

# 理论力学 CAI

- 前言
- 刚体的连体基 刚体位形的描述
- 刚体的平面运动
- 刚体的姿态及其变化
- 基点的位置、速度与加速度
- 刚体上给定点的位置、速度与加速度
- 相对刚体运动的任意点的位置、速度与加速度
- 刚体系运动学解析瞬时分析方法



理论力学CAI

版权所有, 2000 (c) 上海交通大学工程力学系

## 刚体平面运动学

### 刚体的平面运动

- 刚体的运动过程表现为刚体的位形不断的变化
  - 刚体位形的坐标  $q$  是时间  $t$  的函数

$$q(t) = (r(t)^T \quad \varphi(t))^T = (x(t) \quad y(t) \quad \varphi(t))^T$$

称为位形坐标的时间历程

- 平面运动的分类
  - 刚体的平面平移运动(平动)
  - 刚体的平面定轴转动
  - 刚体的平面一般运动



2018年10月9日

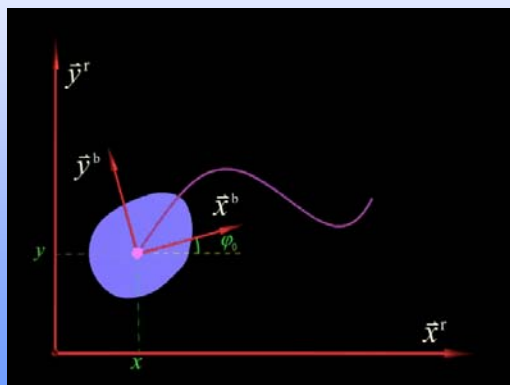
理论力学CAI 刚体平面运动学

2

• 刚体的平动

$$\mathbf{q}(t) = (\mathbf{r}(t)^T \quad \varphi(t))^T = (x(t) \quad y(t) \quad \varphi(t))^T$$

$$\varphi(t) \equiv \varphi_0$$



2018年10月9日  
理论力学CAI 刚体平面运动学



3

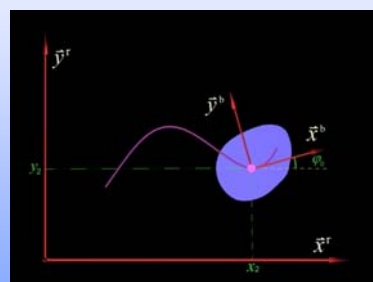
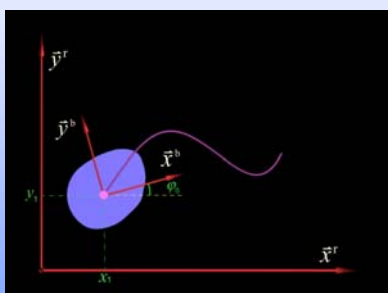
$$\varphi(t) \equiv \varphi_0$$

$t = t_1$  刚体的位形

$$\mathbf{q}(t_1) = (\mathbf{r}(t_1)^T \quad \varphi(t_1))^T = (x_1 \quad y_1 \quad \varphi_0)^T$$

$t = t_2$  刚体的位形

$$\mathbf{q}(t_2) = (\mathbf{r}(t_2)^T \quad \varphi(t_2))^T = (x_2 \quad y_2 \quad \varphi_0)^T$$



**刚体运动的每个瞬时，其连体基或固结刚体上的任意直线始终保持平行**



2018年10月9日  
理论力学CAI 刚体平面运动学



4

### 刚体的平面运动/平动

$$\mathbf{q}(t) = (\mathbf{r}(t)^T \quad \varphi(t)^T)^T = (x(t) \quad y(t) \quad \varphi(t))^T \quad \varphi(t) \equiv \varphi_0$$

#### 直行汽车

车身 平动

车轮 非平动



2018年10月9日  
理论力学CAI 刚体平面运动学

5

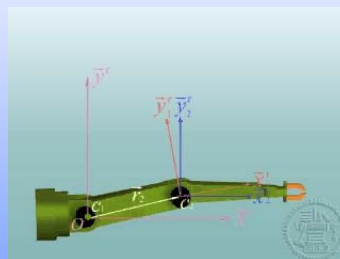
### 刚体的平面运动/定轴转动

#### • 刚体的定轴转动

- 在运动过程中，刚体（或扩展刚体）上某点**相对某参考基始终不动**，且绕过该点的垂直运动平面的轴作转动
- 称刚体**相对某参考基作定轴转动**



车轮**相对车身**的运动



机械臂内臂**相对基础**的运动

机械臂外臂**相对于内臂**的运动



2018年10月9日  
理论力学CAI 刚体平面运动学

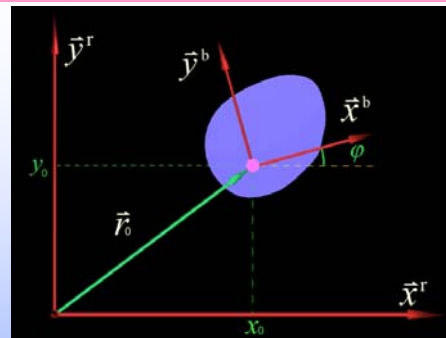
6

## 定轴转动的描述

**通常：**取不动点为刚体连体基的基点

$$\vec{r}(t) \equiv \vec{r}_0 \quad \text{常矢径}$$

$$\mathbf{r}(t) \equiv \mathbf{r}_0 = (x_0 \quad y_0)^T \quad \text{常值阵}$$



$$t = t_1 \quad \text{刚体的位形} \quad \mathbf{q}(t_1) = (\mathbf{r}(t_1)^T \quad \varphi(t_1))^T = (x_0 \quad y_0 \quad \varphi_1)^T$$

$$t = t_2 \quad \text{刚体的位形} \quad \mathbf{q}(t_2) = (\mathbf{r}(t_2)^T \quad \varphi(t_2))^T = (x_0 \quad y_0 \quad \varphi_2)^T$$

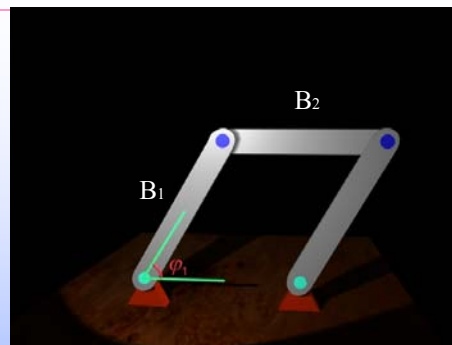


2018年10月9日  
理论力学CAI 刚体平面运动学

7

**[例]** 图示一四连杆机构。  
两摇臂等长，均为1m。  
摇臂 $B_1$ 相对公共基的转角 $\varphi_1$ 的变化规律为  
 $\varphi_1 = 0.5 + 2t$  (rad)

分别写出在时间区间  
[0 1]s内摇臂与连杆 $B_2$   
的位形（时间间隔为  
0.2s）



2018年10月9日  
理论力学CAI 刚体平面运动学

8

# 刚体的平面运动/例

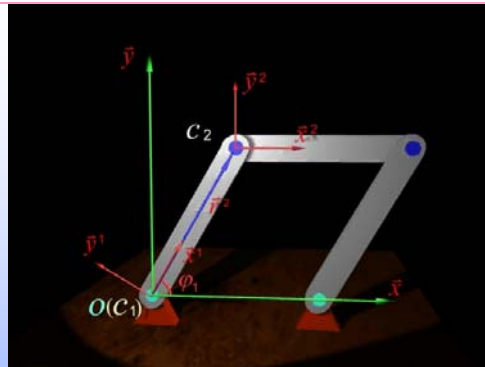
[解]

建立摇臂与连杆的连体基

$B_1$ : 摇臂  $C_1 - \vec{e}_1$

$B_2$ : 连杆  $C_2 - \vec{e}_2$

建立公共参考基:  $O - \vec{e}$



2018年10月9日

理论力学CAI 刚体平面运动学

9

# 刚体的平面运动/例

- 四连杆机构两摇臂等长

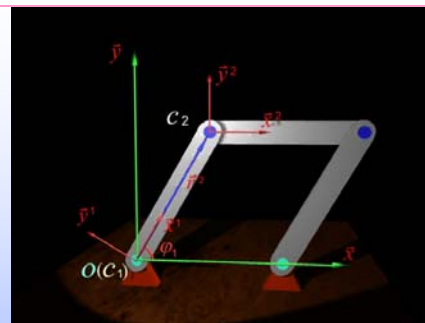
$$\varphi_1 = 0.5 + 2t \text{ (rad)}$$

$$x_2 = l \cos \varphi_1 = \cos \varphi_1$$

$$y_2 = l \sin \varphi_1 = \sin \varphi_1$$

摇臂与连杆位形坐标的时间历程

$t$	$x_1$	$y_1$	$\varphi_1$	$x_2$	$y_2$	$\varphi_2$
0.0	0.0	0.0	0.5	0.540	0.479	0.0
0.2	0.0	0.0	0.9	0.622	0.783	0.0
0.4	0.0	0.0	1.3	0.267	0.964	0.0
0.6	0.0	0.0	1.7	-0.129	0.992	0.0
0.8	0.0	0.0	2.1	-0.505	0.863	0.0
1.0	0.0	0.0	2.5	-0.801	0.598	0.0



- 摇臂 $B_1$ 作定轴转动

$$r_1(t) \equiv (0 \ 0)^T$$

- 连杆 $B_2$ 作平动

$$\varphi_2(t) \equiv 0$$



2018年10月9日

理论力学CAI 刚体平面运动学

10

## 刚体的平面运动/定轴转动

### 机械臂中两臂

内臂 定轴运动

外臂 定轴运动?

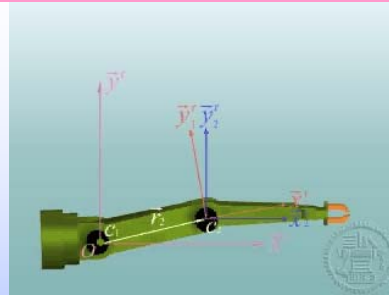
相对内臂 定轴运动

相对基座 ~~定轴运动~~  
平动

### 直行汽车的车轮

相对车身 定轴运动

相对平行于车道的垂直面 ~~定轴运动~~  
平动



2018年10月9日  
理论力学CAI 刚体平面运动学

11

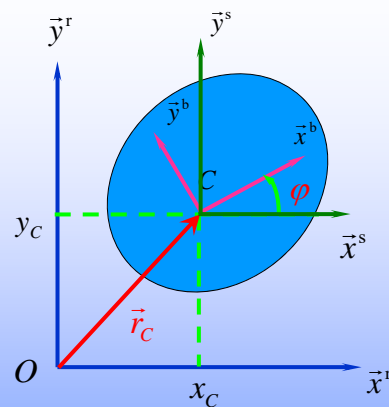
## 刚体的平面运动/平面一般运动

### 刚体的平面一般运动

参考基 平动参考基 连体基

$\vec{e}^r$   $\vec{e}^s$   $\vec{e}^b$

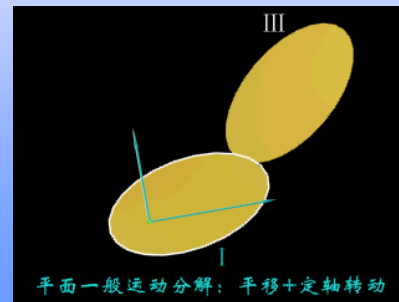
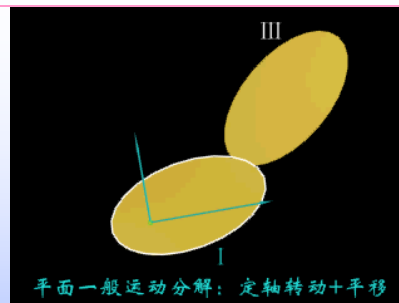
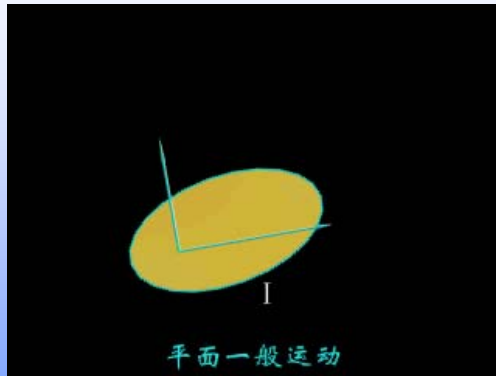
$$\begin{aligned} \mathbf{q}(t) &= (\mathbf{r}_C(t)^T \quad \varphi(t))^T \\ &= (x_C(t) \quad y_C(t) \quad \varphi(t))^T \end{aligned}$$



2018年10月9日  
理论力学CAI 刚体平面运动学

12

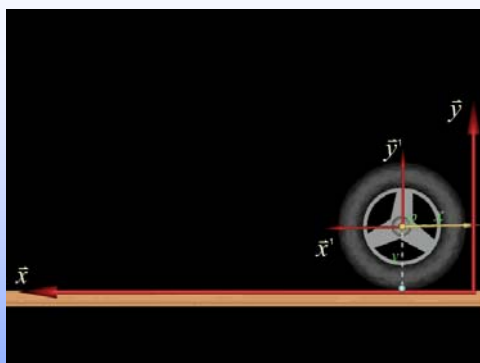
• 平面一般运动的分解



2018年10月9日  
理论力学CAI 刚体平面运动学

15

• 平面一般运动的分解

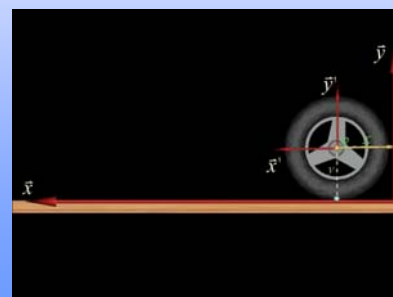
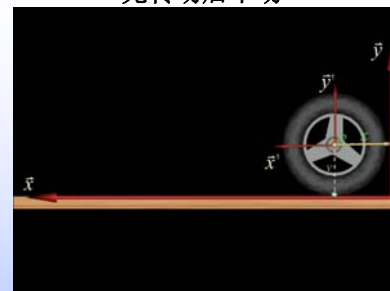


刚体平面一般运动的两个位形可通过刚体的平动与刚体定轴转动来实现



2018年10月9日  
理论力学CAI 刚体平面运动学

先转动后平动



先平动后转动

16

## 小结

刚体运动大见小  
位形如同连体系  
一般运动可分解  
定轴转动与平移



2018年10月9日

理论力学CAI 刚体平面运动学

17