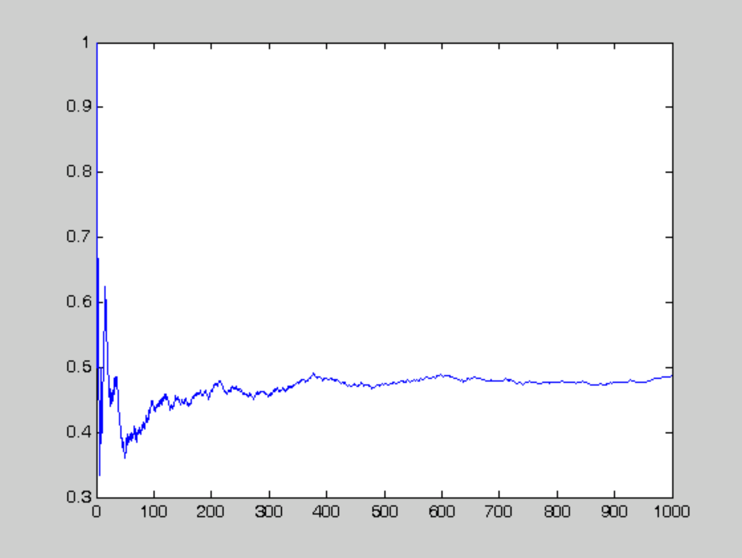
随机模拟的MATLAB举例

例1：投掷硬币

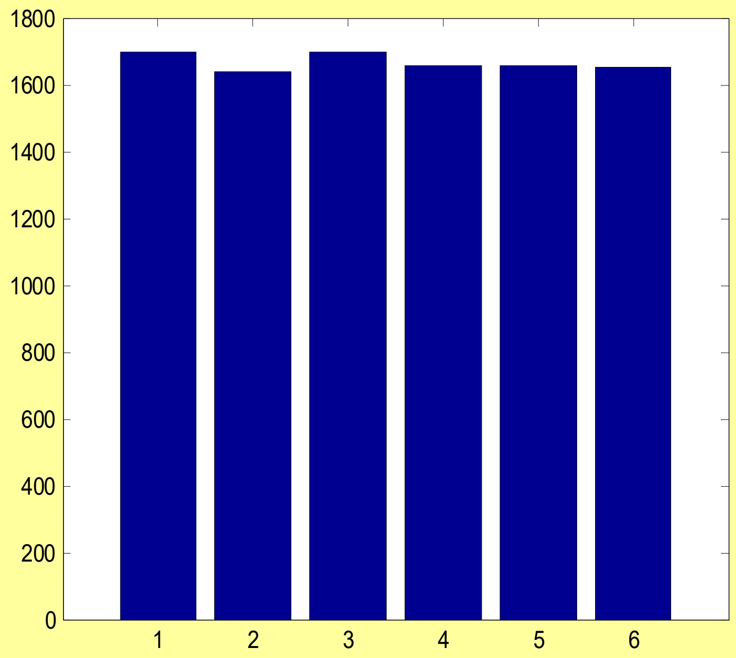
- 我们随机投掷均匀硬币，验证国徽朝上与朝下的概率是否都是1/2。

```
n=10000;              % 给定试验次数
m=0;
for i=1:n
x=randperm(2)-1;
   y=x(1);
   if y==0            %  0表示国徽朝上，1表示国徽朝下
      m=m+1;
   end
end
fprintf('国徽朝上的频率为：% f\n', m/n);
```




```
function liti1(p, mm)
pro=zeros(1, mm);
randnum = binornd(1, p, 1, mm)
a=0;
for i=1:mm
    a=a+randnum(1, i);
    pro(i)=a/i;
end
pro=pro
  num=1:mm;
plot(num, pro)
```

例2：投掷骰子。我们随机投掷骰子，验证各点出现的概率是否为 1/6。



p = unidpdf ([1: 6] , 6)
cp = unidcdf ([1: 6] , 6)

- n=10000; m=zeros(1,6);
- for i=1:n
-   x=randperm(6); y=x(1);
-   switch y
-     case 1, m(1)=m(1)+1;
-     case 2, m(2)=m(2)+1;
-     case 3, m(3)=m(3)+1;
-     case 4, m(4)=m(4)+1;
-     case 5, m(5)=m(5)+1;
-     otherwise, m(6)=m(6)+1;
-   end
- end, bar(1:6,m)

例3：“废止在晚间考试”事件调查意见

- 问题：假设某所大学有80%的学生赞成废止在晚间考试。你问了10位随机选择的学生。10位都赞成废止晚间考试的概率是多少？
- 问题理论上的精确解：独立的问10位学生的概率是古典概型，即十位都赞成的概率为(0.8)^10=0.1074。
- 如何运用模拟建模来求出这一概率？

- [1] 首先分配随机数字数字，分别代表“赞成”和“不赞成”。
- 随机生成1~5的随机数字
- 赞成： 1 2 3 4
- 不赞成： 5
- [2] 编制MATLAB程序1如右：

```
N=25;
s=0;
for i=1:N
    z=1;
    series=ceil(rand(10, 1)*5);
        for k=1:10
          if series(k)<5
             z=z*1;
          else z=0;
          end
        end
        s=s+z;
end
p=s/N
```

程序设计2：

- k=0;　　　　　　　%技术变量
- for n=1:1000;　　%循环1000次，即进行1000次模拟
- 　s=randsample(0:1, 10, true, [0.2 0.8]); %生成10个随机数， 出现1的概率为0.8
- 　if sum(s)==10 %如果10个随机数的和为10，说明每个数都是1。代表10位同学都赞成。
- 　　　k=k+1; %如果符合条件，就计数一次
- 　　end
- end
- k/1000　　　　%随机模拟结果。
-

程序设计3：

```
>> b=0;
  for z=1:25
     a=0;
  for i=1:10
       x=randsample(10, 1);
    if x<=8
    a=a+1;
   end
  end
   if a>=10
   b=b+1;
  end
end
p=b/25
```

例4:“修课成绩”通过的机率

- 问题：假如从某所大学近年所有修过概率论的学生当中，随机选出一位。这位学生在该科目取得成绩的概率如下：

成绩	A	B	C	D或F
概率	0.2	0.3	0.3	0.2

- （1）若要模拟随机选择的学生的成绩，你会怎样分配数字，来代表列出来的4种可能结果？
- （2）宿舍里面同一层楼有5个学生正在修这门课。他们不一起读书，所以他们的成绩互相独立。利用模拟来估计，这5个人的修课成绩有至少C以上的概率。（模拟20次。）

- 对于第（1）问题，我们首先由计算机随机生成5个1~10之间随机数字，然后分配十个数字：
- A： 1 2
- B： 3 4 5
- C： 6 7 8
- D： 9 10
- 一一对照得到一组结果，重复进行多次，求出概率计算机模拟20次，概率为1；
- 计算机模拟1000000次，概率为0.9997。理论精确计算为P=1 – (0.2)^5=0.9997。

程序1：

```
N = 20;
s = 0;
for i = 1:N
    series = ceil(rand(5, 1)*5);
    z = 0;
    for k = 1:5
        if series(k)<5
            z = 1;
        end
    end
    s = s+z;
end
p = s/N
```

程序2：

```
flag = 0;
for k = 1:20;
    cc = 0;
    for i = 1:5;
        a = rand(1);
        if a < 0.5
            cc = cc+1;
        end
    end
    if cc ~= 0
        flag = flag+1;
    end
end
probability = flag/20.0;
disp(probability)
```

程序3：

```
kk=0;          %计数变量
for n=1:1000;  %循环次数1000次，模拟次数
    s=randsample(0:1,5,true,[0.2 0.8]);  %5位同学可能出现的成绩。0代表C一下，1代表至少C以上
    if sum(s)==5     %当5位同学的成绩都至少C以上时，求和结果位5.
        kk=kk+1;     %满足条件的情况计数
    end
end
kk/1000        %随机模拟结果
```

例5. 班级排名问题的机率

- 问题：随意地在某高校某系选一位大学生，问他在的系里的平均成绩排名。其结果的概率分布如下：

	前25%		前50%	
系里排名	前10%	非前10%	非前25%	后50%
概率	0.3	0.3	0.3	0.1

- (1)如要模拟一个随机选择的学生的系里平均成绩排名，你会怎样分配数字来代表列出的4种可能？
- (2)“校助学金基金会”决定要提供8位随机选择的学生全额奖学金。8位随机选择的学生中，至多有3人系里排名在后一半的概率是多少？模拟该基金会的选择10次，来估计这项概率。
- 我们的解答是：理论精确计算为 P=(0.9)^8+(0.9)^7*0.1*8+(0.9)^6*(0.1)^2*28+(0.9)^5*(0.1)^3*56=0.9950

- （1）计算机模拟，首先计算机随机生成8个随机生成1~10之间随机数字，分配十个数字：
- 0~10%：　1 2 3
- 10%~25%：　4 5 6
- 25%~50%：　7 8 9
- 50%~100%：　10
- (2) 随后计算机生成随机数字，进行计算机模拟10次，计算概率为1；计算机模拟1000000次，概率结果为0.9950。

程序1：

```
N=10;
s=0;
for i=1:N
    z=0;
    series=ceil(rand(8, 1)*10);
    for k=1:8;
        if series(k)==10
            z=z+1;
        end
    end
    if z<=3
        s=s+1;
    end
end
p=s/N
```

程序2：

- k=0;
- for n=1:1000　%循环次数=模拟次数=1000
- 　s=randsample(0:1, 8, true, [0.9 0.1]);　%0代表成绩在前50%，概率0.9，1代表在后50%，概率0.1，每次生成8个随机数。
- 　if sum(s) <=3　%如果成绩在后50%的人数少于三人，即满足条件。
- 　　k=k+1;　%满足条件时计数一次。
- 　end
- end
- k/1000　%随机模拟的概率

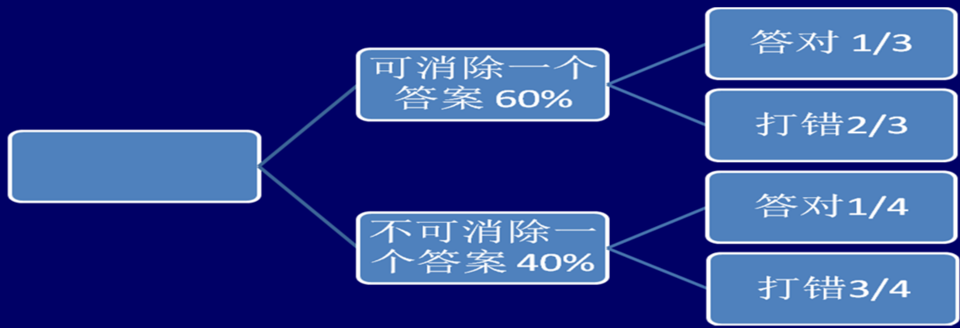
程序3：

```
r=rand(1, 1)
if r<=0.3
    x='前10%'
else
    if r>0.9
        x='后50%'
    else
        if 0.3<x<=0.6
            r='前25%而非前10%'
        else
            r='前50%而非前25%'
        end
    end
end
```

例7：“全是选择题的考试”

- 刘谦同学有过许多次没读什么书而参加选择题测验的经历。他就要考一个小考，考题是10道选择题，每题有4个答案。以下是刘谦同学的个人概率模型。他认为在60%的题目当中，他会有办法消除一个一定不对的答案：然后他从剩下的3个答案当中猜一个。这样他猜中的概率是1/3。另外的40%的题目，他得从4个答案当中猜，猜中的概率是1/4。
- （1）替一个题目的结果画树图。说明如何模拟迈特在一个题目上成功或失败。
- （2）题目之间互相独立。要模拟整个小考，只要模拟10个题目即可。迈特必须答对至少5题才能通过小考。你可以模拟很多次小考来找出他通过的概率，不过我只要求你模拟一次。请问刘谦同学这次小考有没有通过？

（1）



- （2） 首先计算机随机生成一个1~5之间均匀分布的随机数字，
- 可消除一个答案：1 2 3
- 不可消除一个答案：3 4
- 然后依据生成随机数的情况。进一步模拟，如果第一个生成的随机数为：1 2 3。则计算机在生成一个1~3之间均匀分布的随机数字：
- 答对为：1
- 答错为：2 3
- 如果第一个生成的随机数为：4 5，则计算机在生成一个1~4之间均匀分布的随机数字
- 答对为：1
- 答错为：2 3 4

- 根据第二个随机数字的结果，确定此次模拟是否答对，重复进行十次，得到一个答案：
- 计算机模拟一次 答对题目3 未通过
- 计算机模拟25次 通过概率为0.28
- 计算机模拟100000次 通过概率为0.3463

程序1：

```
N=25;
z=0;
for i=1:N
    s=0;
 for k=1:10
    s1=ceil(rand(1, 1)*5);
    if s1<4
        s2=ceil(rand(1, 1)*3);
        if s2==1
            s=s+1;
        end
    end
if s1>3
        s2=ceil(rand(1, 1)*4);
        if s2==1
            s=s+1;
        end
    end
   if s>4
       z=z+1;
   end
 end
end
P=z/N
```

程序2：

```
k=0;            %计数变量，表示满足条件的情况的个数
for n=1:1000                                  %随机模拟1000次
      r1=randsample(0:1, 6, true, [2/3 1/3]);        %这6道题目作对的概率是1/3
        r2=randsample(0:1, 4, true, [0.75 0.25]);  %这4道题目作对的概率是1/4
    if sum(r1)+sum(r2)>=5         %作对的题目数大于等于5道，即通过考试
        k=k+1;
    end
end
k/1000                          %随机模拟的结果。
```

程序3：

```
rand(1,1)
if x<=0.6      %出现的是能够排除一个错误选项的情况
   r=ceil(unifrnd(0, 3, 1, 1))
   if r==1
      x=1    %表示正确选择
   else
      x=0    %表示未能正确选择
   end
else %出现的是未能够排除一个错误选项的情况
   r=ceil(unifrnd(0, 4, 1, 1))
   if r==1
      x=1    %表示正确选择
   else
      x=0    %表示未能正确选择
   end
end
```

程序4:

```
k=0
for i=1:10
rand(1, 1)
if x<=0.6          %出现的是能够排除一个错误选项的情况
    r=ceil(unifrnd(0, 3, 1, 1))
    if r==1
        x=1    %表示正确选择
    else
        x=0    %表示未能正确选择
    end
else               %出现的是未能够排除一个错误选项的情况
    r=ceil(unifrnd(0, 4, 1, 1))

    if r==1
        x=1    %表示正确选择
    else
        x=0    %表示未能正确选择
    end
end
if x==1         %表示正确选择
    k=k+1       %计数加1
end
if k>=5         %答对的题目数至少为5道
    y='pass'
else
    y='fail'
end
end
k
```

例8 生日问题

- 概率论里面有一个著名的例子，算出只要一间屋子里有23个人，则至少有两人同一天生日的概率就已经超过1/2。概率模型如下：
- ●随意选一个人，他在一年365天当中任一天出生的概率是一样的。
- ●屋内不同的人之生日是独立的。
- 若要模拟生日问题，必须在产生的随机数当中的每3个数字一组，代表一个人的生日。也就是说，001代表元月1日，而365代表12月31日。忽略闰年这回事，也跳过不代表生日的其他三位数。用表A的列139来模拟随意挑选的人的生日，知道有同一个生日出现第二次时为止。你一共检视了多少个人，才找到两个同一天生日的人？

- 用电脑可以轻易重复这个模拟许多次。你可以找出23个人当中至少有两人同一天生日的概率：或者预期要问多少人，才会找个两个同一天生日的人。这些问题要用数学来算有点难，所以可显出模拟的优势与重要。
- 首先计算机随机生成23个1~365之间均匀分布的随机数字，数字大小代表生日，如001代表元月1日，而365代表12月31日，23个数字进行比较看是否有相同数字，就可以得到所要求的结果。
- 程序设计思想：先生成23个随机数字，然后用sort命令进行排序，在比较相邻数字是否相同，这样的话，程序较为简洁，但是速度较慢。计算机模拟25次，所得概率为：0.5400；计算机模拟100000次，所得概率为：0.5069。

程序1：

```
N=25;
z=0;
for i=1:N
    s=0;
    series=sort(ceil(rand(23, 1)*365));
    for k=1:22
        if series(k)==series(k+1)
            s=s+1;
        end
    end
    if s>0
        z=z+1;
    end
end
P=z/N
```

程序2：

- k=0;   %计数变量
- for n=1:1000   %1000次模拟
- s1=unidrnd(365, 1, 23);
- for n=1:22   %循环1：从1开始到22位开始寻找 其后 与之相等的数
-     for i=n+1:23   %循环2：其后的数字依次寻找
-         if s1(n)==s1(i);   %如果相等，符合条件并计数
-            k=k+1;
-         end
-         if s1(n)==s1(i)
- break   %如果出现相等的情况，不再继续寻找，中断循环2
-         end
-     end
-     if s1(n)==s1(i)
-         break   %如果出现相等的情况，不再继续寻找，中断循环1
-     end
- end
- end
- k/1000   %模拟的概率结果。

程序3：

```
s1=unidrnd(365, 1, 366);  %生成366个随机，根据“抽屉原理”，最大检索人数是366人
for n=1:365             %循环1：  从1到365位依次开始向后检查与之相同的数
    for i=n+1:366        %循环2：  依次检查其后的数是否与之相等
        if s1(n)==s1(i);
            i          %如果相等，输出i,即为检索到生日相同时的人数
        end
        if s1(n)==s1(i)
            break       %如果已经找到生日相同的人，就不再检索，中断循环2
        end
    end
   if s1(n)==s1(i)
            break       %如果已经找到生日相同的人，就不再检索，中断循环1
   end
end
```

程序4：

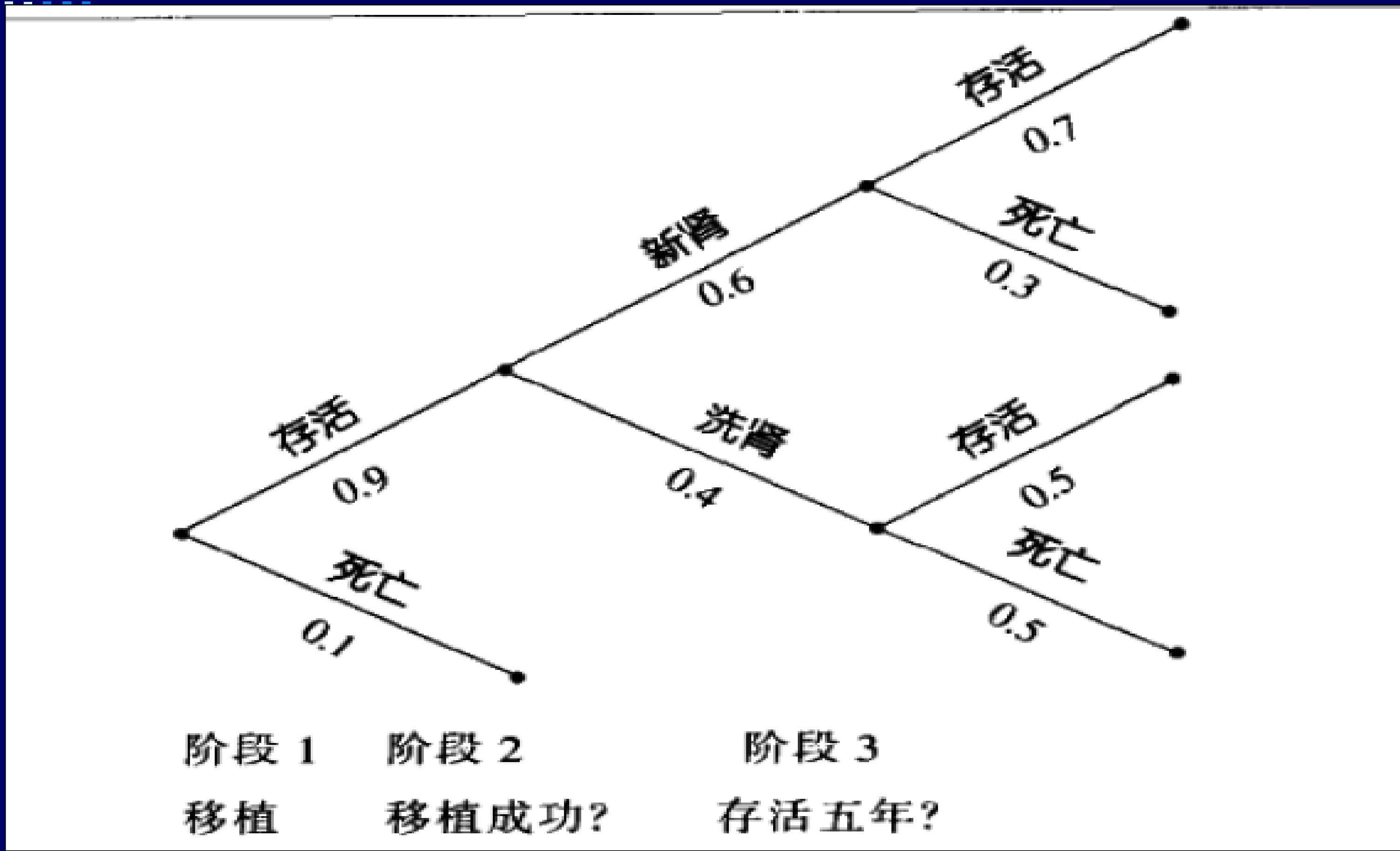
```
m=0
r1=ceil(unifrnd(0, 365, 1, 1))  %表示一个人的生日
r2=ceil(unifrnd(0, 365, 1, 1))  %表示另一个人的生日
while r1~=r2              %直到出现有两人生日相同停止
    r1=ceil(unifrnd(0, 365,1, 1))
    r2=ceil(unifrnd(0, 365, 1, 1))
    m=m+1
end
```

作业1、肾脏移植

- 小莫的肾脏不行了，他在等待肾脏移植。他的医生提供了和他情况类似的病人资料，存活移植手术的占90%，另外10%会死亡。在手术后存活的人中有60%移植成功，另外40%还得回去洗肾。5年存活率对于有新肾的人来说是70%，对于回去洗肾的人来说是50%。莫里斯希望知道，他能活过5年的概率。

第1步：画出树图

下图14.1中的树图（tree diagram）把这些信息组织了起来，用图的形式来表达出概率模型。树图显示出3个阶段，以及每阶段的可能结果及概率。树的每一条路径的终点，不是存活超过五年就是在五年内已死亡。要模拟出莫里斯的命运，我们必须模拟3阶段中的每一个阶段。第三阶段的概率，和第2阶段的结果有关。



每一个分支点就是一个新阶段的开始，其结果和概率都写在树枝上。此模型的每一个模拟阶段，是从分支点走到每一个端点。

- 第2步：以下是我们队每个结果分配的数字：
- 阶段1：
- 0=死亡
- 1，2,3,4,5,6,7,8,9=存活
- 阶段2：
- 0,1,2,3,4,5=移植成功
- 6，7,8,9,=仍需洗肾

- 阶段3，有新肾
- 0,1,2,3,4,5,6=存活5年
- 7,8,9=未能存活5年
- 阶段4，洗肾：
- 0,1,2,3,4=存活5年
- 5,6,7,8,9=未能存活五年
- 第3阶段的数字分配，和第2阶段的结果有关。所以两者间不独立。

- 第3步：以下是好几次模拟的结果，每次的结果从上往下用一栏表示。

	第1次	第2次	第3次	第4次
阶段1	3存活	4存活	8存活	9存活
阶段2	8洗肾	8洗肾	7洗肾	1新肾
阶段3	4存活	4存活	8死亡	8死亡

- 小莫在我们的4次模拟中，有2次存活超过五年。现在我们了解如何安排这项模拟之后，应该交给电脑去多次重复。经由许多次的模拟，或者经由数学计算，我们得知莫里斯的5年存活概率是0.558。