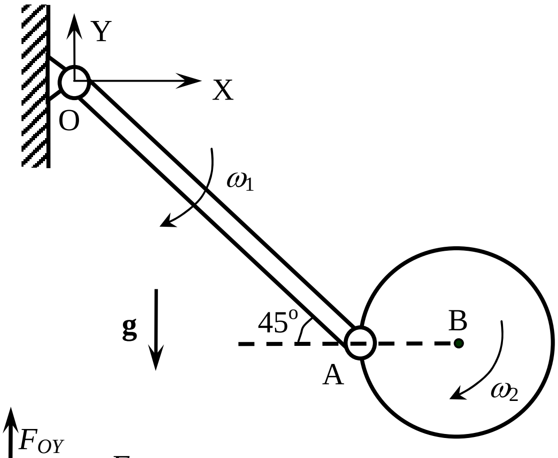
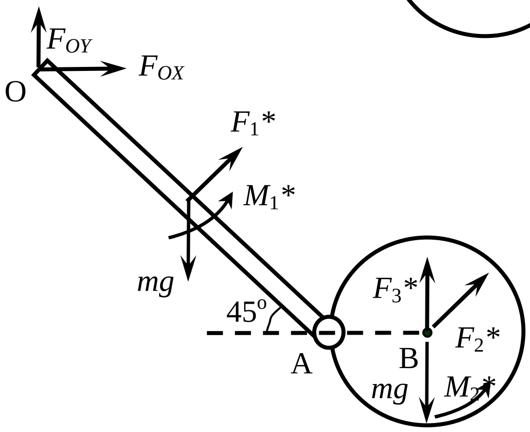
2006 年理论力学期终考试试卷 A 答案（B 答案附在 A 答案下面）

1. 如图所示，长为 $\boldsymbol{l}$ 的杆 **OA** 和半径为 $\boldsymbol{r}$ 的圆盘 **B** 通过铰链 **A** 连接，杆 **OA** 和圆盘 **B** 的质量均为 $\boldsymbol{m}$，$l=2\sqrt{2}\,r$，图示位置杆 **OA** 与水平线夹角为 **45°**，用达朗贝尔原理求在图示位置无初速地开始运动时杆 **OA** 的角加速度和圆盘中心 **B** 点的加速度





$F_1^*=ml\alpha_1/2$ ， $M_1^*=ml^2\alpha_1/12$ ，

$F_2^*=ml\alpha_1$ ， $F_3^*=mr\alpha_2$ ，

$M_2^*=mr^2\alpha_2/2$

根据达朗贝尔原理

$$F_1^*\frac{l}{2}+M_1^*+F_2^*\left(l+\frac{r}{\sqrt{2}}\right)+M_2^*+F_3^*\left(r+\frac{l}{\sqrt{2}}\right)-mg\frac{l}{2\sqrt{2}}-mg\left(\frac{l}{\sqrt{2}}+r\right)=0$$

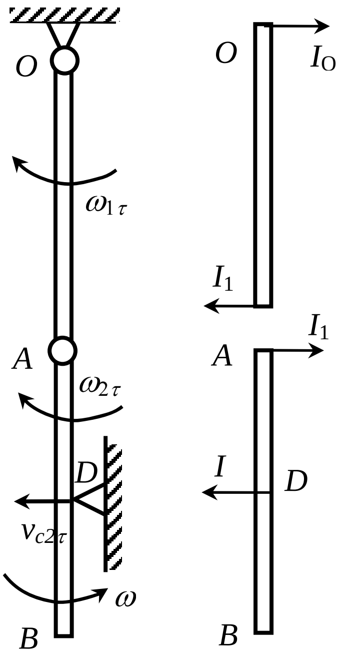
$$F_2^*\frac{r}{\sqrt{2}}+M_2^*+F_3^*r-mgr=0$$

得到：$\dfrac{38}{3}mr^2\alpha_1+\dfrac{7}{2}mr^2\alpha_2-4mgr=0$，$2mr^2\alpha_1+\dfrac{3}{2}mr^2\alpha_2-mgr=0$

解得：$6mr^2\alpha_2-\dfrac{7}{3}mgr=0$，$\alpha_2=\dfrac{7g}{18r}$，$2mr^2\alpha_1+\dfrac{7}{12}mgr-mgr=0$，$\alpha_1=\dfrac{5g}{24r}$

$$a_{Bx}=-\frac{1}{\sqrt{2}}l\alpha_1=-2r\alpha_1=-\frac{5}{12}g$$

$$a_{By}=-\frac{1}{\sqrt{2}}l\alpha_1-r\alpha_2=-2r\alpha_1-r\alpha_2=-\frac{5}{12}g-\frac{7}{18}g=-\frac{29}{36}g$$



2. 杆 **OA** 和杆 **AB** 长均为 l，质量均为 m。杆 **OA** 和支座用铰链 **O** 连接，杆 **OA** 和杆 **AB** 用铰链 **A** 连接。碰撞前 **OA** 和 **AB** 铅垂，杆 **OA** 的角速度为 **0**，杆 **AB** 的角速度为 ω(逆时针）。杆 **AB** 与支座在 **D** 处发生碰撞，**D** 为杆 **AB** 的中点。撞击点的恢复系数为 **0.5**，不计摩擦。

求：**(1)** 碰撞后杆 **OA** 和杆 **AB** 的角速度。

(2) 系统的机械能损失

动力学方程为：

$$\frac{1}{3}ml^2\left(\omega_{1\tau}-0\right)=I_1 l$$

$$m\left[v_{C2\tau}-\left(-\frac{l\omega}{2}\right)\right]=I-I_1,\quad \frac{1}{12}ml^2\left[\omega_2-(-\omega)\right]=\frac{I_1 l}{2}$$

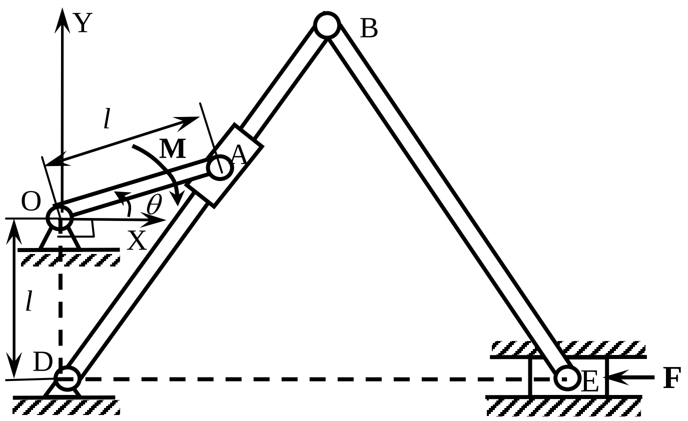
运动学约束方程：$v_{C2\tau}=l\omega_1+\dfrac{l\omega_2}{2}$

恢复系数定义 ： $e=\dfrac{v_{C2\tau}-0}{\dfrac{l\omega}{2}}=0.5$

解得：$\omega_1=\dfrac{3}{8}\omega$，$\omega_2=-\dfrac{1}{4}\omega$

$$\begin{aligned}\Delta T&=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3}ml^2\left(\frac{3}{8}\omega\right)^2+\frac{1}{2}m\left(\frac{l\omega}{4}\right)^2+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{12}ml^2\left(\frac{1}{4}\omega\right)^2-\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3}ml^2\omega^2\\&=\frac{3}{128}ml^2\omega^2+\frac{1}{32}ml^2\omega^2+\frac{1}{384}ml^2\omega^2-\frac{1}{6}ml^2\omega^2\\&=\frac{10}{384}ml^2\omega^2+\frac{12}{384}ml^2\omega^2-\frac{64}{384}ml^2\omega^2=-\frac{42}{384}ml^2\omega^2=-\frac{7}{64}ml^2\omega^2\end{aligned}$$

能量损失为 $\dfrac{7}{64}ml^2\omega^2$



3. 杆 OA 长为 *l*，通过滑块 A 带动杆 DB 和杆 BE 运动。各杆和滑块的重量和摩擦力均不计。杆 DB 和杆 BE 的长度均为 3*l*。力偶 M 作用于杆 OA，水平力 F 作用于滑块 E，图示位置 $\theta = 30^\circ$，用虚位移原理求平衡时 M 和 F 的关系。

解：以 A 为动点，DB 的连体基为动参考系，A 点的绝对运动是圆周运动，相对运动是直线运动，则有：

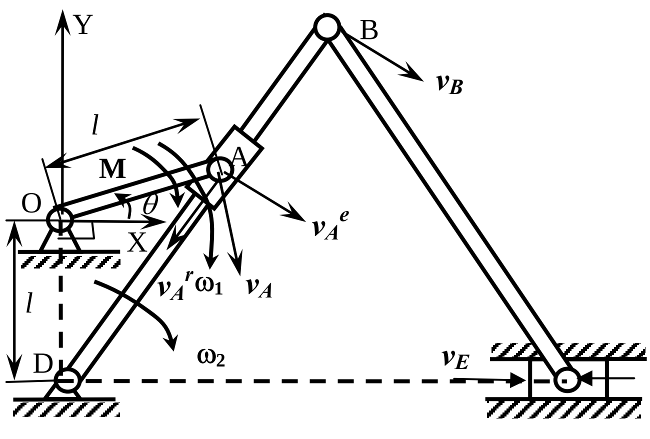
$$\omega_2 = \frac{v_A^e}{l\sqrt{3}} = \frac{1}{l\sqrt{3}}\frac{\sqrt{3}}{2}\omega_1 l = \frac{\omega_1}{2}$$

$\bar{v}_B$ 和 $\bar{v}_E$ 在 BE 连线上投影相等： $v_B\dfrac{\sqrt{3}}{2} = 3l\omega_2\dfrac{\sqrt{3}}{2} = v_E\dfrac{1}{2}$

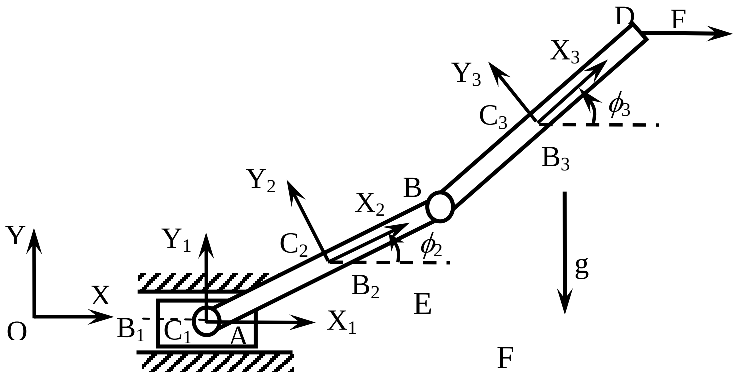
得到： $v_E = 3\sqrt{3}l\omega_2 = \dfrac{3\sqrt{3}l}{2}\omega_1$

根据虚位移原理： $M\omega_1\delta t - Fv_E\delta t = 0$

$$M = \frac{3\sqrt{3}}{2}lF$$



4. 杆 **AB** 和杆 **BD** 质量均为 $\boldsymbol{m}$，长均为 $\boldsymbol{l}$，滑块 **A** 质量为 **2*m***，关于质心的转动惯量为 $\boldsymbol{J}$。杆 **AB** 和杆 **BD** 通过铰链 **B** 连接，杆 **AB** 和滑块 **A** 通过铰链 **A** 连接，滑块 **A** 可在水平面上无摩擦滑动。设滑块 **A** 为 $\mathbf{B_1}$，杆 **AB** 为 $\mathbf{B_2}$，杆 **BD** 为 $\mathbf{B_3}$，$\mathbf{B_1}$，$\mathbf{B_2}$ 和 $\mathbf{B_3}$ 的位形坐标分别为 $\boldsymbol{q}_1=\begin{bmatrix}x_1 & y_1 & \phi_1\end{bmatrix}^T$，$\boldsymbol{q}_2=\begin{bmatrix}x_2 & y_2 & \phi_2\end{bmatrix}^T$ 和 $\boldsymbol{q}_3=\begin{bmatrix}x_3 & y_3 & \phi_3\end{bmatrix}^T$。



(1) 以 $\boldsymbol{q}=\begin{bmatrix}x_1 & y_1 & \phi_1 & x_2 & y_2 & \phi_2 & x_3 & y_3 & \phi_3\end{bmatrix}^T$ 为系统的广义坐标，写出系统的运动学约束方程，雅可比矩阵和加速度约束方程的右项。

(2) 写出系统的增广质量阵和增广主动力阵，写出系统的第一类拉格朗日方程。

解：约束方程为：

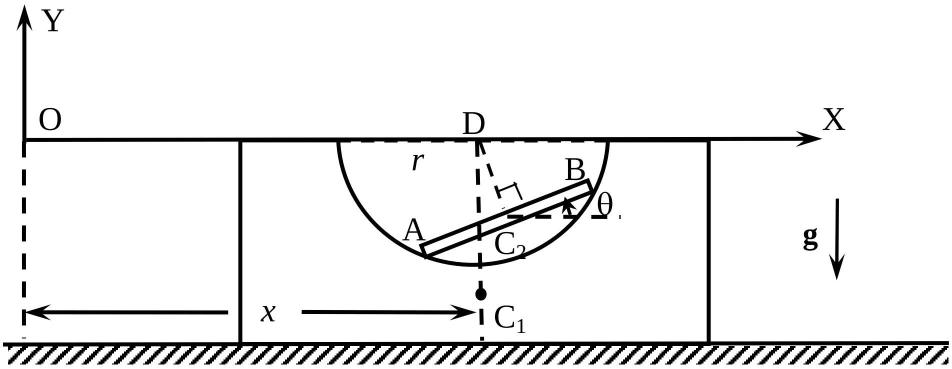
$$\boldsymbol{\Phi}=\begin{bmatrix} y_1 \\ \phi_1 \\ x_2-x_1-0.5l\cos\phi_2 \\ y_2-y_1-0.5l\sin\phi_2 \\ x_3-x_2-0.5l\cos\phi_2-0.5l\cos\phi_3 \\ y_3-y_2-0.5l\sin\phi_2-0.5l\sin\phi_3 \end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{\Phi}_q=\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0.5l\sin\phi_2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 1 & -0.5l\cos\phi_2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0.5l\sin\phi_2 & 1 & 0 & 0.5l\sin\phi_3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & -0.5l\cos\phi_2 & 0 & 1 & -0.5l\cos\phi_3 \end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{\gamma}=\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -0.5l\cos\phi_2\dot{\phi}_2^{\,2} \\ -0.5l\sin\phi_2\dot{\phi}_2^{\,2} \\ -0.5l\cos\phi_2\dot{\phi}_2^{\,2}-0.5l\cos\phi_3\dot{\phi}_3^{\,2} \\ -0.5l\sin\phi_2\dot{\phi}_2^{\,2}-0.5l\sin\phi_3\dot{\phi}_2^{\,2} \end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{M}=diag(2m,2m,J,m,m,ml^2/12,m,m,ml^2/12)$$

$$\boldsymbol{F}^a=\begin{bmatrix}0 & -2mg & 0 & 0 & -mg & 0 & F & -mg & -0.5l\sin\phi_3 F\end{bmatrix}^T$$



5. 如图所示，质量为 ***m*** 的带半圆槽的滑块可在水平面上无摩擦地滑动，长为 **2*l***，质量为 ***m*** 的杆 **AB** 可在半径为 ***r*** 的半圆槽内无摩擦地滑动，$r=\sqrt{2}\,l$。以 ***x, θ*** 为系统广义坐标，（**1**）写出系统的动能和势能。（**2**）写出系统的拉格朗日函数。（**3**）写出系统的初积分。

解：$T=\frac{1}{2}m\dot{x}^2+\frac{1}{2}m\left(\dot{x}^2+l^2\dot{\theta}^2+2l\dot{\theta}\dot{x}\cos\theta\right)+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{12}m\left(2l\right)^2\dot{\theta}^2$

$V=-mgl\cos\theta-mgh$　（C 点的 Y 坐标为-h）

$$L=T-V=\frac{1}{2}m\dot{x}^2+\frac{1}{2}m\left(\dot{x}^2+l^2\dot{\theta}^2+2l\dot{\theta}\dot{x}\cos\theta\right)+\frac{1}{6}ml^2\dot{\theta}^2+mgl\cos\theta+mgh$$

$$=m\dot{x}^2+\frac{2}{3}ml^2\dot{\theta}^2+ml\dot{\theta}\dot{x}\cos\theta+mgl\cos\theta+mgh$$

由于 L 不显含 x，系统的循环积分为

$\frac{\partial L}{\partial\dot{x}}=C_1$，即　$2m\dot{x}+ml\dot{\theta}\cos\theta=C_1$

由于 L 不显含 t，$T_0=0$

$T_2+V=C$

$$m\dot{x}^2+\frac{2}{3}ml^2\dot{\theta}^2+ml\dot{\theta}\dot{x}\cos\theta-mgl\cos\theta-mgh=C_2$$