应用随机过程

张 波　　商 豪

中国人民大学　统计学院

第6章　鞅

- 6.1 基本概念
- 6.2 鞅的停时定理及其应用
- 6.3 一致可积性
- 6.4 鞅收敛定理
- 6.5 连续鞅

本章将介绍另一类特殊的随机过程——鞅.近几十年来,鞅理论不仅在随机过程及其他数学分支中占据了重要的地位,而且在实际问题诸如金融、保险和医学上也得到了广泛的应用. 在此我们将阐述鞅的一些基本理论,并以介绍离散时间鞅为主.

鞅的定义是从条件期望出发的,所以对条件期望不熟悉的读者请先学习第1章中的相关内容,这对于理解鞅理论是至关重要的.

§6.1　基本概念

每个赌博者自然都对能使他在一系列赌博后获得期望收益最大的策略感兴趣.然而在数学上可以证明，在“公平”的博弈中，是没有这样的赌博策略的.

假设一个赌博者正在进行一系列赌博，每次赌博输赢的概率都是$\frac{1}{2}$. 令$\{Y_n, n=1,2,\cdots\}$, 是一列独立同分布的随机变量，表示每次赌博的结果

$$P\{Y_n=1\}=P\{Y_n=-1\}=\frac{1}{2}$$

这里$\{Y_n=1\}$ $(\{Y_n=-1\})$表示赌博者在第n次赌博时的赢(输).

如果赌博者采用的赌博策略(即所下赌注)依赖于前面的赌博结果，那么他的赌博可以用下面的随机变量序列

$$b_n = b_n(Y_1, \cdots, Y_{n-1}), n = 2, 3, \cdots$$

描述，其中$b_n < \infty$是第n次的赌注，若赌赢则获利b_n，否则输掉b_n.

设X_0是该赌博者的初始赌资，则

$$X_n = X_0 + \sum_{i=1}^{n} b_i Y_i \tag{6.1.1}$$

是他在第n次赌博后的赌资.可以断言

$$E[X_{n+1}|Y_1, \cdots, Y_n] = X_n.$$

事实上，由式(6.1.1)我们可以得到

$$X_{n+1} = X_n + b_{n+1} Y_{n+1},$$

因此

$$
\begin{aligned}
E[X_{n+1}|Y_1,\cdots,Y_n] &= E[X_n|Y_1,\cdots,Y_n]+E[b_{n+1}Y_{n+1}|Y_1,\cdots,Y_n] \\
&= X_n + b_{n+1}E[Y_{n+1}|Y_1,\cdots,Y_n] \\
&\quad (\text{因为} X_n \text{与} b_{n+1} \text{由} Y_1,\cdots,Y_n \text{确定}) \\
&= X_n + b_{n+1}E[Y_{n+1}] \\
&\quad (\text{因为} \{Y_n\} \text{是独立随机变量序列}) \\
&= X_n \quad (\text{因为 } E[Y_{n+1}]=0,\quad \forall n\geq 0)
\end{aligned}
$$

这证明了，如果每次赌博的输赢机会是均等的，并且赌博策略是依赖于前面的赌博结果，则赌博是“公平的”. 因此任何赌博者都不可能将公平的赌博通过改变赌博策略使得赌博变成有利于自己的赌博.

定义 6.1.1 随机过程 $\{X_n, n \geq 0\}$称为关于$\{Y_n, n \geq 0\}$ 的下鞅，如果对$n \geq 0$, X_n是$(Y_0, \cdots, Y_n)$的函数，$E[X_n^+] < \infty$,并且

$$E[X_{n+1}|Y_0, \cdots, Y_n] \geq X_n \tag{6.1.2}$$

这里$X_n^+ = \max\{0, X_n\}$.

我们称$\{X_n, n \geq 0\}$为关于$\{Y_n, n \geq 0\}$的上鞅，如果对$n \geq 0$, X_n是$(Y_0, \cdots, Y_n)$的函数,$E[X_n^-] < \infty$,并且

$$E[X_{n+1}|Y_0, \cdots, Y_n] \leq X_n \tag{6.1.3}$$

这里$X_n^- = \max\{0, -X_n\}$.

若$\{X_n, n \geq 0\}$兼为关于$\{Y_n, n \geq 0\}$的下鞅与上鞅，则称之为关于$\{Y_n, n \geq 0\}$的鞅， 此时

$$E[X_{n+1}|Y_0, \cdots, Y_n] = X_n. \tag{6.1.4}$$

鞅描述的是“公平”的赌博，下鞅和上鞅分别描述了“有利”赌博与“不利”赌博.

下面我们定义关于σ代数的鞅.为此，首先介绍有关概念. 设$(\Omega,\mathcal{F},P)$是完备的概率空间，我们所讨论的随机变量都是定义在这个概率空间上的.$\{\mathcal{F}_n,n\geq 0\}$是$\mathcal{F}$上的一列$\sigma$子代数并且使得$\mathcal{F}_n\subset\mathcal{F}_{n+1},n\geq 0$，称之为$\sigma$子代数流.

随机过程$\{X_n,n\geq 0\}$称为$\{\mathcal{F}_n\}$适应的， 如果$\forall n\geq 0,X_n$是$\mathcal{F}_n$可测的，即$\forall x\in\mathbb{R}$， $\{X_n\leq x\}\in\mathcal{F}_n$. 此时称$\{X_n,\mathcal{F}_n,n\geq 0\}$为适应列. 在定义6.1.1中，定义下鞅时，我们假定了 X_n是$(Y_0,\cdots,Y_n)$的函数.令$\mathcal{F}_n=\sigma\{Y_0,\cdots,Y_n\}$, $n\geq 0$，则$\{\mathcal{F}_n,n\geq 0\}$是一个$\sigma$代数流.$X_n$是$Y_0,\cdots,Y_n$的函数的确切含义是$\{X_n\}$是$\{\mathcal{F}_n\}$适应的.

定义 6.1.2 设$\{\mathcal{F}_n, n \geq 0\}$是一个$\mathcal{F}$中的单调递增的子$\sigma$代数列. 随机过程$\{X_n, n \geq 0\}$称为关于$\{\mathcal{F}_n, n \geq 0\}$的鞅，如果$\{X_n\}$是$\{\mathcal{F}_n\}$ 适应的，$E[|X_n|] < \infty$，并且$\forall n \geq 0$，有

$$E[X_{n+1}|\mathcal{F}_n] = X_n \tag{6.1.5}$$

适应列$\{X_n, \mathcal{F}_n, n \geq 0\}$称为 下鞅，如果$\forall n \geq 0$,

$$E[X_n^+] < \infty \quad 且 \quad E[X_{n+1}|\mathcal{F}_n] \geq X_n \tag{6.1.6}$$

上鞅可以类似定义.

在给出例子之前，先给出由定义直接推出的命题.

GoBack
FullScreen
Close
Quit

命题 6.1.1 (1) 适应列$\{X_n, \mathcal{F}_n, n \geq 0\}$是下鞅当且仅当 $\{-X_n, \mathcal{F}_n, n \geq 0\}$是上鞅.

(2) 如果$\{X_n, \mathcal{F}_n\}$, $\{Y_n, \mathcal{F}_n\}$是两个下鞅， a, b 是两个正常数, 则$\{aX_n + bY_n, \mathcal{F}_n\}$是下鞅.

(3) 如果$\{X_n, \mathcal{F}_n\}$, $\{Y_n, \mathcal{F}_n\}$是两个下鞅(或上鞅)，则$\{\max(X_n, Y_n), \mathcal{F}_n\}$ $(\{\min(X_n, Y_n), \mathcal{F}_n\})$ 是下鞅(上鞅).

证明是简单的，留作习题. 在本命题以及其他类似命题中，子σ代数列 $\{\mathcal{F}_n\}$可以由$\{Y_k, k = 1, 2, \cdots, n\}$替代，即$\{X_n\}$是关于$\{Y_n\}$的下鞅.

若以X_n表示一个赌博者在第n次赌博后所有的赌资. 式(6.1.5)表示：平均而言他在下一次赌博结束时的赌资将等于现时的赌资，与他过去赌博的输赢无关.这也就是说鞅具有一种“无后效性”，同时这体现的正是博弈的公平.

例 6.1.1 设$X_1, X_2, \cdots$是一族零均值独立随机变量序列，且$E[|X_i|] < \infty$, 令$S_0 = 0, S_n = \sum_{k=1}^n X_k$，则$\{S_n\}$是(关于$\mathcal{F}_n = \sigma(X_1, X_2, \cdots, X_n)$的)鞅. 另外，若$X_k(k = 1, 2, \cdots)$均值为 $\mu \neq 0$，则$\{M_n = S_n - n\mu\}$是(关于$\{\mathcal{F}_n\}$的)鞅.

证明：当$E[X_k] = 0, (k = 1, 2, \cdots)$时，易见$S_n$是$\mathcal{F}_n$可测的，而且$E[|S_n|] \leq \sum_{i=1}^n E[|X_i|] < \infty$，于是

$$\begin{aligned} E[S_{n+1}|\mathcal{F}_n] &= E[X_1 + X_2 + \cdots + X_{n+1}|\mathcal{F}_n] \\ &= E[X_1 + \cdots + X_n|\mathcal{F}_n] + E[X_{n+1}|\mathcal{F}_n] \\ &= S_n \end{aligned}$$

从而$\{S_n\}$是一个关于$\{\mathcal{F}_n\}$的鞅. 同理可以证明，当$E[X_k] = \mu \neq 0, (k = 1, 2, \cdots)$时，$\{M_n\}$也是一个关于$\{\mathcal{F}_n\}$的鞅. ∎

例 6.1.2 在例6.1.1中设$E[X_k]=\mu\neq 0, E[|X_k|]<\infty, (k=1,2,\cdots)$，则有$E[|S_n|]<\infty$，

$$E[S_{n+1}|\mathcal{F}_n]=E\Big[\sum_{i=1}^{n}X_i+X_{n+1}|\mathcal{F}_n\Big]=S_n+\mu$$

显然，若$\mu>0(\mu<0)$，则$\{S_n\}$是一关于$\{\mathcal{F}_n\}$的下鞅(上鞅).

例 6.1.3 考虑一个公平博弈问题. 设$X_1, X_2, \cdots$独立同分布，分布函数为

$$P\{X_i = 1\} = P\{X_i = -1\} = \frac{1}{2}$$

于是可以将$X_i(i = 1, 2 \cdots)$看做一个投硬币游戏的结果：如果出现正面就赢1元，出现反面则输1元. 假设我们按以下的规则来赌博，每次投掷硬币之前的赌注都比上一次翻一倍，直到赢了赌博即停. 令W_n表示第n次赌博后所输(或赢)的总钱数，则$W_0 = 0$，由于无论何时只要赢了就停止赌博，所以W_n从赢了之后起就不再变化，于是有$P\{W_{n+1} = 1 | W_n = 1\} = 1$.

下假设前n次投掷的硬币都出现了反面，按照规则，我们已经输了 $1+2+4+\cdots+2^{n-1}=2^n-1$ 元，即$W_n=-(2^n-1)$. 假如下一次硬币出现的是正面，按规则$W_{n+1}=2^n-(2^n-1)=1$，由公平的前提知道

$$P\{W_{n+1}=1|W_n=-(2^n-1)\}=\frac{1}{2}$$

$$P\{W_{n+1}=-2^n-2^n+1|W_n=-(2^n-1)\}=\frac{1}{2}$$

易证$E[W_{n+1}|\mathcal{F}_n]=W_n$，这里$\mathcal{F}_n=\sigma(X_1,\cdots,X_n)$，从而$\{W_n\}$是一个关于$\{\mathcal{F}_n\}$的鞅.

例 6.1.4 我们可以把例6.1.3再一般化.设$X_1, X_2, \cdots$仍如例6.1.3假定，而每次赌博所下赌注将与前面硬币的投掷结果有关，以B_n记第n次所下的赌注，则B_n是 $X_1, \cdots, X_{n-1}$的函数，换言之B_n是$\mathcal{F}_{n-1}$可测的 (设B_1为常数).仍然令W_n同例6.1.3之定义，$W_0 = 0$，则有

$$W_n = \sum_{j=1}^{n} B_j X_j$$

假设$E[|B_n|] < \infty$(这保证了每次的赌本都有一定节制)，那么$\{W_n\}$是一个$\{\mathcal{F}_n\}$ 鞅.

事实上，注意到$E[|W_n|] < \infty$ (这可由$E[|B_n|] < \infty$得到)，而且W_n是$\mathcal{F}_n$ 可测的，并且

$$
\begin{aligned}
E[W_{n+1}|\mathcal{F}_n] &= E[\sum_{j=1}^{n+1} B_j X_j|\mathcal{F}_n] \\
&= E[\sum_{j=1}^{n} B_j X_j|\mathcal{F}_n] + E[B_{n+1}X_{n+1}|\mathcal{F}_n] \\
&= \sum_{j=1}^{n} B_j X_j + B_{n+1}E[X_{n+1}|\mathcal{F}_n] \\
&= W_n + B_{n+1}E[X_{n+1}] \\
&= W_n
\end{aligned}
$$

例 6.1.5 (Polya坛子抽样模型) 考虑一个装有红、黄两色球的坛子.假设最初坛子中装有红、黄两色球各一个，每次都按如下规则有放回地随机抽取：如果拿出的是红色的球，则放回的同时再加入一个同色的球；如果拿出是黄色的球也采取同样的法. 以X_n表示第n次抽取后坛子中的红球数，则$X_0 = 1$，且$\{X_n\}$是一个非时齐的Markov链，转移概率为

$$P\{X_{n+1} = k+1 | X_n = k\} = \frac{k}{n+2}$$

$$P\{X_{n+1} = k | X_n = k\} = \frac{n+2-k}{n+2}$$

令M_n表示第n次抽取后红球所占的比例，则$M_n = \frac{X_n}{n+2}$，并且$\{M_n\}$是一个鞅. 这是因为

$$E[X_{n+1}|X_n] = X_n + \frac{X_n}{n+2}$$

由于$\{X_n\}$是一个Markov链，则$\mathcal{F}_n=\sigma(X_1,\cdots,X_n)$中对$X_{n+1}$有影响的信息都包含在$X_n$中，所以

$$
\begin{aligned}
E[M_{n+1}|\mathcal{F}_n] &= E[M_{n+1}|X_n] \\
&= E\left[\frac{X_{n+1}}{n+1+2}|X_n\right] \\
&= \frac{1}{n+3}E[X_{n+1}|X_n] \\
&= \frac{1}{n+3}E[X_n+\frac{X_n}{n+2}] \\
&= \frac{X_n}{n+2}=M_n.
\end{aligned}
$$

本例研究的模型是Polya首次引入的，它适用于描述群体增值和传染病的传播等现象.

下面的引理可以让我们由已知的鞅或下鞅构造出许多新的下鞅.

考虑定义在有穷域无穷开区间I上的函数$\varphi(x)$，称它为凸的，若$\forall x, y \in I, 0 < \alpha < 1$，有

$$\alpha\varphi(x) + (1-\alpha)\varphi(y) \geq \varphi[\alpha x + (1-\alpha)y] \qquad (6.1.7)$$

成立.

引理 6.1.1 (条件Jensen不等式) 设$\varphi(x)$为实数集$\mathbb{R}$上的凸函数，随机变量M满足

(1) $E[|M|] < \infty$;

(2) $E[|\varphi(M)|] < \infty$.

则有

$$E[\varphi(M)|\mathcal{F}_n] \geq \varphi[E[M|\mathcal{F}_n]] \qquad (6.1.8)$$

其中$\mathcal{F}_n$是任意递增的σ代数列.

式(6.1.8)是著名的条件Jensen不等式，由它即可得到以下定理.

定理 6.1.1 设$\{M_n, n \geq 0\}$是关于$\{\mathcal{F}_n, n \geq 0\}$的鞅(下鞅), $\varphi(x)$是$\mathbb{R}$上的凸函数, 且满足$E[\varphi(M_n)^+] < \infty, \forall n \geq 0$，则$\{\varphi(M_n), n \geq 0\}$是关于$\{\mathcal{F}_n, n \geq 0\}$的下鞅. 特别地，$\{|M_n|, n \geq 0\}$是下鞅；当$E[M_n^2] < \infty, \forall n \geq 0$时，$\{M_n^2, n \geq 0\}$也是下鞅.

证明：根据定义易证，请读者利用引理6.1.1推导.

§6.2　鞅的停时定理及其应用

§6.2.1　鞅的停时定理

本节中我们所讨论的鞅，都是指关于某个随机变量序列的鞅.所得到的结论对关于σ代数流的鞅也是成立的，为了便于理解和应用，我们没有追求结论的一般性. 对于一个关于$\{X_n, n \geq 0\}$的鞅$\{M_n, n \geq 0\}$，易知$\forall n \geq 0$，有

$$E[M_n] = E[M_0] \tag{6.2.1}$$

我们想知道如果把此处固定的时间n换作一个随机变量T，是否仍然有

$$E[M_T] = E[M_0] \tag{6.2.2}$$

一般地，此结论未必成立.但在一定的条件下可以保证它成立，这就是鞅的停时定理. 鞅的停时定理的意义是："在公平的赌博中，你不可能赢." 设想$\{M_n, n \geq 0\}$是一种公平的博奕, M_n表示局中人第n次赌局结束后的赌本.式(6.2.1)说明他在每次赌局结束时的赌本与他开始时的赌本一样，但是他未必一直赌下去，他可以选择任一时刻停止赌博，这一时刻是随机的.式(6.2.2)说明他停止时的赌本和他开始时的赌本相同，然而很容易看出在一般的情况下，这是不正确的.比如例6.1.3中的赌博者采取的策略，就可以保证他在赢一元之后结束，所以我们要为式(6.2.2)的成立附加一些条件.

定义 6.2.1 (停时) 设$\{X_n, n \geq 0\}$是一个随机变量序列,称随机函数T是关于$\{X_n, n \geq 0\}$的停时,如果 T在$\{0, 1, 2, \cdots, \infty\}$中取值,且对每个$n \geq 0$, $\{T = n\} \in \sigma(X_0, X_1, \cdots, X_n)$.

由定义我们知道事件$\{T = n\}$或$\{T \neq n\}$都应该由n时刻及其之前的信息完全确定,而不需要也无法借助将来的情况.仍然回到公平博奕的例子,赌博者决定何时停止赌博只能以他已经赌过的结果为依据,而不能说,如果我下一次要输我现在就停止赌博,这是对停止时刻T 的第一个要求:它须是一个停时.

以下看几个停时的例子.

例 6.2.1 确定时刻$T = n$是一个停时,即在赌博开始已确定n局之后一定结束,易见这是一个停时.

例 6.2.2 (首达时)$\{X_n, n \geq 0\}$是一个随机变量序列，A是一个事件集，令

$$T(A) = \inf\{n, X_n \in A\}, \text{并约定 } T(\emptyset) = \inf\{n, X_n \in \emptyset\} = \infty,$$

可见$T(A)$是$\{X_n, n \geq 0\}$首次进入A(即发生了A中所含事件)的时刻，称$T(A)$是$\{X_n, n \geq 0\}$到集合A 的首达时，可以证明$T(A)$是关于$\{X_n, n \geq 0\}$的停时.事实上

$$\{T(A) = n\} = \{X_0 \notin A, X_1 \notin A, \cdots, X_{n-1} \notin A, X_n \in A\}$$

显然$\{T(A) = n\}$完全由$X_0, X_1, \cdots, X_n$决定，从而$T(A)$是关于$\{X_n, n \geq 0\}$的停时.

例 6.2.3 如果T和S是两个停时，则$T+S, \min(T, S)$和$\max(T, S)$也是停时. 这可由下述简单的命题来证明.

命题 6.2.1 设T是取值于$\{0,1,2,\cdots,\infty\}$的随机变量，则下述三者等价

(1) $\{T=n\}\in\sigma(X_0,X_1,\cdots,X_n)$;
(2) $\{T\le n\}\in\sigma(X_0,X_1,\cdots,X_n)$;
(3) $\{T>n\}\in\sigma(X_0,X_1,\cdots,X_n)$.

只要注意到如下等式，即可证明(1),(2),(3)的等价性.

$$\{T\le n\}=\bigcup_{k=0}^{n}\{T=k\}$$
$$\{T>n\}=\Omega-\{T\le n\}$$
$$\{T=n\}=\{T\le n\}-\{T\le n-1\}$$

这就可以证明$T+S,\max(T,S)$和$\min(T,S)$是停时.特别地，由例6.2.1可知，常数 n是停时. 设T是停时，令$T_n=\min\{T,n\}$, 则每个T_n都是停时，并且有 $T_0\le T_1\le T_2\le\cdots\le T_n\le n,\ \forall n$.

在给出停时定理之前先注意以下事实．

命题 6.2.2 设$\{M_n, n \geq 0\}$是一个关于$\{X_n, n \geq 0\}$的鞅，T是一个关于$\{X_n, n \geq 0\}$的停时并且$T \leq K$，$\mathcal{F}_n = \sigma(X_0, X_1, \cdots, X_n)$，则

$$E[M_T|\mathcal{F}_0] = M_0$$

特别地，

$$E[M_T] = E[M_0]$$

证明：由于$T \leq K$，即T只取有限值，且当$T = j$时$M_T = M_j$，我们可以把M_T写作

$$M_T = \sum_{j=0}^{K} M_j I_{\{T=j\}} \tag{6.2.3}$$

对式(6.2.3)关于$\mathcal{F}_{K-1}$取条件期望，有

$$
\begin{aligned}
E[M_T|\mathcal{F}_{K-1}] &= E[\sum_{j=0}^{K} M_j I_{\{T=j\}}|\mathcal{F}_{K-1}] \\
&= E[\sum_{j=0}^{K-1} M_j I_{\{T=j\}}|\mathcal{F}_{K-1}] + E[M_K I_{\{T=K\}}|\mathcal{F}_{K-1}]
\end{aligned}
$$

当$j \leq K-1$时，M_j和$I_{\{T=j\}}$都是$\mathcal{F}_{K-1}$可测的，从而

$$
E[\sum_{j=0}^{K-1} M_j I_{\{T=j\}}|\mathcal{F}_{K-1}] = \sum_{j=0}^{K-1} M_j I_{\{T=j\}}
$$

又因为$T \leq K$已知，则$\{T = K\}$与$\{T > K-1\}$是等价的，由例6.2.3中结果知 $\{T > K-1\} \in \sigma(X_0, \cdots, X_{K-1})$，因此

$$
\begin{aligned}
E[M_K I_{\{T=K\}}|\mathcal{F}_{K-1}] &= I_{\{T>K-1\}} E[M_K|\mathcal{F}_{K-1}] \\
&= I_{\{T>K-1\}} M_{K-1}
\end{aligned}
$$

从而

$$E[M_T|\mathcal{F}_{K-1}] = I_{\{T>K-1\}}M_{K-1} + \sum_{j=0}^{K-1} M_j I_{\{T=j\}}$$
$$= I_{\{T>K-2\}}M_{K-1} + \sum_{j=0}^{K-2} M_j I_{\{T=j\}}$$

重复以上运算，关于$\mathcal{F}_{K-2}$取条件期望，我们可以得到

$$E[M_T|\mathcal{F}_{K-2}] = E[E[M_T|\mathcal{F}_{K-1}]|\mathcal{F}_{K-2}]$$
$$= I_{\{T>K-3\}}M_{K-2} + \sum_{j=0}^{K-3} M_j I_{\{T=j\}}$$

继续这样的过程，最终有

$$E[M_T|\mathcal{F}_0] = I_{\{T\geq 0\}}M_0 = M_0$$

∎

这个命题是鞅停时定理的一种特殊情况，可以看出，它的条件太强了，实际上我们感兴趣的问题中许多都不满足T有界这一严格的条件.假设T是一停时并且 $P\{T < \infty\} = 1$, 也就是说以概率1可以保证会停止(相对于 $P\{T = \infty\} > 0$). 但与T有界不同的是，并没有确定的K使$P\{T \leq K\} = 1$. 例如，上面博奕的例子，赌博者并不能确定在某一时刻之前肯定停止赌博，但可以保证这场赌博不会无限期地延续下去，那么在这种情况下，何种条件下可以得到$E[M_T] = E[M_0]$的结论呢？

考虑停时$T_n = \min\{T, n\}$，注意到

$$M_T = M_{T_n} + M_T I_{\{T>n\}} - M_n I_{\{T>n\}}$$

从而

$$E[M_T] = E[M_{T_n}] + E[M_T I_{\{T>n\}}] - E[M_n I_{\{T>n\}}]$$

可以看出，T_n是一个有界停时($T_n \leq n$)，由上面命题可知$E[M_{T_n}] = E[M_0]$.

我们希望当$n \to \infty$时，后面两项趋于0，对于第二项来说，这是不困难的，因为 $P\{T < \infty\} = 1$，所以当$n \to \infty$时，$P\{T > n\} \to 0$，$E[M_T I_{\{T>n\}}]$相当于对M_T限制在一个趋于空集的集合上取期望.容易看出若要求$E[|M_T|] < \infty$，就可保证 $E[M_T I_{\{T>n\}}] \to 0$.

第三项要麻烦一些，考虑前面的例6.1.3，在这个例子中，事件$\{T > n\}$相当于事件：前n次投掷硬币，均出现反面. 这个概率是$(\frac{1}{2})^n$，如果这个事件发生了，则至少赌博者已经输掉了$2^n - 1$元，即$M_n = 1 - 2^n$，从而

$$E[M_n I_{\{T>n\}}] = 2^{-n}(1 - 2^n)$$

当$n \to \infty$时，上式并不趋于0，这也是为什么停时定理的结论在此处不成立的原因. 然而如果 M_n和T满足

$$\lim_{n\to\infty} E[|M_n| I_{\{T>n\}}] = 0$$

我们就可以得出结论$E[M_T] = E[M_0]$.我们把这个过程写成如下的停时定理.

定理 6.2.1 (鞅停时定理)

设$\{M_n, n \geq 0\}$是一个关于$\{\mathcal{F}_n = \sigma(X_0, X_1, \cdots, X_n)\}$的鞅，$T$是停时且满足

$$(1) P\{T < \infty\} = 1; \qquad (6.2.4)$$

$$(2) E[|M_T|] < \infty; \qquad (6.2.5)$$

$$(3) \lim_{n\to\infty} E[|M_n| I_{\{T>n\}}] = 0. \qquad (6.2.6)$$

则有

$$E[M_T] = E[M_0]$$

例 6.2.4 设$\{X_n\}$是在$\{0,1,\cdots,N\}$上的简单随机游动($p=\frac{1}{2}$)，并且0和N为两个吸收壁.设$X_0=a$，则$\{X_n\}$是一个鞅(试简单证明). 令$T=\min\{j:X_j=0$或$N\}$，则T是一个停时，由于X_n的取值有界，故式(6.2.5)(6.2.6)满足(注意到若鞅本身取值有界且式(6.2.4)成立，则式(6.2.5)和式(6.2.6)一定成立，这也是另一种形式的鞅停时定理).从而

$$E[X_T]=E[X_0]=a$$

由于此时X_T只取两个值$N,0$，

$$E[X_T]=N\cdot P\{X_T=N\}+0\cdot P\{X_T=0\}$$

从而得到

$$P\{X_T=N\}=\frac{E[X_T]}{N}=\frac{a}{N}$$

即在被吸收时刻它处于N点的概率为$\frac{a}{N}$.

例 6.2.5 令X_n和T如例6.2.4定义, 假定$M_n = X_n^2 - n$, 则$\{M_n\}$是关于$\{X_n\}$的鞅. 这是因为

$$\begin{aligned} E[M_{n+1}|\mathcal{F}_n] &= E[X_{n+1}^2 - (n+1)|\mathcal{F}_n] \\ &= X_n^2 + 1 - (n+1) = X_n^2 - n = M_n \end{aligned}$$

易见，此时M_n不是一个有界鞅，不能立刻得出式(6.2.5),(6.2.6)成立，但是可以证明，存在$C < \infty, \rho < 1$，使得

$$P\{T > n\} \leq C\rho^n \qquad (6.2.7)$$

因为$|M_n| \leq N^2 + n$，可知$E[|M_T|] < \infty$，并且

$$E[|M_n|I_{\{T>n\}}] \leq C\rho^n(N^2 + n) \to 0$$

从而停时定理的条件满足，我们有结论

$$E[M_T] = E[M_0] = a^2$$

注意到

$$E[M_T] = E[X_T^2] - E[T]$$

$$= N^2 P\{X_T = N\} + 0 \cdot P\{X_T = 0\} - E[T] = aN - E[T]$$

从而

$$E[T] = aN - a^2 = a(N - a)$$

这是停止之前需要的平均时间.

注 式(6.2.7)是Markov链中的一个问题，设$\{X_n\}$是一个不可约的Markov链，状态空间为 $\{0, 1, \cdots, N\}$，则存在$C < \infty, \rho < 1$，使得

$$P\{X_m \neq j, m = 0, 1, \cdots, n | X_0 = i\} \leq C\rho^n$$

读者可自己证明.(提示：存在$\delta > 0$,使得$\forall i$，从i出发在N步内到达过j的概率大于δ.)

例 6.2.6 令X_n是一个在$\{0,\pm1,\pm2,\cdots\}$上的简单随机游动($p=\frac{1}{2}$)，我们已经知道$\{X_n\}$是一个鞅，令$T=\min\{j:X_j=1\}$. 由例5.2.4知这个简单随机游动是常返的，从而$P\{T<\infty\}=1$. 又由$X_T=1$知$E[X_T]=1\neq 0=E[X_0]$，所以停时定理不成立. 实际上，此时停时定理的条件是不满足的，我们不再给出具体证明，只给出如下事实：在这种情况下，$P\{T>n\}\sim Cn^{-\frac{1}{2}}$, C为常数，从而

$$E[|X_n|I_{\{T>n\}}]\not\to 0$$

在介绍了鞅的停时定理之后，我们简单地讨论一下有关上鞅停时定理的两个结果. 这在下面的例子中是必需的.

定理 6.2.2 设$\{M_n, n \geq 0\}$是关于$\{X_n, n \geq 0\}$ 的上鞅，T是关于$\{X_n, n \geq 0\}$的停时， $T_n = \min(T, n)$. 设存在一非负随机变量W，满足$E[W] < \infty$，且使得

$$M_{T_n} \geq -W, \quad \forall n \geq 0$$

则有

$$E[M_0] \geq E[M_T I_{\{T<\infty\}}].$$

特别地，若$P\{T < \infty\} = 1$，则有

$$E[M_0] \geq E[M_T].$$

证明略.

推论 6.2.1 设$\{M_n, n \geq 0\}$是关于$\{X_n, n \geq 0\}$的上鞅，T是关于$\{X_n, n \geq 0\}$的停时，且 $M_n \geq 0$，则有

$$E[M_0] \geq E[M_T I_{\{T<\infty\}}].$$

我们已经知道对于上鞅，有$E[M_n] \leq E[M_0]$， $\forall n \geq 0$，此处上鞅停时定理说明当把n换为停时T时，在附加某些条件的前提下，结论也成立.

§6.2.2 停时定理的应用——关于期权值的界

设某种股票的单股上市价$W_0 = w$，以W_n表示第n天的开盘价，令

$$Y_n = \frac{W_n}{W_{n-1}}, \quad n \geq 1$$

则有

$$W_n = wY_1Y_2\cdots Y_n, \quad \forall n \geq 1 \tag{6.2.8}$$

考虑一种期权，它保证期权持有人可以在一限定的期限内以预定的价格购入股票. 不妨设这一预定的行使期权的价位为1，并假设我们考虑的期权行使期限为无限. 若$W_n > 1$，则期权持有人有可能在第n天行使期权，以价位1购入股票，立即以W_n价位抛出，从而获利 $W_n - 1$；若$W_n < 1$则无法获利.由此，期权持有人在第n天的潜在利润为

$$r(W_n) = (W_n - 1)^+ = \begin{cases} W_n - 1, & W_n \ge 1 \\ 0 \quad\quad\quad , & W_n < 1 \end{cases} \quad \forall n \ge 1 \tag{6.2.9}$$

设贴现率为$a > 0$，将$r(W_n)$贴现到第1天为$e^{-na}r(W_n)$，可取任一停时T作为行使期权的时刻，我们要寻找$e^{-na}r(W_n)$的期望值的上界，即这一期权最高的潜在利润为多少.为此要对Y_n作出一个假设，假定存在$\theta > 1$ 使得

$$E[Y_n^\theta | Y_0, Y_1, \cdots, Y_{n-1}] \le e^a, \quad \forall n \ge 1 \tag{6.2.10}$$

称

$$f(w, \theta) = \sup_T E[e^{-aT} r(W_T)] \tag{6.2.11}$$

为初始单股价为w的期权值.式(6.2.11)中的上确界是对一切关于$\{Y_n\}$的停时 T取的.因为$\{Y_n\}$满足式(6.2.10)，所以该期权值$f(w;\theta)$ 与(6.2.10)中的参数θ有关.

定理 6.2.3 设$\{Y_n\}$为如上定义并满足式(6.2.10)，$W_0=w$,则期权值$f(w,\theta)$满足不等式

$$f(w,\theta)\le g(w,\theta)$$

其中

$$g(w,\theta)=\begin{cases}\frac{w^\theta(\theta-1)^{\theta-1}}{\theta^\theta}, & \text{若}w\le\frac{\theta}{\theta-1}\\ w-1\quad, & \text{若}w>\frac{\theta}{\theta-1}\end{cases}\tag{6.2.12}$$

证明：证明分为四部分.

(1)对任意固定的$t>1$, 定义

$$\nu(w,t)=\frac{w^t(t-1)^{t-1}}{t^t},\quad \forall w\ge 0\tag{6.2.13}$$

则有

$$\nu(w,t)\ge g(w,\theta),\quad \forall 1<t\le\theta, w\ge 0\tag{6.2.14}$$

事实上，若记

$$h_t(w) = \nu(w,t) - (w-1), w_0 = \frac{t}{t-1} > \frac{\theta}{\theta-1}$$

可以验证$h_t(w_0) = h_t'(w_0) = 0$，此处导数是对变量w取的. 另外，可以验证$h_t''(w) > 0, \forall w \geq 0$.于是得到$h_t(w) \geq h_t(w_0) = 0, \forall w \geq 0$，或等价地

$$\nu(w,t) \geq w-1, \quad \forall w \geq 0 \tag{6.2.15}$$

再计算$\ln\nu(w,t)$关于t的导数，简化后得

$$\frac{d\ln\nu(w,t)}{dt} = \ln\left(\frac{w}{t/(t-1)}\right)$$

上式在$w < \frac{\theta}{\theta-1}$时为负. 这表明当$t$从满足 $w \leq \frac{\theta}{\theta-1}$ 的θ开始减少时, $\nu(w,t)$将增加.于是当$w \leq \frac{\theta}{\theta-1}$时,

$$\nu(w,t) \geq \nu(w,\theta) = g(w,\theta), \quad \forall 1 < t \leq \theta \tag{6.2.16}$$

综合式(6.2.15)和(6.2.16)可得式(6.2.14).

(2)要证

$$g(w,\theta) \geq e^{-a}E\left[g(w \times Y_n,\theta)\right], \quad \forall w \geq 0, n \geq 1 \quad (6.2.17)$$

首先由式(6.2.10)可知

$$E[Y_n^\theta] = E[E[Y_n^\theta|Y_0,\cdots,Y_{n-1}]] \leq e^a, \quad \forall n \geq 1 \quad (6.2.18)$$

于是，当 $w \leq \frac{\theta}{\theta-1}$时，有

$$\begin{aligned} g(w,\theta) &= \nu(w,\theta) \quad (\text{由}6.2.13) \\ &\geq e^{-a}\nu(w,\theta)E[Y_n^\theta] \quad (\text{由}6.2.18) \\ &= e^{-a}E[\nu(w \times Y_n,\theta)] \quad (\text{由}6.2.13) \\ &\geq e^{-a}E[g(w \times Y_n,\theta)] \quad (\text{由}6.2.14) \end{aligned}$$

当$w > \frac{\theta}{\theta-1}$时，$Y_n^x$是$x \in [0,\theta]$的凸函数，并且 $E[Y_n^0] = 1 < e^a$，由Jensen不等式和式(6.2.18)可知

$$E[Y_n^{\frac{w}{w-1}}] \leq e^a, \quad \forall \frac{w}{w-1} < \theta \tag{6.2.19}$$

因此

$$\begin{aligned} g(w,\theta) = w - 1 &= \nu(w, \frac{w}{w-1}) \\ &\geq e^{-a} E[\nu(w \times Y_n, \frac{w}{w-1})] \\ &\geq e^{-a} E[\nu(w \times Y_n, \theta)] \\ &\geq e^{-a} E[g(w \times Y_n, \theta)] \end{aligned}$$

由此可知式(6.2.17)成立.

(3)令

$$X_n = e^{-na} g(W_n, \theta), \quad \forall n \geq 0 \tag{6.2.20}$$

则$\{X_n, n \geq 0\}$是关于$\{Y_n\}$的非负上鞅.

事实上，易见X_n是$Y_0, Y_1, \cdots, Y_n$的函数，又由于 $W_n = W_{n-1}Y_n$，W_{n-1}是$Y_0, Y_1, \cdots, Y_{n-1}$的函数. 由式(6.2.20)和(6.2.17)可得

$$\begin{aligned} E[X_n|Y_0, \cdots, Y_{n-1}] &= e^{-na} E[g(W_{n-1} \times Y_n, \theta)|Y_0, \cdots, Y_{n-1}] \\ &\leq e^{-(n-1)a} g(W_{n-1}, \theta) \\ &= X_{n-1} \end{aligned}$$

这就证明了$\{X_n, n \geq 0\}$是关于$\{Y_n\}$的非负上鞅，于是由推论6.2.1可知对于$\{Y_n\}$的任一停时T，应有

$$E[X_0] \geq E[X_T I_{\{T<\infty\}}]$$

再由式(6.2.20)知，当$T = \infty$时，$X_T = 0$，于是上式应为

$$g(w, \theta) \geq E[e^{-\alpha T} g(W_T, \theta)] \tag{6.2.21}$$

(4)最后证明定理结论，先证明

$$g(w,\theta) \geq r(w) = (w-1)^{+} \tag{6.2.22}$$

当$w < \frac{\theta}{\theta-1}$时, 易算出

$$\frac{dg(w,\theta)}{dw} = \left(\frac{\theta-1}{\theta}\right)^{\theta-1} w^{\theta-1} < 1$$

两边积分得

$$g(\frac{\theta}{\theta-1},\theta) - g(w,\theta) < \frac{\theta}{\theta-1} - w$$

所以当$w < \frac{\theta}{\theta-1}$时，由式(6.2.12)可得

$$g(w,\theta) > w-1$$

此外有$g(w,\theta) \geq 0, \forall w \geq 0$，并且当$w \geq \frac{\theta}{\theta-1}$时，

$$g(w,\theta) = w-1$$

这就证明了式(6.2.22).由(6.2.21)和(6.2.22)两式可得

$$g(w,\theta) \geq E[e^{-aT}r(W_T)]$$

再由停时的任意性，即知定理结论成立. ∎

注**1**：由式(6.2.14)我们知道

$$g(w,\theta) \leq \nu(w,\theta) = \frac{w^\theta(\theta-1)^{\theta-1}}{\theta^\theta}, \quad \forall w \geq 0$$

若初始单股价w超过$\frac{\theta}{\theta-1}$，则期权的平均潜在利润至多为$g(w,\theta)=w-1$.这一值可通过即刻行使期权获得(取$T=0$)，这表示，一旦股票的单股价格超过$\frac{\theta}{\theta-1}$，期权持有人就应马上行使他的期权以期获得最大限度的潜在利润.

注**2**：本定理是以式(6.2.10)作为前提的，如果对这个假设存在怀疑，则定理就不适用，但一般来讲这一假设是合理的，至于θ的选取，可根据以往的经验或者统计方法获得.

§6.3　一致可积性

在鞅的停时定理的条件中，式(6.2.6)一般是很难验证的，为此我们将给出一些容易验证的条件，这些条件是包含了式(6.2.6)的.

首先考虑一个随机变量X，满足$E[|X|] < \infty$，$|X|$的分布函数为F, 则

$$\lim_{n\to\infty} E[|X|I_{\{|X|>n\}}] = \lim_{n\to\infty} \int_n^\infty |X|dF(x) = 0$$

设$P\{|X| > n\} = \delta$，A是另外一个发生概率为δ的事件，即$P(A) = \delta$. 容易看出 $E[|X|I_A] \leq E[|X|I_{\{|X|>n\}}]$，从而我们可以有以下结论：如果随机变量$X$满足$E[|X|] < \infty$，则$\forall \varepsilon > 0$,$\exists \delta > 0$, 当$P(A) < \delta$时, $E[|X|I_A] < \varepsilon$.

定义 6.3.1 假设有一列随机变量$X_1, X_2, \cdots$，称它们是一致可积的，如果$\forall \varepsilon > 0$, $\exists \delta > 0$, 使得$\forall A$,当$P(A) < \delta$时,

$$E[|X_n|I_A] < \varepsilon \tag{6.3.1}$$

对任意n成立.

这个定义的关键在于δ不能依赖于n，并且式(6.3.1)对任意n成立. 先给一个不一致可积的例子.

例 6.3.1 考虑例6.1.3. 令A_n是事件$\{X_1 = X_2 = \cdots = X_n = -1\}$，则$P(A_n) = \frac{1}{2^n}$，$E[|W_n|I_{A_n}] = 2^{-n}(2^n - 1) \to 1$. 容易看出它不满足一致可积的条件.

假设$\{M_n, n \geq 0\}$是一个关于$\{X_n, n \geq 0\}$的一致可积鞅，T是停时且$P\{T < \infty\} = 1$ 或$\lim_{n\to\infty} P\{T > n\} = 0$. 则由一致可积性可得

$$\lim_{n\to\infty} E[|M_n| I_{\{T>n\}}] = 0$$

即式(6.2.6)成立，据此我们给出停时定理的另一种叙述.

定理 6.3.1 (停时定理)设$\{M_n, n \geq 0\}$是一个关于$\{X_n, n \geq 0\}$的一致可积鞅, T是停时, 满足$P\{T < \infty)\} = 1$且$E[|M_T|] < \infty$, 则有$E[M_T] = E[M_0]$.

一致可积的条件一般比较难验证，下面给出两个一致可积的充分条件.

命题 6.3.1 假设$X_1, X_2, \cdots$是一列随机变量，并且存在常数$C < \infty$，使得$E[X_n^2] < C$对所有的n成立，则此序列是一致可积的.

证明：$\forall \varepsilon > 0$，令$\delta = \frac{\varepsilon^2}{4C}$，设$P(A) < \delta$，则

$$
\begin{aligned}
E[|X_n|I_A] &= E[|X_n|I_{\{A\cap\{|X_n|\geq\frac{2C}{\varepsilon}\}\}}] + E[|X_n|I_{\{A\cap\{|X_n|<\frac{2C}{\varepsilon}\}\}}] \\
&\leq \frac{\varepsilon}{2C}\cdot E[|X_n|^2 I_{\{A\cap\{|X_n|\geq\frac{2C}{\varepsilon}\}\}}] + \frac{2C}{\varepsilon}\cdot P\{A\cap\{|X_n|<\frac{2C}{\varepsilon}\}\} \\
&\leq \frac{\varepsilon}{2C}E[X_n^2] + \frac{2C}{\varepsilon}P(A) < \varepsilon
\end{aligned}
$$

∎

命题 6.3.2 设$\{M_n\}$是关于$\{\mathcal{F}_n\}$的鞅. 如果存在一个非负随机变量Y，满足$E(Y)<\infty$且 $|M_n|<Y$, $\forall n\geq 0$成立，则$\{M_n\}$是一致可积鞅.

请读者自己证明此命题.一致可积的充分条件还有一些，我们不再多列举了.

例 6.3.2 (分支过程)令X_n表示分支过程第n代的个体数. 设每个个体产生后代的分布有均值μ 和方差σ^2，则$\{M_n=\mu^{-n}X_n\}$是关于$\{X_n,n\geq 0\}$的鞅(习题6.3). 假设$\mu>1$，则存在一个常数C，使得$\forall n, E[M_n^2]<C$，从而$\{M_n\}$是一致可积鞅(习题6.6(2)).

§6.4　鞅收敛定理

鞅论中有两个深刻的结论，一个是上节的停时定理，另一个就是鞅收敛定理. 本节我们将介绍鞅的收敛定理.

鞅收敛定理说明在很一般的条件下，鞅$\{M_n\}$会收敛到一个随机变量，在此记为M_∞. 我们首先来考虑一个特殊的例子——Polyas坛子抽样模型(例6.1.5)，令M_n表示第n次摸球后红球所占的比例，当$n \to \infty$时，这个比例会如何变化呢？下面来说明其变化趋势.

GoBack
FullScreen
Close
Quit

设$0 < a < b < 1$, $M_n < a$，且令

$$T = \min\{j : j \ge n, M_j \ge b\}$$

即T表示n次摸球之后第一个比例从小于a到超越b的时刻.

令 $T_m = \min\{T, m\}$，则对于$m > n$，由停时定理可知

$$E[M_{T_m}] = M_n < a$$

但是

$$\begin{aligned} E[M_{T_m}] &\ge E[M_{T_m} \cdot I_{\{T \le m\}}] \\ &= E[M_T I_{\{T \le m\}}] \\ &\ge b \cdot P\{T \le m\} \end{aligned}$$

从而

$$P\{T \le m\} < \frac{a}{b}$$

因为上式对一切$m > n$成立，于是有

$$P\{T < \infty\} \le \frac{a}{b}$$

这说明至少以概率$1-\frac{a}{b}$红球的比例永远不会超过b，现在我们假定这一比例确实超过了b，那么它能够再一次降回到a以下的概率是多少呢？同样的讨论可知，这一概率最大为$\frac{1-b}{1-a}$.继续同样的讨论，我们可以知道，从a出发超过b，再小于 a，再大于$b,\cdots\cdots$有n个循环的概率应为

$$(\frac{a}{b})(\frac{1-b}{1-a})(\frac{a}{b})\cdots(\frac{a}{b})(\frac{1-b}{1-a})=(\frac{a}{b})^n(\frac{1-b}{1-a})^n\to 0,\ \ (n\to\infty)$$

由此可见，这个比例不会在a,b之间无限次地跳跃.由a,b的任意性，也表明这一比例不会在任意的两个数之间无限地跳跃，换言之，极限$\lim_{n\to\infty}M_n$存在，记为M_∞. 这一极限是一个随机变量，可以证明M_∞服从$[0,1]$上的均匀分布(见习题6.7).

下面我们给出一般的结论.

定理 6.4.1 (鞅收敛定理) 设$\{M_n, n \geq 0\}$是关于$\{X_n, n \geq 0\}$的鞅，并且存在常数$C < \infty$，使得$E[|M_n|] < C$对任意n成立，则当$n \to \infty$时，$\{M_n\}$收敛到一个随机变量M_∞.

本定理的证明与前面的讨论类似，略去.下面我们给出一个结论.

定理 6.4.2 如果$\{M_n, n \geq 0\}$是关于$\{X_n, n \geq 0\}$的一致可积鞅，则$\lim_{n\to\infty} M_n$存在，记为M_∞，并且

$$E[M_\infty] = E[M_0].$$

证明略.

例 6.4.1 令X_n表示分支过程中第n代的个体数，每个个体生育后代的分布有均值μ和方差 σ^2，假定$X_0 = 1$，令$M_n = \mu^{-n}X_n$.由前面例子已经知道$\{M_n\}$是鞅. 如果$\mu \le 1$，由第5章的结论已经知道灭绝一定会发生，由此$M_n \to M_\infty = 0$, 从而$E[M_\infty] \ne E[M_0]$.在上节我们说明了若$\mu > 1$，则M_n是一致可积的，所以在$\mu > 1$时，有$E[M_\infty] = E[M_0] = 1$.

例 6.4.2 令$X_1, X_2, \cdots$为一独立同分布随机变量序列，$P\{X_i = 1\} = P\{X_i = -1\} = \frac{1}{2}$，令

$$M_n = \sum_{j=1}^{n} \frac{1}{j} X_j$$

则$\{M_n\}$是鞅.

我们来证明$\{M_n\}$是一致可积的，显然$E[M_n] = 0$，则

$$E[M_n^2] = Var[M_n] = \sum_{j=1}^{n} Var[\frac{1}{j} X_j] = \sum_{j=1}^{n} \frac{1}{j^2} \le \sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{j^2} < \infty$$

从而当$n \to \infty$时，$M_n \to M_\infty$并且$E[M_\infty] = 0$.

例 6.4.3 再考虑Polya模型(例6.1.5). 这里假定最初坛子中有m个黄球，k个红球，所以在第n次摸球后坛子中应有$n+m+k$个球. 假定M_n为红球的比例. 因为$0 < M_n < 1$，容易看出 $\{M_n\}$是一致可积鞅，所以当$n \to \infty$时，$M_n \to M_\infty$并且$E[M_\infty] = E[M_0] = \frac{k}{k+m}$. 可以证明，$M_\infty$服从Beta分布$B(m,k)$，其分布密度为

$$\frac{\Gamma(k+m)}{\Gamma(k)\Gamma(m)} x^{k-1}(1-x)^{m-1}, \quad 0 < x < 1$$

证明略.

在Bayes统计中，这一结果是很自然的.假设我们对某一事件发生的概率P感兴趣，而对P 又一无所知，我们就只能假定P是$[0,1]$上的均匀分布(这就是先验分布). 现在假设我们一共做了$k+m-2$次试验，事件发生了$k-1$次，则根据Bayes定理，对P的后验分布就应该是参数为k和m的Beta分布.

例 6.4.4 令$\{M_n\}$是一关于$X_0, X_1, \cdots$的鞅，T是停时，且$P\{T < \infty\} = 1$，令 $T_n = \min(T, n), Y_n = M_{T_n}$，则$Y_n \to Y_\infty$且$Y_\infty = M_T$.根据停时定理，若 $\{M_n\}$是一致可积的，将有$E[Y_\infty] = E[Y_0]$.

例 6.4.5 令$X_1, X_2, \cdots$是独立同分布的随机变量序列，$P\{X_i = \frac{3}{2}\} = P\{X_i = \frac{1}{2}\} = \frac{1}{2}$. 令$M_0 = 1$,对$n > 0$,令$M_n = X_1 X_2 \cdots X_n$. 注意到 $E[M_n] = E[X_1] \cdots E[X_n] = 1$, 实际上

$$\begin{aligned} E[M_{n+1}|\mathcal{F}_n] &= E[X_1 \cdots X_{n+1}|\mathcal{F}_n] \\ &= X_1 \cdots X_n \cdot E[X_{n+1}|\mathcal{F}_n] \\ &= X_1 \cdots X_n \cdot E[X_{n+1}] = M_n \end{aligned}$$

所以$\{M_n\}$是关于$X_1, X_2, \cdots$的鞅. 由于$E[|M_n|] = E[M_n] = 1$，鞅收敛定理的条件成立，从而

$$M_n \to M_\infty.$$

那么$\{M_n\}$一致可积吗？答案是否定的. 事实上，$M_\infty = 0$(这样 $E[M_\infty] \neq E[M_0]$). 为此考虑

$$\ln M_n = \sum_{j=1}^{n} \ln X_j$$

右边是独立同分布随机变量的和，并且

$$E[\ln X_i] = \frac{1}{2}\ln\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\ln\frac{3}{2} < 0$$

根据大数定律 $\ln M_n \to -\infty$，从而$M_n \to 0$. 故$\{M_n\}$不是一致可积的.

§6.5　连续鞅

前面我们讨论了鞅的停时定理，也称为可选抽样定理(optional sampling theorem)和鞅收敛定理.请注意这里的鞅都是以离散时间n为参数的.事实上，对于连续参数鞅(仍称为鞅)也有类似定理，出于应用的考虑，我们不加证明地给出这些定理.同时利用它们证明Lundberg-Cramer破产理论中的Lundgerg不等式.

首先给出鞅的定义.设$(\Omega, \mathcal{F}, P)$是一个完备的概率空间；$(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$为一个非降的$\mathcal{F}$的子$\sigma$代数流.本书中所涉及的子$\sigma$代数流都是非降的，因此以后我们就将“非降的”省略，简称为子σ代数流.

定义 6.5.1 随机过程$\{X(t),t\ge 0\}$(简记为$\{X_t\}$)称为$\{\mathcal{F}_t\}$适应的，如果对每个$t\ge 0$, X_t为$\mathcal{F}_t$可测(即$\forall B\in\mathcal{B}$，有$X_t^{-1}(B)\in\mathcal{F}_t$). 一个适应过程$\{X_t\}$称为关于$\{\mathcal{F}_t\}$的鞅，如果每个$X_t$可积(即$E[|X_t|]<\infty$)，且对一切$0\le s<t$，有

$$E[X_t|\mathcal{F}_s]=X_s,\quad a.s. \tag{6.5.1}$$

特别地，当$\mathcal{F}_t=\sigma(X_u,0\le u\le t)$(由$\{X_u,0\le u\le t\}$生成的$\sigma$代数，即包含一切形如 $\{X_s\le x\}(s\le t,x\in\mathbb{R})$的事件的最小$\sigma$代数)时，式(6.5.1) 变为

$$E[X_t|X_u,0\le u\le s]=X_s,\quad a.s.$$

此时，简称$\{X_t\}$为鞅.

若随机过程$\{X_t,t\ge 0\}$是鞅，则对$t>0$, 有

$$E[X_t]=E[E[X_t|X_0]]=E[X_0] \tag{6.5.2}$$

与离散鞅类似，有下述简单例子.

例 6.5.1 设$\{Y_t, t \geq 0\}$是零初值具有平稳独立增量的随机过程.令

$$X_t = X_0 e^{Y_t}$$

其中X_0为一常数.若$E[e^{Y_t}] = 1$，则$\{X_t, t \geq 0\}$是一个鞅.事实上

$$E[|X_t|] = |X_0|E[e^{Y_t}] = |X_0|(E[e^{Y_1}])^t = |X_0|$$

再对$0 \leq s < t$，有

$$\begin{aligned} E[X_t|X_r, 0 \leq r \leq s] &= E[X_s e^{Y_t - Y_s}|X_r, 0 \leq r \leq s] \\ &= X_s E[e^{Y_t - Y_s}] \\ &= X_s E[e^{Y_{t-s}}] = X_s, \quad a.s. \end{aligned}$$

定义 6.5.2 非负广义随机函数τ(即$\tau : \Omega \longrightarrow [0,\infty]$)称为$\mathcal{F}_t$停时，如果$P\{\tau < \infty\} = 1$，并且对一切$t \geq 0$，$\{\tau \leq t\}$是$\mathcal{F}_t$可测的，即

$$\{\tau \leq t\} \in \mathcal{F}_t$$

特别地，当$\mathcal{F}_t = \sigma(X_s, 0 \leq s \leq t)$时，$\tau$称为关于随机过程$\{X_t, t \geq 0\}$的停时. 若存在常数$k > 0$使得$P\{\tau \leq k\} = 1$，则称$\tau$为有界停时.

下面是鞅论的一个重要结论——停时定理，即在适当条件下，将式(6.5.2)中的t置换成停时τ时，等式仍然成立.

定理 6.5.1 若τ是有界停时，则有

$$E[X_\tau] = E[X_0]$$

鞅论的另一个重要的结果是收敛定理.

定理 6.5.2 设$\{X_t, t \geq 0\}$是一个鞅并且$X_t \geq 0, \forall t \geq 0$(简称为非负鞅)，则存在几乎处处收敛的有限极限，即有

$$\lim_{t\to\infty} X_t = X_\infty < \infty, \quad a.s.$$

下面给出Lundberg-Cramèr破产模型中，定理??(2) Lundberg 不等式(??)，即

$$\Psi(u) \leq e^{-Ru}, \quad \forall u \geq 0$$

的证明.

令

$$X_t = e^{-RU(t)} = X_0 e^{-RV_t}$$

其中$X_0 = e^{-Ru}$, R为调节系数，$V_t = ct - S(t)$(关于$S(t)$的意义，详见4.4节).若令

$$Y_t = -RV_t, \quad t \geq 0$$

则$\{Y_t, t \geq 0\}$为零初值，且具有平稳独立增量的随机过程.再由4.4节注(2)知

$$E[e^{Y_1}] = E[e^{-RV_1}] = M_{V_1}(-R) = 1$$

于是从例6.5.1可知$\{X_t, t\geq 0\}$是一个非负鞅.利用非负鞅的收敛定理6.5.2，得到

$$\lim_{t\to\infty} X_t = X_\infty < \infty, \quad a.s.$$

现令T为破产时刻，由于对任意固定的t，$T\wedge t$是有界停时，再利用停时定理6.5.1即知

$$E[X_{T\wedge t}] = E[X_0] = e^{-Ru}$$

于是有

$$e^{-Ru} = E[X_{T\wedge t}|T\leq t]P\{T\leq t\} + E[X_{T\wedge t}|T>t]P\{T>t\}$$

$$= E[X_T|T\leq t]P\{T\leq t\} + E[X_t|T>t]P\{T>t\} \quad (6.5.3)$$

注意到当$t<T$时，$U(t)\geq 0$，所以

$$X_t = e^{RU(t)} \leq 1$$

因此，由单调收敛定理与Lebesgue控制收敛定理，在(6.5.3)式两端令$t \to \infty$取极限得

$$e^{-Ru} = E[X_t|T < \infty]P\{T < \infty\} + E\{X_\infty|T = \infty\}P\{T = \infty\}$$

又因为$\lim_{t\to\infty} U(t) = +\infty, a.s.$，故有$X_\infty = 0, a.s.$. 从而有

$$e^{-Ru} = E[X_T|T < \infty]P\{T < \infty\}$$

由此得到

$$\Psi(u) = \frac{e^{-Ru}}{E[e^{-RU(t)}|T < \infty]}$$

再注意到$U(T) < 0, e^{-RU(T)} > 1$，由上式即知

$$\Psi(u) \le e^{-Ru}$$

从而Lundberg不等式得证. ∎