上 海 交 通 大 学 试 卷（ A 卷）

（ 2009 至 2010 学年 第 2 学期 ） 2010.7.7

班级号____________________学号_____________________姓名 ________________

课程名称 _______概率论与数理统计（A 类）______成绩 ______________________

4．方差 $D(X)$ 不存在的分布，其数学期望 $E(X)$ 也不存在。 （ ）

5．在假设检验中，当假设 H_0 为真假时，拒绝接受 H_0，称为犯第一类错误。 （ ）

6．对任一分布的未知参数均可以通过矩估计方法进行估计。 （ ）

7．设样本 $(X_1, X_2, \cdots, X_m)$ 来自总体 $B(n, p)$，则 $\overline{X} = \frac{1}{m}\sum_{i=1}^{m} X_i$ 是参数 p 的无偏估计量。 （ ）

二 **填空题**（共 18 分，每题 3 分）

8．设随机变量 X 服从均匀分布 $U(-1,1)$，则 $Y = e^X$ 的密度函数 $f_Y(y) = \begin{cases} \quad \\ \_\_\_\_\_\_\_\_ \end{cases}$。

9．若 (X,Y) 的联合分布列为

(X,Y)	$(-1,0)$	$(-1,2)$	$(-1,4)$	$(0,0)$	$(0,2)$	$(0,4)$
P	0.1	0.2	0.1	0.3	0.2	0.1

$F(x, y)$ 为 (X,Y) 的联合分布函数，则 $F(0, 2) =$______________。

10．设随机变量 X 与 Y 相互独立，且都服从参数 $p = 0.4$ 的 $(0-1)$ 分布，设 $Z = XY$，则 Z 的概率分布为

____。

11．设随机变量 X 服从参数为 λ 的指数分布，则 $P\left(X > \sqrt{D(X)}\right) =$________________。

我承诺，我将严格遵守考试纪律。

承诺人：________

题号	一	二	三	19-21	22-24	25	总分
得分							
批阅人							

12．设方差 $D(X)=4, D(Y)=1,$ 相关系数 $\rho_{XY}=0.6,$ 则 $D(3X-2Y)=$__________。

13．设 (X_1,X_2,X_3,X_4) 是取自正态总体 $N(0,\sigma^2)$ 的简单随机样本，其中 $\sigma>0$，已知 $kX_1^2/(X_2+X_3+X_4)^2$ 服从 F 分布，则 $k=$____________。

三　**选择题**（每题 3 分，共 15 分）

14．设 A,B 为样本空间 Ω 上的两对立随机事件，则 $P(B\,|\,A\overline{B}\cup AB\cup\overline{A}B)=$_________

（A）1；　　（B）$P(B)$；

（C）$P(B\,|\,\overline{A})$；　　（D）$P(B\,|\,A)$。

15．设随机变量 X 的分布函数 $F(x)=\begin{cases}0, & x<0\\ 1/2, & 0\le x<1\\ 1-e^{-x}, & x\ge 1\end{cases}$，则概率 $P(X=1)=$________

（A）0；　　（B）$1/2$；

（C）$1/2-e^{-1}$；　　（D）$1-e^{-1}$。

16．设随机变量 $X_1,X_2,\cdots,X_n\ (n>1)$ 独立同分布，方差为 $\sigma^2>0$。令 $Y=\dfrac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n}X_i$，则___________

(A)　$\mathrm{Cov}(X_1,Y)=\dfrac{\sigma^2}{n}$；　　(B)　$\mathrm{Cov}(X_1,Y)=\sigma^2$；

(C)　$D(X_1+Y)=\dfrac{n+2}{n}\sigma^2$；　　(D)　$D(X_1-Y)=\dfrac{n+1}{n}\sigma^2$。

17．设 $(X_1,\cdots,X_9)$ 为来自总体 $N(\mu,\sigma^2)$ 的简单随机样本，μ,σ^2 均未知，则 μ 的置信度为 99%的置信区间是___________

（A）$(\overline{X}-\frac{S}{3}t_{0.025}(8),\ \overline{X}+\frac{S}{3}t_{0.025}(8))$；　　（B）$(\overline{X}-\frac{S}{3}t_{0.025}(9),\ \overline{X}+\frac{S}{3}t_{0.025}(9))$；

（C）$(\overline{X}-\frac{S}{3}t_{0.01}(9),\ \overline{X}+\frac{S}{3}t_{0.01}(9))$；　　（D）$(\overline{X}-\frac{S}{3}t_{0.005}(8),\ \overline{X}+\frac{S}{3}t_{0.005}(8))$。

18．已知 $f_1(x)$ 为标准正态分布的密度函数，$f_2(x)$ 为区间 $(-1,3)$ 上均匀分布的密度函数，随机变量 X 的密度函数为 $f(x)=\begin{cases}a\,f_1(x), & x\le 0\\ b\,f_2(x), & x>0\end{cases}$；（$a>0$，$b>0$），则______________

(A)　$a+b=3$；　　(B)　$2a+3b=4$；

(C)　$a+b=1$；　　(D)　$2a+3b=1$。

四　解答题 (每题 9 分，共 54 分)

19．一盒手机中有 10 只手机，其中有 7 只是新的，3 只是旧的，现从中不放回随机抽取，每次取一只。

（1）若共取两次，已知取出的手机中有一只是新手机，试求另一只也是新手机的概率；

（2）设 X 为取到新手机时的抽取次数，试求数学期望 $E(X)$。

20．设随机变量 (X,Y) 服从正态分布 $N(0,0;\frac{1}{2},1;\frac{1}{\sqrt{2}})$，其密度函数

$$f(x,y)=Ae^{-2x^2+2xy-y^2},\quad -\infty<x,y<+\infty\ 。$$

试求：（1）常数 A；　（2）协方差 $COV(X,Y)$；（3）条件密度函数 $f_{Y|X}(y\,|\,x)$。

21．设二维随机变量 (X,Y) 的联合密度函数 $f(x,y)=\begin{cases}6e^{-2x-3y}, & x>0,\ y>0,\\ 0, & \text{其他}\end{cases}$

令 $Z=\max(X,Y)$，求：（1）Z 的分布函数；

（2）在 $X>x\ (x>0)$ 的条件下，Z 的分布函数，即：$P(Z\le z\,|\,X>x)$。

22．高校某课程考试，成绩分优秀、合格、不合格三种，优秀、合格、不合格的各得 3 分、2 分、1 分。根据以往统计，每批参加考试的学生中，优秀、合格、不合格的各占 20%、70%、10%。现有 100 位学生参加考试。（1）试用切比雪夫不等式估计 100 位学生考试总分在 200 分至 220 分之间的概率；（2）试用中心极限定理计算 100 位学生考试总分在 200 分至 220 分之间的概率。

23．设总体 X 的分布函数为 $F(x)=\begin{cases}1-1/x^{\theta}, & x>1,\\ 0, & x\le 1,\end{cases}$ 其中未知参数 $\theta>1$, $(X_1,X_2,\cdots,X_n)$ 为取自总体 X 的简单随机样本。求：（1）θ 的矩估计量；（2）θ 的最大似然估计量。

24．某种导线，要求其电阻的标准差不得超过 0.005（欧姆）。今在生产的一批导线中抽取 22 根，测得样本标准差 0.007. 设总体 $X\sim N(\mu,\sigma^2)$，能认为这批导线的标准差显著偏大吗？用假设检验的方法给出检验结论（显著性水平 $\alpha=0.05$）。

五．证明题 (本题 6 分)

25．设 A,B 为任意两个事件，若 $P(B)>0$，则 $P(A\,|\,A\cup B)\ge P(A\,|\,B)$。

附：　概率分布数值表

$\Phi(1.18)=0.8810$	$\Phi(1.86)=0.9686$	$t_{0.05}(21)=1.7$	$t_{0.05}(22)=1.7$
$\chi^2_{0.025}(21)=35.479$	$\chi^2_{0.025}(22)=36.$	$\chi^2_{0.05}(21)=32.$	$\chi^2_{0.05}(22)=33.$

概率统计（A 类）试卷 A（评分标准） 2010.7.7

一. 是非题（7 分，每题 1 分） 非 是 是 非 是 非 非。

二. **填空题**（18 分，每题 3 分）

8. $f_Y(y)=\begin{cases}1/(2y), & e^{-1}<y<e\\ 0, & 其\ 他\end{cases}$； 9. 0.8 ； 10. $Z\sim\begin{pmatrix}0 & 1\\ 0.84 & 0.16\end{pmatrix}$ ；

11. e^{-1}； 12. 25.6； 13. $3\sigma^2$。

三. 选择题（15 分，每题 3 分） *B* *C* *A* *D* *B*

四. **解答题**（54 分，每题 9 分）

19. (1) 设事件 $A=\{$两个中至少有一只是新手机$\}$，$B=\{$两只都是新手机$\}$，则 $B\subset A$，

$$P(B|A)=\frac{P(AB)}{P(A)}=\frac{P(B)}{P(A)}=\frac{C_7^2/C_{10}^2}{(C_7^1C_3^1+C_7^2)/C_{10}^2}=\frac{7/15}{7/15+7/15}=1/2；$$ （4 分）

（2）$X\sim\begin{pmatrix}1 & 2 & 3 & 4\\ 7/10 & 7/30 & 7/120 & 1/120\end{pmatrix}$， $E(X)=3/8$. （9 分）

20. （1） $A=\dfrac{1}{\pi}$； （3 分）

（2） $COV(X,Y)=\dfrac{1}{2}$； （5 分）

（2） $f_{Y|X}(y\,|\,x)=\dfrac{f(x,y)}{f_X(x)}=\dfrac{1}{\sqrt{\pi}}e^{-(x-y)^2}$， $-\infty<y<+\infty$ 。（其中 $-\infty<x<+\infty$ ） （9 分）

21. 由题意知 X,Y 相互独立，故

1）$F_Z(z)=P(X\le z,Y\le z)=P(X\le z)P(Y\le z)=(1-e^{-2z})(1-e^{-3z}),\quad z>0$； （4 分）

2）易知，当 $z\le x$ 时，$P(Z\le z\,|\,X>x)=0$。 （6 分）

当 $z>x$ 时，
$$\begin{aligned}P(X>x,Z\le z)&=P(x<X\le z,Y\le z)\\&=P(x<X\le z)P(Y\le z)\\&=(e^{-2x}-e^{-2z})(1-e^{-3z})\end{aligned}$$

从而 $P(Z\le z\,|\,X>x)=\dfrac{P(X>x,Z\le z)}{P(X>x)}=(1-e^{-2(z-x)})(1-e^{-3z})$。 （9 分）

22. 设 X_i 为第 i 位学生的得分 $(i=1,2,\cdots 100)$，则总得分 $X=\sum_{i=1}^{100}X_i$，且

$E(X_i)=2.1,\ D(X_i)=0.29$ $E(X)=210,\quad D(X)=29$ （3 分）

（1）$P(200<X<220)=P(|X-210|<10)\geq 1-\frac{29}{100}=0.71$； （6 分）

（2） $P(200<X<220)\approx\Phi(\frac{220-210}{\sqrt{29}})-\Phi(\frac{200-210}{\sqrt{29}})=2\Phi(1.86)-1$

$=2\times 0.9686-1=0.9372$. （9 分）

23.（1） 由于 $E(X)=\int_{-\infty}^{+\infty}x\,f(x)dx=\int_{1}^{+\infty}x\cdot\frac{\theta}{x^{\theta+1}}dx=\frac{\theta}{\theta-1}$，

令 $\frac{\theta}{\theta-1}=\bar{X}$，解得 θ 的矩估计量为 $\hat{\theta}=\frac{\bar{X}}{\bar{X}-1}$. （4 分）

（2）似然函数为 $L(\theta)=\prod_{i=1}^{n}f(x_i)=\begin{cases}\frac{\theta^n}{(x_1x_2\cdots x_n)^{\theta+1}}, x_i>1\,(i=1,2,\cdots,n), \\ 0, \quad 其\quad 他\end{cases}$ （6 分）

令 $\frac{d\ln L(\theta)}{d\theta}=\frac{n}{\theta}-\sum_{i=1}^{n}\ln x_i=0$，得 θ 的最大似然估计量为 $\hat{\theta}=\frac{n}{\sum_{i=1}^{n}\ln X_i}$ 。 （9 分）

24.（1）假设 $H_0:\sigma^2\leq 0.005$，$H_1:\sigma^2>0.005$ （2 分）

H_0 为真，检验统计量 $\chi^2=\frac{(n-1)S^2}{\sigma_0^2}\sim\chi^2(n-1)$，拒绝域 W： $\chi^2\geq\chi_{0.05}^2(21)=32.671$，（4 分）

$\chi^2=\frac{(n-1)S^2}{\sigma_0^2}=\frac{21\times 0.007^2}{0.005^2}=41.16>32.671$， （8 分）

拒绝 H_0，所以有理由认为这批导线的标准差显著偏大。 （9 分）

五．证明题

25．设 $P(A-B)=x,\ P(B-A)=y,\ P(AB)=z$，则 （2 分）

$P(A|A\cup B)=\frac{P(A)}{P(A\cup B)}=\frac{x+z}{x+y+z}\geq\frac{z}{y+z}=\frac{P(AB)}{P(B)}=P(A|B)$ 。 （6 分）