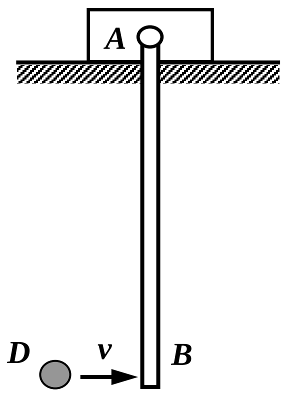


1．如图所示，滑块与杆 *AB* 铰接，静止放在光滑的水平面上。小球 *D* 以垂直于杆的速度 *v* 与杆 *AB* 的端点 *B* 发生碰撞。恢复因数为 $e = 0.5$。 滑块与杆 *AB* 的质量均为 *m*，小球 *D* 的质量为 2*m*。

求

（1）　碰撞后滑块 *A* 的速度和杆 *AB* 的角速度。

（2）　A 处的约束冲量

解：

$$m\left(v_{1\tau}-0\right)=I_1 \quad (1)$$

$$m\left(v_{2\tau}-0\right)=I_2-I_1 \quad (2)$$

$$\frac{1}{12}ml^2\left(\omega_{2\tau}-0\right)=\frac{l}{2}\left(I_2+I_1\right) \quad (3)$$

$$2m\left(v_{3\tau}-\left(-v\right)\right)=I_2 \quad (4)$$

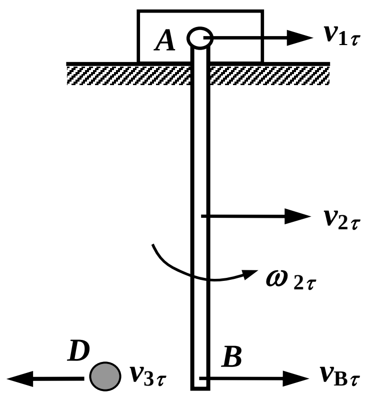
$$\frac{v_{B\tau}-(-v_{3\tau})}{v}=e=\frac{1}{2} \quad (5)$$

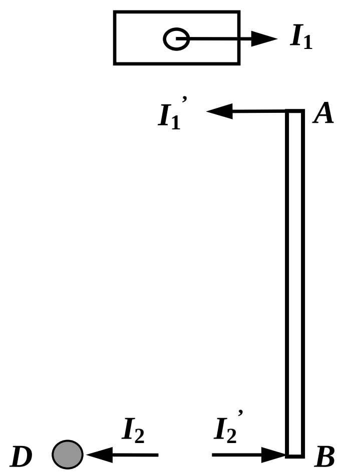
$$v_{2\tau}=v_{1\tau}+\frac{l}{2}\omega_{2\tau} \quad (6)$$

$$v_{B\tau}=v_{1\tau}+l\omega_{2\tau} \quad (7)$$

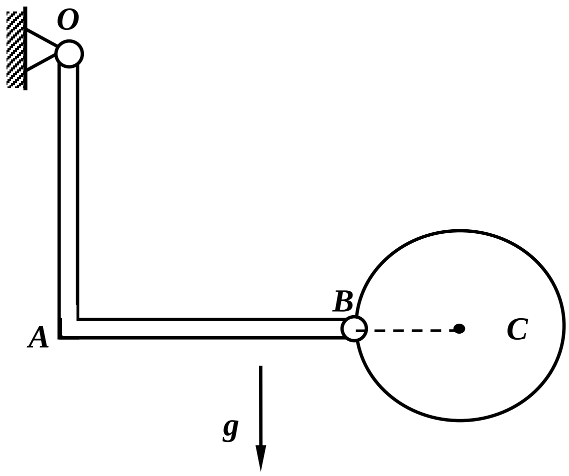
解得 $v_{1\tau}=-\dfrac{6}{37}v$， $\omega_{2\tau}=\dfrac{54}{37}\cdot\dfrac{v}{l}$

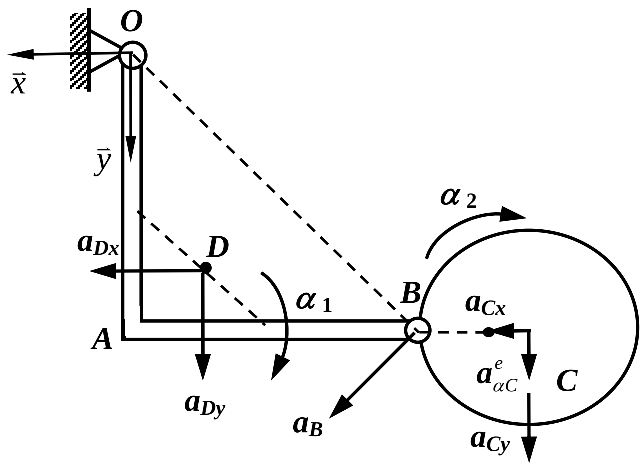
$$I_1=m\left(v_{1\tau}-0\right)=-\frac{6}{37}mv$$





2．如图所示，半径为 r 的圆盘与匀质折杆 OAB 在 B 处铰接，$\overline{OA}=\overline{AB}=2r$ 。设圆盘的质量为 m，折杆 OAB 的质量为 $2m$，图示位置 AB 水平，BC 水平。用达朗贝尔原理求系统在图示位置无初速开始运动时折杆 OAB 的角加速度和 B 端作用于圆盘的约束力。





$$a_{Dx}=\frac{3}{4}l\alpha_1=\frac{3}{2}r\alpha_1,\quad a_{Dy}=\frac{1}{4}l\alpha_1=\frac{1}{2}r\alpha_1$$

$$\boldsymbol{a}_{CX}+\boldsymbol{a}_{CY}=\boldsymbol{a}_B+\boldsymbol{a}^e_{\alpha C}\quad,\qquad \boldsymbol{a}^e_{\alpha C}=r\alpha_2\quad,$$

$$\boldsymbol{a}_B=2r\sqrt{2}\,\alpha_1$$

得到

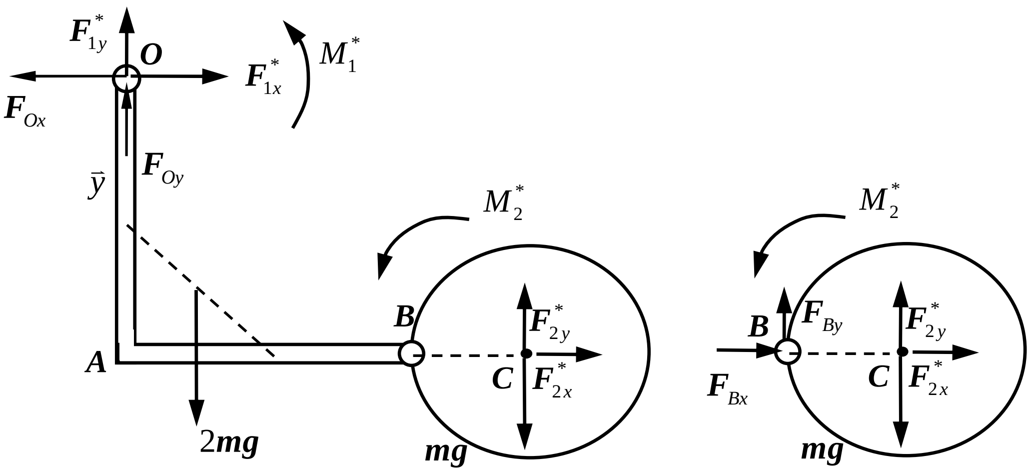
$$a_{CX}=2r\alpha_1,\quad a_{CY}=2r\alpha_1+r\alpha_2$$

$$F^*_{1x}=2ma_{Dx}=3mr\alpha_1,\quad F^*_{1y}=2ma_{Dy}=mr\alpha_1$$

$$F^*_{2x}=ma_{Cx}=2mr\alpha_1,\quad F^*_{2y}=m\left(2r\alpha_1+r\alpha_2\right)$$

$$J_O=\frac{ml^2}{3}+\frac{ml^2}{12}+m\left[\left(\frac{l}{2}\right)^2+l^2\right]=\frac{5ml^2}{12}+\frac{5ml^2}{4}=\frac{20ml^2}{12}=\frac{5ml^2}{3}=\frac{20}{3}mr^2$$

$$M^*_1=J_O\alpha_1=\frac{20}{3}mr^2\alpha_1,\ M^*_2=J_C\alpha_2=\frac{1}{2}mr^2\alpha_2$$



取系统为对象，对 O 点取矩

$$M_1^* + M_2^* + 2r\boldsymbol{F}_{2x}^* + 3r\boldsymbol{F}_{2y}^* - 2mg \cdot \frac{r}{2} - mg \cdot 3r = 0$$

$$\frac{20}{3}mr^2\alpha_1 + \frac{1}{2}mr^2\alpha_2 + 2r \cdot 2mr\alpha_1 + 3mr\left(2r\alpha_1 + r\alpha_2\right) - 4mgr = 0$$

即

$$\frac{50}{3}mr^2\alpha_1 + \frac{7}{2}mr^2\alpha_2 - 4mgr = 0 \quad （1）$$

取圆盘为对象，对 B 点取矩

$$M_2^* + r\boldsymbol{F}_{2y}^* - mgr = 0$$

$$\frac{1}{2}mr^2\alpha_2 + mr\left(2r\alpha_1 + r\alpha_2\right) - mgr = 0$$

即

$$2mr^2\alpha_1 + \frac{3}{2}mr^2\alpha_2 - mgr = 0 \quad （2）$$

得到： $\alpha_2 = \dfrac{2g}{3r} - \dfrac{4}{3}\alpha_1$ （3）

将（3）代入（1），解得：

$\alpha_1 = \dfrac{5g}{36r}$， $\alpha_2 = \dfrac{13g}{27r}$

取圆盘为对象

$$F_{Bx} = -F_{2x}^* = -2mr\alpha_1 = -\frac{5}{18}mg$$

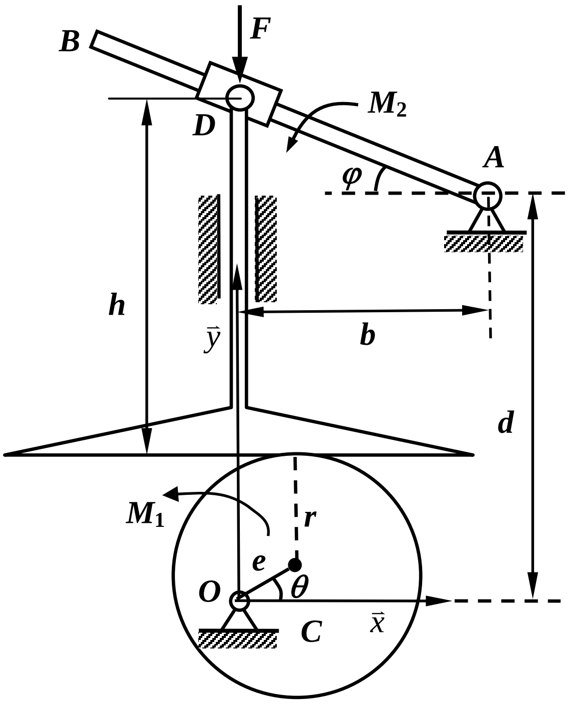
$$F_{2y}^* = m\left(2r\alpha_1 + r\alpha_2\right) = m\left(\frac{5}{18}g + \frac{13}{27}g\right) = \frac{41}{54}mg$$

$$F_{By} = mg - F_{2y}^* = mg - \frac{41}{54}mg = \frac{13}{54}mg$$

3．凸轮机构在图示位置处于平衡。设凸轮的半径为 r，轮心偏离转轴的距离为 $e=r/2$。铰点 A 到 y 轴的距离为 $b=\sqrt{3}r$，铰点 A 到 x 轴的距离为 $d=3r$，挺杆的高度为 $h=\dfrac{11}{4}r$。图示位置 $\theta=30^{\circ}$，$\varphi=30^{\circ}$。设各构件的重量和摩擦力不计，用虚位移原理分析

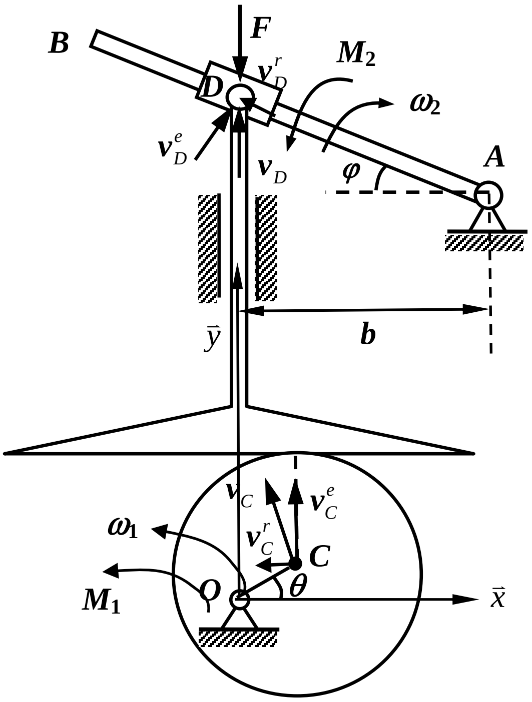
（1）系统平衡时 M_1，M_2 与 F 之间的关系

（2）铰点 O 垂直方向的约束力



解[1]：（1）$v_D=v_C^e=\cos\theta v_C=\cos\theta e\omega_1$　(1)

$$v_D^e=\cos\varphi v_D=\frac{b}{\cos\varphi}\omega_2$$



得到

$$\frac{b}{\cos^2\varphi}\omega_2=\cos\theta e\omega_1 \quad (2)$$

(1)和(2)两边乘以 dt，得到

$$\mathrm{d}y_D=\cos\theta e\mathrm{d}\theta$$

$$b\mathrm{d}\varphi=\cos\theta\cos^2\varphi e\mathrm{d}\theta$$

对于定常约束，有

$$\delta y_D=\cos\theta e\delta\theta \qquad (3)$$

$$\delta\varphi=\frac{e}{b}\cos\theta\cos^2\varphi\delta\theta \qquad (4)$$

由虚位移原理

$M_1\delta\theta-F\delta y_D-M_2\delta\varphi=0$，

将(3)和(4)代入：

$\left(M_1-F\cos\theta e-M_2\dfrac{e}{b}\cos\theta\cos^2\varphi\right)\delta\theta=0$ 将 $\theta=\varphi=30^{\circ}$ 代入：

$$M_1-\frac{\sqrt{3}}{4}rF-\frac{3}{16}M_2=0$$

（2）释放 O 点 Y 方向的约束

为两个自由度问题，广义坐标为 θ,φ

令 $\delta\varphi=0$，则有 $\delta y_D=0$

S 为凸轮的速度顺心

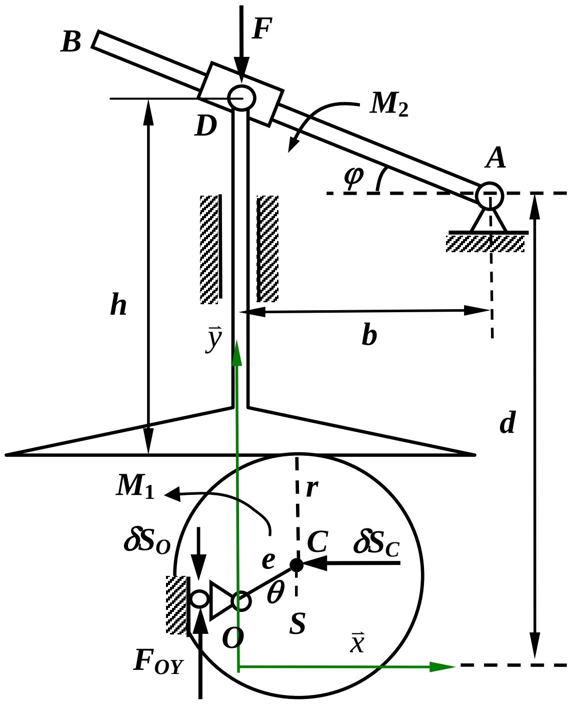
$\delta S_O=\delta\theta e\cos\theta$　(5)

由虚位移原理　$M_1\delta\theta-F_{OY}\delta S_O=0$

将(5)代入：

$\left(M_1-F_{OY}e\cos\theta\right)\delta\theta=0$，

得到　$F_{OY}=\dfrac{M_1}{e\cos\theta}=\dfrac{4\sqrt{3}}{3}\dfrac{M_1}{r}$



或者取广义坐标为 y_O,θ，令 $\delta\theta=0$，根据关系式　$y_D=y_O+e\sin\theta+r+h$

$\delta y_D=\delta y_O$，　又根据关系式　$y_D=y_O+e\sin\theta+r+h=d+b\mathrm{tg}\varphi$

$\delta y_O=b\sec^2\varphi\delta\varphi$，　即　$\delta\varphi=\dfrac{\cos^2\varphi}{b}\delta y_O$

由虚位移原理　$F_{OY}\delta y_O-F\delta y_D-M_2\delta\varphi=0$

$$F_{OY}\delta y_O-F\delta y_O-M_2\frac{\cos^2\varphi}{b}\delta y_O=0$$

$$F_{OY}=F+M_2\frac{\cos^2\varphi}{b}=F+\frac{\sqrt{3}}{4}\cdot\frac{M_2}{r}$$

（由于 $M_1-\dfrac{\sqrt{3}}{4}rF-\dfrac{3}{16}M_2=0$，　$F+\dfrac{\sqrt{3}}{4}\cdot\dfrac{M}{r}=\dfrac{4\sqrt{3}}{3}\dfrac{M_1}{r}$），说明取 θ,φ 和 y_O,θ 得到的结果相同。前面取法简单。

解[2]:（1）根据几何关系，　$y_D=h+r+e\sin\theta=d+b\,\mathrm{tg}\varphi$

两边求变分：　$\delta y_D=e\cos\theta\delta\theta=b\sec^2\varphi\delta\varphi$

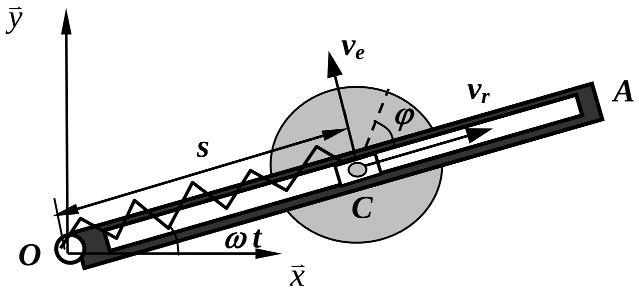
由虚位移原理　$M_1\delta\theta-F\delta y_D-M_2\delta\varphi=0$

代入得到 $M_1\delta\theta - Fe\cos\theta\delta\theta - M_2\dfrac{e}{b}\cos\theta\cos^2\varphi\delta\theta = 0$

将 $\theta = 30^\circ$，$\varphi = 30^\circ$ 代入，化简得到：

$M_1 - \dfrac{\sqrt{3}}{4}rF - \dfrac{3}{16}M_2 = 0$（2）同前

4．如图所示，<u>在水平面内</u>，杆 O*A* 以匀角速度ω绕 O 点转动。滑块可沿 O*A* 内的滑槽无摩擦地滑动，滑块与圆盘在圆盘中心 C 处铰接。设 s 为圆盘中心 C 相对杆 O*A* 的位移，φ 为圆盘相对杆 O*A* 的转角。杆 O*A* 和圆盘的质量均为 *m*，滑块的质量不计。杆 O*A* 关于 *OZ* 的转动惯量为 $m\rho^2$。圆盘中心 C 与 O 点通过线弹簧连接，弹簧刚度为 *k*，原长为 s_0。以φ和 *s* 为独立坐标，写出系统的拉格朗日函数和初积分。



解：

$v_r = \dot{s}$， $v_e = s\omega$， $\omega_C = \omega + \dot{\varphi}$

$$\begin{aligned}T &= \frac{1}{2}m\rho^2\omega^2 + \frac{1}{2}m\left(v_r^{\ 2} + v_e^{\ 2}\right) + \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}mr^2\left(\omega + \dot{\varphi}\right)^2\\ &= \frac{1}{2}m\rho^2\omega^2 + \frac{1}{2}m\left(\dot{s}^2 + s^2\omega^2\right) + \frac{1}{4}mr^2\left(\omega + \dot{\varphi}\right)^2\\ &= T_0 + T_1 + T_2\end{aligned}$$

其中

$$T_0 = \frac{1}{2}m\rho^2\omega^2 + \frac{1}{2}ms^2\omega^2 + \frac{1}{4}mr^2\omega^2$$

$$T_1 = \frac{1}{2}mr^2\omega\dot{\varphi}, \quad T_2 = \frac{1}{2}m\dot{s}^2 + \frac{1}{4}mr^2\dot{\varphi}^2$$

$$V = \frac{1}{2}k\left(s - s_0\right)^2$$

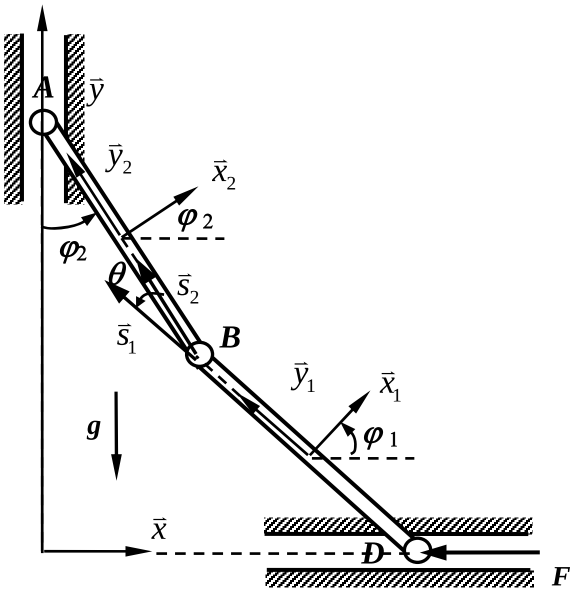
$$\begin{aligned}L = T - V &= \frac{1}{2}m\rho^2\omega^2 + \frac{1}{2}ms^2\omega^2 + \frac{1}{4}mr^2\omega^2 + \frac{1}{2}mr^2\omega\dot{\varphi}\\ &\quad + \frac{1}{2}m\dot{s}^2 + \frac{1}{4}mr^2\dot{\varphi}^2 - \frac{1}{2}k\left(s - s_0\right)^2\end{aligned}$$

因为 L 不显含 φ，得到循环积分式：

$$\frac{\partial L}{\partial\dot{\varphi}} = \frac{1}{2}mr^2\omega + \frac{1}{2}mr^2\dot{\varphi} = C_1$$

因为 L 不显含 t，且是非定常约束，得到广义能量积分式：

$$\begin{aligned}&T_2 - T_0 + V\\ &= \frac{1}{2}m\dot{s}^2 + \frac{1}{4}mr^2\dot{\varphi}^2 - \frac{1}{2}m\rho^2\omega^2 - \frac{1}{2}ms^2\omega^2 - \frac{1}{4}mr^2\omega^2 + \frac{1}{2}k\left(s - s_0\right)^2 = C_2\end{aligned}$$



5. 如图动力学系统由长均为 $2l$ 的杆 AB (B_2)和杆 BD (B_1)组成，杆 AB 和杆 BD 在 B 处铰接，销子 A 和销子 D 分别可以在铅垂滑槽和水平滑槽内滑动。水平力 F 作用于 D 点。不计摩擦。设杆 AB 和杆 BD 的质量均为 m。B 处在两杆间有一卷簧，弹簧系数为 k，B_1 相对 B_2 的转角为 θ。当两杆在一直线时，卷簧无力偶。以系统位形坐标写出封闭的带拉格朗日乘子的第一类拉格朗日方程。

解：系统位形坐标为 $\boldsymbol{q}=\begin{bmatrix}x_1 & y_1 & \varphi_1 & x_2 & y_2 & \varphi_2\end{bmatrix}^T$

约束方程为

$$\boldsymbol{\Phi}=\begin{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 0\end{bmatrix}\left(\begin{bmatrix}x_2\\y_2\end{bmatrix}+\boldsymbol{A}_2\begin{bmatrix}0\\l\end{bmatrix}\right)\\ \begin{bmatrix}0 & 1\end{bmatrix}\left(\begin{bmatrix}x_1\\y_1\end{bmatrix}+\boldsymbol{A}_1\begin{bmatrix}0\\-l\end{bmatrix}\right)\\ \begin{bmatrix}x_1\\y_1\end{bmatrix}+\boldsymbol{A}_1\begin{bmatrix}0\\l\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}x_2\\y_2\end{bmatrix}-\boldsymbol{A}_2\begin{bmatrix}0\\-l\end{bmatrix}\end{bmatrix}=\boldsymbol{0}$$

$$\boldsymbol{\Phi}=\begin{bmatrix}x_2-l\sin\varphi_2\\ y_1-l\cos\varphi_1\\ x_1-x_2-l\sin\varphi_1-l\sin\varphi_2\\ y_1-y_2+l\cos\varphi_1+l\cos\varphi_2\end{bmatrix}=\boldsymbol{0}$$

加速度约束方程为 $\boldsymbol{\Phi}_q\ddot{\boldsymbol{q}}=\boldsymbol{\gamma}$， 其中

$$\boldsymbol{\Phi}_q=\begin{bmatrix}0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -l\cos\varphi_2\\ 0 & 1 & l\sin\varphi_1 & 0 & 0 & 0\\ 1 & 0 & -l\cos\varphi_1 & -1 & 0 & -l\cos\varphi_2\\ 0 & 1 & -l\sin\varphi_1 & 0 & -1 & -l\sin\varphi_2\end{bmatrix},\quad \boldsymbol{\gamma}=\begin{bmatrix}-l\sin\varphi_2\dot{\varphi}_2^{\,2}\\ -l\cos\varphi_1\dot{\varphi}_1^{\,2}\\ -l\sin\varphi_1\dot{\varphi}_1^{\,2}-l\sin\varphi_2\dot{\varphi}_2^{\,2}\\ l\cos\varphi_1\dot{\varphi}_1^{\,2}+l\cos\varphi_2\dot{\varphi}_2^{\,2}\end{bmatrix}$$

带拉格朗日乘子的第一类拉格朗日方程为

$$\boldsymbol{Z}\ddot{\boldsymbol{q}}+\boldsymbol{\Phi}_q^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\lambda}=\hat{\boldsymbol{F}}^a$$

其中， $\boldsymbol{Z} = diag\left(m, m, \frac{1}{12}m(2l)^2, m, m, \frac{1}{12}m(2l)^2\right)$

$$\hat{\boldsymbol{F}}^a = \begin{bmatrix} -F & -mg & -Fl\cos\varphi_1 + M & 0 & -mg & -M \end{bmatrix}^{\mathrm{T}}$$

其中， $M = -k(\theta - \theta_0)$， $\theta = \varphi_1 - \varphi_2$， $\theta_0 = 0$

即

$$\hat{\boldsymbol{F}}^a = \begin{bmatrix} -F & -mg & -Fl\cos\varphi_1 - k(\varphi_1 - \varphi_2) & 0 & -mg & k(\varphi_1 - \varphi_2) \end{bmatrix}^{\mathrm{T}}$$

$$\boldsymbol{\lambda} = \begin{bmatrix} \lambda_1 & \lambda_2 & \lambda_3 & \lambda_4 \end{bmatrix}^{\mathrm{T}}$$

封闭的带拉格朗日乘子的第一类拉格朗日方程为

$$\begin{bmatrix} \boldsymbol{Z} & \boldsymbol{\Phi}_{\boldsymbol{q}}^{\mathrm{T}} \\ \boldsymbol{\Phi}_{\boldsymbol{q}} & \boldsymbol{0} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{\boldsymbol{q}} \\ \boldsymbol{\lambda} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \hat{\boldsymbol{F}}^a \\ \boldsymbol{\gamma} \end{bmatrix}$$