Institute of Media,
Information, and Network

命题逻辑的等值和推理演算

Prof. Junni Zou

邹君妮

http://www.cs.sjtu.edu.cn/~zou-jn/

Dept. of Computer Science and Engineering
Shanghai Jiao Tong University

2 Mar. 2018

命题逻辑的等值和推理演算

- 推理形式和推理演算是数理逻辑研究的基本内容
- 推理过程是从前提出发，根据所规定的规则来推导出结论的过程
- 重言式是重要的逻辑规律，正确的推理形式，等值式都是重言式

等值的定义

- 将初等数学里的＋、 - 、 ×、 ÷等运算符看作是数与数之间的联结词，那么由这些联结词所表达的代数式之间，可建立许多等值式如下：

$$x^2-y^2=(x+y)(x-y)$$

$$(x+y)^2=x^2+2xy+y^2$$

$$\sin^2x+\cos^2x=1$$

……

在命题逻辑里也可建立一些重要的等值式

等值的定义

- **给定两个命题公式A和B，而$P_1…P_n$是出现于A和B中的所有命题变项，那么公式A和B共有2^n个解释，若对其中的任一解释，公式A和B的真值都相等，就称A和B是等值的（或逻辑等价的），记作A = B 或 A $\Leftrightarrow$ B。**
- **可以根据真值表来判明两个公式是否是等值的**

等值的定义

- **例1: 证明 $(P\wedge\neg P)\vee Q = Q$**

证明: 画出$(P\wedge\neg P)\vee Q$与Q的真值表，可看出等式是成立的

P	Q	$P\wedge\neg P$	$(P\wedge\neg P)\vee Q$
F	F	F	F
F	T	F	T
T	F	F	F
T	T	F	T

图 2.1.1

等值的定义

- **例2: 证明 $P \vee \neg P = Q \vee \neg Q$**

证明：画出$P \vee \neg P$，$Q \vee \neg Q$的真值表，可看出它们是等值的，而且它们都是重言式。

- **两个公式等值并不要求它们一定含有相同的命题变项。若仅在等式一端的公式里有变项P出现，那么等式两端的公式其真值均与P无关**

“=”与“↔”

双条件词“↔”是一种逻辑联结词，公式G↔H是命题公式，其中“↔”是一种逻辑运算，**G↔H的结果仍是一个命题公式。**而逻辑等值“＝”则是描述了两个公式G与H之间的一种逻辑值关系，G＝H表示“命题公式G等值于命题公式H”，**G＝H 的结果不是命题公式**。

如果要求用计算机来判断命题公式G、H是否逻辑等值，即G＝H那是办不到的，然而计算机却可“计算”公式G↔H是否是永真公式。

等值定理

- **等值定理**：对公式A和B，A = B的充分必要条件是$A \leftrightarrow B$是重言式。
- 若$A \leftrightarrow B$为重言式（A、B由简单命题P_1，…，P_n构成，对A，B的一个解释，指的是对P_1，…，P_n的一组具体的真值设定），则在任一解释下A和B都只能有相同的真值。
- 证明两个公式等值，只要证明由这两个公式构成的双条件式是重言式即可。

等值定理

- “＝”不是联结词，在合式公式定义里没有“＝”出现。
- A ＝ B 是表示公式A与B的一种逻辑关系。这种关系具有三个性质:

  1. 自反性　A ＝ A
  2. 对称性　若 A ＝ B，则 B ＝ A
  3. 传递性　若 A ＝ B, B ＝ C，则 A ＝ C

等值证明

例　证明公式G_1＝（P↔Q）与公式G_2＝(P→Q)∧(Q→P)之间是等值的。

解： 根据等值定理，只需判定公式G_3＝（P↔Q）↔((P→Q)∧(Q→P))为永真公式。

P　Q	G_3＝(P↔Q)↔((P→Q)∧(Q→P))
0　0	1　1　1　1　1
0　1	0　1　1　0　0
1　0	0　1　0　0　1
1　1	1　1　1　1　1

等值证明

- 用真值表可以判断两个命题公式是否等值，当命题变项较多时，工作量很大。
- 另一个方法：利用已知的等值公式，以它们为基础进行演算，来证明公式等值。

等值公式

- **基本的等值公式（命题定律）**

1. 双重否定律

$$\neg\neg P = P$$

2. 结合律

$$(P \lor Q) \lor R = P \lor (Q \lor R)$$
$$(P \land Q) \land R = P \land (Q \land R)$$
$$(P \leftrightarrow Q) \leftrightarrow R = P \leftrightarrow (Q \leftrightarrow R)$$

3. 交换律

$$P \lor Q = Q \lor P$$
$$P \land Q = Q \land P$$
$$P \leftrightarrow Q = Q \leftrightarrow P$$

等值公式

4. 分配律

$$P \vee (Q \wedge R) = (P \vee Q) \wedge (P \vee R)$$

$$P \wedge (Q \vee R) = (P \wedge Q) \vee (P \wedge R)$$

$$P \rightarrow (Q \rightarrow R) = (P \rightarrow Q) \rightarrow (P \rightarrow R)$$

5. 等幂律（恒等律）

$$P \vee P = P$$

$$P \wedge P = P$$

$$P \rightarrow P = T$$

$$P \leftrightarrow P = T$$

等值公式

6. 吸收律

$$P \lor (P \land Q) = P$$
$$P \land (P \lor Q) = P$$

7. 摩根律

$$\neg(P \lor Q) = \neg P \land \neg Q$$
$$\neg(P \land Q) = \neg P \lor \neg Q$$

对蕴涵词、双条件词作否定有

$$\neg(P \rightarrow Q) = P \land \neg Q$$
$$\neg(P \leftrightarrow Q) = \neg P \leftrightarrow Q = P \leftrightarrow \neg Q$$
$$= (\neg P \land Q) \lor (P \land \neg Q)$$

等值公式

8. 同一律

$$P \vee F = P$$
$$P \wedge T = P$$
$$T \rightarrow P = P$$
$$T \leftrightarrow P = P$$

还有

$$P \rightarrow F = \neg P$$
$$F \leftrightarrow P = \neg P$$

9. 零律

$$P \vee T = T \qquad P \rightarrow T = T$$
$$P \wedge F = F \qquad F \rightarrow P = T$$

等值公式

10. 补余律

$$P \vee \neg P = T$$

$$P \wedge \neg P = F$$

还有

$$P \rightarrow \neg P = \neg P$$

$$\neg P \rightarrow P = P$$

$$P \leftrightarrow \neg P = F$$

常用等值公式

- 由于人们对¬、∨、∧更为熟悉，常将含有→和↔的公式化成仅含有¬、∨、∧的公式。这也是证明和理解含有→，↔的公式的一般方法。
- 公式11-18是等值演算中经常使用的。

常用等值公式

- **11. $P \to Q = \neg P \vee Q$**

对$P \to Q$进行运算时，不如用$\neg P \vee Q$来得方便。而且以$\neg P \vee Q$表示$P \to Q$帮助我们理解如果P则Q的逻辑含义。问题是这种表示也有缺点，丢失了P、Q间的因果关系。

常用等值公式

- **12. $P \to Q = \neg Q \to \neg P$**

如将$P \to Q$视为正定理，那么$\neg Q \to \neg P$就是相应的逆否定理，它们必然同时为真，同时为假，所以是等值的。

常用等值公式

- **13. $P \to (Q \to R) = (P \land Q) \to R$**

P是(Q→R)的前提，Q是R的前提，于是可将两个前提的合取P∧Q作为总的前提。即如果P则如果Q则R, 等价于如果P与Q则R。

常用等值公式

- **14. $P \leftrightarrow Q = (P \wedge Q) \vee (\neg P \wedge \neg Q)$**

$P \leftrightarrow Q$为真，有两种可能的情形，即$(P \wedge Q)$为真或$(\neg P \wedge \neg Q)$为真。而$P \wedge Q$为真，必是在$P = Q = T$的情况下出现，$\neg P \wedge \neg Q$为真，必是在$P = Q = F$的情况下出现。从而可说，$P \leftrightarrow Q$为真，是在P、Q同时为真或同时为假时成立。这是从取真来描述这等式。

常用等值公式

- **15. $P \leftrightarrow Q = (P \lor \neg Q) \land (\neg P \lor Q)$**

  $P \leftrightarrow Q$为假，有两种可能的情形，即$(P \lor \neg Q)$为假或$(\neg P \lor Q)$为假，而$P \lor \neg Q$为假，必是在$P = F$，$Q = T$的情况下出现，$\neg P \lor Q$为假，必是在$P = T$，$Q = F$的情况下出现。从而可说$P \leftrightarrow Q$为假，是在P真Q假或P假Q真时成立。这是从取假来描述这等式 。

常用等值公式

- 16. $P \leftrightarrow Q = (P \to Q) \land (Q \to P)$

  这表明$P \leftrightarrow Q$成立，等价于正定理$P \to Q$和逆定理$Q \to P$都成立。

- 17. $P \to (Q \to R) = Q \to (P \to R)$

  前提条件P、Q可交换次序。

- 18. $(P \to R) \land (Q \to R) = (P \lor Q) \to R$

  左端说明的是由P而且由Q都有R成立。从而可以说由P或Q就有R成立，这就是等式右端。

置换规则

- **置换：对公式A的子公式，用与之等值的公式来代换便称置换**
- **置换规则　公式A的子公式置换后A化为公式B，必有A ＝ B**
  - 当A是重言式时，置换后的公式B必也是重言式
- **置换与代入有区别。置换只要求A的某一子公式作代换，不必对所有同一的子公式都作代换**

等值演算举例

例1： 证明$(\neg P\wedge(\neg Q\wedge R))\vee(Q\wedge R)\vee(P\wedge R) = R$

证明:

左端$= (\neg P\wedge(\neg Q\wedge R)) \vee((Q\vee P)\wedge R)$ (分配律)

$=((\neg P\wedge\neg Q)\wedge R))\vee((Q\vee P)\wedge R)$ (结合律)

$=(\neg(P\vee Q)\wedge R)\vee((Q\vee P)\wedge R)$ (摩根律)

$=(\neg(P\vee Q)\vee(Q\vee P))\wedge R$ (分配律)

$=(\neg(P\vee Q)\vee(P\vee Q))\wedge R$ (交换律)

$=T\wedge R$ (置　换)

$=R$ (同一律)

等值演算举例

例2: 试证 $((P\vee Q)\wedge\neg(\neg P\wedge(\neg Q\vee\neg R)))$
$\vee(\neg P\wedge\neg Q)\vee(\neg P\wedge\neg R) = T$

证明:

左端 $=((P\vee Q)\wedge(P\vee(Q\wedge R)))\vee\neg((P\vee Q)\wedge(P\vee R))$
(摩根律)

$=((P\vee Q)\wedge(P\vee Q)\wedge(P\vee R))\vee\neg((P\vee Q)\wedge(P\vee R))$
(分配律)

$=((P\vee Q)\wedge(P\vee R))\vee\neg((P\vee Q)\wedge(P\vee R))$
(等幂律)

$=T$

等值演算举例

例3: 证明 $P \rightarrow (Q \rightarrow R) = (P \wedge Q) \rightarrow R$

证明:

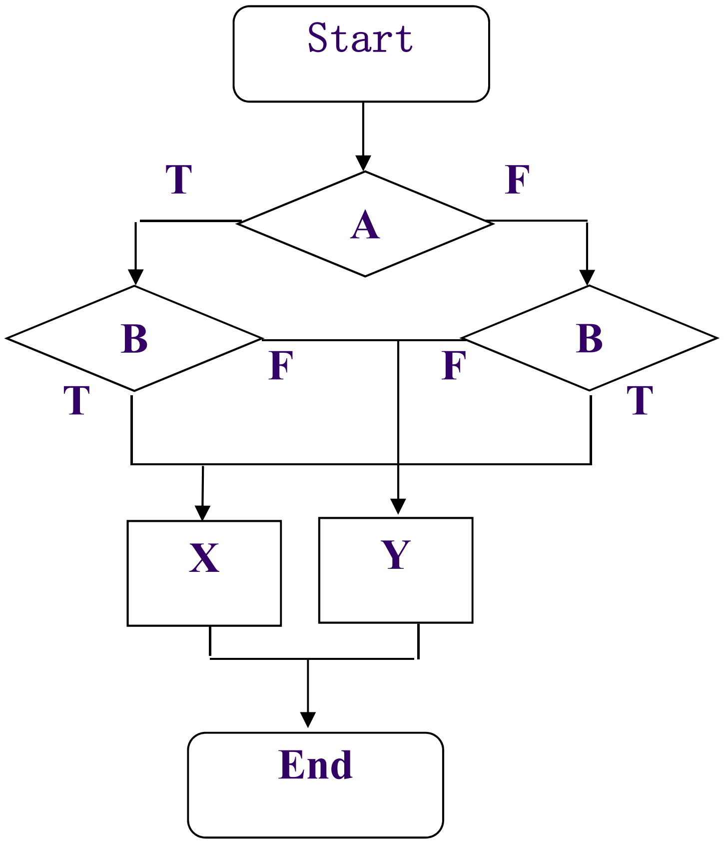
$P \rightarrow (Q \rightarrow R) = \neg P \vee (Q \rightarrow R) = \neg P \vee (\neg Q \vee R)$

$= (\neg P \vee \neg Q) \vee R = \neg (P \wedge Q) \vee R = (P \wedge Q) \rightarrow R$

等值演算举例

例4：　将下面程序语言进行化简

If A then if B then X else Y else if B then X else Y



解：执行X的条件为：

$(A\wedge B)\vee(\neg A\wedge B)$

执行Y的条件为：

$(A\wedge\neg B)\vee(\neg A\wedge\neg B)$

等值演算举例

执行X的条件可化简为：

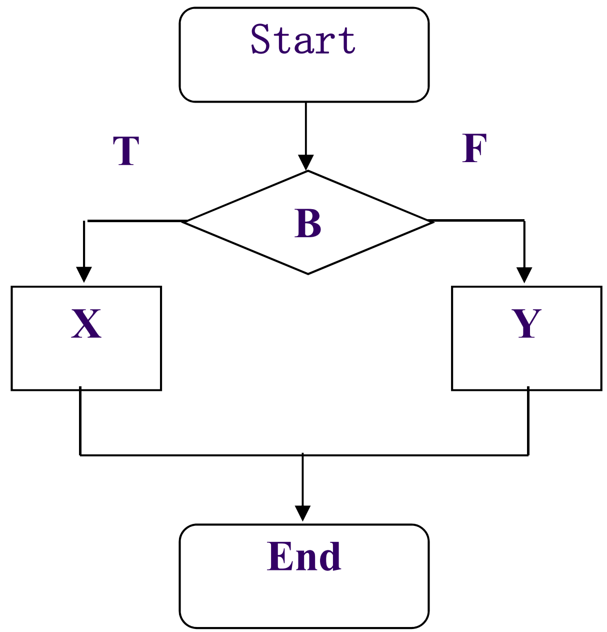
$(A \wedge B) \vee (\neg A \wedge B)$

$= B \wedge (A \vee \neg A) = B$

执行Y的条件可化简为：

$(A \wedge \neg B) \vee (\neg A \wedge \neg B)$

$= \neg B \wedge (A \vee \neg A) = \neg B$



程序可简化为：If B then X else Y

等值演算举例

例5: 有一逻辑学家误入某部落，被拘于劳狱，酋长意欲放行，他对逻辑学家说：

"今有两门，一为自由，一为死亡，你可任意开启一门。为协助你脱逃，今加派两名战士负责解答你所提的任何问题。惟可虑者，此两战士中一名天性诚实，一名说谎成性，今后生死由你自己选择。"

逻辑学家沉思片刻，即向一战士发问，然后开门从容离去。该逻辑学家应如何发问？

等值演算举例

P:被问战士是诚实人;
Q:被问战士的回答是“是”
R:另一名战士的回答是“是”
S:这扇门是死亡门。

P	Q	R	S
0	0	1	1
0	1	0	0
1	0	0	1
1	1	1	0

逻辑学家如何从容离去?

逻辑学家手指一门问身旁的一名战士说:“这扇门是死亡门,他(指另一名战士)将回答‘是’,对吗?”

当被问战士回答“对”,则逻辑学家开启所指的门从容离去

当被问战士回答“否”,则逻辑学家开启另一扇门从容离去。

等值演算举例

例6: 在举重比赛中，有俩名副裁判，一名主裁判。当两名以上裁判（必须包括主裁判在内）认为运动员举杠铃合格，按电钮，才裁决合格。试用与非门设计该电路。

等值演算举例

设主裁判为变元A，副裁判分别为变元B和变元C；按电钮为1，不按为0。表示合格与否的灯为Y，合格为1，否则为0。

则根据真值表，利用联结词的定义，Y可用A，B，C所对应的命题公式表示出来，同时可画出该命题公式所对应的电路图。

真值表

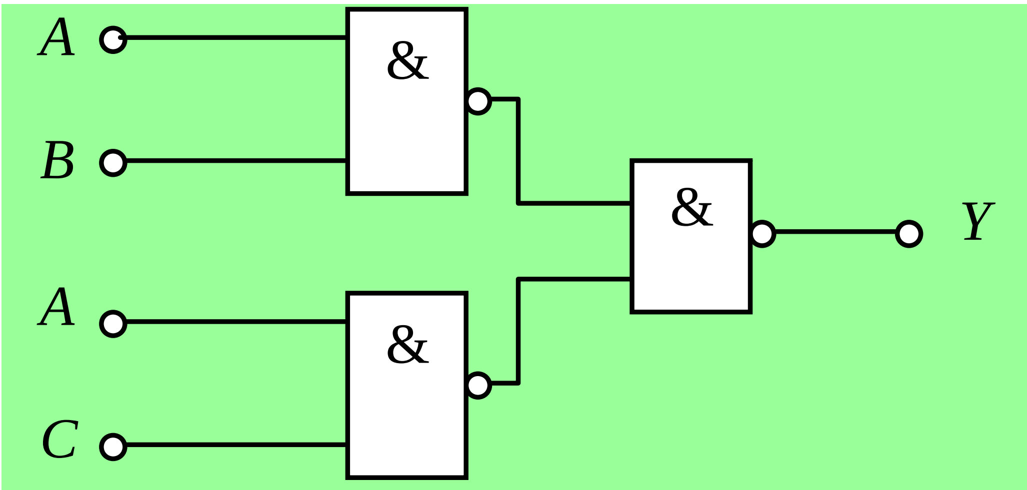
A B C	Y
0 0 0	0
0 0 1	0
0 1 0	0
0 1 1	0
1 0 0	0
1 0 1	1
1 1 0	1
1 1 1	1

等值演算举例

$$Y = (A \wedge \neg B \wedge C) \vee (A \wedge B \wedge \neg C) \vee (A \wedge B \wedge C)$$

$$Y = (A \wedge B) \vee (A \wedge C)$$

$$= \neg(\neg(A \wedge B) \wedge \neg(A \wedge C))$$



范式的引入

同一命题公式可以有多种相互等价的表达形式，例如：

$$P\rightarrow Q \quad \Leftrightarrow \neg P\vee Q \quad \Leftrightarrow \neg(P\wedge\neg Q)$$

方便研究工作，需要将命题公式规范化，即制定范式。

定义：合取式

单个命题变元、单个命题变元的否定、或者若干个命题变元或其否定的合取，构成的命题公式称为合取式。

如 P，$\neg Q$，$P\wedge Q$，$\neg P\wedge Q\wedge R$

定义：析取式

单个命题变元、单个命题变元的否定、或者若干个命题变元或其否定的析取，构成的命题公式称为析取式。

如 P，$\neg Q$，$P\vee Q$，$\neg P\vee Q\vee\neg R$

析取范式与合取范式

定义：析取范式

一个命题公式称为析取范式，当且仅当它具有形式

$$A_1 \vee A_2 \vee \cdot\cdot\cdot \vee A_n \qquad (n \geqslant 1)$$

其中A_1，A_2，···，A_n是合取式。

例如：$(\neg P \wedge Q) \vee (P \wedge Q \wedge R) \vee \neg R$

定义：合取范式

一个命题公式称为合取范式，当且仅当它具有形式

$$B_1 \wedge B_2 \wedge \cdot\cdot\cdot \wedge B_n \qquad (n \geqslant 1)$$

其中B_1，B_2，···，B_n是析取式。

例如：$(P \vee \neg Q) \wedge (Q \vee R) \wedge (\neg P \vee \neg Q \vee R)$

范式的求解方法

定理 对于任意命题公式，都存在与其等值的析取范式和合取范式

转换方法：

（1）**消去：** 利用等值公式中的等价式和蕴涵式将公式中的→、↔ 用联结词¬、∧、∨来取代，这可利用如下等价关系：

$(G \rightarrow H) = (\neg G \vee H)$；

$(G \leftrightarrow H) = (G \rightarrow H) \wedge (H \rightarrow G)$

$= (\neg G \vee H) \wedge (\neg H \vee G)$。

范式的求解方法

（2）**否定内移：**重复使用摩根定律将否定号移到各个命题变元的前端，并消去多余的否定号，这可利用如下等价关系：$\neg(\neg G) = G$；

$$\neg(G \vee H) = \neg G \wedge \neg H；$$

$$\neg(G \wedge H) = \neg G \vee \neg H。$$

（3）**分配律：**重复利用分配律，将公式化成一些合取式的析取，或一些析取式的合取，这可利用如下等价关系：$G \vee (H \wedge S) = (G \vee H) \wedge (G \vee S)$；

$$G \wedge (H \vee S) = (G \wedge H) \vee (G \wedge S)。$$

求公式：$(P\rightarrow\neg Q)\vee(P\leftrightarrow R)$ 的合取范式

解 $(P\rightarrow\neg Q)\vee(P\leftrightarrow R)$

$= (\neg P\vee\neg Q)\vee((\neg P\vee R)\wedge(\neg R\vee P))$ （消去）

$= (\neg P\vee\neg Q)\vee(\neg P\vee R))$

$\wedge((\neg P\vee\neg Q)\vee(\neg R\vee P))$ （分配律）

$= (\neg P\vee\neg Q\vee\neg P\vee R)\wedge(\neg P\vee\neg Q\vee\neg R\vee P)$

$= (\neg P\vee\neg Q\vee R)$

求公式：$(P\rightarrow Q)\leftrightarrow R$ 的合取范式和析取范式

解 $(P\rightarrow Q)\leftrightarrow R$

$= (\neg P\vee Q)\leftrightarrow R$ （消去→）

$= ((\neg P\vee Q)\rightarrow R)\wedge(R\rightarrow(\neg P\vee Q))$ （消去↔）

$= (\neg(\neg P\vee Q)\vee R)\wedge(\neg R\vee\neg P\vee Q)$ （消去→）

$= ((P\wedge\neg Q)\vee R)\wedge(\neg R\vee\neg P\vee Q)$ （否定内移）

$= (P\vee R)\wedge(\neg Q\vee R)\wedge(\neg P\vee Q\vee\neg R)$ （分配律）

解 $(P \rightarrow Q) \leftrightarrow R$

$= ((P \wedge \neg Q) \vee R) \wedge (\neg P \vee Q \vee \neg R)$

$= (P \wedge \neg Q \wedge \neg P) \vee (P \wedge \neg Q \wedge Q) \vee (P \wedge \neg Q \wedge \neg R) \vee (R \wedge \neg P) \vee (R \wedge Q) \vee (R \wedge \neg R)$

$= (P \wedge \neg Q \wedge \neg R) \vee (\neg P \wedge R) \vee (Q \wedge R)$

范式的不唯一性

考虑公式：

$(P \vee Q) \wedge (P \vee R)$，

其与之等值的析取范式：

$P \vee (Q \wedge R)$；

$(P \wedge P) \vee (Q \wedge R)$；

$P \vee (Q \wedge \neg Q) \vee (Q \wedge R)$；

$P \vee (P \wedge R) \vee (Q \wedge R)$。

这种不惟一的表达形式给研究问题带来了不便。

极小项与极大项

1 极小项和极大项

定义 在含有n个命题变元P_1、P_2、P_3、…、P_n的合取或析取式中，若每个命题变元与其否定不同时存在，但二者之一恰好出现一次且仅一次，则称此合取或析取式为关于P_1、P_2、P_3、…、P_n的一个极小项或极大项。

对于n个命题变元，可构成2^n个极小项和2^n个极大项

（1）一个命题变元P，

对应的极小项有两项：P、$\neg P$；

对应的极大项有两项：P、$\neg P$。

（2）两个命题变元P、Q，

对应的极小项有四项：

$P\wedge Q$、$\neg P\wedge Q$、$P\wedge\neg Q$、$\neg P\wedge\neg Q$；

对应的极大项有四项：

$P\vee Q$、$\neg P\vee Q$、$P\vee\neg Q$、$\neg P\vee\neg Q$。

（3）三个命题变元P、Q、R，

对应的极小项、极大项分别有八项

两个命题变元所对应极小项真值表

P Q	┐P∧┐Q	┐P∧Q	P∧┐Q	P∧Q
0 0	1	0	0	0
0 1	0	1	0	0
1 0	0	0	1	0
1 1	0	0	0	1

注意：（1）没有等价的两个极小项；

（2）使该极小项的真值为真的指派是唯一的；

（3）使极小项为真的那组指派为对应极小项的编码；

（4）命题变元与1对应，命题变元的否定与0对应。

两个命题变元所对应极小项真值表

P Q	$\neg P\wedge\neg Q$	$\neg P\wedge Q$	$P\wedge\neg Q$	$P\wedge Q$
0 0	1	0	0	0
0 1	0	1	0	0
1 0	0	0	1	0
1 1	0	0	0	1

$\neg P\wedge\neg Q$ → {0 0}为真→ {0 0} → m_{00} (m_0)

$\neg P\wedge Q$ → {0 1}为真→ {0 1} → m_{01} (m_1)

$P\wedge\neg Q$ → {1 0}为真→ {1 0} → m_{10} (m_2)

$P\wedge Q$ → {1 1}为真→ {1 1} → m_{11} (m_3)

两个命题变元所对应极大项真值表

P　Q	┐P∨┐Q	┐P∨Q	P∨┐Q	P∨Q
0　0	1	1	1	0
0　1	1	1	0	1
1　0	1	0	1	1
1　1	0	1	1	1

注意：（1）没有等价的两个极大项；

（2）使该极大项的真值为假的指派是唯一的；

（3）使极大项为假的那组指派为对应极大项的编码；

（4）命题变元与0对应，命题变元的否定与1对应。

两个命题变元所对应极大项真值表

P　Q	$\neg P\vee\neg Q$	$\neg P\vee Q$	$P\vee\neg Q$	$P\vee Q$
0　0	1	1	1	0
0　1	1	1	0	1
1　0	1	0	1	1
1　1	0	1	1	1

$P\vee Q$ → {0 0}为假→ {0 0} → M_{00} (M_0)

$P\vee\neg Q$ → {0 1}为假→ {0 1} → M_{01} (M_1)

$\neg P\vee Q$ → {1 0}为假→ {1 0} → M_{10} (M_2)

$\neg P\vee\neg Q$ → {1 1}为假→ {1 1} → M_{11} (M_3)

三个命题变元的极小项与极大项

P	Q	R	极小项	极大项
0	0	0	$m_0=\neg P\wedge\neg Q\wedge\neg R$	$M_0=P\vee Q\vee R$
0	0	1	$m_1=\neg P\wedge\neg Q\wedge R$	$M_1=P\vee Q\vee\neg R$
0	1	0	$m_2=\neg P\wedge Q\wedge\neg R$	$M_2=P\vee\neg Q\vee R$
0	1	1	$m_3=\neg P\wedge Q\wedge R$	$M_3=P\vee\neg Q\vee\neg R$
1	0	0	$m_4=P\wedge\neg Q\wedge\neg R$	$M_4=\neg P\vee Q\vee R$
1	0	1	$m_5=P\wedge\neg Q\wedge R$	$M_5=\neg P\vee Q\vee\neg R$
1	1	0	$m_6=P\wedge Q\wedge\neg R$	$M_6=\neg P\vee\neg Q\vee R$
1	1	1	$m_7=P\wedge Q\wedge R$	$M_7=\neg P\vee\neg Q\vee\neg R$

极小项与极大项的性质

1）任意两个极小项的合取必为假；

2）任意两个极大项的析取必为真；

3）极大项的否定是极小项；

4）极小项的否定是极大项；

5）所有极小项的析取为永真公式；

6）所有极大项的合取是永假公式。

$m_i \wedge m_j = F$

$M_i \vee M_j = T$

$\neg M_i = m_i$

$M_i = \neg m_i$

$$\bigvee_{i=0}^{2^n-1} m_i = 1;$$

$$\bigwedge_{i=0}^{2^n-1} M_i = 0。$$

主析取范式与主合取范式

定义

（1）在给定的析取范式中，每一个合取式都是极小项，且按照编号从小到大的次序排列，则称该范式为主析取范式。

（2）在给定的合取范式中，每一个析取式都是极大项，且按照编号从小到大的次序排列，则称该范式为主合取范式。

（3）如果一个主析取范式不包含任何极小项，则称该主析取范式为"空"；如果一个主合取范式不包含任何极大项，则称主合取范式为"空"。

任何一个公式都有与之等值的主析取范式和主合取范式。

转换方法：（1）利用前述定理先求出该公式所对应的**析取范式和合取范式**；

（2）在析取式和合取式中重复出现的命题变元，将其化成只出现一次；

（3）去掉析取范式中的所有永假式（ $P \wedge \neg P$ ），

去掉合取范式中所有永真式（ $P \vee \neg P$ ）

（4）若析取范式的某一个合取式中缺少该命题公式中所规定的命题变元，则可用 $(\neg P \vee P) \wedge Q = Q$ 将命题变元P补进去，并利用分配律展开，然后合并相同的合取式，此时得到的合取式将是标准的极小项

若合取范式的某一个析取式中缺少该命题公式中所规定的命题变元，则可用公式：$(\neg P \wedge P) \vee Q = Q$

将命题变元P补进去，并利用分配律展开，然后合并相同的析取式，此时得到的析取式将是标准的极大项；

（5）将相同的极小项和极大项合并，同时利用交换律进行顺序调整，生成标准的主析取范式和主合取范式。

求主析取范式与主合取范式

- 方法一：**公式转换法**

  利用等值公式进行变换

- 方法二：**真值表法**

  对公式的真值结果进行分解，分解成等价的极小项的析取或者极大项的合取

公式转换法

利用等值公式转换法求公式$(P\rightarrow Q)\rightarrow(Q\wedge R)$的主析取范式和主合取范式 。

解 （1）求主析取范式

$$
\begin{aligned}
(P\rightarrow Q)\rightarrow(Q\wedge R) &= \neg(\neg P\vee Q)\vee(Q\wedge R)\\
&=(P\wedge\neg Q)\vee(Q\wedge R) \qquad \text{——析取范式}\\
&= (P\wedge\neg Q\wedge(R\vee\neg R))\vee((P\vee\neg P)\wedge Q\wedge R)\\
&= (P\wedge\neg Q\wedge R)\vee(P\wedge\neg Q\wedge\neg R)\vee(P\wedge Q\wedge R)\\
&\qquad \vee(\neg P\wedge Q\wedge R)\\
&= (\neg P\wedge Q\wedge R)\vee(P\wedge\neg Q\wedge\neg R)\vee(P\wedge\neg Q\wedge R)\\
&\qquad \vee(P\wedge Q\wedge R) \qquad \text{——主析取范式}
\end{aligned}
$$

（2）求主合取范式

$(P\rightarrow Q)\rightarrow(Q\wedge R)=(P\wedge\neg Q)\vee(Q\wedge R)$ ——析取范式

$=(P\vee Q)\wedge(P\vee R)\wedge(\neg Q\vee Q)\wedge(\neg Q\vee R)$

$=(P\vee Q)\wedge(P\vee R)\wedge(\neg Q\vee R)$ ——合取范式

$=(P\vee Q\vee(R\wedge\neg R))\wedge(P\vee(Q\wedge\neg Q)\vee R)\wedge$

$((P\wedge\neg P)\vee\neg Q\vee R)$

$=(P\vee Q\vee R)\wedge(P\vee Q\vee\neg R)\wedge(P\vee Q\vee R)$

$\wedge(P\vee\neg Q\vee R)\wedge((P\vee\neg Q\vee R)\wedge(\neg P\vee\neg Q\vee R)$

$=(P\vee Q\vee R)\wedge(P\vee Q\vee\neg R)\wedge(P\vee\neg Q\vee R)$

$\wedge(\neg P\vee\neg Q\vee R)$ ——主合取范式

真值表技术

（1）列出公式对应的真值表，选出公式的真值结果为真的所有的行，在这样的每一行中，找到其每一个解释所对应的极小项，将这些极小项进行析取即可得到相应的主析取范式。

（2）列出公式对应的真值表，选出公式的真值结果为假的所有的行，在这样的每一行中，找到其每一个解释所对应的极大项，将这些极大项进行合取即可得到相应的主合取范式。

利用真值表技术求公式G = ┐(P→Q)∨R的主析取范式和主合取范式。

P Q R	P→Q	┐(P→Q)	┐(P→Q)∨R
0 0 0	1	0	0
0 0 1	1	0	1
0 1 0	1	0	0
0 1 1	1	0	1
1 0 0	0	1	1
1 0 1	0	1	1
1 1 0	1	0	0
1 1 1	1	0	1

（1）求主析取范式

找出真值表中其真值为1的行：

2. 0 0 1； 4. 0 1 1；

5. 1 0 0； 6. 1 0 1； 8. 1 1 1。

这些行所对应的极小项分别为：

$\neg P\wedge\neg Q\wedge R$， $\neg P\wedge Q\wedge R$，$P\wedge\neg Q\wedge\neg R$，

$P\wedge\neg Q\wedge R$，$P\wedge Q\wedge R$。

将这些极小项进行析取即为该公式G的主析取范式。

$$G = (\neg P\wedge\neg Q\wedge R)\vee(\neg P\wedge Q\wedge R)\vee (P\wedge\neg Q\wedge\neg R)\vee(P\wedge\neg Q\wedge R)\vee(P\wedge Q\wedge R)$$

（2）求主合取范式

找出真值表中其真值为假的行：

1．0 0 0； 3．0 1 0； 7．1 1 0。

这些行所对应的极大项分别为：

$P\vee Q\vee R$、$P\vee \neg Q\vee R$、$\neg P\vee \neg Q\vee R$

将这些极大项进行合取即为该公式G的主合取范式：

$$G=(P\vee Q\vee R)\wedge(P\vee\neg Q\vee R)\wedge(\neg P\vee\neg Q\vee R)$$

主析取范式与主合取范式的转换

（1）已知公式G的主析取范式，求公式G的主合取范式

（a）求$\neg$G的主析取范式，即G的主析取范式中没有出现过的极小项的析取，若

$$G = \bigvee_{i=1}^{k} m_{l_i}$$

为G的主析取范式，则

$$\neg G = \bigvee_{i=1}^{2^n - k} m_{j_i}$$

为$\neg$G的主析取范式。其中，m_{j_i} ($i=1, 2, \ldots, 2^n-k$)是m_i ($i=0, 1, 2, \ldots, 2^n-1$)中去掉m_{l_i} ($i=1, 2, \ldots, k$)后剩下的极小项。

主析取范式⇒主合取范式

（b）G=¬(¬G)即是G的主合取范式。即，

$$G = \neg\neg G = \neg(\bigvee_{i=1}^{2^n-k} m_{j_i}) = \bigwedge_{i=1}^{2^n-k} \neg m_{j_i} = \bigwedge_{i=1}^{2^n-k} M_{j_i}$$

——为G 的主合取范式。

主合取范式⇒主析取范式

（2）已知公式G的主合取范式，求公式G的主析取范式

（a）求¬G的主合取范式，即G的主合取范式中没有出现过的极大项的合取，若

$$G = \bigwedge_{i=1}^{k} M_{l_i}$$

为G的主合取范式，则

$$\neg G = \bigwedge_{i=1}^{2^n-k} M_{l_i}$$

为¬G的主合取范式。其中，M_{j_i} $(i=1, 2, \ldots, 2^n-k)$ 是 M_i $(i=0, 1, 2, \ldots, 2^n-1)$ 中去掉 M_{l_i} $(i=1, 2, \ldots, k)$ 后剩下的极大项。

主合取范式⇒主析取范式

（b）G=¬(¬G)即是G的主析取范式。即，

$$G=\neg\neg G=\neg(\bigwedge_{i=1}^{2^n-k} M_{j_i})=(\bigvee_{i=1}^{2^n-k}\neg M_{j_i})=(\bigvee_{i=1}^{2^n-k} m_{j_i})$$

——为G 的主析取范式。

设 $G=(P\land Q)\lor(\neg P\land R)\lor(\neg Q\land\neg R)$，求其对应的主析取范式和主合取范式。

解 $G=(P\land Q)\lor(\neg P\land R)\lor(\neg Q\land\neg R)$

$=(P\land Q\land(R\lor\neg R))\lor(\neg P\land(Q\lor\neg Q)\land R)$

$\lor((P\lor\neg P)\land\neg Q\land\neg R)$

$=(P\land Q\land R)\lor(P\land Q\land\neg R)\lor(\neg P\land Q\land R)$

$\lor(\neg P\land\neg Q\land R)\lor(P\land\neg Q\land\neg R)\lor(\neg P\land\neg Q\land\neg R)$

$=(\neg P\land\neg Q\land\neg R)\lor(\neg P\land\neg Q\land R)\lor(\neg P\land Q\land R)$

$\lor(P\land\neg Q\land\neg R)\lor(P\land Q\land\neg R)\lor(P\land Q\land R)$

$=m_0\lor m_1\lor m_3\lor m_4\lor m_6\lor m_7$ ——————主析取范式

$\neg G = m_2 \vee m_5$

$G = \neg\neg G = \neg(m_2 \vee m_5) = \neg m_2 \wedge \neg m_5 = M_2 \wedge M_5$

$= (P \vee \neg Q \vee R) \wedge (\neg P \vee Q \vee \neg R)$

—主合取范式

完全指派和部分指派

- 一个公式α，其中含有命题变元P1, …,Pn, 表示为 α[P1, …,Pn]，（P1, …,Pn）称为变元组
- 公式α的变元组（P1, …,Pn）的任意一组确定的值，称为对该公式α的关于该变元组（P1, …,Pn）的一个**完全指派**。
- 如果仅对变元组中的部分变元确定值，其余变元没有赋以确定的值，则称这样的一组值为该公式的关于变元组的一个**部分指派**。

完全指派和部分指派

公式 α： $p\wedge(q\rightarrow r)$， 变元组为（p，q，r），

- 完全指派为（T，F，F），α= T

  可表示：（p，q，r）＝（T，F，F）$\vdash$ α＝T

  或者记为：$\alpha\,\big|_{(p,\ q,\ r)=(T,\ F,\ F)} = T$

- 部分指派为（T，T，$\times$），这时候 α 的值不能确定，当r＝T时，α＝T，当r＝F时，α= F。

- 部分指派为（F，X，X），α= F，此时对q，r的指派无关紧要。

成真指派和成假指派

- **对于任一公式α，凡是使得 α 取真值 α= T 的指派，不管是完全指派还是部分指派，都称为 α 的成真指派。**
- **凡是使 α 取假值 α= F 的指派，不管是完全指派还是部分指派，都称为 α 的成假指派。**

α：$\neg P$ 的成真指派 P=F，成假指派P=T

α：$P \wedge Q$ 的成真指派（P,Q）=（T,T）
成假指派（P,Q）=（F,F），（F,T），（T,F）

α：$P \vee Q$ 的成真指派（P,Q）=（T,T），（T,F），（F,T）
成假指派（P,Q）=（F,F）

永真、永假、可满足

- 有的公式没有成真指派，如α：$P\wedge\neg P$，称为**永假式**（反驳式）
- 有的公式没有成假指派，如α：$P\vee\neg P$，称为**永真式**（重言式）
- 永假式，又称为矛盾式，**不可满足**。
- 如果一个公式，有成真指派，则称为公式 α **可满足**。与它相对的，如果没有成真指派，就是不可满足的。
- 如果一个公式，有成假指派，则称该公式为**非永真公式**。

永真、永假、可满足

- 公式 α 的变元组为（P1, …,Pn），一个部分指派 Γ：（V_1, …Vi-1, X, Vi+1, …Vn），其中Vi为具体真假值。它为公式 α 的成真指派，当且仅当：

（V_1, …Vi-1, T, Vi+1, …Vn）及（V_1, …Vi-1, F,Vi+1, …Vn）均为成真指派。

成假指派情况是相似的。

求解成真、成假指派的方法

- 列举公式 α 的所有完全指派，逐个验算该指派下 α 取的真假值，确定每个完全指派是成真，还是成假指派。
- 含n个变元的公式，共有2^n个完全指派，按指数级数增长，难以全部枚举。
- 简单、可行的办法——**部分指派**。前提是化简公式 α ，减少变元个数，削减运算量。

部分指派的步骤

- 第一步，否定深入。将外层的否定深入到内层，一直深入到变元为止。
- 第二步，部分指派。选定一个变元对其作真和假两种指派，得到两个不含该变元但较原式简单的公式。如果这两个公式直接得到真假值，则得部分指派，否则
- 第三步，化简。得到的两公式虽然较原公式简单，但仍含有变元，于是重复第二步，逐个减少变元，直到确定真假值为止。
- 第二步中如何选定一个变元，希望化简效果最好，因此选择在公式中出现次数最多的变元作指派。还有一种情况就是对该变元赋以一个指派后，立即使整个公式有确定的真假值。

求公式的成真、成假指派

α： $(p \vee \neg r) \rightarrow \neg((p \rightarrow q) \leftrightarrow \neg(p \wedge \neg(q \leftrightarrow r)))$

第一步 否定深入：

$$(p \vee \neg r) \rightarrow ((p \rightarrow q) \leftrightarrow (p \wedge (q \leftrightarrow \neg r)))$$

第二步 部分指派：选择出现最多的变元，指派以T，F。（分别情况）。

上式中，P出现最多，故 α 分为 $\alpha|_{p=T}$ $\alpha|_{p=F}$两种情况。

求公式的成真、成假指派

$\alpha \mid_{p=T}$： $(T \vee \neg r) \rightarrow ((T \rightarrow q) \leftrightarrow (T \wedge (q \leftrightarrow \neg r)))$

化简 $(q \leftrightarrow (q \leftrightarrow \neg r))$ 也可最终化简为$\neg r$，

$\alpha \mid_{p=F}$： $(F \vee \neg r) \rightarrow ((F \rightarrow q) \leftrightarrow (F \wedge (q \leftrightarrow \neg r)))$

化简得 $\neg r \rightarrow (T \leftrightarrow F)$

最终化简得 r

α的成真指派（p, q, r）= (T, X, F), (F, X, T),

成假指派（p, q, r）= (T, X, T), (F, X, F)。

求公式的成真、成假指派

不完全成真指派（p，q，r）：(T，X，F)，**可以生成相应的完全成真指派**（T，T，F）和（T，F，F）。

(p，q，r)：(F，X，T) $\Rightarrow$（F，T，T）和（F，F，T）。

因此，α的完全成真指派：

（T，T，F），（T，F，F），（F，T，T），（F，F，T）。

相仿地，α的完全成假指派：

（T，X，T）$\Rightarrow$(T，T，T)，（T，F，T），

（F，X，F）$\Rightarrow$(F，T，F)，（F，F，F）

α的完全成指派：

（T，T，T），（T，F，T），（F，T，F），（F，F，F）。

析取范式

- **如果一个完全指派能使一个合取式取真值，那么这个完全指派和合取式之间是1 - 1对应的。例如：**

(T, T, F)，　(T, F, F)，　(F, T, T)，　(F, F, T)

$p \wedge q \wedge \neg r$　$p \wedge \neg q \wedge \neg r$　$\neg p \wedge q \wedge r$　$\neg p \wedge \neg q \wedge r$

将上述四个合取式再析取，即得析取范式：

$(p \wedge q \wedge \neg r) \vee (p \wedge \neg q \wedge \neg r) \vee (\neg p \wedge q \wedge r) \vee (\neg p \wedge \neg q \wedge r)$

和取范式

相仿地，**对应于成假指派对应的析取式为：**

(T, T, T)，(T, F, T)，(F, T, F)，(F, F, F)

$\neg p \vee \neg q \vee \neg r$　　$\neg p \vee q \vee \neg r$　　$p \vee \neg q \vee r$　　$p \vee q \vee r$

将四个析取式再合取，即得合取范式：

$(\neg p \vee \neg q \vee \neg r) \wedge (\neg p \vee q \vee \neg r) \wedge (p \vee \neg q \vee r) \wedge (p \vee q \vee r)$

联结词的完备集

- 除了所详述过的五个联结词外，还可定义更多的联结词。像计算机的硬件电路设计分析就常使用异或(半加)、与非、或非等联结词。

$\bar{\vee}$：$P \bar{\vee} Q = (\neg P \wedge Q) \vee (P \wedge \neg Q)$

与非↑：$P \uparrow Q = \neg(P \wedge Q)$

或非↓：$P \downarrow Q = \neg(P \vee Q)$

- 对n个命题变项P1...Pn来说，共可定义出多少个联结词? 在那么多联结词中有多少是独立的?

命题联结词的个数

- 按照合式公式的定义，由命题变项和命题联结词可以构造出无限多个合式公式。可把所有的合式公式加以分类，将等值的公式视为同一类，从中选一个作代表称之为真值函项。
- 对一个真值函项就有一个联结词与之对应。

- **一元联结词是联结一个命题变项的，如P。它取值只有真假两种情形，于是联结词作用于P，可建立四种不同的真值函项，相应的可定义出四个不同的一元联结词$f_0f_1f_2f_3$。图2.4.1给出这些联结词fi或说真值函数$f_i(P)$的定义。**

P	$f_0(P)$	$f_1(P)$	$f_2(P)$	$f_3(P)$
F	F	F	T	T
T	F	T	F	T

图 2.4.1

写出真值函项：

$$f_0(P) = F$$

$$f_1(P) = P$$

$$f_2(P) = \neg P$$

$$f_3(P) = T$$

其中，$f_0(P)$是永假式，$f_3(P)$是永真式，均与P无关，而$f_1(P)$就是变项P本身，从而新的公式只有$f_2(P)$，这就是由否定词所建立的真值函项。

- 二元联结词联结两个命题变项，两个变项PQ共有四种取值情形，于是联结词作用于PQ可建立起16种不同的真值函项，相应的可定义出16个不同的二元联结词g_0，g_1，…，g_{15} 。图2.4.2给出了这些联结词g_I，或说真值函项$g_i(P, Q)$的定义。

P	Q	$g_0(P,Q)$	$g_1(P,Q)$	$g_2(P,Q)$	$g_3(P,Q)$	$g_4(P,Q)$	$g_5(P,Q)$
F	F	F	F	F	F	F	F
F	T	F	F	F	F	T	T
T	F	F	F	T	T	F	F
T	T	F	T	F	T	F	T

$g_6(P,Q)$	$g_7(P,Q)$	$g_8(P,Q)$	$g_9(P,Q)$	$g_{10}(P,Q)$	$g_{11}(P,Q)$
F	F	T	T	T	T
T	T	F	F	F	F
T	T	F	F	T	T
F	T	F	T	F	T

$g_{12}(P,Q)$	$g_{13}(P,Q)$	$g_{14}(P,Q)$	$g_{15}(P,Q)$
T	T	T	T
T	T	T	T
F	F	T	T
F	T	F	T

写出各真值函项:

$g_0(P,Q) = F$

$g_1(P,Q) = P \wedge Q$

$g_2(P,Q) = P \wedge \neg Q$

$g_3(P,Q) = (P \wedge \neg Q) \vee (P \wedge Q) = P \wedge (\neg Q \vee Q) = P$

$g_4(P,Q) = \neg P \wedge Q$

$g_5(P,Q) = (\neg P \wedge Q) \vee (P \wedge Q) = (\neg P \vee P) \wedge Q = Q$

$g_6(P,Q) = P \vee Q$

$g_7(P,Q) = P \vee Q$

$g_8(P,Q) = \neg P \wedge \neg Q = P \downarrow Q$

$g_9(P,Q) = P \leftrightarrow Q$

$g_{10}(P,Q) = (\neg P \wedge \neg Q) \vee (P \wedge \neg Q) = (\neg P \vee P) \wedge \neg Q = \neg Q$

$g_{11}(P,Q) = P \vee \neg Q = Q \rightarrow P$

$g_{12}(P,Q) = (\neg P \wedge \neg Q) \vee (\neg P \wedge Q) = \neg P \wedge (\neg Q \vee Q) = \neg P$

$g_{13}(P,Q) = \neg P \vee Q = P \rightarrow Q$

$g_{14}(P,Q) = \neg P \vee \neg Q = P \uparrow Q$

$g_{15}(P,Q) = T$

联结词的完备集

- 对n个命题变元P1…Pn，每个Pi有两种取值，从而对P1…Pn来说共有2^n种取值情形。于是相应的真值函项就有2^{2^n}个，或说可定义2^{2^n}个n元联结词。
- 由于可定义的联结词的数量是极大的，需要考虑它们是否都是独立的？也就是说这些联结词是否能相互表示呢？
- 定义：设C是联结词的集合，如果对任一命题公式都有由C中的联结词表示出来的公式与之等值，就说C是**完备的联结词集合**，或说C是联结词的完备集。

联结词的完备集

- 全体联结词的无限集合是完备的，而$\{\vee\}$，$\{\vee, \wedge\}$就不是完备的。
- **定理：**$\{\neg, \vee, \wedge\}$是完备的联结词集合。
- 由于 $P\wedge Q = \neg(\neg P\vee\neg Q)$

  $P\vee Q = \neg(\neg P\wedge\neg Q)$

  $\wedge$可由$\{\neg, \vee\}$表示，$\vee$可由$\{\neg, \wedge\}$表示，故$\{\neg, \vee\}$，$\{\neg, \wedge\}$都是联结词的完备集。还可证明$\{\neg, \rightarrow\}$，$\{\uparrow\}$，$\{\downarrow\}$也都是联结词的完备集。但$\{\vee, \wedge\}$，$\{\neg, \leftrightarrow\}$不是完备的。
- 尽管$\{\neg,\vee\}$，$\{\neg, \wedge\}$是完备的，但使用起来并不够方便，我们愿意采取折衷方案，不是仅用两个也不是使用过多的联结词，还是选用详细讨论过的五个联结词集$\{\neg, \wedge, \vee, \rightarrow, \leftrightarrow\}$，当然是完备的，只是相互并不独立。

对偶式

- **假定公式A仅出现¬、∨、∧这三个联结词**
- **定义将A中出现的∨、∧分别以∧、∨代换，得到公式A*，则称A*是A的对偶式，或说A和A*互为对偶式。**

$(P\vee Q)\wedge R$的对偶式为$(P\wedge Q)\vee R$

不难知道，若$(P\vee Q)\wedge R = (P\wedge R)\vee(Q\wedge R)$

成立，相应的对偶式

$$(P\wedge Q)\vee R = (P\vee R)\wedge(Q\vee R)$$

也成立。

为方便，若$A=A(P_1, \cdots, P_n)$

令 $A^{-}= A(\neg P_1, \cdots, \neg P_n)$

定理2.5.1： $\neg(A^*) = (\neg A^*)$，$\neg(A^{-}) = (\neg A)^{-}$

定理2.5.2： $(A^*)^* = A$，$(A^{-})^{-}=A$

定理2.5.3： $\neg A = A^{*-}$

用数学归纳法，施归纳于A中出现的联结词个数n来证明。

基始：设n=0，A中无联结词，便有

$A=P$，从而 $\neg A = \neg P$

但 $A^{*-} = \neg P$

∴ n=0时定理成立。

归纳：设n ≤k时定理成立，来证n = k+1时定理也成立

∵ n = k + 1 ≥1，A中至少有一个联结词，可分为三种情形。

$A = \neg A_1$，$A = A_1 \wedge A_2$，$A = A_1 \vee A_2$

其中A_1，A_2中联结词个数≤k。

依归纳法假设，$\neg A_1 = A_1{}^{*-}$，$\neg A_2 = A_2{}^{*-}$

当 $A = \neg A_1$时。

$$\begin{aligned}
\neg A &= \neg(\neg A_1) \\
&= \neg(A_1{}^{*-}) && \text{归纳法假设} \\
&= (\neg A_1)^{*-} && \text{定理2.5.1，2.5.2} \\
&= A^{*-}
\end{aligned}$$

当 $A = A_1 \wedge A_2$时。

$\neg A = \neg(A_1 \wedge A_2)$

$= \neg A_1 \vee \neg A_2$ 摩根律

$= A_1^{*-} \vee A_2^{*-}$ 归纳法假设

$= (A_1^* \vee A_2^*)^-$ A^-定义

$= (A_1 \wedge A_2)^{*-}$ A*定义

$= A^{*-}$

另一种情况同理，从而定理得证。这定理实为摩根律的另一种形式。它把¬、*、－联系起来了。

定理 2.5.4 若A = B必有A*=B*

证明：因为A = B等价于$A\leftrightarrow B$ 永真。

从而$\neg A\leftrightarrow\neg B$ 永真。

依定理2.5.3，$\neg A = A^{*-}$，$\neg B = B^{*-}$

于是 $A^{*-} \leftrightarrow B^{*-}$ 永真

必有 $A^{*}\leftrightarrow B^{*}$ 永真

故 $A^{*} = B^{*}$

定理 2.5.5 若$A\rightarrow B$永真，必有$B^{*}\rightarrow A^{*}$永真

定理 2.5.6 A与A^{-}同永真，同可满足

$\neg A$与A^{*}同永真，同可满足

推理形式

- **用命题公式来描述在科学和日常生活中进行的推理，称为 推理形式**
  - 公式形状都是蕴涵式$\alpha \to \beta$
  - 例如下面三个推理形式都是常见的:

$((P \to Q) \land P) \to Q$	正确(即MP)
$((P \to Q) \land \neg P) \to \neg Q$	错误
$((P \to Q) \land \neg Q) \to \neg P$	正确(即换质位法)

- **问题:什么样的推理形式描述了正确的推理?**

重言蕴涵关系

- 给定两个公式α和β，在任何解释下，若α为真则β也为真,，就称α **重言蕴涵**β，或称β是α的逻辑推论，记作$\alpha \Rightarrow \beta$
- 这是讨论从前提推出结论的问题。α 是前提，一般形如$\alpha 1 \wedge \alpha 2 \wedge \ldots \wedge \alpha n$，也可理解成有n个前提
- 例如: 若$P \wedge Q$为真，显然P也为真，所以

$$P \wedge Q \Rightarrow P$$

$\alpha \Rightarrow \beta$ 与 $\alpha \to \beta$ 的异同

- **从形式系统角度看**
  - $\to$是系统内的符号，$\alpha \to \beta$ 是系统内的合式公式(语法)
  - $\Rightarrow$是系统外的符号，$\alpha \Rightarrow \beta$ 不是合式公式！这是在系统外观察系统内两个公式间的逻辑蕴涵关系(语义)
- **从表达的意思来看**
  - $\alpha \to \beta$ 只是表达“不能α真而β 假”，因此除了包含“α真则β 真”的意思之外，还包含“α假则β 可真可假”的意思
  - $\alpha \Rightarrow \beta$ 表达且仅表达“α真则β 真”的意思

如何证明$\alpha \Rightarrow \beta$?

1. 利用真值表

- 列出所有命题变元的所有指派, 以及公式α 和β相应的真值
- 若使α 为真的解释也都使β 为真, 则$\alpha \Rightarrow \beta$ 成立; 否则, $\alpha \Rightarrow \beta$ 就不成立

2. 利用下面的定理

定理: $\alpha \Rightarrow \beta$ *iff* $\alpha \to \beta$是重言式

所以, $\alpha \Rightarrow \beta$称为"重言蕴涵式"

定理: $\alpha \Rightarrow \beta$ *iff* $\alpha \wedge \neg \beta$是矛盾式

如何证明$\alpha \Rightarrow \beta$？

3. 利用⇒的一些性质

(1) $\alpha \Rightarrow \alpha$ [自反性]

(2) 若$\alpha \Rightarrow \beta$ 且$\beta \Rightarrow \alpha$，则$\alpha = \beta$ [反对称性]

(3) 若$\alpha \Rightarrow \beta$ 且$\beta \Rightarrow \gamma$，则$\alpha \Rightarrow \gamma$ [传递性]

(4) 若$\alpha \Rightarrow \beta$ 且$\alpha \Rightarrow \gamma$，则$\alpha \Rightarrow \beta \wedge \gamma$

(5) 若$\alpha \Rightarrow \gamma$ 且$\beta \Rightarrow \gamma$，则$\alpha \vee \beta \Rightarrow \gamma$

(6) 若$\alpha \Rightarrow \beta$，则$\neg\beta \Rightarrow \neg\alpha$

(7) 若$\neg\beta \Rightarrow \neg\alpha$，则$\alpha \Rightarrow \beta$

基本的重言蕴涵式

作为基本的推理定律

(1) $P \wedge Q \Rightarrow P$

(2) $P \Rightarrow P \vee Q$

(3) $\neg P \Rightarrow P \rightarrow Q$ [假前提啥都蕴涵]

(4) $\neg(P \rightarrow Q) \Rightarrow P$ [啥都不能蕴涵的前提,必真]

(5) $Q \Rightarrow P \rightarrow Q$ [真结论被一切前提蕴涵]

(6) $\neg(P \rightarrow Q) \Rightarrow \neg Q$ [啥前提都不蕴涵的结论,必假]

(7) $\neg P \wedge (P \vee Q) \Rightarrow Q$ [排除法]

(8) $P \wedge (P \rightarrow Q) \Rightarrow Q$ [*modus ponens*, 或分离规则]

基本的重言蕴涵式

(9) $(P\rightarrow Q)\wedge\neg Q \Rightarrow \neg P$ [*modus tollens*]

(10) $(P\rightarrow Q)\wedge(Q\rightarrow R) \Rightarrow P\rightarrow R$ [三段论法之一]

(11) $(P\leftrightarrow Q)\wedge(Q\leftrightarrow R) \Rightarrow P\leftrightarrow R$

(12) $(P\rightarrow R)\wedge(Q\rightarrow R)\wedge(P\vee Q) \Rightarrow R$

(13) $(P\rightarrow Q)\wedge(R\rightarrow S)\wedge(P\vee Q) \Rightarrow R \vee S$

(14) $(P\rightarrow Q)\wedge(R\rightarrow S)\wedge(\neg Q\vee\neg S) \Rightarrow \neg P \vee \neg R$

(15) $(Q\rightarrow R) \Rightarrow (P\vee Q) \rightarrow (P\vee R)$

(16) $(Q\rightarrow R) \Rightarrow (P\rightarrow Q) \rightarrow (P\rightarrow R)$

推理演算

- **前面介绍的证明$\alpha \Rightarrow \beta$的方法，都是根据公式的真值来论证的，体现不出证明的层层推进过程，而且变元很多时不方便.**
- **推理演算: 引入一些推理规则，利用前提和基本推理公式(重言式)，实现逐步推进的推理过程.**
  - 从若干前提$\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$出发欲证明$\beta$
  - 利用推理规则不断产生中间结论
  - 直至得出最终结论β

推理规则

(1) **前提引入规则**: 推理过程中可随时引入前提

(2) **结论引用规则**: 推理过程中得到的中间结论可用作后续推理的前提

(3) **代入规则**: 推理过程中对重言式的命题变项可使用代入规则

(4) **置换规则**: 推理过程中可对任何子公式用等值公式置换

(5) **分离规则**: 推理过程中若已得到$P \rightarrow Q$和P, 则可推得Q

(6) **条件证明规则**: 为证明$\alpha_1 \Rightarrow \alpha_2 \rightarrow \beta$, 可证明$\alpha_1 \wedge \alpha_2 \Rightarrow \beta$，反之亦然

推理规则

(7) **附加规则:** 推理过程中若已得到A，则可推得A $\vee$B

(8) **化简规则:** 推理过程中若已得到A$\wedge$B，则可推得A

(9) **假言三段论规则:** 推理过程中若已得到A$\rightarrow$B和B$\rightarrow$C，则可推得 A$\rightarrow$C

(10) **拒取式规则:** 推理过程中若已得到A$\rightarrow$B和$\neg$ B，则可推得 $\neg$ A

(11) **合取引入规则:** 推理过程中若已得到A和B，则可推得A$\wedge$B

(12) **析取三段论规则:** 推理过程中若已得到A $\vee$B和$\neg$ B，则可推得 A

推理演算举例

证明: $P\to Q, Q\to R, P \vdash R$

(因为左边不是公式，不能用$\Rightarrow$，故用$\vdash$区分。但本质一样，相当于证明 $(P\to Q)\wedge(Q\to R)\wedge P\Rightarrow R$)

证明过程如下

(1)	P	前提引入
(2)	$P\to Q$	前提引入
(3)	Q	分离(1)(2)
(4)	$Q\to R$	前提引入
(5)	R	分离(3)(4)

构造推理法

- **附加前提证明法：欲证明 $A_1 \wedge A_2 \wedge \ldots \wedge A_k \Rightarrow A \rightarrow B$，可以将A作为附加前提，直接证明与它等价的:**

$$A1 \wedge A2 \wedge \ldots \wedge Ak \wedge A \Rightarrow B$$

证明： $A_1 \wedge A_2 \wedge \ldots \wedge A_k \rightarrow (A \rightarrow B)$

$= \neg (A_1 \wedge A_2 \wedge \ldots \wedge A_k) \vee (\neg A \vee B)$

$= (\neg (A_1 \wedge A_2 \wedge \ldots \wedge A_k) \vee \neg A) \vee B$

$= \neg (A_1 \wedge A_2 \wedge \ldots \wedge A_k \wedge A) \vee B$

$= (A_1 \wedge A_2 \wedge \ldots \wedge A_k \wedge A) \rightarrow B$

构造推理法

- **反证法**：欲证明 $A_1 \wedge A_2 \wedge \ldots \wedge A_k \Rightarrow B$，可以将 $\neg B$ 作为附加前提引入，并推出**矛盾式（永假式）**，即

  $A1 \wedge A2 \wedge \ldots \wedge Ak \wedge \neg B \Rightarrow$ 矛盾式（如：$A \wedge \neg A$）

证明：$A_1 \wedge A_2 \wedge \ldots \wedge A_k \rightarrow B$

$$= \neg (A_1 \wedge A_2 \wedge \ldots \wedge A_k) \vee B$$

$$= \neg (A_1 \wedge A_2 \wedge \ldots \wedge A_k \wedge \neg B)$$

如果 $(A_1 \wedge A_2 \wedge \ldots \wedge A_k \wedge \neg B)$ 为矛盾式，则说明 $A_1 \wedge A_2 \wedge \ldots \wedge A_k \rightarrow B$ 为重言式

推理演算应用

如果马会飞或羊吃草，则母鸡就会是飞鸟；如果母鸡是飞鸟，那么烤熟的鸭子还会跑；烤熟的鸭子不会跑。所以羊不吃草。

分析：令 **P**：马会飞； **Q**：羊吃草；

R：母鸡是飞鸟；

S：烤熟的鸭子还会跑。

符号化上述语句为：

$\Gamma=\{P\vee Q\rightarrow R, R\rightarrow S, \neg S\}$，$G=\neg Q$。

证明 $\Gamma \Rightarrow G$。

(1) $\neg S$

(2) $R \rightarrow S$

(3) $\neg R$

(4) $P \vee Q \rightarrow R$

(5) $\neg (P \vee Q)$

(6) $\neg P \wedge \neg Q$

(7) $\neg Q$

一个公安人员审查一件盗窃案，已知的事实如下：

A或B盗窃了x；若A盗窃了x，则作案时间不能发生在午夜前；若B证词正确，则在午夜时屋里灯光未灭；若B证词不正确，则作案时间发生在午夜前；午夜时屋里灯光灭了。问：谁盗窃了x。

设 P：A盗窃了x；Q：B盗窃了x； R：作案时间发生在午夜前；S：B证词正确； T：在午夜时屋里灯光未灭。 则上述命题可符号化为：

$$P \vee Q,\ P \rightarrow \neg R,\ S \rightarrow T,\ \neg S \rightarrow R,\ \neg T \mid\!\!-\ Q$$

(1) $\neg T$

(2) $S \rightarrow T$

(3) $\neg S$

(4) $\neg S \rightarrow R$

(5) R

(6) $P \rightarrow \neg R$

(7) $\neg P$

(8) $P \vee Q$

(9) Q

归结推理法

- **归结法**(*resolution*，译作消解更准确) 是一种简单而有效的证明方法，是Prolog和自动定理证明系统的基础.
- 简单: 只有一条推理规则.
- 归结法是一种反驳过程，即试图证明给定公式是不可满足的.

归结证明过程

- **为证明$\alpha \Rightarrow \beta$，只需证明$\alpha \wedge \neg\beta$是矛盾式**

  (1) 将$\alpha \wedge \neg\beta$化为合取范式，并写成所有析取式(称为子句)的集合S

  (2) 对子句集合S进行一步归结:

  若S中有两个子句$C_1 = L \vee C_1'$, $C_2 = \neg L \vee C_2'$，则可以对其进行归结，得到归结式$C_1' \vee C_2'$，放入S中

  (3) 重复(2)，直至得到矛盾式

归结推理规则的正确性

- 设$C_1 = L \vee C_1'$, $C_2 = \neg L \vee C_2'$, 只要证明:

  $$C_1 \wedge C_2 \Rightarrow C_1' \vee C_2'$$

证明: 设在解释I 下C_1和C_2均为真

若L为真，则$\neg L$为假，故C_2'为真;

若L为假，则C_1'为真;

无论是哪种情况，都有$C_1' \vee C_2'$为真

归结法证明举例

$P \to Q \wedge P \Rightarrow Q$

(1) 求$P \to Q \wedge P \wedge \neg Q$的合取范式:

$(\neg P \vee Q) \wedge P \wedge \neg Q$

并写成子句集合 $\{\neg P \vee Q, P, \neg Q\}$

(2) 归结:

$\neg P \vee Q$与P 归结，得到Q;

Q与$\neg Q$归结，得到空子句，即矛盾式，得证.

上海交通大學
SHANGHAI JIAO TONG UNIVERSITY

Institute of Media,
Information, and Network

Q & A

Many Thanks

zou-jn@cs.sjtu.edu.cn