概率统计试卷 A （评分标准） 2011. 1. 19

一．是非题（共 7 分，每题 1 分） 是 是 非 非 是 非 是

二．填空题（共 18 分，每题 3 分）

8．2/3； 9． $f_Y(y)=\begin{cases} e^{-\ln y/2}/(2y)=1/(2y\sqrt{y}), & y>1 \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$ ； 10. $\rho=-1$ ；

11． $\le 1/12$； 12． $a=1/4$， 16 ， χ^2； 13．(13.40, 62.18)。

三．选择题（共 15 分，每题 3 分） *D* *A* *B* *C* *C*

四．计算题（共 54 分，每题 9 分）

19．解： 解：令 A={取出为正品}， B_t={箱子中有 t 个正品}，$t=0,1,2,3,4$ ．

由已知条件，$P(B_t)=\dfrac{1}{5}$，$P(A|B_t)=\dfrac{t}{4}$, $t=0,1,2,3,4$， （3 分）

（1）由全概率公式，$P(A)=\sum_{t=0}^{n}P(B_t)P(A|B_t)=\dfrac{1}{5}\cdot\dfrac{1}{4}\sum_{t=0}^{4}t=\dfrac{1}{2}$, （3 分）

（2）由 Bayes 公式，$P(B_4|A)=\dfrac{P(B_4)P(A|B_4)}{P(A)}=\dfrac{2}{5}$. (3 分)

20. 解：令 A_k （k=1,2,3）表示在一小时内第 k 台机床需要工人照顾，

$$P(X=0)=P(\bar{A}_1\ \bar{A}_2\ \bar{A}_3)=0.9\times0.8\times0.7=0.504;$$

$$\begin{aligned} P(X=1)&=P(A_1\ \bar{A}_2\ \bar{A}_3)+P(\bar{A}_1\ A_2\ \bar{A}_3)+P(\bar{A}_1\ \bar{A}_2\ A_3) \\ &=0.1\times0.8\times0.7+0.9\times0.2\times0.7+0.9\times0.8\times0.3=0.398; \end{aligned}$$

$$P(X=2)=0.092;$$

$$P(X=3)=0.006,$$ （6 分）

X	0	1	2	3
P	0.504	0.398	0.092	0.006

$D(X)=0.46,$ （3 分）

21．解：因为 $F_Z(z)=P(X\le Yz)=\iint\limits_{x\le yz}f(x,y)dxdy$ ；

当 $z<0$ 时，$F_Z(z)=0$； （3 分）

当$0 \le z < 1$时，$F_Z(z) = \int_{10/z}^{+\infty}(\int_{10}^{yz}\frac{100}{x^2y^2}dx)dy = \frac{z}{2}$；（3 分）

当$z \ge 1$时，$F_Z(z) = \int_{10}^{+\infty}(\int_{10}^{yz}\frac{100}{x^2y^2}dx)dy = 1 - \frac{1}{2z}$；（3 分）

所以

$$F_Z(z) = \begin{cases} 0, & z < 0 \\ z/2, & 0 \le z < 1 \\ 1 - 1/(2z), & z \ge 1 \end{cases}。$$

解二：利用 $f_Z(z) = \int_{-\infty}^{+\infty}|y|f_X(yz)f_Y(y)dy$，先求得密度 $f_Z(z) = \begin{cases} 0, & z < 0 \\ 1/2, & 0 \le z < 1 \\ 1/(2z^2), & z \ge 1 \end{cases}$

再积分得 $F_Z(z) = \int_{-\infty}^{z} f_Z(t)dt$ 则相应给分。

22．解：（1）设 X_i 为第 i 次测量值，$(i = 1,2,\cdots n)$，则 $X_i = \mu + \varepsilon_i$，

$$E(\varepsilon_i) = 0,\ D(\varepsilon_i) = 1/3, \quad E(X_i) = \mu,\ D(X_i) = 1/3 \qquad （2 分）$$

由独立性 $E(\overline{X}) = \mu$，$D(\overline{X}) = \frac{1}{n^2}[\sum_{i=1}^{n} D(X_i)] = \frac{1}{3n}$

由中心极限定理 $\frac{\overline{X} - \mu}{1/\sqrt{3n}} = \frac{\sum_{i=1}^{n} X_i - n\mu}{\sqrt{n/3}}$ 近似服从 $N(0,1)$ （3 分）

$$P(\left|\overline{X} - \mu\right| < \eta) = P\left(\left|\frac{\overline{X} - \mu}{1/\sqrt{3n}}\right| < \eta\sqrt{3n}\right) \approx 2\Phi(\eta\sqrt{3n}) - 1; \qquad （2 分）$$

（2）$P(\left|\overline{X} - \mu\right| < 1/6) \approx 2\Phi(\sqrt{3 \times 36}/6) - 1 = 2\Phi(1.73) - 1$

$$= 2 \times 0.9582 - 1 = 0.9164. \qquad （2 分）$$

23．解. （1）$E(|X|) = \int_{-\infty}^{\infty}|x|\frac{1}{2\lambda}e^{-\frac{|x|}{\lambda}}dx = \lambda\int_0^{\infty} te^{-t}dt = \lambda,$ （2 分）

（2）$L(\lambda) = \prod_{i=1}^{n} \frac{1}{2\lambda}e^{-\frac{|x_i|}{\lambda}} = (\frac{1}{2\lambda})^n e^{-\frac{1}{\lambda}\sum_{i=1}^{n}|x_i|}$，　$\ln L(\lambda) = -n\ln 2 - n\ln\lambda - \frac{1}{\lambda}\sum_{i=1}^{n}|x_i|$，

令 $\frac{d\ln L(\lambda)}{d\lambda} = -\frac{n}{\lambda} + \frac{1}{\lambda^2}\sum_{i=1}^{n}|x_i| = 0$，得 $\hat{\lambda} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}|x_i|$. （4 分）

（3）由于 $E(\hat{\lambda}) = E(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}|x_i|) = \frac{1}{n}n\lambda = \lambda,$　$D(\hat{\lambda}) = D(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}|x_i|) = \frac{1}{n^2}n(2\lambda^2 - \lambda^2) = \frac{\lambda^2}{n},$

又因为 $\lim\limits_{n\to\infty} D(\hat{\lambda}) = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{\lambda^2}{n} = 0,$ 故 $\hat{\lambda}$ 是参数 λ 的一致估计值。（3 分）

24。解：(1) 列表计算(略)

$$\hat{b} = S_{xy} / S_{xx} = 0.883 \quad \hat{a} = \bar{y} - \hat{b}\bar{x} = 66.77$$

所以 $\hat{y} = 66.77 + 0.883x$ （3 分）

（2） $\hat{\sigma}^2 = \frac{1}{n-2}(S_{yy} - \hat{b}S_{xy}) = 0.444$ （3 分）

（1）假设 $H_0 : b = 0;\ H_1 : b \neq 0$ （1 分）

检验统计量 $T = \frac{\hat{b}}{\hat{\sigma}}\sqrt{S_{xx}} \sim t(n-2)$ （1 分）

拒绝域 $W : |T| \geq t_{0.025}(3) = 3.1824$，

$$|T| = \frac{0.883}{\sqrt{1.333/3}}\sqrt{282} = 22.253 > 3.1824,$$

拒绝 H_0，认为线性回归效果显著.（1 分）

五．证明题（本题 6 分）

25．证：由题设 $F(x) = \begin{cases} 1 - e^{-x\theta^{-1}}, & x \geq 0, \\ 0, & x < 0. \end{cases}$ 令 $Z = X_{(1)}$，则（2 分）

$$F_Z(z) = 1 - [1 - F(z)]^n = \begin{cases} 1 - e^{-xn\theta^{-1}}, & x \geq 0, \\ 0, & x < 0. \end{cases} \qquad E(Z) = \frac{\theta}{n}$$ （2 分）

所以 $E(Y) = E(nX_{(1)}) = E(nZ) = \theta$ 。（2 分）