

第 11 章 稳恒磁场

§ 11.1 磁感应强度

一、基本磁现象

与电现象一样人类很早就发现并研究磁现象

公元前300多年我国就发现了磁石吸铁现象

春秋战国《吕氏春秋》记载：磁石召铁

东汉王充《论衡》描述：司南勺—最早的指南器具



第 11 章 稳恒磁场

§ 11.1 磁感应强度

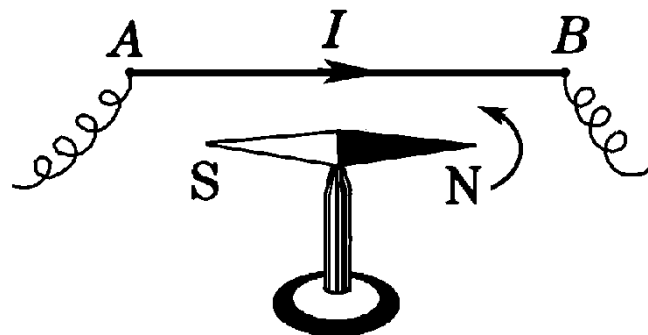
一、基本磁现象

电现象与磁现象密切相关！

奥斯特实验



• 1820年7月



划时代的日子载入史册。

《电磁学》 就此诞生！

二、磁场的描述（磁感应强度）

回顾电场的描述： $\vec{E}_p = \vec{F} / q$

根据运动电荷或载流导线或小磁针在磁场中受力情况来描述磁场。实验结论：

1. $\vec{v} = 0$ 则 $\vec{F} = 0$ ， $\vec{v} \neq 0$ 一般 $\vec{F} \neq 0$ ，

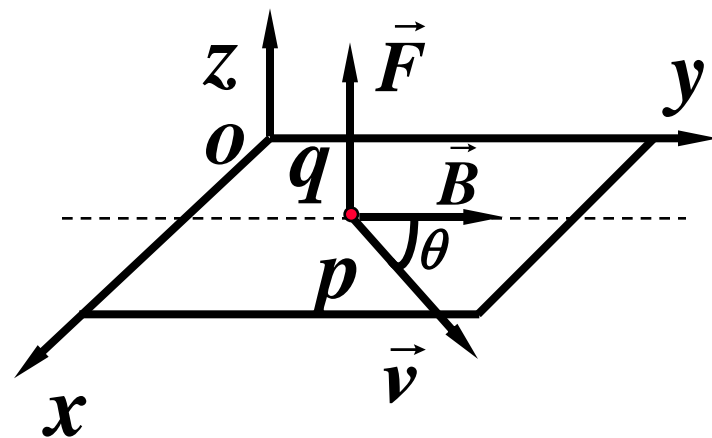
但（ p 点）沿某特定直线运动，则 $\vec{F} = 0$

规定 $\vec{B}_p \parallel$ 该直线（零力线）

2. $\vec{F} \perp \vec{v}$ ， $\vec{F} \perp \vec{B}$.

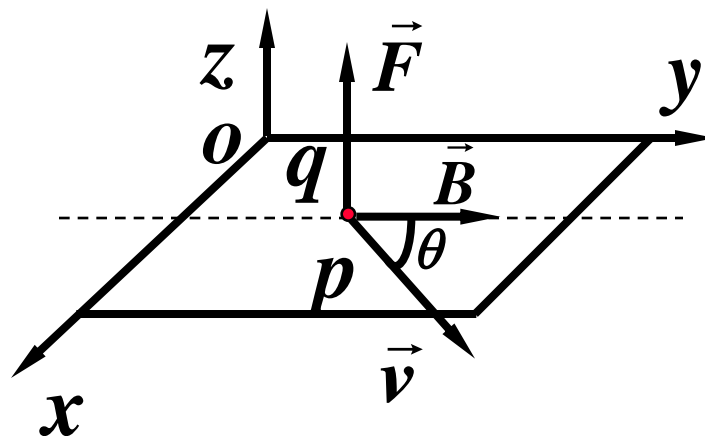
即 $\vec{F} \perp \vec{v}, \vec{B}$ 构成之平面。

$$q \rightarrow -q \Rightarrow \vec{F} \rightarrow -\vec{F}$$



3. 规定: $\vec{F} // q\vec{v} \times \vec{B}$

4. $|\vec{F}| \propto qv \sin \theta$



$\frac{|\vec{F}|}{qv \sin \theta}$ 与 q, v, θ 无关, 只与位置有关。

规定: $B = \frac{F}{qv \sin \theta}$

SI 中 B 之单位为特斯拉 (T)

$$1\text{T} = 1\text{N} / (\text{A} \cdot \text{m})$$

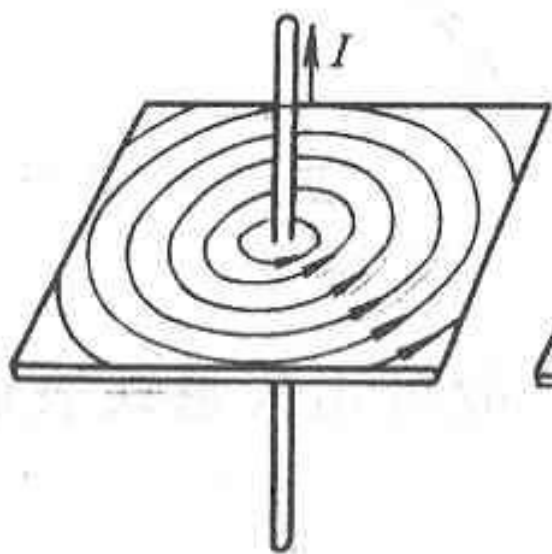
总结： \vec{B} 之大小为 $\frac{F}{qv \sin \theta}$

方向沿零力线，且使 $\vec{F} // q\vec{v} \times \vec{B}$

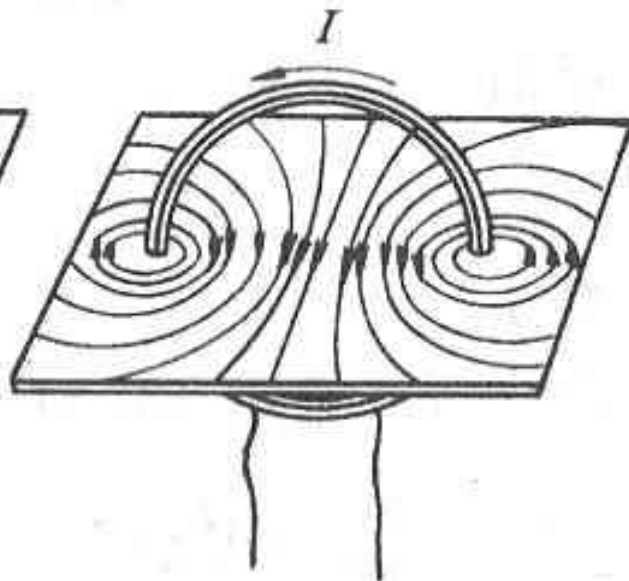
由于 $|q\vec{v} \times \vec{B}| = qvB \sin \theta = F$

故 $\vec{F} = q\vec{v} \times \vec{B}$ 洛伦兹磁力公式

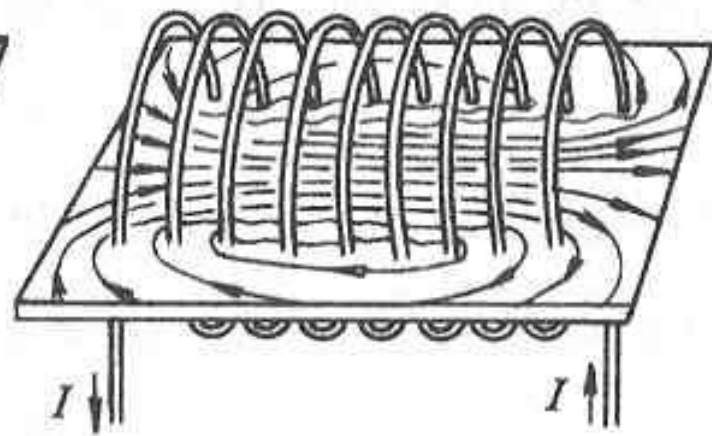
不同电流系统激发磁场的磁感应线



(a) 长直电流;



(b) 圆电流;

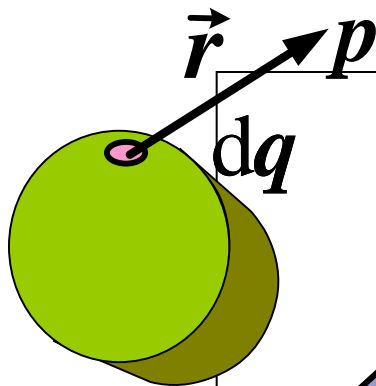


(c) 螺线管电流

§ 11.2 毕奥—萨伐尔定律

回顾求任意形状带电体产生的电场

$$\vec{E} = \int d\vec{E} = \int \frac{dq}{4\pi\epsilon_0 r^3} \vec{r}$$

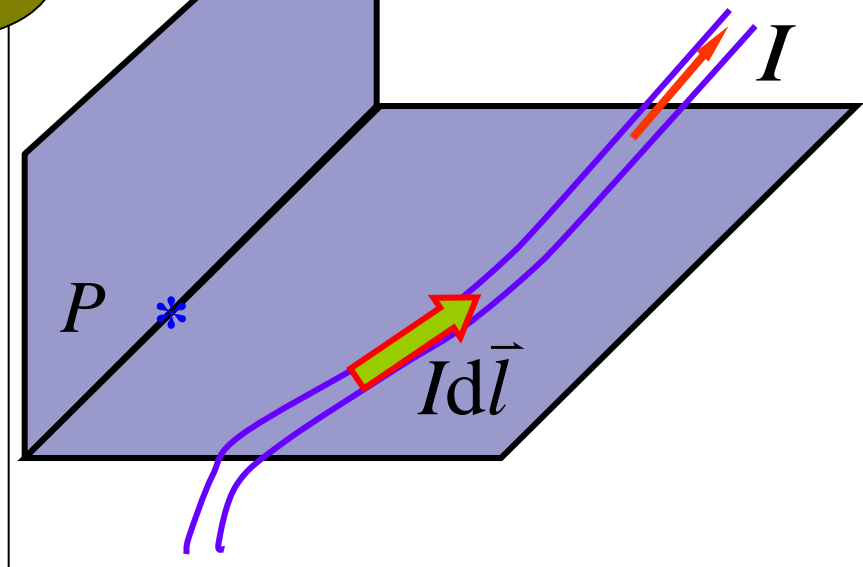


将导线分割:

电流元

$$dl \rightarrow d\vec{l} \rightarrow Id\vec{l}$$

$$\rightarrow d\vec{B} \rightarrow \vec{B} = \int d\vec{B}$$

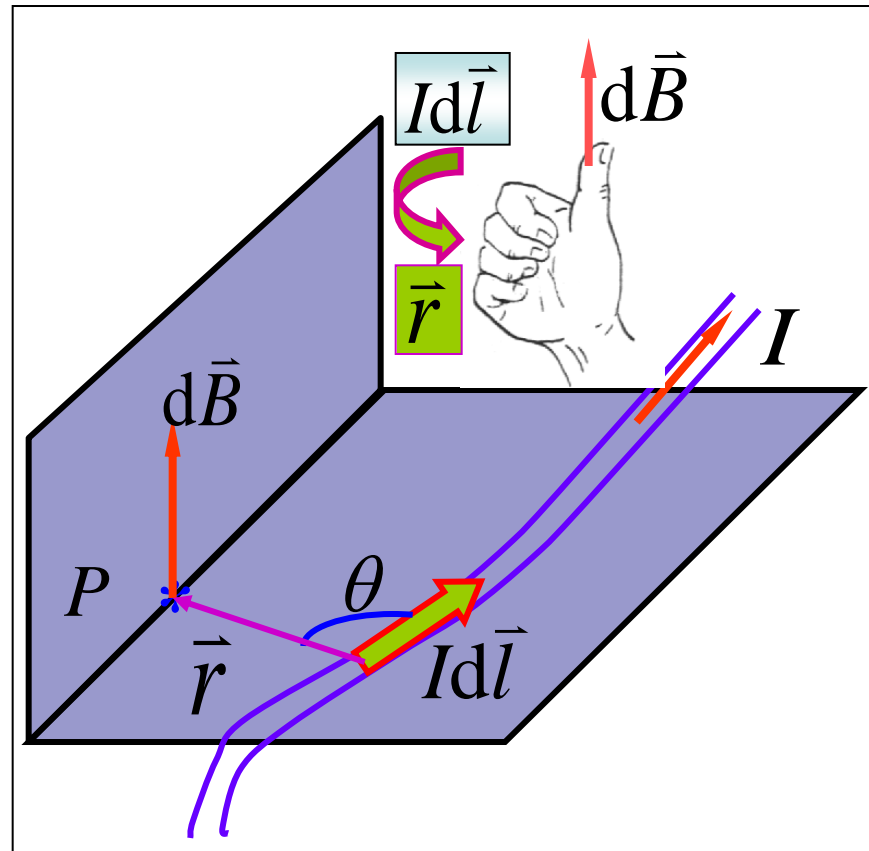


$$dB = k \frac{Idl \sin \theta}{r^2} \quad \text{方向} \quad d\vec{B} // d\vec{l} \times \vec{r}$$

$$\therefore \frac{|d\vec{l} \times \vec{r}|}{r} = dl \sin \theta$$

$$\Rightarrow d\vec{B} = k \frac{Id\vec{l} \times \vec{r}}{r^3}$$

$$= k \frac{Id\vec{l} \times \vec{e}_r}{r^2}$$



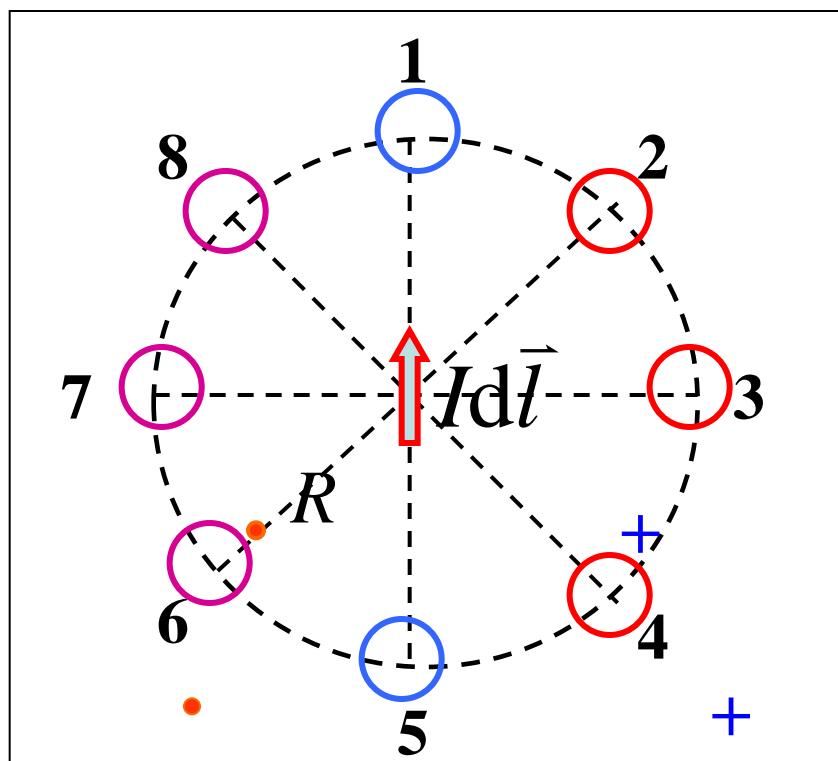
$$d\vec{B} = k \frac{Id\vec{l} \times \vec{e}_r}{r^2} = k \frac{Id\vec{l} \times \vec{r}}{r^3}$$

真空磁导率

SI 制中 $k = \frac{\mu_0}{4\pi}$

$$\mu_0 = 4\pi \times 10^{-7} \text{ T} \cdot \text{m/A}$$

判断下列各点磁感强度的方向和大小



1、5 点 : $dB = 0$

3、7 点 : $dB = \frac{\mu_0 Idl}{4\pi R^2}$

2、4、6、8 点 :

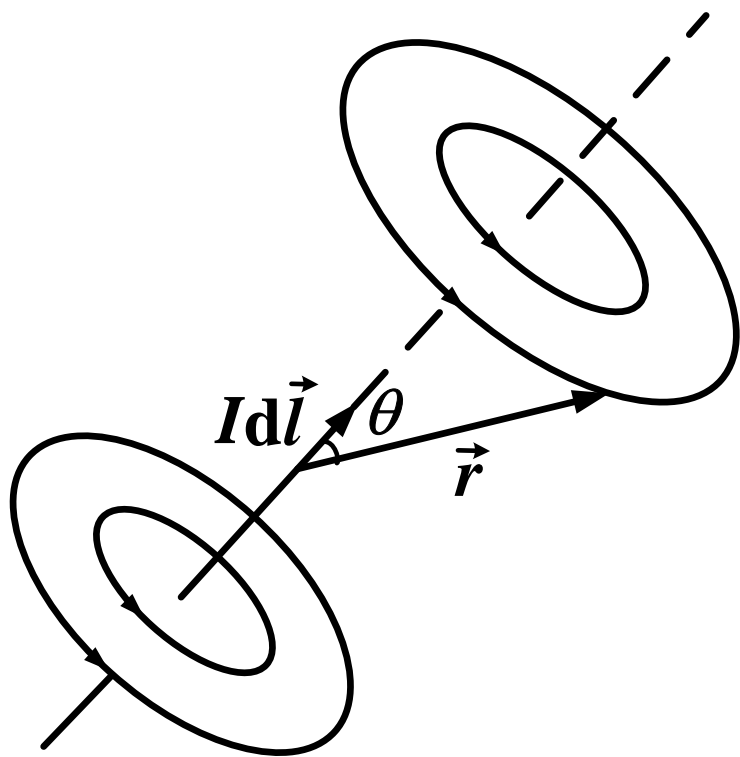
$$dB = \frac{\mu_0 Idl}{4\pi R^2} \sin 45^\circ$$

$$d\vec{B} = k \frac{Id\vec{l} \times \vec{e}_r}{r^2} = k \frac{Id\vec{l} \times \vec{r}}{r^3}$$

SI 制中 $k = \mu_0 / 4\pi$

真空磁导率

$$\mu_0 = 4\pi \times 10^{-7} \text{ T} \cdot \text{m/A}$$

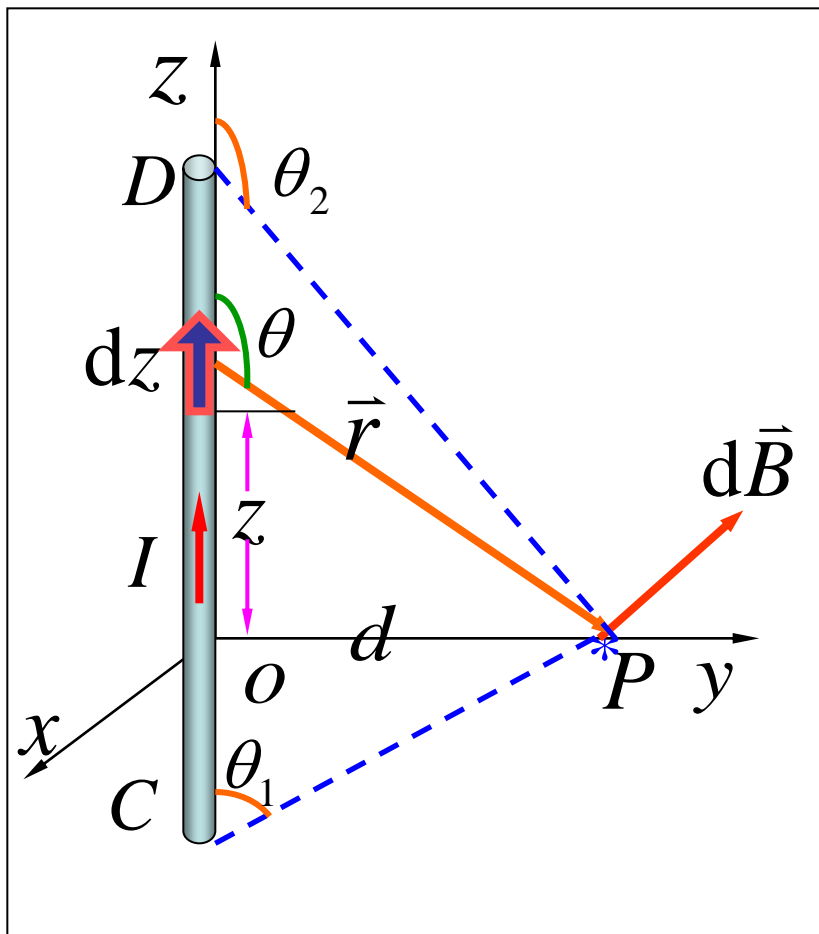


$Id\vec{l}$ 产生磁场之 \vec{B} 线

[例] 直电流的磁场。

解：

每个电流元产生磁场同方向

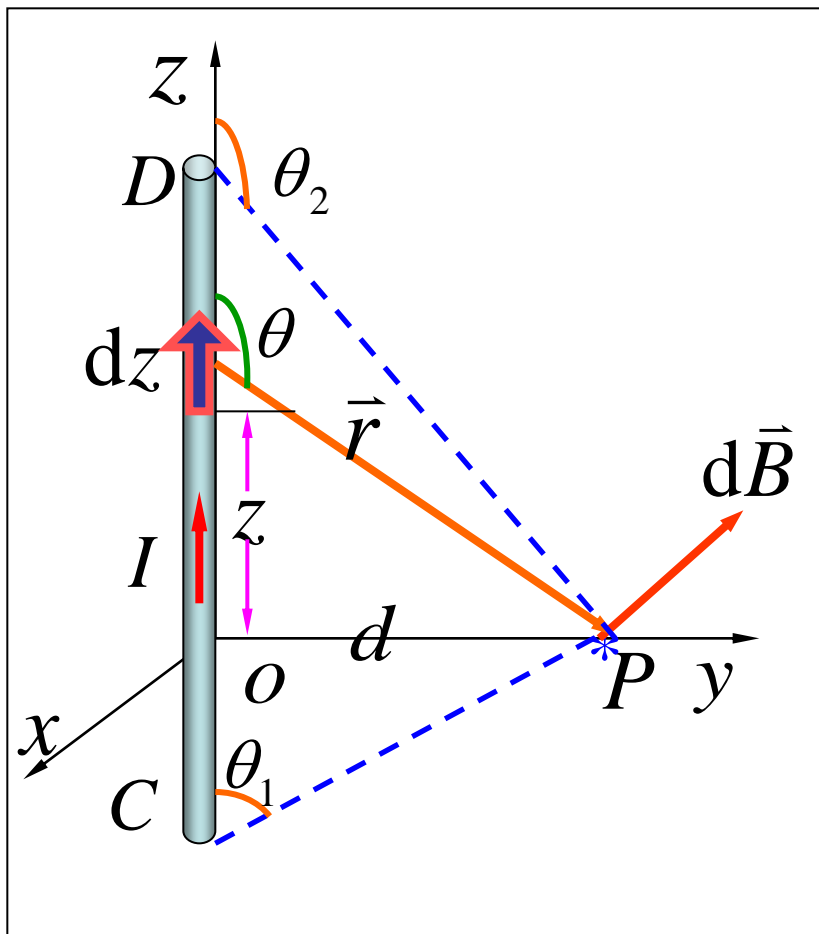


$$B = \int dB = \int \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{Idz \sin \theta}{r^2}$$

$$z = -d \cot \theta$$

$$dz = \frac{d}{\sin^2 \theta} d\theta$$

$$r = \frac{d}{\sin \theta}$$



$$B = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_{\theta_1}^{\theta_2} \frac{I \sin \theta}{d^2} \frac{dd\theta}{\sin^2 \theta}$$

$$= \frac{\mu_0 I}{4\pi d} \int_{\theta_1}^{\theta_2} \sin \theta d\theta$$

$$= \frac{\mu_0 I}{4\pi d} (\cos \theta_1 - \cos \theta_2)$$

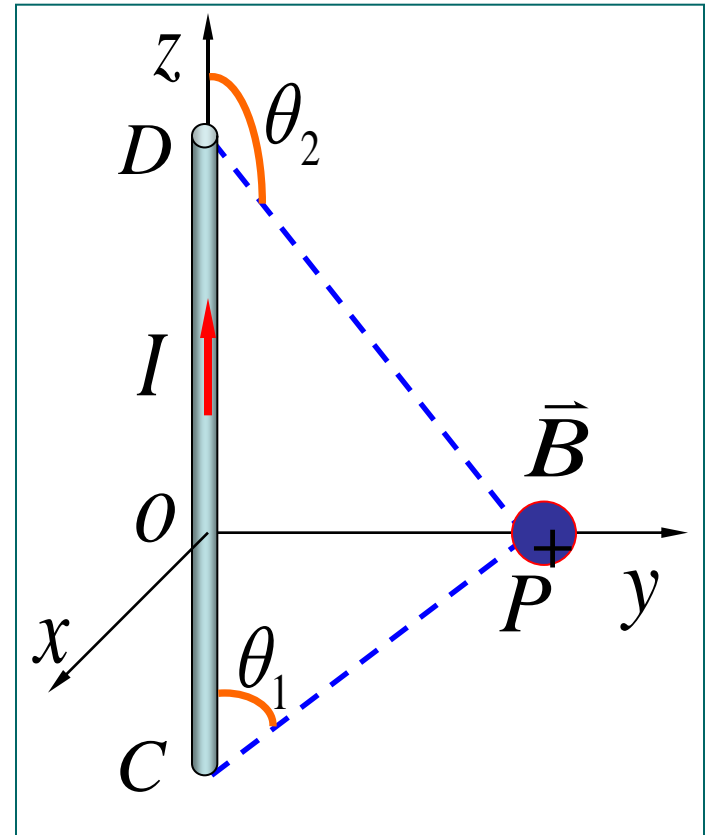
无限长载流长直导线的磁场。

$$B = \frac{\mu_0 I}{4\pi d} (\cos \theta_1 - \cos \theta_2)$$

$$\theta_1 \rightarrow 0$$

$$\theta_2 \rightarrow \pi$$

$$B = \frac{\mu_0 I}{2\pi d}$$



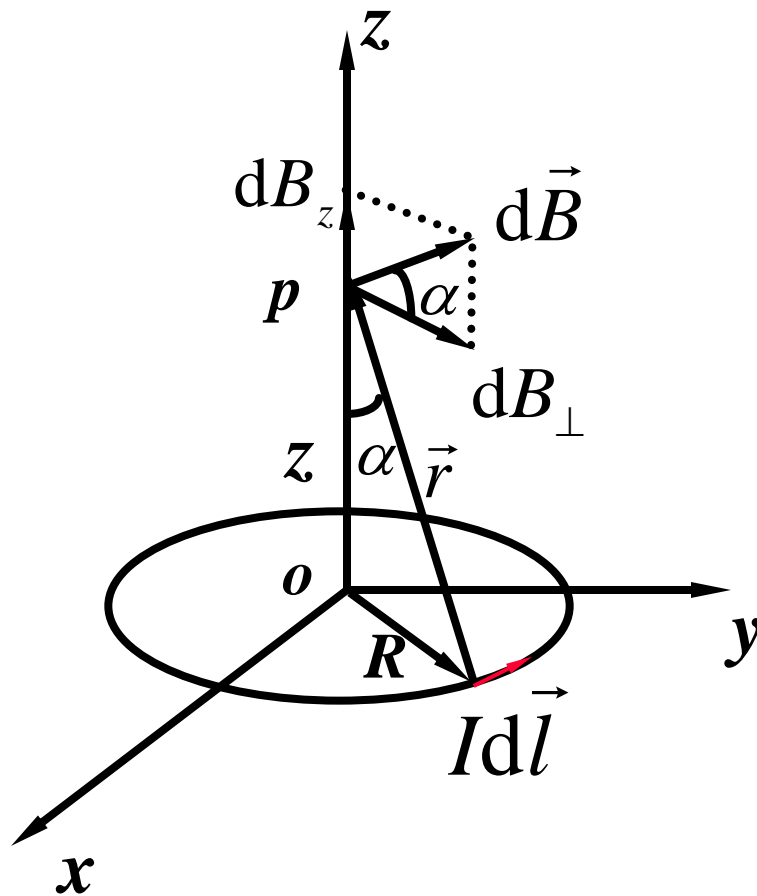
[例] 圆电流轴线上的磁场。

解：

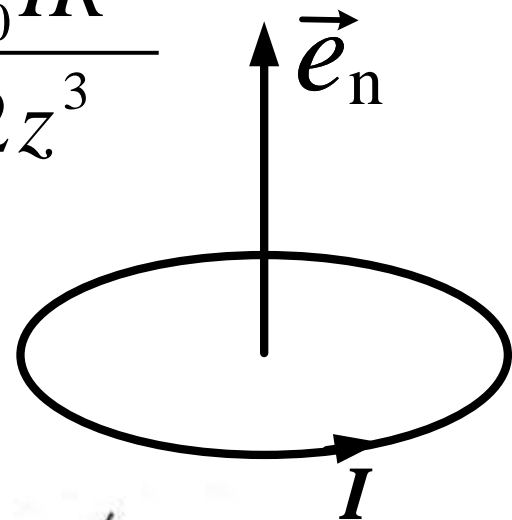
$$dB = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{Idl}{r^2} \sin 90^\circ$$

垂直分量抵消！

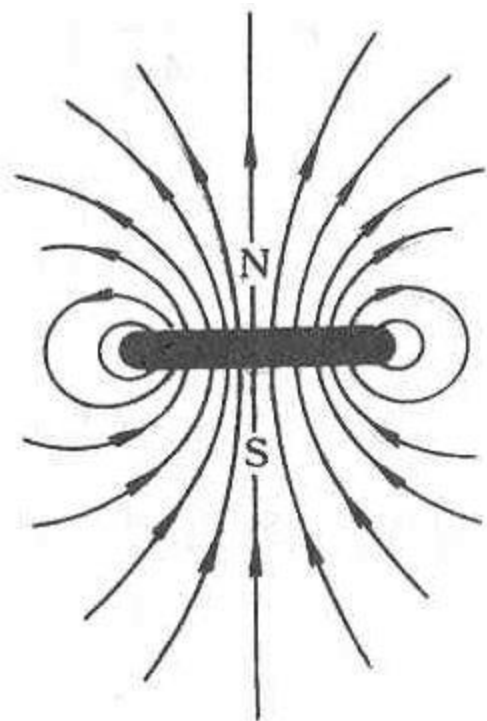
$$\begin{aligned} B &= \int dB_z \\ &= \frac{\mu_0 I}{4\pi} \int \frac{dl \sin \alpha}{r^2} \\ &= \frac{\mu_0 I}{4\pi r^2} \sin \alpha \int_0^{2\pi R} dl = \frac{\mu_0 IR^2}{2(R^2 + z^2)^{3/2}} \end{aligned}$$



$$B = \frac{\mu_0 I R^2}{2(R^2 + z^2)^{3/2}} \quad r \gg R \quad B \approx \frac{\mu_0 I R^2}{2z^3}$$

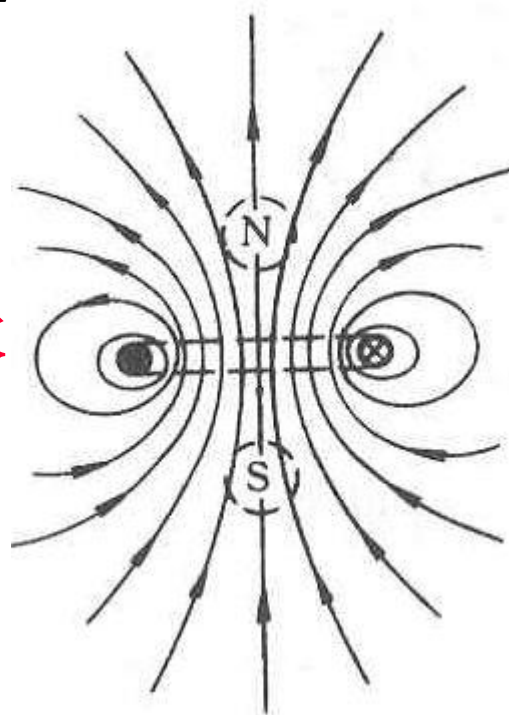


定义磁矩: $\vec{m} = NIS\vec{e}_n$ $\vec{B} = \frac{\mu_0 \vec{m}}{2\pi z^3}$

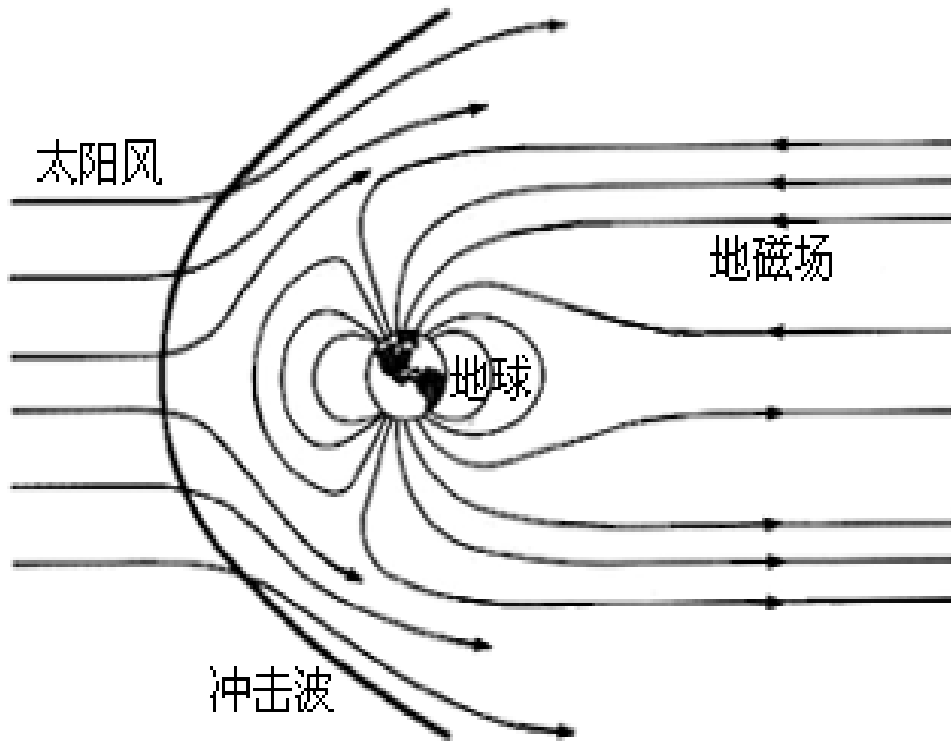
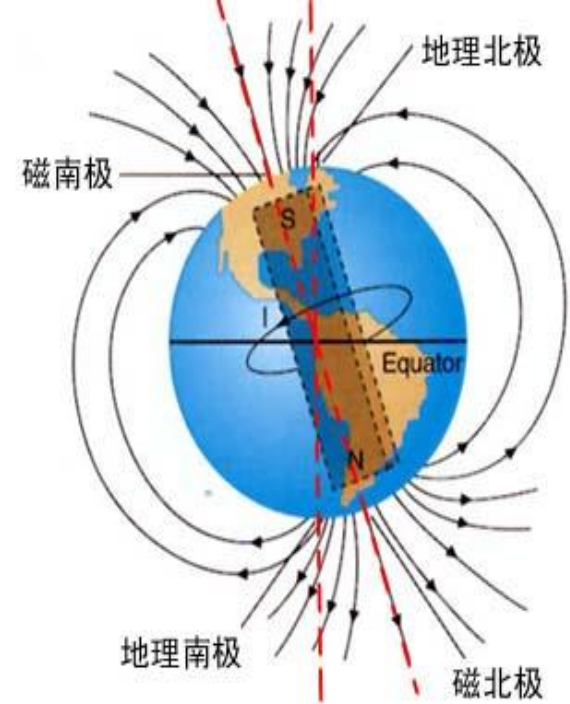


圆片状永磁体

磁偶极子
(由两异性磁极
构成的系统)



地球的磁场



受“太阳风”的影响，迎阳一面的地磁场被“挤压”，而背阳一面的地磁场形成一个长长的“磁尾”。

[例] 螺线管产生的磁场。

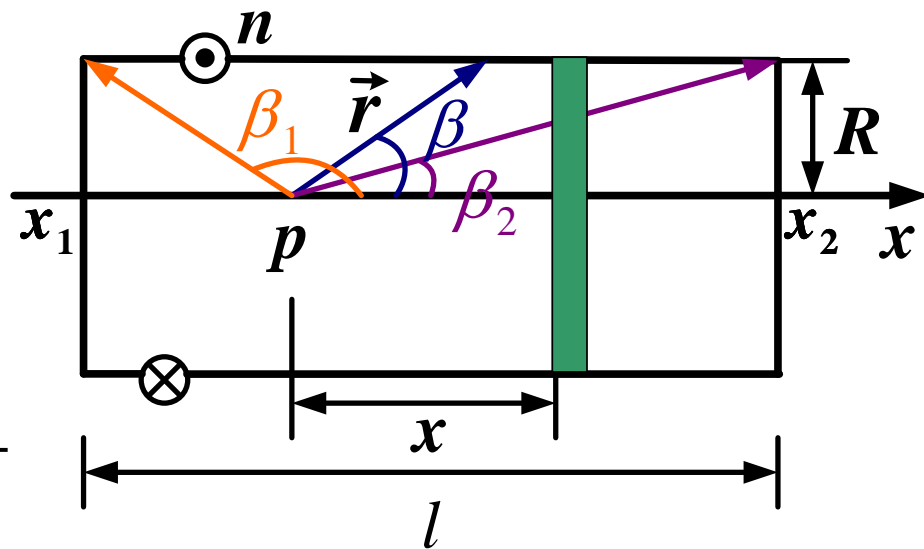
解： 一个薄片相当于一个圆电流

$$B = \frac{\mu_0 IR^2}{2(R^2 + z^2)^{3/2}}$$

$$dB_p = \frac{\mu_0 R^2 n I dx}{2(R^2 + x^2)^{3/2}}$$

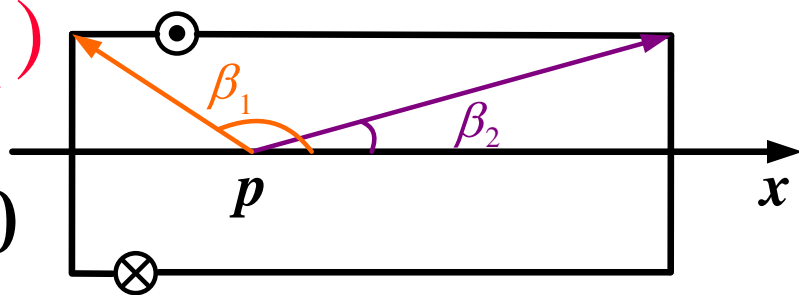
$$B_p = \int_{x_1}^{x_2} \frac{\mu_0 R^2 n I dx}{2(R^2 + x^2)^{3/2}}$$

$$= \frac{\mu_0 n I}{2} (\cos \beta_2 - \cos \beta_1) \quad \text{利用 } x = R \cot \beta$$



$$B = \frac{\mu_0 n I}{2} (\cos \beta_2 - \cos \beta_1)$$

$$l \gg R \quad \beta_1 \rightarrow \pi \quad \beta_2 \rightarrow 0$$



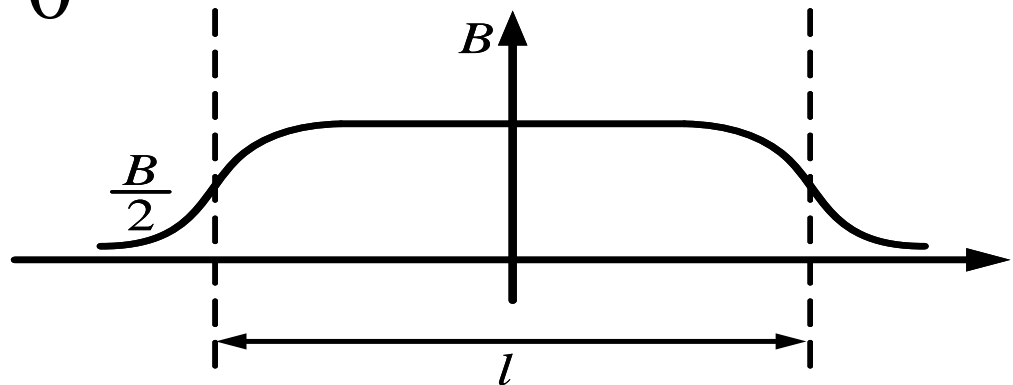
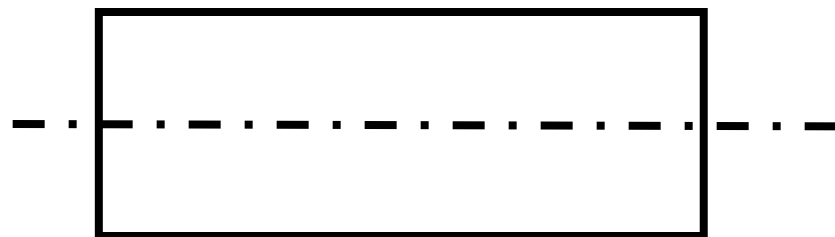
$$B = \mu_0 n I$$

相当于无限长螺线管

左端点 $\beta_1 = \frac{\pi}{2} \quad \beta_2 \rightarrow 0$

$$B = \frac{1}{2} \mu_0 n I$$

对应于半无限长螺线管！



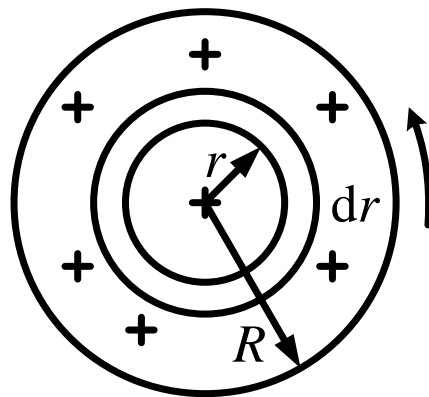
[例] 圆盘半径 R , 带电 q , 以 ω 旋转,
求圆心处 B 与 \vec{m} 。

解: 一个圆环相当于一个圆电流

$$\begin{aligned} dI &= \frac{\omega}{2\pi} \sigma 2\pi r dr \\ &= \omega \sigma r dr \end{aligned}$$

$$dB = \frac{\mu_0 dI}{2r}$$

$$B = \int dB = \frac{\mu_0 \omega \sigma}{2} \int_0^R dr = \frac{1}{2} \mu_0 \sigma \omega R$$



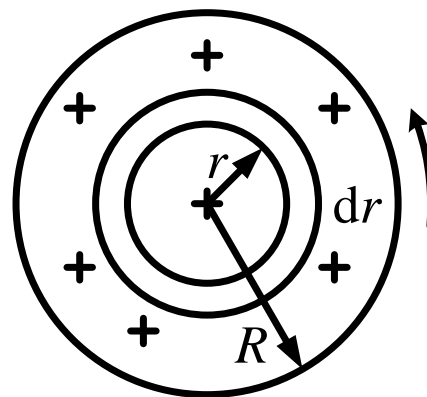
一个圆环之磁矩

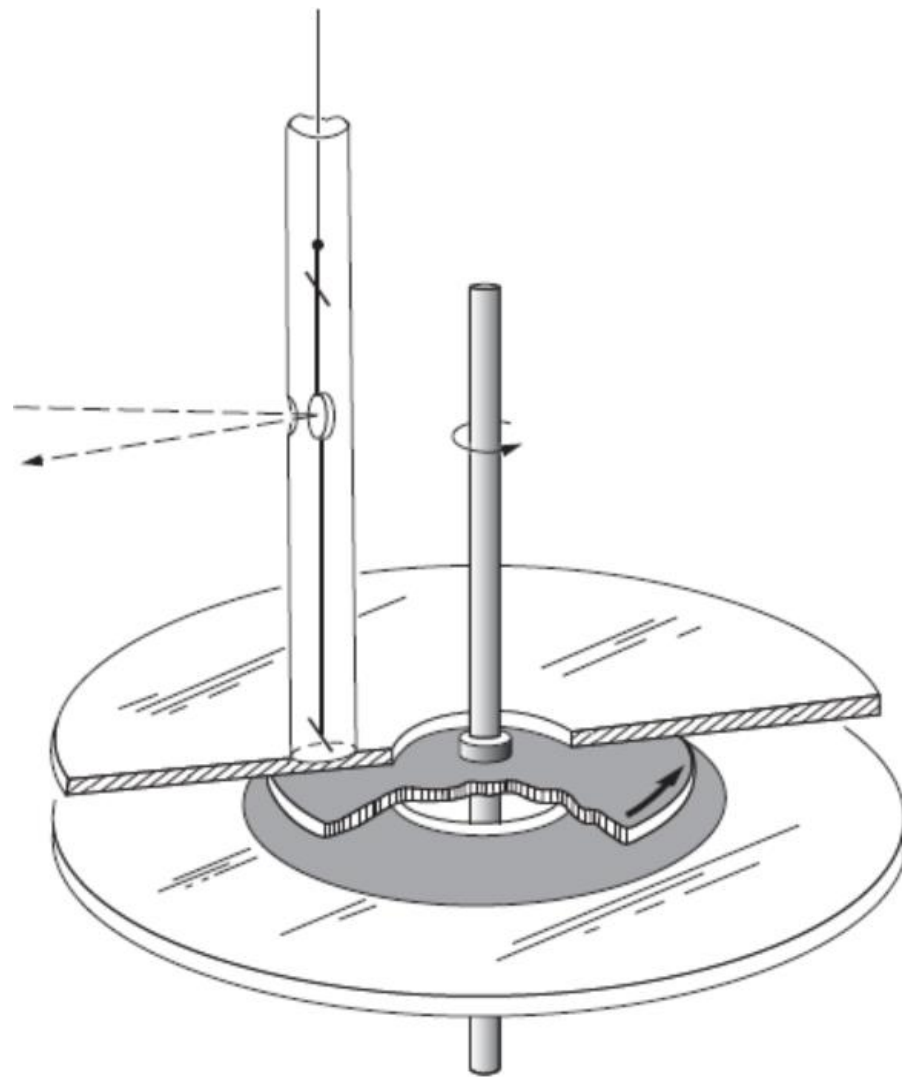
$$d\vec{m} = \pi r^2 dI \vec{e}_n$$

$$m = \int dm$$

$$= \int_0^R \pi r^2 \omega \sigma r dr$$

$$= \frac{1}{4} \omega q R^2$$





Rowland's experiment

[例] 无限长薄铜片，宽为 a ，电流 I ，求铜片中心线上方之 B 。

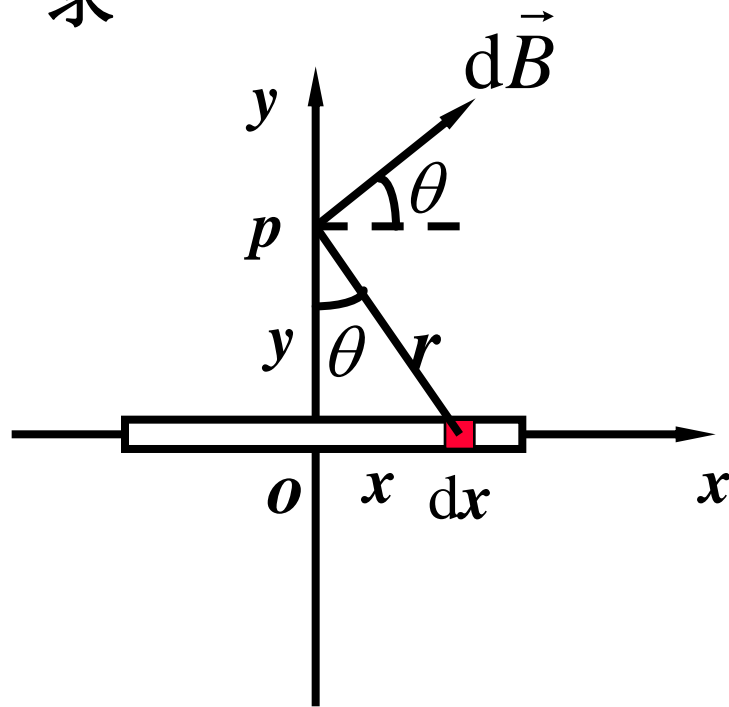
解：一个细窄条相当于一个直电流

$$dB = \frac{\mu_0 dI}{2\pi r} = \frac{\mu_0}{2\pi r} \frac{I dx}{a}$$

$$B = \int dB_x = \int dB \cdot \cos \theta$$

$$= \int \frac{\mu_0}{2\pi r} \frac{I dx}{a} \cdot \cos \theta$$

$$r = \sqrt{x^2 + y^2} \quad \cos \theta = \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}$$



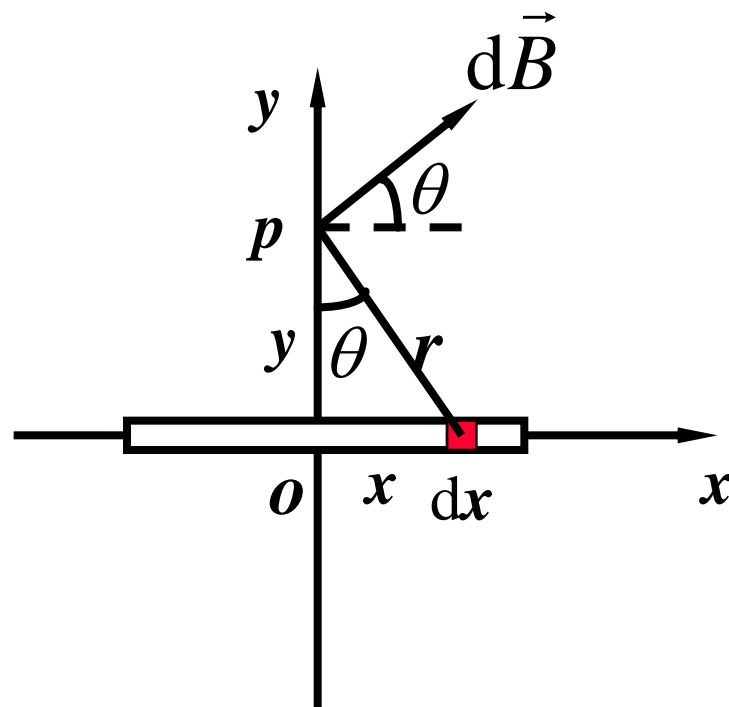
$$B = \frac{\mu_0 I y}{2\pi a} \int_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}} \frac{dx}{x^2 + y^2}$$

$$= \frac{\mu_0 I}{\pi a} \arctan \frac{a}{2y}$$

$$y \ll a$$

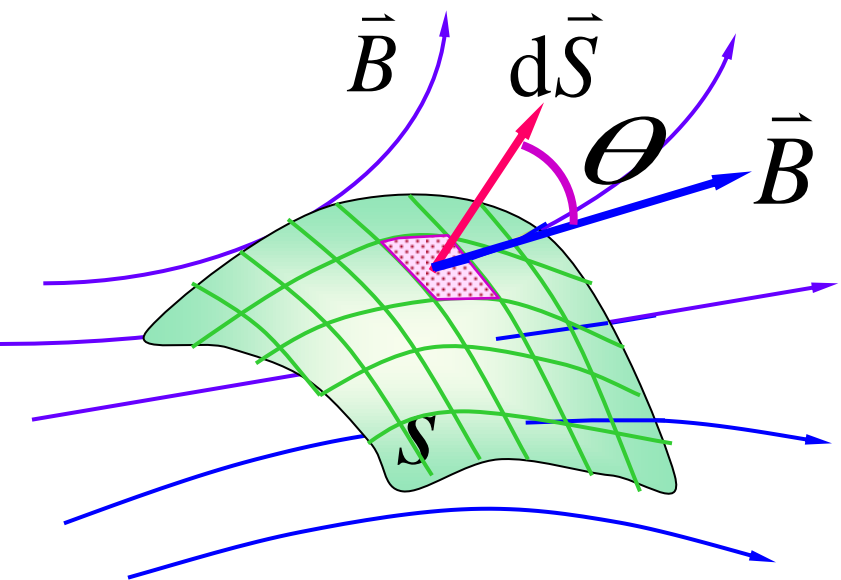
$$\Rightarrow B = \frac{\mu_0 I}{2a}$$

对应于无限大面电流产生的磁场！



§ 11.3 磁场的基本规律

一、磁通量



通过小面元磁通量

$$d\Phi_m = B \cos \theta dS = \vec{B} \cdot d\vec{S}$$

$$\begin{aligned}\Phi_m &= \iint_S d\Phi_m = \iint_S B \cos \theta dS \\ &= \iint_S \vec{B} \cdot d\vec{S}\end{aligned}$$

单位 $\text{T} \cdot \text{m}^2 = \text{Wb}$

二、磁高斯定理

静电场高斯定理： $\oiint_S \vec{E} \cdot d\vec{S} = q / \varepsilon_0$

$$\oiint_S \vec{B} \cdot d\vec{S} = ?$$

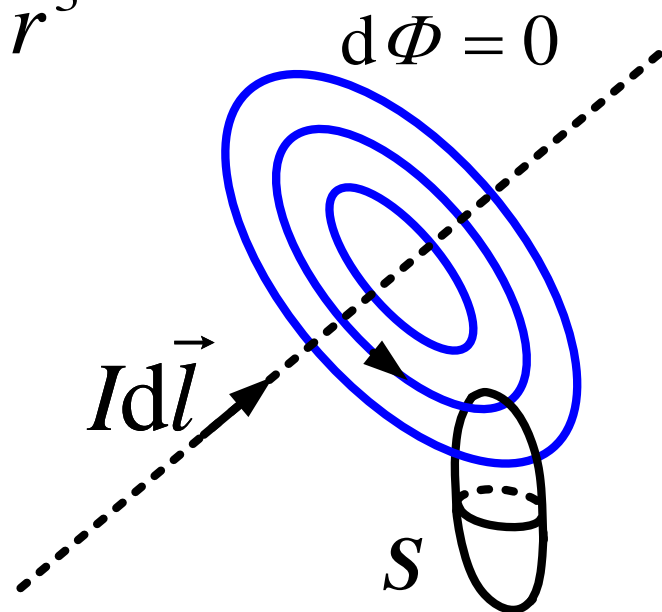
由毕奥—萨伐尔定律: $d\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{Id\vec{l} \times \vec{r}}{r^3}$

任意电流系统可分为 $Id\vec{l}_1, Id\vec{l}_2 \dots$

各自产生磁场 $d\vec{B}_1, d\vec{B}_2 \dots$

通过闭合面之磁通量 $d\Phi_1, d\Phi_2 \dots$

通过闭合面之总磁通量



$$\Phi_m = \oiint_S \vec{B} \cdot d\vec{S} = d\Phi_1 + d\Phi_2 + \dots = 0$$

微分形式 $\nabla \cdot \vec{B} = 0$

$$\oiint_S \vec{E} \cdot d\vec{S} = q / \epsilon_0$$

$$\oiint_S \vec{B} \cdot d\vec{S} = 0$$

\vec{E} 线出自正电荷，收于负电荷

\vec{B} 线无头无尾

静电场为有源场！

磁场为无源场！

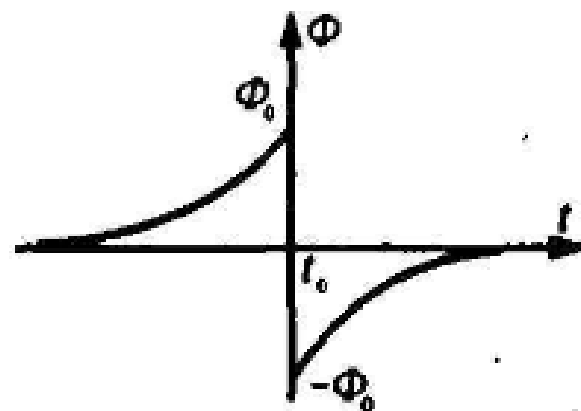
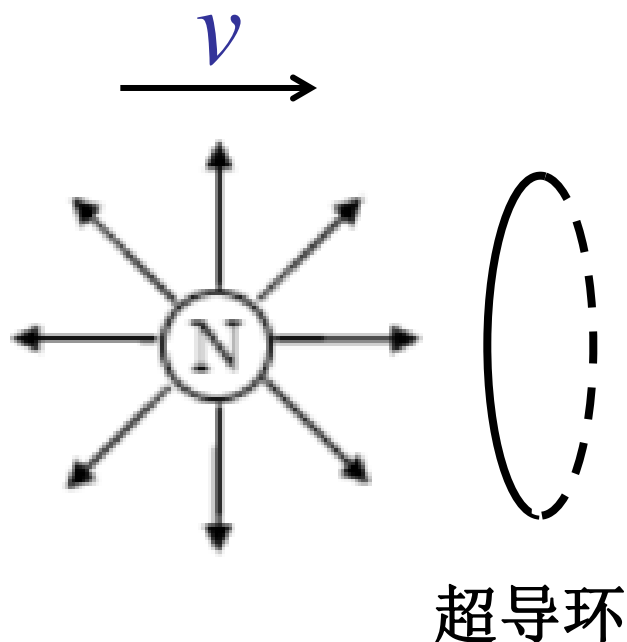
磁场与电场不同等的原因：自然界无磁单极子

➤狄拉克与磁单极子



斯坦福小组的“情人节磁单极子事件”

利用超导环，一旦有磁单极子从其中通过，环内磁通量会发生显著变化。**1982年2月14日**夜间斯坦福大学的一个研究小组的超导环检测到了磁通量突变，量值与理论预言相符。这一事件并没有得到他人的确认，且如此清晰的磁单极子事件**20**余年间没有出现第二次，有人干脆将其解释为恶作剧。



[例] 如图，无限长载流直导线的外侧有一个三角形回路。求穿过三角形回路的磁通量。

解： 三角形回路处在由电流 I 激发的非均匀磁场中。

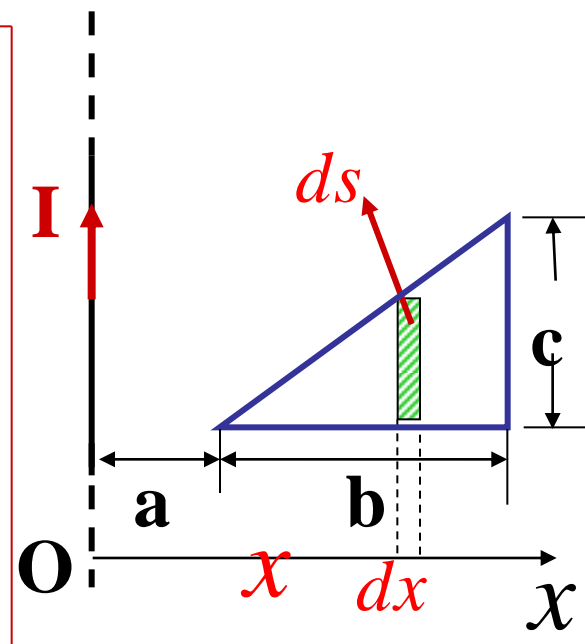
建立坐标系，在线框中取一小面积 ds

ds 处的磁场 $B = \frac{\mu_0 I}{2\pi x}$ 方向： \otimes

$$ds = (x - a) \frac{c}{b} dx$$

穿过 ds 的磁通量 $d\Phi = \vec{B} \cdot d\vec{s} = \frac{\mu_0 I}{2\pi x} (x - a) \frac{c}{b} dx$

$$\Phi = \iint_s d\Phi = \int_a^{a+b} \frac{\mu_0 I c}{2\pi b} \frac{(x - a)}{x} dx = \frac{\mu_0 I c}{2\pi b} (b - a \ln \frac{a + b}{a})$$



三、安培环路定理

静电场: $\oint_l \vec{E} \cdot d\vec{l} = 0$

无旋场

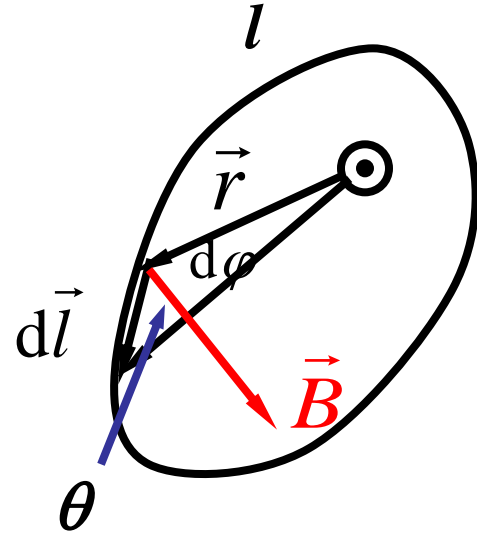
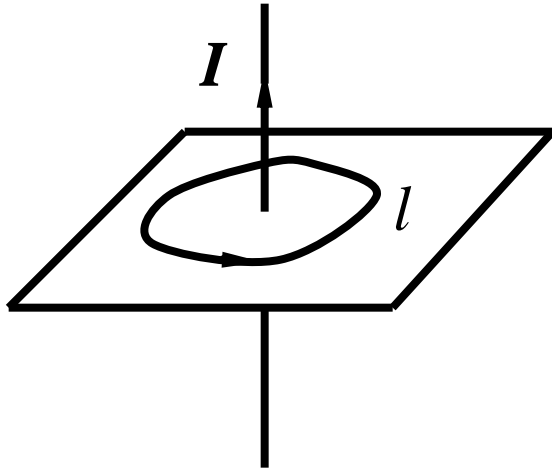
稳恒磁场: $\oint_l \vec{B} \cdot d\vec{l} = ?$

有旋场

若任选一根磁力线为闭合回路

$$\oint_l \vec{B} \cdot d\vec{l} = \oint_l B dl \neq 0$$

用长直电流的磁场来讨论：

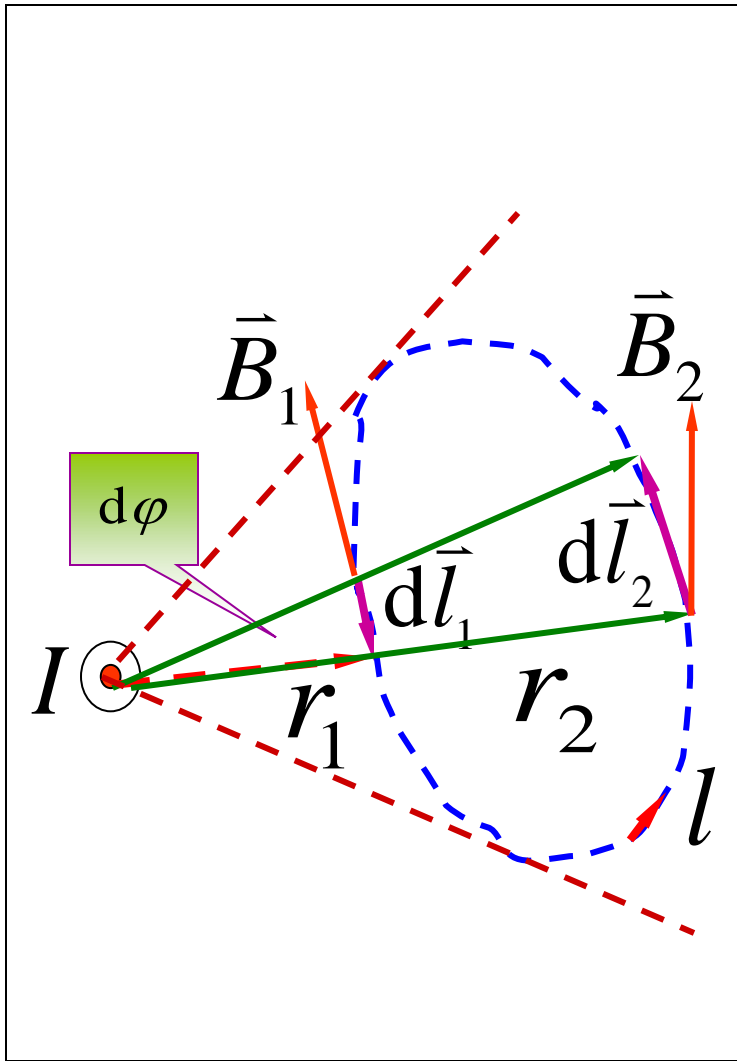


$$\vec{B} = \frac{\mu_0}{2\pi} \frac{I}{r} \vec{e}_\varphi \quad \vec{B} \cdot d\vec{l} = B dl \cos \theta = Br d\varphi$$

$$\oint_l \vec{B} \cdot d\vec{l} = \oint_l Br d\varphi = \oint_l \frac{\mu_0}{2\pi} \frac{I}{r} r d\varphi = \frac{\mu_0 I}{2\pi} \oint_l d\varphi = \mu_0 I$$

$$l \text{ 绕向相反或电流反向, } \oint_l \vec{B} \cdot d\vec{l} = -\mu_0 I$$

电流在回路之外



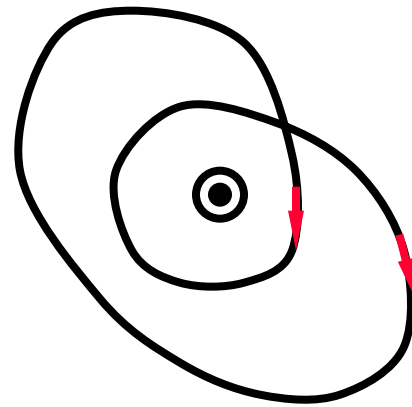
$$B_1 = \frac{\mu_0 I}{2\pi r_1}, \quad B_2 = \frac{\mu_0 I}{2\pi r_2}$$

$$\vec{B}_1 \cdot d\vec{l}_1 = -\vec{B}_2 \cdot d\vec{l}_2 = -\frac{\mu_0 I}{2\pi} d\varphi$$

$$\vec{B}_1 \cdot d\vec{l}_1 + \vec{B}_2 \cdot d\vec{l}_2 = 0$$

$$\oint_l \vec{B} \cdot d\vec{l} = 0$$

N 次链套: $\oint_l \vec{B} \cdot d\vec{l} = -N\mu_0 I$



如空间有多个电流, 则:

$$\oint_l \vec{B} \cdot d\vec{l} = \oint_l \left(\sum_i \vec{B}_i \right) \cdot d\vec{l} \quad \sum_i I_i: \text{处在积分回路中的电流}$$

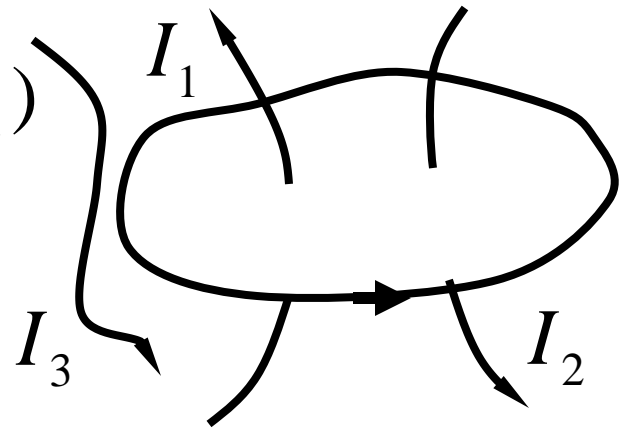
$$= \sum_i \left(\oint_l \vec{B}_i \cdot d\vec{l} \right) = \mu_0 \sum_i I_i$$

即在真空的稳恒磁场中, 磁感应强度 \vec{B} 沿任一闭合路径的积分的值, 等于 μ_0 乘以该闭合路径所包围的各电流的代数和。

注意： 1. 代数和 $\oint_l \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 (I_1 - I_2)$

\vec{B} 由所有电流共同产生

但安培环路定理表达式中的电流强度是指穿过闭合曲线的电流，不包括闭合曲线以外的电流。

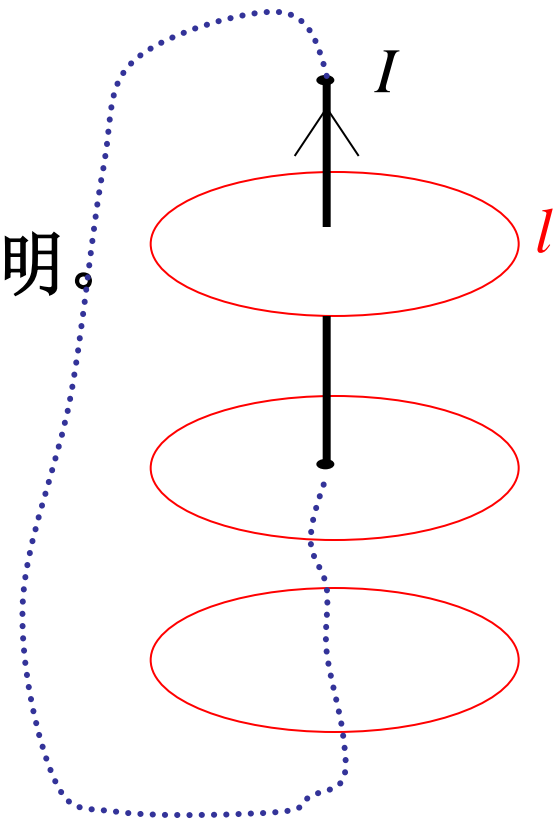


2. 上述讨论不是严格证明，只是说明。

3. $\oint_l \vec{B} \cdot d\vec{l} \neq 0$ 磁场为有旋场！

电流是磁场的涡旋中心

4. 仅适用稳恒电流产生的磁场
(闭合载流导线)



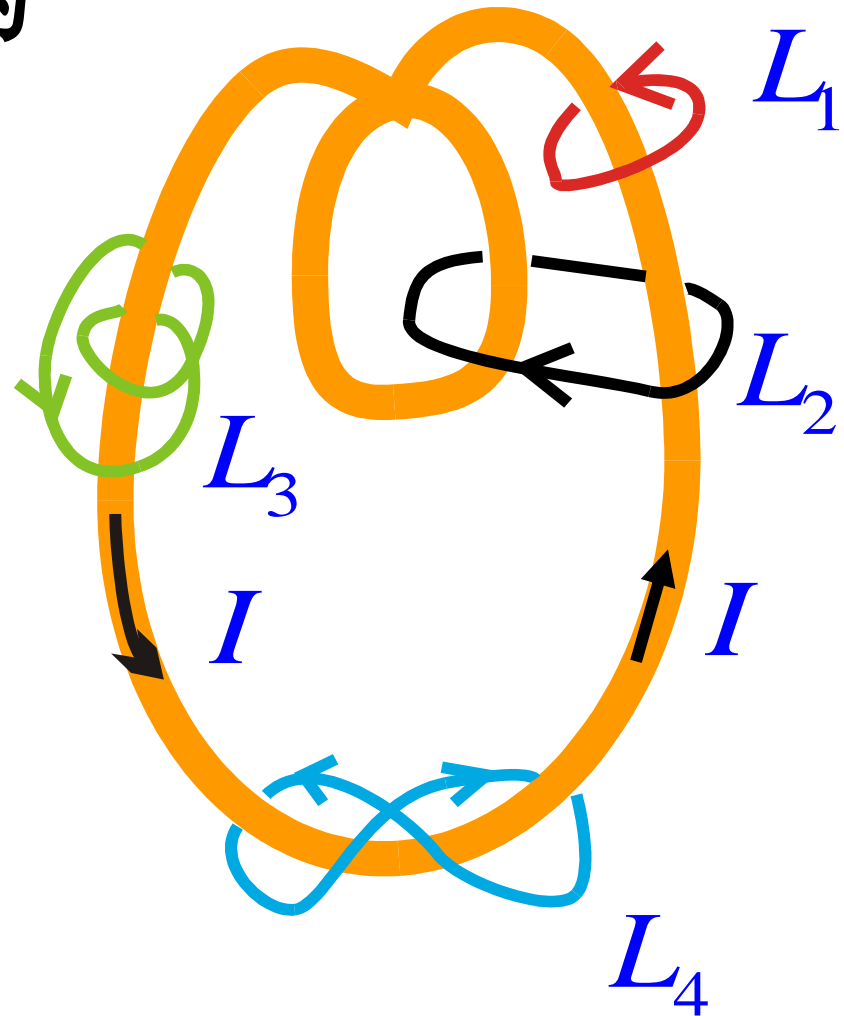
[例]通以电流 I 的线圈如图
所示，在图中有四条闭合
曲线，则其环流分别为

$$\oint_{L_1} \vec{B} \cdot d\vec{l} = \underline{\underline{\mu_0 I}}$$

$$\oint_{L_2} \vec{B} \cdot d\vec{l} = \underline{\underline{-2\mu_0 I}}$$

$$\oint_{L_3} \vec{B} \cdot d\vec{l} = \underline{\underline{-2\mu_0 I}}$$

$$\oint_{L_4} \vec{B} \cdot d\vec{l} = \underline{\underline{-2\mu_0 I}}$$



[例] 无限长圆柱面电流的磁场。

解：

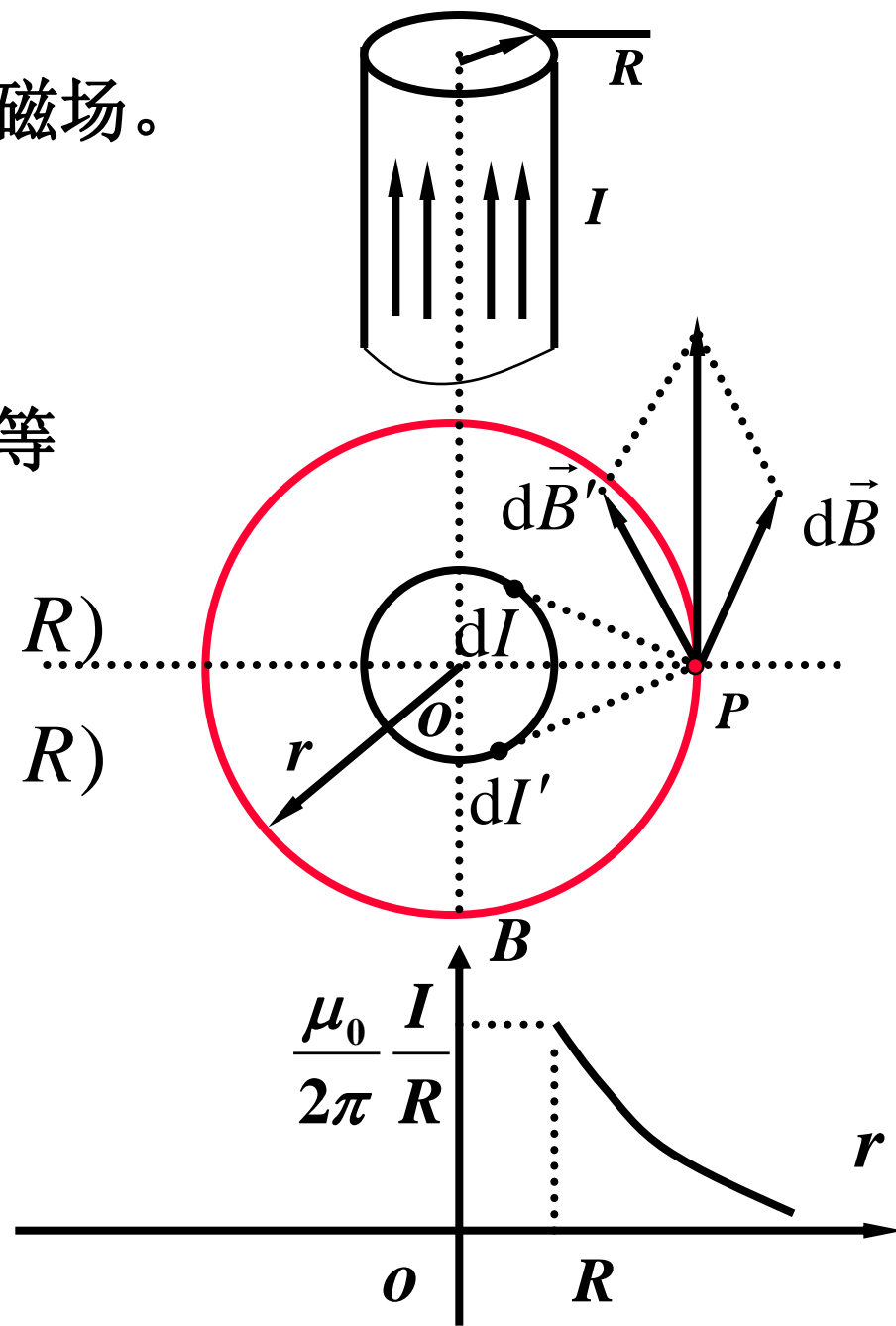
对称性分析结论：

磁场沿回路切线，各点大小相等

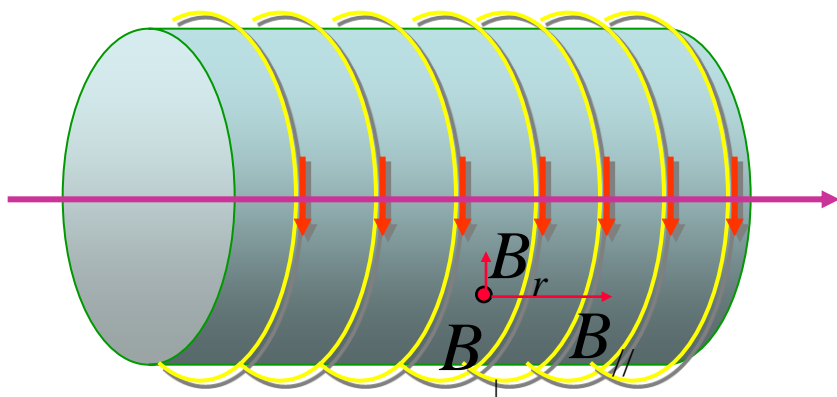
$$\oint_l \vec{B} \cdot d\vec{l} = B 2\pi r = \begin{cases} \mu_0 I & (r > R) \\ 0 & (r < R) \end{cases}$$

$$B = \frac{\mu_0}{2\pi} \frac{I}{r} \quad (r > R)$$

$$B = 0 \quad (r < R)$$



讨论：长直螺线管的磁场。

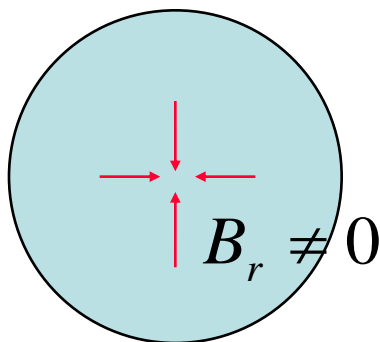


$$B_0 = \mu_0 n I$$

只有 $B_{//} \neq 0$

$$B_r = 0$$

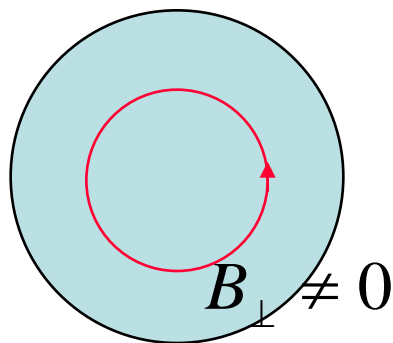
否则



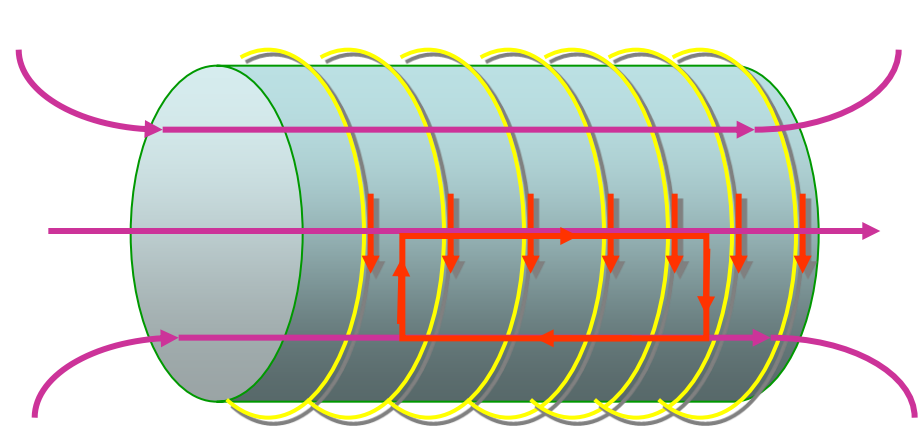
与磁高斯定理矛盾!

$$B_{\perp} = 0$$

否则

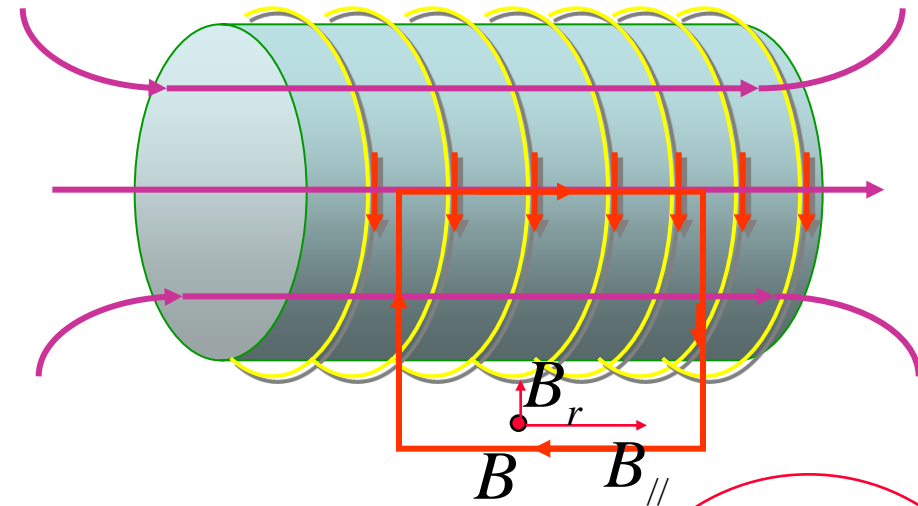


与安培环路定理矛盾!



$$\oint_l \vec{B} \cdot d\vec{l} = B_0 l - B_{//} l = 0$$

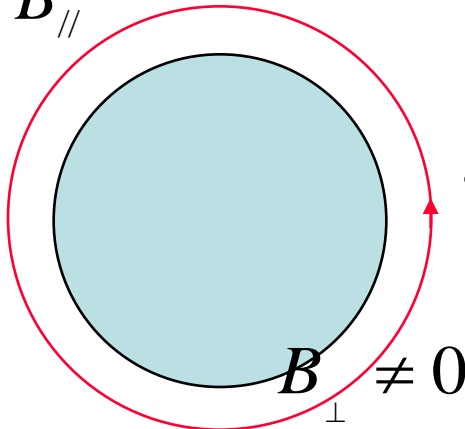
$$\Rightarrow B_0 = B_{//} = \mu_0 n I$$



$$\oint_l \vec{B} \cdot d\vec{l} = B_0 l - B_{//} l = \mu_0 n l I$$

$$\Rightarrow B_{//} = 0$$

$$B_{\perp} = 0$$



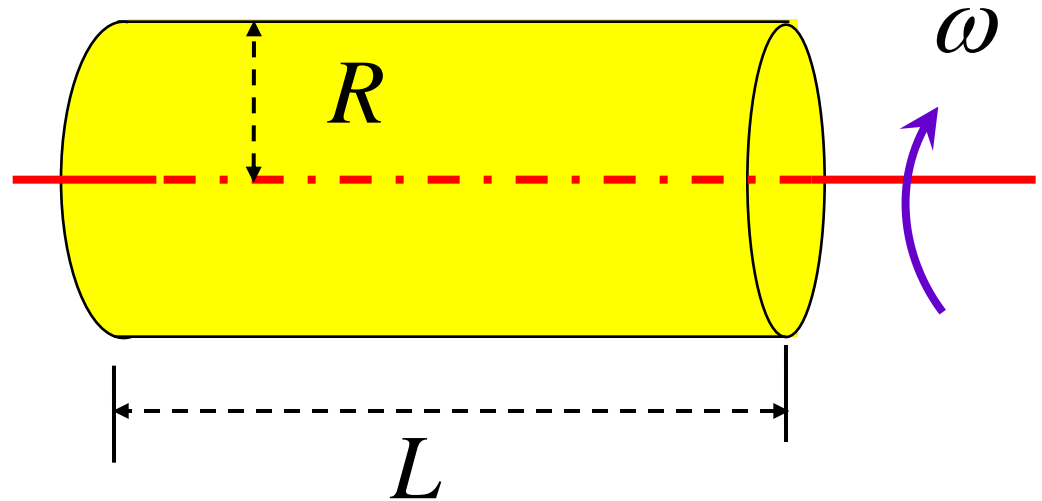
$$\oint_l \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 I \approx B_{\perp} 2\pi r$$

$$\Rightarrow B_{\perp} \approx \frac{\mu_0 I}{2\pi r} \ll B_0$$

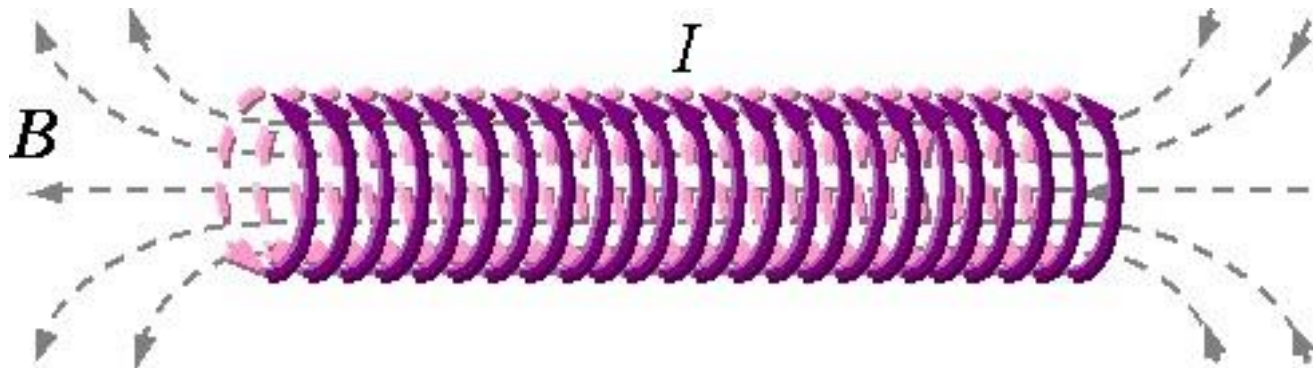
【例】长度为 L 、半径为 R 的均匀带电 Q 的长圆柱（ $L \gg R$ ），绕其对称轴以角速度 ω 转动，求圆柱中部附近的 $B = \underline{\hspace{2cm}}$ ，以及对称轴上圆柱两端的磁感应强度 $B = \underline{\hspace{2cm}}$ 。

解：电荷体积密度为

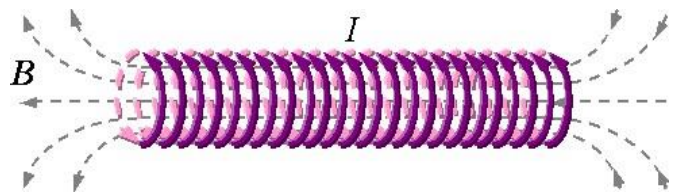
$$\rho = \frac{Q}{\pi R^2 L}$$



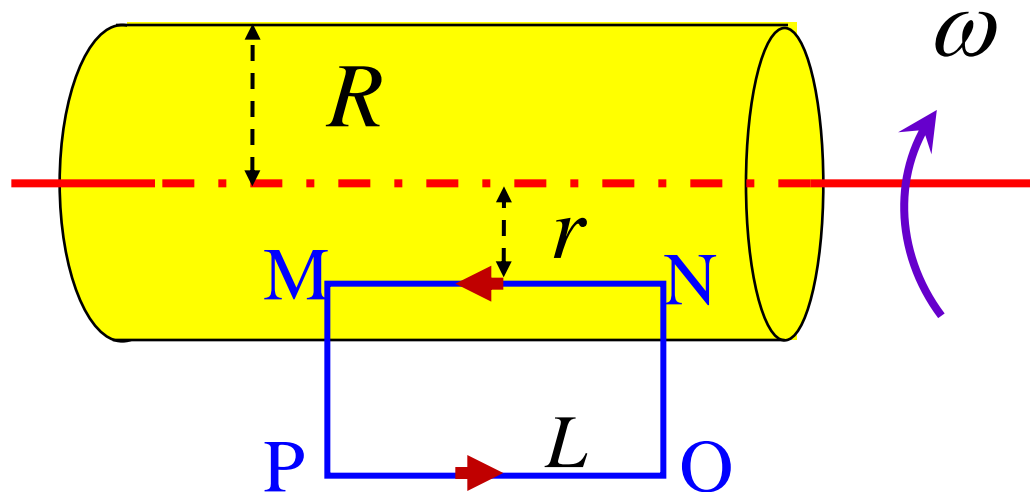
长圆柱以 ω 转动等效于无穷多层密绕螺线管



等效于无穷多层密绕螺线管



选取矩形安培环路

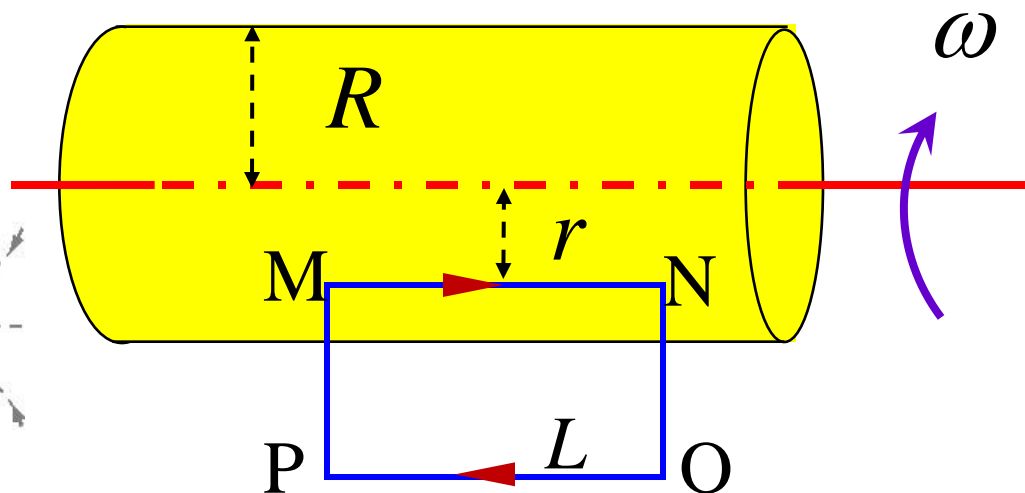
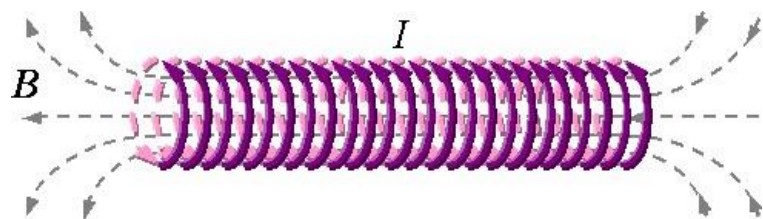


$$\oint_l \vec{B} \cdot d\vec{l} = \int_{NM} \vec{B} \cdot d\vec{l} + \cancel{\int_{ON} \vec{B} \cdot d\vec{l}} + \cancel{\int_{PO} \vec{B} \cdot d\vec{l}} + \cancel{\int_{MP} \vec{B} \cdot d\vec{l}}$$

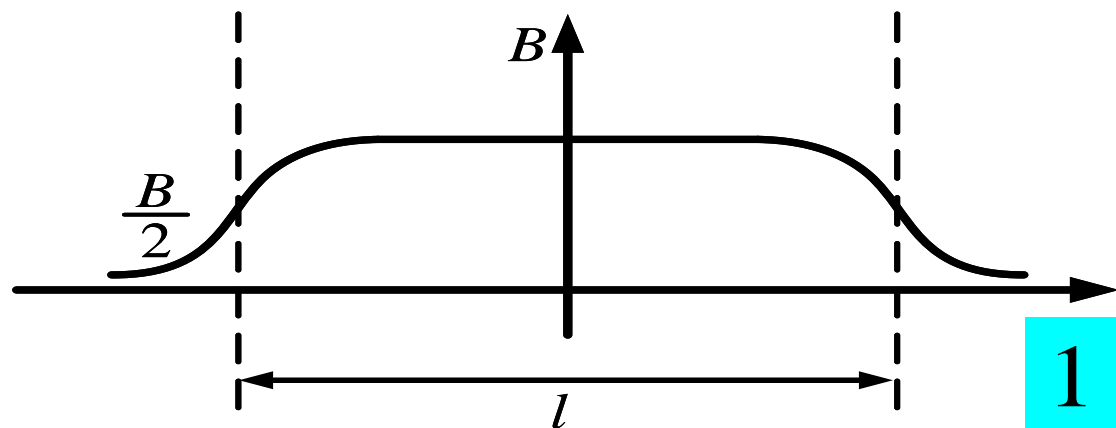
➡ $B \cdot \overline{NM} = \mu_0 \overline{NM} \rho \pi (R^2 - r^2) \frac{\omega}{2\pi}$

➡ $B = \mu_0 \frac{Q}{\pi R^2 L} \pi (R^2 - r^2) \frac{\omega}{2\pi}$

等效于无穷多层密绕螺线管



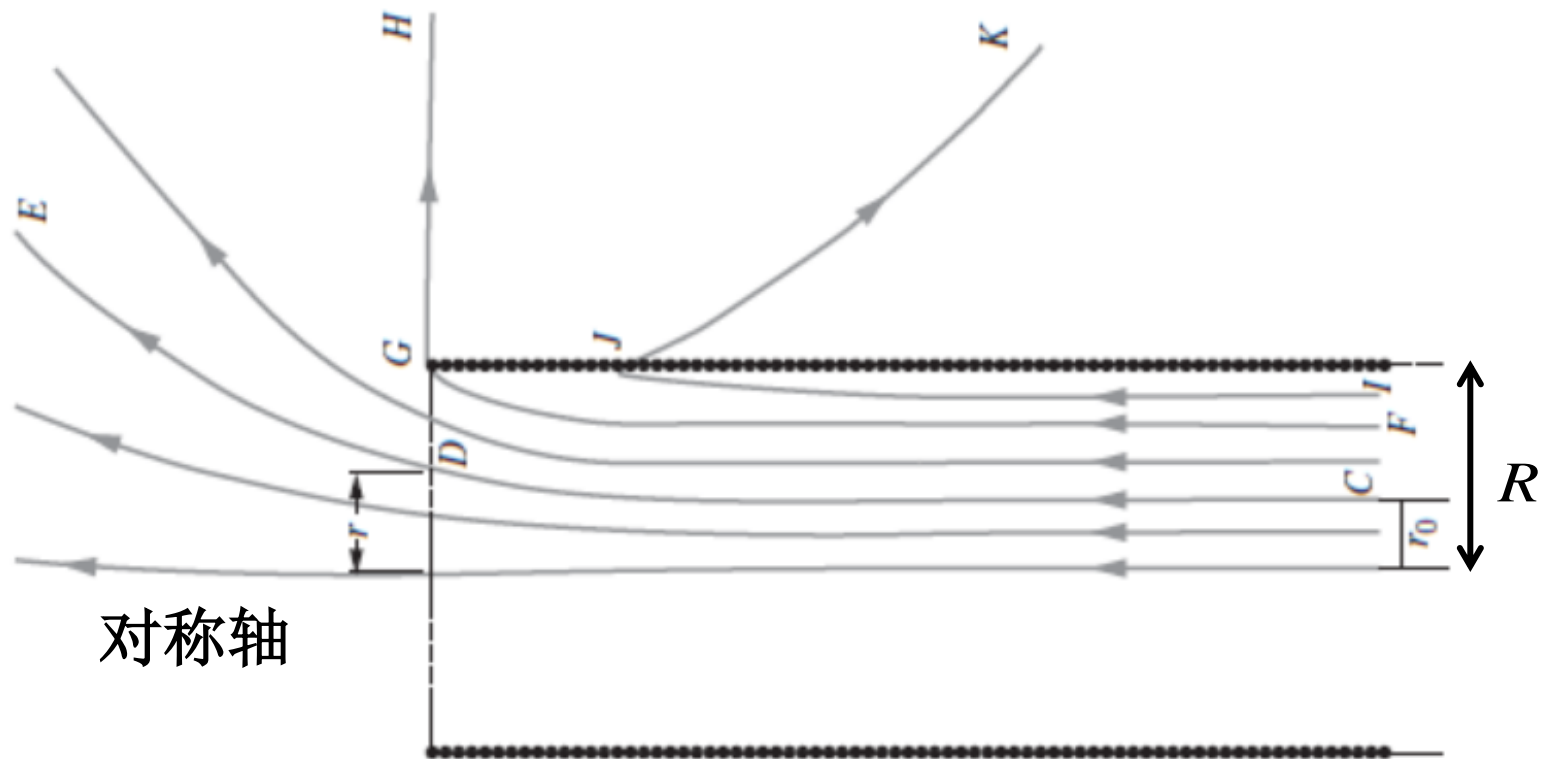
$$B = \mu_0 \frac{Q}{\pi R^2 L} \pi (R^2 - r^2) \frac{\omega}{2\pi}$$



对称轴上圆柱两端的磁感应强度 B

= _____。

$$\frac{1}{2} \mu_0 \frac{Q}{\pi R^2 L} \pi R^2 \frac{\omega}{2\pi}$$



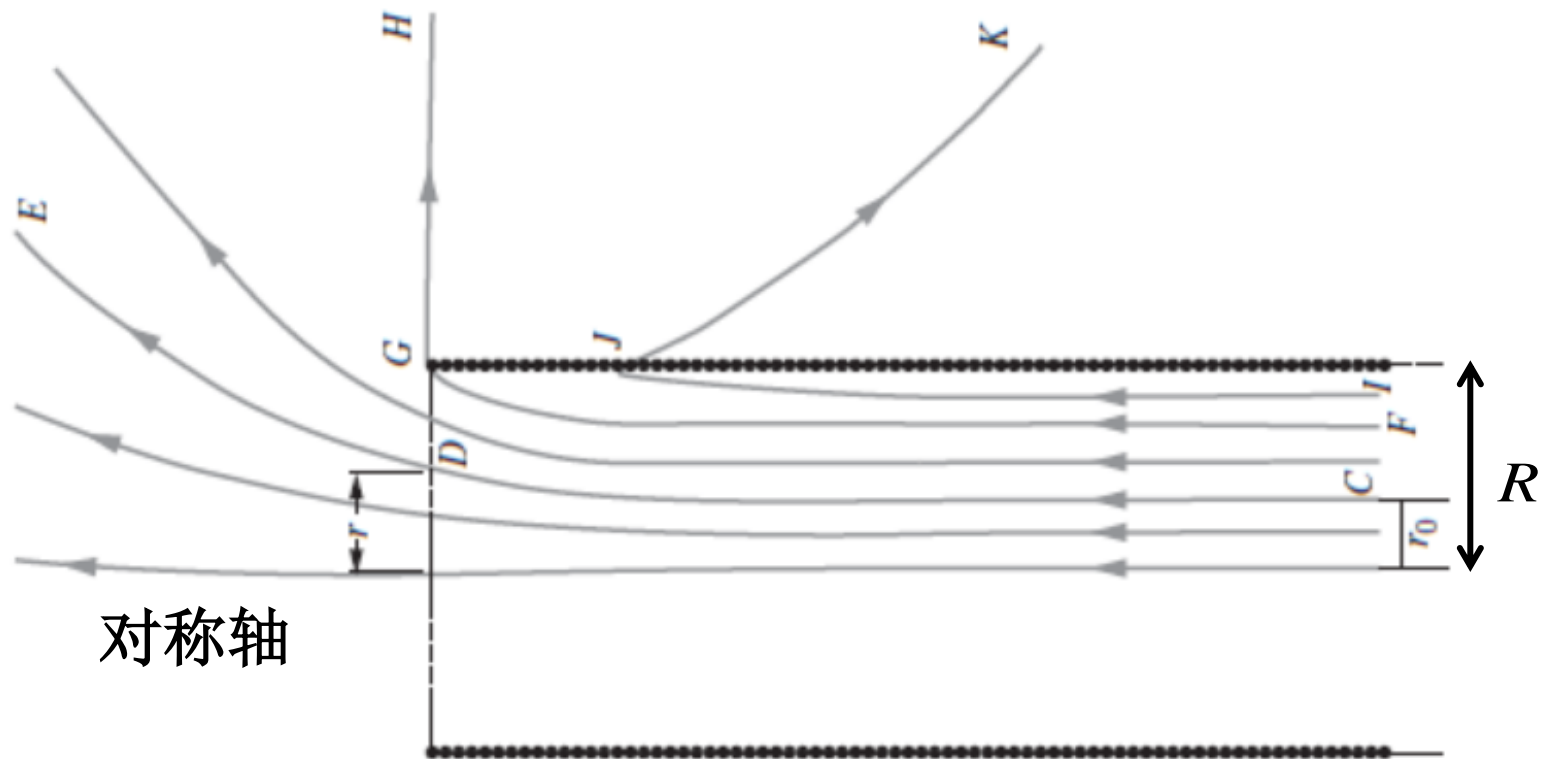
(b)

半无限长螺线管

证明 (1) $r = \sqrt{2}r_0$ for $r_0 < R / \sqrt{2}$

左面接半个半无限长螺线管，得一个无限长螺线管。

$$\begin{aligned} \text{半无限长螺线管端面上 } B_{//} &= B_0 / 2 & B_{//} \pi r^2 &= B_0 \pi r_0^2 \\ & & \Rightarrow r &= \sqrt{2}r_0 \end{aligned}$$



(b)

半无限长螺线管

证明 (2) 磁感应线**G****H**为直线且与螺线管垂直

无限长螺线管外磁场为零。

半无限长螺线管端面上 ($r > R$) , $B_{//} = 0$

故磁感应线**G****H**为直线且与螺线管垂直

[例] 无限大平面电流的磁场。

解：

α : 电流线密度

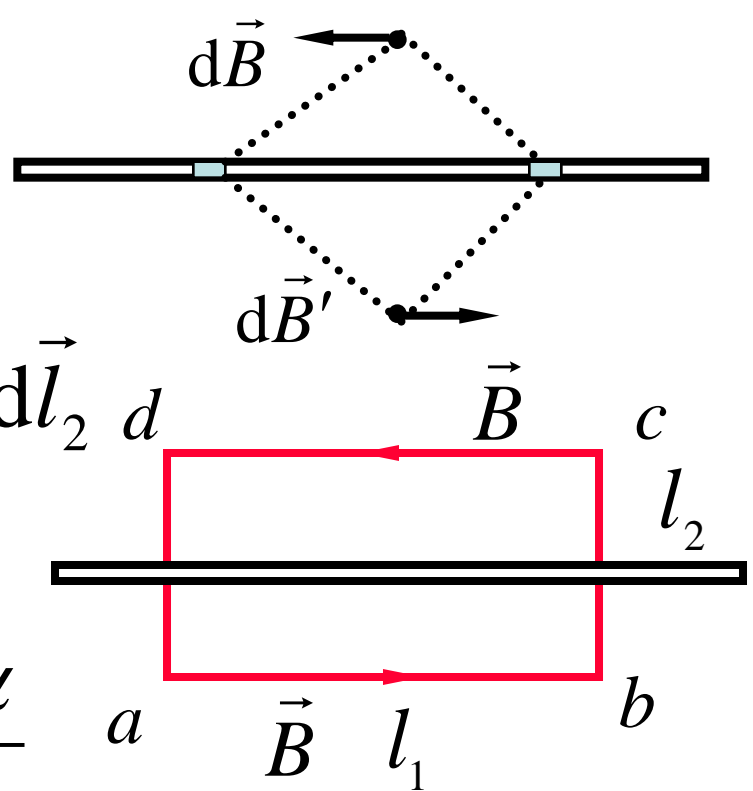
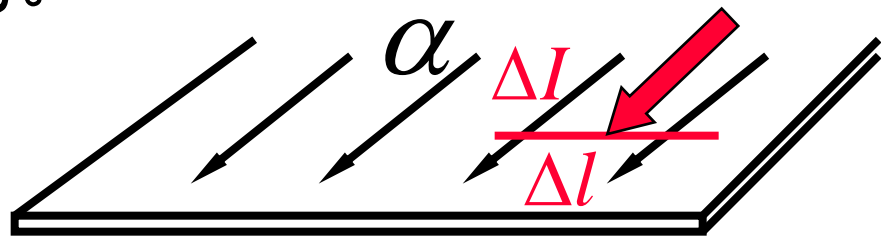
$$\alpha = \frac{\Delta I}{\Delta l} \quad \text{单位长度的电流强度}$$

对于矩形回路

$$\oint_l \vec{B} \cdot d\vec{l} = 2 \int_{l_1} \vec{B} \cdot d\vec{l}_1 + 2 \int_{l_2} \vec{B} \cdot d\vec{l}_2$$

$$= \mu_0 \alpha l_1$$

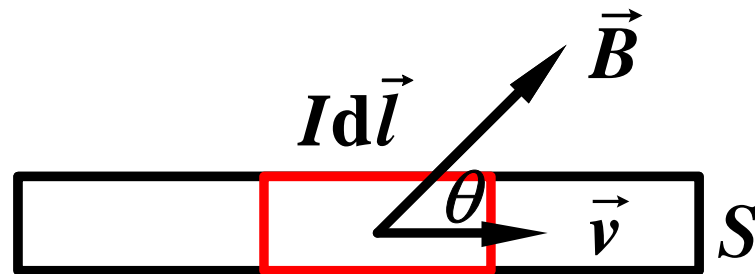
$$\Rightarrow 2Bl_1 = \mu_0 \alpha l_1 \Rightarrow B = \frac{\mu_0 \alpha}{2}$$



§ 11.4 磁场对载流导线的作用

一、安培力公式

一个载流子受力: $\vec{F}_L = q\vec{v} \times \vec{B}$



一个电流元受力: $d\vec{F} = nSdl(q\vec{v} \times \vec{B})$

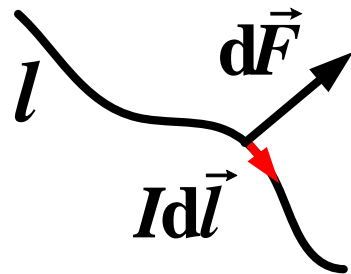
$$\because \vec{j} = nq\vec{v} \quad I = S\vec{j} \cdot d\vec{l} \parallel \vec{j}$$

$$\Rightarrow d\vec{F} = Sdl(\vec{j} \times \vec{B}) = Id\vec{l} \times \vec{B}$$

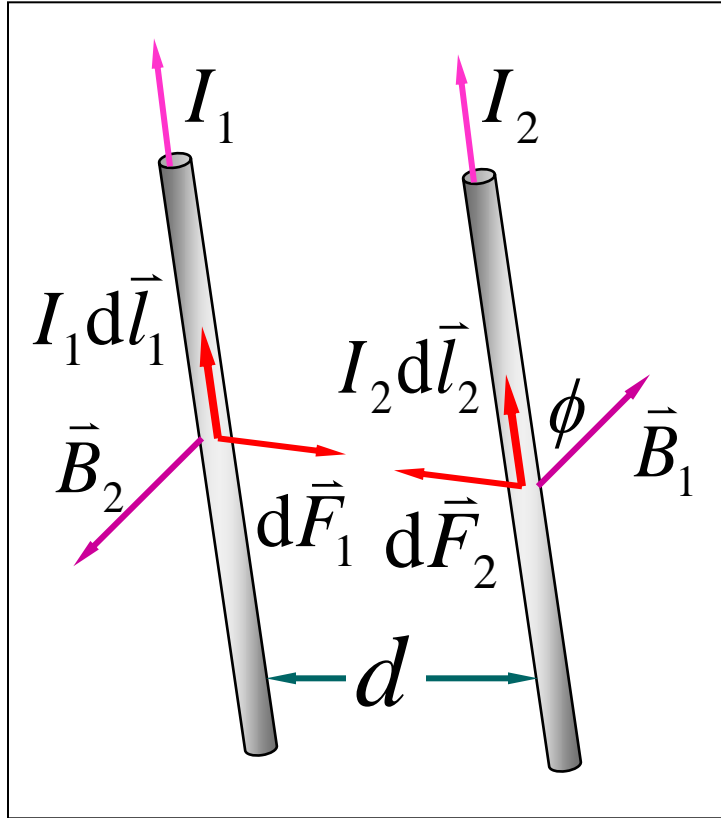
由于自由电子与晶格之间的相互作用, 使导线在宏观上看起来受到了磁场的作用力

有限长载流导线所受的安培力

$$\vec{F} = \int_l d\vec{F} = \int_l (Id\vec{l} \times \vec{B})$$



电流的单位 两无限长平行载流直导线间的相互作用



$$B_1 = \frac{\mu_0 I_1}{2\pi d} \quad B_2 = \frac{\mu_0 I_2}{2\pi d}$$

$$dF_2 = B_1 I_2 dl_2 \sin \phi$$

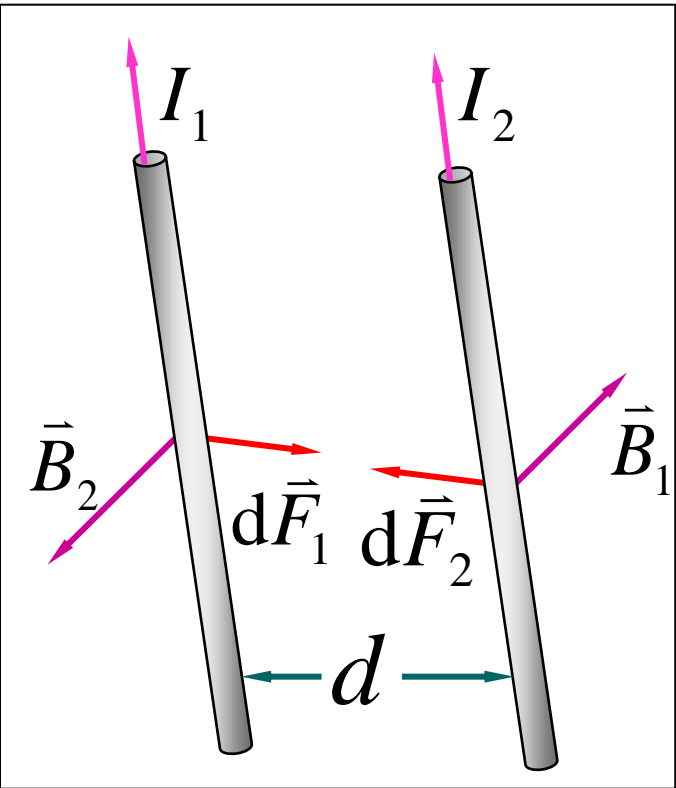
$$\phi = 90^\circ, \sin \phi = 1$$

$$dF_2 = B_1 I_2 dl_2 = \frac{\mu_0 I_1 I_2 dl_2}{2\pi d}$$

$$\frac{dF_2}{dl_2} = \frac{dF_1}{dl_1} = \frac{\mu_0 I_1 I_2}{2\pi d}$$

$$dF_1 = B_2 I_1 dl_1 = \frac{\mu_0 I_2 I_1 dl_1}{2\pi d}$$

国际单位制中电流单位安培的定义



在真空中两平行长直导线相距 1 m，通有大小相等、方向相同的电流，当两导线每单位长度上的吸引力为

$$2 \times 10^{-7} \text{ N} \cdot \text{m}^{-1}$$

时，规定这时的电流为 **1 A**（安培）。

可得 $\mu_0 = 4\pi \times 10^{-7} \text{ N} \cdot \text{A}^{-2}$

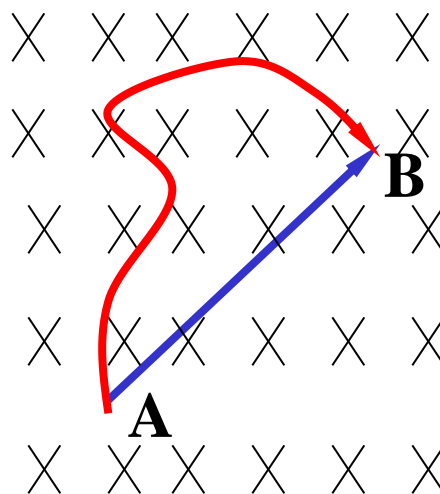
问 若两直导线电流方向相反二者之间的作用力如何？

$$\frac{dF_1}{dl_1} = \frac{dF_2}{dl_2} = \frac{\mu_0 I_1 I_2}{2\pi d}$$

[例] 求匀强磁场中载流导线受力。

解:

$$\begin{aligned}\vec{F} &= \int_l (I d\vec{l} \times \vec{B}) \\ &= I \left(\int_l d\vec{l} \right) \times \vec{B} \\ &= I \overrightarrow{AB} \times \vec{B}\end{aligned}$$



在均匀磁场中，和 AB 段直电流受力相同！

[例] 两条半径为 R 的长平行导轨相距 l , 另一长为 l 的导线通过圆环导线套于导轨。两导轨通以反向电流 I 时, 导线中流有微弱电流 I' 。如图。导轨中电流沿表面分布。求垂直导线受到的安培力。

解: 电流 1 和 2 在电流元处产生磁场

$$B = \frac{\mu_0 I}{2\pi r} + \frac{\mu_0 I}{2\pi(l-r)}$$

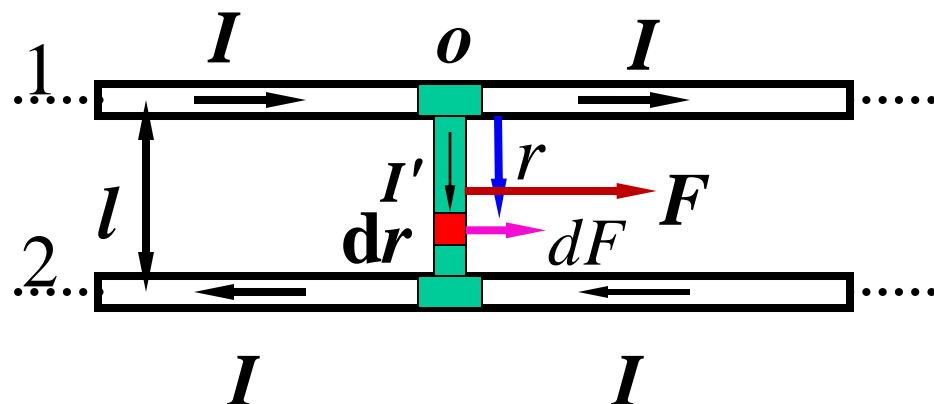
电流元受到的安培力为

$$dF = BI'dr$$

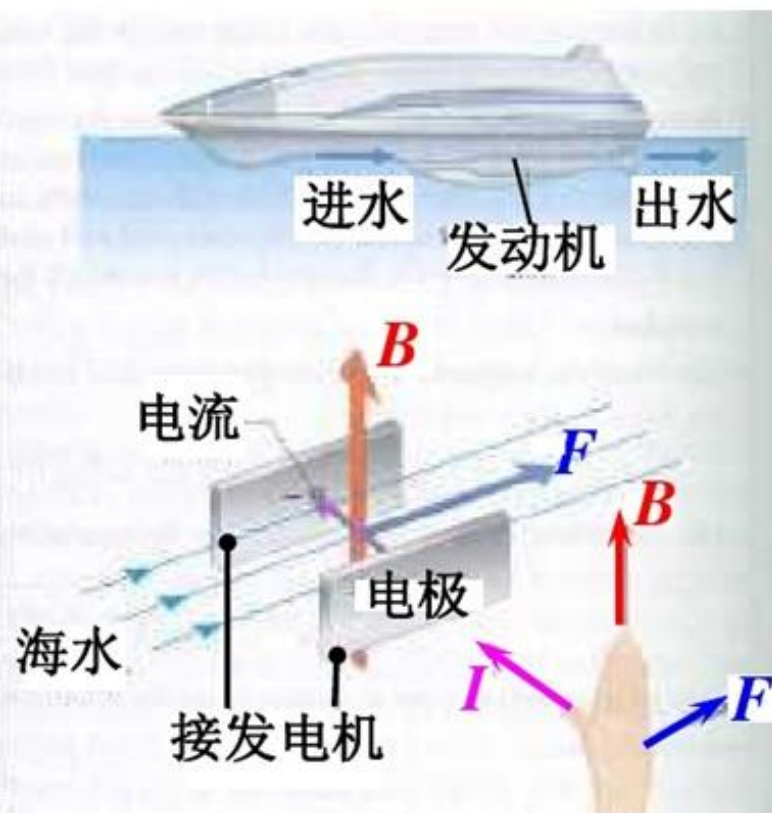
各个电流元的 dF 的方向相同!

$$F = \int_R^{l-R} \left[\frac{\mu_0 I}{2\pi r} + \frac{\mu_0 I}{2\pi(l-r)} \right] I' dr = \frac{\mu_0 I I'}{\pi} \ln \frac{l-R}{R}$$

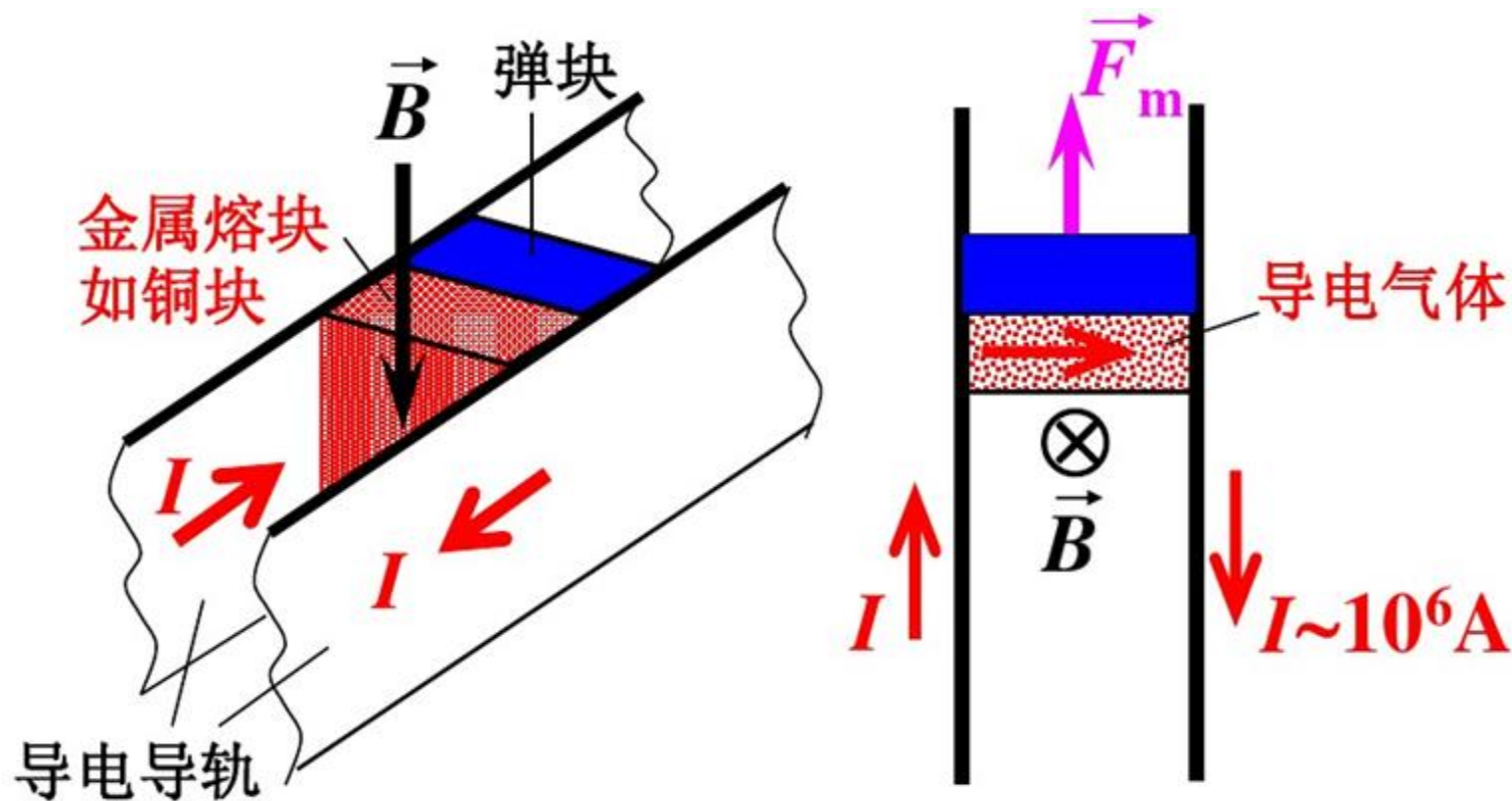
应用: 船舶、潜艇的电磁推进装置, 电磁炮



▲磁流体船



▲ 电磁轨道炮



弹块 $\bar{a} \sim 10^6 g$, 在1ms内, 速度可达10km/s

二、载流线圈在磁场中受到的作用

1. 匀强磁场中之载流线圈

$$F_1 = F_1' = BIl_1 \sin \theta$$

$$F_2 = F_2' = BIl_2$$

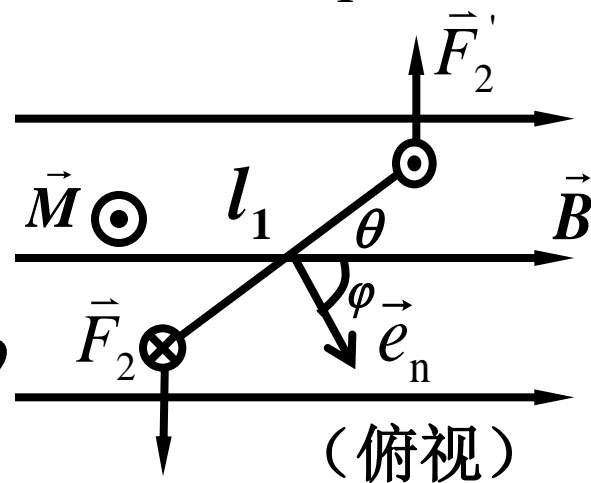
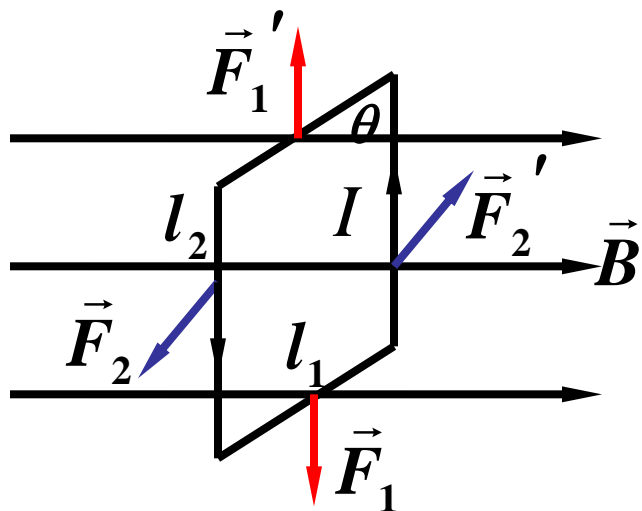
$$M = F_2 l_1 \cos \theta = BIl_1 l_2 \cos \theta$$

$$= BIS \cos \theta = BIS \sin \varphi$$

$$N \text{ 匝: } M = NBIS \sin \varphi = mB \sin \varphi$$

定义：磁矩 $m = NIS$

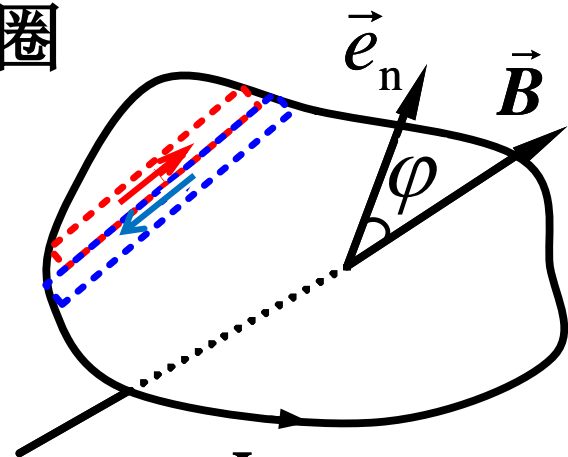
$$\text{方向: } \vec{M} = m\vec{e}_n \times \vec{B} = \vec{m} \times \vec{B}$$



2. 匀强磁场中之任意形状平面载流线圈

线圈受到的合外力

$$\vec{F} = \oint_l (I d\vec{l} \times \vec{B}) = I \left(\oint_l d\vec{l} \right) \times \vec{B} = 0$$



载流线圈看成由许多矩形的细长载流线圈所构成 I

小矩形: $d\vec{M} = d\vec{m} \times \vec{B}$ $d\vec{m} = IdS\vec{e}_n$

总力矩: $\vec{M} = \int d\vec{M} = \int (d\vec{m} \times \vec{B}) = \left(\int d\vec{m} \right) \times \vec{B}$

$$= \left(\int IdS\vec{e}_n \right) \times \vec{B} = I \vec{e}_n \times \vec{B} \int dS$$

$$= IS\vec{e}_n \times \vec{B} = \vec{m} \times \vec{B}$$

结论：均匀磁场中，任意形状刚性闭合平面通电线圈所受的合力和力矩为

$$\vec{F} = 0, \quad \vec{M} = \vec{m} \times \vec{B}$$

$$\vec{m} // \pm \vec{B}, \quad \vec{M} = 0 \quad \left\{ \begin{array}{ll} \varphi = 0 & \text{稳定平衡} \\ \varphi = \pi & \text{非稳定平衡} \end{array} \right.$$

$$\vec{m} \perp \vec{B}, \quad M = M_{\max} = mB, \quad \varphi = \pi / 2$$

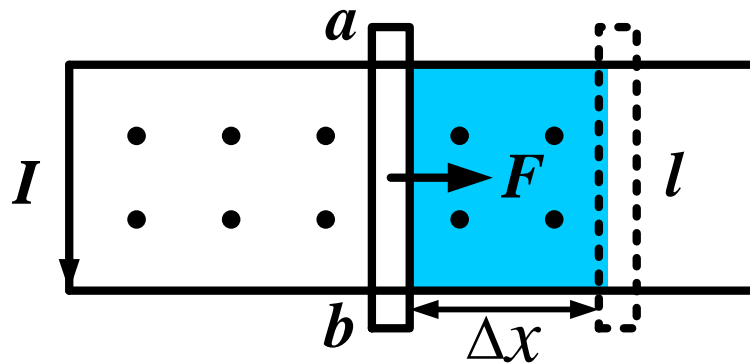
磁矩

$$\vec{m} = NIS\vec{e}_n$$

\vec{e}_n 与 I 成右螺旋

三、安培力的功

1. 运动之载流导线

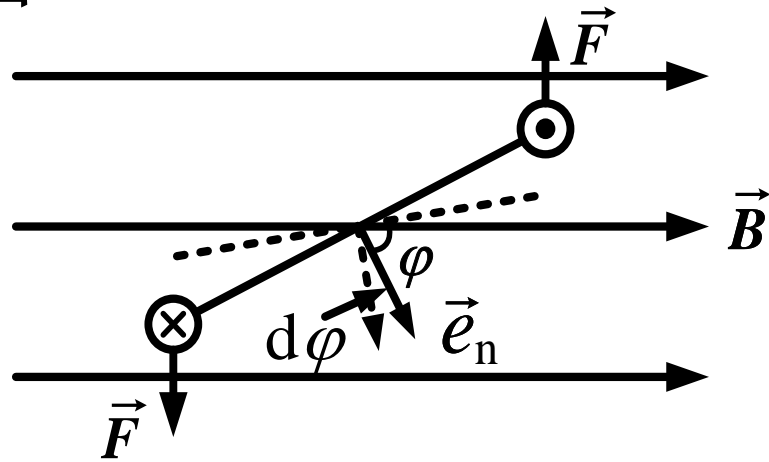


安培力 $F = BIl$

安培力做功 $A = F\Delta x = BIl\Delta x = BI\Delta S = I\Delta\Phi_m$
 $= I(\Phi_f - \Phi_i)$

$\Delta\Phi_m$: 扫过的磁通量或磁通之增量

2. 转动之载流线圈

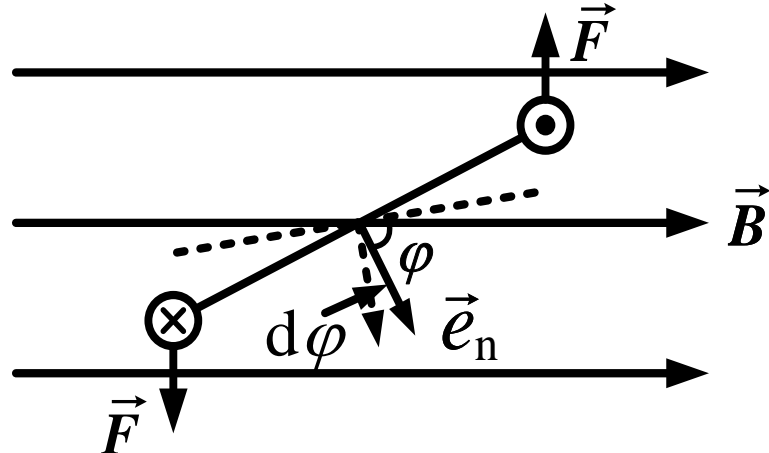


载流线圈 受到磁力矩 $\vec{M} = \vec{m} \times \vec{B}$

转动 $d\varphi$ 磁力矩做功 $M = ISB \sin \varphi$

$$dA = -BIS \sin \varphi d\varphi$$

$$dA = IB S d(\cos \varphi) = Id(BS \cos \varphi) = Id \Phi_m$$



$$\varphi_1 \rightarrow \varphi_2$$

$$A = - \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} BIS \sin \varphi d\varphi = \int_{\Phi_{m1}}^{\Phi_{m2}} Id\Phi_m$$

$$= I\Delta\Phi_m = I(\Phi_{m2} - \Phi_{m1}) = I(\Phi_f - \Phi_i)$$

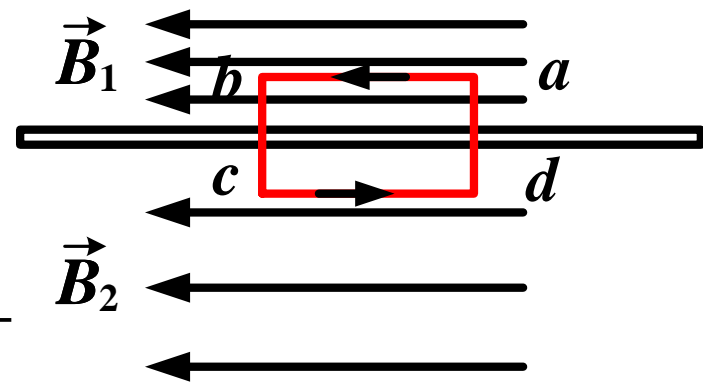
电流与外磁场呈右手螺旋关系磁通量取正，反之取负。

$$dA = IB S d(\cos \varphi) = Id(BS \cos \varphi) = Id\Phi_m$$

[例] 平行于外磁场插入一无限大薄片，上下磁场已知，求外磁场、薄片上电流密度、薄片上磁压。

解：由场强迭加原理

$$\begin{aligned}\vec{B}_1 &= \vec{B}_0 + \vec{B} \\ \vec{B}_2 &= \vec{B}_0 - \vec{B} \Rightarrow \vec{B}_0 = \frac{\vec{B}_1 + \vec{B}_2}{2}\end{aligned}$$



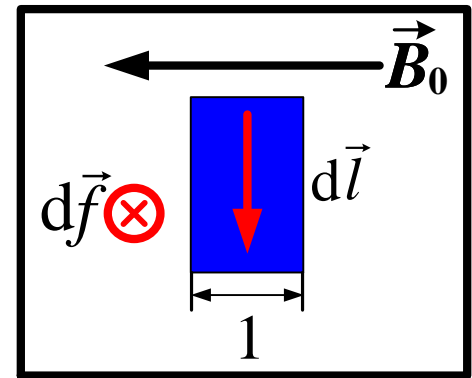
对于矩形回路

$$\begin{aligned}& B_1 \cdot |ab| - B_2 \cdot |cd| \\ &= l(B_1 - B_2) = \mu_0 \alpha l \Rightarrow \alpha = \frac{B_1 - B_2}{\mu_0}\end{aligned}$$

如 $B_1 > B_2$ 电流方向： \odot

$$\vec{B}_0 = \frac{\vec{B}_1 + \vec{B}_2}{2} \quad \alpha = \frac{B_1 - B_2}{\mu_0}$$

$$d\vec{f} = \alpha d\vec{l} \times \vec{B}_0$$



$$p = \frac{df}{dl} = \alpha B_0 = \frac{(B_1 - B_2)}{\mu_0} \frac{(B_1 + B_2)}{2}$$

$$= \frac{1}{2\mu_0} (B_1^2 - B_2^2)$$

也适用于曲面上的电流。

例： 半径为 R 载有电流 I_2 的导体圆环与电流为 I_1 的长直导线放在同一平面内(如图)，直导线与圆心相距为 d ，且 $R < d$ 两者间绝缘，
求： 作用在圆电流的磁场力。

解：

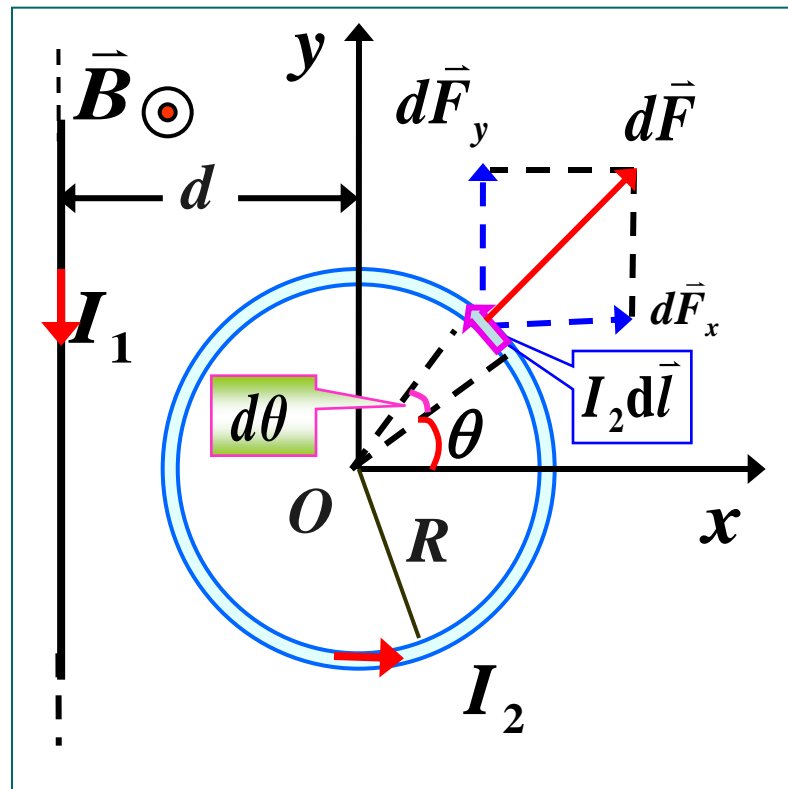
$$B = \frac{\mu_0}{2\pi} \frac{I_1}{d + R \cos \theta}$$

$$dF = BI_2 dl$$

$$= \frac{\mu_0 I_1 I_2}{2\pi} \frac{dl}{d + R \cos \theta}$$

$$dl = R d\theta$$

$$dF = \frac{\mu_0 I_1 I_2}{2\pi} \frac{R d\theta}{d + R \cos \theta}$$



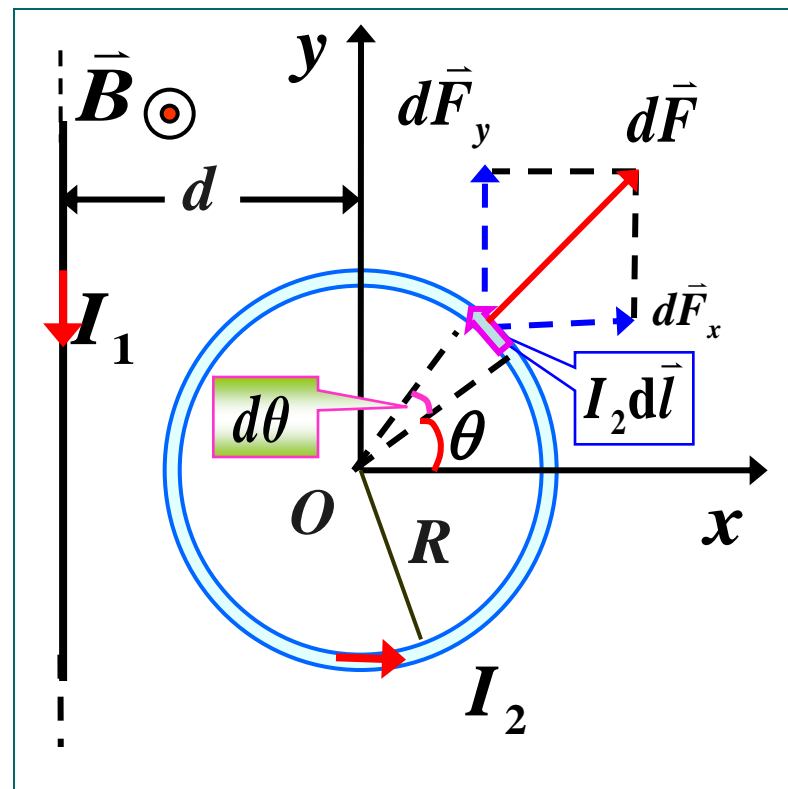
根据对称性(上下) $F_y = 0$

F_x 左右对称, 但磁场大小不同

$$dF_x = dF \cos \theta = \frac{\mu_0 I_1 I_2}{2\pi} \frac{R \cos \theta d\theta}{d + R \cos \theta}$$

$$F_x = \frac{\mu_0 I_1 I_2 R}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{\cos \theta d\theta}{d + R \cos \theta}$$
$$= \mu_0 I_1 I_2 \left(1 - \frac{d}{\sqrt{d^2 - R^2}}\right)$$

$$\vec{F} = F_x \vec{i} = \mu_0 I_1 I_2 \left(1 - \frac{d}{\sqrt{d^2 - R^2}}\right) \vec{i}$$

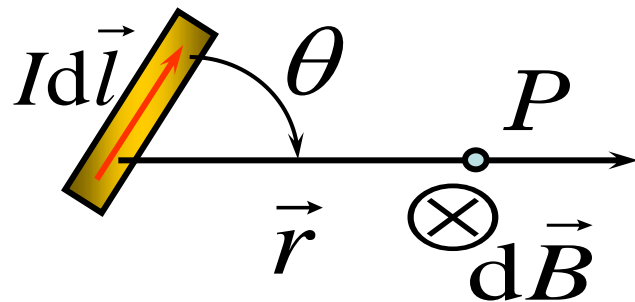


$$\int \frac{dx}{a + b \cos x} = \frac{2}{a + b} \sqrt{\frac{a + b}{a - b}} \arctan\left(\sqrt{\frac{a - b}{a + b}} \tan \frac{x}{2}\right) + C \quad (a^2 > b^2)$$

§ 11.5 带电粒子的运动

一、运动带电粒子的磁场

考虑一段导体，其截面积为 S ，其中载流子的密度为 n ，载流子带电 q ，以漂移速度 \vec{v} 运动。



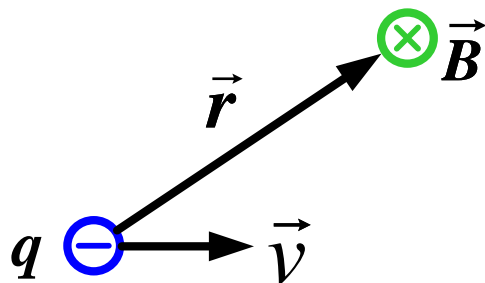
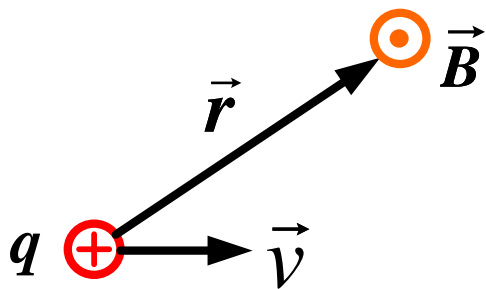
$$I = qnvS \quad q\vec{v} \parallel d\vec{l} \Rightarrow Id\vec{l} = qn\vec{v}Sdl$$

毕奥—萨伐尔定律：

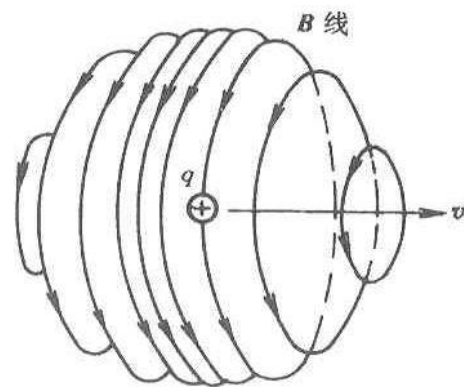
$$d\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{Id\vec{l} \times \vec{r}}{r^3} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{qnSdl\vec{v} \times \vec{r}}{r^3}$$

$dN = nSdl$ 个载流子产生 $d\vec{B}$

一个载流子产生 $\vec{B} = \frac{d\vec{B}}{dN} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{q\vec{v} \times \vec{r}}{r^3}$



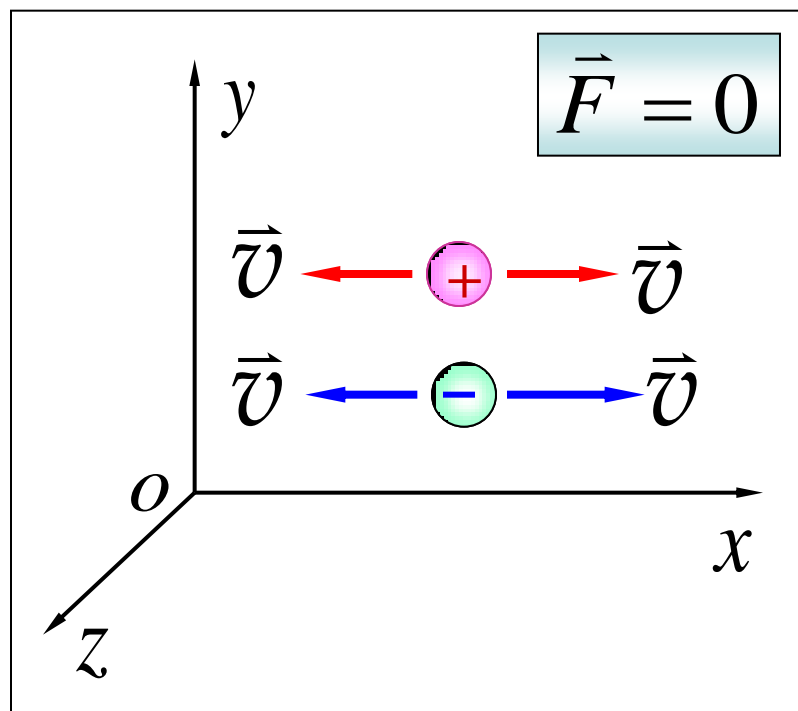
注意: $v \ll c$



$$d\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{Id\vec{l} \times \vec{r}}{r^3} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{qnSdl\vec{v} \times \vec{r}}{r^3}$$

二、带电粒子在匀强磁场中的运动

(1) $\vec{v} // \vec{B} \rightarrow F = 0$ ➤ 粒子运动状态不变!

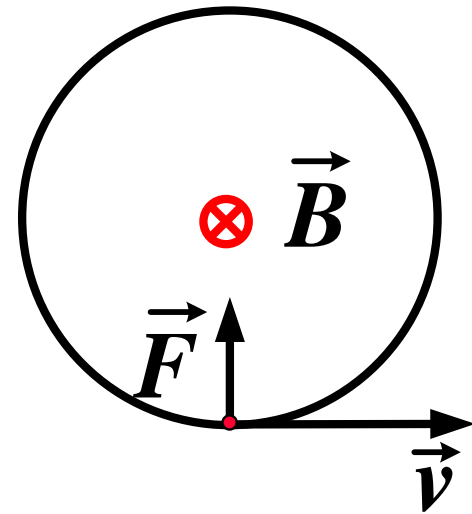


$$(2) \quad \vec{v} \perp \vec{B} \rightarrow F = qvB$$

$$qvB = \frac{mv^2}{R}$$

$$R = \frac{mv}{qB}$$

$$T = \frac{2\pi R}{v} = \frac{2\pi m}{qB}$$



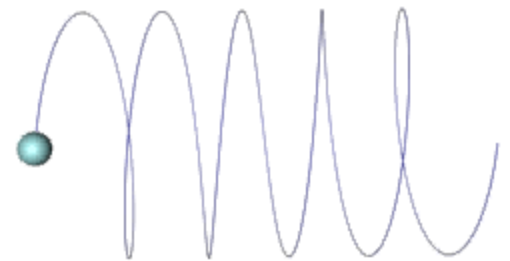
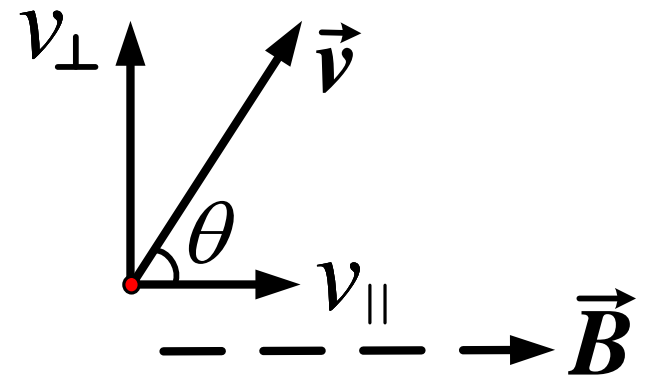
➤粒子沿圆周运动！

(3) \vec{v} 与 \vec{B} 成 θ

$$R = \frac{mv_{\perp}}{qB} = \frac{mv \sin \theta}{qB}$$

$$T = \frac{2\pi m}{qB}$$

$$h = v_{\parallel} T = \frac{2\pi m v \cos \theta}{qB}$$

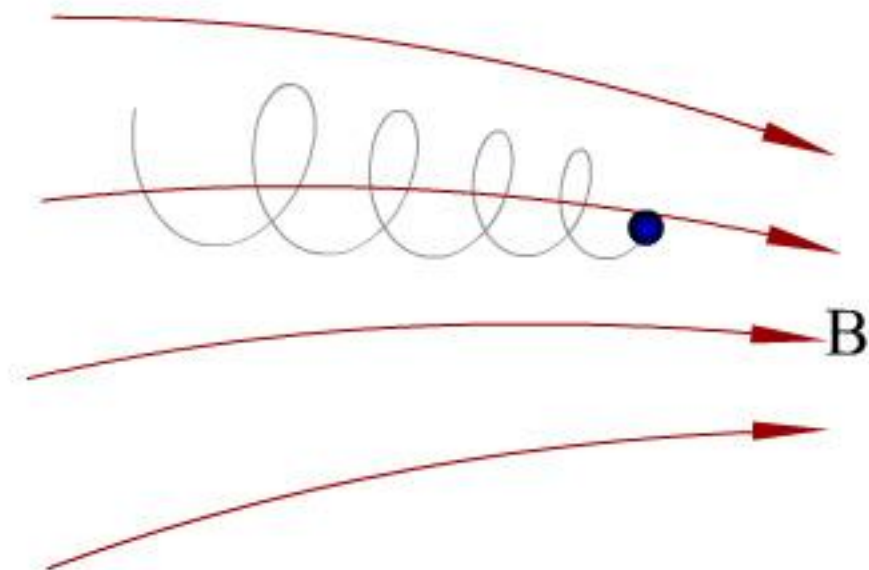


演示



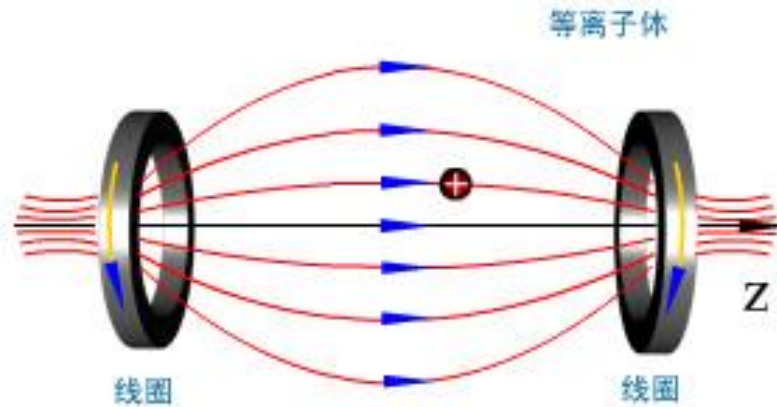
粒子沿螺旋线运动！

目前在大多数受控热核反应的实验装置里用磁场来约束等离子体，使之脱离器壁并限制它的热导。



强磁场可以使带电粒子的横向输运过程（如扩散、热导）受到很大的限制。

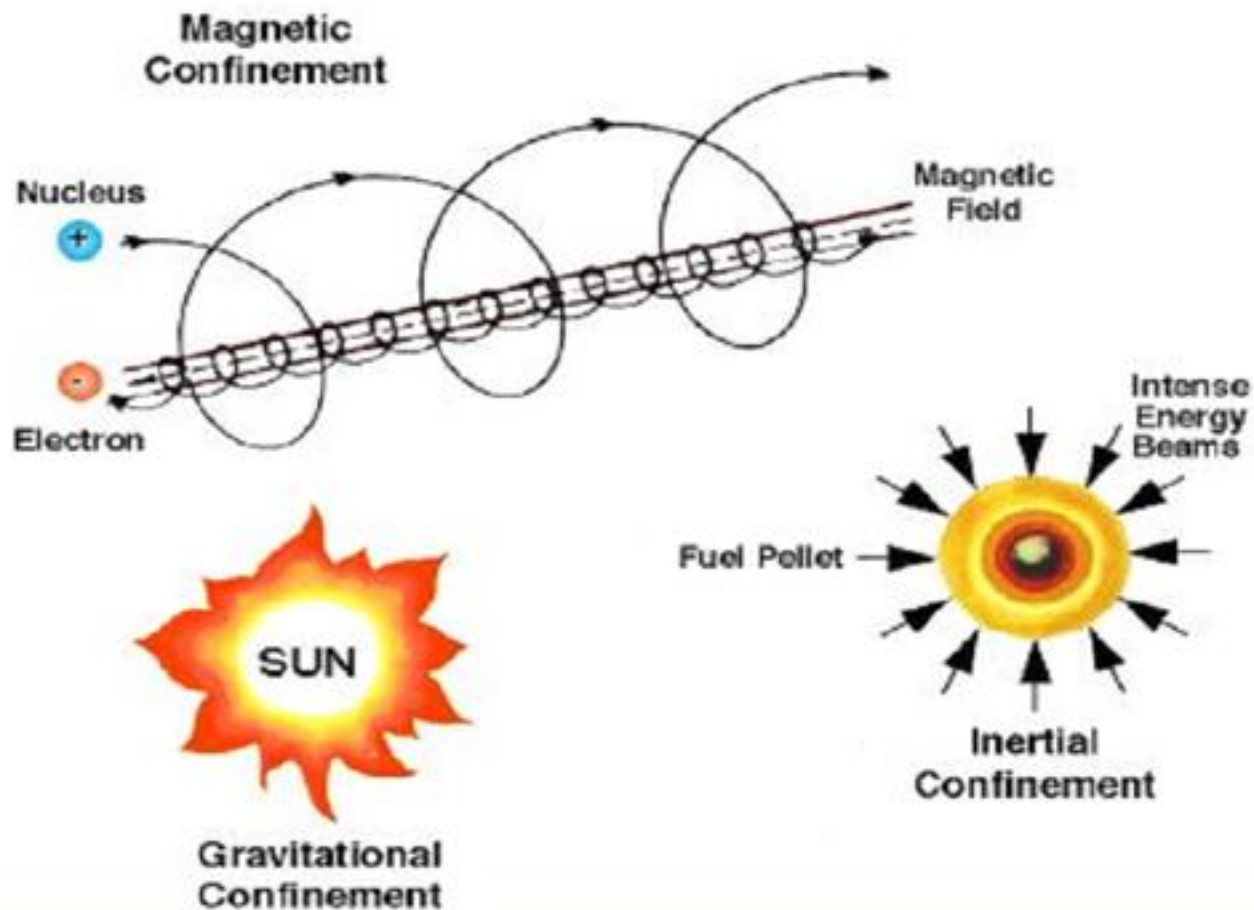
磁镜装置能限制纵向移动。



可以证明： $B \uparrow \rightarrow v_{\perp} \uparrow \rightarrow v_{//} \downarrow$

磁场分布就象牢宠一样，可以把带电粒子或等离子体约束在其中。

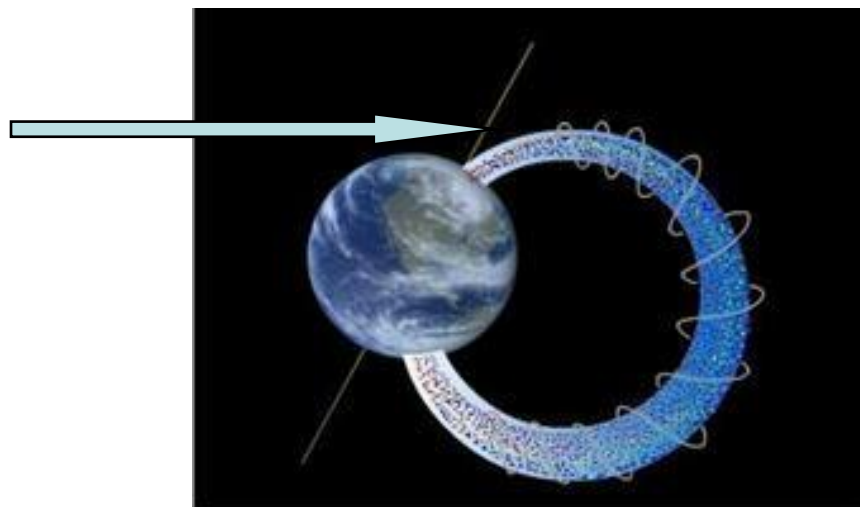
实现聚变的三种途径



磁镜约束也存在于自然界中，例如地球磁场两极强、中间弱，它使得来自宇宙射线的带电粒子在两磁极间来回振荡，从而形成所谓的范•阿仑辐射带。



美丽的极光

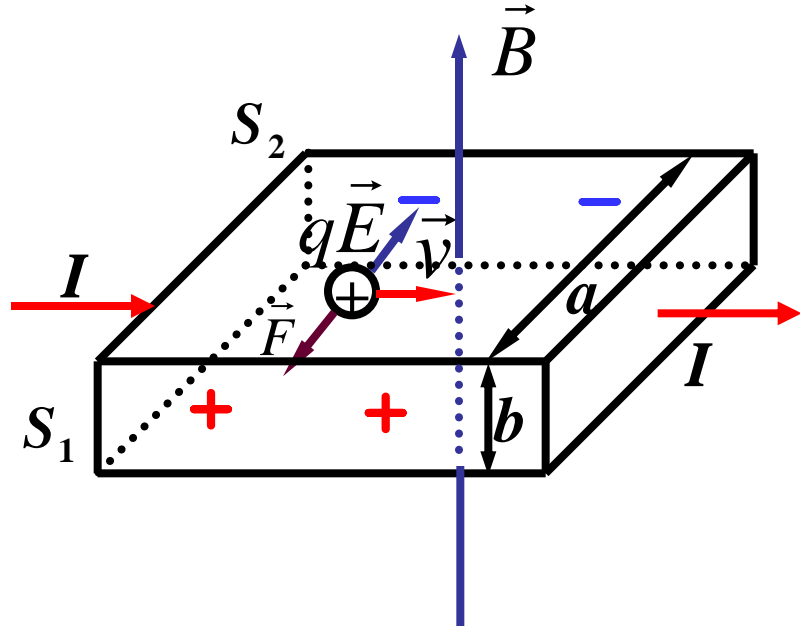




由木星探测器“朱诺号”首次从最近距离飞掠木星时拍摄木星极光。

三、霍耳效应

1879年霍耳发现，把一载流导体放在磁场中，如果磁场方向与电流方向垂直，则在与磁场和电流二者垂直的方向上出现横向电势差，这一现象称之为霍耳现象。



霍耳电势差: $U_H = U_1 - U_2$

$$U_H = R_H \frac{BI}{b} \quad R_H: \text{霍耳系数}$$

载流子: q, \vec{v}, n $\vec{F} = q\vec{v} \times \vec{B}$

平衡时: $qvB = qE$

$$\Rightarrow U_1 - U_2 = Ea = Bva$$

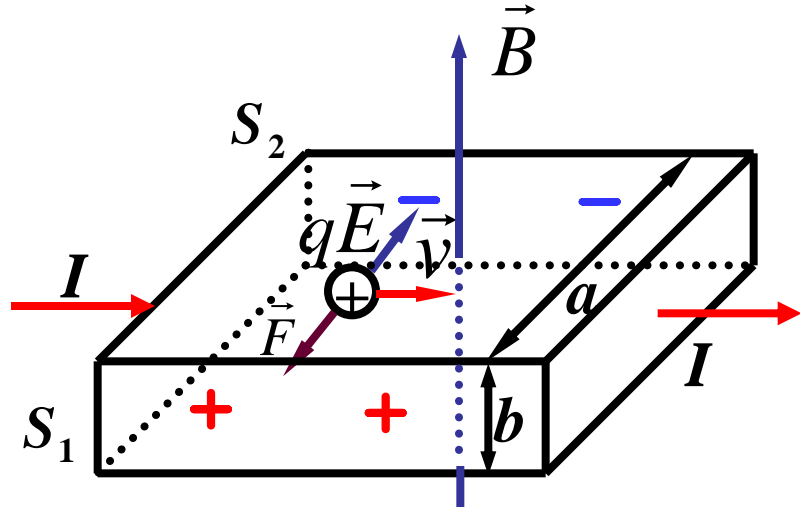
演示



$$I = nqvab$$

$$\Rightarrow v = \frac{I}{nqab}$$

$$\Rightarrow U_1 - U_2 = \frac{1}{nq} \left(\frac{BI}{b} \right) \quad R_H = \frac{1}{nq}$$



P 型半导体(空穴导电)

$$R_H > 0$$

n 型半导体(电子导电)

$$R_H < 0$$

测定载流子的浓度

$$R_H \rightarrow n$$

判定载流子的正、负

$$q > 0 \rightarrow R_H > 0 \rightarrow U_1 > U_2$$

$$q < 0 \rightarrow R_H < 0 \rightarrow U_1 < U_2$$

$$\Rightarrow U_1 - U_2 = Ea = Bva$$

$$U_{\text{H}} = R_{\text{H}} \frac{BI}{b}$$



高斯计是根据霍尔效应制成的测量磁感应强度的仪器，它由霍尔探头和测量仪表构成。霍尔探头在磁场中因霍尔效应而产生霍尔电压，测出霍尔电压后根据霍尔电压公式和已知的霍尔系数可确定磁感应强度的大小。

$$\Rightarrow U_1 - U_2 = \frac{1}{nq} \left(\frac{BI}{b} \right)$$

霍耳电阻 $R = \frac{U_H}{I} = \frac{B}{nqb} \propto B$

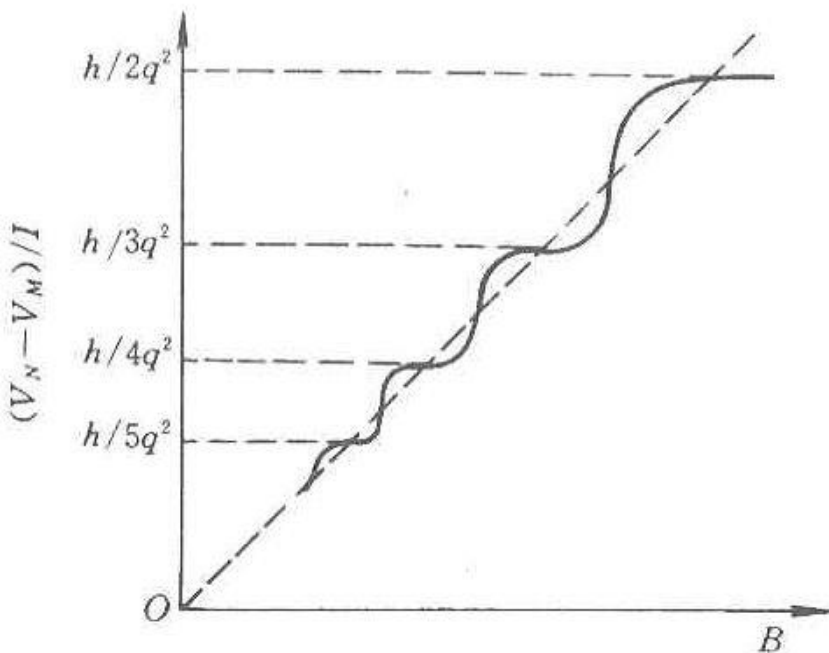
*量子霍耳效应:

1980年克里青发现,
在极低温、强磁场下

$$R \not\propto B$$

$$R = \frac{R_K}{n}, \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

克里青 (Klitzing) 常量 $R_K = \frac{h}{e^2} = 25812.80 \Omega$



R_K 的测量准确到 10^{-10}

1990年定义 $1\Omega = \frac{R_K}{2581280}$

*分数量子霍耳效应:

崔琦和施特默 (Störmer) 发现在更强的磁场下 ($B > 20 \text{ T}$) , n 可以是分数, 如: $1/3$ 、 $1/5$ 、 $1/2$ 、 $1/4$ 等, 这称为分数量子霍耳效应。劳克林 (Laughlin) 成功地给出了理论解释。该效应表明, 有携带分数电荷的准粒子存在。

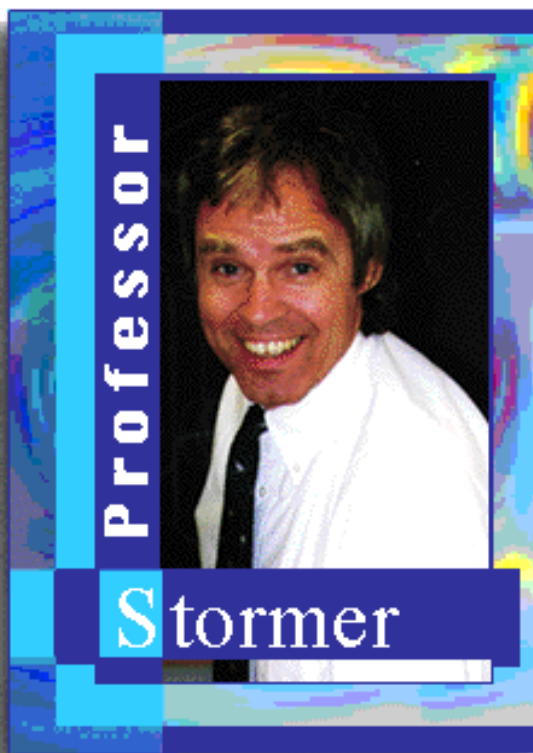
整数和分数量子霍耳效应及其理论解释是我们认识宏观量子现象的一次重要突破。克里青获得了1985年诺贝尔物理学奖。劳克林、施特默和崔琦获得了1998年诺贝尔物理学奖。

分数量子霍尔效应

1998年 劳克林、施特默、崔琦因发现分数量子霍尔效应和一种具有分数电荷激发状态的新型量子流体获诺贝尔物理奖



崔琦



Horst L. Stormer



Robert B. Laughlin

练习：一电子型半导体做成的霍尔元件的尺寸在 x 、 y 、 z 方向分别为 a 、 b 、 c 。该霍尔元件置于匀强磁场 $\vec{B} = B\vec{k}$ 中。通以沿 x 方向的电流 I ，试在图上标出在哪两面上出现霍尔电压，并指出霍尔电压的正、负极性。若测得霍尔电压为 U_H ，则该霍尔元件的载流子浓度

$n =$ _____。（电子电量为 e ）

$$evB = eE$$

$$U_H = Eb = Bvb$$

$$I = nevbc$$

$$\Rightarrow n = \frac{BI}{eU_H c}$$

