数学基础 For 运动学

- 矩阵对时间的导数
- 矢量对时间的导数
- 方向余弦阵

理论力学CAI

矩阵对时间的导数

- 元素为时间 t 的函数，记为$A_{ij}(t)$，该矩阵记为$\boldsymbol{A}(t)$

$$\boldsymbol{A}(t) = \left(A_{ij}(t)\right)_{m\times n}$$

例

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} \cos t & \sin t \\ -\sin t & \cos t \end{pmatrix} \qquad \boldsymbol{B} = \begin{pmatrix} t & 0 \\ 0 & t^2 \end{pmatrix}$$

- 矩阵对时间导数的定义
  - 矩阵对时间的导数为一同阶矩阵
  - 其各元素为原矩阵的元素$A_{ij}(t)$对时间的导数

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{A} \overset{\text{def}}{=} \left(\frac{\mathrm{d}A_{ij}}{\mathrm{d}t}\right)_{m\times n} \qquad \dot{\boldsymbol{A}} = \left(\dot{A}_{ij}\right)_{m\times n}$$

例

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} \cos t & \sin t \\ -\sin t & \cos t \end{pmatrix}$$

$$\dot{\boldsymbol{A}} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\begin{pmatrix} \cos t & \sin t \\ -\sin t & \cos t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\cos t & \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\sin t \\ \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(-\sin t) & \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\cos t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\sin t & \cos t \\ -\cos t & -\sin t \end{pmatrix}$$

- 矩阵对时间导数的运算

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}) = \left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{A}\right) + \left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{B}\right) = \dot{\boldsymbol{A}} + \dot{\boldsymbol{B}}$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\alpha\boldsymbol{A}) = \frac{\mathrm{d}\alpha}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{A} + \alpha\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{A}\right) = \dot{\alpha}\boldsymbol{A} + \alpha\dot{\boldsymbol{A}}$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\boldsymbol{A}\boldsymbol{B}) = \left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{A}\right)\boldsymbol{B} + \boldsymbol{A}\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{B}\right) = \dot{\boldsymbol{A}}\boldsymbol{B} + \boldsymbol{A}\dot{\boldsymbol{B}}$$

[例] 已知 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}\cos t & \sin t\\ -\sin t & \cos t\end{pmatrix}$ $\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}t & 0\\ 0 & t^2\end{pmatrix}$

验证 $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})=\dot{\boldsymbol{A}}+\dot{\boldsymbol{B}}$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left[\begin{pmatrix}\cos t & \sin t\\ -\sin t & \cos t\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}t & 0\\ 0 & t^2\end{pmatrix}\right]=\begin{pmatrix}1-\sin t & \cos t\\ -\cos t & 2t-\sin t\end{pmatrix}$$

$$=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\begin{pmatrix}t+\cos t & \sin t\\ -\sin t & t^2+\cos t\end{pmatrix}$$

$$\dot{\boldsymbol{A}}=\begin{pmatrix}-\sin t & \cos t\\ -\cos t & -\sin t\end{pmatrix}\qquad \dot{\boldsymbol{B}}=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 2t\end{pmatrix}$$

$$\dot{\boldsymbol{A}}+\dot{\boldsymbol{B}}=\begin{pmatrix}-\sin t & \cos t\\ -\cos t & -\sin t\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 2t\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1-\sin t & \cos t\\ -\cos t & 2t-\sin t\end{pmatrix}$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})=\dot{\boldsymbol{A}}+\dot{\boldsymbol{B}}$$

[例] 已知 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}\cos t & \sin t\\ -\sin t & \cos t\end{pmatrix}$ $\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}t & 0\\ 0 & t^2\end{pmatrix}$

验证 $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\boldsymbol{A}\boldsymbol{B})=\dot{\boldsymbol{A}}\boldsymbol{B}+\boldsymbol{A}\dot{\boldsymbol{B}}$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\boldsymbol{A}\boldsymbol{B})=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left[\begin{pmatrix}\cos t & \sin t\\ -\sin t & \cos t\end{pmatrix}\begin{pmatrix}t & 0\\ 0 & t^2\end{pmatrix}\right]=\begin{pmatrix}\cos t-t\sin t & 2t\sin t+t^2\cos t\\ -\sin t-t\cos t & 2t\cos t-t^2\sin t\end{pmatrix}$$

$$=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\begin{pmatrix}t\cos t & t^2\sin t\\ -t\sin t & t^2\cos t\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\cos t-t\sin t & 2t\sin t+t^2\cos t\\ -\sin t-t\cos t & 2t\cos t-t^2\sin t\end{pmatrix}$$

$$\dot{\boldsymbol{A}}=\begin{pmatrix}-\sin t & \cos t\\ -\cos t & -\sin t\end{pmatrix}\qquad \dot{\boldsymbol{B}}=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 2t\end{pmatrix}$$

$$\dot{\boldsymbol{A}}\boldsymbol{B}+\boldsymbol{A}\dot{\boldsymbol{B}}=\begin{pmatrix}-\sin t & \cos t\\ -\cos t & -\sin t\end{pmatrix}\begin{pmatrix}t & 0\\ 0 & t^2\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}\cos t & \sin t\\ -\sin t & \cos t\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 2t\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}-t\sin t & t^2\cos t\\ -t\cos t & -t^2\sin t\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}\cos t & 2t\sin t\\ -\sin t & 2t\cos t\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\cos t-t\sin t & 2t\sin t+t^2\cos t\\ -\sin t-t\cos t & 2t\cos t-t^2\sin t\end{pmatrix}$$

数学基础 For 运动学

- 矩阵对时间的导数
- 矢量对时间的导数
- 方向余弦阵

矢量对时间的导数

- 矢量导数的定义
- 矢量导数运算与坐标阵导数运算的关系

矢量导数的定义

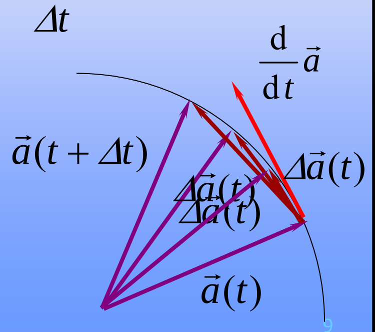
- 定义矢量$\vec{a}(t)$对时间的导数是一矢量, 且

$$\Delta\vec{a}(t)=\vec{a}(t+\Delta t)-\vec{a}(t)$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\vec{a}\overset{\mathrm{def}}{=}\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\vec{a}(t+\Delta t)-\vec{a}(t)}{\Delta t}=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta\vec{a}(t)}{\Delta t}$$

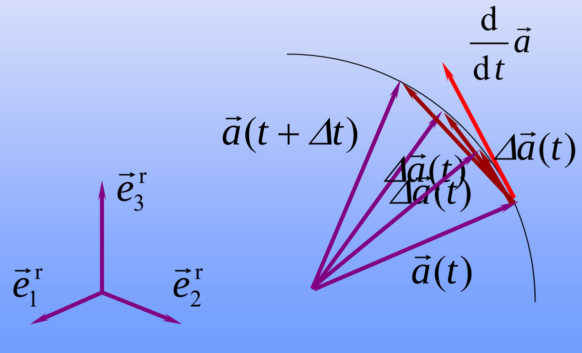
$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\vec{a}=\dot{\vec{a}}$$

与轨迹相切



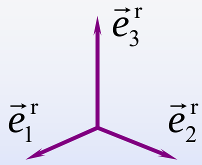
- 矢量在某一基下对时间的导数
  - 在某个基下考察矢量的变化

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\vec{a}$$



- 矢量在某一基下对时间的导数
  - 在某个基下考察矢量的变化
- 基矢量在自身基下对时间的导数

$$\frac{{}^{r}\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\vec{a}$$



$$\frac{{}^{r}\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\vec{e}_1^{\,r}=\vec{0}$$

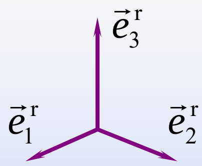
$$\frac{{}^{r}\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\vec{e}_2^{\,r}=\vec{0}$$

$$\frac{{}^{r}\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\vec{e}_3^{\,r}=\vec{0}$$

$$\frac{{}^{r}\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{e}^{r}=\frac{{}^{r}\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\begin{pmatrix}\vec{e}_1^{\,r}\\ \vec{e}_2^{\,r}\\ \vec{e}_3^{\,r}\end{pmatrix}=\vec{\mathbf{0}}$$

- 矢量在某一基下对时间的导数
  - 在某个基下考察矢量的变化
- 基矢量在自身基下对时间的导数

$$\frac{{}^{r}\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\vec{a}$$



$$\frac{{}^{r}\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{e}^{r}=\vec{\mathbf{0}}$$

- 标量对时间的导数与基无关

$$\frac{{}^{r}\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\alpha=\frac{{}^{b}\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\alpha=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\alpha=\dot{\alpha}$$

- 任意矢量在某基下对时间的导数

$$\frac{{}^{r}\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\vec{a} = \frac{{}^{r}\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\boldsymbol{a}^{rT}\vec{\boldsymbol{e}}^{r}) = \left(\frac{{}^{r}\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{a}^{rT}\right)\vec{\boldsymbol{e}}^{r} + \boldsymbol{a}^{rT}\cancel{\frac{{}^{r}\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}}\vec{\boldsymbol{e}}^{r}$$

$$\vec{a} = \boldsymbol{a}^{rT}\vec{\boldsymbol{e}}^{r} \qquad \frac{{}^{r}\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\vec{\boldsymbol{e}}^{r} = \vec{\boldsymbol{0}}$$

$$\vec{a} = \vec{\boldsymbol{e}}^{rT}\boldsymbol{a}^{r}$$

$$\frac{{}^{r}\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\vec{a} = \dot{\boldsymbol{a}}^{rT}\vec{\boldsymbol{e}}^{r} \qquad \frac{{}^{r}\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\vec{a} = \vec{\boldsymbol{e}}^{rT}\dot{\boldsymbol{a}}^{r}$$

矢量在某基下对时间的导数为一矢量，它在该基的坐标阵等于矢量在该基下的坐标阵对时间的导数

[例] 求如下矢量在基 $\vec{\boldsymbol{e}}^{r}$ 下对时间的导数

$$\vec{a} = (\sin t)\vec{e}_1^{r} + (\cos 2t)\vec{e}_2^{r} + (3t)\vec{e}_3^{r}$$

[解1]直接计算： $\boldsymbol{a}^{r} = \begin{pmatrix}\sin t & \cos 2t & 3t\end{pmatrix}^{T}$

$$\frac{{}^{r}\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\vec{a} = \underline{\frac{{}^{r}\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left[(\sin t)\vec{e}_1^{r}\right]} + \frac{{}^{r}\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left[(\cos 2t)\vec{e}_2^{r}\right] + \frac{{}^{r}\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left[(3t)\vec{e}_3^{r}\right]$$

$$= (\cos t)\vec{e}_1^{r} - 2(\sin 2t)\vec{e}_2^{r} + 3\vec{e}_3^{r}$$

$$\frac{{}^{r}\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left[(\sin t)\vec{e}_1^{r}\right] = \left[\frac{{}^{r}\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\sin t)\right]\vec{e}_1^{r} + (\sin t)\cancel{\frac{{}^{r}\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}}\vec{e}_1^{r}$$

[解2]按公式计算：

矢量在 $\vec{\boldsymbol{e}}^{r}$ 坐标阵对时间求导

$$\dot{\boldsymbol{a}}^{r} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\begin{pmatrix}\sin t & \cos 2t & 3t\end{pmatrix}^{T} = \begin{pmatrix}\cos t & -2\sin 2t & 3\end{pmatrix}^{T}$$

$$\frac{{}^{r}\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\vec{a} = \dot{\boldsymbol{a}}^{rT}\vec{\boldsymbol{e}}^{r} = (\cos t)\vec{e}_1^{r} - 2(\sin 2t)\vec{e}_2^{r} + 3\vec{e}_3^{r}$$

矢量导数的运算与坐标阵运算的关系

- 同一个基下两种运算的关系：

矢量运算式	坐标阵运算式
$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\vec{a}+\vec{b})=\dot{\vec{a}}+\dot{\vec{b}}$	$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})=\dot{\boldsymbol{a}}+\dot{\boldsymbol{b}}$
$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\alpha\vec{a})=\dot{\alpha}\vec{a}+\alpha\dot{\vec{a}}$	$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\alpha\boldsymbol{a})=\dot{\alpha}\boldsymbol{a}+\alpha\dot{\boldsymbol{a}}$
$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\vec{a}\cdot\vec{b})=\dot{\vec{a}}\cdot\vec{b}+\vec{a}\cdot\dot{\vec{b}}$	$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\boldsymbol{a}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{b})=\dot{\boldsymbol{a}}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{b}+\boldsymbol{b}^{\mathrm{T}}\dot{\boldsymbol{a}}$
$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\vec{a}\times\vec{b})=\dot{\vec{a}}\times\vec{b}+\vec{a}\times\dot{\vec{b}}$	$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\tilde{\boldsymbol{a}}\boldsymbol{b})=\dot{\tilde{\boldsymbol{a}}}\boldsymbol{b}+\tilde{\boldsymbol{a}}\dot{\boldsymbol{b}}$

$$\dot{\tilde{\boldsymbol{a}}}=\widetilde{\dot{\boldsymbol{a}}}$$

小结

- 矢量的代数表达
  - 几何矢量与代数矢量的对应关系
  - 几何矢量的运算与坐标阵运算的关系

- 代数矢量公式

$$\frac{{}^{r}\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\vec{a} = \dot{\boldsymbol{a}}^{rT}\vec{\boldsymbol{e}}^{r} \qquad \frac{{}^{r}\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\vec{a} = \vec{\boldsymbol{e}}^{rT}\dot{\boldsymbol{a}}^{r}$$

$$\frac{{}^{r}\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\vec{\boldsymbol{e}}^{r} = \frac{{}^{r}\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\begin{pmatrix}\vec{e}_1^{r}\\ \vec{e}_2^{r}\\ \vec{e}_3^{r}\end{pmatrix} = \vec{\boldsymbol{0}}$$

数学基础 For 运动学

- 矩阵对时间的导数
- 矢量对时间的导数
- 方向余弦阵

方向余弦阵

- 方向余弦阵的定义
- 方向余弦阵的性质
- 平面问题

方向余弦阵

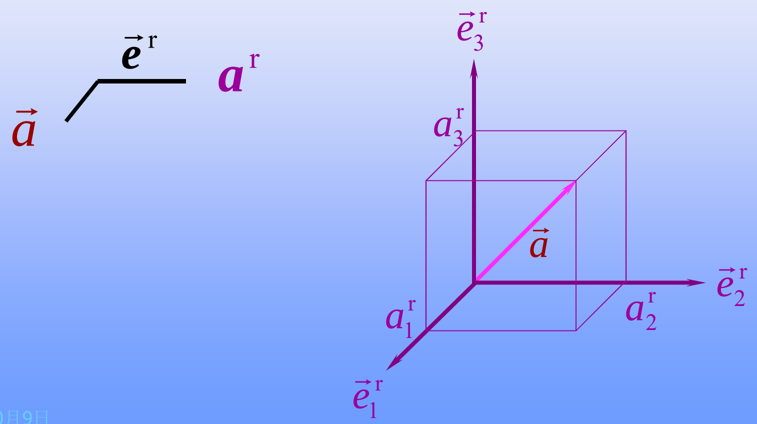
- 方向余弦阵的定义
- 方向余弦阵的性质
- 平面问题

方向余弦阵的定义

- 问题的提出
- 方向余弦阵定义

- 问题的提出

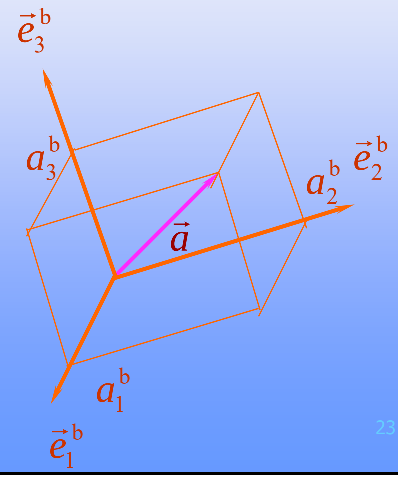
同一个矢量在不同基下坐标阵的关系



- 问题的提出

同一个矢量在不同基下坐标阵的关系

$$\vec{a} \begin{cases} \vec{\boldsymbol{e}}^{\mathrm{r}} & \boldsymbol{a}^{\mathrm{r}} \\ \vec{\boldsymbol{e}}^{\mathrm{b}} & \boldsymbol{a}^{\mathrm{b}} \end{cases}$$



方向余弦矩阵/定义

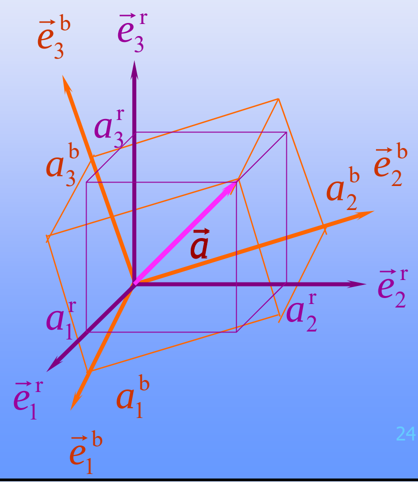
- 问题的提出

$$\vec{a} \begin{cases} \vec{\boldsymbol{e}}^{\mathrm{r}} & \boldsymbol{a}^{\mathrm{r}} \\ \vec{\boldsymbol{e}}^{\mathrm{b}} & \boldsymbol{a}^{\mathrm{b}} \end{cases}$$

$$\vec{a} = \boldsymbol{a}^{\mathrm{rT}} \vec{\boldsymbol{e}}^{\mathrm{r}} = \boldsymbol{a}^{\mathrm{bT}} \vec{\boldsymbol{e}}^{\mathrm{b}}$$

$$\boldsymbol{a}^{\mathrm{r}} \sim \boldsymbol{a}^{\mathrm{b}}$$

不等但有关系



- 方向余弦矩阵的定义

对于两个不同的基

$$\vec{\boldsymbol{e}}^{\mathrm{r}} = \begin{pmatrix}\vec{e}_1^{\mathrm{r}} & \vec{e}_2^{\mathrm{r}} & \vec{e}_3^{\mathrm{r}}\end{pmatrix}^{\mathrm{T}} \qquad \vec{\boldsymbol{e}}^{\mathrm{b}} = \begin{pmatrix}\vec{e}_1^{\mathrm{b}} & \vec{e}_2^{\mathrm{b}} & \vec{e}_3^{\mathrm{b}}\end{pmatrix}^{\mathrm{T}}$$

定义如下3*3标量阵为基 $\vec{\boldsymbol{e}}^{\mathrm{b}}$ 关于基 $\vec{\boldsymbol{e}}^{\mathrm{r}}$ 的方向余弦矩阵

$$\boldsymbol{A}^{\mathrm{rb}} = \vec{\boldsymbol{e}}^{\mathrm{r}} \cdot \vec{\boldsymbol{e}}^{\mathrm{bT}} = \begin{pmatrix}\vec{e}_1^{\mathrm{r}} \\ \vec{e}_2^{\mathrm{r}} \\ \vec{e}_3^{\mathrm{r}}\end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix}\vec{e}_1^{\mathrm{b}} & \vec{e}_2^{\mathrm{b}} & \vec{e}_3^{\mathrm{b}}\end{pmatrix}$$

$$\boldsymbol{A}^{\mathrm{rb}} \overset{\mathrm{def}}{=} \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \vec{e}_1^{\mathrm{r}} \cdot \vec{e}_1^{\mathrm{b}} & \vec{e}_1^{\mathrm{r}} \cdot \vec{e}_2^{\mathrm{b}} & \vec{e}_1^{\mathrm{r}} \cdot \vec{e}_3^{\mathrm{b}} \\ \vec{e}_2^{\mathrm{r}} \cdot \vec{e}_1^{\mathrm{b}} & \vec{e}_2^{\mathrm{r}} \cdot \vec{e}_2^{\mathrm{b}} & \vec{e}_2^{\mathrm{r}} \cdot \vec{e}_3^{\mathrm{b}} \\ \vec{e}_3^{\mathrm{r}} \cdot \vec{e}_1^{\mathrm{b}} & \vec{e}_3^{\mathrm{r}} \cdot \vec{e}_2^{\mathrm{b}} & \vec{e}_3^{\mathrm{r}} \cdot \vec{e}_3^{\mathrm{b}} \end{pmatrix}$$

方向余弦矩阵的元素是两基基矢量夹角的余弦

- 方向余弦阵的元素的几何意义

$$\boldsymbol{A}^{\mathrm{rb}} \overset{\mathrm{def}}{=} \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \vec{e}_1^{\mathrm{r}} \cdot \vec{e}_1^{\mathrm{b}} & \vec{e}_1^{\mathrm{r}} \cdot \vec{e}_2^{\mathrm{b}} & \vec{e}_1^{\mathrm{r}} \cdot \vec{e}_3^{\mathrm{b}} \\ \vec{e}_2^{\mathrm{r}} \cdot \vec{e}_1^{\mathrm{b}} & \vec{e}_2^{\mathrm{r}} \cdot \vec{e}_2^{\mathrm{b}} & \vec{e}_2^{\mathrm{r}} \cdot \vec{e}_3^{\mathrm{b}} \\ \vec{e}_3^{\mathrm{r}} \cdot \vec{e}_1^{\mathrm{b}} & \vec{e}_3^{\mathrm{r}} \cdot \vec{e}_2^{\mathrm{b}} & \vec{e}_3^{\mathrm{r}} \cdot \vec{e}_3^{\mathrm{b}} \end{pmatrix}$$

	$\vec{e}_1^{\mathrm{b}}$	$\vec{e}_2^{\mathrm{b}}$	$\vec{e}_3^{\mathrm{b}}$
$\vec{e}_1^{\mathrm{r}}$	A_{11}	A_{12}	A_{13}
$\vec{e}_2^{\mathrm{r}}$	A_{21}	A_{22}	A_{23}
$\vec{e}_3^{\mathrm{r}}$	A_{31}	A_{32}	A_{33}

行阵的转置是基 $\vec{\boldsymbol{e}}^{\mathrm{r}}$ 的基矢量在基 $\vec{\boldsymbol{e}}^{\mathrm{b}}$ 下的坐标阵

基矢量 $\vec{e}_i^{\mathrm{r}} \xrightarrow{\vec{\boldsymbol{e}}^{\mathrm{b}}}$ 坐标阵 $\boldsymbol{A}_i^{\mathrm{b}} = \begin{pmatrix}A_{i1} & A_{i2} & A_{i3}\end{pmatrix}^{\mathrm{T}} \quad i=1,2,3$

$$\vec{e}_i^{\mathrm{r}} = A_{i1}\vec{e}_1^{\mathrm{b}} + A_{i2}\vec{e}_2^{\mathrm{b}} + A_{i3}\vec{e}_3^{\mathrm{b}} \quad i=1,2,3$$

$$\vec{e}_i^{\mathrm{r}} = \begin{pmatrix}A_{i1} & A_{i2} & A_{i3}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\vec{e}_1^{\mathrm{b}} \\ \vec{e}_2^{\mathrm{b}} \\ \vec{e}_3^{\mathrm{b}}\end{pmatrix} \quad i=1,2,3$$

$$\begin{pmatrix}\vec{e}_1^{\mathrm{r}} \\ \vec{e}_2^{\mathrm{r}} \\ \vec{e}_3^{\mathrm{r}}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} \end{pmatrix}\begin{pmatrix}\vec{e}_1^{\mathrm{b}} \\ \vec{e}_2^{\mathrm{b}} \\ \vec{e}_3^{\mathrm{b}}\end{pmatrix}$$

$$\vec{\boldsymbol{e}}^{\mathrm{r}} = \boldsymbol{A}^{\mathrm{rb}}\vec{\boldsymbol{e}}^{\mathrm{b}}$$

$$\boldsymbol{A}^{\mathrm{rb}} \overset{\mathrm{def}}{=} \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \vec{e}_1^{\,\mathrm{r}} \cdot \vec{e}_1^{\,\mathrm{b}} & \vec{e}_1^{\,\mathrm{r}} \cdot \vec{e}_2^{\,\mathrm{b}} & \vec{e}_1^{\,\mathrm{r}} \cdot \vec{e}_3^{\,\mathrm{b}} \\ \vec{e}_2^{\,\mathrm{r}} \cdot \vec{e}_1^{\,\mathrm{b}} & \vec{e}_2^{\,\mathrm{r}} \cdot \vec{e}_2^{\,\mathrm{b}} & \vec{e}_2^{\,\mathrm{r}} \cdot \vec{e}_3^{\,\mathrm{b}} \\ \vec{e}_3^{\,\mathrm{r}} \cdot \vec{e}_1^{\,\mathrm{b}} & \vec{e}_3^{\,\mathrm{r}} \cdot \vec{e}_2^{\,\mathrm{b}} & \vec{e}_3^{\,\mathrm{r}} \cdot \vec{e}_3^{\,\mathrm{b}} \end{pmatrix}$$

	$\vec{e}_1^{\,\mathrm{b}}$	$\vec{e}_2^{\,\mathrm{b}}$	$\vec{e}_3^{\,\mathrm{b}}$
$\vec{e}_1^{\,\mathrm{r}}$	A_{11}	A_{12}	A_{13}
$\vec{e}_2^{\,\mathrm{r}}$	A_{21}	A_{22}	A_{23}
$\vec{e}_3^{\,\mathrm{r}}$	A_{31}	A_{32}	A_{33}

列阵是基 $\vec{\boldsymbol{e}}^{\mathrm{b}}$ 的基矢量在基 $\vec{\boldsymbol{e}}^{\mathrm{r}}$ 下的坐标阵

基矢量 $\vec{e}_j^{\,\mathrm{b}} \xrightarrow{\vec{\boldsymbol{e}}^{\mathrm{r}}}$ 坐标阵 $\boldsymbol{A}_j^{\mathrm{r}} = (A_{1j} \quad A_{2j} \quad A_{3j})^{\mathrm{T}} \quad j=1,2,3$

$$\vec{e}_j^{\,\mathrm{b}} = A_{1j}\vec{e}_1^{\,\mathrm{r}} + A_{2j}\vec{e}_2^{\,\mathrm{r}} + A_{3j}\vec{e}_3^{\,\mathrm{r}} \qquad j=1,2,3$$

$$\vec{e}_j^{\,\mathrm{b}} = (A_{1j} \quad A_{2j} \quad A_{j3}) \begin{pmatrix} \vec{e}_1^{\,\mathrm{r}} \\ \vec{e}_2^{\,\mathrm{r}} \\ \vec{e}_3^{\,\mathrm{r}} \end{pmatrix}$$

$j=1,2,3$

$$\begin{pmatrix} \vec{e}_1^{\,\mathrm{b}} \\ \vec{e}_2^{\,\mathrm{b}} \\ \vec{e}_3^{\,\mathrm{b}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & A_{31} \\ A_{12} & A_{22} & A_{31} \\ A_{13} & A_{23} & A_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \vec{e}_1^{\,\mathrm{r}} \\ \vec{e}_2^{\,\mathrm{r}} \\ \vec{e}_3^{\,\mathrm{r}} \end{pmatrix}$$

$$\vec{\boldsymbol{e}}^{\mathrm{b}} = (\boldsymbol{A}^{\mathrm{rb}})^{\mathrm{T}} \vec{\boldsymbol{e}}^{\mathrm{r}}$$

小结

基 $\vec{\boldsymbol{e}}^{\mathrm{b}}$ 关于基 $\vec{\boldsymbol{e}}^{\mathrm{r}}$的方向余弦矩阵对应于如下的表

$$\boldsymbol{A}^{\mathrm{rb}} = \vec{\boldsymbol{e}}^{\mathrm{r}} \cdot \vec{\boldsymbol{e}}^{\mathrm{bT}}$$

	$\vec{e}_1^{\,\mathrm{b}}$	$\vec{e}_2^{\,\mathrm{b}}$	$\vec{e}_3^{\,\mathrm{b}}$
$\vec{e}_1^{\,\mathrm{r}}$	A_{11}	A_{12}	A_{13}
$\vec{e}_2^{\,\mathrm{r}}$	A_{21}	A_{22}	A_{23}
$\vec{e}_3^{\,\mathrm{r}}$	A_{31}	A_{32}	A_{33}

列阵是基 $\vec{\boldsymbol{e}}^{\mathrm{b}}$ 的基矢量在基 $\vec{\boldsymbol{e}}^{\mathrm{r}}$ 下的坐标阵

行阵的转置是基 $\vec{\boldsymbol{e}}^{\mathrm{r}}$ 的基矢量在基 $\vec{\boldsymbol{e}}^{\mathrm{b}}$ 下的坐标阵

$$\vec{\boldsymbol{e}}^{\mathrm{r}} = \boldsymbol{A}^{\mathrm{rb}} \vec{\boldsymbol{e}}^{\mathrm{b}} \qquad \vec{\boldsymbol{e}}^{\mathrm{b}} = (\boldsymbol{A}^{\mathrm{rb}})^{\mathrm{T}} \vec{\boldsymbol{e}}^{\mathrm{r}}$$

[例]已知基 $\boldsymbol{e}^{\mathrm{b}}$ 的三个基矢量在基 $\boldsymbol{e}^{\mathrm{r}}$ 的坐标阵分别为

$$\vec{e}_1^{\,\mathrm{b}}:\ (0.338 \quad 0.429 \quad 0.838)^{\mathrm{T}}$$

$$\vec{e}_2^{\,\mathrm{b}}:\ (-0.191 \quad 0.902 \quad -0.387)^{\mathrm{T}}$$

$$\vec{e}_3^{\,\mathrm{b}}:\ (-0.922 \quad -0.293 \quad 0.387)^{\mathrm{T}}$$

	$\vec{e}_1^{\,\mathrm{b}}$	$\vec{e}_2^{\,\mathrm{b}}$	$\vec{e}_3^{\,\mathrm{b}}$
$\vec{e}_1^{\,\mathrm{r}}$	A_{11}	A_{12}	A_{13}
$\vec{e}_2^{\,\mathrm{r}}$	A_{21}	A_{22}	A_{23}
$\vec{e}_3^{\,\mathrm{r}}$	A_{31}	A_{32}	A_{33}

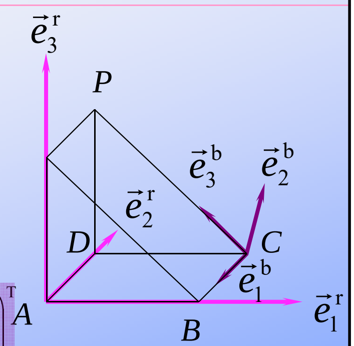
求基 $\boldsymbol{e}^{\mathrm{b}}$ 关于基 $\boldsymbol{e}^{\mathrm{r}}$ 的方向余弦阵

[解]由定义，基 $\boldsymbol{e}^{\mathrm{b}}$ 关于基 $\boldsymbol{e}^{\mathrm{r}}$ 的方向余弦阵

$$\boldsymbol{A}^{\mathrm{rb}} = \begin{pmatrix} \vec{e}_1^{\,\mathrm{r}}\cdot\vec{e}_1^{\,\mathrm{b}} & \vec{e}_1^{\,\mathrm{r}}\cdot\vec{e}_2^{\,\mathrm{b}} & \vec{e}_1^{\,\mathrm{r}}\cdot\vec{e}_3^{\,\mathrm{b}} \\ \vec{e}_2^{\,\mathrm{r}}\cdot\vec{e}_1^{\,\mathrm{b}} & \vec{e}_2^{\,\mathrm{r}}\cdot\vec{e}_2^{\,\mathrm{b}} & \vec{e}_2^{\,\mathrm{r}}\cdot\vec{e}_3^{\,\mathrm{b}} \\ \vec{e}_3^{\,\mathrm{r}}\cdot\vec{e}_1^{\,\mathrm{b}} & \vec{e}_3^{\,\mathrm{r}}\cdot\vec{e}_2^{\,\mathrm{b}} & \vec{e}_3^{\,\mathrm{r}}\cdot\vec{e}_3^{\,\mathrm{b}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.338 & -0.191 & -0.922 \\ 0.429 & 0.902 & -0.293 \\ 0.838 & -0.387 & 0.387 \end{pmatrix}$$

[例]求图示基 $\boldsymbol{e}^{\mathrm{b}}$ 对基 $\boldsymbol{e}^{\mathrm{r}}$ 方向余弦阵

其中:***AB=AD=DP=1***



[解] 基 $\boldsymbol{e}^{\mathrm{b}}$ 基矢量 关于基 $\boldsymbol{e}^{\mathrm{r}}$ 的坐标阵

$$\vec{e}_1^{\,\mathrm{b}}:\quad \vec{e}_1^{\,\mathrm{b}}\cdot\boldsymbol{e}^{\mathrm{r}} = (0 \quad \cos\pi \quad 0)^{\mathrm{T}} = (0 \quad -1 \quad 0)^{\mathrm{T}}$$

$$\vec{e}_2^{\,\mathrm{b}}:\quad \vec{e}_2^{\,\mathrm{b}}\cdot\boldsymbol{e}^{\mathrm{r}} = \left(\cos\frac{\pi}{4} \quad 0 \quad \cos\frac{\pi}{4}\right)^{\mathrm{T}} = \left(\frac{\sqrt{2}}{2} \quad 0 \quad \frac{\sqrt{2}}{2}\right)^{\mathrm{T}}$$

$$\vec{e}_3^{\,\mathrm{b}}:\quad \vec{e}_3^{\,\mathrm{b}}\cdot\boldsymbol{e}^{\mathrm{r}} = \left(-\cos\frac{\pi}{4} \quad 0 \quad \cos\frac{\pi}{4}\right)^{\mathrm{T}} = \left(-\frac{\sqrt{2}}{2} \quad 0 \quad \frac{\sqrt{2}}{2}\right)^{\mathrm{T}}$$

基 $\boldsymbol{e}^{\mathrm{b}}$ 关于基 $\boldsymbol{e}^{\mathrm{r}}$ 的方向余弦阵

$$\boldsymbol{A}^{\mathrm{rb}} = \begin{pmatrix} 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix}$$

$$\boldsymbol{a} = \vec{a}\cdot\vec{\boldsymbol{e}} = \vec{\boldsymbol{e}}\cdot\vec{a}$$

方向余弦阵九个元素应满足六个的代数方程

$$\vec{e}_j^{\,b}\cdot\vec{e}_j^{\,b}=1 \qquad \boldsymbol{A}_j^{rT}\boldsymbol{A}_j^{r}=A_{1j}^2+A_{2j}^2+A_{3j}^2=1 \quad j=1,2,3$$

单位基矢量

$$\left.\begin{array}{l}\vec{e}_1^{\,b}\cdot\vec{e}_2^{\,b}=0\\ \vec{e}_2^{\,b}\cdot\vec{e}_3^{\,b}=0\\ \vec{e}_3^{\,b}\cdot\vec{e}_1^{\,b}=0\end{array}\right\} \qquad \left.\begin{array}{l}\boldsymbol{A}_1^{rT}\boldsymbol{A}_2^{r}=A_{11}A_{12}+A_{21}A_{22}+A_{31}A_{32}=0\\ \boldsymbol{A}_2^{rT}\boldsymbol{A}_3^{r}=A_{12}A_{13}+A_{22}A_{23}+A_{32}A_{33}=0\\ \boldsymbol{A}_3^{rT}\boldsymbol{A}_1^{r}=A_{13}A_{11}+A_{23}A_{21}+A_{33}A_{31}=0\end{array}\right\}$$

三基矢量正交

方向余弦阵为正交矩阵

九个元素中只有三个是独立的

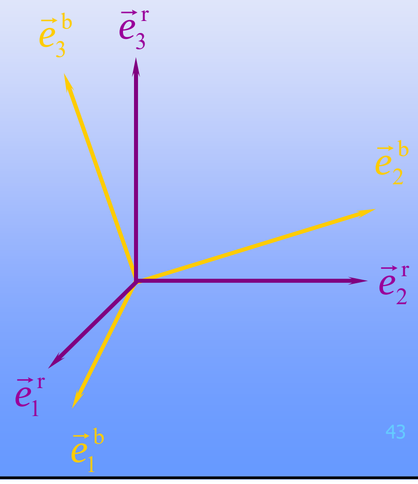
	$\vec{e}_1^{\,b}$	$\vec{e}_2^{\,b}$	$\vec{e}_3^{\,b}$
$\vec{e}_1^{\,r}$	A_{11}	A_{12}	A_{13}
$\vec{e}_2^{\,r}$	A_{21}	A_{22}	A_{23}
$\vec{e}_3^{\,r}$	A_{31}	A_{32}	A_{33}

方向余弦阵

- 方向余弦阵的定义
- 方向余弦阵的性质
- 平面问题

方向余弦阵的性质

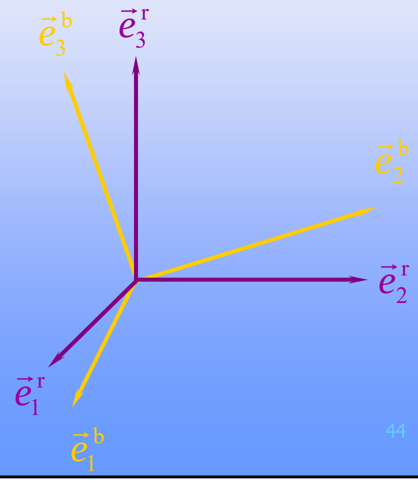
$$\boldsymbol{A}^{\mathrm{rb}} = \vec{\boldsymbol{e}}^{\,\mathrm{r}} \cdot \vec{\boldsymbol{e}}^{\,\mathrm{bT}}$$



- 性质1:

  基 $\vec{\boldsymbol{e}}^{\,\mathrm{b}}$ 关于基 $\vec{\boldsymbol{e}}^{\,\mathrm{r}}$ 的方向余弦阵 $\boldsymbol{A}^{\mathrm{rb}}$ 与基 $\vec{\boldsymbol{e}}^{\,\mathrm{r}}$ 关于基 $\vec{\boldsymbol{e}}^{\,\mathrm{b}}$ 的方向余弦阵 $\boldsymbol{A}^{\mathrm{br}}$ 互为转置

$$\left(\boldsymbol{A}^{\mathrm{rb}}\right)^{\mathrm{T}} = \boldsymbol{A}^{\mathrm{br}}$$



证明

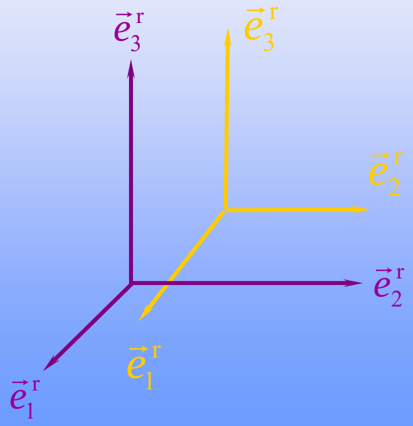
$$\left(\boldsymbol{A}^{\mathrm{rb}}\right)^{\mathrm{T}} = (\vec{\boldsymbol{e}}^{\,\mathrm{r}} \cdot \vec{\boldsymbol{e}}^{\,\mathrm{bT}})^{\mathrm{T}}$$

$$= \vec{\boldsymbol{e}}^{\,\mathrm{b}} \cdot \vec{\boldsymbol{e}}^{\,\mathrm{rT}} = \boldsymbol{A}^{\mathrm{br}}$$

- 性质2:

当两个基的基矢量的两两方向一致，则它们的方向余弦阵为三阶单位阵

$$\boldsymbol{A}^{\mathrm{rr}} = \boldsymbol{I}_3$$



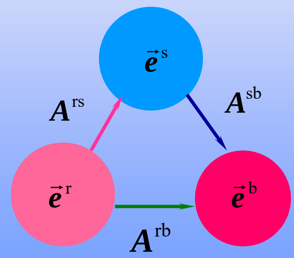
证明

$$\boldsymbol{A}^{\mathrm{rr}} = \vec{\boldsymbol{e}}^{\,\mathrm{r}} \cdot \vec{\boldsymbol{e}}^{\,\mathrm{rT}} = \boldsymbol{I}_3$$

- 性质3:

若有三个基 $\vec{e}^{\,\mathrm{r}}$、$\vec{e}^{\,\mathrm{b}}$ 与 $\vec{e}^{\,\mathrm{s}}$ 。其中基 $\vec{e}^{\,\mathrm{s}}$ 关于基 $\vec{e}^{\,\mathrm{r}}$ 和基 $\vec{e}^{\,\mathrm{b}}$ 关于基 $\vec{e}^{\,\mathrm{s}}$ 的方向余弦阵分别为 $\boldsymbol{A}^{\mathrm{rs}}$ 与 $\boldsymbol{A}^{\mathrm{sb}}$ ，则基 $\vec{e}^{\,\mathrm{b}}$ 关于基 $\vec{e}^{\,\mathrm{r}}$ 的方向余弦阵 $\boldsymbol{A}^{\mathrm{rb}}$ 为

$$\boldsymbol{A}^{\mathrm{rb}} = \boldsymbol{A}^{\mathrm{rs}} \boldsymbol{A}^{\mathrm{sb}}$$



证明

$$\vec{\boldsymbol{e}}^{\,\mathrm{r}} = \boldsymbol{A}^{\mathrm{rs}} \vec{\boldsymbol{e}}^{\,\mathrm{s}} = \underline{\boldsymbol{A}^{\mathrm{rs}} \boldsymbol{A}^{\mathrm{sb}}} \vec{\boldsymbol{e}}^{\,\mathrm{b}}$$

$$\vec{\boldsymbol{e}}^{\,\mathrm{r}} = \underline{\boldsymbol{A}^{\mathrm{rb}}} \vec{\boldsymbol{e}}^{\,\mathrm{b}}$$

此关系可推广到有限个基的方向余弦阵转换

- **性质4:**

不同基下坐标阵之间的关系式为

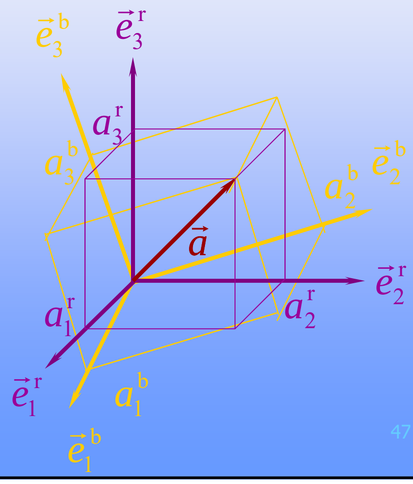
$$\boldsymbol{a}^{\mathrm{r}} = \boldsymbol{A}^{\mathrm{rb}}\boldsymbol{a}^{\mathrm{b}}$$

证明

$$\boldsymbol{a}^{\mathrm{r}} = \vec{\boldsymbol{e}}^{\mathrm{r}} \cdot \vec{a} \qquad \boldsymbol{a} = \vec{\boldsymbol{e}} \cdot \vec{a}$$

$$= \vec{\boldsymbol{e}}^{\mathrm{r}} \cdot \vec{\boldsymbol{e}}^{\mathrm{bT}}\boldsymbol{a}^{\mathrm{b}}$$

$$= \boldsymbol{A}^{\mathrm{rb}}\boldsymbol{a}^{\mathrm{b}}$$



- **性质5:**

不同基下的坐标方阵之间的关系式为

$$\tilde{\boldsymbol{a}}^{\mathrm{r}} = \boldsymbol{A}^{\mathrm{rb}}\tilde{\boldsymbol{a}}^{\mathrm{b}}\boldsymbol{A}^{\mathrm{br}}$$

证明 引入任意矢量 $\vec{b}$

考虑矢量式 $\vec{c} = \vec{a} \times \vec{b}$ 的坐标阵的运算式

$$\vec{\boldsymbol{e}}^{\mathrm{b}}:\quad \boldsymbol{c}^{\mathrm{b}} = \tilde{\boldsymbol{a}}^{\mathrm{b}}\boldsymbol{b}^{\mathrm{b}} = \tilde{\boldsymbol{a}}^{\mathrm{b}}\boldsymbol{A}^{\mathrm{br}}\boldsymbol{b}^{\mathrm{r}} \qquad \vec{\boldsymbol{e}}^{\mathrm{r}}:\quad \boldsymbol{c}^{\mathrm{r}} = \tilde{\boldsymbol{a}}^{\mathrm{r}}\boldsymbol{b}^{\mathrm{r}}$$

$$\boldsymbol{c}^{\mathrm{b}} = \boldsymbol{A}^{\mathrm{br}}\boldsymbol{c}^{\mathrm{r}}$$

$$\tilde{\boldsymbol{a}}^{\mathrm{b}}\boldsymbol{A}^{\mathrm{br}}\boldsymbol{b}^{\mathrm{r}} = \boldsymbol{A}^{\mathrm{br}}\tilde{\boldsymbol{a}}^{\mathrm{r}}\boldsymbol{b}^{\mathrm{r}}$$

对于任意矢量 $\vec{b}$

$$\tilde{\boldsymbol{a}}^{\mathrm{b}}\boldsymbol{A}^{\mathrm{br}} = \boldsymbol{A}^{\mathrm{br}}\tilde{\boldsymbol{a}}^{\mathrm{r}}$$

$$\boldsymbol{A}^{\mathrm{rb}}\boldsymbol{A}^{\mathrm{br}}\tilde{\boldsymbol{a}}^{\mathrm{r}} = \boldsymbol{A}^{\mathrm{rb}}\tilde{\boldsymbol{a}}^{\mathrm{b}}\boldsymbol{A}^{\mathrm{br}}$$

$$\boldsymbol{I}\tilde{\boldsymbol{a}}^{\mathrm{r}} = \boldsymbol{A}^{\mathrm{rb}}\tilde{\boldsymbol{a}}^{\mathrm{b}}\boldsymbol{A}^{\mathrm{br}}$$

方向余弦阵

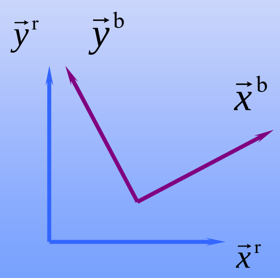
- 方向余弦阵的定义
- 方向余弦阵的性质
- **平面问题**

方向余弦阵（平面问题）

- 定义
  - 两个平面矢量基的方向余弦阵为2×2的矩阵

$$\boldsymbol{A}^{\mathrm{rb}} = \vec{\boldsymbol{e}}^{\mathrm{r}} \cdot \vec{\boldsymbol{e}}^{\mathrm{bT}}$$

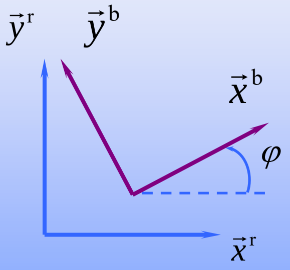
$$= \begin{pmatrix} \vec{x}^{\mathrm{r}} \cdot \vec{x}^{\mathrm{b}} & \vec{x}^{\mathrm{r}} \cdot \vec{y}^{\mathrm{b}} \\ \vec{y}^{\mathrm{r}} \cdot \vec{x}^{\mathrm{b}} & \vec{y}^{\mathrm{r}} \cdot \vec{y}^{\mathrm{b}} \end{pmatrix}$$



- 姿态角

定义基矢量 $\vec{x}^{\mathrm{b}}$ 相对于基矢量 $\vec{x}^{\mathrm{r}}$ 的夹角 φ 为基 $\vec{\boldsymbol{e}}^{\mathrm{b}}$ 相对于基 $\vec{\boldsymbol{e}}^{\mathrm{r}}$ 的姿态角

夹角 φ 旋转的正向与法矢量一致



$$\boldsymbol{A}^{\mathrm{rb}} = \vec{\boldsymbol{e}}^{\mathrm{r}} \cdot \vec{\boldsymbol{e}}^{\mathrm{bT}}$$

$$= \begin{pmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix}$$

方向余弦阵仅与一个变量（姿态角 φ ）有关

- 方向余弦阵的元素的几何意义

$$\boldsymbol{A}^{\mathrm{rb}} = \begin{pmatrix} \vec{x}^{\mathrm{r}} \cdot \vec{x}^{\mathrm{b}} & \vec{x}^{\mathrm{r}} \cdot \vec{y}^{\mathrm{b}} \\ \vec{y}^{\mathrm{r}} \cdot \vec{x}^{\mathrm{b}} & \vec{y}^{\mathrm{r}} \cdot \vec{y}^{\mathrm{b}} \end{pmatrix}$$

	$\vec{x}^{\mathrm{b}}$	$\vec{y}^{\mathrm{b}}$
$\vec{x}^{\mathrm{r}}$	A_{11}	A_{12}
$\vec{y}^{\mathrm{r}}$	A_{21}	A_{22}

列阵 $\boldsymbol{a}_1=(A_{11}\ \ A_{21})^{\mathrm{T}}$ 与 $\boldsymbol{a}_2=(A_{12}\ \ A_{22})^{\mathrm{T}}$ 分别为 $\vec{\boldsymbol{e}}^{\mathrm{b}}$ 基矢量在参考基 $\vec{\boldsymbol{e}}^{\mathrm{r}}$ 的坐标阵

$$\vec{\boldsymbol{e}}^{\mathrm{b}} = (\boldsymbol{A}^{\mathrm{rb}})^{\mathrm{T}} \vec{\boldsymbol{e}}^{\mathrm{r}}$$

行阵的转置 $\boldsymbol{b}_1=(A_{11}\ \ A_{12})^{\mathrm{T}}$ 与 $\boldsymbol{b}_2=(A_{21}\ \ A_{22})^{\mathrm{T}}$ 分别为 $\vec{\boldsymbol{e}}^{\mathrm{r}}$ 基矢量在参考基 $\vec{\boldsymbol{e}}^{\mathrm{b}}$ 的坐标阵

$$\vec{\boldsymbol{e}}^{\mathrm{r}} = \boldsymbol{A}^{\mathrm{rb}} \vec{\boldsymbol{e}}^{\mathrm{b}}$$

- 反对称阵 $\tilde{I}$ 与方向余弦阵的运算公式

$$A^{\mathrm{rb}}=\begin{pmatrix}\cos\varphi & -\sin\varphi\\ \sin\varphi & \cos\varphi\end{pmatrix}$$

$$A\tilde{I}=\tilde{I}A$$

$$\begin{pmatrix}\cos\varphi & -\sin\varphi\\ \sin\varphi & \cos\varphi\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0 & -1\\ 1 & 0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-\sin\varphi & -\cos\varphi\\ \cos\varphi & -\sin\varphi\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}0 & -1\\ 1 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\cos\varphi & -\sin\varphi\\ \sin\varphi & \cos\varphi\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-\sin\varphi & -\cos\varphi\\ \cos\varphi & -\sin\varphi\end{pmatrix}$$

$$A^{\mathrm{T}}\tilde{I}=\tilde{I}A^{\mathrm{T}}$$

$$\begin{pmatrix}\cos\varphi & \sin\varphi\\ -\sin\varphi & \cos\varphi\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0 & -1\\ 1 & 0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\sin\varphi & -\cos\varphi\\ \cos\varphi & \sin\varphi\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}0 & -1\\ 1 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\cos\varphi & \sin\varphi\\ -\sin\varphi & \cos\varphi\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\sin\varphi & -\cos\varphi\\ \cos\varphi & \sin\varphi\end{pmatrix}$$

- 方向余弦阵的导数

$$\dot{A}^{\mathrm{rb}}=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\begin{pmatrix}\cos\varphi & -\sin\varphi\\ \sin\varphi & \cos\varphi\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-\dot{\varphi}\sin\varphi & -\dot{\varphi}\cos\varphi\\ \dot{\varphi}\cos\varphi & -\dot{\varphi}\sin\varphi\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}-\sin\varphi & -\cos\varphi\\ \cos\varphi & -\sin\varphi\end{pmatrix}\dot{\varphi}=\tilde{I}A^{\mathrm{rb}}\dot{\varphi}$$

$$\dot{A}^{\mathrm{rb}}=\tilde{I}A^{\mathrm{rb}}\dot{\varphi}$$