2014~2015 学年

一、单项选择题（本大题共 6 小题，每小题 3 分，共 18 分）

1. B, 2. A, 3. C, 4.C, 5.D, 6.B

二、填空题（本大题共 6 小题，每小题 3 分，共 18 分）

(7) $P(\bar{B}\mid\bar{A})=\dfrac{P(\bar{A}\bar{B})}{\bar{A}}=\dfrac{1-P(A\cup B)}{1-0.3}=\dfrac{1-[P(A)+P(B-A)]}{1-0.3}=\dfrac{2}{7}$，（ B卷：$\dfrac{4}{7}$ ）

(8) $F_Y(y)=\begin{cases}0 & y<0\\ \int_{-\sqrt{y}}^{\sqrt{y}}\frac{1}{2}dx & 0\le y<1\\ 0 & y>1\end{cases}$，$f_Y(y)=\begin{cases}\frac{1}{2\sqrt{y}} & 0\le y<1\\ 0 & otherwise\end{cases}$

(9)．2（ B卷：3 ），(10)．$C_{16}^{5}p^{5}(1-p)^{11}$ （ B卷：$C_{16}^{7}p^{7}(1-p)^{9}$ ）

(11)．$c=\dfrac{mn}{n+m}$， $F(1,m)$，（12）．(5.52, 44.40)

三、计算与证明题（本大题共 8 小题，每小题 8 分，共 64 分）

13. 连续做某种试验，每次只有成功和失败两个结果。第一次成功的概率为 0.5，并且对于任意自然数 k 都有，当 k 次成功时，第 k+1 次成功的概率为 0.6；当第 k 次失败时，第 k+1 次失败的概率为 0.1，求：(1) 第 3 次试验成功的概率； (2) 已知第 3 次成功的条件下，第 2 次成功的条件概率。

解：设 A_i：“第 i 次成功”

（1） $P(A_2)=P(A_1)P(A_2\mid A_1)+P(\bar{A}_1)P(A_2\mid\bar{A}_1)=0.5\times0.6+0.5\times0.9=0.75$

$P(\bar{A}_2)=0.25$

$P(A_3)=P(A_2)P(A_3\mid A_2)+P(\bar{A}_2)P(A_3\mid\bar{A}_2)=0.75\times0.6+0.25\times0.9=0.675$

（2）$P(A_2\mid A_3)=\dfrac{0.75\times0.6}{0.75\times0.6+0.25\times0.9}=\dfrac{0.45}{0.675}=\dfrac{2}{3}$

14. 维随机向量 (X,Y) 的联合密度函数为 $f(x,y)=\begin{cases}8xy, & 0<x<1, 0<x<y;\\ 0, & 其他,\end{cases}$

（1）求边缘密度函数 $f_X(x),\ f_Y(y)$； （2）求 $P\left\{Y\le\frac{1}{2}\middle|X=\frac{1}{4}\right\}$。

解

$$f_X(x)=\begin{cases}4x(1-x^2), & 0<x<1,\\ 0, & 其他,\end{cases}$$

$$f_Y(x)=\begin{cases}4y^3, & 0<y<1,\\ 0, & \text{其他},\end{cases}$$

$$f_Y(y\mid X=\frac{1}{4})=\frac{f(\frac{1}{4},y)}{f_X(\frac{1}{4})}=\begin{cases}\frac{2y}{15/16}=\frac{32}{15}y, & \frac{1}{4}<y<1,\\ 0, & \text{其他},\end{cases}$$

$P\{Y\le\frac{1}{2}\mid X=\frac{1}{4}\}=\int_{\frac{1}{4}}^{\frac{1}{2}}\frac{32}{15}ydy=\frac{1}{5}$ （B 卷：$P\{Y\le\frac{1}{3}\mid X=\frac{1}{4}\}=\int_{\frac{1}{3}}^{\frac{1}{2}}\frac{32}{15}ydy=\frac{4}{27}$）

15．设二维随机变量(X,Y)在区域$D=\{(x,y):x>0,\quad y>0,\quad x+y<1\}$内均匀分布，求随机变量$U=\max\{X,Y\}$与$U=\min\{X,Y\}$的分布函数。

解： $$f(x,y)=\begin{cases}2, & x>0, y>0, x+y<1,\\ 0, & \text{其他},\end{cases}$$

$$F_U(z)=P(U\le z)=P(X\le z,Y\le z)=\begin{cases}0, & z<0;\\ 2z^2, & 0\le z<\frac{1}{2};\\ 1-2(1-z)^2, & \frac{1}{2}\le z<1;\\ 1; & z\ge 1.\end{cases}$$

$$F_V(z)=P(V\le z)=1-P(V>z)=\begin{cases}0, & z<0;\\ 1-2(1-2z)^2, & 0\le z<\frac{1}{2};\\ 1, & z\ge\frac{1}{2}.\end{cases}$$

16. 设总体X的分布密度为$f(x;\theta)=\frac{1}{2\theta}e^{-\frac{1}{\theta}|x|},\quad x\in(-\infty,+\infty)$，其中$\theta>0$为未知参数，求

（1）θ的矩估计量$\hat{\theta}_1$，（2）极大似然估计量$\hat{\theta}_2$，（3）判断极大似然估计量$\hat{\theta}_2$的无偏性。

解：（1）矩估计：

$$EX=0,\ E[X^2]=\int_0^{\infty}x^2\frac{1}{\theta}e^{-\frac{x}{\theta}}dx=DT+(ET)^2=2\theta^2,\ T\sim E(\frac{1}{\theta})$$

$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i^2=2\theta^2\Rightarrow\hat{\theta}=\sqrt{\frac{1}{2n}\sum_{i=1}^{n}X_i^2}$$

（2）极大似然估计

$$L(\theta)=\prod_{i=1}^{n}\frac{1}{2\theta}e^{-\frac{1}{\theta}|x_i|}$$

$$\Rightarrow\ln L(\theta)=\sum_{i=1}^{n}\{-\ln 2-\ln\theta-\frac{1}{\theta}|x_i|\}=-n\ln 2-n\ln\theta-\frac{1}{\theta}\sum_{i=1}^{n}|x_i|$$

$$\frac{d\ln L(\theta)}{d\theta}=-\frac{n}{\theta}+\frac{1}{\theta^2}\sum_{i=1}^{n}|x_i|=0$$

$$\Rightarrow\hat{\theta}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}|x_i|$$

极大似然估计量为

17. 上海老闵行地区楼市去年 5 月份均价为 19400 元/平米，今年 5 月，选了 36 套二手房的成交价格数据，算得样本均值为 20100 元，样本方差为 195600，假定总体服从正态分布。问相比去年 5 月，该地区房价上涨是否显著？（取显著性水平 $\alpha=0.05$）

解：$H_0:\mu=19400,\quad H_1:\mu>19400$

$$T=\frac{\bar{X}-19400}{S/6}\sim t(35)$$

拒绝域：$W=\{T>t_{0.05}(35)=1.69\}$

带入数据计算统计量T 的观察值$T=\dfrac{20100-19400}{\sqrt{195600}/6}=9.50>1.69$

拒绝H_0

B 卷　　解：$H_0:\mu=19500,\quad H_1:\mu>19500$

$$T=\frac{\bar{X}-19500}{S/6}\sim t(35)$$

拒绝域：$W=\{T>t_{0.05}(35)=1.69\}$

带入数据计算统计量T 的观察值$T=\dfrac{20100-19500}{\sqrt{195600}/6}=8.14>1.69$

拒绝 H_0

18． 某商店出售某种贵重商品，每周销售量（单位：件）如下

X	0	1	2
P	0.2	0.6	0.2

假定每周销售量独立同分布。

（1） 用 Chebyshev 不等式估计一年（按照 52 周算）的累积销售量在 42 到 62 之间的概率；

（2） 用中心极限定理估计一年累积销售量在 42 到 62 之间的概率。

$\Phi(2.19)=0.9857$

解：X_i："第 i 周的销售 S 量"，S："一年的累计销售量"，则，

$$EX_i=1,\ DX_i=0.4\Rightarrow ES=52, DS=52\times 0.4=20.8$$

(1)由 Chebyshev 不等式

$$P\{42\le S\le 62\}=\mathrm{P}\{|\mathrm{S}\text{-}52|\le 10\}\ge 1-\frac{20.8}{100}=0.792$$

（3） 由中心极限定理知 $S\overset{\text{近似}}{\sim}N(52,20.8)$

$$P\{42\le S\le 62\}=\mathrm{P}\left(\text{-}2.19\le\frac{S-52}{\sqrt{20.8}}\le 2.19\right)=2\Phi(2.19)-1=0.972$$

19. 设总体 X 的二阶矩存在；$X_1,X_2,\cdots,X_n$ 是来自总体 X 的一个简单随机样本，$\bar{X}$ 为样本均值。求 $X_i-\bar{X}$ 与 $X_j-\bar{X}$ 的协方差与相关系数

解

$$\begin{aligned}&\operatorname{cov}(X_i-\bar{X},X_j-\bar{X})\\&=\operatorname{cov}(X_i,X_j)-\operatorname{cov}(X_i,\bar{X})-\operatorname{cov}(\bar{X},X)+\operatorname{cov}(\bar{X},\bar{X})=-\frac{1}{n}\sigma^2\end{aligned}$$

$$D(X_i-\bar{X})=D(X_j-\bar{X})=D(-\sum_{\substack{j=1\\j\ne i}}^{n}\frac{1}{n}X_j+(1-\frac{1}{n}X_i)=(1-\frac{1}{n})\sigma^2$$

$$\rho(X_i-\bar{X},X_j-\bar{X})=-\frac{1}{n-1}$$

20. （1）叙述随机变量序列 $\{Y_k;\ k=1,2,\ldots\}$ 服从大数定律的定义

（2）设$\{X_k;\ k=0,1,2,...\}$为独立同分布的随机变量序列，且$DX_k<\infty$，a,b为常数，

$Y_k = aX_k + bX_{k-1},\quad k=1,2,3,...$

证明：$\{Y_k;\ k=1,2,...\}$服从大数定律。

解：（1）略

（4）　设$EX_k=\mu,\ DX_k=\sigma^2$

$$EY_k=(a+b)\mu,\ DY_k=\left(a^2+b^2\right)\sigma^2,$$

$$\mathrm{cov}(Y_k,Y_{k-1})=\mathrm{cov}(aX_k+bX_{k-1},aX_{k-1}+bX_{k-2})=ab\sigma^2$$

$$\mathrm{cov}(Y_i,Y_j)=0,\quad if\ \ |i-j|\geq 2$$

$$D\left(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}Y_k\right)=\frac{1}{n^2}\left\{nDY_1+2\sum_{i<j}\mathrm{cov}(Y_i,Y_j)\right\}=\frac{1}{n^2}\left\{n(a^2+b^2)+2(n-1)ab\right\}\sigma^2\to 0,\ n\to\infty$$

从而$\{Y_k;\ k=1,2,...\}$服从大数定律。