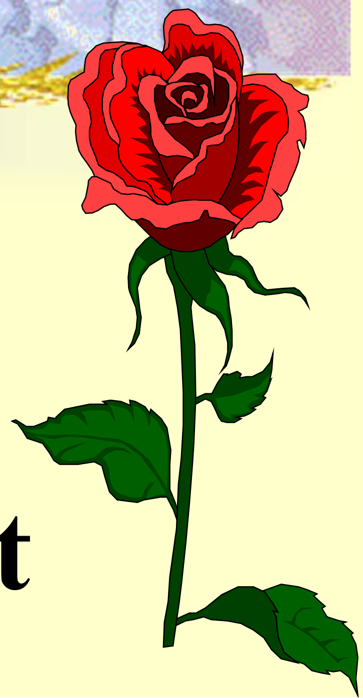
随机模拟方法与应用

Stochastic Simulation Methods and Its Applications

肖柳青 博士

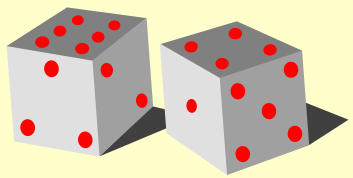
lucycxiao@sjtu.edu.cn

PUB:SSMA_xiao@yeah.net



第2章 懂点概率论：随机事件的数学描述方法

2.3 随机变量与概率分布
2.4 随机变量的数字特征-矩量
2.5 随机变量的变换



肖柳青 上海交通大学 数学系

§2.3 随机变量及分布函数

2.3.1 随机变量

我们已经定义的随机事件以及与这些事件相关联的概率。在各个科学应用领域，随机事件总是与数量相联系。例如在经济中，如股票价格、汇率、利率和成本等就是那些人们关心的随机变化事件。这意味着我们可以将随机实验的基本事件集映射到实数轴上，换句话说，实验的随机事件将与实数轴上某些点的集合相关联。实际上，前面使用的随机数也是一种随机变量。

如

§2.3 随机变量及分布函数

2.3.1样本空间上的函数:随机变量

前面我们已经定义了随机事件及与这些事件相关联的概率。然而往往我们感兴趣的不是特定随机事件的结果,而是这个结果的某种函数.

譬如,一辆汽车的保养费用:大家知道一辆汽车的任何部件需要修理的概率各不相同,因而各部件的修理费用则不同,而我们通常更关心的是给出付款总额函数.

而不是一张出问题部件的清单. 再譬如赌博的例子:假如你在英国国家障碍赛马大会上下赌，已知某种赔率和赌金， 而赢得的金额实际是比赛结局的函数。这类例子很普遍, 例如股票价格、汇率、利率和成本等是那些人们关心的随机变化事件, 而这些随机事件总是与数量相关联。用数学的语言来说，这也就意味着我们可以将随机实验的基本事件集映射到实数轴上

换句话说，实验的随机事件将与实数轴上某些点的集合相关联。

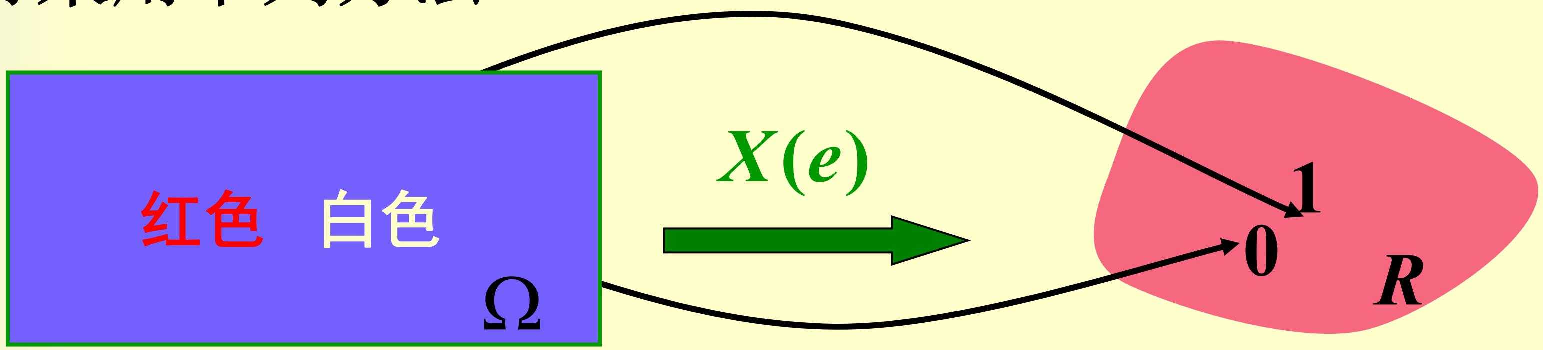
这一节我们来探究事件空间上的函数的性质. 相当令人困惑的是, 这样的一种函数被称为**随机变量**, 尽管它既非随机又非变量, 遗憾的是, 这是标准的数学术语, 这些函数X被定义为实值函数

$$X:\Omega \to R$$

引例1 在一装有红球、白球的袋中任摸一个球,观察摸出球的颜色.

$$\Omega=\{\underbrace{\text{红色、白色}}_{\text{非数量}}\}\xrightarrow{\ ?\ }\text{将 }\Omega\text{ 数量化}$$

可采用下列方法



即有 X(红色)=1， X(白色)=0.

$$X(e)=\begin{cases}1, & e=\text{红色}, \\ 0, & e=\text{白色}.\end{cases}$$

这样便将非数量的Ω={红色，白色} 数量化了.

引例2 电话总机某段时间内接到的电话次数，可用一个变量 X 来描述:

$$X(\omega)=\omega,\quad \omega=0,1,2,\ldots$$

引例3 抛掷一枚硬币出现可能的两个结果，也可以用一个变量来描述

$$X(\omega)=\begin{cases}1, & \text{正面向上}\\ 0, & \text{反面向上}\end{cases}$$

由上表可以看出，该随机试验的每一个结果都对应着变量 X 的一个确定的取值，因此变量 X 是样本空间上的函数：

$$X = X(e) \qquad (e \in \Omega)$$

用随机变量的取值情况来刻划随机事件．例如：

$$\{e: X(e) = 2\} = \{X = 2\}$$

表示取出2个黑球这一事件；

$\{X \geq 2\}$ 表示至少取出2个黑球这一事件。

一. 随机变量的概念

定义 设E是一随机试验，Ω 是它的样本空间，

若 $\forall \omega \in \Omega \xrightarrow{\text{按一定法则}} \exists$ 实数 $X(\omega)$

则称 Ω 上的单值实值函数 $X(\omega)$为随机变量

随机变量一般用 $X, Y, Z, \ldots$或小写希腊字母 ξ, η, ζ 表示.

同时对每一个实数r都有一个集合

$$Ar = \{e | X(e) \le r\}$$

与事件空间$\mathscr{F}$中的某个事件相对应，也就是说 $Ar \in \mathscr{F}$,

随机变量是$\Omega \to R$ 上的映射，这个映射具有如下的特点：

- 定义域： Ω
- 随机性： 随机变量X的可能取值不止一个，试验前只能预知它的可能的取值但不能预知取哪个值
- 概率特性：ξ以一定的概率取某个值或某些值

- 引入随机变量后，用随机变量的等式或不等式表达随机事件
- 在同一个样本空间可以同时定义多个随机变量
- 随机变量的函数一般也是随机变量
- 可以根据随机事件定义随机变量

设 A 为随机事件，则可定义

$$X_A = \begin{cases} 1, & \omega \in A \\ 0, & \omega \in \overline{A} \end{cases}$$

称 X_A 为事件A 的示性变量

例如：

(1)射击击中目标记为1分，未中目标记0分。用X表示射击的得分，它是随机变量，可取0和1两个值。

(2)抛一枚硬币， X表示正面出现的次数，它是随机变量，可取0和1两个值。

(3)某段时间内候车室旅客数目记为X，它可取0及一切不大于最大容量M的自然数。

(4)一块土地上农作物的产量X是随机变量，它可以取区间[0，T]的一切值。

(5)沿数轴运动的质点，它的位置ξ是随机变量，可以取任何实数，即$X\in(-\infty,+\infty)$。

例 3

掷一颗骰子，令**X**为出现的点数． 则 **X** 就是一个随机变量．它的取值为

$$1，2，3，4，5，6.$$

$$\left\{X \le 4\right\}$$

表示掷出的点数不超过 **4** 这一随机事件；

$$\left\{X\text{ 取偶数}\right\}$$

表示掷出的点数为偶数这一随机事件．

例 4

掷一枚骰子，我们定义了随机变量X表示出现的点数．我们还可以定义其它的随机变量，例如我们可以定义：

$$Y=\begin{cases}1 & \text{出现偶数点}\\ 0 & \text{出现奇数点}\end{cases}$$

$$Z=\begin{cases}1 & \text{点数为6}\\ 0 & \text{点数不为6}\end{cases}$$

等等．

随机变量的分类

随机变量

离散型　　非离散型

连续型　　其它

(1)离散型　随机变量所取的可能值是有限多个或无限可列个, 叫做离散型随机变量.

实例1　观察掷一个骰子出现的点数.

随机变量 X 的可能值是：　1, 2, 3, 4, 5, 6.

实例2 若随机变量 X 记为 "连续射击, 直至命中时的射击次数", 则 X 的可能值是:

$$1, \quad 2, \quad 3, \quad \cdots.$$

实例3 设某射手每次射击打中目标的概率是0.8, 现该射手射了30次,则随机变量 X 记为 "击中目标的次数" ,则 X 的所有可能取值为:

$$0, \quad 1, \quad 2, \quad 3, \quad \cdots, \quad 30.$$

(2)连续型 随机变量所取的可能值可以连续地充满某个区间,叫做连续型随机变量.

实例1 随机变量 X 为“灯泡的寿命”.

则 X 的取值范围为 $[0,+\infty)$.

实例2 随机变量 X 为“测量某零件尺寸时的测量误差”.

则 X 的取值范围为 (a,b).

二、分布函数的概念

1.概念的引入

对于随机变量X, 我们不仅要知道X取哪些值, 要知道X取这些值的概率；而且更重要的是想知道X在任意有限区间(a,b)内取值的概率.

例如 求随机变量 X 落在区间 $(x_1, x_2]$ 内的概率.

$$P\{x_1 < X \le x_2\} = \boxed{P\{X \le x_2\}} - \boxed{P\{X \le x_1\}}$$

$$F(x_2) \qquad\qquad F(x_1)$$

分布函数

$$P\{x_1 < X \le x_2\} = F(x_2) - F(x_1).$$

随机变量的分布函数
Distribution Function

- **分布函数的定义**
- 对于概率空间(Ω , $\mathscr{F}$, P) 上的随机变量 X, 其中P为概率度量, 对每个实数 x ,

$$F_X(x) = P(X \le x)$$

F(x)是一个普通的函数！

为随机变量X的**分布函数**
或称累积分布函数（**cumulative distribution function**，简称**CDF**）

定义域为 （－∞，＋∞）； 值域为 ［０， １］。

分布函数的性质

$(1)\ 0 \le F(x) \le 1, \quad x \in (-\infty, \infty);$

$(2)\ F(x_1) \le F(x_2), \quad (x_1 < x_2);$（$F(x)$ 单调不减）

证明 由 $x_1 < x_2 \Rightarrow \{X \le x_1\} \subset \{X \le x_2\},$

得 $P\{X \le x_1\} \le P\{X \le x_2\},$

又 $F(x_1) = P\{X \le x_1\}, \quad F(x_2) = P\{X \le x_2\},$

故 $F(x_1) \le F(x_2).$

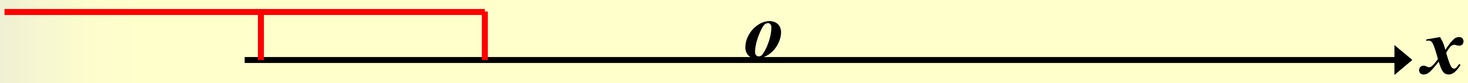
(3) $F(-\infty)=\lim\limits_{x\to-\infty}F(x)=0,\quad F(\infty)=\lim\limits_{x\to\infty}F(x)=1;$

(不可能事件) (必然事件)

证明 $F(x)=P\{X\le x\}$, 当 x 越来越小时,

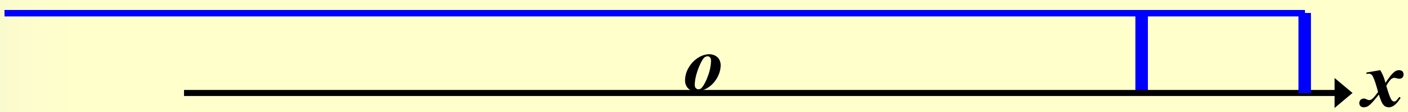
$P\{X\le x\}$ 的值也越来越小, 因而当 $x\to-\infty$ 时, 有

$$\lim_{x\to-\infty}F(x)=\lim_{x\to-\infty}P\{X\le x\}=0$$



同样, 当 x 增大时 $P\{X\le x\}$ 的值也不会减小, 而

$X\in(-\infty,x)$, 当 $x\to\infty$ 时, X 必然落在 $(-\infty,\infty)$ 内.

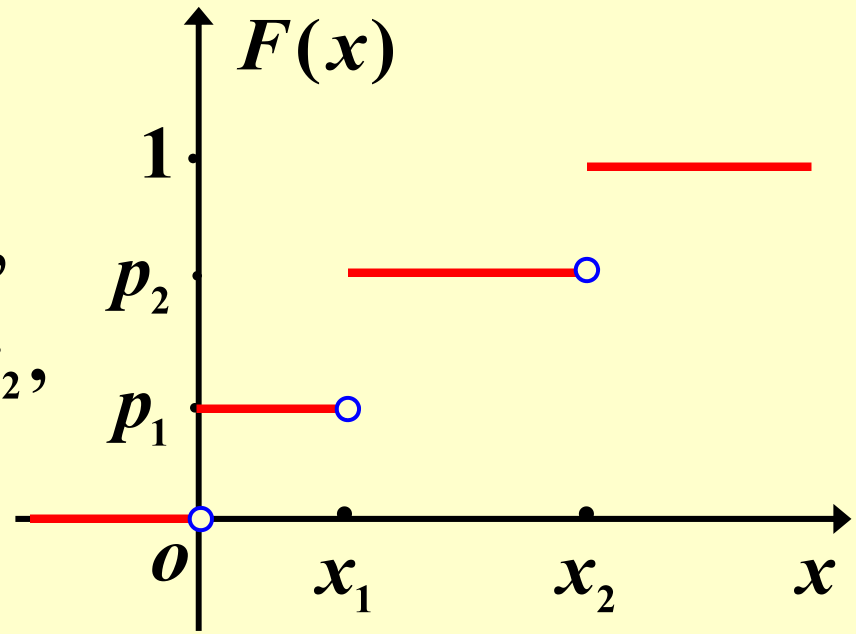


所以 $\lim\limits_{x\to\infty} F(x) = \lim\limits_{x\to\infty} P\{X \le x\} = 1.$

(4) $\lim\limits_{x\to x_0^+} F(x) = F(x_0), \quad (-\infty < x_0 < \infty).$

即任一分布函数处处**右连续**.

$$F(x)=\begin{cases}0, & x<0,\\ p_1, & 0\le x<x_1,\\ p_2, & x_1\le x<x_2,\\ 1, & x\ge x_2.\end{cases}$$



重要公式

$$(1)\ P\{a < X \le b\} = F(b) - F(a),$$

$$(2)\ P\{X > a\} = 1 - F(a).$$

证明 因为 $\{X \le b\} = \{X \le a\} \cup \{a < X \le b\},$

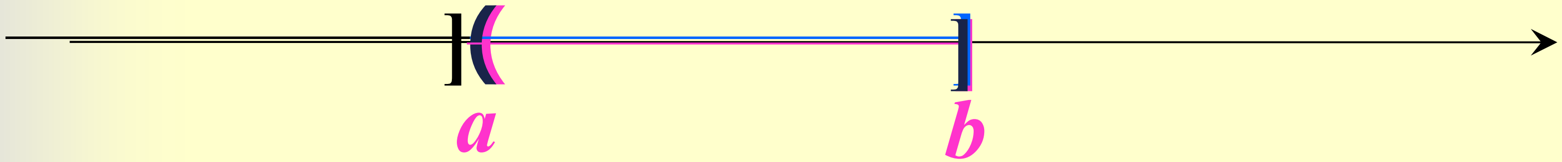
$$\{X \le a\} \cap \{a < X \le b\} = \varnothing,$$

所以 $P\{X \le b\} = P\{X \le a\} + P\{a < X \le b\},$

故 $P\{a < X \le b\} = F(b) - F(a).$

利用分布函数及其性质可以计算

$$P(a<X\le b)=P(X\le b)-P(X\le a)=F(b)-F(a)$$

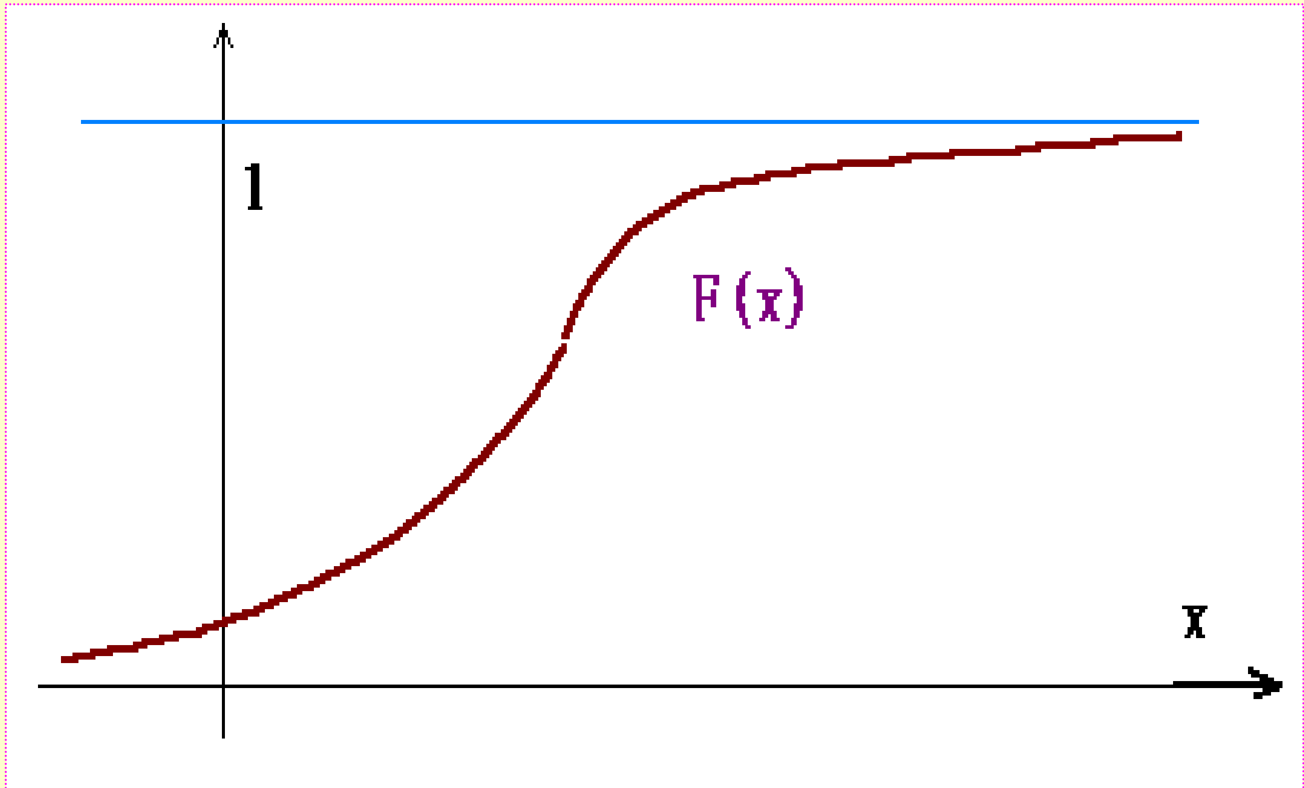


$$P(X>a)=1-P(X\le a)=1-F(a)$$

$$P(X=a)=F(a)-F(a-0)$$

$$\begin{cases} P(a\le X\le b)=\underline{F(b)-F(a-0)} \\ P(a<X<b)=\underline{F(b-0)-F(a)} \\ P(a\le X<b)=\underline{F(b-0)-F(a-0)} \end{cases}$$

分布函数 F(x)的图形



- F(x)是单调不减函数

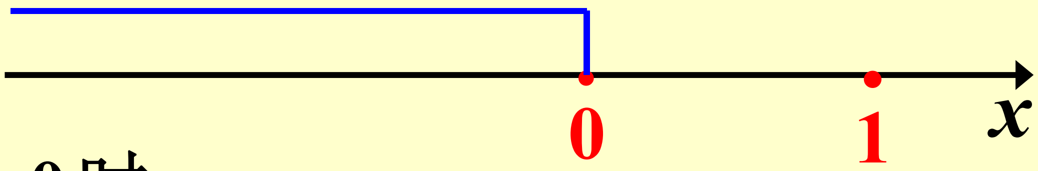
肖柳青 上海交通大学 数学系

实例 1 抛掷均匀硬币, 令

$$X=\begin{cases}1, & \text{出正面},\\ 0, & \text{出反面}.\end{cases}$$

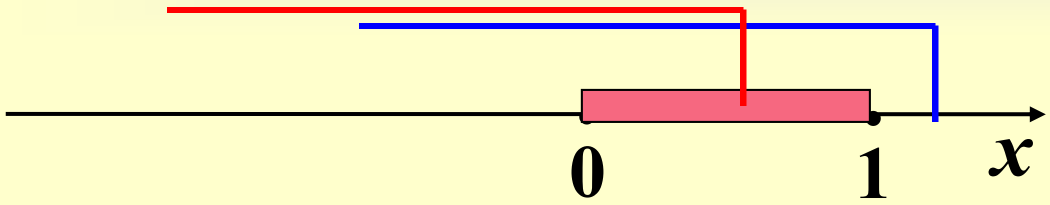
求随机变量 X 的分布函数.

解 $p\{X=1\}=p\{X=0\}=\dfrac{1}{2},$



当 $x<0$ 时,

$$F(x)=P\{X\le x<0\}=0;$$



当 $0 \le x < 1$ 时,

$$F(x) = P\{X \le x\} = P\{X = 0\} = \frac{1}{2};$$

当 $x \ge 1$ 时,

$$F(x) = P\{X \le x\}$$

$$= P\{X = 0\} + P\{X = 1\}$$

$$= \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1.$$

得 $$F(x) = \begin{cases} 0, & x < 0, \\ \frac{1}{2}, & 0 \le x < 1, \\ 1, & x \ge 1. \end{cases}$$

§2.3.3 离散随机变量的概率分布

设离散型随机变量 X 的所有可能取值是

$x_1, x_2, \cdots, x_n, \cdots$，**而**取值 x_k的概率为 p_k

即

$$\boxed{P\{X = x_k\} = p_k}$$

称此式为**X**的分布律（列）或概率分布

（Probability distribution）

概率分布的性质：

- ❑ $p_k \geq 0,\ k = 1, 2, \cdots$ ———— **非负性**
- ❑ $\sum_{k=1}^{\infty} p_k = 1$ ———— **规范性**

离散型随机变量的分布律也可表示为

$$X \sim \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & \cdots & x_n & \cdots \\ p_1 & p_2 & \cdots & p_n & \cdots \end{pmatrix}$$

X	x_1	x_2	$\cdots$	x_n	$\cdots$
p_k	p_1	p_2	$\cdots$	p_n	$\cdots$

离散型随机变量的分布函数:

$$F(x)=P(X\le x)=P(\bigcup_{x_k\le x}(X=x_k))$$

$$=\sum_{x_k\le x}P(X=x_k)=\sum_{x_k\le x}p_k$$

$$p_k=P(X=x_k)=F(x_k)-F(x_{k-1})$$

$F(x)$ 是阶梯函数，在 X 的可能取值 x_k 处发生间断，间断点为第一类跳跃间断点，在间断点处有跃度 p_k

例1 将一枚硬币连掷三次, X 表示 "三次中正面出现的次数", 求 X 的分布律及分布函数, 并求下列概率值 $P\{1 < X < 3\}, P\{X \geq 5.5\}, P\{1 < X \leq 3\}$.

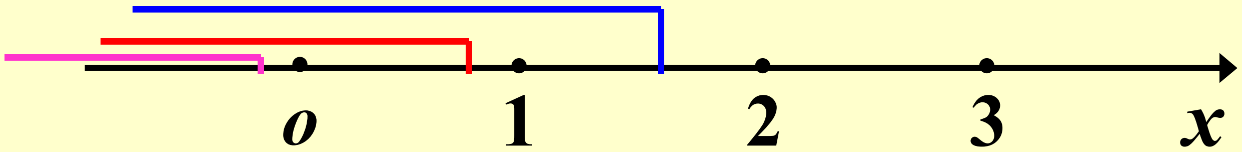
解 设 H − 正面, T − 反面, 则

$$S = \{HHH, HHT, HTH, THH, HTT, THT, TTH, TTT\},$$

因此分布律为

X	0	1	2	3
p	$\frac{1}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{1}{8}$

求分布函数



当 $x < 0$时，

$$F(x) = P\{X \le x\} = 0;$$

当 $0 \le x < 1$时，

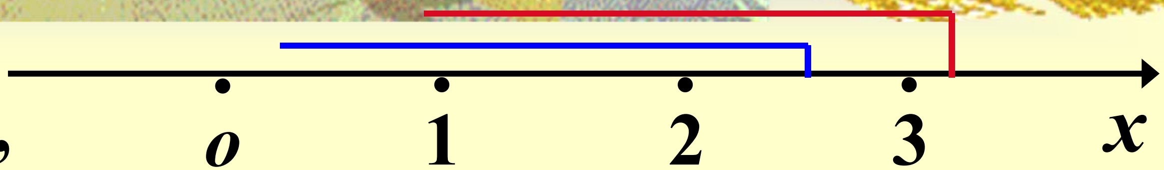
$$F(x) = P\{X \le x\} = P\{X = 0\} = \sum_{x_i \le 0} p_i = \frac{1}{8};$$

当 $1 \le x < 2$时，

$$F(x) = P\{X \le x\} = P\{X = 0\} + P\{X = 1\}$$

$$= \sum_{x_i \le 1} p_i = \frac{1}{8} + \frac{3}{8} = \frac{1}{2};$$

当 $2 \le x < 3$时,



$$F(x) = P\{X \le x\}$$

$$= P\{X = 0\} + P\{X = 1\} + P\{X = 2\} = \sum_{x_i \le 2} p_i$$

$$= \frac{1}{8} + \frac{3}{8} + \frac{3}{8} = \frac{7}{8};$$

当 $x \ge 3$时,

$$F(x) = P\{X \le x\} = P\{X = 0\} + P\{X = 1\}$$

$$+ P\{X = 2\} + P\{X = 3\}$$

$$= \sum_{x_i \le 3} p_i = 1.$$

$$\text{所以 } F(x) = \begin{cases} 0, & x < 0, \\ 1/8, & 0 \le x < 1, \\ 4/8, & 1 \le x < 2, \\ 7/8, & 2 \le x < 3, \\ 1, & x \ge 3. \end{cases}$$

$$P\{1 < X < 3\} = P\{X \le 3\} - P\{X \le 1\} - P\{X = 3\}$$

$$= F(3) - F(1) - P\{X = 3\}$$

$$= 1 - \frac{4}{8} - \frac{1}{8} = \frac{3}{8}.$$

$$P\{X \geq 5.5\} = 1 - P\{X < 5.5\}$$

$$= 1 - P\{X \leq 5.5\} + P\{X = 5.5\}$$

$$= 1 - 1 + 0 = 0.$$

$$P\{1 < X \leq 3\} = P\{X \leq 3\} - P\{X \leq 1\}$$

$$= F(3) - F(1)$$

$$= 1 - \frac{4}{8} = \frac{1}{2}.$$

几种常见的离散型分布

- **(1)** 离散均匀分布

△定义： 若随机变量X只有有限的取值 $x_1, x_2, \cdots, x_n$

并且各个取值的概率都相同，即

$$p(x_i) = \frac{1}{n}, i = 1, 2, \cdots, n$$

则称**X**服从离散均匀分布。其分布函数为

$$F_X(x) = \begin{cases} 0, & -\infty < x < x_1 \\ \dfrac{i}{n}, & x_{i-1} < x < x_i, i = 1, 2, \cdots, n \\ 1, & x_n < x < +\infty \end{cases}$$

如：上抛一枚均匀硬币。

(2) 二项分布

Binomial distribution

- 在n重贝努利试验中,若以X表示事件A发生的次数,

  则X可能的取值为0, 1, 2, 3, …, n.

- 随机变量X的分布律

$$P\{X = k\} = C_n^k p^k (1-p)^{n-k}$$

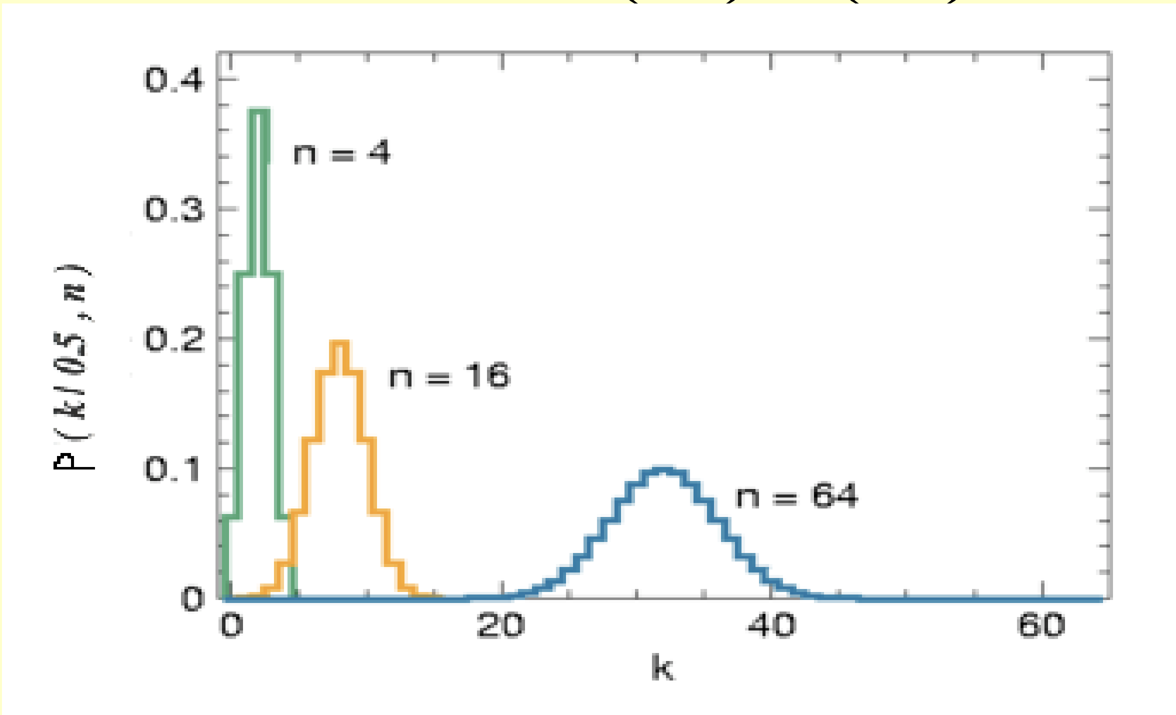
$$k = 0, 1, 2 \ldots, n;$$

其中$0 < p < 1$, 则称X服从参数为 n, p 的二项分布(也称Bernoulli 分布）,记为

X～B(n, p)

例1：在掷3次骰子中，不出现6点的概率是

$$P(3,0,\frac{1}{6})=C_3^0\left(\frac{1}{6}\right)^0\left(\frac{5}{6}\right)^3=0.579$$



二项分布在$p=0.5$时的对称性（自变量为k）。

例2 一大批种子发芽率为90%，今从中任取10粒.
求播种后，求:（1）恰有8粒发芽的概率；
（2）不小于8粒发芽的概率。

解 X～B（10，0.9）

(1) P(X=8)= $C_{10}^{8}0.9^{8}\times 0.1^{2}\approx 0.1937$

(2) $P(x\geq 8)$= P(X=8)+P(X=9)+P(X=10)

$$=C_{10}^{8}0.9^{8}\times 0.1^{2}+C_{10}^{9}0.9^{9}\times 0.1+C_{10}^{10}0.9^{10}$$

$$\approx 0.9298$$

(3) 泊松分布 Poisson distribution

- 定义

若随机变量 X 的分布律为:

$$\boxed{P(X = k) = \frac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda}, k = 0,1,2\ldots}$$

其中λ >0，则称X服从参数为λ的泊松分布

X～P(λ)

- 实际问题中若干R. v. X是服从或近似服从Poisson分布的

- **服务台在某时间段内接待的服务次数X;**
- **交换台在某时间段内接到呼叫的次数Y;**
- **矿井在某段时间发生事故的次数;**
- **显微镜下相同大小的方格内微生物的数目;**
- **单位体积空气中含有某种微粒的数目**

体积相对小的物质在较大的空间内的稀疏分布，都可以看作泊松分布, 其参数 λ 可以由观测值的平均值求出。

例9 已知某电话交换台每分钟接到的呼唤次数X服从

$\lambda=4$ 的泊松分布，分别 求（1）每分钟内恰好接到3次呼唤的概率；（2）每分钟不超过4次的概率

解 $\boxed{P(X=k)=\dfrac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda}}$

$\lambda=4, k=3$

$$P(X=3)=\frac{4^3}{3!}e^{-4} \doteq 0.19563$$

$$P(X\le 4)=P(X=0)+P(X=1)+P(X=2)$$
$$+P(X=3)+P(X=4)=0.628838$$

例2.10. 我们来看美国枪击案。假定它们满足成为泊松分布的三个条件：

1. 枪击案是小概率事件；
2. 枪击案是独立的，不会互相影响；
3. 枪击案的发生概率是稳定的。

根据资料，1982—2012年枪击案的分布情况如表2.1所示。

一年中发生枪击案的数量	年数
0	4
1	10
2	7
3	5
4	4
5	0
6	0
7	1

图 2.7: 美国枪击案的观测值

由统计计算可得：平均每年发生2起枪击案，则$\lambda = 2$，所以年枪击案次数$X\tilde{}\pi(2)$。

一年中发生枪击案的数量	观察值	泊松分布期望值
0	4	4.2
1	10	8.39
2	7	8.39
3	5	5.59
4	4	2.8
5	0	1.12
6	0	0.37
7	1	0.11

图 2.8: 枪击案的实际观测值与泊松分布计算的预期值

从表2.2中可以看到，观察值与由泊松分布计算的期望值还是基本接近的。

常用的离散分布还有几何分布、超几何分布。

二项分布的泊松近似

The Poisson Approximation to the Binomial Distribution

泊松定理

$$C_n^k p^k (1-p)^{n-k} \approx \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}$$

$$\lambda = np$$

实际应用中：当n较大,p较小，np适中时，即可用泊松公式近似替换二项概率公式

若某人做某事的成功率为**1%**，他重复努力**400**次，则至少成功一次的概率为

$$P\{X \geq 1\} = 1 - P\{X = 0\}$$

$$= 1 - 0.99^{400} \approx 0.9820$$

成功次数服从二项概率 $B(400, 0.01)$

有百分之一的希望，就要做百分之百的努力!!

小结

分布函数的特征
$$\begin{cases} 0 \le F(x) \le 1, \quad -\infty < \\ F(x) \text{ 是 } x \text{ 的非减函数;} \\ F(-\infty)=0, \quad F(+\infty)=1; \\ \lim\limits_{x\to x_0^+} F(x) = F(x_0). \end{cases}$$

其图形是右连续的阶梯曲线
在点 x_k 处有跳跃，跃度为 p_k

$$F(x) = \sum_{x_k \le x} p_k$$

↑

分布函数 — $F(x) = P(X \le x)$

$$P(a<X\le b) = F(b) - F(a);$$
$$P(X>a) = 1 - F(a);$$

↑

随机变量 X {全部可能的取值; 取值的概率.

< 连续型

离散型 — 分布列 $\begin{cases} 0 \le p_k \le 1 \\ \sum_{k=1}^{\infty} p_k = 1 \end{cases}$

概率函数或分布律或概率分布

只有两个互逆结果的 n 次独立重复试验

常见的离散型分布

在一定时间内出现在空间给定区域的随机质点的个数

离散均匀分布

X	xi
p_k	1/n

二项分布

$$P(X=k) = C_n^k p^k q^{n-k}, \quad k = 0,1,\cdots,n,$$

$(n+1)p$

$\approx$

泊松分布

$$P(X=k) = e^{-\lambda}\frac{\lambda^k}{k!}, \quad k = 0,1,2,\cdots,$$

二项分布的逼近式

§2.3.4 连续随机变量的概率分布

我们介绍了离散型随机变量及其概率分布.

只要知道了随机变量的分布函数，就可以计算与该随机变量有关的事件的概率.

对于离散型随机变量，如果知道了它的分布列，也就知道了该随机变量取值的概率规律. 在这个意义上，我们说 离散型随机变量由它的分布列唯一确定.

下面，我们将向大家介绍另一种类型的随机变量

—— 连续型随机变量的描述方法.

§ 2.3 连续型随机变量

不能象离散型那样，以指定它取每个值的概率的方式去给出其概率分布

全部可能取值有无穷多，而且充满一个(或若干)区间而不能一一列举

类似于前面对离散型随机变量的讨论，对于连续型随机变量我们首先关心的是：如何描述它取值的概率规律.

分布函数 ？ 其取值的概率规律

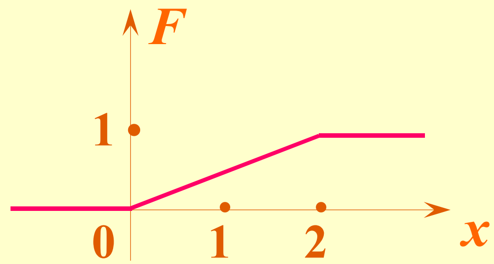
例 1： 设有一质点等可能地落入区间$[0, 2]$内， 令X为落入后这个质点到原点O的距离，求X的分布函数.

解 显然X为随机变量，且可能取值充满了区间$[0, 2]$，

当$x<0$时，$F(x)=P(X\le x)=P(\Phi)=0$;

当$0\le x<2$时，$F(x)=P(X\le x)=x/2$;

当$x\ge 2$时，$F(x)=P(X\le x)=1$.



故X的分布函数为
$$F(x)=\begin{cases}0, & x<0;\\ x/2, & 0\le x<2;\\ 1, & x\ge 2.\end{cases}$$

连续函数

$$F'(x)=f(x)=\begin{cases}1/2, & 0\le x<2;\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$$

非负函数 可积

$$=F(x)-F(-\infty)=\int_{-\infty}^{x} f(t)\,dt$$

一、连续型随机变量的概率密度

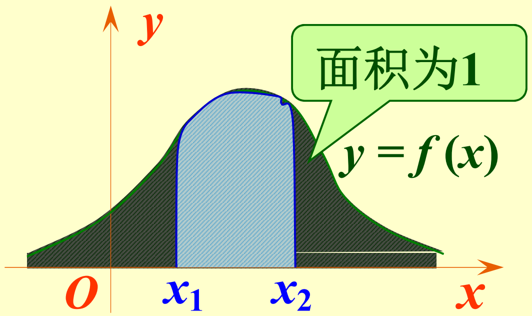
定义1(P. 45) 对于随机变量 X 的分布函数 $F(x)$，若存在非负可积函数 $f(x)$， 使得对任意实数 x，有

连续型的分布函数必连续

$$F(x)=\int_{-\infty}^{x} f(t)dt\ ,$$

则称 X 为连续型随机变量，称 $f(x)$为 X 的概率密度函数， 简称为概率密度或密度(pdf).

判定一个函数 $f(x)$ 为某连续型随机变量的概率密度的充要条件



密度函数的基本特性:

非负性 (1) $f(x)\geq 0$;

规范性 (2) $\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)dt = 1$;

X 取值于 $(x, x+\Delta x]$ 的概率=其密度在此区间上的积分

概率公式 (3) $P(x_1<X\leq x_2) = F(x_2) - F(x_1) = \int_{-\infty}^{x_2} f(t)dt - \int_{-\infty}^{x_1} f(t)dt$

可微性 (4) 若 $f(x)$ 在点 x 处连续， 则 $F'(x)=f(x)$;

独点概率 (5) $P(X=x_0)=0$.

$P(a<X\leq b)=P(a\leq X\leq b)=P(a\leq X<b)=P(a<X\leq b \ =\int_a^b f(t)dt$,

) $P(A)=0 \not\Rightarrow A=\Phi$; $P(B)=1 \not\Rightarrow B=\Omega$.

几乎不可能事件 几乎必然事件

对 $f(x)$ 的进一步理解：若 x 是 $f(x)$ 的连续点，则

质量

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{P(x<X\le x+\Delta x)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\int_x^{x+\Delta x}f(t)dt}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}f(x+\Delta x)=f(x)$$

这表明 X 的密度 $f(x)$ 在 x 这一点的值，恰好是 X 落在区间 $(x, x+\Delta x]$ 上的概率与区间长度 Δx 之比的极限. 如果我们把概率理解为质量，则 $f(x)$ 相当于线密度.

由极限概念知 $P(x<X\le x+\Delta x)\approx f(x)\Delta x$，它表明随机变量 X 取值于区间 $(x, x+\Delta x]$ 的概率近似等于 $f(x)\Delta x$；这表明 $f(x)\Delta x$ 在连续型随机变量理论中所起的作用与 $P\{X=x_k\}=p_k$ 在离散型随机变量理论中所起的作用相类似.

注意，密度函数 $f(x)$ 在某点 a 处的值，并不等于 X 取值的概率. 但这个值越大，则 X 取 a 附近的值的概率就越大. 即在某点密度曲线的高度反映了概率集中在该点附近的程度.

连续型随机变量由它的密度函数所唯一确定. 所以，若已知密度函数，该连续型随机变量的概率规律就得到了全面描述.

例2（P. 47 例2）设随机变量 X 的概率密度为

$$f(x)=\begin{cases} A(4x-2x^2), & 0<x<2; \\ 0, & \text{其它}, \end{cases}$$

（1）确定常数 A;
（2）求 X 的分布函数 $F(x)$;
（3）求 $P(0\le X<1)$，$P(X>1)$.

解 (1) $\because\ 1=\int_{-\infty}^{+\infty}f(t)dt=\int_{-\infty}^{0}0\,dx+\int_0^2 A(4x-2x^2)dx+\int_2^{+\infty}0\,dx=\frac{8}{3}A,\ \therefore\ A=\frac{3}{8}.$

(2) 由 (1) 知 $f(x)=\begin{cases}\frac{3}{2}x-\frac{3}{4}x^2, & 0<x<2; \\ 0, & \text{其它}, \end{cases}$

由概率密度定义知

$$F(x)=\int_{-\infty}^{x}f(t)dt,$$

当 $x<0$ 时，$F(x)=\int_{-\infty}^{x}0\,dt=0$;

当 $0<x<2$ 时，$F(x)=\int_{-\infty}^{0}0\,dt+\int_0^x(\frac{3}{2}t$

当 $x\ge2$ 时，$F(x)=\int_{-\infty}^{0}0\,dt+\int_0^2(\frac{3}{2}t$

$$\therefore\ F(x)=\begin{cases}0, & x\le0; \\ \frac{3}{4}x^2-\frac{1}{4}x^3, & 0<x<2; \\ 1, & x\ge2.\end{cases}$$

(3) 用分布函数求

$P(0\le X<1)=F(1)-F(0)=\frac{1}{2}$,

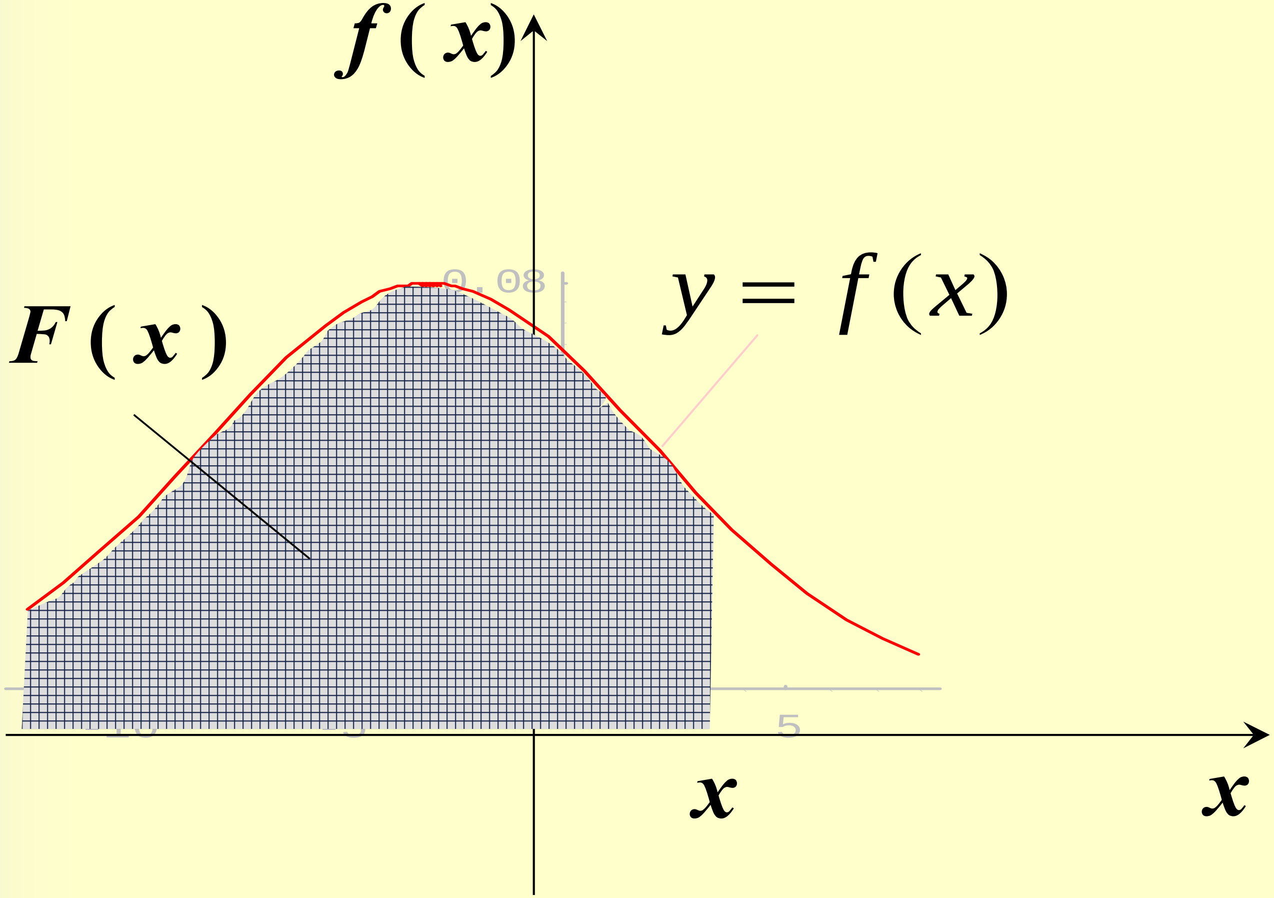
$P(X>1)=1-F(1)=\frac{1}{2}$.

用概率密度求

$P(0\le X<1)=\int_0^1(\frac{3}{2}x-\frac{3}{4}x^2)dx=\frac{1}{2}$,

$P(X>1)=\int_1^2(\frac{3}{2}x-\frac{3}{4}x^2)dx=\frac{1}{2}$.

分布函数$F(x)$与密度函数$f(x)$的几何意义



两种类型的比较：

离散型	连续型
1.概率分布:$p_n=P(X=x_n)$ $(n=1,2,...)$	1.概率密度 $X\sim f(x)$: $P(a<X<b)=\int_a^b f(x)dx$
2.$F(x)=\sum_{x_i\le x} P(X=x_i)$	2. $F(x)=P\{X\le x\}=\int_{-\infty}^{x} f(t)dt$

3.$P(a<X\le b)=F(b)-F(a)$; $P(X>a)=1-F(a)$; $P(X=a)=F(a)-F(a-0)$

两种类型的比较:

离散型	连续型
4.$P(x\in A)=\sum_{x_i\in A}P(X=x_i)$	4.$P\{a<X\le b\}=P\{a<X<b\}$ $=P\{a\le X<b\}=P\{a\le X\le b\}$ $=F(b)-F(a)=\int_a^b f(x)dx$ $P(X=a)=0$
5.$F(x)$有可列个间断点,且右连续	5.$F(x)$连续,且$f(x)=F'(x)$

二、 几个常见的连续型随机变量

1. 连续型均匀分布

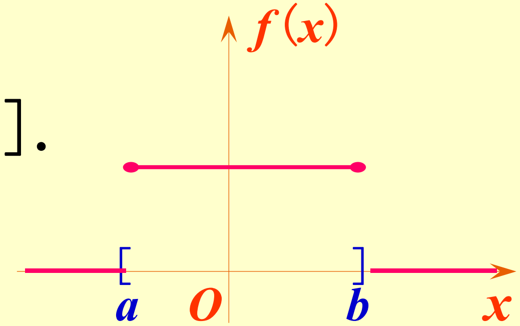
假设连续型随机变量 X 在区间$[a, b]$上取值，且取值在$[a,b]$中任意子区间内的概率仅与这个子区间的长度成正比，而与子区间的位置无关， 即 X 的取值在$[a,b]$上具有均等性.

定义1(P. 49) 若连续型随机变量 X 的概率密度为

可描述在某区间上具有等可能结果的随机试验

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{b-a}, & a\le x\le b;\\ 0, & \text{其它},\end{cases}$$

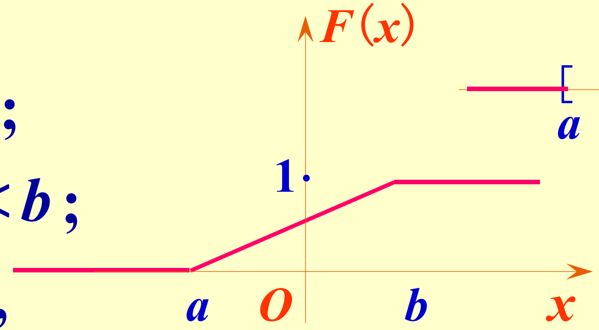
$$\int_a^b \frac{1}{b-a}dt=1$$



则称 X 在$[a,b]$上服从均匀分布, 记作 $X\sim U[a,b]$.

均匀分布的分布函数:

$$F(x)=\int_{-\infty}^{x}f(t)dt=\begin{cases}0, & x<a;\\ \dfrac{x-a}{b-a}, & a\le x<b;\\ 1, & x\ge b,\end{cases}$$



典型应用：数值计算中由于小数点后某位小数四舍五 入所引起的误差；两辆公共汽车前后通过某停车站的时间(乘客候车时间)等.

例4 (P. 50) 设某公共汽车站每 10 分钟有一班车通过，则在任一时刻到站乘客的候车时间 X(单位: 分钟) 在区间 $[0, 10]$ 上服从均匀分布，试求乘客候车时间超过 6 分钟的概率.

解 $\because X \sim U[a, b]$，$\therefore f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{10}, & 0 \le x \le 10; \\ 0, & \text{其它}, \end{cases}$

所求概率为 $P\{X>6\}=\int_6^{+\infty} f(x)dx=\int_6^{10}\dfrac{1}{10}dx=\dfrac{2}{5}$.

例5 (P. 59) 设随机变量 $X \sim U[2, 5]$，现对 X 进行三次独立观测，求至少有两次观测值大于 3 的概率.

解 $\because X \sim U[2, 5]$，$\therefore f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{3}, & 2 \le x \le 5; \\ 0, & \text{其它}, \end{cases}$ 则 $P\{X>3\}=\int_3^5 \dfrac{1}{3}dx=\dfrac{2}{3}$.

设 Y 表示对 X 的观测值大于 3 的次数，$Y=0,1,2,3$，则 $Y \sim B(3, 2/3)$，

所求概率为 $P(Y \ge 2)=\sum_{k=2}^{3} P(Y=k)=\sum_{k=2}^{3} C_3^k (2/3)^k (1/3)^{3-k}=\dfrac{20}{27}$.

2. 正态分布

正态分布是应用最广泛的一种连续型分布.

德莫佛最早发现了二项概率的一个近似公式，这一公式被认为是正态分布的首次露面.

十九世纪前叶，高斯加以推广得到正态分布，所以通常称为高斯分布.

定义3（P. 50） 若连续型随机变量 X 的概率密度函数为

$$f(x)=\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}},\quad -\infty<x<\infty$$

其中 $-\infty<\mu<+\infty$，$\sigma>0$ 为常数，则称 X 服从参数为 μ 和 σ 的正态分布，记为 $X\sim N(\mu,\sigma^2)$.

在各种分布中具首要地位

$f(x)$ 所确定的曲线叫作正态曲线.

由于连续型随机变量唯一地由它的密度函数所描述，我们来看看正态分布的密度函数有什么特点.

回忆一个重要的二重积分：

$$\int_0^{+\infty} e^{-x^2}dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_0^{+\infty} e^{-x^2}dx = \frac{1}{2} \quad \Rightarrow \frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2}dx = 1$$

令 $\left.\begin{array}{l} x = \dfrac{t-\mu}{\sqrt{2}\,\sigma}, \\ dx = \dfrac{1}{\sqrt{2}\,\sigma}dt \end{array}\right\} \Rightarrow \dfrac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{(t-\mu)^2}{2\sigma^2}}dt = 1$

$$\boxed{f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}, \quad -\infty < x < \infty}$$

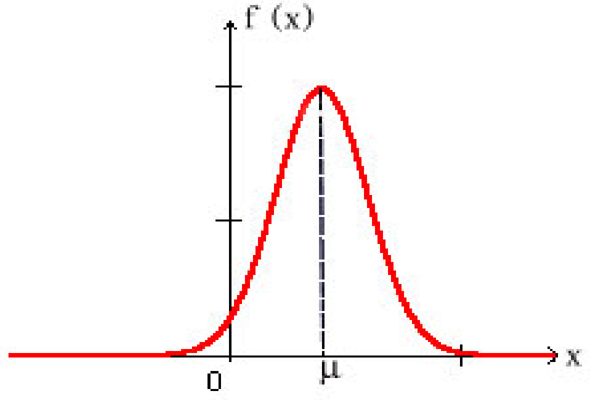
正态分布密度的性质 $f(x)=\dfrac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}},\quad -\infty<x<\infty$

（1）在 $x=\mu$ 处取到最大值 $f(\mu)=\boxed{\dfrac{1}{\sqrt{2\pi}\cdot\sigma}}$；

（2）正态分布的密度曲线位于 x 轴的上方，且关于 $x=\mu$ 对称，μ决定图形的中心位置；

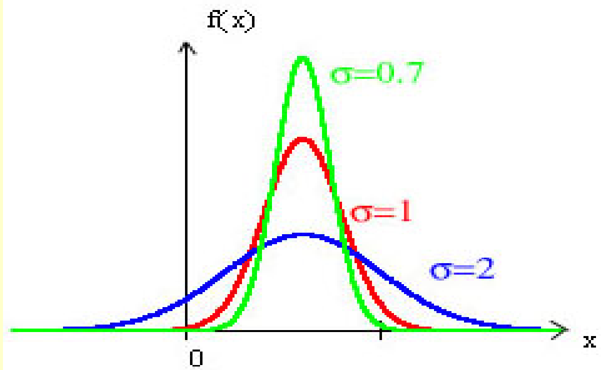
（3）密度曲线 $y=f(x)$ 有拐点 $\left(\mu\pm\sigma,\ \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}\cdot e\sigma}\right)$；

（4）$f(x)$ 以 x 轴为水平渐近线；



正态分布 $N(\mu,\sigma^2)$ 的密度函数图形的特点：

两头低，中间高，左右对称的“峰”状

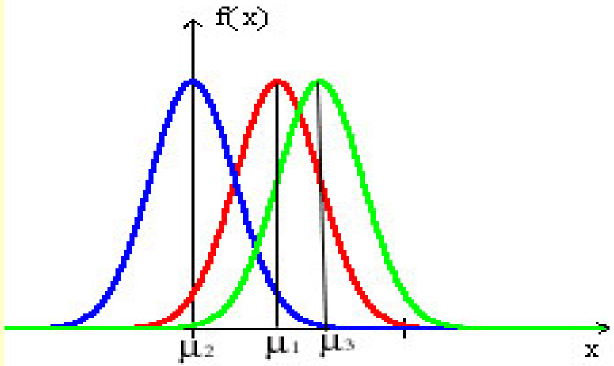


若固定μ，改变 σ 的值，$\sigma\downarrow\ \Rightarrow\ f(\mu)\uparrow$，反之亦然，

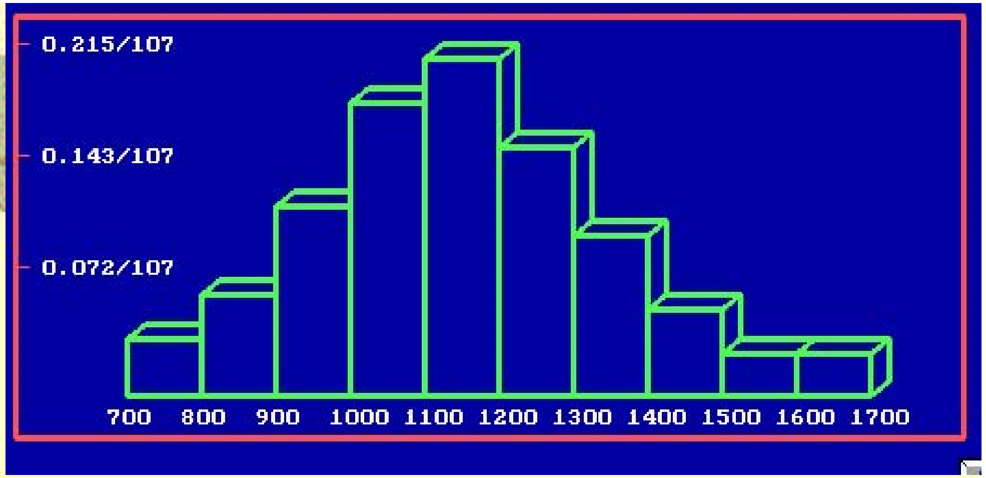
σ 决定了图形中峰的陡峭程度

若固定 σ，改变 μ 的值，则密度曲线左右整体平移.

μ 决定了图形的中心位置

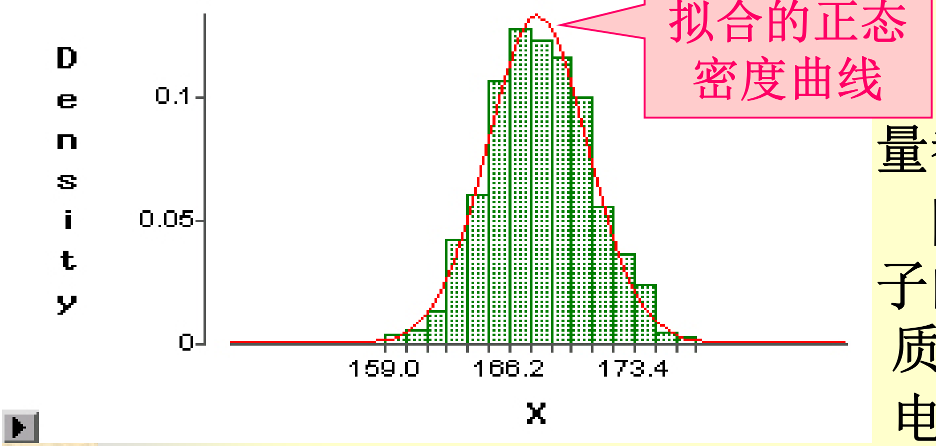


用上海2012年降雨量的数据画出了频率直方图.从直方图，我们可以初步看出, 年降雨量近似服从正态分布.



下面是我们用某大学男大学生的身高的数据画出的频率直方图.

可见, 男大学生的身高应服从正态分布.



在自然现象和社会现象中大量的随机变量都服从或者近似服从正态分布.

除了上面提到的年降雨量和某地区成年男子的身高、体重外, 正常条件下各种产品的质量指标，如零件的尺寸；纤维的强度；电子元器件的信号噪声、电压、电流；农作物的产量，小麦的穗长、株高；射击目标的水平或垂直偏差，测量误差，生物学中同一群体的形态指标，经济学中的股票价格、产品的销量等等，都服从或近似服从正态分布.

有很多分布还可以用正态分布近似. 而正态分布自身还有很多良好的性质.

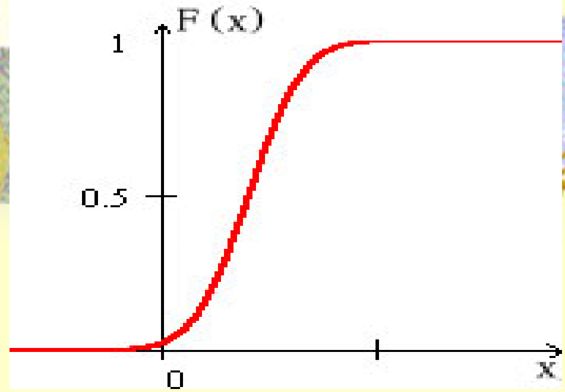
若影响某一数量指标的随机因素很多, 每一因素独立, 但每个因素所起的作用不大.

服从正态分布

正态分布的分布函数

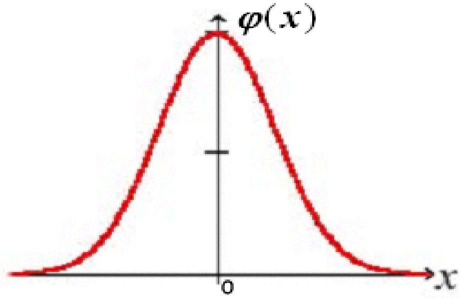
若随机变量 $X \sim N(\mu,\sigma^2)$， 则

$$f(x)=\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}, \qquad -\infty<x<\infty$$



X 的分布函数

$$F(x)=\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{x}e^{-\frac{(t-\mu)^2}{2\sigma^2}}dt, \quad -\infty<x<\infty$$

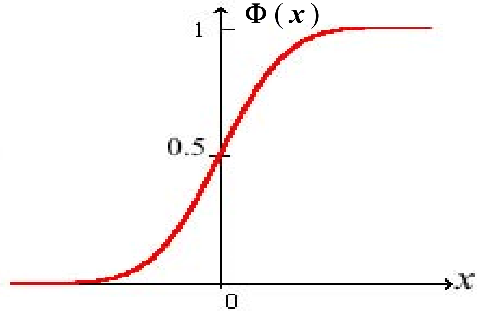


下面我们介绍一种最重要的正态分布

——标准正态分布

$\mu=0$, $\sigma=1$ 的正态分布称为**标准正态分布**.

其密度函数和分布函数常用 $\varphi(x)$ 和 $\Phi(x)$ 表示:

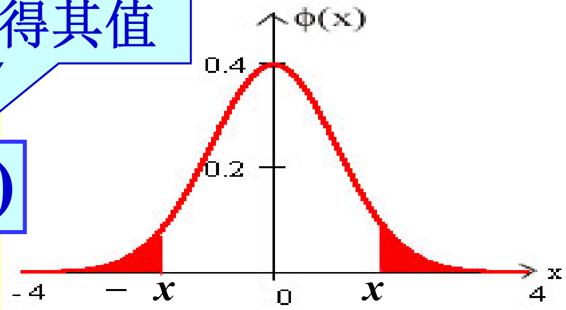


$$\varphi(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}}, \qquad -\infty<x<\infty$$

$$\Phi(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{x}e^{-\frac{t^2}{2}}dt, \quad -\infty<x<\infty$$

可查表得其值

$$\boxed{\Phi(-x)=1-\Phi(x)}$$



例7 (P. 52) 设 $X\sim N(0,1)$，求 $P(X<0.5)$，$P(X>2.5)$ 及 $P(-1.64\le X<0.82)$.

查表得

解 $P(X<0.5)=\Phi(0.5)=0.6915$；

$P(X>2.5)=1-\Phi(2.5)=1-0.9938=0.0062$；

$P(-1.64\le X<0.82)=\Phi(0.82)-\Phi(-1.64)$

$=\Phi(0.82)-[1-\Phi(1.64)]=0.7434$；

设 $X\sim N(\mu,\sigma^2)$，

$s=\dfrac{t-\mu}{\sigma}$　　$dt=\sigma ds$

$$F(x)=\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{x}e^{-\frac{(t-\mu)^2}{2\sigma^2}}dt=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\frac{x-\mu}{\sigma}}e^{-\frac{s^2}{2}}ds=\Phi\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right).$$

即若 $X\sim N(\mu,\sigma^2)\xrightarrow{Y=\frac{X-\mu}{\sigma}}Y\sim N(0,1)$

标准正态分布的重要性在于，任何一个一般的正态分布都可以通过线性变换转化为标准正态分布.

只需将标准正态分布的分布函数制成表，就可以解决正态分布的概率计算问题.

$$P(a<X<b)=\Phi\left(\frac{b-\mu}{\sigma}\right)-\Phi\left(\frac{a-\mu}{\sigma}\right)$$

$$P(X\le b)=\Phi\left(\frac{b-\mu}{\sigma}\right)$$

例8 (P. 53) 某地区8月份降雨量 X 服从 $\mu=185\text{mm}$, $\sigma=28\text{mm}$ 的正态分布，写出 X 的概率密度，并求该地区明年8月份降雨量超过250mm的概率.

解 $\because\ X \sim N(185, 28^2)$，$\therefore\ f(x)=\dfrac{1}{28\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{(x-185)^2}{2\times 28^2}}$, $-\infty < x < \infty$

所求概率为 $P(X>250)=1-P(X\le 250)=1-\Phi(\dfrac{250-185}{28})$

$=1-\Phi(2.32)=1-0.9898=0.0102$.

上一讲我们已经看到，当 n 很大，p 接近 0 或 1 时，二项分布近似泊松分布；可以证明，如果 n 很大，而 p 不接近于 0 或 1 时，二项分布近似于正态分布.

再看一个应用正态分布的例子

例9 公共汽车车门高度是按男子与车门顶头碰头机会在0.01以下来设计的． 若男子身高 $X \sim N(170, 6^2)$，问门高度应如何确定?

解 设车门高度为 h cm,

按设计要求应有 $P(X \geq h) \leq 0.01$ 或 $P(X < h) \geq 0.99$,

下面求满足上式的最小 h： $\because X \sim N(170, 6^2)$, $\therefore \dfrac{X-170}{6} \sim N(0,1)$,

即 $P(X < h) = \Phi(\dfrac{h-170}{6}) \geq 0.99$

查表得 $\Phi(2.33) = 0.9901 > 0.99$， $\therefore \dfrac{h-170}{6} = 2.33$,

$\Rightarrow h = 170 + 13.98 \approx 184$.

设计车门高度为184mm时，可使男子与车门顶碰头机会不超过0.01.

若 $X \sim N(\mu, \sigma^2)$ 时，要求满足 $P(X > x_0) = p$ 的 x_0 ：

$$P(X > x_0) = p \longrightarrow \Phi(\frac{x_0-\mu}{\sigma}) = 1-p \xrightarrow{\text{反查正态分布表}} \frac{x_0-\mu}{\sigma} = \alpha \longrightarrow x_0 = \mu + \sigma\alpha$$

例12 (P. 53)　设 $X \sim N(\mu, \sigma^2)$，求 $P(|X-\mu| < k\sigma)$ $k=1,2,3$.

解　$P(|X-\mu| < 3\sigma) = P(\mu-3\sigma < X < \mu+3\sigma)$

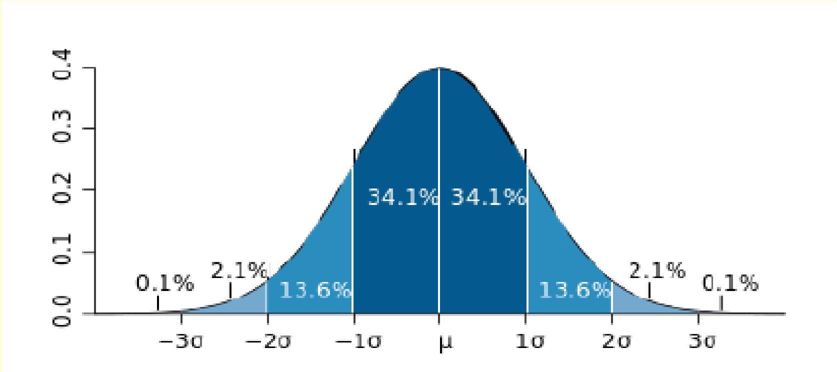
$$= \Phi\left(\frac{\mu+3\sigma-\mu}{\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{\mu-3\sigma-\mu}{\sigma}\right)$$

$$= \Phi(3) - \Phi(-3) \quad = 0.9974$$

类似计算可得，$P(|X-\mu| \le \sigma) = 0.6826$,

$$P(|X-\mu| \le 2\sigma) = 0.9554 ,$$

这表明 X 的取值几乎全部集中在区间 $[\mu-3\sigma, \mu+3\sigma]$ 内，超出这个范围的可能性不到 0. 3 % 从而可以忽略不计.

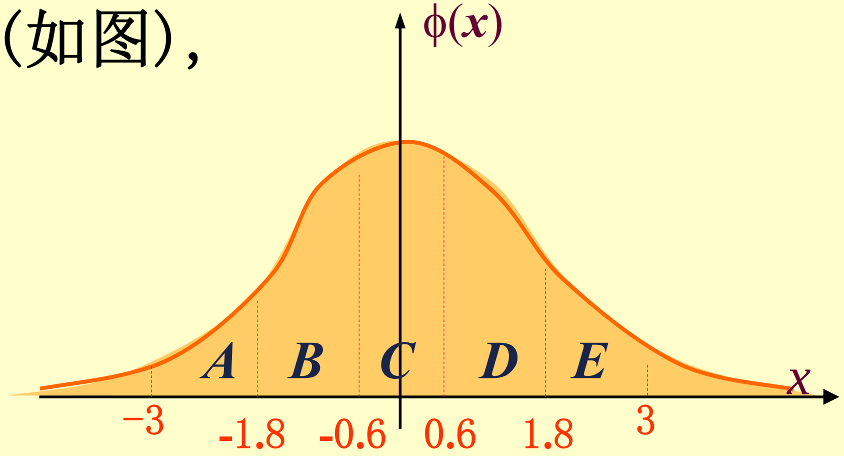


这在统计学上称作 3σ 准则(三倍标准差原则).

为应用方便，下面引入标准正态分布分位数的概念：

例13（按能力分组）**学生学习能力服从正态分布,若某班有200名学生,按能力分成5组参加某项测验,求各组分别应有多少人?**

解 设学习能力$X\sim N(0,1)$，由三σ原则, 可认为 X 落在$(-3, 3)$内, 现分成组距相同的五组 A, B, C, D, E(如图), 则每组应占6/5的范围， 查表可知



$$P\{-3 < X \le -1.8\} = 0.03458,$$

$$P\{-1.8 < X \le -0.6\} = 0.23837,$$

$$P\{-0.6 < X \le 0.6\} = 0.03458,$$

由对称性可知

A 组和E 组应有$200\times0.03458\approx7$（人）

B 组和D 组应有$200\times0.23837\approx47$（人）

C 组应有$200-47\times2-7\times2=92$（人）

3.对数正态分布

在金融中，证券价格是一个随机变量，通常的假设是它服从对数正态分布。对数正态分布是对数为正态分布的任意随机变量的概率分布。如果*X*是正态分布的随机变量，则指数函数 e^X 为对数正态分布；同样，如果*Y*是对数正态分布，则**ln(*Y*)**为正态分布。其密度函数为

$$\forall x > 0$$

$$f(x;\mu,\sigma) = \frac{1}{x\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(\ln x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$$

即记 $\ln(X) \sim N(\mu, \sigma^2)$

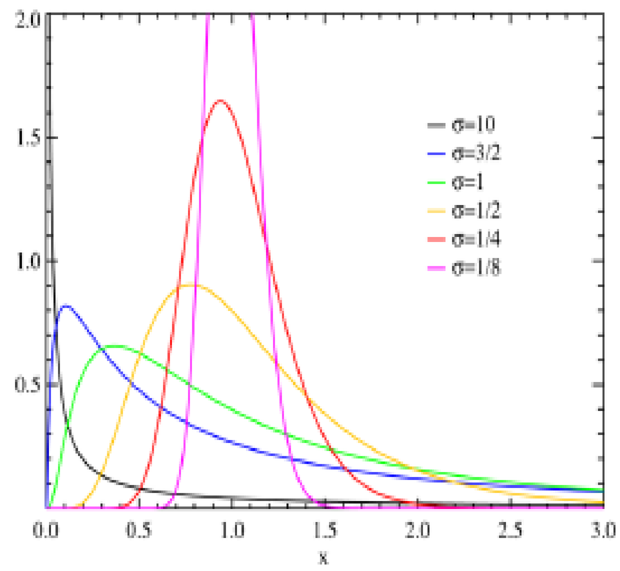
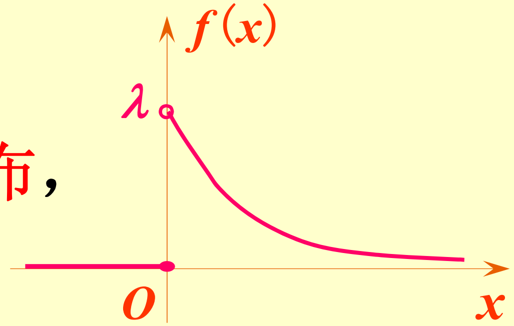


图 2.13: 对数正态概率密度和分布函数的曲线

4. 指数分布

定义2　若连续型随机变量 X 的概率密度为

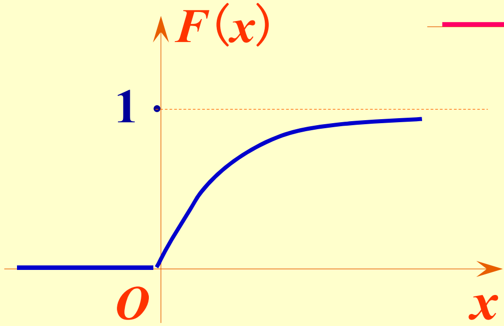
$$f(x)=\begin{cases}\lambda e^{-\lambda x}, & x>0;\\ 0, & x\le 0,\end{cases}$$



其中 $\lambda>0$ 为常数，则称 X 服从参数为 λ 的指数分布，记为 $X\sim E(\lambda)$.

指数分布的分布函数:

$$F(x)=\begin{cases}1-e^{-\lambda x}, & x>0;\\ 0, & x\le 0;\end{cases}$$



指数分布在可靠性理论中描绘设备工作的可靠时间. 有些系统的寿命分布也可用指数分布来近似，如电子产品或动物寿命的分布，当产品的失效是偶然失效时其寿命服从指数分布. 在排队论中它被广泛地用于描绘等待时间，如电话通话时间、各种随机服务系统的服务时间、等待时间等. 在更新和维修问题中描绘设备的寿命和维修时间. 指数分布是伽玛分布和威布尔分布的特殊情况.

一般地，当随机质点流中在长 t 的时间内出现的质点数服从参数为 λt 的泊松分布时，其相继出现两个质点的事件间就服从参数为 λ 的指数分布.

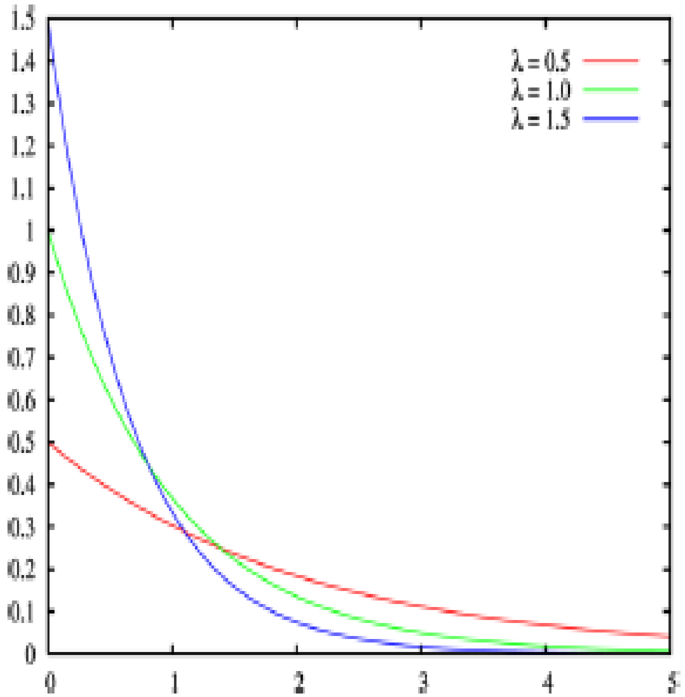


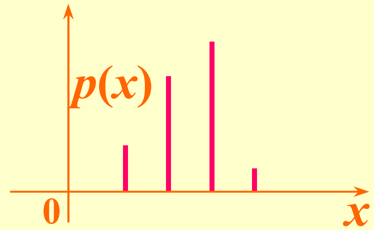
图 2.14: 指数分布的概率密度函数和分布函数的曲线（$\lambda = \mu^{-1}$）

指数分布可以用来表示独立随机事件发生的时间间隔，比如旅客进机场的时间间隔、中文的维基百科新条目出现的时间间隔等等。

除此之外，常用的连续概率分布还有学生t-分布、F分布、χ^2分布、Γ分布和Weibul分布，在金融中还使用Levy分布等。

复习

随机变量 X $\begin{cases}\text{全部可能的取值}\\ \text{取值的概率分布}\end{cases}$

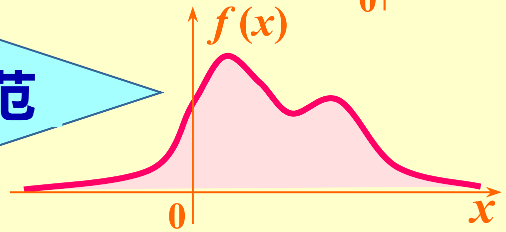


至此，我们已介绍了两类重要的随机变量:

$\begin{cases}\text{离散型 —— 分布列 } P(X=x_k)=p_k\\ \text{连续型 —— 密度函数 } f(x)\end{cases}$

非负 规范

是判定一个函数是否为某随机变量X的分布列或密度的充要条件.



分布函数

$F(X)=P(X\le x)$

$F(x)=\sum_{x_k\le x} p_k$ 其图形是右连续的阶梯曲线

$F(x)=\int_{-\infty}^{x} f(t)dt$，其图形是连续曲线

常见的分布

- 离散型：离散均匀分布、二项分布、泊松分布、超几何分布、几何分布
- 连续型：均匀分布、正态分布、对数正态、指数分布

常见的离散型分布

两点分布 $X\sim(0-1)$

X	0	1
p_k	$1-p$	p

二项分布 $X\sim B(n,p)$

$$P(X=k)=C_n^k p^k q^{n-k} \approx P(X=k)=e^{-\lambda}\frac{\lambda^k}{k!}$$

$k=0,1,\cdots,n,$

$(n+1)p$

只有两个互逆结果的 n 次独立重复试验

泊松分布 $X\sim P(\lambda)$

$k=0,1,2,\cdots,$

二项分布的逼近式

在一定时间内出现在空间给定区域的随机质点的个数

超几何分布 $X\sim H(M,N,n)$

$$P(X=k)=\frac{C_M^k C_{N-M}^{n-k}}{C_N^n}$$

$k=0,1,\cdots,L$

$L=\min\{M,n\}$

对含有两类元素的有限总体进行不放回抽样时某类元素个数的概率分布

几何分布

$$P(X=k)=(1-p)^{k-1}\cdot p$$

$k=1,2,\cdots$

$(0<p<1),$

无穷次伯努利实验中A首次发生的试验次数

常见的连续型分布

均匀分布

$X \sim U[a,b]$

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{b-a}, & a\le x\le b;\\ 0, & \text{其它},\end{cases}$$

$$F(x)=\begin{cases}0, & x<a,\\ \dfrac{a-x}{b-a}, & a\le x<b,\\ 1, & x\ge b.\end{cases}$$

X在区间<a, b>上取值, 且取值在<a, b>中任意小区间内的概率仅与小区间的长度成正比

描述在某区间上具有等可能结果的随机试验

指数分布

$X\sim E(\lambda)$

$$f(x)=\begin{cases}\lambda e^{-\lambda x}, & x>0;\\ 0, & x\le 0,\end{cases}$$

$$F(x)=\begin{cases}1-e^{-\lambda x}, & x\ge 0\\ 0, & x<0\end{cases}$$

描述电子产品或动物寿命的分布, 各种随机服务系统的服务时间、等待时间等

正态分布

$X\sim N(\mu,\sigma^2)$

$$f(x)=\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}},\quad -\infty<x<\infty$$

描述影响某一数量指标的随机因素很多，每一因素独立，但每个因素所起作用不大的随机试验


谢谢各位，再见！