上 海 交 通 大 学 试 卷（ A 卷）

（ 2008 至 2009 学年 第 2 学期 ） 2009.7.1

班级号____________________学号________________姓名 ________________

课程名称 ________概率论与数理统计（A 类）________成绩 ________________

4. 若随机变量 X 与 Y 相互独立，则 X 与 Y 必不相关。 （ ）

5. 若 $X_i \sim N(0,1)$，$(i=1,2,\cdots,n)$，则 $X_1^2+X_2^2+\cdots+X_n^2 \sim \chi^2(n)$. （ ）

6. $(X_1,X_2,\cdots,X_m)$ 是总体 $B(n,\ p)$ 的样本，则 $\hat{p}=\dfrac{1}{nm}\sum_{i=1}^{m}X_i$ 是参数 p 的无偏估计。 （ ）

二 填空题（共 24 分，每题 3 分）

7. $P(A)=0.4$，$P(A|B)=0.2=P(B|A)$，则 $P(A\bar{B})=$______ 。

8. 设随机变量 $X\sim N(\mu_1,\sigma_1^2)$，$Y\sim N(\mu_2,\sigma_2^2)$，$\sigma_1>0$，$\sigma_2>0$，且 $Y=3X+2$。

则数学期望 $E(XY)=$______________。

9. 设随机变量 (X,Y) 服从区域 $x^2+y^2\le 2$ 上的均匀分布，则在 $Y=1$ 的条件下 X 的

条件密度函数 $f_{X|Y}(x|1)=$

____________________________________。

10. 二维随机变量 $(X,Y)\sim N(1,\ 4;1,9;\ 0.5)$，令 $Z=2X-Y$，则。$\mathrm{cov}(Z,Y)$_________。

$\mathrm{cov}(X,Y)=0.5\times\sqrt{4}\times\sqrt{9}=3$

$\mathrm{cov}(2X-Y,Y)=\mathrm{cov}(2X,Y)+\mathrm{cov}(Y,Y)=2\,\mathrm{cov}(X,Y)+\mathrm{cov}(Y,Y)=6+D(Y)=6+9$ ________

_。

11. 在独立试验中，每次试验成功的概率为 p，则在成功 2 次之前已经失败 3 次的

概率为_____________。

我承诺，我将严格遵守考试纪律。

承诺人：________

题号	一	二	三	20-22	23-26	总分
得分						
批阅人						

12．设(X_1 , X_2 , X_3 , X_4)为取自总体 $N(3,4)$ 的样本，则 $P(-1<\bar{X}<5)=$____________。

13．设（ $X_1, X_2, \cdots, X_9$ ）是来自正态总体 $X \sim N(\mu, 4)$ 的简单随机样本，则

$$P\left(\sum_{i=1}^{9}(X_i-\bar{X})^2>8.72\right)=\_\_\_\_\_\_\_\_$$ 。

14．某清漆的干燥时间服从正态分布 $N(\mu, 0.36)$．现测得 9 个样品的平均干燥时间为 6 小时，则 μ 的置信度为 0.95 的单侧置信区间上限为__________。

$$\frac{\bar{X}-\mu}{\sigma/\sqrt{n}} \sim N(0,1),\quad \frac{6-\mu}{0.6/\sqrt{9}} \sim N(0.1)$$

$$p\left(\frac{6-\mu}{0.6/\sqrt{9}}>?\right)=0.95 \text{查表的} p\left(\frac{6-\mu}{0.6/\sqrt{9}}>-1.645\right)=0.95$$

$$p\left(\mu<1.645\times{0.6/\sqrt{9}}+6\right)=0.95$$

*．为了了解一台测量长度的仪器的精度，对一根长为 30mm 的标准金属棒进行 6 次重复测量，测得结果如下：

30．1　　29．9　　29．8　　30．3　　30．2　　29．6

假定测量值服从 $N(\mu,\sigma^2)$，其中 μ 未知。则 μ 的置信度为 0.95 的置信区间为_______________ 。

$$\frac{\bar{X}-\mu}{S/\sqrt{n}} \sim t(n-1),\quad \frac{\bar{X}-\mu}{S/\sqrt{6}} \sim t(6-1)$$

$$p\left(\left|\frac{\bar{X}-\mu}{S/\sqrt{6}}\right|<?\right)=0.95 \text{查表的} p\left(\left|\frac{\bar{X}-\mu}{S/\sqrt{6}}\right|<t_{0.025}(6-1)\right)=0.95$$

$$p\left(\left|\frac{\bar{X}-\mu}{S/\sqrt{6}}\right|<2.4469\right)=0.95$$

17（070802）．为了了解一台测量长度的仪器的精度，对一根长为 30mm 的标准金属棒进行 6 次重复测量，测得

结果如下：

30．1　　29．9　　29．8　　30．3　　30．2　　29．6

假定测量值服从 $N(\mu,\sigma^2)$，其中 μ 未知。则 σ^2 的置信度为 0.95 的置信区间为________________ 。

$$\frac{(n-1)S^2}{\sigma^2} \sim \chi^2(n-1) \quad p(?<\frac{(n-1)S^2}{\sigma^2}<?)=0. \quad p(\chi_{0.975}(5)<\frac{(n-1)S^2}{\sigma^2}<\chi_{0.025}(5))=)$$

$$p(0.831<\frac{(n-1)S^2}{\sigma^2}<12.833)=0.95 \qquad p(\frac{(n-1)S^2}{12.833}<\sigma^2<\frac{(n-1)S^2}{0.831})=0.95$$

三　单项选择题（共 15 分，每题 3 分）

15．设 $B\subset A$，则下面正确的等式是__________

（a）$P(\overline{AB})=1-P(A)$；　　（b）$P(B\,|\,A)=P(B)$；

（c）$P(A\,|\,\overline{B})=P(A)$；　　（d）$P(\overline{B}-\overline{A})=P(\overline{B})-P(\overline{A})$。

16．设 $(X_1,X_2,\cdots,X_n)$ 为来自正态总体 $N(\mu,\sigma^2)$ 的样本，$\overline{X}$ 为样本均值，已知统计量

$Y=k\sum_{i=1}^{n}(X_i-\overline{X})^2+\overline{X}^2$ 是参数 μ^2 的无偏点估计量，则常数 $k=$__________

（a）$\frac{1}{n}$；　　（b）$\frac{1}{n-1}$；

（c）$-\frac{1}{n}$；　　（d）$-\frac{1}{n-1}$。

17．设随机变量 X 的分布函数 $F(x)=0.2\Phi(x)+0.8\Phi(x/2-0.5)$，$\Phi(x)$ 为标准正态分布函数，

则 X 的数学期望 $E(X)=$____________

（a）0.2 ；　　（b）0.4 ；

（c）0.8 ；　　（d）1 。

18．设 $X_1,\cdots,X_n,\cdots$ 为独立随机变量序列，X_i $(i=1,2,\cdots)$ 服从指数分布 $E(2)$，$\Phi(x)$ 为标准正态分布函数，x 为任一实数。则下列选项中正确的是___________

（a）$\lim_{n\to\infty}P\{\frac{2}{\sqrt{n}}\sum_{i=1}^{n}X_i-\sqrt{n}\le x\}=\Phi(x)$；（b）$\lim_{n\to\infty}P\{\frac{4}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i-\frac{1}{2}\le x\}=\Phi(x)$；

（c）$\lim_{n\to\infty}P\{4\sum_{i=1}^{n}(X-2)\le x\}=\Phi(x)$；　　（d）$\lim_{n\to\infty}P\{\frac{2}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i-n)\le x\}=\Phi(x)$。

19．设 $(X_1,X_2,\cdots,X_n)$ 为来自正态总体 $N(\mu,\sigma^2)$ 的样本，又 $Y\sim N(\mu,\sigma^2)$ 且

与 X_i $(i=1,2\cdots n)$ 相互独立，$\overline{X}$ 与 S^2 分别为样本均值和样本方差，则___________

（a）$\dfrac{Y-\bar{X}}{S}\sqrt{\dfrac{n+1}{n}} \sim t(n-1)$；　　（b）$\dfrac{Y-\bar{X}}{S}\sqrt{\dfrac{n}{n+1}} \sim t(n-1)$；

（c）$\dfrac{Y-\bar{X}}{S}\sqrt{\dfrac{n+1}{n}} \sim t(n)$；　　（d）$\dfrac{Y-\bar{X}}{S}\sqrt{\dfrac{n}{n+1}} \sim t(n)$。

四　解答题（共 48 分，每题 8 分）

20．某台机器正常工作时，所生产的一等品与二等品各为 50%。该机器不能正常工作时，生产的一等品为 25%，二等品为 75%。已知这台机器有 10%的时间不能正常工作。现从该机器在某特定的时间内生产的所有产品中随机地选取 1 件，查看后仍放回，共依次查看 5 件。

（1）如果该机器在此特定的时间内正常工作，试求取到的为 4 件一等品、1 件二等品的概率；

（2）如果取到的为 4 件一等品、1 件二等品，试求该机器在此特定时间内正常工作的概率。

21．设二维随机变量 (X,Y) 的联合密度函数为 $f(x,y)=\begin{cases} xe^{-x(1+y)} & x>0,y>0 \\ 0 & \text{其他} \end{cases}$。

求随机变量 $Z=XY$ 的分布函数 $F(x)$ 与密度函数 $f(x)$。

19（08-7 题）. 学校某课程考试成绩分优秀、及格、不及格三种，优秀得 3 分、及格得 2 分、不及格得 1 分.根据以往统计参加考试的学生获优秀及格不及格的分别占 20%、70%和 10%. 现有 100 位学生参加考试,

(1) 试用切贝雪夫不等式估计这 100 位学生考试总分在 200 分至 220 分的概率;

(2) 用中心极限定理近似计算这 100 位学生考试总分在 200 分至 220 分的概率

X_i 是第 i 个人的得分　　X_i 的分布为

X_i	3	2	1
p	0.20	0.70	0.10

$$E(X_i)=3\times 0.2+2\times 0.7+1\times 0.1=2.1$$

$$E(X_i^2)=3^2\times 0.2+2^2\times 0.7+1^2\times 0.1=4.7$$

$$D(X_i)=E\left(X_i^2\right)-E^2(X_i)=0.29$$

$$E(\sum_{i=1}^{100} X_i)==210$$

$$D(\sum_{i=1}^{100} X_i)=100D(X_i)=29$$

(1) $P(200\le \sum_{i=1}^{100} X_i \le 220)=P(200-210\le \sum_{i=1}^{100} X_i - E(\sum_{i=1}^{100} X_i)\le 220-210)$

$$=P(\left|\sum_{i=1}^{100} X_i - E(\sum_{i=1}^{100} X_i)\right|\le 10)\ge 1-\frac{D(\sum_{i=1}^{100} X_i)}{10^2}=0.71$$

(2) $\sum_{i=1}^{100} X_i \sim N\left(210, 29\right)$(近似)

$$P(200\le \sum_{i=1}^{100} X_i \le 220)=\phi(\frac{220-210}{\sqrt{29}})-\phi(\frac{200-210}{\sqrt{29}})=\phi(1.87)-\phi(-1.87)=\phi(1.87)-1=2\times 0.9693-1$$

22．如果要估计抛掷一枚图钉时尖头朝上的概率，为了有 95%以上的把握保证所观察到的频率与概率 p 的绝对误差小于 $\frac{p}{10}$，试用中心极限定理估计至少应该作多少次试验？

23．已知 X_1，X_2，$\cdots$，X_n 是取自于总体 X 的样本，且 X 的分布函数为

$$F(x;\theta)=\begin{cases}1-\theta^2 x^{-2}, & \theta<x \\ 0, & 其他\end{cases}\quad(\theta>0),\quad f(x;\theta)=\begin{cases}2\theta^2 x^{-3}, & \theta<x \\ 0, & 其他\end{cases}$$

试求：(1) θ 的矩估计量 $\hat{\theta}$；(2) θ 的极大似然估计量 $\hat{\theta}_L$。

$$E(x)=\int_{\theta}^{+\infty} xf(x)dx=\int_{\theta}^{+\infty} 2\theta^2 x^{-2}dx=2\theta^2 \left.\frac{x^{-2+1}}{-2+1}\right|_{\vartheta}^{+\infty}=0-(-2\theta)=2\theta$$

$$E(X)=2\theta\approx\overline{X}$$

所以θ的矩估计量

$$\hat{\theta}\approx\frac{\overline{X}}{2}$$

似然函数 $L(x_1,x_2,...,x_n,\theta)=2\theta^2 x_1^{-3}\cdot 2\theta^2 x_2^{-3}\cdots\cdots 2\theta^2 x_n^{-3}$

$$\ln L(x_1,x_2,...,x_n,\theta)=\ln(2^n\theta^{2n} x_1^{-3}\cdot x_2^{-3}\cdots\cdots x_n^{-3})=n\ln 2+2n\ln\theta-3(\ln x_1+\ln x_2+...+\ln x_n)$$

$\frac{\partial}{\partial\theta}\ln L(x_1,x_2,...,x_n,\theta)=\frac{2n}{\theta}=0$ 不能做

$$L(x_1,x_2,...,x_n,\theta)=f(x_1,\theta)f(x_2,\theta)...f(x_n,\theta)=\begin{cases}2^n\theta^{2n} x_1^{-3}\cdot x_2^{-3}\cdots\cdots x_n^{-3}, & \theta<x_1,\theta<x_2,...,\theta<x_n\\ 0\end{cases}$$

$=\begin{cases}2^n\theta^{2n} x_1^{-3}\cdot x_2^{-3}\cdots\cdots x_n^{-3}, & \theta<\min(x_1,x_2,...,x_n)\\ 0\end{cases}$ $\theta=\min(x_1,x_2,...,x_n)$

$$\theta=\min(X_1,X_2,...,X_n)$$

24．设随机变量（X,Y）的分布律如下所示，求：(1) $D(\max\{X,Y\})$； (2) ρ_{XY}。

Y \ X	-1	0	1
0	5/20	2/20	6/20
1	3/20	3/20	1/20

25．化肥厂用自动包装机包装化肥，某日测得 9 包化肥的质量（单位：kg）如下：

49.7 50.4 49.9 50.5 50.1 49.7 49.8 50.3 50.5

设每包化肥质量服从正态分布，是否可以认为每包化肥的平均质量为 50 kg？是否可以认为每包化肥的平均质量显著偏小于 50 kg？是否可以认为每包化肥的平均质量显著偏大于 50 kg？取($\alpha=0.05$)。

H0： $\mu=50$ H_1 $\mu\neq 50$

$$\frac{\overline{X}-50}{S/\sqrt{n}}\sim t(9-1)$$

$$W=\left\{\left|\frac{\bar{X}-50}{S/\sqrt{n}}\right|>t_{\frac{\alpha}{2}}(8)=t_{0.025}(8)=2.306\right\}$$

$$\bar{X}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}x_i=50.1$$

$$S^2=\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})^2$$

$$S=\sqrt{\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})^2}$$

$\frac{\bar{X}-50}{S/\sqrt{n}}=0.89$， 因为 $0.89<2.306$，所以接受 H0 认为化肥的平均质量为 50 kg。

H0： $\mu\ge 50$ H_1 $\mu<50$

$$\frac{\bar{X}-50}{S/\sqrt{n}}\sim t(9-1)$$

$$W=\left\{\frac{\bar{X}-50}{S/\sqrt{n}}<-t_{\alpha}(8)=-t_{0.05}(8)=-1.8595\right\}$$

$\frac{\bar{X}-50}{S/\sqrt{n}}=0.89>-1.8595$， 不认为显著偏小于 50 kg。

H0： $\mu\le 50$ H_1 $\mu>50$

$$\frac{\bar{X}-50}{S/\sqrt{n}}\sim t(9-1)$$

$$W=\left\{\frac{\bar{X}-50}{S/\sqrt{n}}>t_{\alpha}(8)=t_{0.05}(8)=1.8595\right\}$$

$\frac{\bar{X}-50}{S/\sqrt{n}}=0.89<1.8595$， 不认为显著偏大于 50 kg。

五．证明题 (本题 7 分)

26．设连续型随机变量 X 的数学期望存在，$F(x)$ 为 X 的分布函数。已知对常数 a，恒有 $P(X\ge a)=1$。证明：（1） $x\le a$ 时，$F(x)=0$；（2） $E(X)\ge a$ 。

附表：

标准正态分布数值表	χ^2 分布数值表	t 分布数值表
$\Phi(2)=0.9772$	$\chi^2_{0.05}(8)=15.507$	$t_{0.05}(8)=1.85$
$\Phi(0.5)=0.6915$	$\chi^2_{0.975}(8)=2.$	$t_{0.025}(8)=2.3$
$\Phi(1)=0.8413$	$\chi^2_{0.05}(9)=16.919$	$t_{0.05}(9)=1.8331$
$\Phi(1.96)=0.975$	$\chi^2_{0.975}(9)=2.70$	$t_{0.025}(9)=2.2622$

概率统计试卷(A 类) (评分标准) [方框内为 B 卷答案] 2009.7.1

一 是非题（共 6 分，每题 1 分）

非 是 非 是 非 是 [是 非 非 是 非 是]

二 填空题（共 24 分，每题 3 分）

7. 0.32 [0.42]； 8. $\sigma_1\sigma_2-\mu_1\mu_2$； 9. $f_{X|Y}(X\,|\,1)=\begin{cases}0.5 & -1\le x\le 1\\ 0 & \text{其他}\end{cases}$；

10. -3 [3]； 11. $4p^2(1-p)^3$； 12. $\Phi(2)-\Phi(-4)\approx 0.9772$；

13. 0.975 14. 6.392 [5.608] .

三 单项选择题（共 15 分，每题 3 分）

d d c a b [c c d b a]

四 解答题 (共 48 分，每题 8 分)

20. 设事件 A 表示“机器正常工作”，事件 B 表示“该机器生产的是一等品”，则

$$P(A)=0.9 \quad P(\bar{A})=0.1 \quad P(B\,|\,A)=P(\bar{B}\,|\,A)=0.5$$

$$P(B\,|\,\bar{A})=0.25 \quad P(\bar{B}\,|\,\bar{A})=0.75$$ （2 分）

设事件 C 表示“在选取的 5 个产品中有 4 个一等品和 1 个二等品”，则由 $C\subset(A\cup\bar{A})$，得

（1） $P(C\,|\,A)=C_5^4(0.5)^4(1-0.5)=\dfrac{5}{32}=0.156$ （2 分）

（2）$P(C)=P(A)P(C\mid A)+P(\bar{A})P(C\mid \bar{A})$

$$=P(A)C_5^1\left(P(B\mid A)\right)^4 P(\bar{B}\mid A)+P(\bar{A})C_5^1\left(P(B\mid \bar{A})\right)^4 P(\bar{B}\mid \bar{A})$$

$$=5[0.9(0.5)^5+0.1(0.25)^4 0.75]\approx 5\times 0.02842=0.1421.$$ （2 分）

所以该机器在该特定时间内正常工作的概率为

$$P(A\mid C)=\frac{P(A)P(C\mid A)}{P(C)}=\frac{0.9(0.5)^5}{0.02842}=0.9897$$ （2 分）

21．解：当 $z\le 0$ 时，$F_Z(z)=0$； （1 分）

当 $z>0$ 时， $F_Z(z)=P(Z\le z)=P(XY\le z)=\iint\limits_{xy\le z} f(x,y)$

$$=\int_0^{+\infty}dx\int_0^{\frac{z}{x}}xe^{-x(1+y)}dy=1-e^{-z}$$ （3 分）

所以密度函数 $f_Z(z)=\begin{cases}e^{-z} & z>0\\ 0 & z\le 0\end{cases}$ （4 分）

22．设 n 次试验中尖头朝上有 X 次，则 $X\sim B(n,p)$，$E(X)=np,\ D(X)=np(1-p)$（2 分）

$$P(|\frac{n_A}{n}-p|<\frac{p}{10})\ge 0.95$$ （2 分）

$$\Rightarrow\ P(-\frac{1}{10}\sqrt{\frac{np}{1-p}}<\frac{n_A-np}{\sqrt{np(1-p)}}<\frac{1}{10}\sqrt{\frac{np}{1-p}})\ge 0.95$$

$$\Rightarrow\ \Phi(\frac{1}{10}\sqrt{\frac{np}{1-p}})-\Phi(-\frac{1}{10}\sqrt{\frac{np}{1-p}})\ge 0.95$$

$$\Rightarrow\ 2\Phi(\frac{1}{10}\sqrt{\frac{np}{1-p}})-1\ge 0.95\ \Rightarrow\ \Phi(\frac{1}{10}\sqrt{\frac{np}{1-p}})\ge 0.975$$

$$\Rightarrow\ \frac{1}{10}\sqrt{\frac{np}{1-p}}\ge 1.96\Rightarrow\ n\ge\frac{(1-p)19.6^2}{p}$$ （4 分）

23．$X\sim f(x;\theta)=\begin{cases}2\theta^2x^{-3} & \theta\le x\\ 0 & \theta<x\end{cases}$ （2 分）

(1) $\hat{\theta}=\sqrt{0.5\overline{X}}$； （3 分）

(2) $\hat{\theta}_L = \min\{X_1, X_2, \cdots, X_n\}$。 （3 分）

24．(1) $D(\max\{X,Y\}) = \dfrac{91}{400} = 0.2275$； （4 分）

(2) $\rho_{XY} = -\dfrac{33}{\sqrt{299}\sqrt{91}} = -0.20006$。 （4 分）

25．设 $H_0: \mu = 50; H_1: \mu \neq 50.$ （2 分）

检验统计量 $|T| = \left|\dfrac{\bar{X}-\mu}{S/\sqrt{n}}\right| \sim t(n-1)$ 拒绝域 W ：$|T| \geq t_{0.025}(8) = 2.306$，

$\bar{x} = 50.1,\ s^2 = \dfrac{1}{8}\sum_{i=1}^{9} x_i^2 - \dfrac{9}{8}\bar{x}^2 = 0.1125$，

$|T| = \dfrac{50.1-50}{0.3354/\sqrt{9}} = 0.89 < 2.306$， （4 分）

拒绝域 $|T| \notin W$ 因为当 H_0 为真时，$|T| \notin W$， 所以接受 H_0. （2 分）

五．证明题 (本题 7 分)

26. （1） $1-F(a) = 1-P(X<a) = P(X \geq a) = 1 \Rightarrow F(a) = 0$，由 $F(x)$ 的单调不减

$\Rightarrow F(x) = 0$，$x \leq a$ （4 分）

（2）设 $f(x)$ 为 X 的密度函数；$\Rightarrow f(x) = F'(x) = 0$，$x \leq a$，从而

$$E(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} x f(x)dx = \int_a^{+\infty} x f(x)dx \geq \int_a^{+\infty} a f(x)dx$$

$$= a\int_a^{+\infty} f(x)dx = a\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = a$$ （3 分）