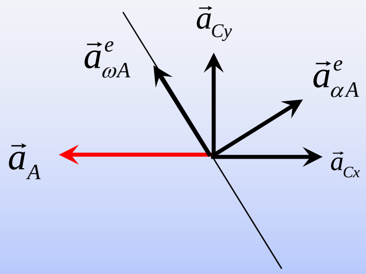
$\ddot{x}_C, \ddot{y}_C, \ddot{\varphi}$ 之间的关系？

$$\vec{a}_A = \vec{a}^e_{tA} + \vec{a}^e_{\omega A} + \vec{a}^e_{\alpha A}$$

$$\vec{a}^e_{tA} = \vec{a}_C = \vec{a}_{Cx} + \vec{a}_{Cy}$$

$$a_{Cx} = \ddot{x}_C \quad a_{Cy} = \ddot{y}_C$$

$$a^e_{\omega A} = \dot{\varphi}^2 l/2 \quad a^e_{\alpha A} = \ddot{\varphi} l/2$$



$$\vec{y}^r: \quad 0 = a_{Cy} + a^e_{\omega A}\cos\varphi + a^e_{\alpha A}\sin\varphi$$

$$\boxed{\ddot{y}_C = -\frac{l}{2}\sin\varphi\ddot{\varphi} - \frac{l}{2}\cos\varphi\dot{\varphi}^2}$$

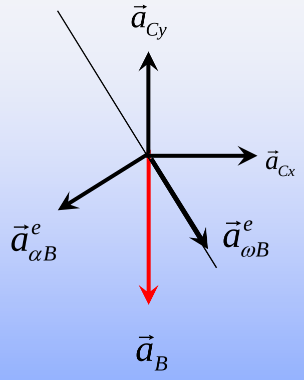
$\ddot{x}_C, \ddot{y}_C, \ddot{\varphi}$ 之间的关系？

$$\vec{a}_B = \vec{a}^e_{tB} + \vec{a}^e_{\omega B} + \vec{a}^e_{\alpha B}$$

$$\vec{a}^e_{tB} = \vec{a}_C = \vec{a}_{Cx} + \vec{a}_{Cy}$$

$$a_{Cx} = \ddot{x}_C \quad a_{Cy} = \ddot{y}_C$$

$$a^e_{\omega B} = \dot{\varphi}^2 l/2 \quad a^e_{\alpha B} = \ddot{\varphi} l/2$$



$$\vec{x}^r: \quad 0 = a_{Cx} + a^e_{\omega B}\sin\varphi - a^e_{\alpha B}\cos\varphi$$

$$\boxed{\ddot{x}_C = \frac{l}{2}\cos\varphi\ddot{\varphi} - \frac{l}{2}\sin\varphi\dot{\varphi}^2}$$

另一方法　结束

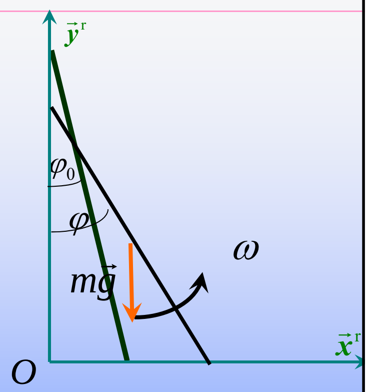
$$m\ddot{x}_C = F_{NB}$$

$$m\ddot{y}_C = F_{NA} - mg$$

$$\frac{ml^2}{12}\ddot{\varphi} = F_{NA}\frac{l}{2}\sin\varphi - F_{NB}\frac{l}{2}\cos\varphi$$

$$\ddot{x}_C = \frac{l}{2}\cos\varphi\ddot{\varphi} - \frac{l}{2}\sin\varphi\dot{\varphi}^2$$

$$\ddot{y}_C = -\frac{l}{2}\sin\varphi\ddot{\varphi} - \frac{l}{2}\cos\varphi\dot{\varphi}^2$$



$$\ddot{\varphi} - \frac{3g}{2l}\sin\varphi = 0 \qquad \dot{\varphi}\,\mathrm{d}\dot{\varphi} = \frac{3g}{2l}\sin\varphi\,\mathrm{d}\varphi$$

$$\int_0^{\omega}\dot{\varphi}\,\mathrm{d}\dot{\varphi} = \int_{\varphi_0}^{\varphi}\frac{3g}{2l}\sin\varphi\,\mathrm{d}\varphi$$

$$\ddot{\varphi} = \frac{\mathrm{d}\dot{\varphi}}{\mathrm{d}\varphi}\frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}t} = \dot{\varphi}\frac{\mathrm{d}\dot{\varphi}}{\mathrm{d}\varphi}$$

$$\omega = \dot{\varphi} = \sqrt{\frac{3g(\cos\varphi_0 - \cos\varphi)}{l}}$$

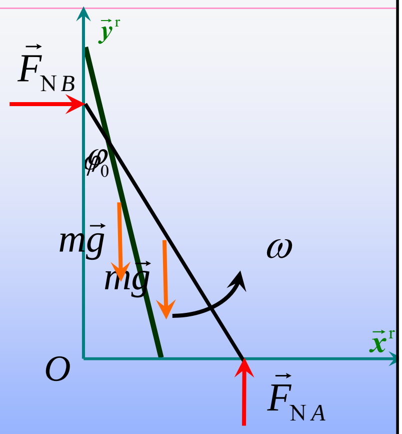
(c)

初始 φ_0 $\omega_0 = 0$

当前 φ ω?

$$\omega = \dot{\varphi} = \sqrt{\frac{3g(\cos\varphi_0 - \cos\varphi)}{l}}$$

当前 F_{NA}? F_{NB}?



方程

$$m\ddot{x}_C = F_{NB}$$

$$m\ddot{y}_C = F_{NA} - mg$$

$$\frac{ml^2}{12}\ddot{\varphi} = F_{NA}\frac{l}{2}\sin\varphi - F_{NB}\frac{l}{2}\cos\varphi$$

$$\ddot{x}_C = \frac{l}{2}\cos\varphi\ddot{\varphi} - \frac{l}{2}\sin\varphi\dot{\varphi}^2$$

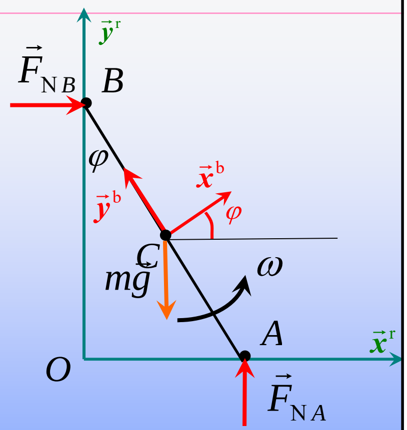
$$\ddot{y}_C = -\frac{l}{2}\sin\varphi\ddot{\varphi} - \frac{l}{2}\cos\varphi\dot{\varphi}^2$$

当前态 φ $\omega = \dot{\varphi} = \sqrt{3g(\cos\varphi_0 - \cos\varphi)/l}$

$$\ddot{\varphi} - \frac{3g}{2l}\sin\varphi = 0$$

$$F_{NB} = \frac{3mg}{4}\sin\varphi(3\cos\varphi - 2\cos\varphi_0)$$

$$F_{NA} = m\ddot{y}_C + mg = mg\left[1 - \frac{3}{4}\sin^2\varphi - \frac{3}{2}\cos\varphi(\cos\varphi_0 - \cos\varphi)\right]$$



需要速度层面的信息

(d)

初始	φ_0	$\omega_0=0$
过程	φ	ω

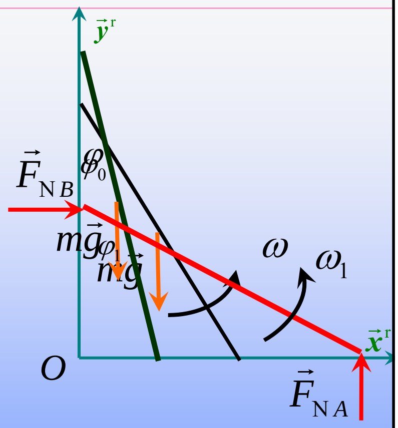
$$\omega=\dot{\varphi}=\sqrt{\frac{3g(\cos\varphi_0-\cos\varphi)}{l}}$$

当前　　杆与铅垂壁脱离瞬时

φ_1 ?

何谓杆与铅垂壁脱离

$$F_{NB}=0 \qquad F_{NA}\neq 0$$



求杆离壁时的姿态

离壁条件　$F_{NB}=0$

$$F_{NB}=\frac{3mg}{4}\sin\varphi(3\cos\varphi-2\cos\varphi_0)$$

$$\frac{3mg}{4}\sin\varphi(3\cos\varphi-2\cos\varphi_0)=0$$

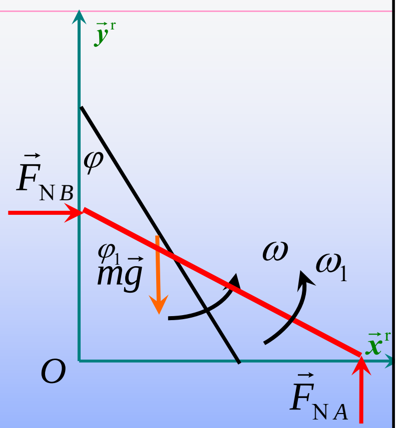
解1　$\sin\varphi=0$

$\varphi^*=0$　　与题意不符

解2　$3\cos\varphi-2\cos\varphi_0=0$

$$\varphi_1=\arccos(\frac{2}{3}\cos\varphi_0)$$

$\varphi_0(^\circ)$	**30**	**45**	**60**
$\varphi_1(^\circ)$	**54.74**	**61.87**	**70.53**



(e)

初始 φ_0 $\omega_0 = 0$

过程 φ ω

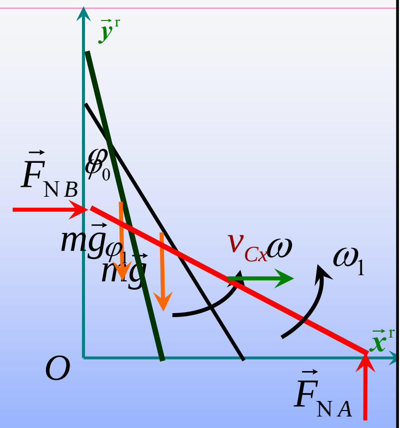
$$\omega = \dot{\varphi} = \sqrt{\frac{3g(\cos\varphi_0 - \cos\varphi)}{l}}$$

当前 杆与铅垂壁脱离瞬时

$$\varphi_1 = \arccos(\frac{2}{3}\cos\varphi_0)$$

ω_1 ? v_{Cx} ?

运动学问题



(e)求杆离壁时位形速度(运动学问题)

离壁瞬时 $\varphi_1 = \arccos(\frac{2}{3}\cos\varphi_0)$

离壁瞬时杆角速度

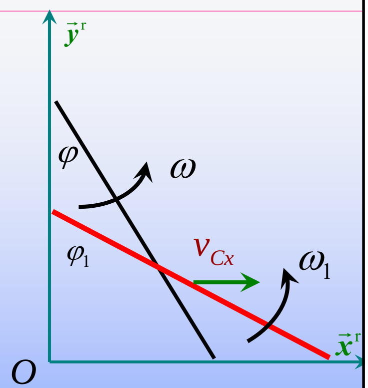
$$\omega_1 = \sqrt{\frac{g}{l}\cos\varphi_0}$$

约束方程

$$x_C = \frac{l}{2}\sin\varphi, \quad y_C = \frac{l}{2}\cos\varphi$$

速度约束方程

$$\dot{x}_C = \frac{l}{2}\dot{\varphi}\cos\varphi, \quad \dot{y}_C = -\frac{l}{2}\dot{\varphi}\sin\varphi$$



$$\omega = \sqrt{3g(\cos\varphi_0 - \cos\varphi)/l}$$

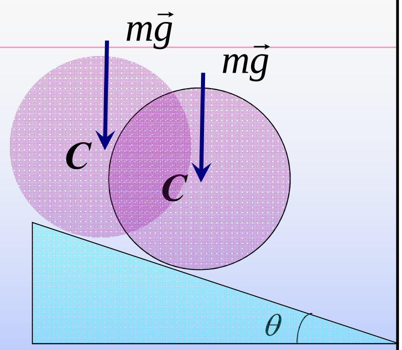
离壁瞬时质心水平速度

$$v_{Cx} = \dot{x}_C = \frac{l}{2}\omega_1\cos\varphi_1 = \frac{1}{3}\cos\varphi_0\sqrt{gl\cos\varphi_0}$$

运动学矢量瞬时分析法 后续运动?

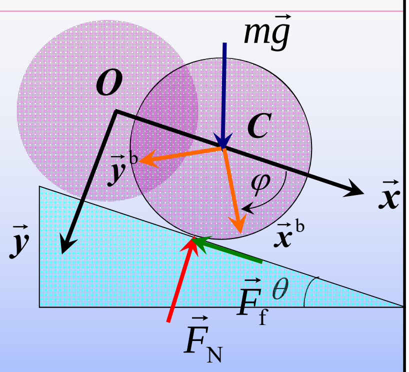
[例]

一均质圆柱质量为m，半径为r，无初速地放在倾斜角为θ的斜面上，不计滚阻力偶，考虑滑动摩擦力



试讨论圆柱运动的情况

[解] 惯性基 $O-\vec{e}$ 连体基 $C-\vec{e}^{\mathrm{b}}$



圆柱运动为平面一般运动

受力分析（一般位置）

重力 $m\vec{g}$

理想约束力 $\vec{F}_{\mathrm{N}}$

滑动摩擦力 $\vec{F}_{\mathrm{f}}$

圆柱与斜面的相对光滑程度不同会产生不同的摩擦效应

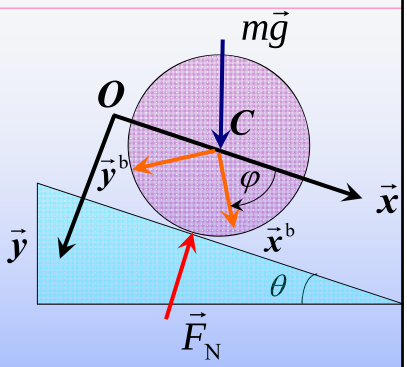
（a）理想光滑

（b）非常粗糙

（c）两者之间

[解] **(a)**圆柱与斜面理想光滑

无滑动摩擦力



受力分析（一般位置）

重力 $m\vec{g}$

理想约束力 $\vec{F}_{\mathrm{N}}$

圆柱运动为平面一般运动

动力学方程

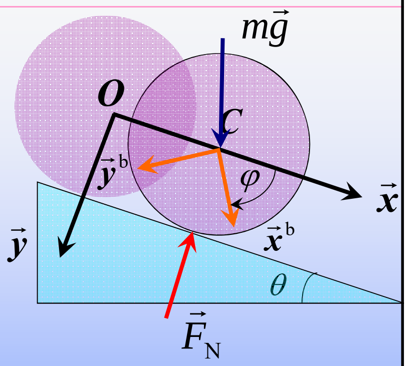
$$m\ddot{x}_C = mg\sin\theta$$

$$m\ddot{y}_C = mg\cos\theta - F_{\mathrm{N}}$$

$$\frac{mr^2}{2}\ddot{\varphi} = 0$$

$$J_C = \frac{mr^2}{2}$$

动力学方程



$$m\ddot{x}_C = mg\sin\theta$$

$$m\ddot{y}_C = mg\cos\theta - F_{\mathrm{N}}$$

$$\frac{mr^2}{2}\ddot{\varphi} = 0$$

未知量数(4)>方程数(3)　需附加1个方程

约束方程(一般位置)

$y_C \equiv 0$　　$\ddot{y}_C \equiv 0$　　$F_{\mathrm{N}} = mg\cos\theta$

求解　$t = 0$　$\varphi_0 = 0$　$\dot{\varphi}_0 = 0$　　$\varphi(t) = 0$

$x_C = 0$　$\dot{x}_C = 0$　　$x_C(t) = \frac{1}{2}gt^2\sin\theta$

圆柱匀加速度斜面平移下滑

(b)圆柱与斜面非常粗糙

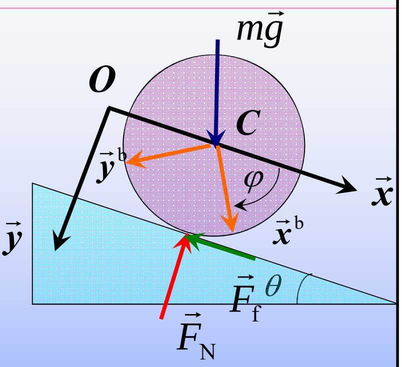
受力分析（一般位置）

重力 $m\vec{g}$

理想约束力 $\vec{F}_{\mathrm{N}}$ 未知

滑动摩擦力 $\vec{F}_{\mathrm{f}}$ 未知

? $\cancel{F_{\mathrm{f}} = fF_{\mathrm{N}}}$ 临界状态?



圆柱运动为平面一般运动

动力学方程

$$m\ddot{x}_C = mg\sin\theta - F_{\mathrm{f}}$$

$$m\ddot{y}_C = mg\cos\theta - F_{\mathrm{N}}$$

$$\frac{mr^2}{2}\ddot{\varphi} = F_{\mathrm{f}} r$$

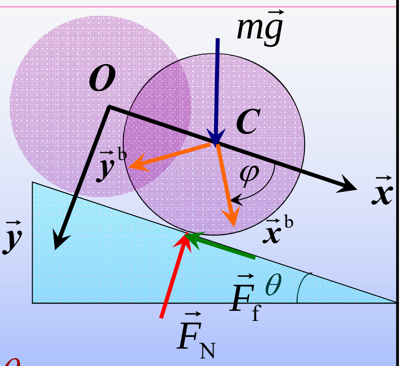
$$J_C = \frac{mr^2}{2}$$

动力学方程

$$m\ddot{x}_C = mg\sin\theta - F_{\mathrm{f}}$$

$$m\ddot{y}_C = mg\cos\theta - F_{\mathrm{N}}$$

$$\frac{mr^2}{2}\ddot{\varphi} = F_{\mathrm{f}} r$$



未知量数(5)>方程数(3) 需附加2个方程

约束方程(一般位置)

$y_C \equiv 0$ $\ddot{y}_C \equiv 0$ $F_{\mathrm{N}} = mg\cos\theta$

纯滚动 $x_C = r\varphi$ $\ddot{x}_C = r\ddot{\varphi}$

构成封闭的方程组

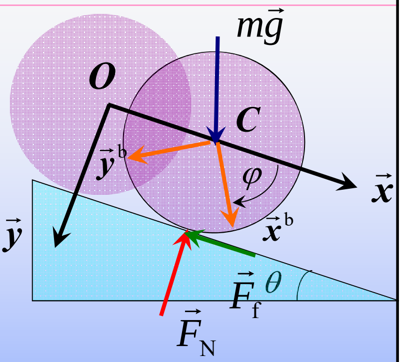
$$m\ddot{x}_C = mg\sin\theta - F_{\mathrm{f}}$$

$$\frac{mr^2}{2}\ddot{\varphi} = F_{\mathrm{f}} r$$

$$\ddot{x}_C = r\ddot{\varphi}$$

未知量数(3)=方程数(3)

$$\ddot{x}_C = \frac{2}{3}g\sin\theta$$



求解 $t = 0$ $x_C = 0$ $\dot{x}_C = 0$

$$x_C(t) = \frac{2}{3}gt^2\sin\theta \qquad \varphi(t) = \frac{2}{3r}gt^2\sin\theta$$

$$F_{\mathrm{f}} = \frac{m}{2}\ddot{x}_C$$

$$x_C = r\varphi$$

圆柱沿斜面纯滚动，质心的加速度不变

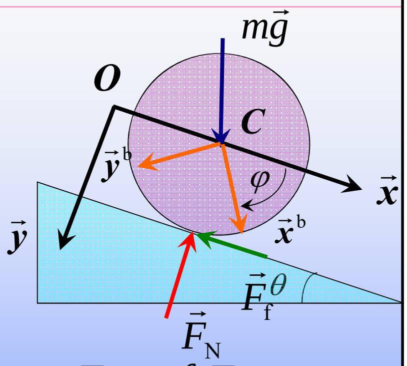
$$F_{\mathrm{f}} = \frac{1}{3}mg\sin\theta$$

讨论 $F_{\mathrm{f}} = \frac{1}{3}mg\sin\theta$

$$F_{\mathrm{N}} = mg\cos\theta$$

斜面极限静摩擦力

$$F_{\mathrm{m}} = f_{\mathrm{s}} mg\cos\theta$$



$$F_{\mathrm{m}} = f_{\mathrm{s}} F_{\mathrm{N}}$$

圆柱与斜面无相对滑动的条件

$$F_{\mathrm{m}} \ge F_{\mathrm{f}}$$

$$f_{\mathrm{s}} mg\cos\theta \ge \frac{1}{3}mg\sin\theta$$

$f_{\mathrm{s}} \ge \frac{1}{3}\tan\theta$ 圆柱在斜面纯滚动的条件 非常粗糙的含义

$f_{\mathrm{s}} < \frac{1}{3}\tan\theta$ 圆柱在斜面将又滚又滑

讨论

$f_s \geq \dfrac{1}{3}\tan\theta$ 圆柱在斜面纯滚动的条件

非常粗糙的含义

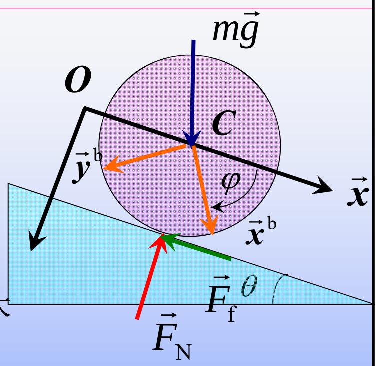
当摩擦因数给定 f_s

纯滚动与斜面的倾角有关，该角不能过大

当斜面的倾角给定 θ

摩擦因数愈大，纯滚动愈能发生

$f_s < \dfrac{1}{3}\tan\theta$ 圆柱在斜面将又滚又滑



(c)圆柱与斜面不很粗糙 $f_s < \dfrac{1}{3}\tan\theta$

受力分析（一般位置）

重力 $m\vec{g}$

理想约束力 $\vec{F}_N$ 未知

滑动摩擦力 $\vec{F}_f$ ？ $F_f = fF_N$

$$F_f = fF_N \,\mathrm{sign}(v_D)$$

$$\mathrm{sign}(v_D) = \begin{cases} 1 & 当 v_D > 0 \\ -1 & 当 v_D < 0 \end{cases}$$

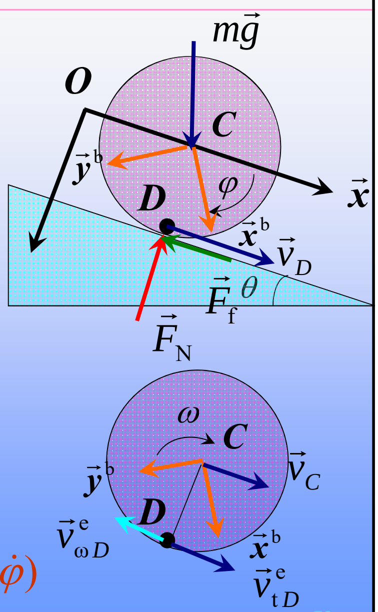
$\vec{v}_D = \vec{v}^e_{tD} + \vec{v}^e_{\omega D}$

$v^e_{tD} = v_C$

$v^e_{\omega D} = r\omega = r\dot{\varphi}$

$$v_D = v^e_{tD} - v^e_{\omega D} = \dot{x}_C - r\dot{\varphi}$$

$$F_f = fF_N \,\mathrm{sign}(\dot{x}_C - r\dot{\varphi})$$

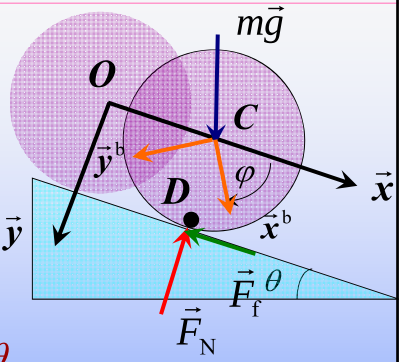


动力学方程

$$m\ddot{x}_C = mg\sin\theta - fF_N\,\mathrm{sign}(\dot{x}_C - r\dot{\varphi})$$

$$m\ddot{y}_C = mg\cos\theta - F_N$$

$$\frac{mr^2}{2}\ddot{\varphi} = fF_N r\,\mathrm{sign}(\dot{x}_C - r\dot{\varphi})$$



未知量数(4)>方程数(3)　需附加1个方程

约束方程(一般位置)

$y_C \equiv 0$　$\ddot{y}_C \equiv 0$　$F_N = mg\cos\theta$

$$\ddot{x}_C = g\sin\theta - fg\cos\theta\,\mathrm{sign}(\dot{x}_C - r\dot{\varphi})$$

$$\ddot{\varphi} = 2\frac{fg}{r}\cos\theta\,\mathrm{sign}(\dot{x}_C - r\dot{\varphi})$$

封闭 ⇒ $x_C(t)$, $\varphi(t)$

具体如何运动与初始条件有关！

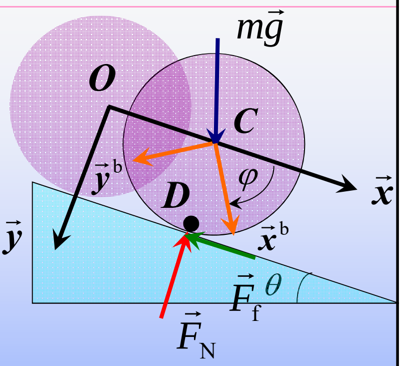
讨论 1：初始条件 $\dot{x}_{C0} = 0, \dot{\varphi}_0 = 0$

$$\ddot{x}_C = g\sin\theta - fg\cos\theta$$

$$\ddot{\varphi} = 2\frac{fg}{r}\cos\theta$$

$$\dot{x}_C = \left(g\sin\theta - fg\cos\theta\right)t$$

$$r\dot{\varphi} = 2fg\cos\theta t$$



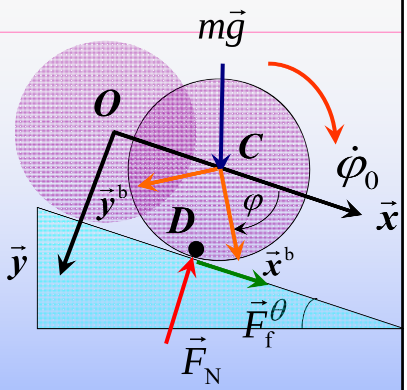
$$\dot{x}_C - r\dot{\varphi} = \left(g\sin\theta - 3fg\cos\theta\right)t$$

$$= g\cos\theta\left(tg\theta - 3f\right)t > 0$$

摩擦力方向始终斜面向上

质心速度、滚动角速度均越来越大

讨论 2：初始条件 $\dot{x}_{C0}=0, \dot{\varphi}_0 \neq 0$



$$\ddot{x}_C = g\sin\theta + fg\cos\theta$$

$$\ddot{\varphi} = -2\frac{fg}{r}\cos\theta$$

$$\dot{x}_C = \left(g\sin\theta + fg\cos\theta\right)t$$

$$r\dot{\varphi} = r\dot{\varphi}(0) - 2fg\cos\theta t$$

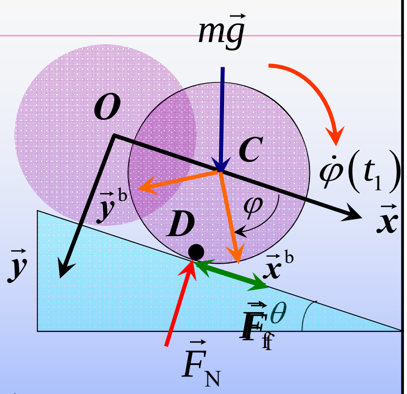
$$\dot{x}_C - r\dot{\varphi} = \left(g\sin\theta + 3fg\cos\theta\right)t - r\dot{\varphi}_0 = 0$$

$$t_1 = \frac{r\dot{\varphi}_0}{g\sin\theta + 3fg\cos\theta}$$

$t \le t_1$ 摩擦力方向斜面向下

质心速度增大、角速度减小

讨论 2：初始条件 $\dot{x}_{C0}=0, \dot{\varphi}_0 \neq 0$



$t > t_1$

$$\ddot{x}_C = g\sin\theta - fg\cos\theta$$

$$\ddot{\varphi} = +2\frac{fg}{r}\cos\theta$$

$$\dot{x}_C = \left(g\sin\theta - fg\cos\theta\right)t'$$

$$r\dot{\varphi} = 2fg\cos\theta t'$$

$$\dot{x}_C - r\dot{\varphi} = \left(g\sin\theta - 3fg\cos\theta\right)t' = g\cos\theta\left(tg\theta - 3f\right)t' > 0$$

摩擦力方向斜面向上

质心速度始终增大、角速度增大

可见摩擦力起着调节又滚又滑的过程的作用

- 动力学正问题小结
  - 如果刚体受到约束，**3**个位形坐标未知，理想约束力未知
    - 未知的变量超过方程的个数，必须附加方程
    - 刚体位形坐标的加速度层次上的关系可以作为附加方程
    - 也可利用运动学方法，直接寻找加速度关系
    - 对于未知的非理想约束力，还需增加一些描述非理想约束力关系式（如摩擦）

$$m\ddot{x}_C = \boldsymbol{F}_x^{\mathrm{a}} + \boldsymbol{F}_x^{\mathrm{n}}$$
$$m\ddot{y}_C = \boldsymbol{F}_y^{\mathrm{a}} + \boldsymbol{F}_y^{\mathrm{n}}$$
$$J_C\ddot{\varphi} = M_C^{\mathrm{a}} + M_C^{\mathrm{n}}$$

- 动力学正问题解题过程

$$m\ddot{x}_C = \boldsymbol{F}_x^{\mathrm{a}} + \boldsymbol{F}_x^{\mathrm{n}}$$
$$m\ddot{y}_C = \boldsymbol{F}_y^{\mathrm{a}} + \boldsymbol{F}_y^{\mathrm{n}}$$
$$J_C\ddot{\varphi} = M_C^{\mathrm{a}} + M_C^{\mathrm{n}}$$
$$\boldsymbol{\Phi}_q\ddot{\boldsymbol{q}} = \boldsymbol{\gamma}$$
$$\boldsymbol{M}\ddot{\boldsymbol{w}} = \boldsymbol{F}^{\mathrm{a}}$$
$$\boldsymbol{w} \quad \dot{\boldsymbol{w}}$$
$$\boldsymbol{\Phi} = 0 \quad \boldsymbol{\Phi}_q\dot{\boldsymbol{q}} = -\boldsymbol{\Phi}_t \quad \boldsymbol{\Phi}_q\ddot{\boldsymbol{q}} = \boldsymbol{\gamma}$$
$$\boldsymbol{u} \quad \dot{\boldsymbol{u}} \quad \ddot{\boldsymbol{u}}$$
$$\boldsymbol{F}_x^{\mathrm{n}} \quad \boldsymbol{F}_y^{\mathrm{n}} \quad M_C^{\mathrm{n}}$$

动力学方程组
加速度约束方程组
整理 ↓ 消去理想约束力
独立坐标动力学方程组
（力与加速度的关系）
积分 ↓
独立坐标的位置与速度　加速度
↓
位置、速度加速度约束方程组
解代数方程 ↓
非独立坐标的位置、速度与加速度
↓
原动力学方程组
解代数方程 ↓
理想约束力

- 刚体系动力学方程一般形式

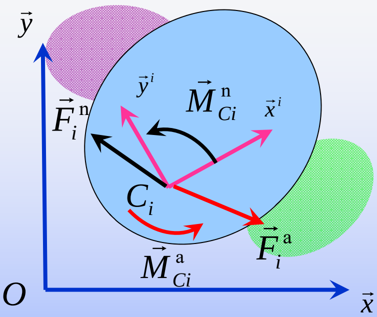
刚体系 $\mathrm{B}_i \quad (i = 1,2,\cdots,N)$

B_i 所受的外力

主动力系

主矢 $\vec{F}_i^{\mathrm{a}}$ $\quad \vec{\boldsymbol{e}}: \ \boldsymbol{F}_i^{\mathrm{a}} = \begin{pmatrix} F_{xi}^{\mathrm{a}} & F_{yi}^{\mathrm{a}} \end{pmatrix}^{\mathrm{T}}$

主矩 $\vec{M}_{Ci}^{\mathrm{a}} = M_{Ci}^{\mathrm{a}} \vec{z}$



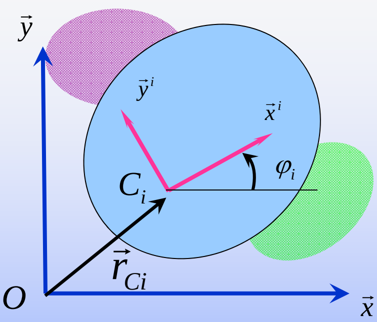
理想约束力系 包括刚体间的理想约束力

主矢 $\vec{F}_i^{\mathrm{n}}$ $\quad \vec{\boldsymbol{e}}: \ \boldsymbol{F}_i^{\mathrm{n}} = \begin{pmatrix} F_{xi}^{\mathrm{n}} & F_{yi}^{\mathrm{n}} \end{pmatrix}^{\mathrm{T}}$

主矩 $\vec{M}_{Ci}^{\mathrm{n}} = M_{Ci}^{\mathrm{n}} \vec{z}$

刚体系动力学方程组

$$
\left.
\begin{aligned}
m_i \ddot{x}_{Ci} &= \boldsymbol{F}_{xi}^{\mathrm{a}} + \boldsymbol{F}_{xi}^{\mathrm{n}} \\
m_i \ddot{y}_{Ci} &= \boldsymbol{F}_{yi}^{\mathrm{a}} + \boldsymbol{F}_{yi}^{\mathrm{n}} \\
J_{Ci} \ddot{\varphi}_i &= M_{Ci}^{\mathrm{a}} + M_{Ci}^{\mathrm{n}}
\end{aligned}
\right. \qquad (i = 1,2,\cdots,N)
$$



$$\boldsymbol{Z}_i \ddot{\boldsymbol{q}}_i = \hat{\boldsymbol{F}}_i^{\mathrm{a}} + \hat{\boldsymbol{F}}_i^{\mathrm{n}} \qquad (i = 1,2,\cdots,N)$$

$$\boldsymbol{Z}_i = \begin{pmatrix} m_i & 0 & 0 \\ 0 & m_i & 0 \\ 0 & 0 & J_{Ci} \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{q}_i = \begin{pmatrix} x_{Ci} \\ y_{Ci} \\ \varphi_i \end{pmatrix}, \quad \hat{\boldsymbol{F}}_i^{\mathrm{a}} = \begin{pmatrix} F_{ix}^{\mathrm{a}} \\ F_{iy}^{\mathrm{a}} \\ M_{Ci}^{\mathrm{a}} \end{pmatrix}, \quad \hat{\boldsymbol{F}}_i^{\mathrm{n}} = \begin{pmatrix} F_{ix}^{\mathrm{n}} \\ F_{iy}^{\mathrm{n}} \\ M_{Ci}^{\mathrm{n}} \end{pmatrix}$$

刚体系动力学方程组

$$\boldsymbol{Z}_i\ddot{\boldsymbol{q}}_i=\hat{\boldsymbol{F}}_i^{\mathrm{a}}+\hat{\boldsymbol{F}}_i^{\mathrm{n}}\quad(i=1,2,\cdots,N)$$

$$\boldsymbol{Z}_i=\begin{pmatrix}m_i&0&0\\0&m_i&0\\0&0&J_{Ci}\end{pmatrix},\quad \boldsymbol{q}_i=\begin{pmatrix}x_{Ci}\\y_{Ci}\\\varphi_i\end{pmatrix},\quad \hat{\boldsymbol{F}}_i^{\mathrm{a}}=\begin{pmatrix}F_{ix}^{\mathrm{a}}\\F_{iy}^{\mathrm{a}}\\M_{Ci}^{\mathrm{a}}\end{pmatrix},\quad \hat{\boldsymbol{F}}_i^{\mathrm{n}}=\begin{pmatrix}F_{ix}^{\mathrm{n}}\\F_{iy}^{\mathrm{n}}\\M_{Ci}^{\mathrm{n}}\end{pmatrix}$$

组集

$$\underbrace{\begin{pmatrix}\boldsymbol{Z}_1&\boldsymbol{0}&\cdots&\boldsymbol{0}\\\boldsymbol{0}&\boldsymbol{Z}_2&\cdots&\boldsymbol{0}\\\vdots&\vdots&&\vdots\\\boldsymbol{0}&\boldsymbol{0}&\cdots&\boldsymbol{Z}_N\end{pmatrix}}_{\boldsymbol{Z}}\underbrace{\begin{pmatrix}\ddot{\boldsymbol{q}}_1\\\ddot{\boldsymbol{q}}_2\\\vdots\\\ddot{\boldsymbol{q}}_N\end{pmatrix}}_{\ddot{\boldsymbol{q}}}=\underbrace{\begin{pmatrix}\hat{\boldsymbol{F}}_1^{\mathrm{a}}\\\hat{\boldsymbol{F}}_2^{\mathrm{a}}\\\vdots\\\hat{\boldsymbol{F}}_N^{\mathrm{a}}\end{pmatrix}}_{\hat{\boldsymbol{F}}^{\mathrm{a}}}+\underbrace{\begin{pmatrix}\hat{\boldsymbol{F}}_1^{\mathrm{n}}\\\hat{\boldsymbol{F}}_2^{\mathrm{n}}\\\vdots\\\hat{\boldsymbol{F}}_N^{\mathrm{n}}\end{pmatrix}}_{\hat{\boldsymbol{F}}^{\mathrm{n}}}$$

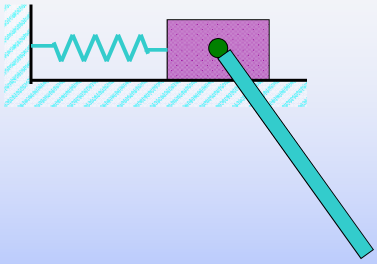
$$\boldsymbol{Z}\ddot{\boldsymbol{q}}=\hat{\boldsymbol{F}}^{\mathrm{a}}+\hat{\boldsymbol{F}}^{\mathrm{n}}$$

刚体系动力学问题

- 对于N个刚体作平面运动的系统，可以系统的每一个刚体为单位，定义它们的位形坐标，建立动力学方程
  - 位形坐标与方程的个数均为$3N$
- 有多少未知的理想约束力需增加多少的加速度约束关系
  - 约束包括刚体间的约束

[例]

图示机构由均质滑块和长为$2l$的均质杆组成。
刚度为k的线弹簧连接滑块与墙面。
滑块在光滑的水平面滑动，均质杆由转动铰悬挂在滑块的质心C_1上可在铅垂面内摆动。滑块和摆杆质量分别为m_1和m_2

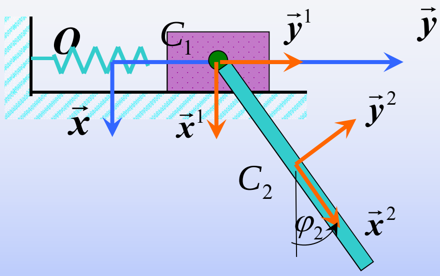


试建立系统的动力学方程

[解] 惯性基 $O-\vec{e}$ 点O在弹簧原长处

滑块连体基 $C_1-\vec{e}^1$

摆杆连体基 $C_2-\vec{e}^2$

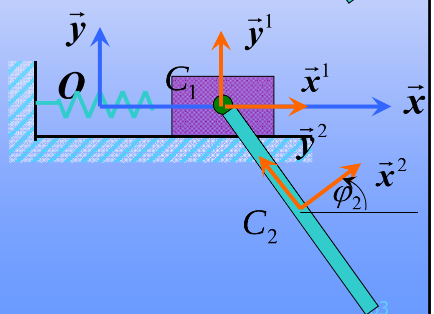


坐标基的选取是人为的

考虑建立约束方程的方便

连体基的基点在惯性基的第1象限

姿态角为锐角



惯性基 $O-\vec{e}$ 点O在弹簧原长处

受力分析（一般位置）

滑块

重力 $m_1\vec{g}$

线弹性力 $F_s = ky_1$

滑槽理想约束力 $\vec{F}_{N1}$ M_1 设定正向

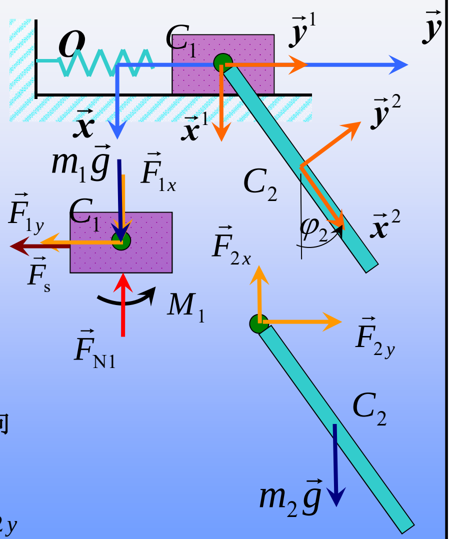
铰理想约束力 $\vec{F}_{1x}$ $\vec{F}_{1y}$ 设定正向

摆杆

重力 $m_2\vec{g}$

铰理想约束力 $\vec{F}_{2x}$ $\vec{F}_{2y}$ 设定正向

$$F_{1x} = F_{2x} \qquad F_{1y} = F_{2y}$$



惯性基 $O-\vec{e}$ 点O在弹簧原长处

滑块连体基 $C_1-\vec{e}^1$ $\boldsymbol{q}_1 = (x_1 \quad y_1 \quad \varphi_1)^{\mathrm{T}}$

摆杆连体基 $C_2-\vec{e}^2$ $\boldsymbol{q}_2 = (x_2 \quad y_2 \quad \varphi_2)^{\mathrm{T}}$

动力学方程

滑块

$$m_1\ddot{x}_1 = -F_{N1} + m_1 g + F_{1x}$$

$$m_1\ddot{y}_1 = -ky_1 - F_{1y}$$

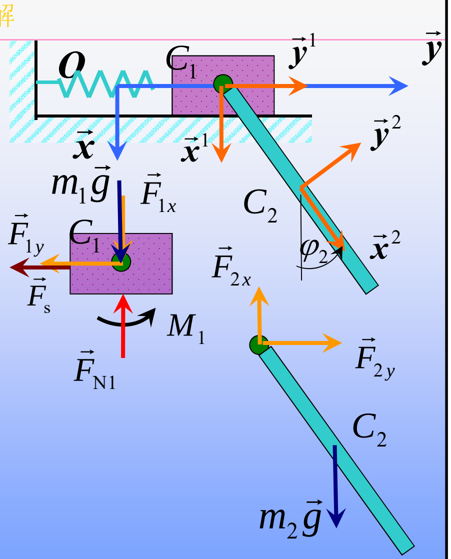
$$J_1\ddot{\varphi}_1 = M_1$$

摆杆

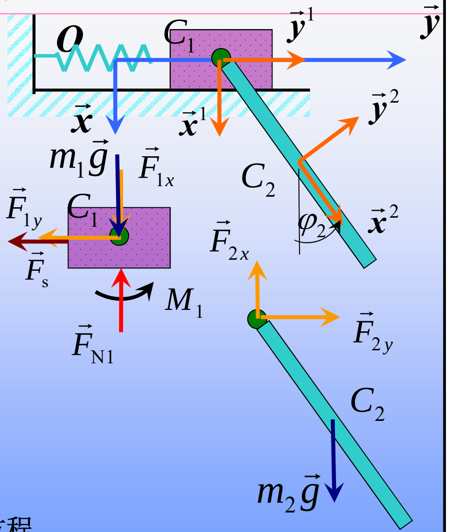
$$m_2\ddot{x}_2 = -F_{2x} + m_2 g$$

$$m_2\ddot{y}_2 = F_{2y}$$

$$\frac{1}{3}m_2 l^2\ddot{\varphi}_2 = -F_{2y} l\cos\varphi_2 - F_{2x} l\sin\varphi_2$$



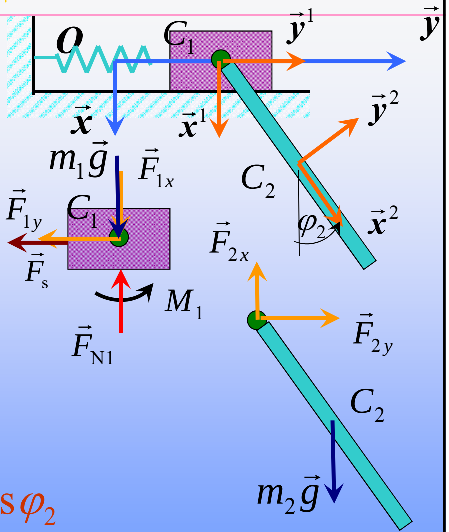
动力学方程



$$m_1\ddot{x}_1 = -F_{N1} + m_1 g + F_{1x}$$
$$m_1\ddot{y}_1 = -ky_1 - F_{1y}$$
$$J_1\ddot{\varphi}_1 = M_1$$
$$m_2\ddot{x}_2 = -F_{2x} + m_2 g$$
$$m_2\ddot{y}_2 = F_{2y}$$
$$\frac{1}{3}m_2 l^2\ddot{\varphi}_2 = -F_{2y}l\cos\varphi_2 - F_{2x}l\sin\varphi_2$$
$$F_{1x} = F_{2x}$$
$$F_{1y} = F_{2y}$$

未知量数(12)>方程数(8)　　需附加4个方程

约束方程(一般位置)



$x_1 \equiv 0$　　$\ddot{x}_1 \equiv 0$

$\varphi_1 \equiv 0$　　$\ddot{\varphi}_1 \equiv 0$

铰C_1

$$x_2 = \cancel{x_1} + l\cos\varphi_2$$
$$y_2 = y_1 + l\sin\varphi_2$$

求导

$$\dot{x}_2 = -l\dot{\varphi}_2\sin\varphi_2$$
$$\dot{y}_2 = \dot{y}_1 + l\dot{\varphi}_2\cos\varphi_2$$

求导

$$\ddot{x}_2 = -l\ddot{\varphi}_2\sin\varphi_2 - l\dot{\varphi}_2^2\cos\varphi_2$$
$$\ddot{y}_2 = \ddot{y}_1 + l\ddot{\varphi}_2\cos\varphi_2 - l\dot{\varphi}_2^2\sin\varphi_2$$

约束方程与连体基选择有关

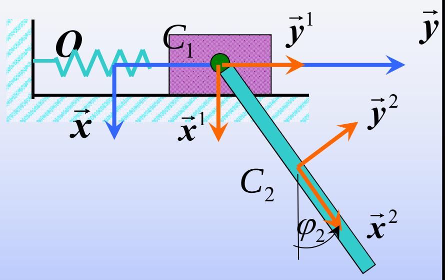
滑块连体基 $C_1 - \vec{e}^1$

摆杆连体基 $C_2 - \vec{e}^2$

$$x_1 \equiv 0 \quad \varphi_1 \equiv 0$$

$$x_2 = x_1 + l\cos\varphi_2$$

$$y_2 = y_1 + l\sin\varphi_2$$



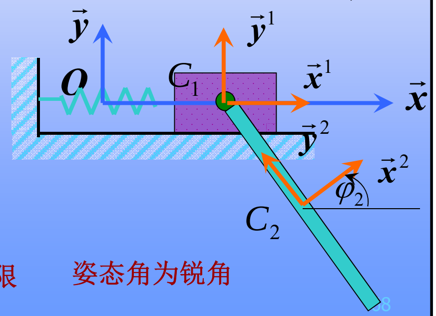
对于第二种基

$$y_1 \equiv 0 \quad \varphi_1 \equiv 0$$

铰C_1

$$x_2 = x_1 + l\sin\varphi_2$$

$$\underline{-y_2} = y_1 + l\cos\varphi_2$$



建议

连体基的基点在惯性基的第1象限　　姿态角为锐角

约束方程与连体基选择有关

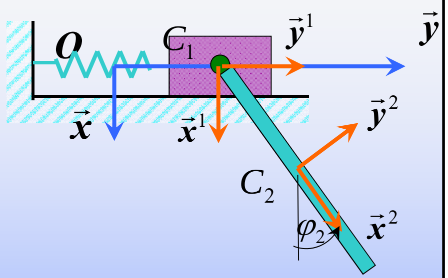
滑块连体基 $C_1 - \vec{e}^1$

摆杆连体基 $C_2 - \vec{e}^2$

$$x_1 \equiv 0 \quad \varphi_1 \equiv 0$$

$$x_2 = x_1 + l\cos\varphi_2$$

$$y_2 = y_1 + l\sin\varphi_2$$



$$\dot{x}_2 = \dot{x}_1 - l\dot{\varphi}_2\sin\varphi_2$$

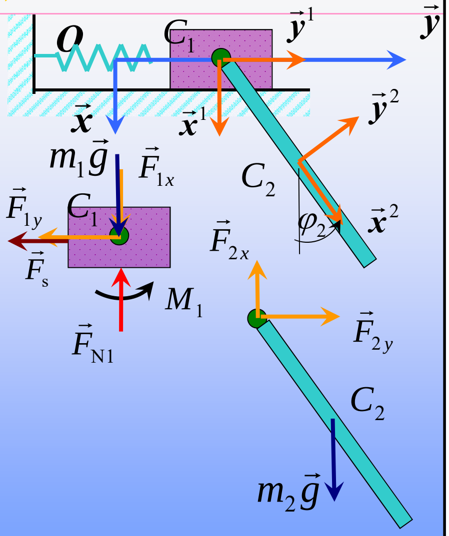
$$\dot{y}_2 = \dot{y}_1 + l\dot{\varphi}_2\cos\varphi_2$$

$$\ddot{x}_2 = \ddot{x}_1 - l\ddot{\varphi}_2\sin\varphi_2 - l\dot{\varphi}_2^2\cos\varphi_2$$

$$\ddot{y}_2 = \ddot{y}_1 + l\ddot{\varphi}_2\cos\varphi_2 - l\dot{\varphi}_2^2\sin\varphi_2$$

动力学方程

$$m_1\ddot{x}_1 = -F_{N1} + m_1 g + F_{1x} = 0$$
$$m_1\ddot{y}_1 = -ky_1 - F_{1y}$$
$$J_1\ddot{\varphi}_1 = M_1 = 0$$
$$m_2\ddot{x}_2 = -F_{2x} + m_2 g$$
$$m_2\ddot{y}_2 = F_{2y}$$
$$\frac{1}{3}m_2 l^2\ddot{\varphi}_2 = -F_{2y}l\cos\varphi_2 - F_{2x}l\sin\varphi_2$$
$$\ddot{x}_1 \equiv 0 \qquad \ddot{\varphi}_1 \equiv 0$$
$$\ddot{x}_2 = \cancel{\ddot{x}_1} - l\ddot{\varphi}_2\sin\varphi_2 - l\dot{\varphi}_2^2\cos\varphi_2$$
$$\ddot{y}_2 = \ddot{y}_1 + l\ddot{\varphi}_2\cos\varphi_2 - l\dot{\varphi}_2^2\sin\varphi_2$$

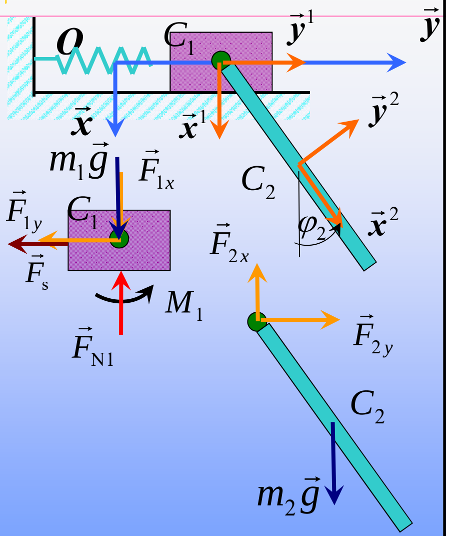


$$F_{1x} = F_{2x} \qquad F_{1y} = F_{2y}$$

未知量数(12)=方程数(12)

刚体动力学/刚体的平面运动/一般方法/解

$$m_1\ddot{y}_1 = -ky_1 - F_{2y}$$
$$m_2\ddot{x}_2 = -F_{2x} + m_2 g$$
$$m_2\ddot{y}_2 = F_{2y}$$
$$\frac{1}{3}m_2 l^2\ddot{\varphi}_2 = -F_{2y}l\cos\varphi_2 - F_{2x}l\sin\varphi_2$$
$$\ddot{x}_2 = -l\ddot{\varphi}_2\sin\varphi_2 - l\dot{\varphi}_2^2\cos\varphi_2$$
$$\ddot{y}_2 = \ddot{y}_1 + l\ddot{\varphi}_2\cos\varphi_2 - l\dot{\varphi}_2^2\sin\varphi_2$$

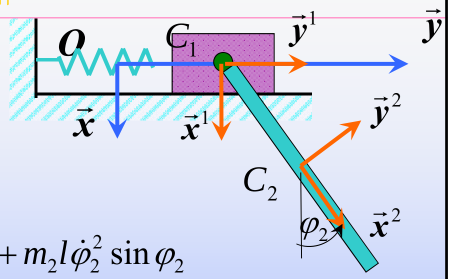


变量 y_1 x_2 y_2 φ_2 F_{2x} F_{2y}

方程个数=变量个数　　方程封闭

消去理想约束力方程可化简

两个变量的封闭方程组　　y_1 φ_2



$$(m_1+m_2)\ddot{y}_1+m_2l\ddot{\varphi}_2\cos\varphi_2=-ky_1+m_2l\dot{\varphi}_2^2\sin\varphi_2$$

$$\ddot{y}_1\cos\varphi_2+\frac{4}{3}l\ddot{\varphi}_2=-g\sin\varphi_2$$

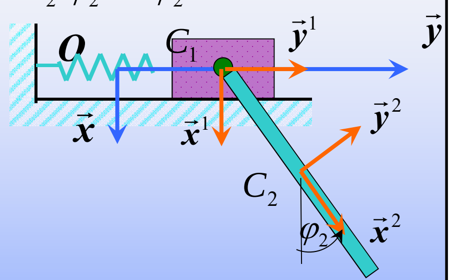
变量的个数=系统的自由度数　方程封闭

变量　y_1　φ_2　方程不含未知的理想约束力

讨论

$$(m_1+m_2)\ddot{y}_1+m_2l\ddot{\varphi}_2\cos\varphi_2=-ky_1+m_2l\dot{\varphi}_2^2\sin\varphi_2$$

$$\ddot{y}_1\cos\varphi_2+\frac{4}{3}l\ddot{\varphi}_2=-g\sin\varphi_2$$



系统位形坐标

$\boldsymbol{q}_1=(x_1\quad y_1\quad \varphi_1)^{\mathrm{T}}$　$\boldsymbol{q}_2=(x_2\quad y_2\quad \varphi_2)^{\mathrm{T}}$

系统有**4**个约束方程

变量　y_1　φ_2　是系统的独立变量

求解正动力学问题的另一个途径

主动力 $\xrightarrow{\text{动力学}}$ 系统的独立变量的变化 $\xrightarrow{\text{运动学}}$ 系统的非独立变量的变化

求未知约束力?

处理动力学问题的一般方法小结

- 动力学问题的求解规模与系统刚体的个数有关
  - 刚体的个数为N，系统的位形坐标为$n=3N$，动力学方程的个数也为n
- 对于存在约束的系统，动力学方程中将出现未知的理想约束力
  - 如果它们个数为s。对于动力学正问题，需要补充s个独立的加速度约束关系式
- 通过消去理想约束力，动力学方程可缩并为$\delta=3N-s$个方程
  - 变量为系统的独立坐标