第 13 章　电介质

物质分类

✓导体

• 导体内存在大量的自由电子

✓绝缘体

• 与导体相对，绝缘体内没有可自由移动的电子——称电介质

✓半导体

• 半导体内有少量的可自由移动的电荷

导体、电介质和半导体与静电场作用的物理机制各不相同。本章讨论电介质

13.1 电介质及其极化

电介质：

电阻率很大，导电能力很差的物质，即绝缘体。

电介质的特点：

原子中的电子被原子核束缚的很紧，不能自由移动。
介质内部没有可以自由移动的电荷。

在外电场中，物质分子中的正负电荷可以在分子线度范围内移动——产生极化现象。

一、现象

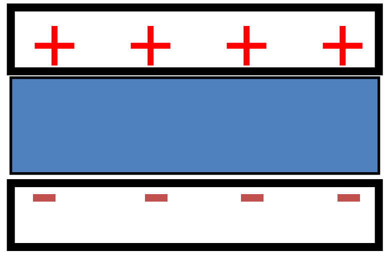
真空中点电荷之电场： $\vec{E} = \dfrac{q\vec{r}}{4\pi\varepsilon_0 r^3}$

充满密度均匀，各向同性的电介质：$\vec{E} = \dfrac{q\vec{r}}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon_r r^3}$

$\varepsilon_r > 1$ 电介质的相对介电常数

平行板电容器，求电容。

极板间为真空：



Q

$-Q$

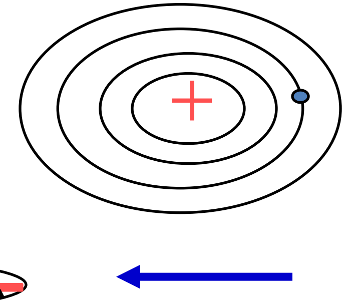
$$E_0 = \frac{Q}{S\varepsilon_0} \quad V_0 = E_0 d \quad C_0 = \frac{Q}{V_0} = \frac{\varepsilon_0 S}{d}$$

极板间充满介质：

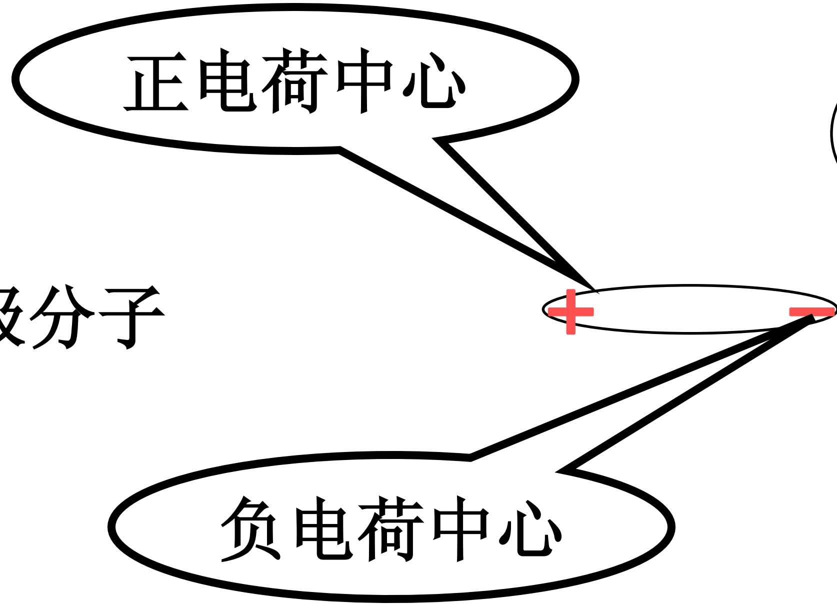
$$E = \frac{Q}{S\varepsilon_0\varepsilon_r} \quad V = Ed \quad C = \frac{Q}{V} = \frac{\varepsilon_0\varepsilon_r S}{d}$$

ε_r 相对电容率

二、电介质极化的微观图象

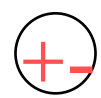


有极分子

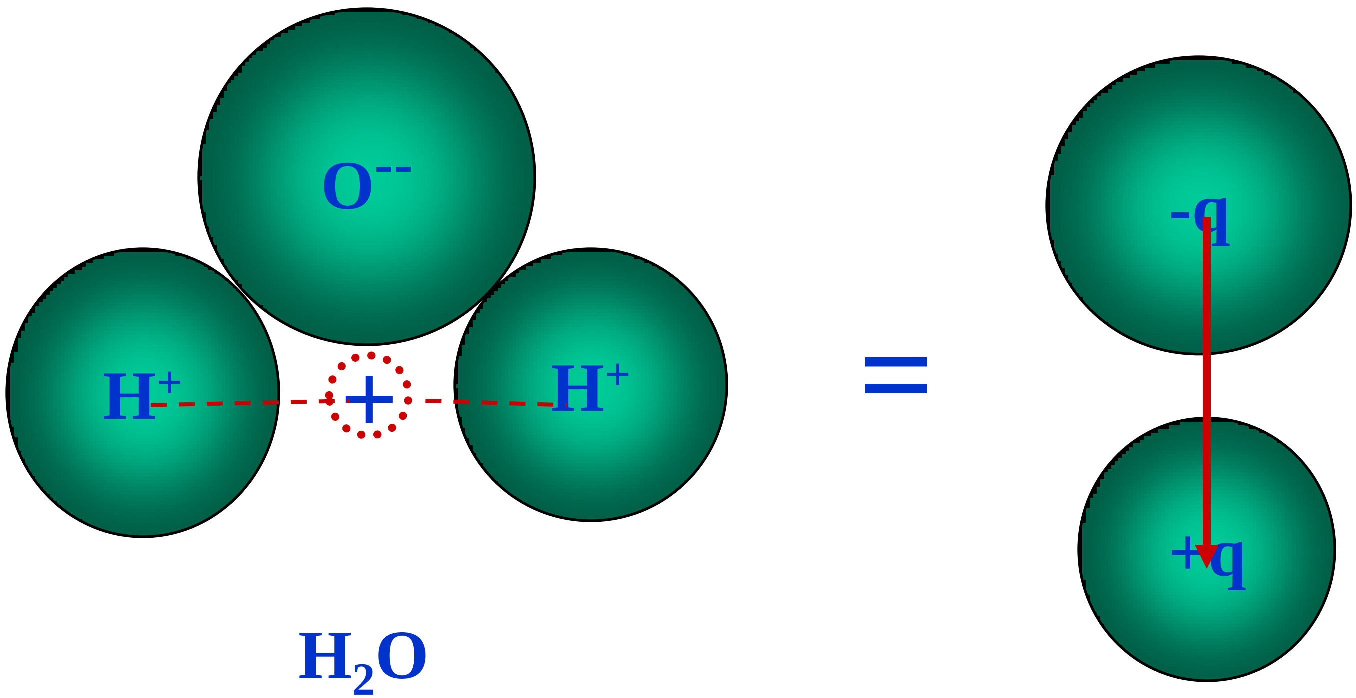


$$\boxed{\vec{p} = q\vec{l}}$$

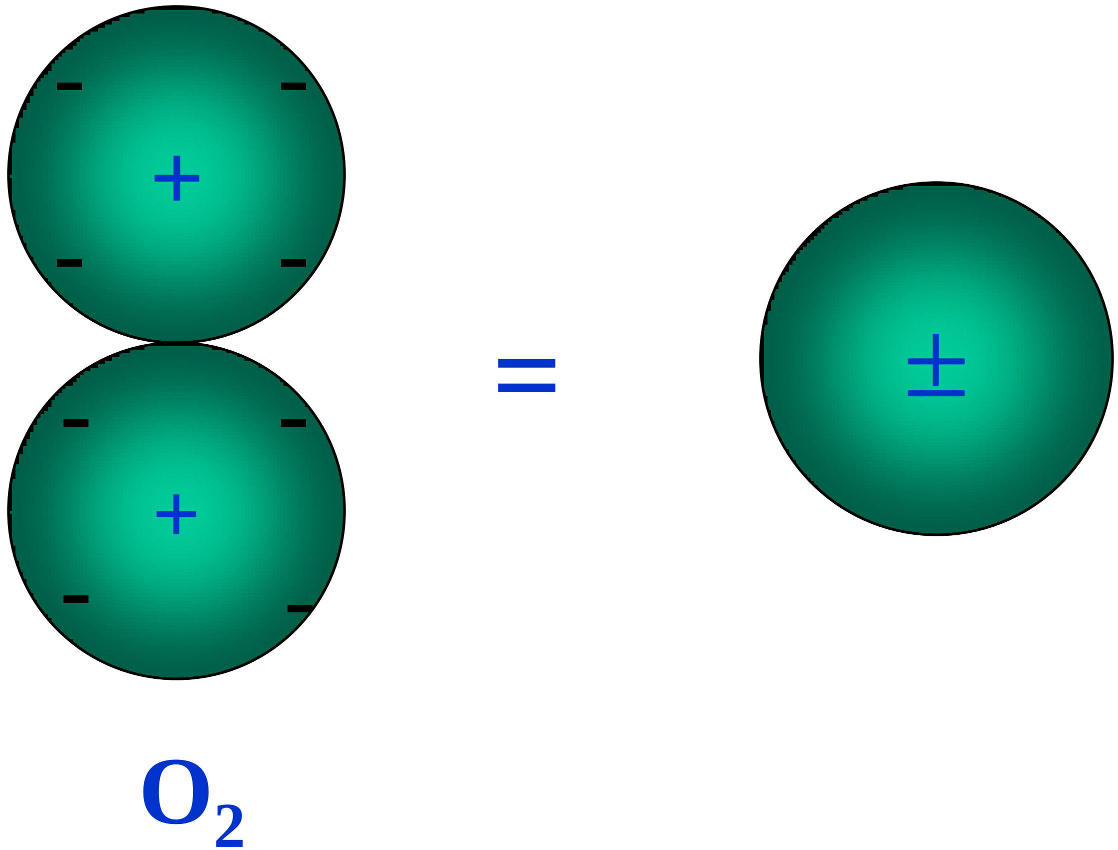
无极分子



有极分子：　无外场时，分子等效正、负电荷中心不重合→分子固有电偶极矩。



无极分子： 无外场时，分子等效正、负电荷中心重合→无分子固有电偶极矩。

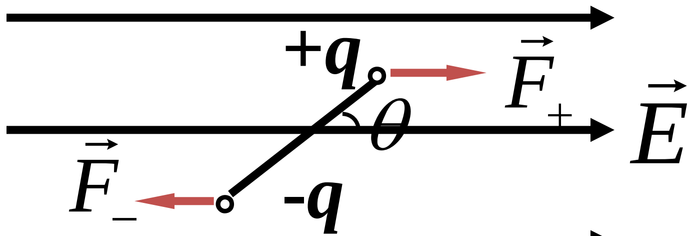


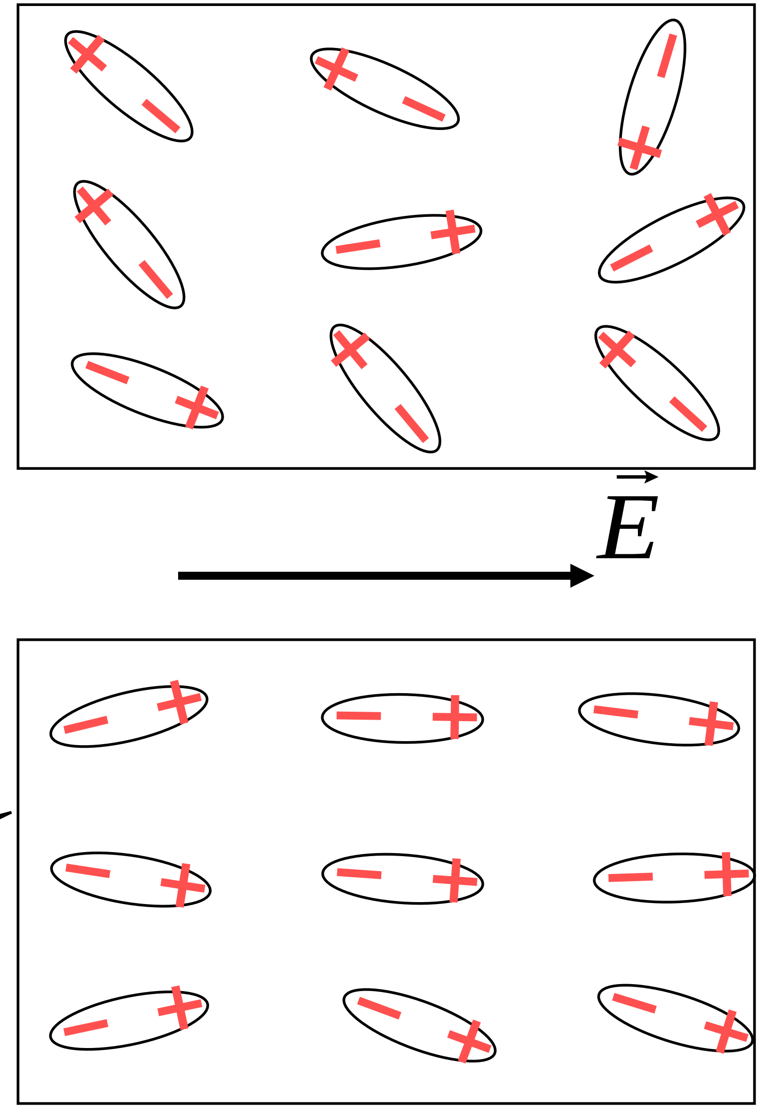
有极分子介质

无外场时：

热运动---紊乱

电中性





有电场时

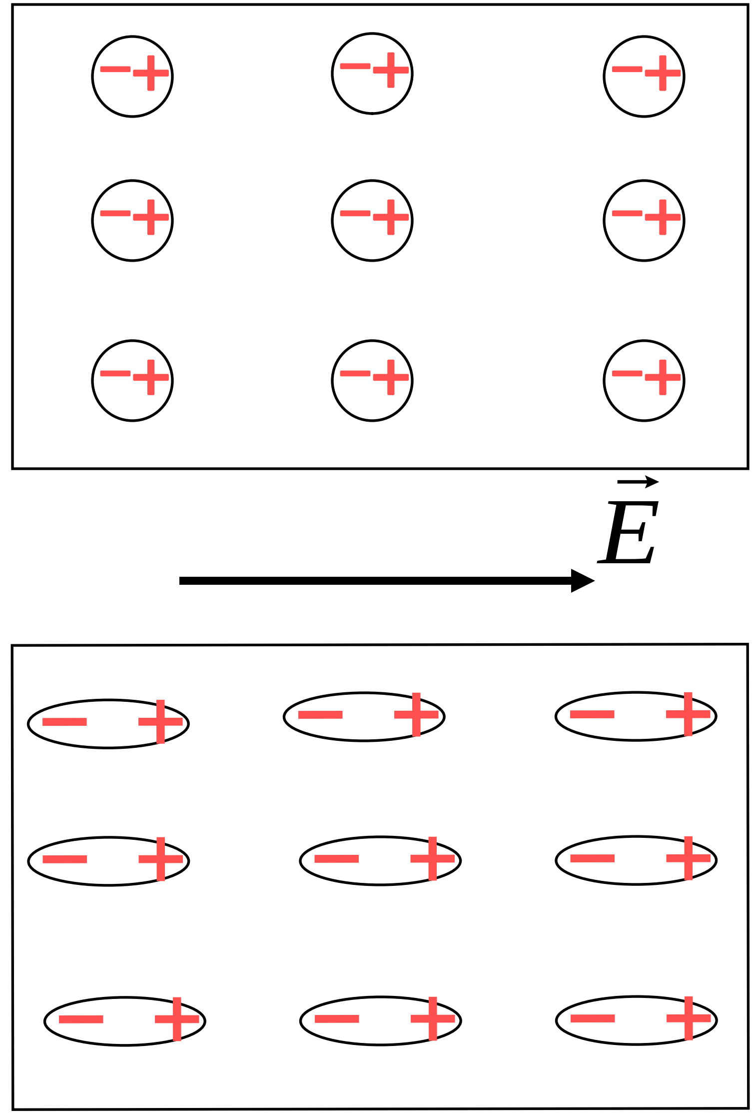
极化电荷

取向极化 (orientation polarization)

无极分子介质

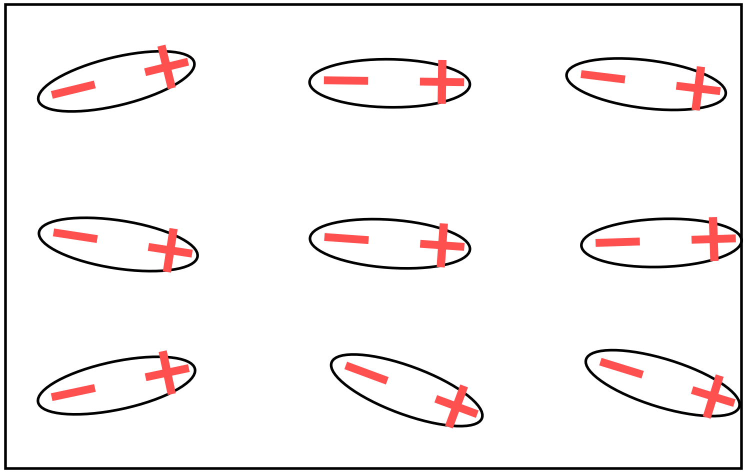
无外场时：

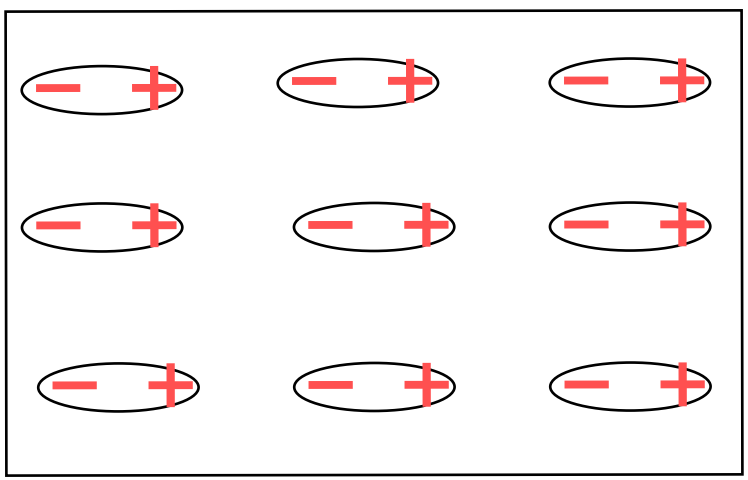
有电场时：



位移极化 （displacement polarization）

演示





共同效果

边缘出现电荷分布

（均匀介质）

称极化电荷

Polarization charges

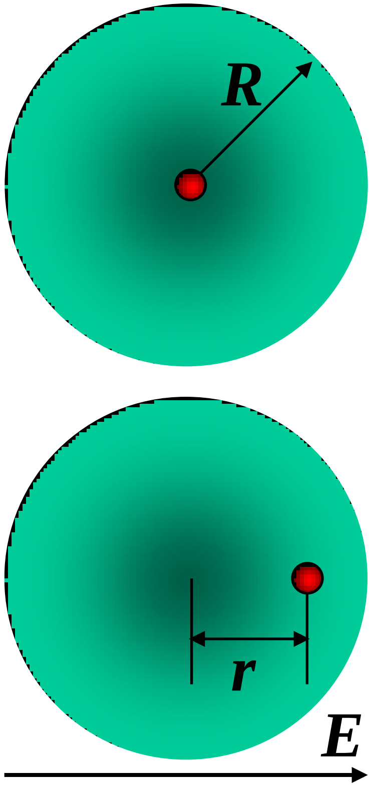
束缚电荷 bound charges

原子在外场*E*中的极化

原子核所在处负电荷的电场 $E' = \dfrac{-q}{4\pi\varepsilon_0 R^3} r$

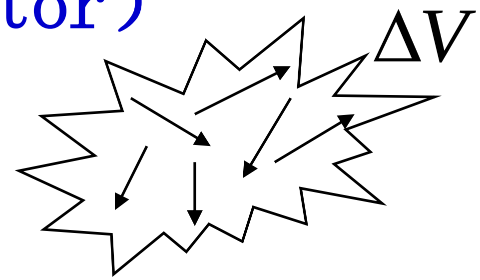
平衡时***E* = -*E*'** $E = \dfrac{q}{4\pi\varepsilon_0 R^3} r$

原子偶极矩 $\vec{p} = q\vec{r} = 4\pi\varepsilon_0 R^3 \vec{E}$



13.2 极化强度和极化电荷

一、极化强度 $\vec{P}$（Polarization vector）



电偶极子排列的有序程度反映了介质被极化的程度排列愈有序说明极化愈强烈

宏观上无限小微观上无限大的体积元

定义

$$\boxed{\vec{P}=\lim_{\Delta V\to 0}\frac{\sum_i \vec{p}_i}{\Delta V}}$$

$\vec{p}_i$ 每个分子的电偶极矩

SI 单位 $\mathrm{C/m^2}$

当介质未极化，$\vec{P}=0$

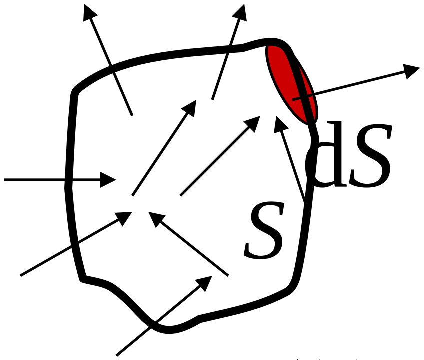
当介质中各点 $\vec{P}$ 相等，称为均匀极化

二、极化强度 $\vec{P}$与极化电荷的关系

在已极化的介质内任意作一闭合面*S*

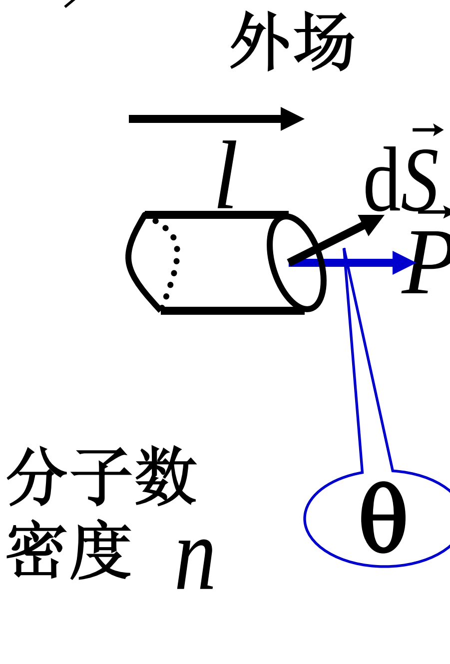
S 将电介质分子分为三部分，一部分在*S* 内，一部分在*S* 外，一部分穿越*S*。

电偶极矩穿过*S* 的分子对*S*内的极化电荷有贡献



1. 小面元d*S*对面*S*内极化电荷的贡献

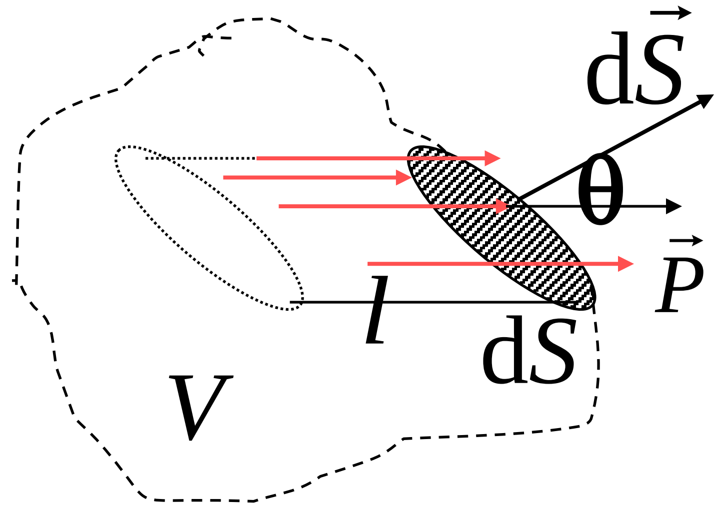
在**d*S***附近薄层内认为介质均匀极化



$$\left|\mathrm{d}q'\right| = \left|qnl\,\mathrm{d}S\cos\theta\right| = \left|P\mathrm{d}S\cos\theta\right|$$

$$= \left|\vec{P}\cdot\mathrm{d}\vec{S}\right|$$

如果θ < π/2 落在面内的是负电荷



如果θ > π/2 落在面内的是正电荷

所以小面元d*S*对面内极化电荷的贡献

$$\mathrm{d}q' = -P_{\mathrm{n}}\mathrm{d}S = -\vec{P}\cdot\mathrm{d}\vec{S}$$

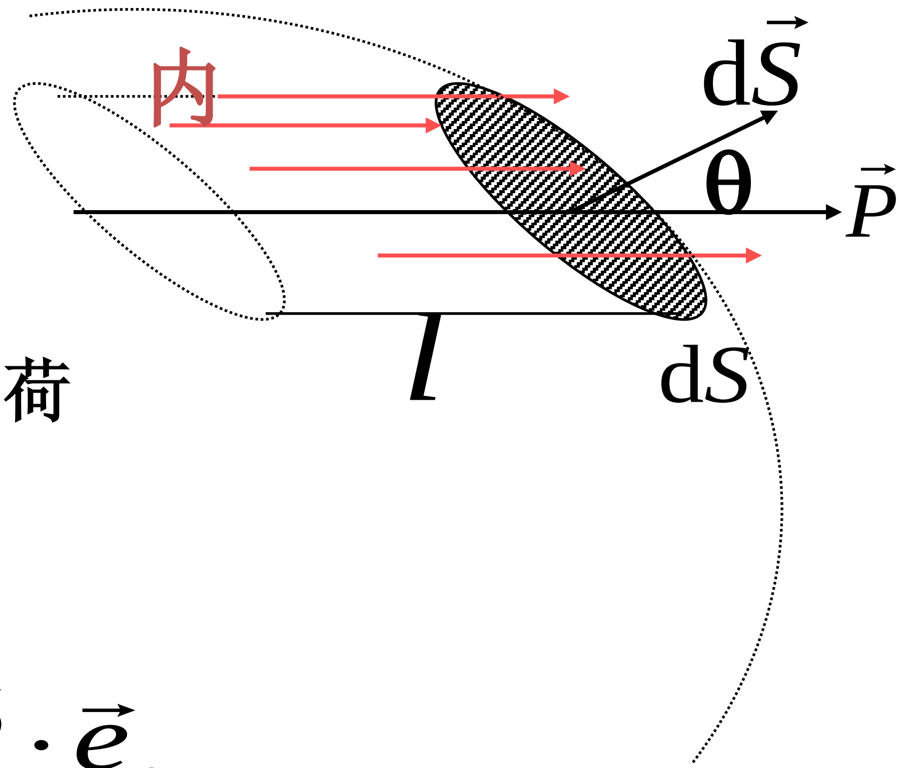
2. 在*S*所围的体积内的极化电荷q'与$\vec{P}$的关系

$$q' = -\oiint_S \vec{P}\cdot\mathrm{d}\vec{S}$$

3. 电介质表面极化电荷面密度

小面元**d*S***对面内极化电荷的贡献

$$\boxed{\mathrm{d}q' = -\vec{P}\cdot \mathrm{d}\vec{S}}$$

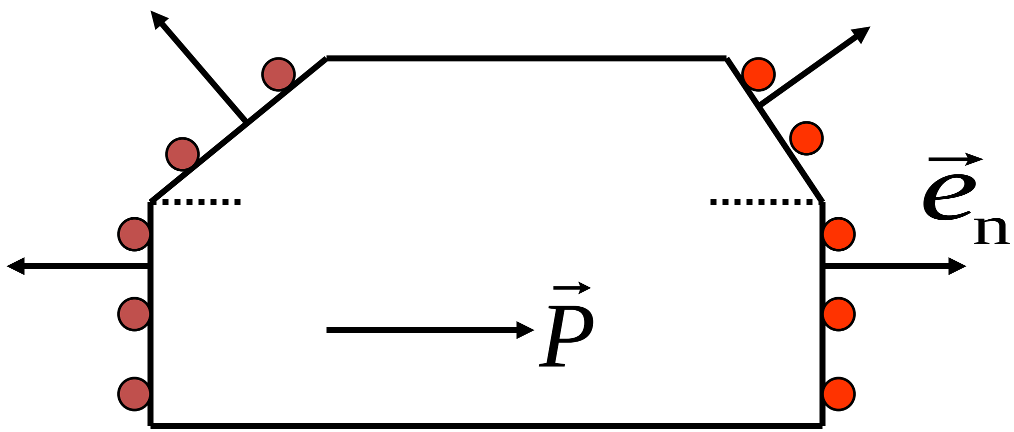


穿出小面元**d*S***形成面分布的电荷

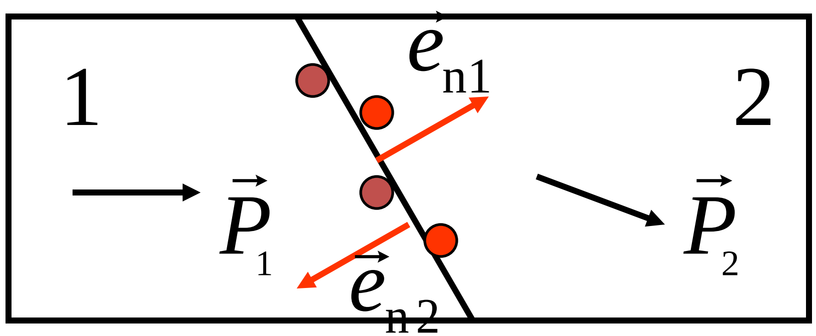
$$\boxed{\mathrm{d}q'' = \vec{P}\cdot \mathrm{d}\vec{S}} = P_\mathrm{n}\mathrm{d}S$$

$$\sigma' = \frac{\mathrm{d}q''}{\mathrm{d}S} = P_\mathrm{n} = \vec{P}\cdot\vec{e}_\mathrm{n}$$

$$\boxed{\sigma' = \vec{P}\cdot\vec{e}_\mathrm{n}}$$ $\vec{e}_\mathrm{n}$ 介质外法线方向

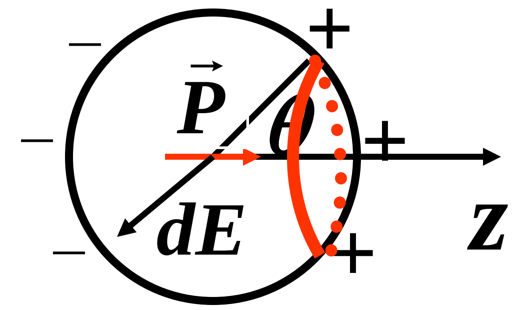


$$\boxed{\sigma' = \vec{P}\cdot\vec{e}_n}$$



$$\sigma' = \vec{P}_1\cdot\vec{e}_{n1} + \vec{P}_2\cdot\vec{e}_{n2} = (\vec{P}_1 - \vec{P}_2)\cdot\vec{e}_{n1}$$

[例题]一均匀介质球发生均匀极化，已知极化强度为$\vec{P}$，求极化电荷在中心产生的电场。



解：

$$\sigma = P\cos\theta$$

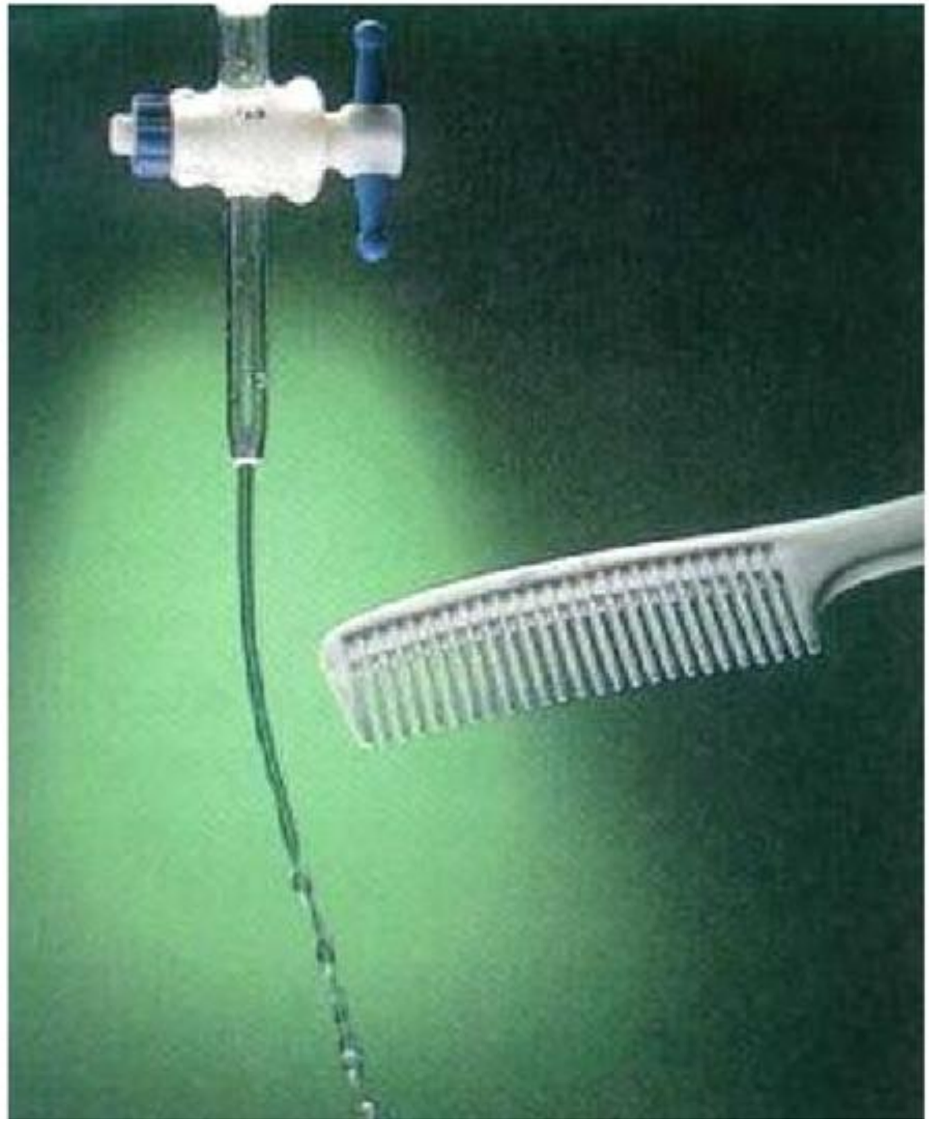
$$\mathrm{d}E = \frac{\mathrm{d}q}{4\pi\varepsilon_0 R^2}$$

$$\mathrm{d}E_z' = -\mathrm{d}E\cos\theta = -\frac{\mathrm{d}q}{4\pi\varepsilon_0 R^2}\cos\theta$$

$$\mathrm{d}E_z = -\frac{\sigma\,(2\pi R\sin\theta)(R\mathrm{d}\theta)}{4\pi\varepsilon_0 R^2}\cos\theta$$

$$E_z = -\int_0^{\pi}\frac{P\sin\theta\cos^2\theta\mathrm{d}\theta}{2\varepsilon_0} = -\frac{P}{3\varepsilon_0}$$

带静电的梳子为什么能吸引水柱？

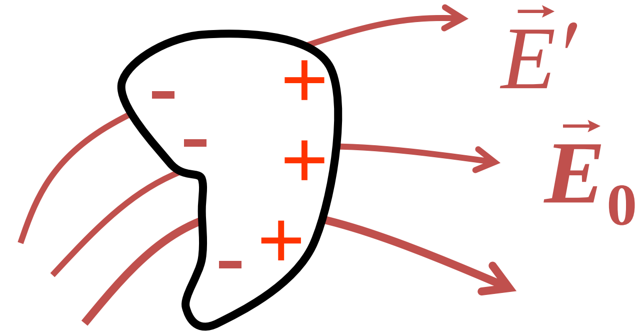


13.3 介质中静电场的基本规律

一、介质中的场强

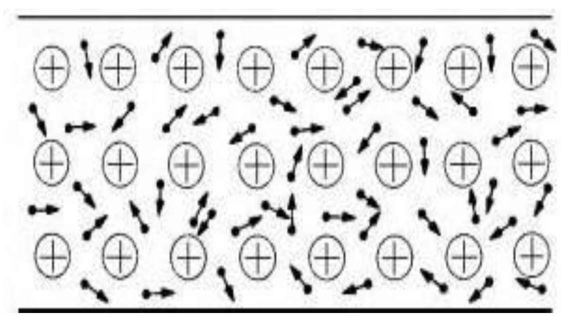
$$\vec{E} = \vec{E}_0 + \vec{E}'$$

外电场　　极化电荷产生



极化电荷产生电场
不能完全抵消外场

二、介质中的静电场规律



导体内部到处充满自由电荷

1. 环流定理

$$\oint_l \vec{E} \cdot \mathrm{d}\vec{l} = 0$$

2. 高斯定理

$$\oiint_S \vec{E} \cdot \mathrm{d}\vec{S} = \frac{1}{\varepsilon_0}(q_0 + q')$$

三、介质电极化率

实验表明，对于各向同性材料， 电场不太强时

$$\vec{P} = \chi_e \varepsilon_0 \vec{E} \qquad \chi_e = \varepsilon_r - 1$$

χ_e 纯数，介质极化率

$$\vec{P} = \varepsilon_0 (\varepsilon_r - 1) \vec{E}$$

$$\vec{E} \leftarrow q_0 + q' \leftarrow \vec{P}$$

$$\vec{P} = \chi_e \varepsilon_0 \vec{E}$$

电极化率

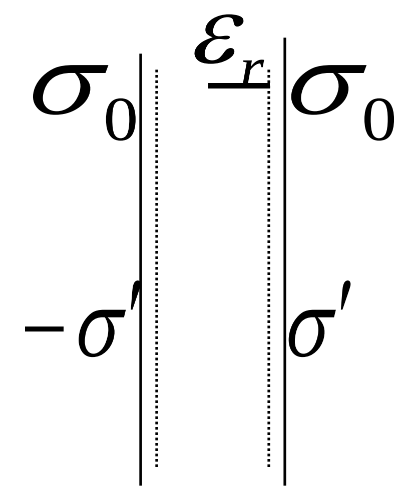
- **P与E 是否成比例**
  - 凡满足以上关系的介质——线性介质
  - 不满足以上关系的介质——非线性介质
- **介质性质是否随空间坐标变**（空间均匀性）
  - χ_e—常数：均匀介质；
  - χ_e—坐标的函数：非均匀介质
- **介质性质是否随空间方位变（方向均匀性）**
  - χ_e—标量：各向同性介质；
  - χ_e—张量：各向异性介质
- **以上概念是从三种不同的角度来描述介质的性质**

[例题]平行板电容器极板上自由电荷面密度为 σ_0，

充满相对介电常数为 ε_r 的均匀各向同性线性电介质。

求:板内的场。

解：均匀极化表面出现极化电荷



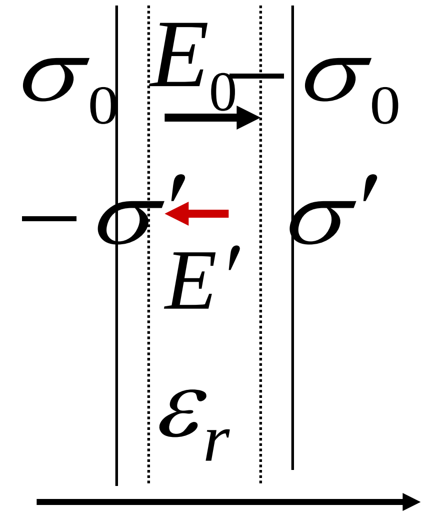
内部的场由自由电荷和极化电荷共同产生。

$\pm\sigma_0$ $\xrightarrow{\hspace{2cm}}$ $\boldsymbol{E_0 = \dfrac{\sigma_0}{\varepsilon_0}}$

单独

$\pm\sigma'$ $\xrightarrow{\hspace{2cm}}$ $\boldsymbol{E' = \dfrac{\sigma'}{\varepsilon_0}}$

共同产生



$$\boldsymbol{E = E_0 - E' = \frac{\sigma_0}{\varepsilon_0} - \frac{\sigma'}{\varepsilon_o}} \cdots \quad \star$$

$$\sigma' = P_{\mathrm{n}} = \varepsilon_0\left(\varepsilon_r - 1\right)E \cdots \quad \star$$

联立

$$\xrightarrow{\hspace{2cm}} E = \frac{\sigma_0}{\varepsilon_0\varepsilon_r} = \boldsymbol{\frac{E_0}{\varepsilon_r}}$$

普遍?

13.4 电位移矢量

一、定义

$$\vec{D} = \varepsilon_0 \vec{E} + \vec{P}$$ 单位 C/m²

$$\boxed{\oiint_S \vec{D} \cdot \mathrm{d}\vec{S} = \sum_i q_{0i}}$$

自由电荷或者非极化电荷

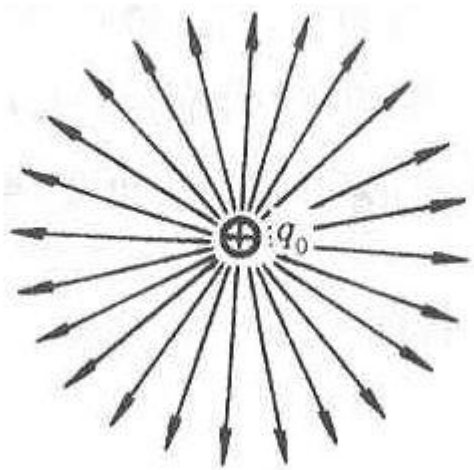
证明：
$$\oiint_S \vec{E} \cdot \mathrm{d}\vec{S} = \frac{\sum_i q_i}{\varepsilon_0} = \frac{\sum_i q_i' + \sum_i q_{oi}}{\varepsilon_0}$$

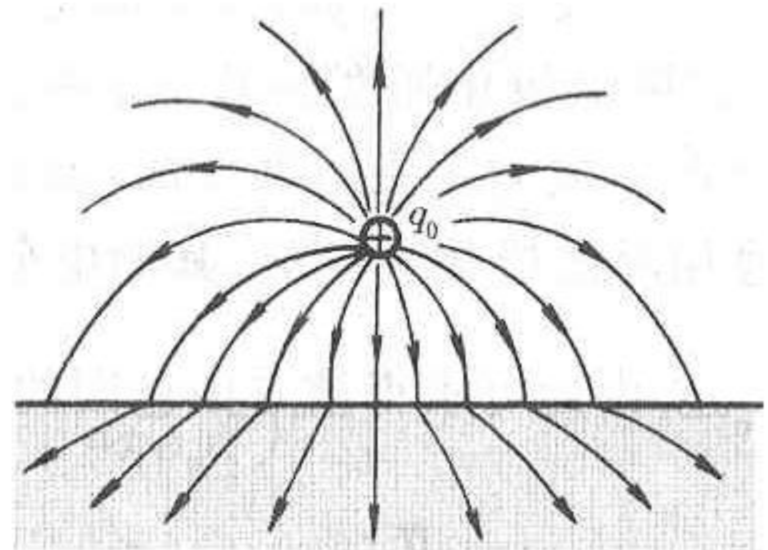
$$\oiint_S \varepsilon_0 \vec{E} \cdot \mathrm{d}\vec{S} = -\oiint_S \vec{P} \cdot \mathrm{d}\vec{S} + \sum_i q_{oi} \Longrightarrow \oiint_S \vec{D} \cdot \mathrm{d}\vec{S} = \sum_i q_{0i}$$

二、性质 $\vec{D}=\varepsilon_0\vec{E}+\vec{P}$ $\oiint_S \vec{D}\cdot d\vec{S}=\sum_i q_{0i}$

（1）介质中的高斯定理表明：电位移矢量对任意封闭曲面的通量与该封闭曲面内自由电荷有关。

但是：电位移矢量本身与空间所有的电荷分布有关，包括自由电荷和极化电荷。





$\vec{D}$线起始于正自由电荷，终止于负自由电荷，

在没有自由电荷处不中断

$$\vec{D}=\varepsilon_0\vec{E}+\vec{P}$$

（2）电位移矢量是描述介质中电场性质的辅助量，没有具体的物理意义。电场强度是描述电场的基本物理量。

（3）介质中的高斯定理包含了真空中的高斯定理。

$$\because \vec{P}=0$$

$$\longrightarrow \vec{D}=\varepsilon_0\vec{E}+\vec{P}=\varepsilon_0\vec{E}$$

$$\oiint_S \varepsilon_0\vec{E}\cdot d\vec{S}=\oiint_S \vec{D}\cdot d\vec{S}=\sum q$$

$$\longrightarrow \oiint_S \vec{E}\cdot d\vec{S}=\frac{1}{\varepsilon_0}\sum q$$

（4）电位移矢量与电场强度的关系

对于各向同性电介质，当电场不太强时：

$$\vec{P} = \chi_e \varepsilon_0 \vec{E}$$

$$\vec{D} = \varepsilon_0 \vec{E} + \vec{P} = \varepsilon_0 \vec{E} + \chi_e \varepsilon_0 \vec{E}$$

$$= (1 + \chi_e)\varepsilon_0 \vec{E}$$

$$= \varepsilon_0 \varepsilon_r \vec{E}$$

$$= \varepsilon \vec{E}$$

ε 电介质介电常数

- 注意 $\vec{D} = \varepsilon_0 \vec{E} + \vec{P}$ 是普遍成立定义式。
- 但是 $\vec{D} = \varepsilon \vec{E}$ 只适用于弱场且介质各向同性。

三、应用

在具有某种对称性的情况下，可以首先由高斯定理出发解出 $\vec{D}$

$$\oiint_S \vec{D}\cdot \mathrm{d}\vec{S} = \sum_i q_{0i}$$

$$\vec{D} \Rightarrow \vec{E} \Rightarrow \vec{P} \Rightarrow \sigma' \Rightarrow q'$$

$$\vec{D} = \varepsilon \vec{E} \qquad \vec{P} = \varepsilon_0(\varepsilon_r - 1)\vec{E}$$

$$\sigma' = P_\mathrm{n} \qquad q' = -\oiint_S \vec{P}\cdot \mathrm{d}\vec{S}$$

感应、极化、自由、束缚电荷

- 感应电荷：导体中自由电荷在外电场作用下作宏观移动使导体的电荷重新分布——感应电荷
  - 特点：导体中的感应电荷是自由电荷，可以从导体的一处转移到另一处，也可以通过导线从一个物体传递到另一个物体
- 极化电荷：电介质极化产生的电荷
  - 特点：极化电荷起源于原子或分子的极化，因而总是牢固地束缚在介质上，既不能从介质的一处转移到另一处，也不能从一个物体传递到另一个物体。若使电介质与导体接触，极化电荷也不会与导体上的自由电荷相中和。因此往往称极化电荷为束缚电荷。

束缚电荷 $\xleftrightarrow{?}$ 极化电荷 否!

- 用摩擦等方法使绝缘体带电
  - 绝缘体上的电荷——束缚电荷
  - 并非起源于极化，因而可能与自由电荷中和
  - 实际上它是一种束缚在绝缘体上的自由电荷
- 自由、束缚是指电荷所处的状态；
- 感应、极化或摩擦起电是指产生电荷的原因

$$\boxed{\oiint_S \vec{D}\cdot \mathrm{d}\vec{S} = \sum_i q_{0i}}$$

自由电荷或者非极化电荷

[例题]一无限大各向同性均匀介质平板厚度为 ，d

相对介电常数为 ε_r，内部均匀分布体电荷密度为 ρ_0 的自由电荷。

求：介质板内、外的 $\vec{D},\vec{E},\vec{P}$ 大小。

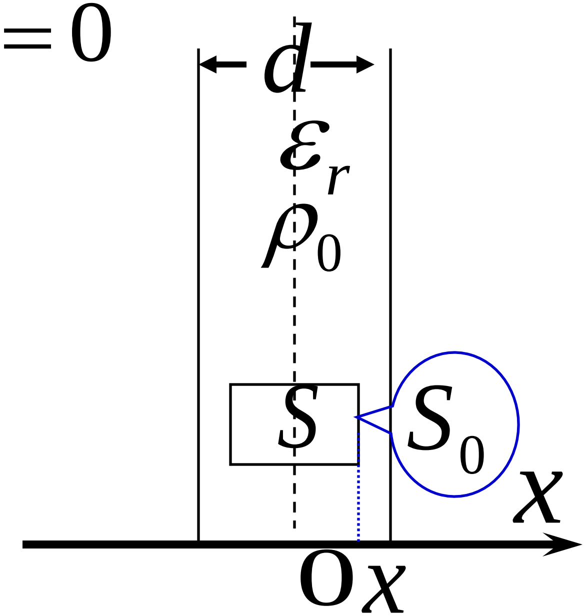
解：面对称，故 $\vec{D},\vec{E},\vec{P}$ 垂直于平板

取坐标系如图，显然：$x=0$ 处 $E=0$

以 $x=0$ 处的面为对称面

过场点作正柱形高斯面 S

底面积设为 S_0



$$\oiint_S \vec{D}\cdot d\vec{S} = \sum_i q_{0i}$$

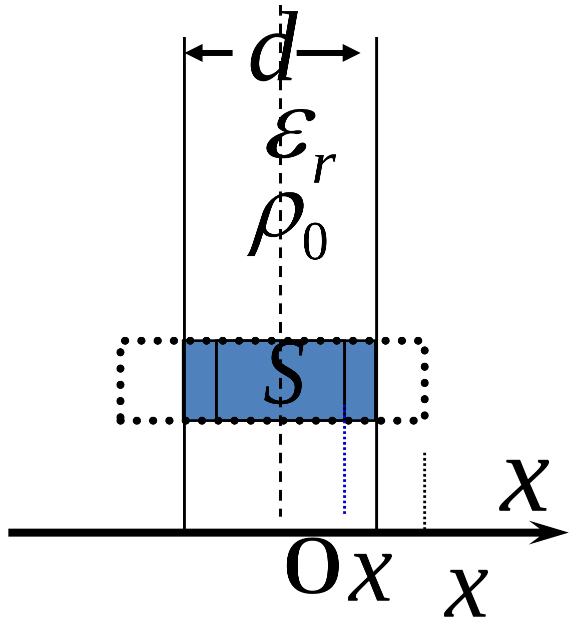
$$|x| \le \frac{d}{2} \qquad 2DS_0 = \rho_0 2|x|S_0$$

$$D = \rho_0 |x|$$

$$\vec{D} = \rho_0 x\vec{i}$$

$$|x| \ge \frac{d}{2} \qquad 2DS_0 = \rho_0 S_0 d$$

$$D = \frac{\rho_0}{2} d$$



$$|x| \le \frac{d}{2} \quad \boxed{D = \rho_0 |x|}$$

$$E = \frac{D}{\varepsilon_0 \varepsilon_r} = \frac{\rho_0 |x|}{\varepsilon_0 \varepsilon_r}$$

$$P = (\varepsilon_r - 1)\frac{\rho_0 |x|}{\varepsilon_r}$$

$$|x| \ge \frac{d}{2} \quad \boxed{D = \frac{\rho_0}{2} d}$$

$$E = \frac{D}{\varepsilon_0} = \frac{\rho_0 d}{2\varepsilon_0}$$

$$P = \varepsilon_0 (\varepsilon_r - 1) E = 0$$

[例题] 平行板电容器，两板间距为d。将它充电至电势差为U，然后断开电源，插入厚为$d/2$，相对介电常数为ε_r的电介质平板。（1）求电介质中的D，E，P的大小及电介质表面的极化电荷密度。（2）求电容器两板板间的电势差；（3）画出电容器内的D线、E线及P线；（4）如果在插入电介质平板后，保持电源接通。那么电介质中的D，E，P又为多大?

（1）插入电介质平板之前$E_0=U/d=\sigma_0/\varepsilon_0$，$\sigma_0=\varepsilon_0 U/d$不变

插入电介质平板之后 $D=\sigma_0=\varepsilon_0\dfrac{U}{d}$

$$E=\frac{D}{\varepsilon}=\frac{1}{\varepsilon_r\varepsilon_0}\varepsilon_0\frac{U}{d}=\frac{1}{\varepsilon_r}\frac{U}{d}$$

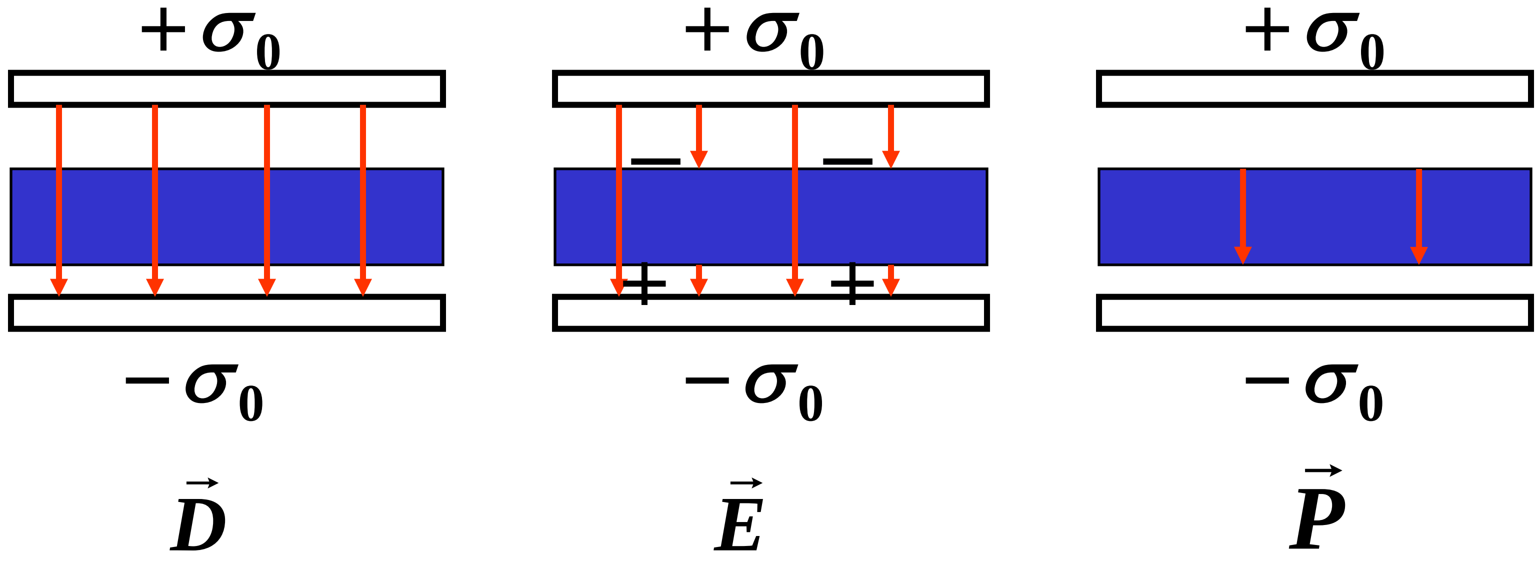
$$P=\chi\varepsilon_0 E=(\varepsilon_r-1)\cdot\frac{\varepsilon_0}{\varepsilon_r}\frac{U}{d}=\frac{\varepsilon_r-1}{\varepsilon_r}\varepsilon_0\frac{U}{d}$$

$$\sigma'=P_n=\frac{\varepsilon_r-1}{\varepsilon_r}\varepsilon_0\frac{U}{d}$$

（2）求电容器两板板间的电势差

$$U' = E_0 \cdot \frac{d}{2} + E \cdot \frac{d}{2} = \frac{U}{d} \cdot \frac{d}{2} + \frac{U}{\varepsilon_r d} \cdot \frac{d}{2} = \frac{1+\varepsilon_r}{2\varepsilon_r} \cdot U$$

（3）画出电容器内的*D*线、*E*线及*P*线



（4）在电源保持接通情况下，求电介质中的D，E，P

$$U=E_0\cdot\frac{d}{2}+\frac{E_0}{\varepsilon_r}\cdot\frac{d}{2}=\frac{1+\varepsilon_r}{2\varepsilon_r}E_0 d$$

$$\therefore E_0=\frac{2\varepsilon_r U}{(1+\varepsilon_r)d}\qquad \sigma_0=\varepsilon_0 E_0=\frac{2\varepsilon_0\varepsilon_r U}{(1+\varepsilon_r)d}$$

$$D=\varepsilon E=\varepsilon_0 E_0=\frac{2\varepsilon_0\varepsilon_r}{1+\varepsilon_r}\frac{U}{d}\qquad E=\frac{D}{\varepsilon}=\frac{E_0}{\varepsilon_r}=\frac{2}{1+\varepsilon_r}\frac{U}{d}$$

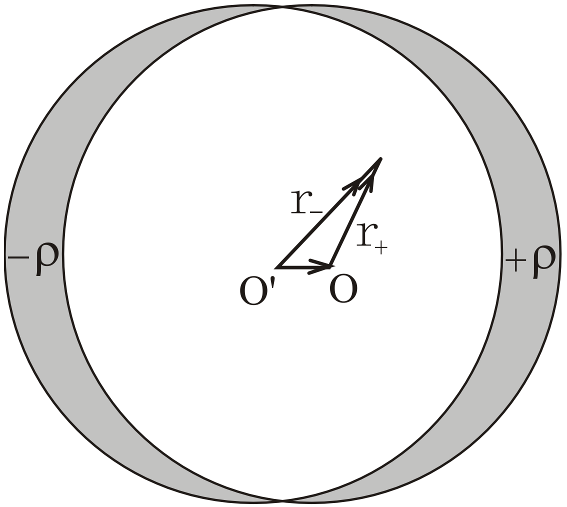
$$P=(\varepsilon_r-1)\varepsilon_0 E=\frac{\varepsilon_r-1}{\varepsilon_r+1}\cdot\frac{2\varepsilon_0 U}{d}$$

[例]真空中有一场强为E_0的均匀场，在此电场中放入一相对介电常数为ε_r的均匀极化介质球，求这介质球内任意一点的场强。

首先证明均匀极化介质球表面极化电荷在球内产生的为匀强场

均匀极化介质球中每个电偶极子平均看来都在x方向发生了一个位移d，对整个介质球看来相当于一个体电荷密度为$\pm\rho$的带电球体发生了一个位移。在$\pm\rho$相重合的地方不带电而不重迭部分即界面上出现的电荷即为极化电荷。如图。

$$\vec{E}_{\pm}=\frac{\pm\rho}{3\varepsilon_0}\cdot\vec{r}_{\pm}\qquad \vec{E}'=\vec{E}_{+}+\vec{E}_{-}=\frac{\rho}{3\varepsilon_0}(\vec{r}_{+}-\vec{r}_{-})$$



$$\therefore\ \vec{E}'=-\frac{\rho}{3\varepsilon_0}\vec{d}$$

设单位体积中电偶极子的个数为n，

则电荷密度 $\rho=nq$

$$\vec{E}'=-\frac{nq\vec{d}}{3\varepsilon_0}=-\frac{n\vec{p}}{3\varepsilon_0}=-\frac{1}{3\varepsilon_0}\left(\frac{N}{V}\vec{p}\right)=-\frac{1}{3\varepsilon_0}\frac{\sum\vec{p}}{V}=-\frac{\vec{P}}{3\varepsilon_0}$$

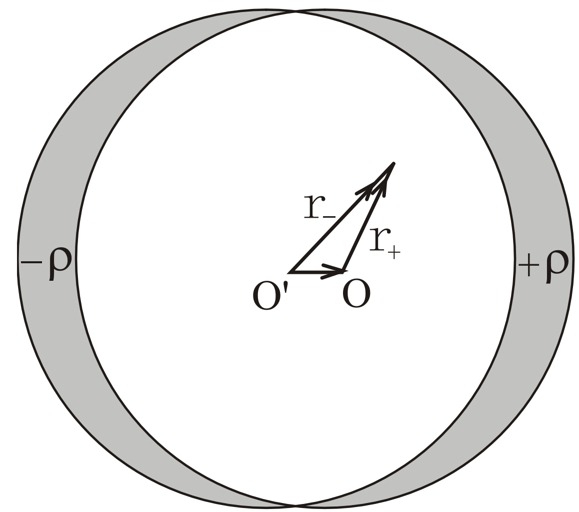
介质球中的场强应为均匀场E_0和极化电荷产生的均匀场E'的叠加

$$\vec{E}=\vec{E}_0+\vec{E}'$$

$$\because \vec{P}=\chi_e\varepsilon_0\vec{E}=(\varepsilon_r-1)\varepsilon_0\vec{E} \qquad \vec{E}'=-\frac{\vec{P}}{3\varepsilon_0}$$

$$\therefore \vec{E}'=-\frac{\varepsilon_r-1}{3}\vec{E}$$

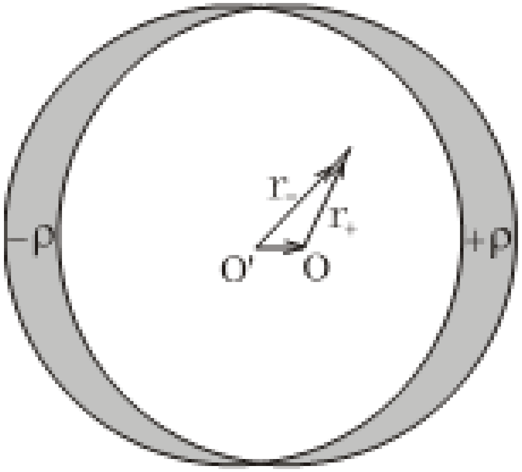
$$\vec{E}=\vec{E}_0-\frac{\varepsilon_r-1}{3}\vec{E}$$



$$\Longrightarrow \quad \vec{E}=\frac{3}{\varepsilon_r+2}\vec{E}_0$$

[例]真空中有一场强为E_0的均匀场，在此电场中放入一半径为R的金属球。

$$\therefore \vec{E}' = -\frac{\rho}{3\varepsilon_0}\vec{d}$$



感应电荷在球内形成匀强电场

$$\vec{E}' + \vec{E}_0 = 0$$

$$E_0 = \frac{\rho}{3\varepsilon_0}d \qquad E_0\frac{4}{3}\pi R^3 = \frac{\rho}{3\varepsilon_0}d\cdot\frac{4}{3}\pi R^3$$

$$p = \rho\frac{4}{3}\pi R^3 d = 4\pi\varepsilon_0 R^3 E_0$$

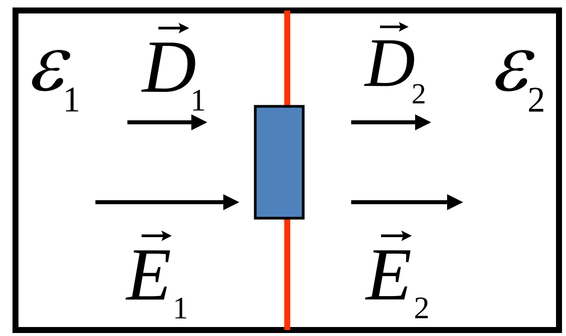
13.5 介质边界两侧电场的关系

各向同性均匀介质内部 $\vec{D},\vec{E},\vec{P}$ 方向相同，

下面讨论极靠近边界两侧 $\vec{D}$ 或 $\vec{E}$ 之间的关系。

一、场强与界面垂直

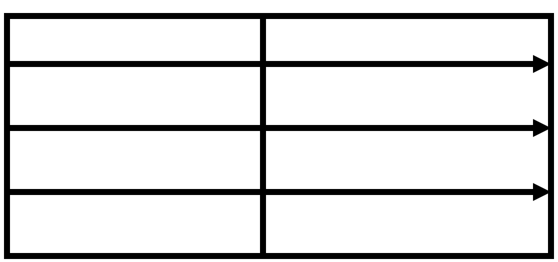
设界面没自由电荷



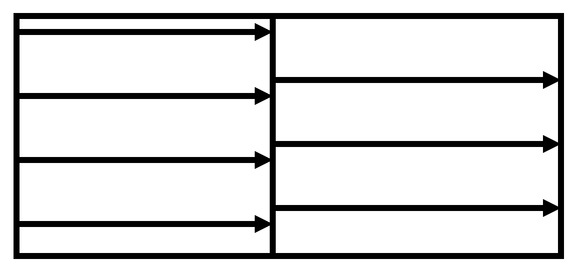
$$\oiint_S \vec{D}\cdot\mathrm{d}\vec{S} = -D_1\Delta S + D_2\Delta S = 0$$

$$\boldsymbol{D_1 = D_2 \quad \varepsilon_1 E_1 = \varepsilon_2 E_2}$$

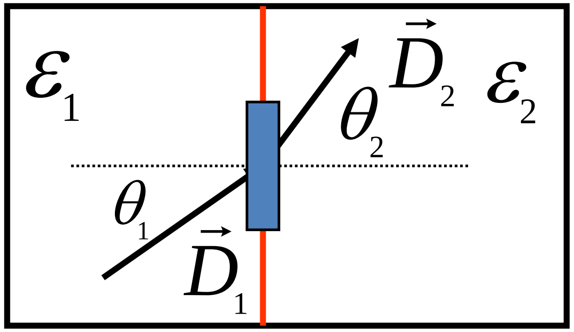
$\vec{D}$



$\vec{E}$

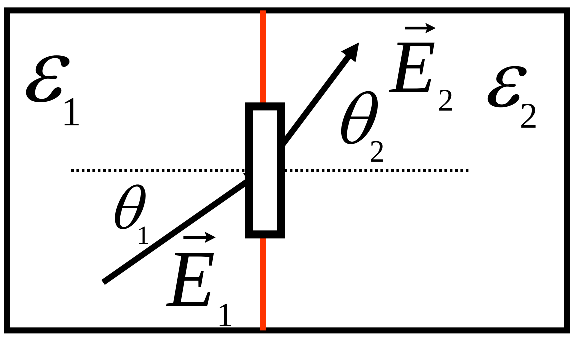


二、场强与界面斜交



$$\boldsymbol{D_1\cos\theta_1 = D_2\cos\theta_2}\text{（1）}$$

$$D_{1\mathrm{n}} = D_{2\mathrm{n}} \qquad \varepsilon_1 E_{1\mathrm{n}} = \varepsilon_2 E_{2\mathrm{n}}$$



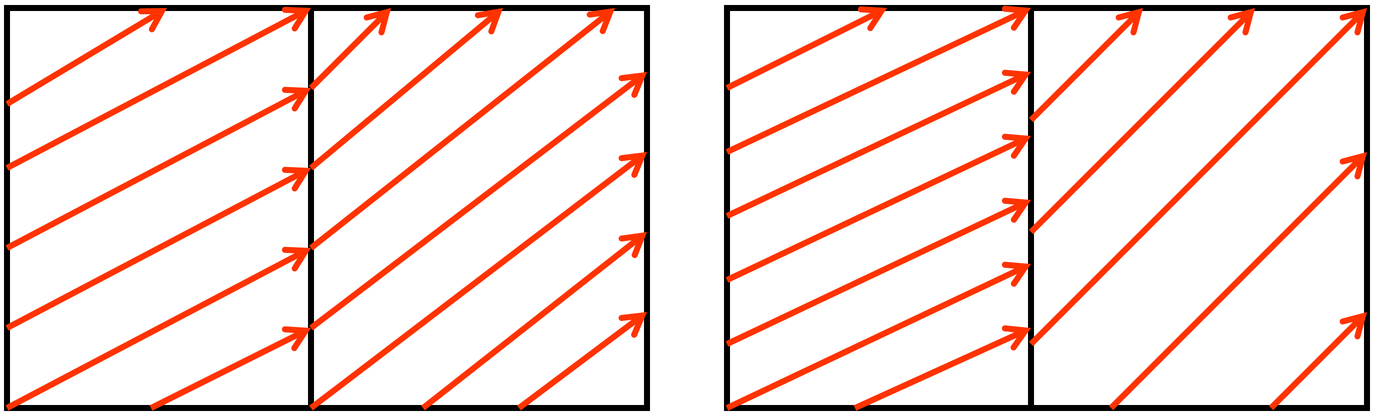
$$\boldsymbol{E_1\sin\theta_1 = E_2\sin\theta_2}\text{（2）}$$

$$E_{1\mathrm{t}} = E_{2\mathrm{t}} \qquad D_{1\mathrm{t}}/\varepsilon_1 = D_{2\mathrm{t}}/\varepsilon_2$$

$$\text{（2）}/\text{（1）} \Rightarrow \frac{E_1}{D_1}\tan\theta_1 = \frac{E_2}{D_2}\tan\theta_2 \Rightarrow \varepsilon_2\tan\theta_1 = \varepsilon_1\tan\theta_2$$

$$\varepsilon_2 \tan\theta_1 = \varepsilon_1 \tan\theta_2 \qquad \boldsymbol{If} \quad \boldsymbol{\varepsilon_1 < \varepsilon_2} \qquad \boldsymbol{\theta_1 < \theta_2}$$

从ε小进入ε大，$\vec{D},\vec{E}$ 偏离法向



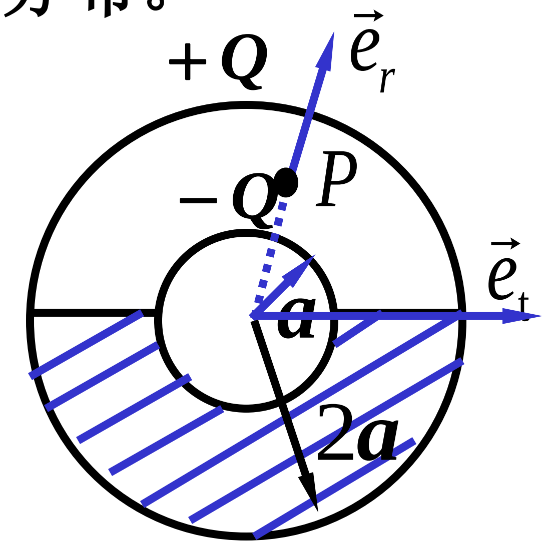
$\vec{D}$ $\vec{E}$

$$D_{1t}\big/\varepsilon_1 = D_{2t}\big/\varepsilon_2 \qquad D_{2t} > D_{1t} \qquad \Rightarrow \boldsymbol{D_2 > D_1}$$

通过介质界面 $\vec{D}$ 线连续不中断，$\vec{E}$ 线要中断。

[例题]如图示所示，同心球形电极分别带$\pm Q$ 自由电荷，求：（1）电场分布；（2）自由电荷及极化电荷分布。

解： 定性分析



（1）由静电平衡条件：电场强度沿径向（不然，电荷会继续移动）；

（2）由边界条件：介面两侧电场强度的切向分量相等，而电场强度沿径向，

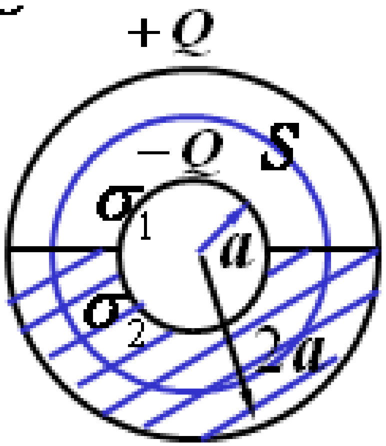
$$\Rightarrow \vec{E}_1 = \vec{E}_2 = E(r)\vec{e}_r$$

（两侧的电位移矢量则不相同！）

利用高斯定理:

$$D_1(r)2\pi r^2 + D_2(r)2\pi r^2 = \oiint_S \vec{D}\cdot \mathrm{d}\vec{S} = -Q$$

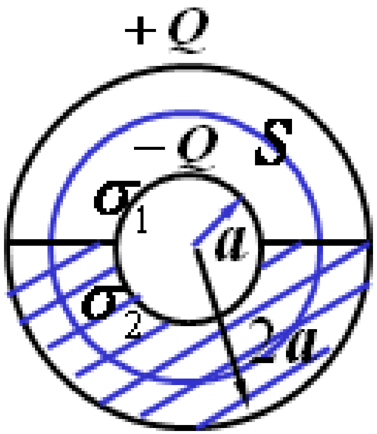
和: $\begin{cases} D_1(r) = \varepsilon_0 E(r) \\ D_2(r) = \varepsilon_0 \varepsilon_r E(r) \end{cases}$



$$\Rightarrow \quad \varepsilon_0 E(r)2\pi r^2 + \varepsilon_0 \varepsilon_r E(r)2\pi r^2 = -Q$$

$$\Rightarrow \quad E(r) = \frac{-Q}{2\pi\varepsilon_0(1+\varepsilon_r)r^2}$$

$$\Rightarrow E(r) = \frac{-Q}{2\pi\varepsilon_0(1+\varepsilon_r)r^2}$$



$$\sigma_1 = D_1(a) = \varepsilon_0 E(a) = \frac{-Q}{2\pi(1+\varepsilon_r)a^2}$$

$$\sigma_2 = D_2(a) = \varepsilon_0\varepsilon_r E(a) = \varepsilon_r \frac{-Q}{2\pi(1+\varepsilon_r)a^2}$$

$$\sigma_2' = \vec{P}_2 \cdot \vec{e}_n \Big|_{r=a} = \varepsilon_0(\varepsilon_r - 1)\vec{E} \cdot \vec{e}_n \Big|_{r=a} = (\varepsilon_r - 1)\frac{Q}{2\pi(1+\varepsilon_r)a^2}$$

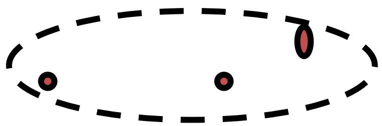
$$\Rightarrow \sigma_1 = \sigma_2 + \sigma_2'$$

13.6 静电场的能量

一、带电体系的静电能

electrostatic energy

带电体系处于状态 a



状态a时的静电能是什么？

定义：把系统从状态$\boldsymbol{a}$ 无限分裂到彼此相距无限远的状态中静电场力作的功，叫作系统在状态$\boldsymbol{a}$ 时的静电势能。简称静电能。

或：

把这些带电体从无限远离的状态聚合到状态a的过程中，外力克服静电力作的功。

二、点电荷系的静电能量

状态a

q_1 r q_2

以两个点电荷系统为例

想象 q_1 q_2初始时相距无限远

第一步 先把 q_1 摆在某处外力不作功

第二步 再把 q_2 从无限远移过来 使系统处于状态a

外力克服 q_1 的场作功

$$W=-A_{q_1}=-\int_{\infty}^{r} q_2\vec{E}_1\cdot \mathrm{d}\vec{l}=q_2\int_{r}^{\infty}\vec{E}_1\cdot \mathrm{d}\vec{l}$$

$$=q_2\frac{q_1}{4\pi\varepsilon_0 r}=q_2U_{21}$$

q_1在q_2所在处的电势

也可以先移动 q_2

q_2在 q_1所在处的电势

状态a

$$W = q_1 \frac{q_2}{4\pi\varepsilon_0 r} = q_1 U_{12}$$

q_1 r q_2

作功与路径无关表达式相同

$$= q_2 U_{21}$$

为了便于推广 写为

$$\boxed{W = \frac{1}{2} q_1 U_1 + \frac{1}{2} q_2 U_2}$$

U_i — 除 q_i 以外的电荷在 q_i 处的电势

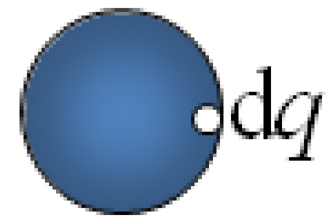
$$\boxed{W = \frac{1}{2} \sum_i q_i U_i}$$

点电荷系

若电荷连续分布

静电能

$$\boxed{W=\frac{1}{2}\int_{(Q)}\mathrm{d}qU}$$



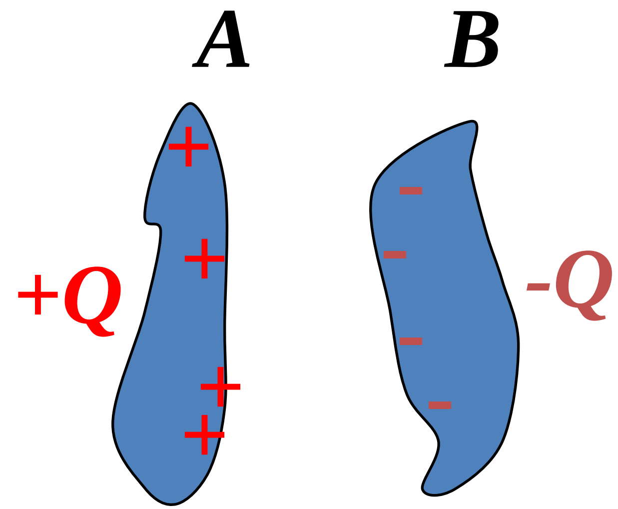
U ： 所有电荷在dq处的电势

如带电导体球，带电量Q 半径 R

$$W=\frac{1}{2}\int_{(Q)}\mathrm{d}q\frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 R}=\frac{Q^2}{8\pi\varepsilon_0 R}$$

三、电容器储存的静电能

以电容器为例：



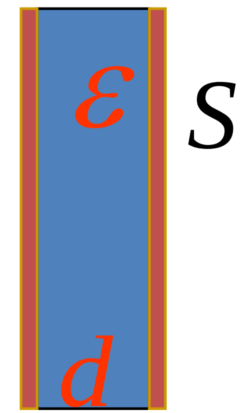
$$W_e = \frac{1}{2}\int U dq = \frac{1}{2}\int_0^{+Q} U_+ dq + \frac{1}{2}\int_0^{-Q} U_- dq = \frac{1}{2}(U_+ - U_-)Q$$

$$W_e = \frac{1}{2}U_c Q = \frac{1}{2}CU_c^2 = \frac{1}{2}\frac{Q^2}{C}$$

四、静电场的能量与能量密度

能量储存于场中

以平行板电容器为例：

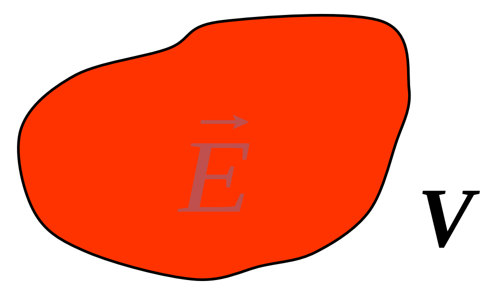


$$U = Ed \qquad Q = \sigma S = \varepsilon ES$$

$$W_e = \frac{1}{2}QU = \frac{1}{2}\varepsilon E^2 Sd = \frac{1}{2}DEV$$

电场能量密度： $w_e = \frac{\mathrm{d}W_e}{\mathrm{d}V} = \frac{1}{2}DE$

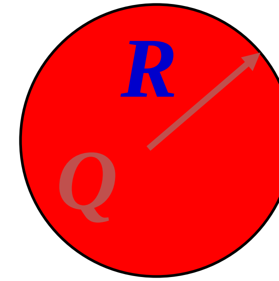
$$W_e = \iiint_V w_e \mathrm{d}V = \frac{1}{2}\iiint_V DE\mathrm{d}V$$



$$W_e = \frac{1}{2}\frac{Q^2}{C}$$

在变化的电磁场中，电场储能的概念被证明为不仅必要，而且是唯一客观的实在了。

[例] 计算均匀带电导体球的静电能。



解一：

$$w_e=\frac{1}{2}\varepsilon_0 E^2=\begin{cases}\frac{1}{2}\varepsilon_0\left(\frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\right)^2 & r>R\\ 0 & r<R\end{cases}$$

$$W_e=\iiint w_e \mathrm{d}V=\int_R^{\infty} w_e 4\pi r^2 \mathrm{d}r=\frac{Q^2}{8\pi\varepsilon_0 R}$$

解二：

$$W_e=\frac{1}{2}\int U\mathrm{d}q=\frac{1}{2}\int_0^Q \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 R}\mathrm{d}q$$

解三：

$$W_e=\int U\mathrm{d}q=\int_0^Q \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 R}\mathrm{d}q$$

[例] 设电子$W \approx m_0 c^2$，试估算其经典半径。

若假定电荷均匀分布于电子表面，则有：

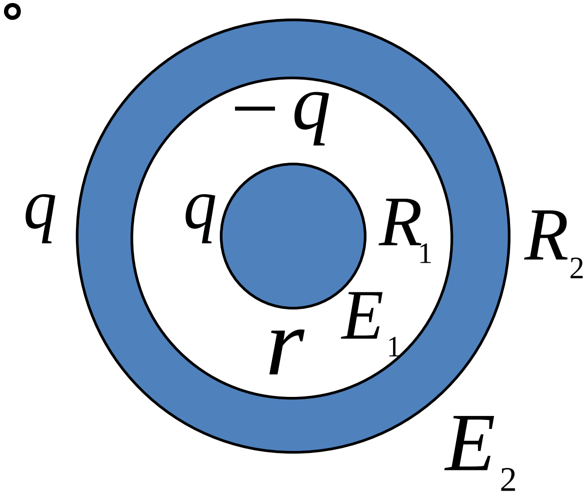
$$W_e = \frac{e^2}{8\pi\varepsilon_0 R} \approx m_0 c^2$$

$$R \approx \frac{1}{2} \cdot \frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0 m_0 c^2} \approx 1.4 \times 10^{-15}\,\mathrm{m}$$

通常取电子经典半径为$r_e = \dfrac{e^2}{4\pi\varepsilon_0 m_0 c^2} \approx 2.8 \times 10^{-15}\,\mathrm{m}$

1980.7.11丁肇中在北京报告他领导的小组的实验结果为 $r_e < 10^{-18}$ m 。目前的测量水平表明电子线度 $< 3.9\times10^{-19}$ m，它远小于电子经典半径（$\sim10^{-15}$ m），这说明电子并非经典粒子。

[例] 真空中半径为r的导体球，外套同心导体球壳，半径R_1、R_2，内球带电q，求下列两种情况下静电能的损失。（1）球与壳用导线相连。（2）壳接地。



解：

$$(1)\ \Delta W_1 = \frac{1}{2}\varepsilon_0 \iiint E_1^2 dV$$

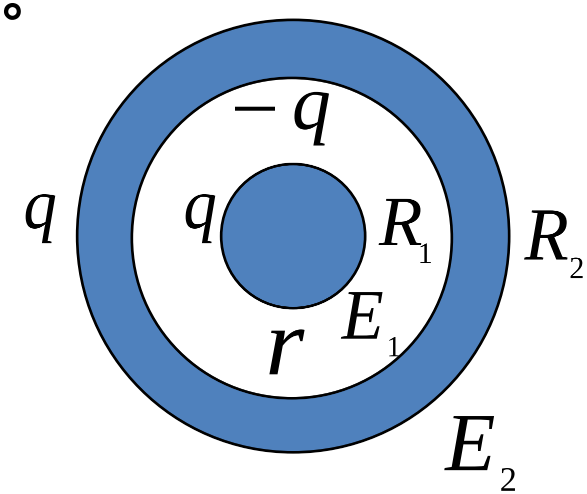
$$= \frac{1}{2}\varepsilon_0 \int_r^{R_1} \left(\frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r^2} \right)^2 4\pi r^2 dr$$

$$= \frac{q^2}{8\pi\varepsilon_0} \left(\frac{1}{r} - \frac{1}{R_1} \right)$$

$$\boxed{W = \frac{1}{2}\sum_i q_i U_i}$$

有用吗？

[例] 真空中半径为r的导体球，外套同心导体球壳，半径R_1、R_2，内球带电q，求下列两种情况下静电能的损失。（1）球与壳用导线相连。（2）壳接地。



解：

$$W_1=\frac{1}{2}q_1U_1+\frac{1}{2}q_2U_2$$

$$=\frac{1}{2}q\left(\frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r}-\frac{q}{4\pi\varepsilon_0 R_1}+\frac{q}{4\pi\varepsilon_0 R_2}\right)$$

$$W_2=\frac{1}{2}q\left(\frac{q}{4\pi\varepsilon_0 R_2}\right)$$

$$\Delta W_1=W_1-W_2=\frac{q^2}{8\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{r}-\frac{1}{R_1}\right)$$

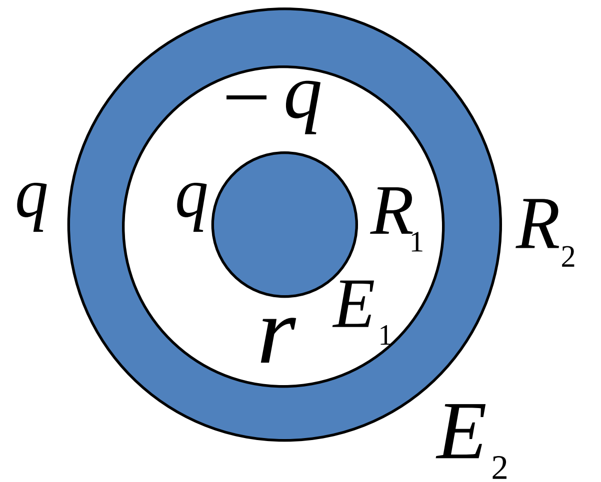
$$\boxed{W=\frac{1}{2}\sum_i q_iU_i}$$

有用吗？

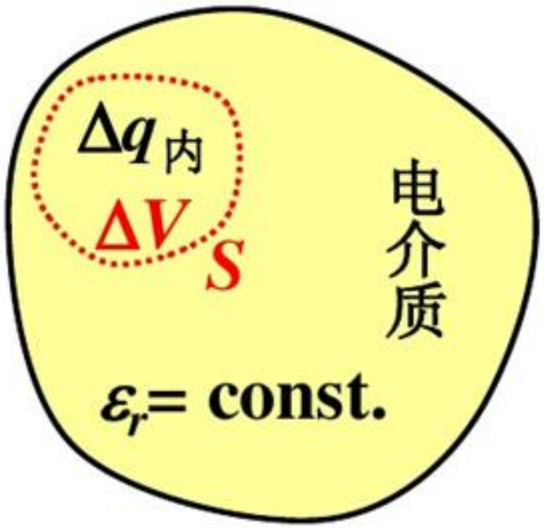
(2) $\Delta W_2 = \frac{1}{2}\varepsilon_0 \iiint E_2^2 \mathrm{dV}$

$$= \frac{1}{2}\varepsilon_0 \int_{R_2}^{\infty} \left(\frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r^2} \right) 4\pi r^2 \mathrm{d}r$$

$$= \frac{\boldsymbol{q}^2}{8\pi\varepsilon_0 \boldsymbol{R}_2}$$



[例] 证明各向同性均匀介质内$\rho_0 = 0$处必$\rho' = 0$



证：
$$\Delta q_{内} = \varepsilon_0 \oint_S \vec{E} \cdot d\vec{s}$$

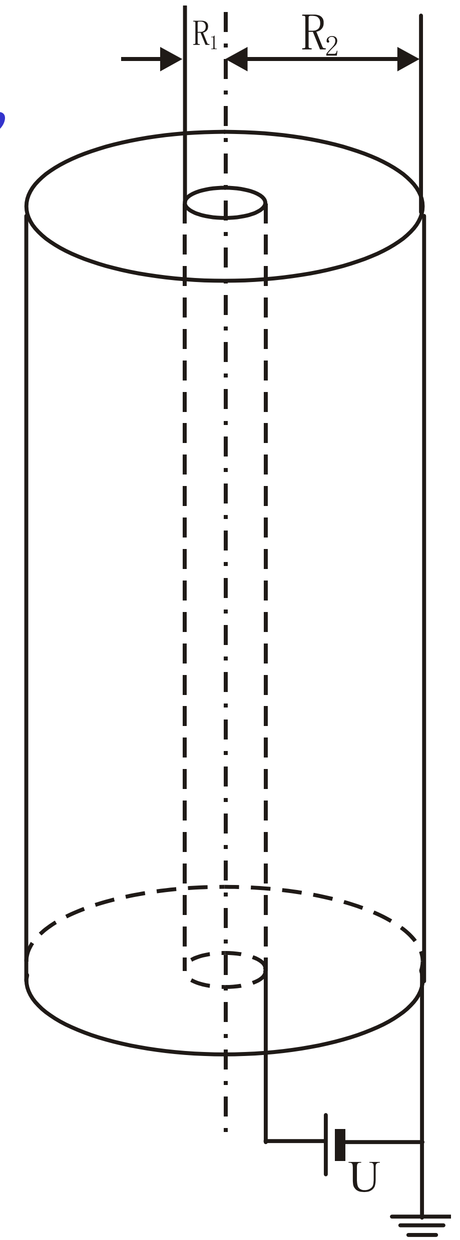
$$= \frac{\varepsilon_0}{\varepsilon} \oint_S \vec{D} \cdot d\vec{s}$$

$$\therefore \Delta q_{内} = \frac{1}{\varepsilon_r} \oint_S \vec{D} \cdot d\vec{s} = \frac{1}{\varepsilon_r} \Delta q_{0内}$$

$$\rho = \lim_{\Delta V \to 0} \frac{\Delta q_{内}}{\Delta V} = \frac{1}{\varepsilon_r} \cdot \lim_{\Delta V \to 0} \frac{\Delta q_{0内}}{\Delta V} = \frac{1}{\varepsilon_r} \rho_0$$

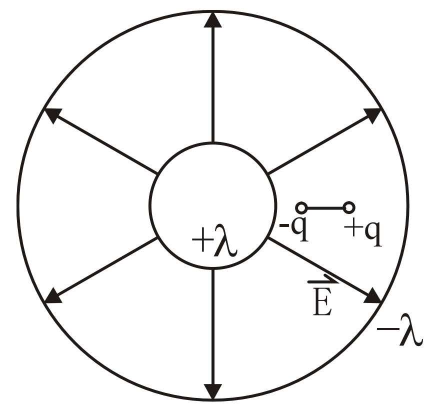
$$\therefore \quad \rho_0 = 0 \to \rho = 0 \to \rho' = 0$$

[例] 静电除尘装置中，内有半径为R_1的金属丝，外有半径为R_2的金属筒，整个装置细而长。在金属丝和金属筒之间加上高电压U，当烟灰往上冒的时候，在电场力的作用下产生位移极化，设烟尘极化可近似看作电偶极矩为p的电偶极子，并设在运动过程中它的电矩不变，且电偶极子的方向与电场方向平行。（1）分析烟灰在圆柱筒内将如何运动；（2）求烟灰在离中心线r处所受的电场力；（3）求烟灰从r_1运动到r_2过程中电场力对烟灰所作的功。



（1）分析烟灰在圆柱筒内将如何运动

由于烟灰在电场中极化。极化后的电偶极子的方向与外场方向相同。如图所示，电偶极子的负电荷受到指向轴线的力大于正电荷背离轴线方向的力，所以电偶极子将加速向轴方向运动。如果让高电压反接，电偶极子也反向极化。电偶极子所受的力还是指向轴线。电偶极子在非均匀电场中所受的力的方向总是指向电场强的方向。所以在静电除尘实验中的烟灰都将从金属线上析出。而外金属筒上几乎没有灰尘。



带静电的梳

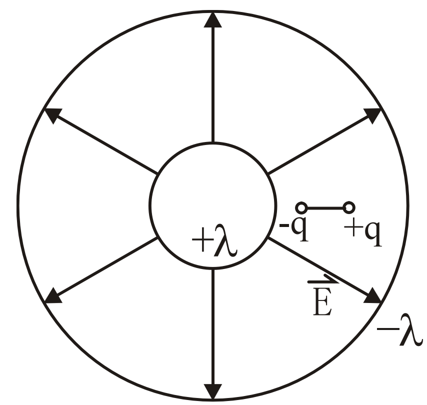
子为什么能

吸引水柱？

（1）分析烟灰在圆柱筒内将如何运动

由于烟灰在电场中极化。极化后的电偶极子的方向与外场方向相同。如图所示，电偶极子的负电荷受到指向轴线的力大于正电荷背离轴线方向的力，所以电偶极子将加速向轴方向运动。如果让高电压反接，电偶极子也反向极化。电偶极子所受的力还是指向轴线。电偶极子在非均匀电场中所受的力的方向总是指向电场强的方向。所以在静电除尘实验中的烟灰都将从金属线上析出。而外金属筒上几乎没有灰尘。

（2）求烟灰在离中心线r处所受的电场力



电偶极子在电场中的电势能$\boldsymbol{W=-\vec{p}\cdot\vec{E}}$，在电偶极子的方向与电场方向一致的条件下，$\boldsymbol{W=-pE}$，根据势能与保守力的关系，在非均匀电场中电偶极子所受力的大小为

$$F=-\frac{\mathrm{d}W}{\mathrm{d}r}=p\frac{\mathrm{d}E}{\mathrm{d}r} \qquad \because \boldsymbol{E}=\frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0 r} \qquad U=\frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0}\ln\frac{R_2}{R_1}$$

$$\boldsymbol{E}=\frac{\boldsymbol{U}}{\boldsymbol{r}\ln\frac{\boldsymbol{R}_2}{\boldsymbol{R}_1}} \qquad \therefore F=p\frac{\mathrm{d}E}{\mathrm{d}r}=p\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}\left(\frac{U}{r\ln\frac{R_2}{R_1}}\right)=-\frac{pU}{r^2\ln\frac{R_2}{R_1}}$$

（3）求烟灰从r_1运动到r_2过程中电场力对烟灰所作的功

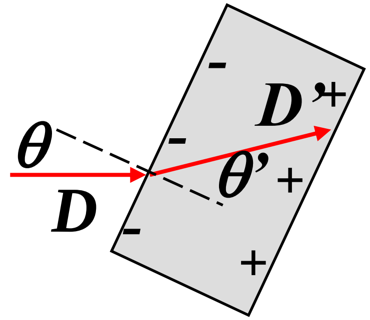
$$A=\int_{r_1}^{r_2}\vec{F}\cdot\mathrm{d}\vec{r}=-\int_{r_1}^{r_2}\frac{pU\mathrm{d}r}{r^2\ln\frac{R_2}{R_1}}=\frac{pU}{\ln\frac{R_2}{R_1}}\left(\frac{1}{r_2}-\frac{1}{r_1}\right)=\frac{pU(r_1-r_2)}{r_1r_2\ln\frac{R_2}{R_1}}$$

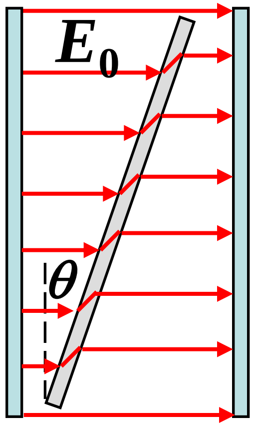
或：电场力作的功等于电偶极子在电场中电势能的减少

$$A=W_1-W_2=-\vec{p}\cdot\vec{E}_1-(-\vec{p}\cdot\vec{E}_2)=p(E_2-E_1)$$

$$=p\left(\frac{U}{r_2\ln\frac{R_2}{R_1}}-\frac{U}{r_1\ln\frac{R_2}{R_1}}\right)=\frac{pU}{\ln\frac{R_2}{R_1}}\left(\frac{1}{r_2}-\frac{1}{r_1}\right)=\frac{pU(r_1-r_2)}{r_1r_2\ln\frac{R_2}{R_1}}$$

[例题] 介质ε_r已知，求D'、E'、σ'





由边界条件 $D\cos\theta = D'\cos\theta'$

$$E_0\sin\theta = E\sin\theta'$$

$$\because D = \varepsilon_0 E_0 \quad D' = \varepsilon_0\varepsilon_r E$$

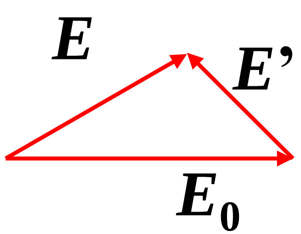
$$\therefore \tan\theta' = \varepsilon_r\tan\theta \Rightarrow \theta'$$

$$\Rightarrow \quad D' = \frac{\varepsilon_0 E_0\cos\theta}{\cos\theta'} \qquad E = \frac{D'}{\varepsilon} = \frac{E_0\cos\theta}{\varepsilon_r\cos\theta'}$$

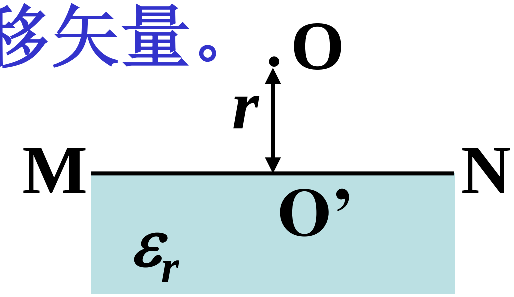
介质内 $\vec{P} = \chi_e\varepsilon_0\vec{E}$

$$\therefore \sigma' = \pm P\cos\theta' = \pm\frac{\varepsilon_r - 1}{\varepsilon_r}\varepsilon_0 E_0\cos\theta$$

$$E' = \frac{\sigma'}{\varepsilon_0} = \frac{\varepsilon_r - 1}{\varepsilon_r}E_0\cos\theta$$



[例题] MN平面下方充满介电常数为ε_r的均匀介质，上方为真空。真空中O点与MN平面的垂直距离为r，O'点是垂足。（1）若将点电荷q放在O'处，求O点的场强；（2）若将点电荷放在O处，求O'点极化电荷面密度及电位移矢量。



（1）以O'为中心作半径为r的球形高斯面，根据边界条件，高斯面上各点场强量值相等，而电位移矢量量值不等。

$$\sum_{\text{上半球面}} \vec{D}_0 \cdot \Delta\vec{S} + \sum_{\text{下半球面}} \vec{D} \cdot \Delta\vec{S} = q = 2\pi r^2 D_0 + 2\pi r^2 D$$

$$D_0 = \varepsilon_0 E \quad D = \varepsilon_0 \varepsilon_r E \quad \Longrightarrow \quad \vec{E} = \frac{q}{2\pi\varepsilon_0 (1+\varepsilon_r) r^2} \hat{r}$$

（2）在O处点电荷场作用下，设O'处极化电荷面密度为σ'，则据场强迭加原理，界面附近真空中的场强：

$$E_0 = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r^2} - \frac{\sigma'}{2\varepsilon_0}$$

（2）在O处点电荷场作用下，设O'处极化电荷面密度为σ'，则据场强迭加原理，界面附近真空中的场强：

$$E_0 = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r^2} - \frac{\sigma'}{2\varepsilon_0}$$

O'附近介质中的场强：$$E = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r^2} + \frac{\sigma'}{2\varepsilon_0}$$

由边界条件 $\varepsilon_0 E_0 = \varepsilon_0 \varepsilon_r E \Rightarrow \sigma' = -\frac{(\varepsilon_r - 1)q}{(\varepsilon_r + 1)2\pi r^2}$

$$E_0 = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r^2} + \frac{\varepsilon_r - 1}{\varepsilon_r + 1} \cdot \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r^2} = \frac{\varepsilon_r q}{2\pi\varepsilon_0(\varepsilon_r + 1) r^2}$$

$$D = \varepsilon_0 E_0 = \varepsilon_0 \varepsilon_r E = \frac{\varepsilon_r q}{2\pi r^2(\varepsilon_r + 1)}$$