# 应用随机过程

张　波　　　商　豪

中国人民大学　统计学院

# 第7章 Brown运动

- 7.1 基本概念与性质
- 7.2 Gauss过程
- 7.3 Brown运动的鞅性质
- 7.4 Brown运动的Markov性
- 7.5 Brown运动的最大值变量及反正弦律
- 7.6 Brown运动的几种变化

## §7.1 基本概念与性质

我们从讨论简单的随机游动开始.设有一个粒子在直线上随机游动，在每个单位时间内等可能地向左或向右移动一个单位的长度. 现在加速这个过程，在越来越小的时间间隔中走越来越小的步子.若能以正确的方式趋于极限，我们就得到Brown运动.详细地说就是令此过程每隔$\Delta t$时间等概率地向左或向右移动$\Delta x$的距离.如果以$X(t)$记时刻$t$粒子的位置，则

$$X(t) = \Delta x(X_1 + \cdots + X_{[t/\Delta t]}) \tag{7.1.1}$$

其中$[t/\Delta t]$表示$t/\Delta t$的整数部分，其中

$$X_i = \begin{cases} +1, & \text{如果第}i\text{步向右} \\ -1, & \text{如果第}i\text{步向左} \end{cases}$$

且假设诸$X_i$相互独立

$$P\{X_i = 1\} = P\{X_i = -1\} = \frac{1}{2}$$

由于$E[X_i] = 0, Var[X_i] = E[X_i^2] = 1$及(7.1.1)，我们有$E[X(t)] = 0, Var[X(t)] = (\Delta x)^2[t/\Delta t]$.现在要令$\Delta x$和$\Delta t$趋于零，并使得极限有意义.如果取$\Delta x = \Delta t$，令$\Delta t \to 0$，则$var[X(t)] \to 0$，从而$X(t) = 0, a.s.$.如果取$\Delta t = (\Delta x)^3$，则$Var[X(t)] \to \infty$，这是不合理的. 因为粒子的运动是连续的，不可能在很短时间内远离出发点.因此，我们作下面的假设：令$\Delta x = \sigma\sqrt{\Delta t}$，$\sigma$为某个正常数，从上面的讨论可见，当$\Delta t \to 0$时，$E[X(t)] = 0, Var[X(t)] \to \sigma^2 t$.

下面来看这一极限过程的一些直观性质.由式(7.1.1)及中心极限定理可得:

(1)$X(t)$服从均值为0,方差为$\sigma^2 t$的正态分布.

此外，由于随机游动的值在不相重叠的时间区间中的变化是独立的，所以有

(2)$\{X(t), t \geq 0\}$有独立增量.

又因为随机游动在任一时间区间中的位置变化的分布只依赖于区间的长度，可见

(3)$\{X(t), t \geq 0\}$有平稳增量.

下面我们就给出Brown运动的严格定义.

**定义 7.1.1** 随机过程$\{X(t), t \geq 0\}$如果满足:

(1) $X(0) = 0$;

(2) $\{X(t), t \geq 0\}$有平稳独立增量;

(3) 对每个$t > 0$, $X(t)$服从正态分布$N(0, \sigma^2 t)$.

则称$\{X(t), t \geq 0\}$为**Brown**运动，也称为**Wiener**过程. 常记为$\{B(t), t \geq 0\}$ 或 $\{W(t), t \geq 0\}$.

如果$\sigma = 1$，我们称之为标准Brown运动，如果$\sigma \neq 1$，则可考虑$\{X(t)/\sigma, t \geq 0\}$，它是标准Brown运动.故不失一般性，可以只考虑标准Brown运动的情形.

由于这一定义在应用中不是十分方便，我们不加证明地给出下面的性质作为Brown运动的等价定义，其证明可以在许多随机过程的著作中找到.

**性质7.1.1** Brown运动是具有下述性质的随机过程$\{B(t), t \geq 0\}$.

(1) (正态增量)$B(t) - B(s) \sim N(0, t-s)$，即$B(t) - B(s)$服从均值为0,方差为$t-s$的正态分布. 当$s = 0$时，$B(t) - B(0) \sim N(0, t)$.

(2) (独立增量)$B(t) - B(s)$独立于过程的过去状态$B(u), 0 \leq u \leq s$.

(3) (路径的连续性)$B(t), t \geq 0$ 是$t$的连续函数.

注：性质7.1.1中我们并没有假定$B(0) = 0$，因此我们称之为始于$x$的Brown运动，所以有时为了强调起始点，也记为$\{B^x(t)\}$.这样，定义7.1.1所指的就是始于0的Brown运动$\{B^0(t)\}$. 易见，

$$B^x(t) - x = B^0(t) \tag{7.1.2}$$



GoBack
FullScreen
Close
Quit

(7.1.2)式按照下面的定义7.1.2 称为Brown运动的空间齐次性.此性质也说明，$B^x(t)$和$x+B^0(t)$是相同的，我们只需研究始于0的 Brown运动就可以了，如不加说明，Brown运动就是始于0的Brown运动.

**定义 7.1.2** 设$\{X(t), t\geq 0\}$是随机过程，如果它的有限维分布是空间平移不变的，即

$$P\{X(t_1)\leq x_1, X(t_2)\leq x_2, \cdots, X(t_n)\leq x_n|X(0)=0\}$$
$$=P\{X(t_1)\leq x_1+x, X(t_2)\leq x_2+x, \cdots, X(t_n)\leq x_n+x|X(0)=x\}$$

则称此过程为空间齐次的.

面给出关于Brwon运动的概率计算的例子.

**例 7.1.1** 设$\{B(t), t \geq 0\}$是标准Brown运动，计算$P\{B(2) \leq 0\}$和 $P\{B(t) \leq 0, t = 0, 1, 2\}$.

**解** 由于$B(2) \sim N(0, 2)$，所以$P\{B(2) \leq 0\} = \frac{1}{2}$.因为$B(0) = 0$，所以$P\{B(t) \leq 0, t = 0, 1, 2\} = P\{B(t) \leq 0, t = 1, 2\} = P\{B(1) \leq 0, B(2) \leq 0\}$. 虽然$B(1)$和$B(2)$不是独立的，但由性质7.1.1(2)和(3)可知$B(2)-B(1)$与$B(1)$是相互独立的标准正态分布随机变量，于是利用分解式

$$B(2) = B(1) + (B(2) - B(1))$$

我们有



GoBack
FullScreen
Close
Quit

$$
\begin{aligned}
&P\{B(1) \leq 0, B(2) \leq 0\} \\
=&P\{B(1) \leq 0, B(1) + (B(2) - B(1)) \leq 0\} \\
=&P\{B(1) \leq 0, B(2) - B(1) \leq -B(1)\} \\
=&\int_{-\infty}^{0} P\{B(2) - B(1) \leq -x\}\phi(x)dx \\
=&\int_{-\infty}^{0} \Phi(-x)d\Phi(x)
\end{aligned}
$$

**这里$\Phi$和$\phi$分别表示标准正态分布的分布函数和密度函数.由积分变量替换公式得**

$$
\int_{0}^{\infty} \Phi(x)\phi(-x)dx = \int_{0}^{\infty} \Phi(x)d\Phi(x) = \int_{\frac{1}{2}}^{1} ydy = \frac{3}{8}
$$

如果过程从$x$开始，$B(0)=x$，则$B(t)\sim N(x,t)$，于是

$$P_x\{B(t)\in(a,b)\}=\int_a^b \frac{1}{\sqrt{2\pi t}}e^{-\frac{(y-x)^2}{2t}}dy.$$

这里，概率$P_x$的下标$x$表示过程始于$x$.积分号中的函数

$$p_t(x,y)=\frac{1}{\sqrt{2\pi t}}e^{-\frac{(y-x)^2}{2t}} \tag{7.1.3}$$

称为Brown运动的转移概率密度.利用独立增量性以及转移概率密度，我们可以计算任意Brown运动的有限维分布

$$\begin{aligned} &P_x\{B(t_1)\le x_1,\cdots,B(t_n)\le x_n\} \\ &\quad=\int_{-\infty}^{x_1}p_{t_1}(x,y_1)dy_1\int_{-\infty}^{x_2}p_{t_2-t_1}(y_1,y_2)dy_2\cdots \\ &\qquad\int_{-\infty}^{x_n}p_{t_n-t_{n-1}}(y_{n-1},y_n)dy_n \end{aligned} \tag{7.1.4}$$

为了讨论Brown运动的路径性质，首先给出二次变差的定义.

**定义 7.1.3** Brown运动的二次变差$[B,B](t)$ 定义为当$\{t_i^n\}_{i=0}^n$遍取$[0,t]$的分割，且其模$\delta_n=\max_{0\le i\le n-1}(t_{i+1}^n-t_i^n)\to 0$ 时，依概率收敛意义下的极限

$$[B,B](t)=[B,B]([0,t])=\lim_{\delta_n\to 0}\sum_{i=0}^{n-1}|B(t_{i+1}^n)-B(t_i^n)|^2 \tag{7.1.5}$$

下面是Brown运动的路径性质.从时刻0到时刻$T$对Brown运动的一次观察称为Brown运动在区间$[0,T]$上的一个路径或一个实现. Brown运动的几乎所有样本路径$B(t), 0\le t\le T$都具有下述性质：

(1) 是$t$的连续函数；

(2) 在任意区间(无论区间多么小)上都不是单调的;

(3) 在任意点都不是可微的；

(4) 在任意区间(无论区间多么小)上都是无限变差的;

(5) 对任意$t$，在$[0,t]$上的二次变差等于$t$.

上述性质(1)~(3)不难理解，(4)可以从(5)得到(留作习题).

**定理 7.1.1** $[B,B](t)=t.$

**证明：取区间**$[0,t]$**的分割**$\{t_i^n\}_{i=0}^n$**使得**$\sum_n \delta_n<\infty$.**记**

$$S_n=\sum_{i=0}^{n-1}[B(t_{i+1}^n)-B(t_i^n)]^2$$

**则**

$$E[S_n]=\sum_{i=0}^{n-1}E[B(t_{i+1}^n)-B(t_i^n)]^2=\sum_{i=1}^{n-1}(t_{i+1}^n-t_i^n)=t$$

**再由标准正态分布的四阶矩公式，得**

$$Var[S_n]=Var[\sum_{i=0}^{n-1}(B(t_{i+1}^n)-B(t_i^n))^2]=\sum_{i=0}^{n-1}Var[(B(t_{i+1}^n)-B(t_i^n))^2]$$

$$=\sum_{i=0}^{n-1}3(t_{i+1}^n-t_i^n)^2\le 3\max(t_{i+1}^n-t_i^n)t=3t\delta_n$$

所以

$$\sum_{n=1}^{\infty} Var[S_n] < \infty$$

由单调收敛定理，得

$$E\left[\sum_{n=1}^{\infty}(S_n - t)^2\right] < \infty$$

因此$\sum_{n=1}^{\infty}(S_n - t)^2 < \infty$，$a.s.$，于是有$S_n - t \to 0$，$a.s.$，故$[B, B](t) = t$. ∎

# §7.2 Gauss过程

所谓Gauss过程是指所有有限维分布都是多元正态分布的随机过程. 本节的主要目的是证明Brown运动是特殊的Gauss过程.首先，利用命题1.3.2容易证明下面引理.

**引理 7.2.1** 设$\mathbf{X} \sim N(\mu_1, \sigma_1^2)$，$Y \sim N(\mu_2, \sigma_2^2)$是相互独立的，则 $(X, X+Y) \sim N(\mu, \mathbf{\Sigma})$. 其中均值$\mu = (\mu_1, \mu_1+\mu_2)'$，协方差矩阵$\mathbf{\Sigma} = \begin{pmatrix} \sigma_1^2 & \sigma_1^2 \\ \sigma_1^2 & \sigma_1^2+\sigma_2^2 \end{pmatrix}$

**定理 7.2.1** Brown运动是均值函数为$m(t)=0$，协方差函数为$\gamma(s,t)=\min(t,s)$的Gauss过程.

**证明：由于Brown运动的均值是0，所以其协方差函数为**

$$\gamma(s,t)=Cov[B(t),B(s)]=E[B(t)B(s)]$$

**若$t<s$，则$B(s)=B(t)+B(s)-B(t)$，由独立增量性可得**

$$E[B(t)B(s)]=E[B^2(t)]+E[B(t)(B(s)-B(t))]=E[B^2(t)]=t$$

**类似地，若$t>s$，则$E[B(t)B(s)]=s$. 再由上述引理及数学归纳法我们得到$B(t)$的任何有限维分布都是正态的.** ∎

**例 7.2.1** 设$\{B(t)\}$是Brown运动，求$B(1)+B(2)+B(3)+B(4)$的分布.

**解：考虑随机向量$\mathbf{X}=(B(1),B(2),B(3),B(4))'$，由定理7.2.1可知$\mathbf{X}$服从多元正态分布，且具有零均值和协方差矩阵**

$$\boldsymbol{\Sigma}=\begin{pmatrix}1&1&1&1\\1&2&2&2\\1&2&3&3\\1&2&3&4\end{pmatrix}$$

**令$\mathbf{A}=(1,1,1,1)$，则**

$$\mathbf{AX}=X_1+X_2+X_3+X_4=B(1)+B(2)+B(3)+B(4)$$

**具有均值为零，方差为$\mathbf{A}\boldsymbol{\Sigma}\mathbf{A}'=30$的正态分布.于是$B(1)+B(2)+B(3)+B(4)$是服从均值为0,方差为30的正态分布.**

**例 7.2.2** 求$B(\frac{1}{4})+B(\frac{1}{2})+B(\frac{3}{4})+B(1)$的分布.

**解：考虑随机向量**$Y=(B(\frac{1}{4}),B(\frac{1}{2}),B(\frac{3}{4}),B(1))'$. **易见，$Y$与上例中的$X$具有相同的情形. 所以它的协方差矩阵为$\frac{1}{4}\Sigma$. 因此** $AY=B(\frac{1}{4})+B(\frac{1}{2})+B(\frac{3}{4})+B(1)$ **服从均值为0,方差为$\frac{30}{4}$的正态分布.**

**例 7.2.3** 求概率$P\{\int_0^1 B(t)dt > \frac{2}{\sqrt{3}}\}$.

**解:** 首先需要指出的是，Brown运动具有连续路径，所以对每个路径来说, Riemann积分$\int_0^1 B(t)dt$ 存在. 我们只需找出$\int_0^1 B(t)dt$的分布.由Riemann积分的定义，我们可以从逼近和$\sum B(t_i)\Delta t_i$ 的极限分布得到. 这里$t_i$是$[0,1]$的分点，$\Delta t_i = t_{i+1} - t_i$. 例如取$t_i = \frac{i}{n}$，当$n = 4$时，逼近和即为上例中的随机变量.一般地，类似地证明，所有逼近和的分布都是零均值的正态分布，因此它们的极限分布是正态分布.于是$\int_0^1 B(t)dt$也是零均值的正态分布.下面来计算$\int_0^1 B(t)dt$的方差.

$$
\begin{aligned}
Var\left[\int_0^1 B(t)dt\right] &= Cov\left[\int_0^1 B(t)dt, \int_0^1 B(s)ds\right] \\
&= E\left[\int_0^1 B(t)dt \int_0^1 B(s)ds\right] \\
&= \int_0^1 \int_0^1 E[B(t)B(s)]dtds \\
&= \int_0^1 \int_0^1 Cov[B(t)B(s)]dtds \\
&= \int_0^1 \int_0^1 \min(t,s)dtds = \frac{1}{3}
\end{aligned}
$$

这样，$\int_0^1 B(t)dt \sim N(0, \frac{1}{3})$. 于是所求概率为

$$
P\left\{\int_0^1 B(t)dt > \frac{2}{\sqrt{3}}\right\} = P\left\{\sqrt{3}\int_0^1 B(t)dt > 2\right\} = 1-\Phi(2)
$$

这里$\Phi(x)$是标准正态分布的分布函数.

## §7.3 Brown运动的鞅性质

本节讨论与Brown运动相联系的几个鞅，首先回忆连续鞅的定义. 随机过程$\{X(t), t \geq 0\}$称为鞅，如果$\forall t$, $E[|X(t)|] < \infty$,且$\forall s > 0$,有

$$E[X(t+s)|\mathcal{F}_t] = X(t), \quad a.s. \tag{7.3.1}$$

这里$\mathcal{F}_t = \sigma\{X(u), 0 \leq u \leq t\}$是由$\{X(u), 0 \leq u \leq t\}$生成的$\sigma$代数，其中的等式(7.3.1)是几乎必然成立的，在后面有关的证明中，有时也省略$a.s.$

**定理 7.3.1** 设$\{B(t)\}$是Brown运动，则

(1)$\{B(t)\}$是鞅;

(2)$\{B(t)^2-t\}$是鞅;

(3)对任意实数$u$, $\exp\{uB(t)-\frac{u^2}{2}t\}$是鞅.

**证明：首先，由**$B(t+s)-B(t)$**与**$\mathcal{F}_t$**的独立性可知对任意函数**$g(x)$**，有**

$$E[g(B(t+s)-B(t))|\mathcal{F}_t]=E[g(B(t+s)-B(t))] \quad (7.3.2)$$

**由**Brown**运动的定义**，$B(t)\sim N(0,t)$，**所以**$B(t)$**可积**，**且**$E[B(t)]=0$，**再由其他性质得**

$$\begin{aligned} E[B(t+s)|\mathcal{F}_t] &= E[B(t)+(B(t+s)-B(t))|\mathcal{F}_t] \\ &= E[B(t)|\mathcal{F}_t]+E[B(t+s)-B(t)|\mathcal{F}_t] \\ &= B(t)+E[B(t+s)-B(t)]=B(t) \end{aligned}$$

从而(1)得证.

由于$E[B^2(t)]=t<\infty$，所以$B^2(t)$可积.于是得到

$$
\begin{aligned}
B^2(t+s) &= [B(t)+B(t+s)-B(t)]^2 \\
&= B^2(t)+2B(t)[B(t+s)-B(t)]+[B(t+s)-B(t)]^2
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
& E[B^2(t+s)|\mathcal{F}_t] \\
&= B^2(t)+2E[B(t)(B(t+s)-B(t))|\mathcal{F}_t]+E[(B(t+s)-B(t))^2|\mathcal{F}_t] \\
&= B^2(t)+s \quad (7.3.3)
\end{aligned}
$$

这里我们利用了$B(t+s)-B(t)$与$\mathcal{F}_t$的独立性且具有均值0，并对$g(x)=x^2$应用式(7.3.2).在式 (7.3.3)两端同时减去$(t+s)$，则(2)得证.

考虑$B(t) \sim N(0,t)$的矩母函数$E[e^{uB(t)}] = e^{tu^2/2} < \infty$，这蕴含着 $e^{uB(t)}$是可积的，并且

$$E[e^{uB(t)-\frac{u^2}{2}t}] = 1$$

取$g(x) = e^{ux}$，利用式(7.3.2)，可得

$$\begin{aligned}
E\left[e^{uB(t+s)}|\mathcal{F}_t\right] &= E\left[e^{uB(t)+u(B(t+s)-B(t))}|\mathcal{F}_t\right] \\
&= e^{uB(t)}E\left[e^{u(B(t+s)-B(t))}|\mathcal{F}_t\right] \\
&= e^{uB(t)}E\left[e^{u(B(t+s)-B(t))}\right] \\
&= e^{uB(t)}e^{\frac{u^2}{2}s}
\end{aligned}$$

两端同时乘以$e^{-\frac{u^2}{2}(t+s)}$,则(3)得证.

**注：上述定理所给的这3个鞅在理论上也有着十分重要的意义，比如鞅$\{B^2(t)-t\}$就是 Brown运动的特征，即，如果连续鞅$\{X(t)\}$使得$\{X^2(t)-t\}$也是鞅，则$\{X(t)\}$是Brown运动.**

# §7.4　Brown运动的Markov性

所谓Markov性是指在知道过程的现在与过去的状态的条件下，过程将来的表现与过去无关. 换言之，过程依赖于现在，但是并不记忆现在的状态是如何得到的，即“遗忘性”. 在第5章中我们介绍了Markov链和连续时间离散状态的Markov过程, 而在这里我们所讨论的Brown运动是连续时间连续状态过程，为此我们从连续Markov过程的定义开始.

**定义 7.4.1** 设$\{X(t), t \geq 0\}$是一个连续随机过程,如果$\forall t, s > 0$,有

$$P\{X(t+s) \leq y | \mathcal{F}_t\} = P\{X(t+s) \leq y | X(t)\}, \quad a.s. \tag{7.4.1}$$

则称$\{X(t)\}$为Markov过程,这里$\mathcal{F}_t = \sigma\{X(u), 0 \leq u \leq t\}$.

性质(7.4.1)称为Markov性.

**定理 7.4.1** Brown运动$\{B(t)\}$具有Markov性.

**证明：用矩母函数方法容易得到**$B(t+s)$**在给定条件**$\mathcal{F}_t$**下的分布与在给定条件**$B(t)$ **下的分布是一致的．事实上，**

$$\begin{aligned}
E[e^{uB(t+s)}|\mathcal{F}_t] &= e^{uB(t)}E\left[e^{u(B(t+s)-B(t))}|\mathcal{F}_t\right] \\
&= e^{uB(t)}E\left[e^{u(B(t+s)-B(t))}\right] \quad (\text{因为}e^{u(B(t+s)-B(t))}\text{独立于}\mathcal{F}_t) \\
&= e^{uB(t)}e^{\frac{u^2 s}{2}} \quad (\text{因为}B(t+s)-B(t)\sim N(0,s)) \\
&= e^{uB(t)}E\left[e^{u(B(t+s)-B(t))}|B(t)\right] \\
&= E\left[e^{u(B(t+s)}|B(t)\right]
\end{aligned}$$

**所以**$\{B(t)\}$**具有**Markov**性.** ∎

连续状态的Markov过程$\{X(t)\}$的转移概率定义为在时刻$s$过程处于状态$x$的条件下，过程在时刻$t$ 的分布函数

$$F(y,t,x,s) = P\{X(t) \le y | X(s) = x\}$$

在Brown运动的情况下，这一分布函数是正态的

$$F(y,t,x,s) = \int_{-\infty}^{y} \frac{1}{\sqrt{2\pi(t-s)}} e^{-\frac{(u-x)^2}{2(t-s)}} du$$

Brown运动的转移概率函数满足方程$F(y,t,x,s) = F(y,t-s,x,0)$. 换言之，

$$P\{B(t) \le y | B(s) = x\} = P\{B(t-s) \le y | B(0) = x\} \tag{7.4.2}$$

当$s=0$时，$F(y,t,x,0)$具有密度函数

$$p_t(x,y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi t}} e^{-\frac{(y-x)^2}{2t}}$$

公式(7.4.2)给出的性质称为Brown运动的时齐性，即分布不随时间的平移而变化.于是由 (7.1.4)可知Brown运动的所有有限维分布都是时齐的.

下面讨论Brown运动的强Markov性，为此给出关于$B(t)$停时的定义.

**定义 7.4.2** 如果非负随机变量$T$可以取无穷值，既$T: \Omega \to [0, \infty]$，并且$\forall t$，有$\{T \leq t\} \in \mathcal{F}_t = \sigma\{B(u), 0 \leq u \leq t\}$，则称$T$为关于$\{B(t), t \geq 0\}$的停时.

所谓强Markov性，实际上是将Markov性中固定的时间$t$用停时$T$来代替.下面我们不加证明的给出关于Brown运动的强Markov性定理.

**定理 7.4.2** 设$T$是关于Brown运动$\{B(t)\}$的有限停时,

$$\mathcal{F}_T = \{A \in \mathcal{F}, A \cap \{T \le t\} \in \mathcal{F}_t, \forall t \ge 0\}$$

则

$$P\{B(T+t) \le y | \mathcal{F}_T\} = P\{B(T+t) \le y | B(T)\} \quad a.s.$$

即Brown运动$\{B(t)\}$具有强Markov性.

由此定理可以看出, 如果定义

$$\hat{B}(t) = B(T+t) - B(T) \tag{7.4.3}$$

则$\hat{B}(t)$是始于0的Brown运动并且独立于$\mathcal{F}_T$.

## §7.5 Brown运动的最大值变量及反正弦律

以$T_x$记Brown运动首次击中$x$的时刻，即

$$T_x = \inf\{t > 0, B(t) = x\}$$

当$x > 0$时，为计算$P\{T_x \le t\}$，我们考虑$P\{B(t) \ge x\}$. 由全概率公式

$$P\{B(t) \ge x\} = P\{B(t) \ge x | T_x \le t\}P\{T_x \le t\} + P\{B(t) \ge x | T_x > t\}P\{T_x > t\} \quad (7.5.1)$$

若$T_x \le t$，则$B(t)$在$[0, t]$中的某个时刻击中$x$，由对称性得

$$P\{B(t) \ge x | T_x \le t\} = \frac{1}{2}$$

再由连续性可知，$B(t)$不可能还未击中$x$就大于$x$，所以(7.5.1)中第2项为零.因此

$$
\begin{aligned}
P\{T_x \le t\} = 2P\{B(t) \ge x\} & \\
&= \frac{2}{\sqrt{2\pi t}} \int_x^{\infty} e^{-u^2/2t} du \\
&= \frac{2}{\sqrt{2\pi}} \int_{x/\sqrt{t}}^{\infty} e^{-y^2/2} dy \quad (7.5.2)
\end{aligned}
$$

由此可见

$$
P\{T_x < \infty\} = \lim_{t \to \infty} P\{T_x \le t\} = \frac{2}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{\infty} e^{-y^2/2} dy = 1
$$

由此可见

$$P\{T_x < \infty\} = \lim_{t\to\infty} P\{T_x \le t\} = \frac{2}{\sqrt{2\pi}}\int_0^\infty e^{-y^2/2}dy = 1$$

对分布函数求导数可得其分布密度

$$f_{T_x}(u) = \begin{cases} \frac{x}{\sqrt{2\pi}}u^{-\frac{3}{2}}e^{-\frac{x^2}{2u}}, & \text{如果 } u > 0 \\ 0, & \text{如果 } u \le 0 \end{cases} \qquad (7.5.3)$$

利用式(7.5.2)，可以得到

$$
\begin{aligned}
E[T_x] &= \int_0^\infty P\{T_x > t\}dt \\
&= \int_0^\infty \left(1 - \frac{2}{\sqrt{2\pi}}\int_{x/\sqrt{t}}^\infty e^{-y^2/2}dy\right) dt \\
&= \frac{2}{\sqrt{2\pi}}\int_0^\infty \int_0^{x/\sqrt{t}} e^{-y^2/2}dydt \\
&= \frac{2}{\sqrt{2\pi}}\int_0^\infty e^{-y^2/2}dy \int_0^{x^2/y^2} dt \\
&= \frac{2x^2}{\sqrt{2\pi}}\int_0^\infty \frac{1}{y^2}{}_0\, e^{-y^2/2}dy \\
&\geq \frac{2x^2e^{-1/2}}{\sqrt{2\pi}}\int_0^1 \frac{1}{y^2}dy \\
&= \infty
\end{aligned}
$$

因此，$T_x$虽然几乎必然是有限的，但有无穷的期望.直观地看，就是Brown运动以概率1 会击中$x$，但它的平均时间是无穷的.性质$P\{T_x < \infty\} = 1$称为Brown运动的常返性. 由于始于点$a$的Brown运动与$\{a + B(t)\}$是相同的，这里$\{B(t)\}$是始于0的Brown运动，所以

$$P_a\{T_x < \infty\} = P_0\{T_{x-a} < \infty\} = 1$$

即Brown运动从任意点出发，击中$x$的概率都是1.

当$x < 0$时，由对称性，$T_x$与$T_{-x}$有相同的分布.于是有

$$P\{T_x \le t\} = \frac{2}{\sqrt{2\pi}} \int_{|x|/\sqrt{t}}^{\infty} e^{-y^2/2} dy$$

$$f_{T_x}(u) = \begin{cases} \frac{-x}{\sqrt{2\pi}} u^{-\frac{3}{2}} e^{-\frac{x^2}{2u}}, & u > 0 \\ 0, & u \le 0 \end{cases} \tag{7.5.4}$$

另一个有趣的随机变量是Brown运动在$[0,t]$中达到的最大值 $M(t)=\max_{0\le s\le t}B(s)$的分布可由下述等式得到，对$x>0$有

$$\begin{aligned}P\{M(t)\ge x\} &= P\{T_x\le t\}\\ &= 2P\{B(t)\ge x\}\\ &= \frac{2}{\sqrt{2\pi}}\int_{x/\sqrt{t}}^{\infty} e^{-y^2/2}dy\end{aligned}$$

读者不难得到Brown运动在$[0,t]$中达到的最小值$m(t)=\min_{0\le s\le t}\{B(s)\}$的分布.

如果时刻$\tau$使得$B(\tau)=0$，则称$\tau$为Brown运动的零点.我们有下述定理.

**定理 7.5.1** 设$\{B^x(t)\}$ 为始于$x$的Brown运动，则$B^x(t)$在$(0,t)$中至少有一个零点的概率为

$$\frac{|x|}{\sqrt{2\pi}}\int_0^t u^{-\frac{3}{2}}e^{-\frac{x^2}{2u}}du.$$

**证明：** 如果$x<0$，则由$\{B^x(t)\}$的连续性得

$$P\{B^x\text{在}(0,t)\text{中至少有一个零点}\} = P\{\max_{0\le s\le t} B^x(s)\geq 0\}$$

因为$B^x(t)=B(t)+x$，我们有

$$
\begin{aligned}
&P\{B^x\text{在}(0,t)\text{中至少有一个零点}\} \\
=&P\{\max_{0\le s\le t} B^x(s)\ge 0\} \\
=&P\{\max_{0\le s\le t} B(s)+x\ge 0\}=P\{\max_{0\le s\le t} B(s)\ge -x\} \\
=&P\{T_{-x}\le t\}=P\{T_x\le t\} \\
=&\int_0^t f_{T_x}(u)du=\frac{-x}{\sqrt{2\pi}}\int_0^t u^{-\frac{3}{2}}e^{-\frac{x^2}{2u}}du
\end{aligned}
$$

**对于$x>0$的情况的证明类似，只要知道Brown运动的最小值的分布即可完成其证明.** ∎

利用此结果可以证明下面定理.

**定理 7.5.2** $B^y(t)$在区间$(a,b)$中至少有一个零点的概率为

$$\frac{2}{\pi}\arccos\sqrt{\frac{a}{b}}$$

**证明:** 记$h(x)=P\{B^y$在$(a,b)$中至少有一个零点$\mid B(a)=x\}$.

由Markov性，$P\{B^y$在$(a,b)$中至少有一个零点 $\mid$ $B(a)$ $=$ $x\}$与 $P\{B^x$在$(0,b-a)$中至少有一个零点$\}$相同. 由条件概率

$$
\begin{aligned}
&P\{B^y\text{在}(a,b)\text{中至少有一个零点}\}\\
&=\int_{-\infty}^{\infty} P\{B^y\text{在}(a,b)\text{中至少有一个零点} \mid B(a)=x\}P(dx)\\
&=\int_{-\infty}^{\infty} h(x)P(dx)\\
&=\sqrt{\frac{2}{\pi a}}\int_0^{\infty} h(x)e^{-\frac{x^2}{2a}}dx\\
&=\sqrt{\frac{2}{\pi a}}\int_0^{\infty} \frac{x}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2a}}dx\int_0^{b-a} u^{-\frac{3}{2}}e^{-\frac{x^2}{2u}}du\\
&=\frac{1}{\pi\sqrt{a}}\int_0^{b-a} u^{-\frac{3}{2}}\int_0^{\infty} xe^{-x^2(\frac{1}{2u}+\frac{1}{2a})}dxdu\\
&=\frac{1}{\pi\sqrt{a}}\int_0^{b-a} u^{-\frac{3}{2}}\frac{au}{a+u}du\\
&=\frac{2\sqrt{a}}{\pi}\int_0^{b-a} \frac{u^{-\frac{1}{2}}}{a+u}du\\
&=\frac{2}{\pi}\arctan\frac{\sqrt{b-a}}{\sqrt{a}}=\frac{2}{\pi}\arccos\sqrt{\frac{a}{b}}
\end{aligned}
$$

于是，我们得到Brown运动的反正弦律.

**定理 7.5.3** 设$\{B^y(t), t \geq 0\}$是Brown运动，则

$$P\{B^y(t)\text{在}(a,b)\text{中没有零点}\} = \frac{2}{\pi}\arcsin\sqrt{\frac{a}{b}}.$$

下面介绍Brown运动在时刻$t$之前最后一个零点以及在$t$之后的第一个零点的分布情况.令

$$\zeta_t = \sup\{s \le t, B(s) = 0\} = t\text{之前最后一个零点}$$

$$\beta_t = \inf\{s \ge t, B(s) = 0\} = t\text{之后的第一个零点}$$

注意到$\beta_t$是一个停时，而$\zeta_t$不是停时(请读者验证). 由反正弦律有

$$P\{\zeta_t \le x\} = P\{B\ \text{在}(x,t)\text{中没有零点}\} = \frac{2}{\pi}\arcsin\sqrt{\frac{x}{t}}$$

$$P\{\beta_t \ge y\} = P\{B\ \text{在}(t,y)\text{中没有零点}\} = \frac{2}{\pi}\arcsin\sqrt{\frac{t}{y}}$$

$$P\{\zeta_t \le x, \beta_t \ge y\} = P\{B\ \text{在}(x,y)\text{中没有零点}\} = \frac{2}{\pi}\arcsin\sqrt{\frac{x}{y}}$$

# §7.6 Brown运动的几种变化

## §7.6.1 Brown桥

由Brown运动，我们可以定义另一类在数理金融中经常用到的过程——Brown桥过程.

**定义 7.6.1** 设$\{B(t), t \geq 0\}$是Brown运动.令

$$B^*(t) = B(t) - tB(1), \quad 0 \leq t \leq 1$$

则称随机过程$\{B^*(t), 0 \leq t \leq 1\}$为Brown桥(Brown Bridge).

因为Brown运动是Gauss过程，所以Brown桥也是Gauss过程，其$n$维分布由均值函数和方差函数完全确定．且$\forall 0 \le s \le t \le 1$，有

$$
\begin{aligned}
E[B^*(t)] &= 0 \\
E[B^*(s)B^*(t)] &= E[(B(s) - sB(1))(B(t) - tB(1))] \\
&= E[B(s)B(t) - tB(s)B(1) - sB(t)B(1) + tsB^2(1)] \\
&= s - ts - ts + ts = s(1-t)
\end{aligned}
$$

此外，由定义可知$B^*(0) = B^*(1) = 0$，即此过程的起始点是固定的，就象桥一样，这就是Brown桥名称的由来．

## §7.6.2 有吸收值的Brown运动

设$T_x$为Brown运动$\{B(t)\}$首次击中$x$的时刻, $x>0$.令

$$Z(t)=\begin{cases}B(t), & 若t<T_x\\ x\quad\ \ , & 若t\geq T_x\end{cases}$$

则$\{Z(t),t\ \geq\ 0\}$是击中$x$后，永远停留在那里的Brown运动.$\forall t>0$，随机变量$Z(t)$的分布有离散和连续两个部分.离散部分的分布是

$$\begin{aligned}P\{Z(t)=x\}&=P\{T_x\leq t\}\\&=\frac{2}{\sqrt{2\pi t}}\int_x^{\infty}e^{-\frac{y^2}{2t}}dy\end{aligned}$$

下面求连续部分的分布. $\forall y \le x$

$$P\{Z(t) \le y\} = P\{B(t) \le y, \max_{0\le s\le t} B(s) \le x\}$$

$$= P\{B(t) \le y\} - P\{B(t) \le y, \max_{0\le s\le t} B(s) > x\} \quad (7.6.1)$$

现计算(7.6.1)式中的最后一项，由条件概率公式得

$$P\{B(t) \le y, \max_{0\le s\le t} B(s) > x\}$$

$$= P\{B(t) \le y | \max_{0\le s\le t} B(s) > x\} P\{\max_{0\le s\le t} B(s) > x\} \quad (7.6.2)$$

由于事件$\max_{0\le s\le t} B(s) > x$等价于事件$T_x < t$及Brown运动的对称性可知：$B(t)$在时刻$T_x(< t)$ 击中$x$，为了使在时刻$t$不大于$y$，则在$T_x$之后的$t - T_x$这段时间中就必须减少$x - y$，而减少与增加 $x - y$的概率是相等的.所以有



GoBack FullScreen Close Quit

$$P\{B(t) \le y | \max_{0\le s\le t} B(s) > x\} = P\{B(t) \ge 2x-y | \max_{0\le s\le t} B(s) > x\} \tag{7.6.3}$$

从(7.6.2)及(7.6.3)式得

$$\begin{aligned} & P\{B(t) \le y, \max_{0\le s\le t} B(s) > x\} \\ = & P\{B(t) \ge 2x - y, \max_{0\le s\le t} B(s) > x\} \\ = & P\{B(t) \ge 2x - y\} \quad (\text{因为} y \le x) \end{aligned}$$

由式(7.6.1)，有

$$\begin{aligned} P\{Z(t) \le y\} &= P\{B(t) \le y\} - P\{B(t) \ge 2x - y\} \\ &= P\{B(t) \le y\} - P\{B(t) \le y - 2x\} \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi t}} \int_{y-2x}^{y} e^{-\frac{u^2}{2t}} du. \end{aligned}$$

## §7.6.3 在原点反射的Brown运动

由$Y(t)=|B(t)|,\quad t\geq 0$ 定义的过程$\{Y(t),t\geq 0\}$称为在原点反射的Brown运动.它的概率分布为

$$\begin{aligned} P\{Y(t)\leq y\} &= P\{B(t)\leq y\}-P\{B(t)\leq -y\} \\ &= 2P\{B(t)\leq y\}-1 \\ &= \frac{2}{\sqrt{2\pi t}}\int_{-\infty}^{y}e^{-\frac{u^2}{2t}}du-1 \quad y>0 \end{aligned}$$

## §7.6.4　几何Brown运动

由$X(t)=e^{B(t)},\quad t\geq 0$ 定义的过程$\{X(t),t\geq 0\}$称为几何Brown运动.由于Brown运动的矩母函数为$E[e^{sB(t)}]=e^{ts^2/2}$，所以几何Brown运动的均值函数与方差函数分别为

$$
\begin{aligned}
E[X(t)] &= E[e^{B(t)}]=e^{t/2}\\
Var[X(t)] &= E[X^2(t)]-(E[X(t)])^2\\
&= E[e^{2B(t)}]-e^t\\
&= e^{2t}-e^t
\end{aligned}
$$

在金融市场中，人们经常假定股票的价格按照几何Brown运动变化，在下面的例子中我们如此假定.

**例 7.6.1** (股票期权的价值)设某人拥有某种股票的交割时刻为$T$，交割价格为$K$的欧式看涨期权，即他(她)具有在时刻$T$以固定的价格$K$购买一股这种股票的权力.假设这种股票目前的价格为$y$，并按照几何Brown运动变化，我们计算拥有这个期权的平均价值. 设$X(T)$表示时刻$T$的股票价格，若$X(T)$高于$K$时，期权将被实施，因此该期权在时刻$T$的平均价值应为

$$
\begin{aligned}
E[\max(X(T)-K,0)] &= \int_0^\infty P\{X(T)-K>u\}du \\
&= \int_0^\infty P\{ye^{B(T)}-K>u\}du \\
&= \int_0^\infty P\{B(T)>\log\frac{K+u}{y}\}du \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi T}}\int_0^\infty \int_{\log[(K+u)/y]}^\infty e^{-x^2/2T}dxdu
\end{aligned}
$$

## §7.6.5 有漂移的Brown运动

设$B(t)$是标准Brown运动，我们称$X(t)=B(t)+\mu t$为有漂移的Brown运动，其中常数$\mu$称为漂移系数. 容易看出，有漂移的Brown运动是一个以速率$\mu$漂移开去的过程.下面对此过程计算一个有兴趣的量，首先，对常数$A, B>0, -B<x<A$，记 $p(x)$ 为过程在击中$-B$之前击中$A$的概率，即

$$p(x)=P\{X(t)\text{在击中}-B\text{之前击中}A|X(0)=x\}$$

对过程在时刻 0 与 $h$ 之间的变化$Y=X(h)-X(0)$取条件，我们将得到一个微分方程，从而给出

$$p(x)=E[p(x+Y)]+o(h)$$

这里的$o(h)$表示到时刻$h$，过程已经击中$-B$或$A$其中之一的概率．假设$p(y)$在$x$点附近有Taylor级数展开，则形式上可得

$$p(x) = E[p(x) + p'(x)Y + p''(x)Y^2/2 + \cdots] + o(h)$$

由于$Y$是正态分布的，均值为$\mu h$，方差为$h$，我们得到

$$p(x) = p(x) + p'(x)\mu h + p''(x)\frac{\mu^2 h^2 + h}{2} + o(h) \quad (7.6.4)$$

因为所有大于二阶的微分项之和的均值是$o(h)$．由式(7.6.4)有

$$p'(x)\mu + \frac{p''(x)}{2} = \frac{o(h)}{h}$$

令$h \to 0$，有

$$p'(x)\mu + \frac{p''(x)}{2} = 0$$

将上式积分，得

$$2\mu p(x) + p'(x) = c_1$$

或

$$e^{2\mu x}(2\mu p(x) + p'(x)) = c_1 e^{2\mu x}$$

即

$$\frac{d}{dx}(e^{2\mu x} p(x)) = c_1 e^{2\mu x}$$

积分可得

$$e^{2\mu x} p(x) = c_1 e^{2\mu x} + c_2$$

因此

$$p(x) = c_1 + c_2 e^{-2\mu x}$$

利用边界条件$P(A) = 1, P(-B) = 0$，解得

$$c_1 = \frac{e^{2\mu B}}{e^{2\mu B} - e^{-2\mu A}}, \quad c_2 = \frac{-1}{e^{2\mu B} - e^{-2\mu A}}$$

从而

$$p(x)=\frac{e^{2\mu B}-e^{-2\mu x}}{e^{2\mu B}-e^{-2\mu A}}$$

因此从$x=0$出发，过程在到达$-B$之前先到达$A$的概率$p(0)$为

$$P\{\text{过程在下降}B\text{之前先上升至}A\}=\frac{e^{2\mu B}-1}{e^{2\mu B}-e^{-2\mu A}} \tag{7.6.5}$$

若$\mu<0$，在上式中令$B\to\infty$，则有

$$P\{\text{过程迟早上至升}A\}=e^{2\mu A} \tag{7.6.6}$$

因此，此时过程漂向负无穷，而它的最大值是参数为$-2\mu$的指数变量.

若在(7.6.5)中令$\mu\to0$，则有

$$P\{\text{Brown运动在下降}B\text{之前上升至}A\}=\frac{B}{A+B}.$$

**例 7.6.2 实施股票期权**

假设某人有在将来某个时刻以固定价格$A$购买一股股票的期权，与现在的市价无关. 不妨取现在的市价为0，并假定其变化遵循有负漂移系数$-\mu(\mu > 0)$的Brown运动. 问在什么时候实施期权？

考虑在市价为$x$时实施期权的策略. 在此策略下的平均所得是

$$p(x)(x - A)$$

其中$p(x)$是过程迟早到达$x$的概率. 由式(7.6.6)，有

$$p(x) = e^{-2\mu x}, \quad x > 0$$

$x$的最优值是使$(x - A)e^{-2\mu x}$达到最大的值，易见它是$x = A + \frac{1}{2\mu}$.