

理论力学 CAI

刚体平面运动学

- 前言
- 刚体的连体基 刚体位形的描述
- 刚体的平面运动
- 刚体的姿态及其变化
- 基点的位置、速度与加速度
- 刚体上给定点的位置、速度与加速度
- 相对刚体运动的任意点的位置、速度与加速度



理论力学CAI

版权所有, 2000 (c) 上海交通大学工程力学系

理论力学 CAI

刚体平面运动学

- 前言
- 刚体的连体基 刚体位形的描述
- 刚体的平面运动
- 刚体的姿态及其变化
- 基点的位置 速度与加速度
- 基点的位置、速度与加速度
- 刚体上给定点的位置、速度与加速度
- 相对刚体运动的任意点的位置、速度与加速度



理论力学CAI

版权所有, 2000 (c) 上海交通大学工程力学系

理论力学 CAI

刚体平面运动学

- 前言
- 刚体的连体基 刚体位形的描述
- 刚体的平面运动
- 刚体的姿态及其变化
- 基点的位置、速度与加速度
- 刚体上给定点的位置、速度与加速度
- 相对刚体运动的任意点的位置、速度与加速度



理论力学CAI

版权所有, 2000 (c) 上海交通大学工程力学系

刚体平面运动学

刚体上给定点的位置、速度与加速度

- 前言
- 给定点的位置
- 给定点的速度
- 刚体的瞬时速度中心
- 给定点的加速度



2018年10月18日

理论力学CAI 刚体平面运动学

4

刚体上给定点的位置、速度与加速度

- 前言
- 给定点的位置
- 给定点的速度
- 刚体的瞬时速度中心
- 给定点的加速度

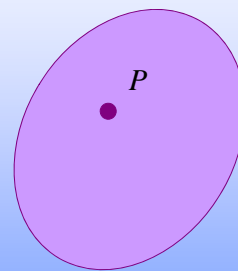


2018年10月18日
理论力学CAI 刚体平面运动学

5

前言

- 刚体的给定点 P
 - 与刚体固接的点
- 研究刚体上给定点的运动与刚体运动的关系



2018年10月18日
理论力学CAI 刚体平面运动学

6

刚体上给定点的位置、速度与加速度

- 前言
- 给定点的位置
- 给定点的速度
- 刚体的瞬时速度中心
- 给定点的加速度



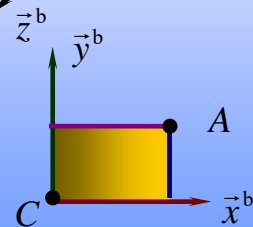
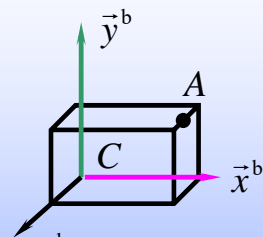
2018年10月18日
理论力学CAI 刚体平面运动学

7

[例] 图示一正方体与连体基的关系。已知各时刻连体基的位形坐标为

$t(s)$	$x_C(m)$	$y_C(m)$	$\varphi(deg)$
0.0	0	0	0
1.0	1	1	-45
2.0	2	1	-90

求：每一时刻正方体上点A在参考基上的位置



平面刚体模型

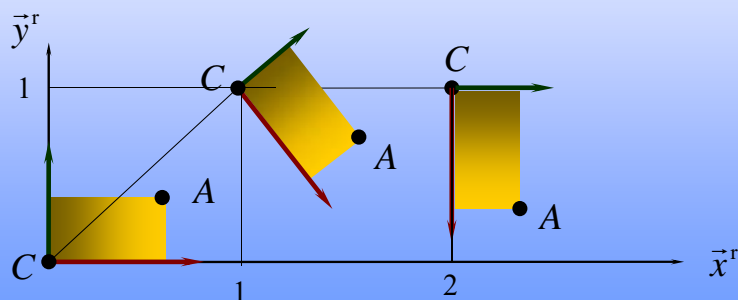
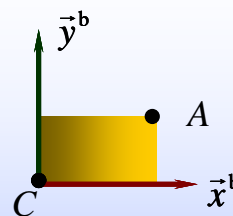


2018年10月18日
理论力学CAI 刚体平面运动学

8

[解]几何法

$t(s)$	$x_C(m)$	$y_C(m)$	$\varphi(deg)$
0.0	0	0	0
1.0	1	1	-45
2.0	2	1	-90

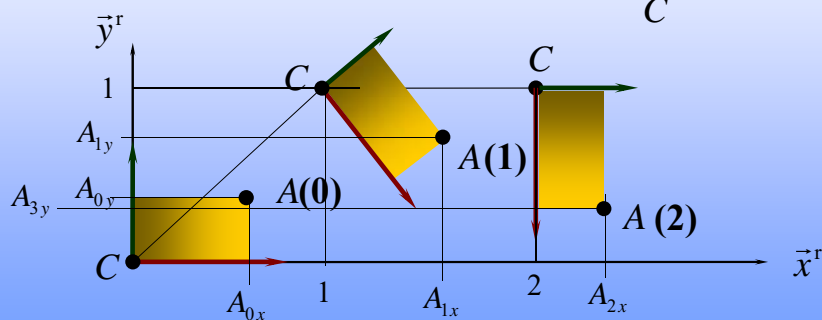
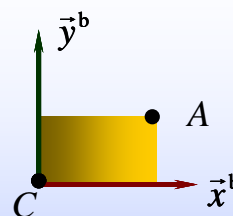


2018年10月18日
理论力学CAI 刚体平面运动学

刚体位形一定，点的位置确定

9

$t(s)$	$x_C(m)$	$y_C(m)$	$\varphi(deg)$
0.0	0	0	0
1.0	1	1	-45
2.0	2	1	-90



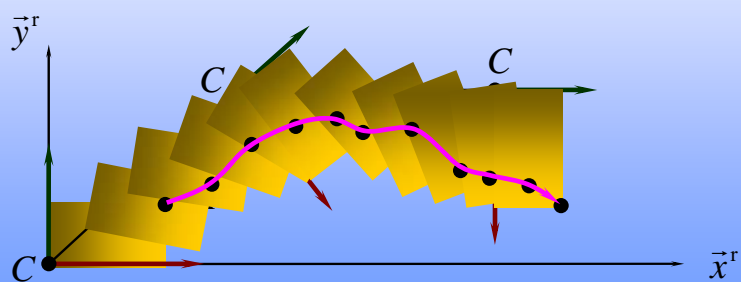
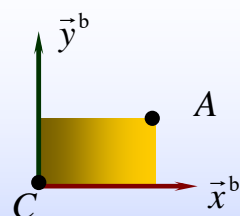
2018年10月18日
理论力学CAI 刚体平面运动学

已知刚体位形求点的位置 解析关系?

10

刚体的连体基 刚体位形的描述/例

$t(s)$	$x_C(m)$	$y_C(m)$	$\varphi(deg)$
0.0	0	0	0
1.0	1	1	-45
2.0	2	1	-90



刚体的运动过程 → 点的运动过程



2018年10月18日

理论力学CAI 刚体平面运动学

11

刚体上给定点的位置、速度与加速度/位置

给定点的位置

- 刚体的位形 $\vec{r}_C(t)$ $A(t)$

位形坐标阵 $\underline{q} = (x_C \ y_C \ \varphi)^T$

- 给定点 P 在刚体上的位置

$\vec{\rho}_P \ \vec{e}^b: \ \rho'_P = (x'_P \ y'_P)^T$ 已知

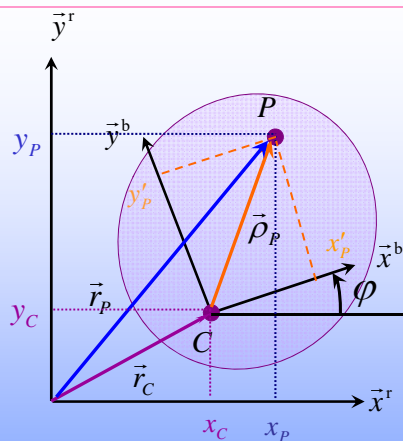
- 给定点 P 在参考基的位置 \vec{r}_P

坐标 $\underline{r}_P = (x_P \ y_P)^T$

轨迹 $\underline{\vec{r}}_P(t)$

- 研究给定点 P 在参考基的位置与刚体位形间的关系

$$\underline{\vec{r}}_P(t) \sim \underline{q}$$



2018年10月18日

理论力学CAI 刚体平面运动学

12

刚体上给定点的位置、速度与加速度/任意给定点

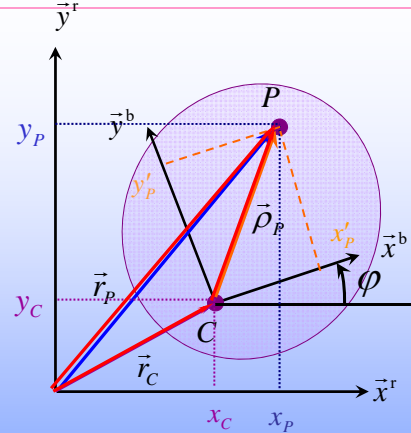
- 给定点 P 的位置矢量的关系

$$\vec{r}_P = \vec{r}_C + \vec{\rho}_P$$

\vec{e}^r :

$$\vec{r}_P^r = \vec{r}_C^r + \vec{\rho}_P^r = \vec{r}_C^r + A^{rb} \vec{\rho}_P^b$$

$$\vec{r}_P = \vec{r}_C + \vec{\rho}_P = \vec{r}_C + A \vec{\rho}_P'$$



2018年10月18日

理论力学CAI 刚体平面运动学

18

刚体上给定点的位置、速度与加速度/任意给定点/解析分析方法

- 给定点 P 在参考基与连体基的上位置的关系式

$$\vec{r}_P = \vec{r}_C + \vec{\rho}_P = \vec{r}_C + A \vec{\rho}_P'$$

$$A = \begin{pmatrix} \cos \varphi & -\sin \varphi \\ \sin \varphi & \cos \varphi \end{pmatrix}$$

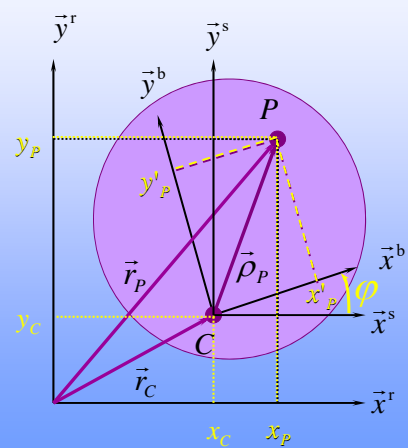
$$\begin{pmatrix} x_P \\ y_P \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_C \\ y_C \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \cos \varphi & -\sin \varphi \\ \sin \varphi & \cos \varphi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x'_P \\ y'_P \end{pmatrix}$$

点 P
在参
考基
上的
坐标

基点
在参
考基
上的
坐标

连体基
的方向
余弦阵

点 P
在连
体基
上的
坐标



$$\vec{r}_P(t) \sim q$$



2018年10月18日

理论力学CAI 刚体平面运动学

19

刚体上给定点的位置、速度与加速度/位置

• 小结

给定点 P 矢量间的关系

$$\vec{r}_P = \vec{r}_C + \vec{\rho}_P$$

在参考基上的坐标阵

$$\mathbf{r}_P = \mathbf{r}_C + \mathbf{A}\mathbf{\rho}'_P$$

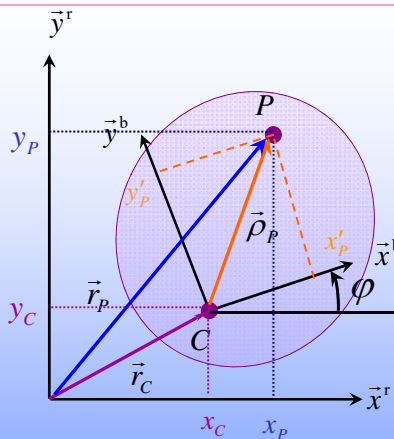
$$\begin{pmatrix} x_P \\ y_P \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_C \\ y_C \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \cos \varphi & -\sin \varphi \\ \sin \varphi & \cos \varphi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x'_P \\ y'_P \end{pmatrix}$$

展开式

$$x_P = x_C + x'_P \cos \varphi - y'_P \sin \varphi$$

$$y_P = y_C + x'_P \sin \varphi + y'_P \cos \varphi$$

刚体上任意点在参考基上的位置仅与刚体的位形有关



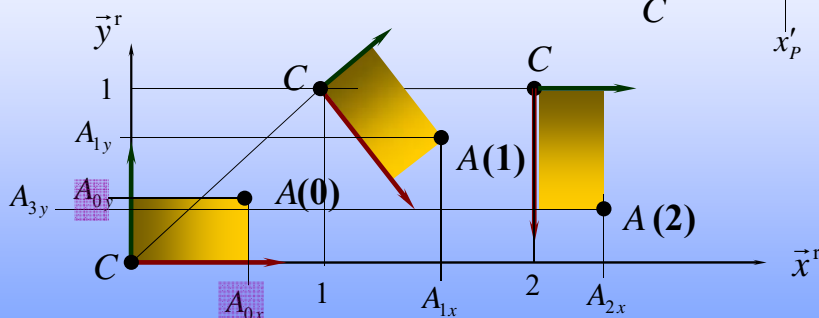
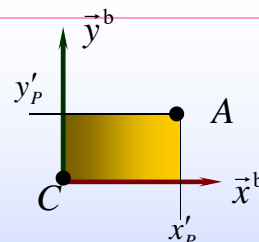
2018年10月18日

理论力学CAI 刚体平面运动学

20

刚体的连体基 刚体位形的描述/例

$t(s)$	$x_C(m)$	$y_C(m)$	$\varphi(deg)$
0.0	0	0	0
1.0	1	1	-45
2.0	2	1	-90



$$x_P = x_C + x'_P \cos \varphi - y'_P \sin \varphi$$

$$y_P = y_C + x'_P \sin \varphi + y'_P \cos \varphi$$



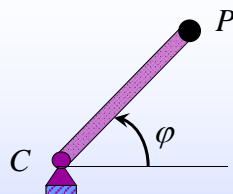
2018年10月18日

理论力学CAI 刚体平面运动学

21

[例]

长为 l 曲柄作定轴转动, $\varphi = \pi t$



求时间由0到1秒曲柄端点 P 的轨迹



2018年10月18日

理论力学CAI 刚体平面运动学

22

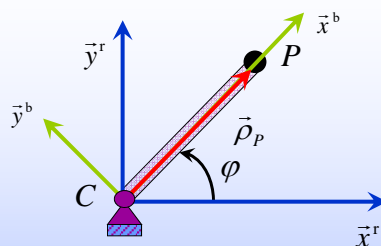
[解] 建立参考基与连体基

刚体的位形

$$\mathbf{q} = (x_C \quad y_C \quad \varphi)^T = (0 \quad 0 \quad \pi)^T$$

点 P 在刚体上的位置 $\rho'_P = (l \quad 0)^T$

点 P 在参考基上的位置



$$\begin{pmatrix} x_P \\ y_P \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_C \\ y_C \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \cos \varphi & -\sin \varphi \\ \sin \varphi & \cos \varphi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x'_P \\ y'_P \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \cos \pi & -\sin \pi \\ \sin \pi & \cos \pi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} l \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} l \cos \pi \\ l \sin \pi \end{pmatrix}$$

$$x_P = l \cos \pi; \quad y_P = l \sin \pi$$

$$\mathbf{r}_P = \mathbf{r}_C + \mathbf{A} \rho'_P$$



2018年10月18日

理论力学CAI 刚体平面运动学

23

刚体的位形

$$\mathbf{q} = (x_C \quad y_C \quad \phi)^T = (0 \quad 0 \quad \pi)^T$$

点 P 在刚体上的位置 $\rho'_P = (l \quad 0)^T$


点 P 在参考基上的位置

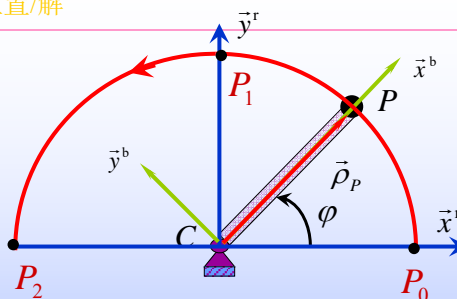
$$x_P = l \cos \pi; \quad y_P = l \sin \pi$$

点 P 的轨迹方程

$$x_P^2 + y_P^2 = l^2$$

点 P 的轨迹方向

$t = 0$	$x_P = l$	$y_P = 0$	P_0	 方向
$t = 0.5$	$x_P = 0$	$y_P = l$	P_1	
$t = 2$	$x_P = -l$	$y_P = 0$	P_2	



2018年10月18日

理论力学CAI 刚体平面运动学

24

刚体上给定点的位置、速度与加速度

- 前言
- 给定点的位置
- 给定点的速度
- 刚体的瞬时速度中心
- 给定点的加速度



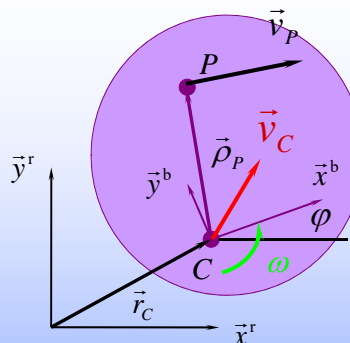
2018年10月18日

理论力学CAI 刚体平面运动学

25

给定点的速度

- 刚体的位形 $\vec{r}_C(t) \quad A(t)$
位形坐标阵 $\mathbf{q} = (x_C \quad y_C \quad \varphi)^T$
- 刚体的位形速度 $\vec{v}_C(t) \quad \vec{\omega}(t)$
位形速度阵 $\dot{\mathbf{q}} = (v_{Cx} \quad v_{Cy} \quad \omega)^T$
- 给定点 P 在刚体上的位置 $\vec{\rho}_P$
连体坐标阵 $\rho'_P = (x'_P \quad y'_P)^T$
- 给定点 P 的速度 $\vec{v}_P(t)$
- 研究给定点 P 的速度与刚体运动间的关系



2018年10月18日
理论力学CAI 刚体平面运动学

$$\vec{v}_P(t) \sim \dot{\mathbf{q}} \quad \mathbf{q}$$

26

- 给定点 P 的速度

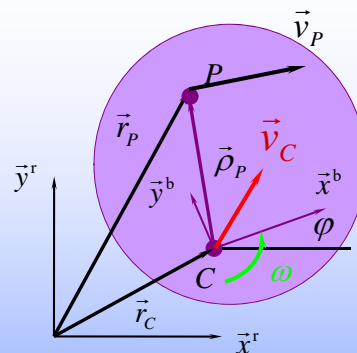
$$\vec{r}_P = \vec{r}_C + \vec{\rho}_P$$

在参考基上对时间求导

$$\dot{\vec{r}}_P = \dot{\vec{r}}_C + \dot{\vec{\rho}}_P$$

$$\vec{v}_P = \vec{v}_C + \dot{\vec{\rho}}_P = \vec{v}_C + \vec{\omega} \times \vec{\rho}_P$$

$\vec{\rho}_P$ 连体矢量



点 P 的绝对速度

$$\vec{v}_P = \vec{v}_C + \vec{\omega} \times \vec{\rho}_P$$



2018年10月18日
理论力学CAI 刚体平面运动学

27

刚体上给定点的位置、速度与加速度/速度

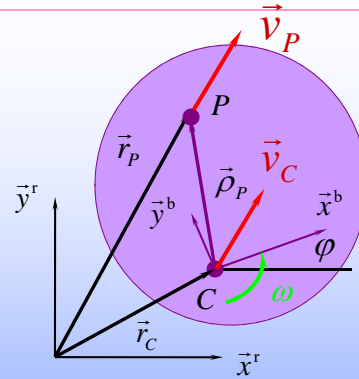
$$\vec{v}_P = \vec{v}_C + \vec{\omega} \times \vec{\rho}_P$$

• 刚体作平动

$$\vec{\omega} = \vec{0}$$

点 P 的速度

$$\vec{v}_P = \vec{v}_C$$



刚体作平动时，任何瞬时刚体上任意点的绝对速度与基点的绝对速度一致。



2018年10月18日

理论力学CAI 刚体平面运动学

28

刚体上给定点的位置、速度与加速度/速度

$$\vec{v}_P = \vec{v}_C + \vec{\omega} \times \vec{\rho}_P$$

• 刚体定轴转动

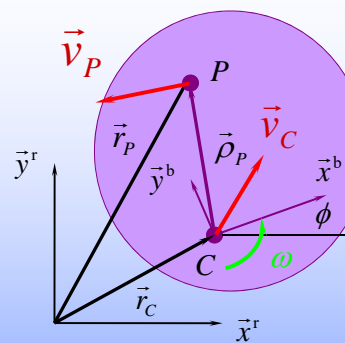
$$\vec{v}_C = \vec{0}$$

点 P 的速度

$$\vec{v}_P = \vec{\omega} \times \vec{\rho}_P = \omega \vec{z} \times \vec{\rho}_P$$

点 P 的速度大小 $v_P = \omega \rho_P$

点 P 的速度方向 $\vec{v}_P \perp \vec{\rho}_P \parallel \hat{\rho}_P$



刚体绕基点作定轴转动时，刚体上任意点的绝对速度方向垂直于该点的矢径，大小与该点到基点的距离成正比。



2018年10月18日

理论力学CAI 刚体平面运动学

29

刚体上给定点的位置、速度与加速度/速度

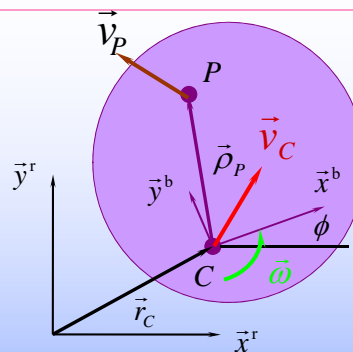
- 平面一般运动刚体上给定点 P 的速度

$$\vec{v}_P = \vec{v}_C + \vec{\omega} \times \vec{\rho}_P$$

根据

刚体的平面一般运动分解为刚体的平动与刚体定轴转动

对点 P 的速度公式进行变换



2018年10月18日

理论力学CAI 刚体平面运动学

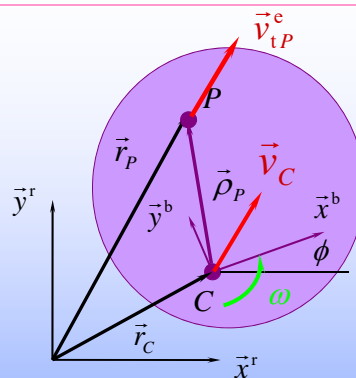
30

刚体上给定点的位置、速度与加速度/速度

- 平面一般运动刚体上给定点 P 的速度

$$\vec{v}_P = \vec{v}_C + \vec{\omega} \times \vec{\rho}_P$$

定义点的**平移牵连速度** $\vec{v}_{tP}^e = \vec{v}_C = \dot{\vec{r}}_C$
方向平行于 \vec{v}_C



2018年10月18日

理论力学CAI 刚体平面运动学

31

刚体上给定点的位置、速度与加速度/速度

- 平面一般运动刚体上给定点 P 的速度

$$\vec{v}_P = \vec{v}_C + \vec{\omega} \times \vec{\rho}_P$$

定义点的**平移牵连速度**

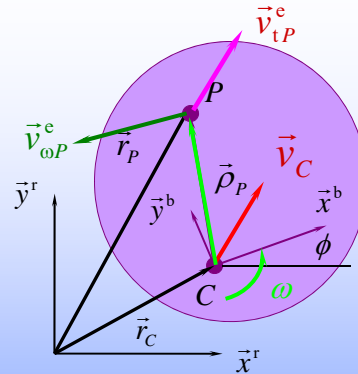
$$\vec{v}_{tP}^e = \vec{v}_C$$

方向平行于 \vec{v}_C

定义点的**转动牵连速度**

$$\vec{v}_{\omega P}^e = \vec{\omega} \times \vec{\rho}_P$$

方向 $\vec{v}_P \perp \vec{\rho}_P \parallel \hat{\rho}_P$ 大小 $\omega \rho_P$



2018年10月18日

理论力学CAI 刚体平面运动学

32

刚体上给定点的位置、速度与加速度/速度

- 平面一般运动刚体上给定点 P 的速度

$$\vec{v}_P = \vec{v}_C + \vec{\omega} \times \vec{\rho}_P$$

定义点的**平移牵连速度**

$$\vec{v}_{tP}^e = \vec{v}_C$$

方向平行于 \vec{v}_C

定义点的**转动牵连速度**

$$\vec{v}_{\omega P}^e = \vec{\omega} \times \vec{\rho}_P$$

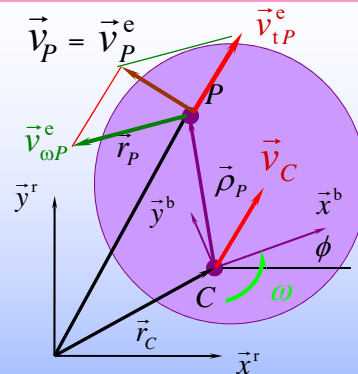
方向 $\vec{v}_P \perp \vec{\rho}_P \parallel \hat{\rho}_P$ 大小 $\omega \rho_P$

定义点的**牵连速度**

$$\vec{v}_P^e = \vec{v}_{tP}^e + \vec{v}_{\omega P}^e$$

$$\vec{v}_P = \vec{v}_P^e$$

刚体上任意给定点的绝对速度等于因刚体一般运动导致该点的牵连速度



2018年10月18日

理论力学CAI 刚体平面运动学

33

刚体上给定点的位置、速度与加速度/速度

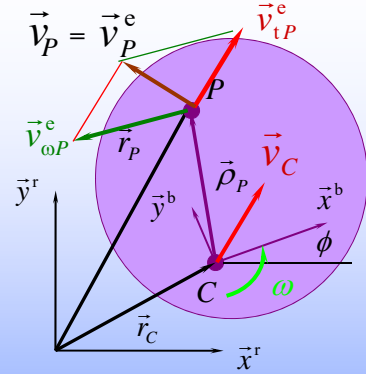
- 平面一般运动刚体上给定点 P 的速度

$$\vec{v}_P = \vec{v}_C + \vec{\omega} \times \vec{\rho}_P$$

$$\vec{v}_{tP}^e = \vec{v}_C$$

$$\vec{v}_{\omega P}^e = \vec{\omega} \times \vec{\rho}_P$$

$$\vec{v}_P = \vec{v}_{tP}^e + \vec{v}_{\omega P}^e$$



3个矢量的6个信息量间的关系。通过矢量几何可解决2个未知的信息量。



2018年10月18日

理论力学CAI 刚体平面运动学

34

刚体上给定点的位置、速度与加速度/速度/例

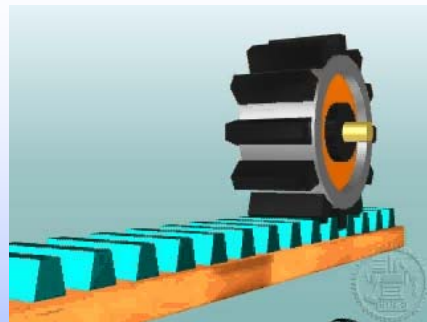
[例]

一半径为 r 的刚性圆盘在平面上作无滑动的滚动

这是一齿轮-齿条运动副的抽象

圆盘的中心 C 的速度为 v

试求圆盘上与平面的接触点 P 的速度



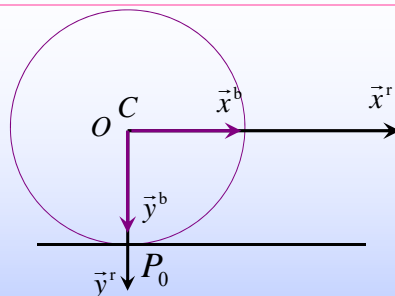
2018年10月18日

理论力学CAI 刚体平面运动学

35

刚体上给定点的位置、速度与加速度/速度/例

[解] 参考基 $O-\vec{e}^r$ 连体基 $C-\vec{e}^b$



2018年10月18日

理论力学CAI 刚体平面运动学

36

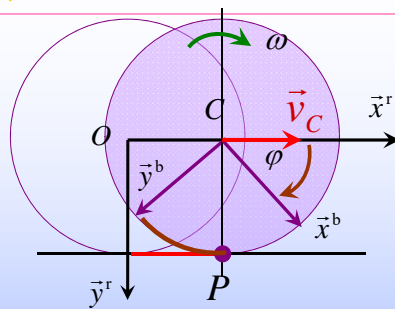
刚体上给定点的位置、速度与加速度/速度/例

[解] 参考基 $O-\vec{e}^r$ 连体基 $C-\vec{e}^b$

刚体的速度关系

无滑动滚动 $x_C = r\varphi$

$$\dot{x}_C = r\dot{\varphi} \quad \mathbf{v}_C = r\boldsymbol{\omega}$$



2018年10月18日

理论力学CAI 刚体平面运动学

37

刚体上给定点的位置、速度与加速度/速度/例

[解] 参考基 $O-\vec{e}^r$ 连体基 $C-\vec{e}^b$

刚体的速度关系

无滑动滚动 $x_C = r\varphi$

$$\dot{x}_C = r\dot{\varphi} \quad \vec{v}_C = r\omega$$

刚体上点P的速度

点的平移牵连速度 \vec{v}_{tP}^e

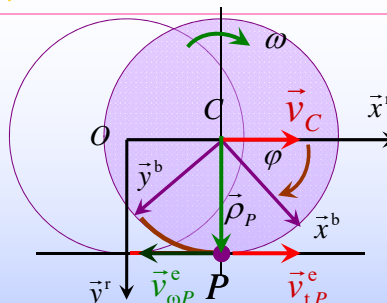
$$v_{tP}^e = v_C = \underline{\omega r}$$

点的转动牵连速度 $\vec{v}_{\omega P}^e$

$$v_{\omega P}^e = \omega \rho_P = \underline{\omega r}$$

点的牵连速度

$$\vec{v}_P^e = \vec{v}_{tP}^e + \vec{v}_{\omega P}^e = \vec{0}$$



2018年10月18日

理论力学CAI 刚体平面运动学

38

刚体上给定点的位置、速度与加速度/速度/例

[解] 参考基 $O-\vec{e}^r$ 连体基 $C-\vec{e}^b$

刚体的速度关系

无滑动滚动 $x_C = r\varphi$

$$\dot{x}_C = r\dot{\varphi} \quad \vec{v}_C = r\omega$$

刚体上点P的速度

点的平移牵连速度 \vec{v}_{tP}^e

$$v_{tP}^e = v_C = \omega r$$

点的转动牵连速度 $\vec{v}_{\omega P}^e$

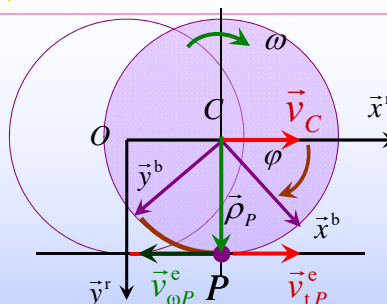
$$v_{\omega P}^e = \omega \rho_P = \omega r$$

点的牵连速度

$$\vec{v}_P^e = \vec{v}_{tP}^e + \vec{v}_{\omega P}^e = \vec{0}$$

点的速度

$$\vec{v}_P = \vec{v}_P^e = \vec{0}$$



2018年10月18日

理论力学CAI 刚体平面运动学

39

[例]

刚性杆 AB 长为 l ，其一端 A 着地，一端 B 靠墙，可在铅垂面运动

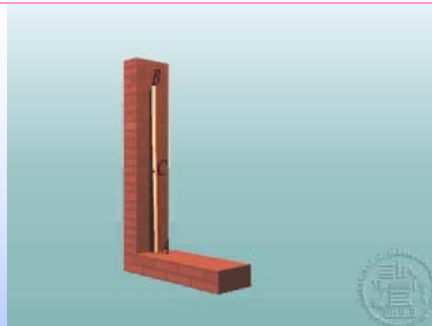
现端点 A 以速度为 v_A 作匀速向右运动

图示瞬时杆与水平面的夹角 $\angle OAB$ 为 60°

试求该瞬时

杆 AB 的转动角速度

端点 B 与中点 C 的速度



2018年10月18日

理论力学CAI 刚体平面运动学

40

[解] 参考基 $O-\vec{e}^r$ 连体基 $A-\vec{e}^b$

以点 B 为对象

点 B 的绝对速度 \vec{v}_B 设定正向

点 B 的牵连速度

$$v_{tB}^e = v_A$$

方向已知 $// \vec{v}_A$

$$v_{\omega B}^e = \omega \rho_B = \omega l$$

设定正向



$$\vec{v}_B = \vec{v}_B^e = \vec{v}_{tB}^e + \vec{v}_{\omega B}^e$$

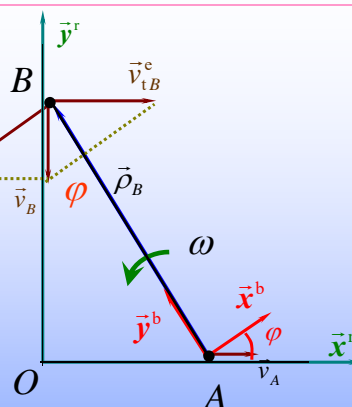
在参考基上的坐标式(或 x - y 轴投影式)

$$\vec{x}^r: 0 = v_{tB}^e - v_{\omega B}^e \cos \varphi$$

$$v_A = \omega \rho_B \cos \varphi \quad \omega = v_A / l \sin \varphi = 2v_A / l\sqrt{3} \quad \varphi = \frac{\pi}{6}$$

$$\vec{y}^r: -v_B = -v_{\omega B}^e \sin \varphi$$

$$v_B = v_A / \sqrt{3}$$



2018年10月18日

理论力学CAI 刚体平面运动学

42

杆AB中点C的速度

点C的牵连速度

$$v_{tC}^e = v_A$$

方向已知 $// \vec{v}_A$

$$v_{\omega C}^e = \omega \rho_C = \omega l / 2 = v_A / \sqrt{3} \quad \text{方向已知}$$

$$\vec{v}_C = \vec{v}_C^e = \vec{v}_{tC}^e + \vec{v}_{\omega C}^e$$

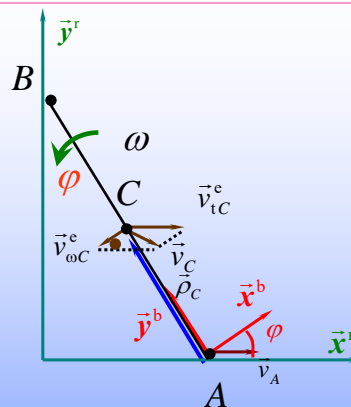
模

$$v_C = \sqrt{v_A^2 + v_{\omega C}^2 - 2v_A v_{\omega C} \cos \varphi} = v_A / \sqrt{3}$$

$$\text{方向} \because \vec{v}_{tC}^e // \vec{v}_A, \quad v_{\omega C}^e = v_C$$

$$\vec{v}_C \text{ 与水平线的夹角为 } \pi/6$$

$$\omega = 2v_A / l\sqrt{3}$$



如果先不分析给定点B的速度，直接求中点C的绝对速度是否可能



2018年10月18日

理论力学CAI 刚体平面运动学

43

刚体上给定点的位置、速度与加速度

- 前言
- 给定点的位置
- 给定点的速度
- 刚体的瞬时速度中心
- 给定点的加速度



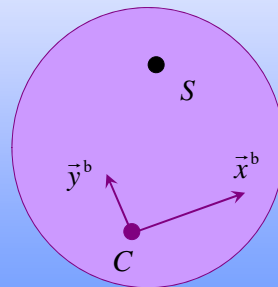
2018年10月18日

理论力学CAI 刚体平面运动学

49

刚体的瞬时速度中心

- **某瞬时**在刚体或在其延伸部分存在一个绝对速度为零的特殊点 S
- 点 S 为刚体在**该瞬时**的**瞬时速度中心**，简称为**瞬心**

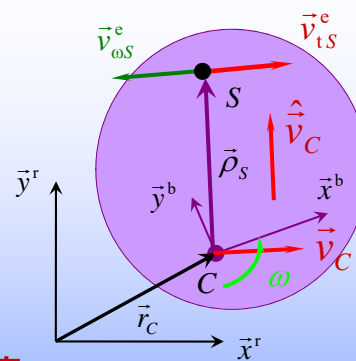


- **瞬心的存在性**

对于刚体上任一点的速度关系

$$\vec{v}_S = \underbrace{\vec{v}_C}_{\vec{v}_{tS}^e} + \underbrace{\vec{\omega} \times \vec{\rho}_S}_{\vec{v}_{\omega S}^e}$$

当 $\vec{v}_{tS}^e = -\vec{v}_{\omega S}^e$ $\vec{v}_S = \vec{0}$



基点和瞬心的连线与基点的速度矢量垂直

瞬心的位置 $\vec{\rho}_S \parallel \hat{\vec{v}}_C = \vec{z}^r \times \vec{v}_C$ $\rho_S = \frac{v_C}{\omega}$



- 某瞬时建立以瞬心为基点的连体基

$$\vec{v}_P = \vec{v}_S + \vec{\omega} \times \vec{\rho}_P = \vec{\omega} \times \vec{\rho}_P$$

速度方向垂直于该点与瞬心的连线

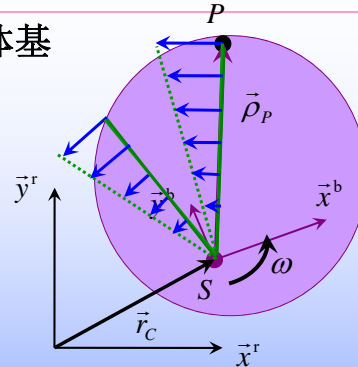
大小与到瞬心的距离成正比

该瞬时刚体上的速度分布与刚体绕瞬心作定轴转动的速度分布一致

称过瞬心垂直运动平面的转轴为刚体的**瞬时转动轴**

- 意义

— 研究刚体瞬时速度分布可先寻找该瞬时的瞬心着手



2018年10月18日

理论力学CAI 刚体平面运动学

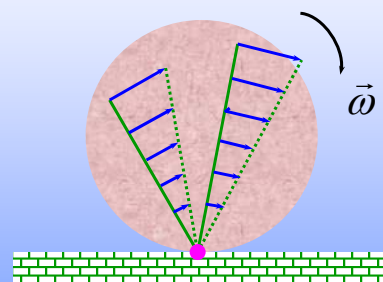
52

- 瞬心位置的确定（根据物理性质）

根据物理性质作无滑动滚动圆盘在圆盘与地面的接触点的速度为零

该点为作无滑动滚动圆盘的瞬心

圆盘的瞬时速度分布



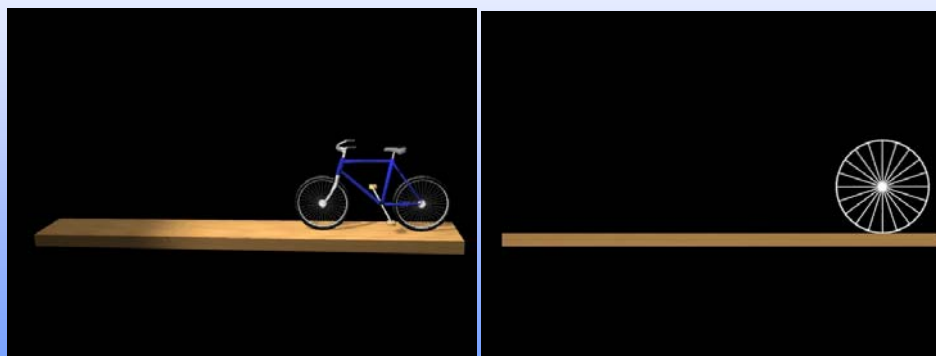
2018年10月18日

理论力学CAI 刚体平面运动学

53

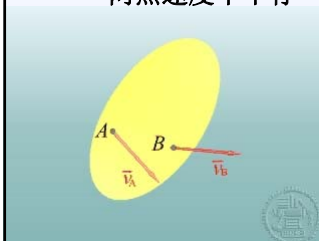
• 思考题:

在观察行驶中的自行车车轮的时候，为什么上面的辐条模糊，下面的辐条清晰？



• 瞬心位置的确定（几何法）

两点速度不平行

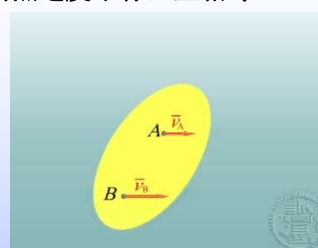


$$v_A = \overline{SA} \omega$$

$$v_B = \overline{SB} \omega$$

不需要给出速度大小

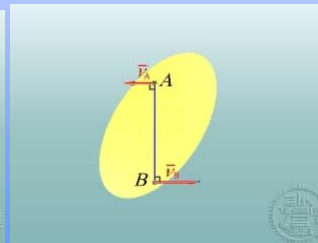
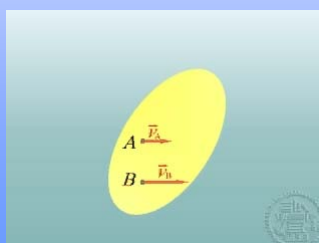
两点速度平行，且相等



刚体瞬时平动

两点速度平行，但不等

需要给出速度大小



刚体上给定点的位置、速度与加速度/瞬心

- 瞬心概念的应用

可以方便处理刚体的速度分析的问题

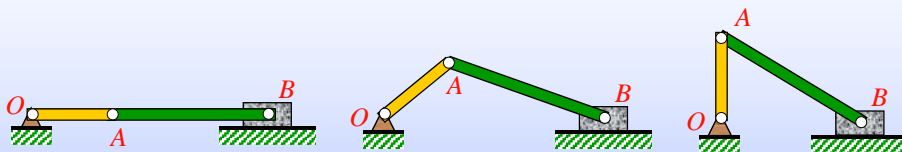


2018年10月18日
理论力学CAI 刚体平面运动学

56

刚体上给定点的位置、速度与加速度/瞬心/例

[例]如图所示一曲柄滑块机构的3个瞬时



确定连杆 AB 的瞬心，并分别分析 AB 的运动。

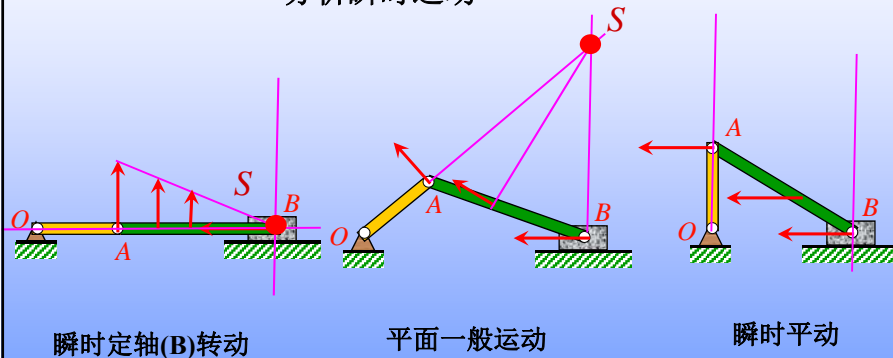


2018年10月18日
理论力学CAI 刚体平面运动学

57

刚体上给定点的位置、速度与加速度/瞬心/例

【解】 方法 根据约束确定点 A 与 B 的绝对速度
利用几何法确定瞬心
分析瞬时运动



2018年10月18日
理论力学CAI 刚体平面运动学



58

刚体上给定点的位置、速度与加速度/速度/例

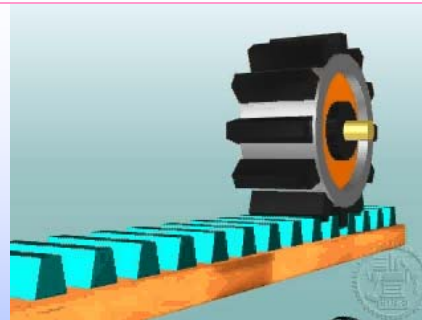
【例】

一半径为 r 的刚性圆盘在平面上作无滑动的滚动

这是一齿轮-齿条运动副的抽象

圆盘的中心 C 的速度为 v

试求圆盘上与平面的接触点 P 的速度



2018年10月18日
理论力学CAI 刚体平面运动学

59

[例]

刚性杆 AB 长为 l ，其一端 A 着地，一端 B 靠墙，可在铅垂面运动

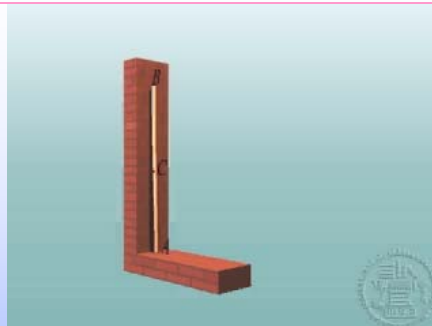
现端点 A 以速度为 v_A 作匀速向右运动

图示瞬时杆与水平面的夹角 $\angle OAB$ 为 60°

试求该瞬时

杆 AB 的转动角速度

端点 B 与中点 C 的绝对速度



2018年10月18日
理论力学CAI 刚体平面运动学

60

[解] 根据约束定义点 A 与 B 的绝对速度的方向，再确定瞬心 S 的位置

$$x_s = l \sin \varphi = \frac{l}{2} \quad y_s = l \cos \varphi = \frac{\sqrt{3}}{2} l$$

根据绕瞬心转动的速度分布

$$v_A = \omega y_s$$

$$\text{杆角速度} \quad \omega = \frac{v_A}{y_s} = \frac{2v}{l\sqrt{3}}$$

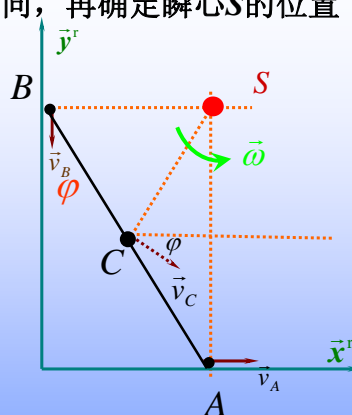
$$\text{点} B \text{的速度} \quad v_B = \omega x_s = \frac{v}{\sqrt{3}}$$

$$\text{点} C \text{的速度} \quad S_C = \overline{AC} = l/2$$

$$v_C = \omega S_C = \frac{v}{\sqrt{3}}$$

\vec{v}_C 与水平线的夹角为 $\pi/6$

$$\varphi = \frac{\pi}{6}$$



2018年10月18日
理论力学CAI 刚体平面运动学

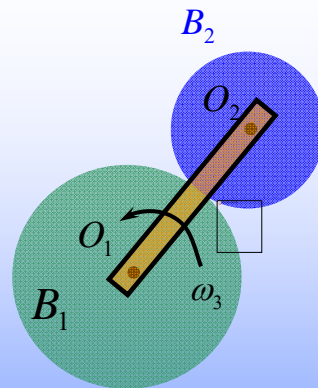
61

• [例]

图示一对外接齿轮，齿轮 B_1 与机座固结，齿轮 B_2 由连杆 B_3 带动在齿轮 B_1 上滚动

B_1 与齿轮 B_2 的节圆半径分别为 R_1 与 R_2

连杆 B_3 相对机座的角速度为 ω_3



求: 齿轮 B_2 相对于连杆 B_3 的角速度

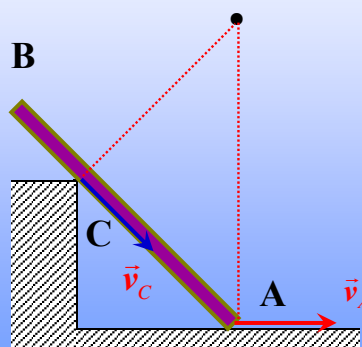


2018年10月18日
理论力学CAI 刚体平面运动学



62

思考：求AB杆的速度瞬心



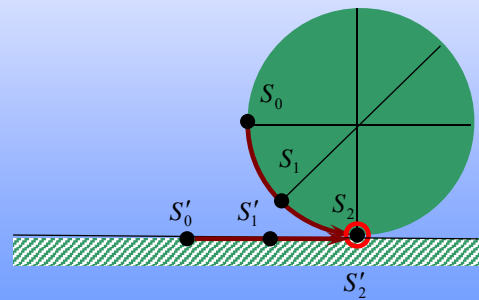
2018年10月18日
理论力学CAI 刚体平面运动学

71

瞬心定(动)轨迹

每一个瞬时瞬心 S 在刚体上的位置不断变化

每一个瞬时在参考基上与瞬心重合的点 S' 在参考基上的位置也不断变化



2018年10月18日

理论力学CAI 刚体平面运动学



72

不断变化的各瞬时瞬心 S 在刚体上构成一轨迹称为瞬心动轨迹
在连体基上看到的！

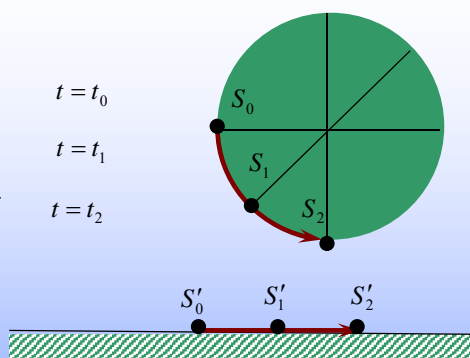
不断变化各瞬时点 S' 在参考基上构成的一轨迹称为瞬心定轨迹
在参考基上看到的！

点 S' 称为瞬心 S 的定轨迹点

$t = t_0$

$t = t_1$

$t = t_2$



某瞬时刚体上瞬心 S 的速度为零

瞬心定轨迹点的速度（在参考基上）一般不为零

瞬心动轨迹点的速度（在连体基上）一般不为零



2018年10月18日

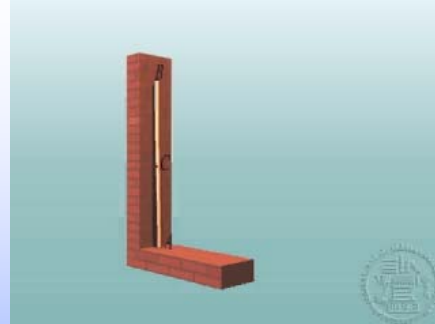
理论力学CAI 刚体平面运动学

73

[例]

刚性杆 AB 长为 l ，其一端 A 着地，一端 B 靠墙，可在铅垂面运动

现端点 A 以速度为 v_A 作匀速向右运动



试求瞬心定轨迹与动轨迹



2018年10月18日

理论力学CAI 刚体平面运动学

74

[解] 讨论瞬心的定轨迹或动轨迹须在任意时刻的位形下进行

某时刻 t 刚体的瞬心 S , 定轨迹点 S'

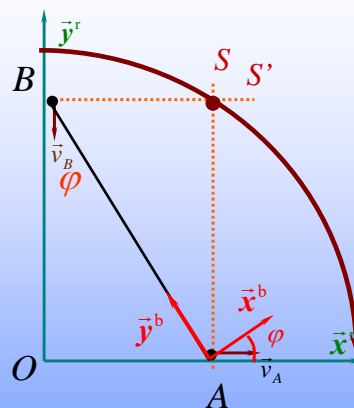
瞬心定轨迹点 S' 在 \vec{e}^r 的坐标

$$x_{s'} = l \sin \varphi \quad y_{s'} = l \cos \varphi$$

$$x_{s'}^2 + y_{s'}^2 = l^2$$

瞬心定轨迹

以点 O 为圆心，半径为 l 的1/4圆



2018年10月18日

理论力学CAI 刚体平面运动学

75

某时刻刚体的瞬心 S , 定轨迹点 S'

瞬心 S 在 \vec{e}^b 的坐标

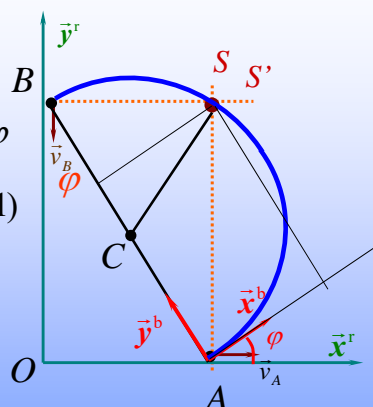
$$x'_s = \overline{AS} \sin \varphi = l \cos \varphi \sin \varphi = \frac{l}{2} \sin 2\varphi$$

$$y'_s = \overline{AS} \cos \varphi = l \cos^2 \varphi = \frac{l}{2} (\cos 2\varphi + 1)$$

动轨迹方程

$$\left(y'_s - \frac{l}{2}\right)^2 + x'^2_s = \frac{l^2}{4}$$

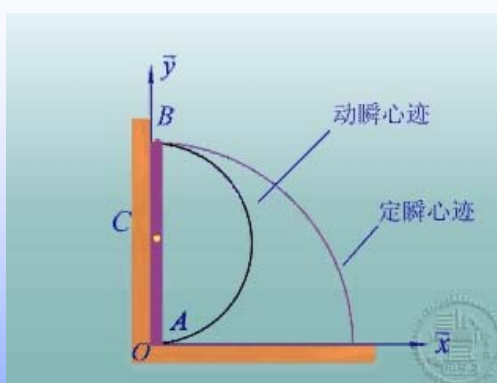
以点 C 为圆心, 半径为 $l/2$ 的半圆



2018年10月18日

理论力学CAI 刚体平面运动学

76



刚体的运动理解为瞬心动轨迹在瞬心定轨迹上作无滑动的滚动



2018年10月18日

理论力学CAI 刚体平面运动学

77

- 小结

- 利用瞬心的概念解决速度分析问题有时会很方便
- 要求能熟练找到刚体的瞬心
- 熟悉瞬心动轨迹与定轨迹的概念



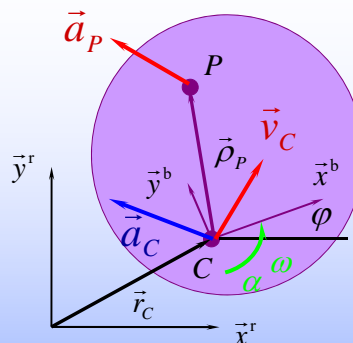
刚体上给定点的位置、速度与加速度

- 前言
- 给定点的位置
- 给定点的速度
- 刚体的瞬时速度中心
- 给定点的加速度



给定点的加速度

- 刚体的位形 $\vec{r}_C(t) \quad A(t)$
位形坐标阵 $q = (x_C \quad y_C \quad \varphi)^T$
- 刚体的位形速度 $\vec{v}_C(t) \quad \vec{\omega}(t)$
位形速度阵 $\dot{q} = (v_{Cx} \quad v_{Cy} \quad \omega)^T$
- 刚体的位形加速度 $\vec{a}_C(t) \quad \vec{\alpha}(t)$
位形加速度阵 $\ddot{q} = (a_{Cx} \quad a_{Cy} \quad \alpha)^T$



- 给定点 P 在刚体上的位置 $\vec{\rho}_P$ 连体坐标阵 $\rho'_P = (x'_P \quad y'_P)^T$
- 给定点 P 的加速度 $\vec{a}_P(t)$
- 研究给定点 P 的加速度与刚体运动间的关系



2018年10月18日
理论力学CAI 刚体平面运动学

$$\vec{a}_P(t) \sim \ddot{q} \quad \dot{q} \quad q$$

80

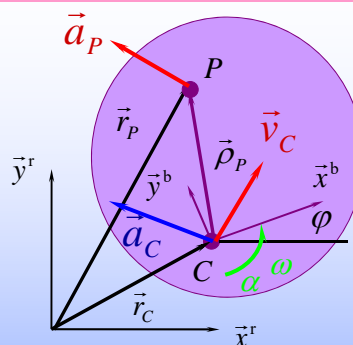
- 给定点 P 的加速度

$$\vec{r}_P = \vec{r}_C + \vec{\rho}_P$$

$$\dot{\vec{r}}_P = \dot{\vec{r}}_C + \dot{\vec{\rho}}_P = \vec{v}_C + \vec{\omega} \times \vec{\rho}_P$$

$$\ddot{\vec{r}}_P = \ddot{\vec{r}}_C + \ddot{\vec{\rho}}_P$$

$$\vec{a}_P \quad \vec{a}_C \quad \ddot{\vec{\rho}}_P = \vec{\alpha} \times \vec{\rho}_P + \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{\rho}_P)$$



点 P 的绝对加速度

$\vec{\rho}_P$ 连体矢量

$$\vec{a}_P = \vec{a}_C + \vec{\alpha} \times \vec{\rho}_P + \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{\rho}_P)$$



2018年10月18日
理论力学CAI 刚体平面运动学

81

刚体上给定点的位置、速度与加速度/加速度

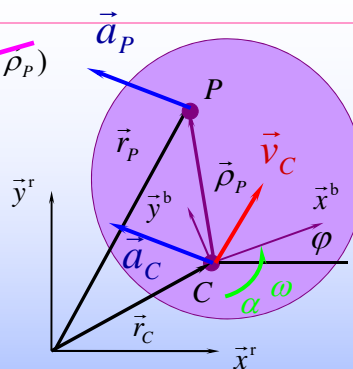
$$\vec{a}_P = \vec{a}_C + \vec{\alpha} \times \vec{\rho}_P + \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{\rho}_P)$$

- 刚体作平动

$$\vec{\omega} = \vec{0} \quad \vec{\alpha} = \vec{0}$$

点P的加速度

$$\vec{a}_P = \vec{a}_C$$



刚体作平动时，任何瞬时刚体上任意点的绝对加速度与基点的绝对加速度一致。



2018年10月18日
理论力学CAI 刚体平面运动学

82

刚体上给定点的位置、速度与加速度/加速度

$$\vec{a}_P = \vec{a}_C + \vec{\alpha} \times \vec{\rho}_P + \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{\rho}_P)$$

- 刚体定轴转动 $\vec{a}_C = \vec{0}$

定义点的切向加速度 $\vec{a}_{\alpha P} = \vec{\alpha} \times \vec{\rho}_P$

方向 $\vec{a}_P \perp \vec{\rho}_P \parallel \hat{\rho}_P$ 大小 $a_{\alpha P} = \alpha \rho_P$

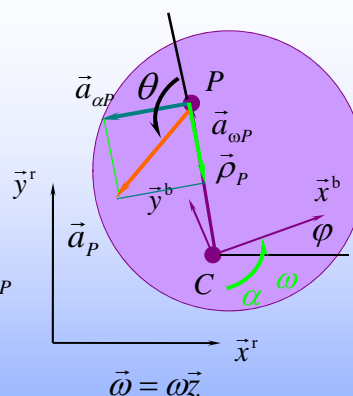
定义点的向心加速度

$$\vec{a}_{\omega P} = \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{\rho}_P) = \omega^2 \vec{z} \times (\vec{z} \times \vec{\rho}_P) = -\omega^2 \vec{\rho}_P$$

方向 $-\vec{\rho}_P$ 大小 $a_{\omega P} = \omega^2 \rho_P$

点P的加速度

$$\vec{a}_P = \vec{a}_{\alpha P} + \vec{a}_{\omega P}$$



刚体绕基点作定轴转动时，刚体上任意点的绝对加速度等于该点的切向加速度与向心加速度的矢量和

模 $a_P = \rho_P \sqrt{\alpha^2 + \omega^4}$ 方向 $\theta = \pi - \arctan(\alpha / \omega^2)$



2018年10月18日
理论力学CAI 刚体平面运动学

83

刚体上给定点的位置、速度与加速度/速度

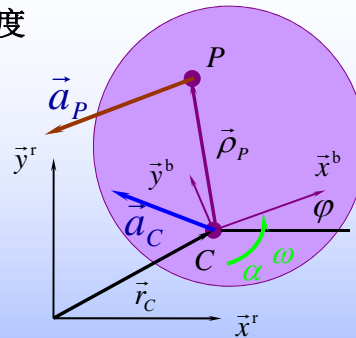
- 平面一般运动刚体上给定点 P 的加速度

$$\vec{a}_P = \vec{a}_C + \vec{\alpha} \times \vec{\rho}_P + \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{\rho}_P)$$

根据

刚体的平面一般运动分解为刚体的平动与刚体定轴转动

对点 P 的加速度公式进行变换



2018年10月18日

理论力学CAI 刚体平面运动学

84

刚体上给定点的位置、速度与加速度/加速度

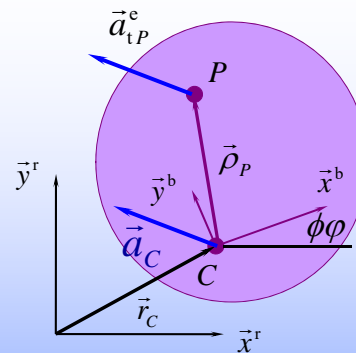
- 平面一般运动刚体上给定点 P 的加速度

$$\vec{a}_P = \vec{a}_C + \vec{\alpha} \times \vec{\rho}_P + \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{\rho}_P)$$

点的平移牵连加速度

$$\vec{a}_{tP}^e = \vec{a}_C$$

方向平行于 \vec{a}_C



2018年10月18日

理论力学CAI 刚体平面运动学

85

刚体上给定点的位置、速度与加速度/加速度

- 一般平面运动刚体上给定点 P 的加速度

$$\vec{a}_P = \vec{a}_C + \vec{\alpha} \times \vec{\rho}_P + \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{\rho}_P)$$

点的平移牵连加速度

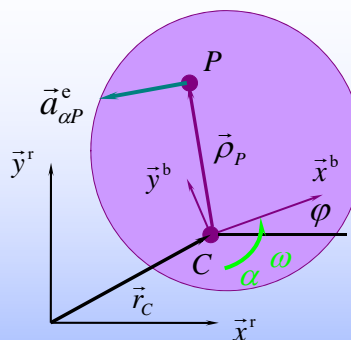
$$\vec{a}_{tP}^e = \vec{a}_C$$

方向平行于 \vec{a}_C

点的转动牵连切向加速度

$$\vec{a}_{\alpha P}^e = \vec{\alpha} \times \vec{\rho}_P \quad a_{\alpha P}^e = \alpha \rho_P$$

方向垂直于 $\vec{\rho}_P$



2018年10月18日

理论力学CAI 刚体平面运动学

86

刚体上给定点的位置、速度与加速度/加速度

- 一般平面运动刚体上给定点 P 的加速度

$$\vec{a}_P = \vec{a}_C + \vec{\alpha} \times \vec{\rho}_P + \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{\rho}_P)$$

点的平移牵连加速度

$$\vec{a}_{tP}^e = \vec{a}_C$$

方向平行于 \vec{a}_C

点的转动牵连切向加速度

$$\vec{a}_{\alpha P}^e = \vec{\alpha} \times \vec{\rho}_P \quad a_{\alpha P}^e = \alpha \rho_P$$

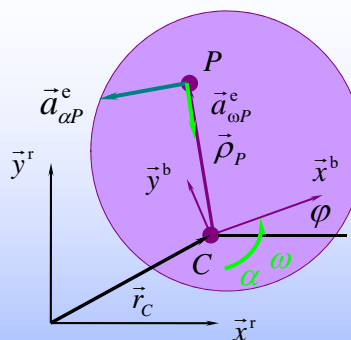
方向垂直于 $\vec{\rho}_P$

点的转动牵连向心加速度

$$\vec{a}_{\omega P}^e = \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{\rho}_P) = -\omega^2 \vec{\rho}_P$$

方向沿 $\vec{\rho}_P$ 反向

$$\vec{a}_{\omega P}^e \perp \vec{a}_{\alpha P}^e$$



2018年10月18日

理论力学CAI 刚体平面运动学

87

刚体上给定点的位置、速度与加速度/加速度

- 一般平面运动刚体上给定点 P 的加速度

$$\vec{a}_P = \vec{a}_C + \vec{\alpha} \times \vec{\rho}_P + \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{\rho}_P)$$

点的平移牵连加速度

$$\vec{a}_{tP}^e = \vec{a}_C$$

方向平行于 \vec{a}_C

点的转动牵连切向加速度

$$\vec{a}_{\alpha P}^e = \vec{\alpha} \times \vec{\rho}_P \quad a_{\alpha P}^e = \alpha \rho_P$$

方向垂直于 $\vec{\rho}_P$

点的转动牵连向心加速度

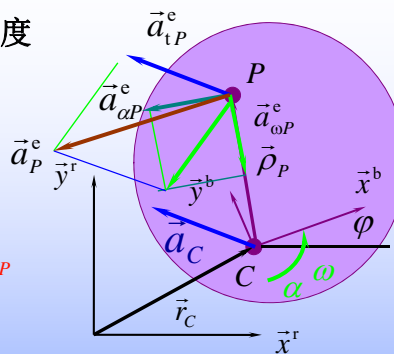
$$\vec{a}_{\omega P}^e = \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{\rho}_P) = -\omega^2 \vec{\rho}_P$$

$a_{\omega P}^e = \omega^2 \rho_P$ 方向沿 $\vec{\rho}_P$ 反向

$$\vec{a}_{\omega P}^e \perp \vec{a}_{\alpha P}^e$$

点的牵连加速度

$$\vec{a}_P^e = \vec{a}_{tP}^e + \vec{a}_{\alpha P}^e + \vec{a}_{\omega P}^e$$



2018年10月18日

理论力学CAI 刚体平面运动学

88

刚体上给定点的位置、速度与加速度/加速度

- 一般平面运动刚体上给定点 P 的加速度

$$\vec{a}_P = \vec{a}_C + \vec{\alpha} \times \vec{\rho}_P + \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{\rho}_P)$$

$$\vec{a}_{tP}^e \quad \vec{a}_{\alpha P}^e \quad \vec{a}_{\omega P}^e$$

$$\vec{a}_P = \vec{a}_P^e$$

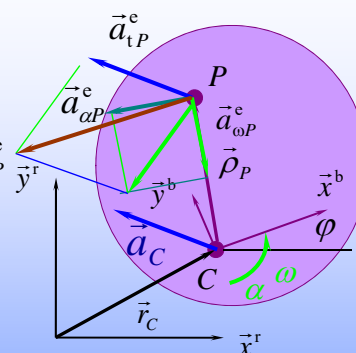
点的牵连加速度

$$\vec{a}_P^e = \vec{a}_{tP}^e + \vec{a}_{\alpha P}^e + \vec{a}_{\omega P}^e$$

点的加速度

$$\vec{a}_P = \vec{a}_P^e$$

固结在刚体上任意给定点的绝对加速度等于该点因刚体的一般运动而引起的牵连加速度



2018年10月18日

理论力学CAI 刚体平面运动学

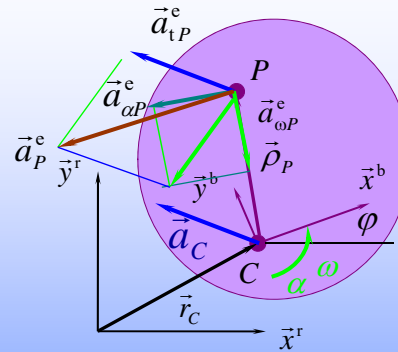
89

刚体上给定点的位置、速度与加速度/加速度

- 一般平面运动刚体上给定点 P 的加速度

$$\vec{a}_P = \vec{a}_C + \underbrace{\vec{\alpha} \times \vec{\rho}_P}_{\vec{a}_{\alpha P}} + \underbrace{\vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{\rho}_P)}_{\vec{a}_{\omega P}}$$

$$\vec{a}_P = \vec{a}_{tP}^e + \vec{a}_{\alpha P}^e + \vec{a}_{\omega P}^e$$



4个矢量间的关系。考虑到后两个转动牵连加速度在方向上必须相互垂直的关系，通过矢量几何可解决7个信息量中2个未知的信息量。



2018年10月18日
理论力学CAI 刚体平面运动学

90

刚体上给定点的位置、速度与加速度/速度/例

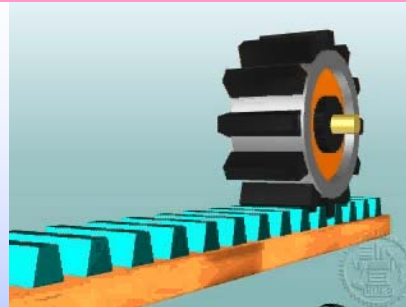
[例]

图示一半径为 r 的刚性圆盘在平面上作无滑动的滚动

这是一齿轮-齿条运动副的抽象

圆盘的中心 C 的速度为 v ，加速度为 a

试求圆盘上与平面的接触点 P 的加速度

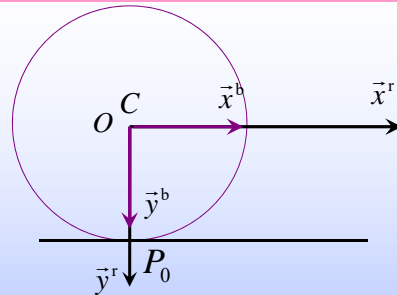


2018年10月18日
理论力学CAI 刚体平面运动学

91

刚体上给定点的位置、速度与加速度/速度/例

[解] 参考基 $O-\vec{e}^r$ 连体基 $C-\vec{e}^b$



2018年10月18日
理论力学CAI 刚体平面运动学

92

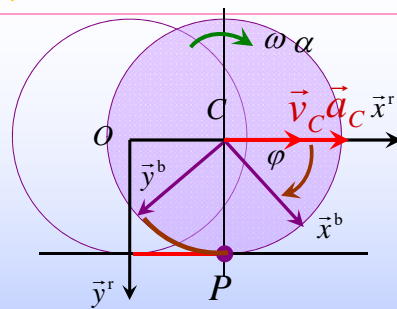
刚体上给定点的位置、速度与加速度/速度/例

[解] 参考基 $O-\vec{e}^r$ 连体基 $C-\vec{e}^b$

刚体的速度与加速度关系

无滑动滚动

$$\begin{aligned} x_C &= r\varphi & \dot{x}_C &= r\dot{\varphi} & \ddot{x}_C &= r\ddot{\varphi} \\ v_C &= r\omega & a_C &= r\alpha \end{aligned}$$



2018年10月18日
理论力学CAI 刚体平面运动学

93

刚体上给定点的位置、速度与加速度/速度/例

[解] 参考基 $O-\vec{e}^r$ 连体基 $C-\vec{e}^b$

刚体的速度与加速度关系

无滑动滚动

$$x_C = r\varphi \quad \dot{x}_C = r\dot{\varphi} \quad \ddot{x}_C = r\ddot{\varphi}$$

$$v_C = r\omega \quad a_C = r\alpha$$

刚体上点P的加速度

点的平移牵连加速度 $\vec{a}_{tP}^e \quad a_{tP}^e = a_C = a$

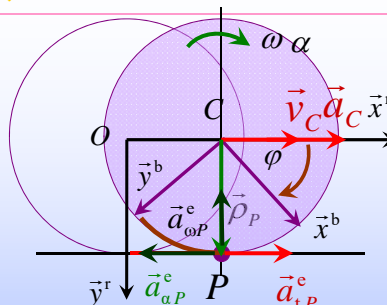
点的转动牵连向心加速度 $\vec{a}_{\omega P}^e \quad a_{\omega P}^e = \omega^2 \rho_P = \omega^2 r = v_C^2 / r$

点的转动牵连切向加速度 $\vec{a}_{\alpha P}^e \quad a_{\alpha P}^e = \alpha \rho_P = \alpha r = a$

$$\vec{a}_{\alpha P}^e = -\vec{a}_{tP}^e$$

点的牵连加速度

$$\vec{a}_P^e = \cancel{\vec{a}_{tP}^e} + \cancel{\vec{a}_{\alpha P}^e} + \vec{a}_{\omega P}^e = \vec{a}_{\omega P}^e$$



2018年10月18日

理论力学CAI 刚体平面运动学

94

刚体上给定点的位置、速度与加速度/速度/例

[解] 参考基 $O-\vec{e}^r$ 连体基 $C-\vec{e}^b$

无滑动滚动

$$v_C = r\omega \quad a_C = r\alpha$$

$$a_{tP}^e = a_C = a \quad a_{\omega P}^e = \omega^2 r = v_C^2 / r$$

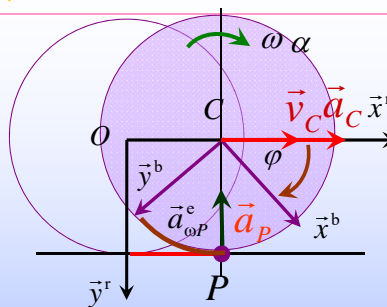
$$a_{\alpha P}^e = \alpha r = a$$

点的牵连加速度 $\vec{a}_P^e = \vec{a}_{\omega P}^e$

刚体上点P的加速度 $\vec{a}_P = \vec{a}_P^e = \vec{a}_{\omega P}^e$

$$a_P = \omega^2 r = \frac{v_C^2}{r}$$

方向：指向C

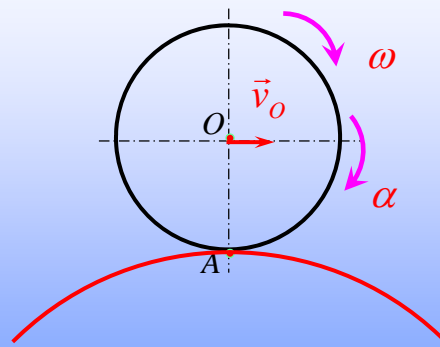


2018年10月18日

理论力学CAI 刚体平面运动学

95

【例】 已知：半径为 r 的圆轮在半径 R 的弧线轨道上作纯滚动。
角速度为 ω 、角加速度为 α 。求轮心 O 及加速度。



速度分析

$$v_O = \omega r$$



2018年10月18日
理论力学CAI 刚体平面运动学

96

加速度分析

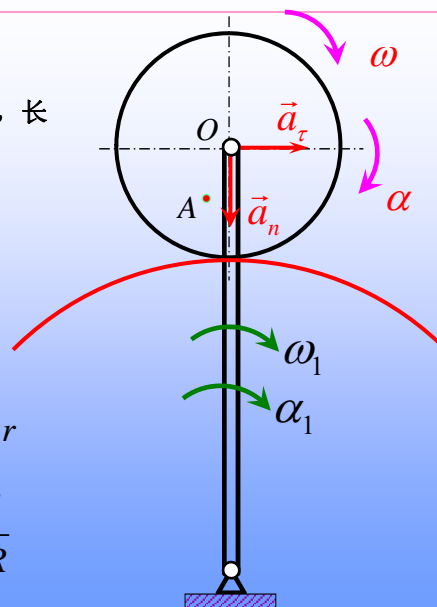
虚加一定轴转动的杆，长度
为 $r+R$

$$\omega_1 = \frac{\omega r}{r+R}$$

$$\alpha_1 = \frac{\alpha r}{r+R}$$

$$a_\tau = (r+R)\alpha_1 = \alpha r$$

$$a_n = \frac{v_O^2}{r+R} = \frac{\omega^2 r^2}{r+R}$$



2018年10月18日
理论力学CAI 刚体平面运动学

97

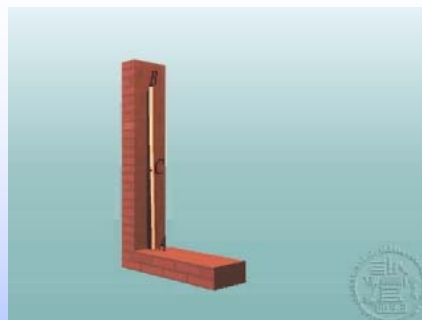
[例]

刚性杆 AB 长为 l ，其一端 A 着地，一端 B 靠墙，可在铅垂面运动

现端点 A 以速度为 v_A 作匀速向右运动

图示瞬时杆与水平面的夹角 $\angle OAB$ 为 60°

试求该瞬时
杆 AB 的转动角加速度
端点 B 的加速度



2018年10月18日
理论力学CAI 刚体平面运动学

98

[解] 参考基 $O-\vec{e}^r$ 连体基 $A-\vec{e}^b$

以点 B 为对象

点的平移牵连加速度 \vec{a}_{tP}^e $a_{tB}^e = a_A = 0$

点的转动牵连切向加速度 $\vec{a}_{\alpha P}^e$

$a_{\alpha B}^e = \alpha \rho_B = \alpha l$ 设定正向

点的转动牵连向心加速度 $\vec{a}_{\omega P}^e$

$a_{\omega B}^e = \omega^2 \rho_B = \omega^2 l$ 方向已知

点 B 的绝对加速度 \vec{a}_B 方向已知

$$\vec{a}_B = \vec{a}_{tB}^e + \vec{a}_{\alpha B}^e + \vec{a}_{\omega B}^e = \vec{a}_{\alpha B}^e + \vec{a}_{\omega B}^e$$

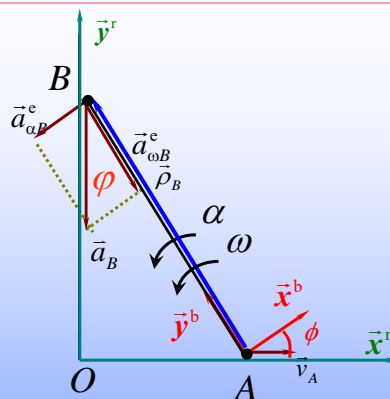
在连体基上的坐标式

$$\vec{x}^b: -a_B \sin \varphi = -a_{\alpha B}^e$$

$$a_B \sin \varphi = \alpha l$$

$$\vec{y}^b: -a_B \cos \varphi = -a_{\omega B}^e$$

$$a_B \cos \varphi = \omega^2 l$$



2018年10月18日
理论力学CAI 刚体平面运动学

99

刚体上给定点的位置、速度与加速度/加速度/例

$$a_B \cos \varphi = \omega^2 l$$

$$a_B \sin \varphi = \alpha l$$

速度分析已知

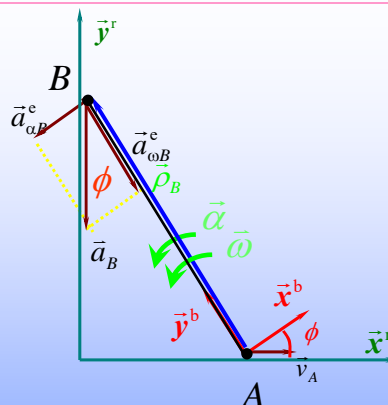
$$\varphi = \frac{\pi}{6}, \quad \omega = \frac{2v}{l\sqrt{3}}$$

端点B的加速度

$$a_B = \frac{\omega^2 l}{\cos \varphi} = \frac{8v^2}{3\sqrt{3}l}$$

杆AB的转动角加速度

$$\alpha = \frac{a_B \sin \varphi}{l} = \frac{4v^2}{3\sqrt{3}l^2}$$



假设 α 方向相反会怎样?



2018年10月18日

理论力学CAI 刚体平面运动学

100

刚体上给定点的位置、速度与加速度

• 单刚体运动学的矢量瞬时分析方法

$$\vec{v}_P = \vec{v}_{tP}^e + \vec{v}_{\omega P}^e$$

3个矢量的6个信息量间的关系。通过矢量几何可解决2个未知的信息量。

$$\vec{a}_P = \vec{a}_{tP}^e + \vec{a}_{\alpha P}^e + \vec{a}_{\omega P}^e$$

4个矢量间的关系。考虑到后两个转动牵连加速度在方向上必须相互垂直的关系，通过矢量几何可解决7个信息量中2个未知的信息量。



2018年10月18日

理论力学CAI 刚体平面运动学

108

- 单刚体运动学矢量瞬时分析方法小结

- 基本原理:

$$\vec{v}_P = \vec{v}_{tP}^e + \vec{v}_{\omega P}^e$$
$$\vec{a}_P = \vec{a}_{tP}^e + \vec{a}_{aP}^e + \vec{a}_{\omega P}^e$$

通过矢量几何可解决2个未知的信息量

- 根据问题的要求合理选取的参考基与连体基

- 已知刚体连体基的运动求给定点的绝对运动
 - 已知刚体上给定点的绝对运动求刚体连体基的运动

- 仔细的分析牵连运动

- 矢量关系图
 - 合理选定矢量基，正确写出坐标式



2018年10月18日

理论力学CAI 刚体平面运动学

109