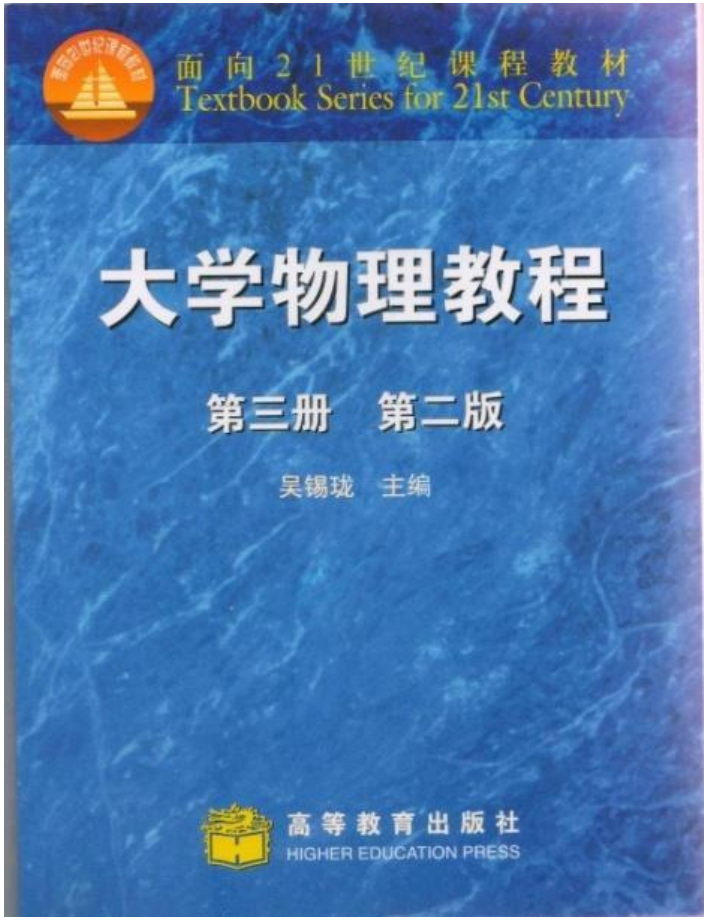
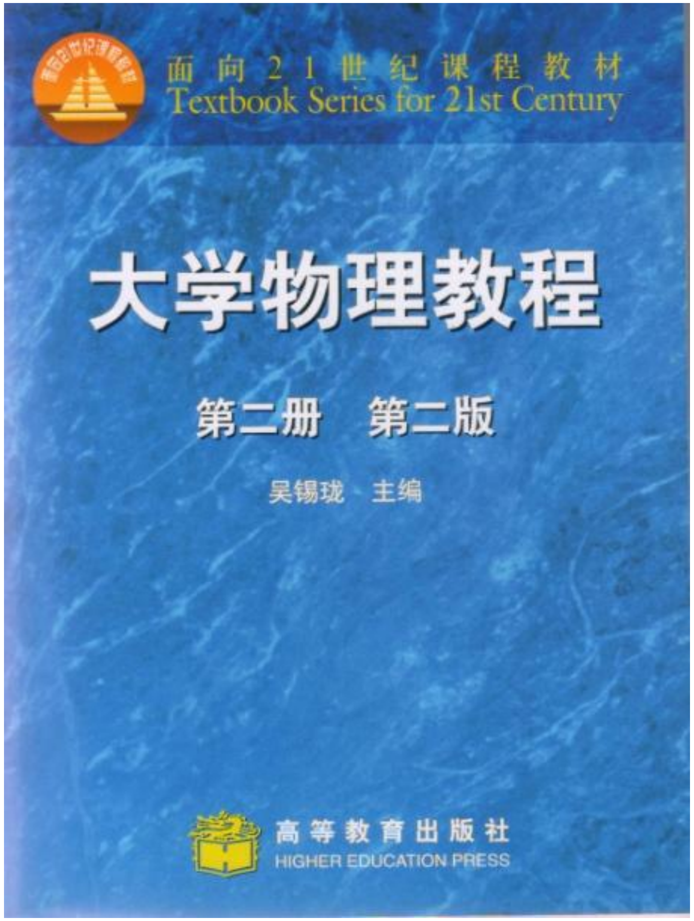
教材：

《大学物理教程 》 吴锡珑编 高教出版社





参考书:

1,《新概念物理教程· 电磁学》，赵凯华等编著，高等教育出版社

2,《新概念物理教程· 光学》，赵凯华等编著，高等教育出版社

3,《新概念物理教程· 量子物理》，赵凯华等编著，高等教育出版社

3, 《大学物理学》，卢德馨编著，高等教育出版社

电子教案下载：

1：**http://www.phycai.sjtu.edu.cn/wis/**
2：选择“学生”登陆方式
3：用户名----个人的学号
4：密码----个人的学号（初始密码，进去后可以修改）

答疑时间: 每周一下午1:30—3:30

本人办公室：物理楼601

欢迎同学们来与老师进行交流和讨论！

老师将非常乐意就广泛的与课程有关的问题进行讨论，但拒绝回答任何挑战相对论，挑战量子力学，永动机设计，...等显而易见是非科学的问题。

教研室答疑安排

时间：周二下午 2：00—4：00

晚 上 6：00—8：00

地点：上-208

成绩构成

平时成绩：40％，包括平时作业、课堂练习等。

期终考试：60％。

本学期内容

电磁学 波动光学 量子物理

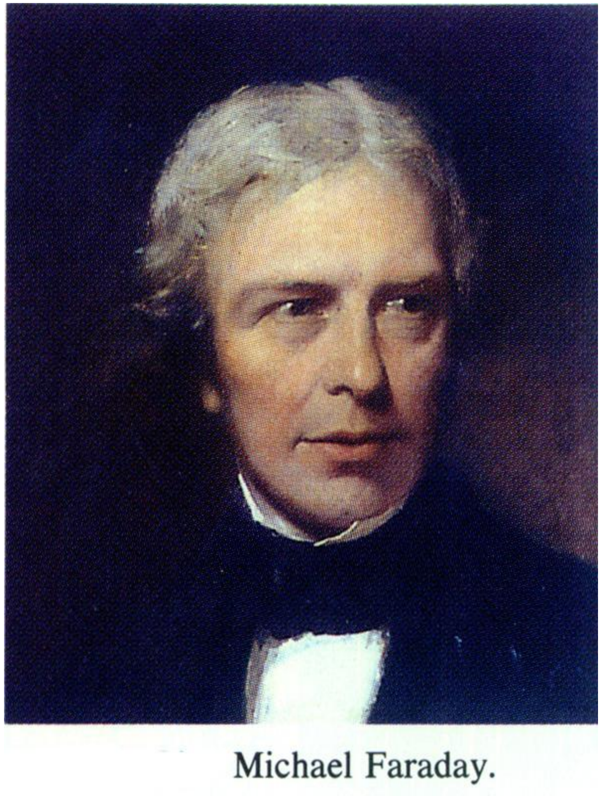
电磁学的代表人物

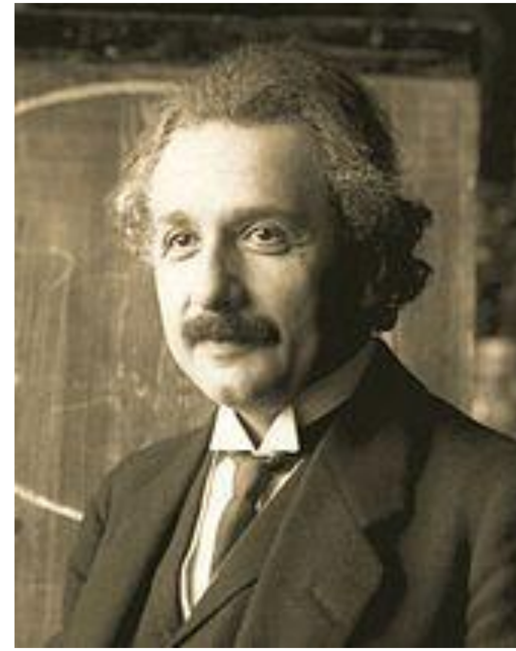
Hans Christian Oersted
(1770–1851).

安培

库仑

奥斯特





法拉第

爱因斯坦

不同参考系中电磁规律相互之间关系，
不同参考系中电场和磁场之间关系。

电磁学重大事

仑
定律

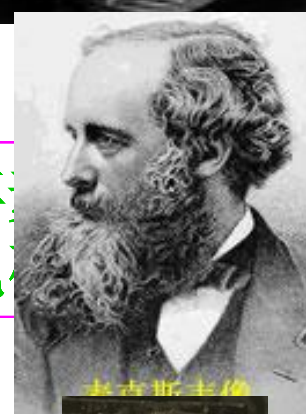
1820年 现
电流

1831 发
现电 应

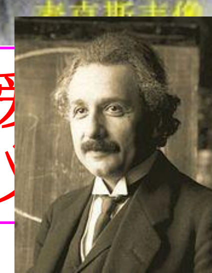
斯
发 定理

发现 理

1865年 出
电



1905年爱 坦建立
狭义 论



第 11 章 静电场

爱因斯坦认为：实物和场是两种存在，场是物理学中出现的新概念，需要用很大的科学想象力才能理解。

标量场，如温度场、密度场。矢量场，如速度场，更重要的如引力场、电磁场、核力场等等。

研究任一矢量场必须从两个方面入手：通量与环流

11.1 电力和电荷

一、电力

（1）质子与电子之间电力比引力强 39个数量级

（2）长程力，存在于原子内部和宇宙天体之间

（3）吸引与排斥两种形式

（4）电力比磁力要强得多

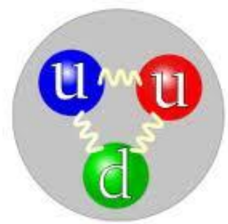
二、电荷

（1）电荷的正负性

（2）电荷的量子性　电子电量

$$|e| = 1.60217733 \times 10^{-19}\,\mathrm{C}$$

quark理论与分数电荷



二个上夸克及一个下夸克所构成的质子

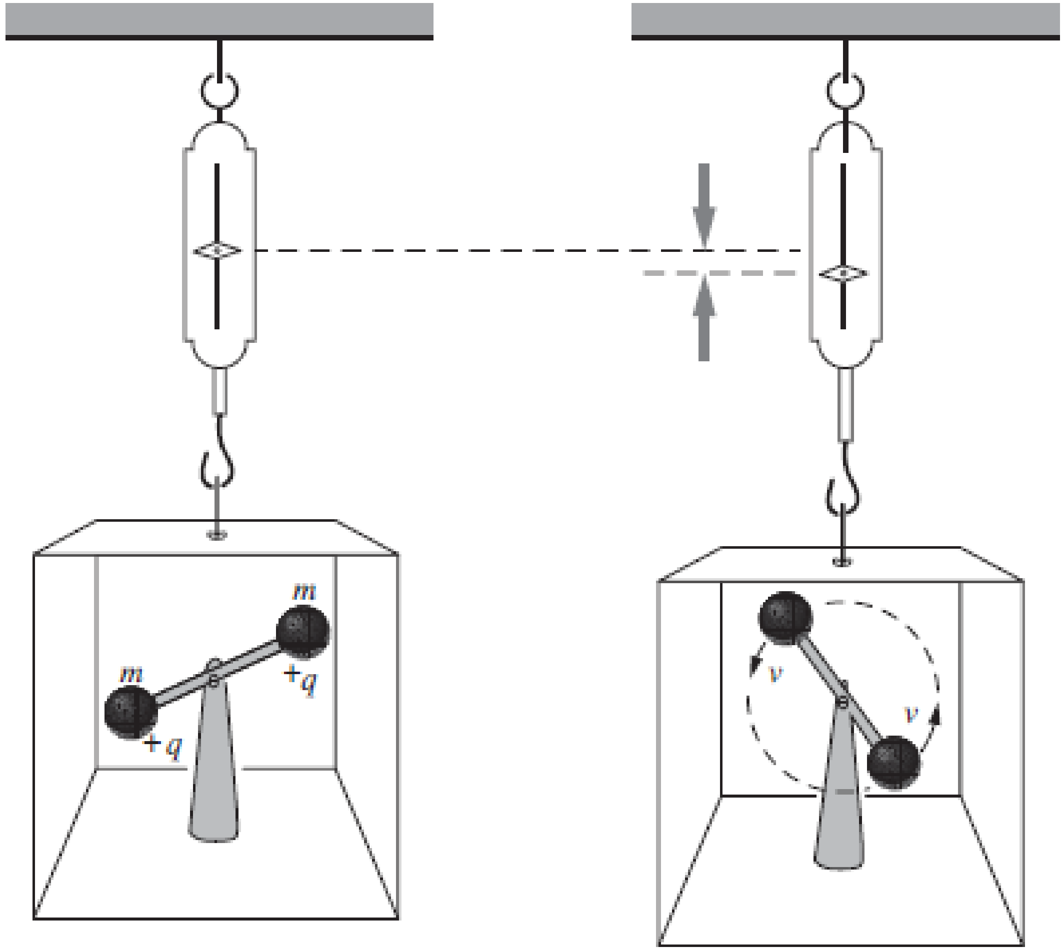
上夸克带电：$\frac{2}{3}|e|$

下夸克带电：$-\frac{1}{3}|e|$

（3）电荷的守恒性

$$\boxed{\sum_i q_i = \text{const.}}$$

（4）电荷运动不变性，即具有相对论不变性

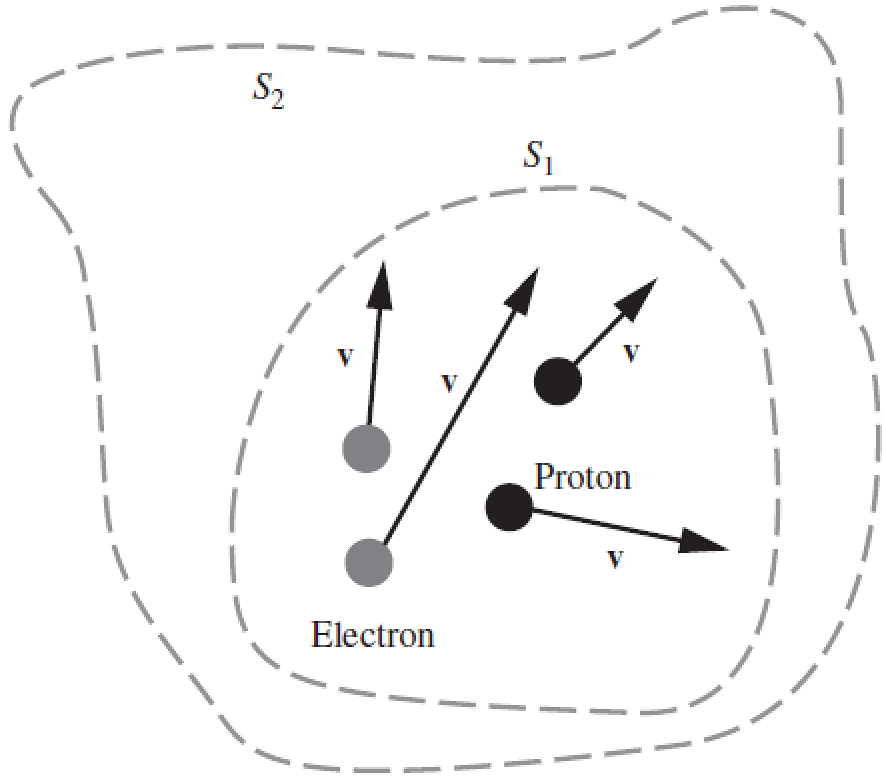


Total mass = mass of box + $2m$

Total charge = $2q$

Total mass = mass of box + $\dfrac{2m}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}$

Total charge = $2q$



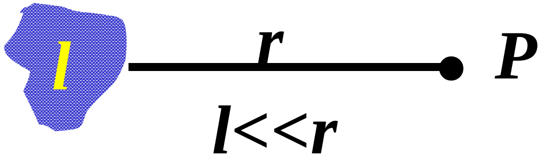
氘分子

ionized deuterium molecule (two protons, two neutrons, one electron) and an ionized helium atom (also two protons, two neutrons, and one electron). These are two very different structures, within which the component particles are whirling around with very different speeds. The difference in energy shows up as a measurable difference in mass. There is no detectable difference, to very high precision, in the electric charge of the two ions.

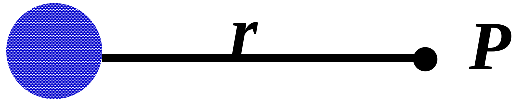
（5）点电荷模型

当带电体的大小和形状可以忽略时

—点电荷—与带电体电量相同



(a)



(b)

点电荷的实验基础：

（1）质子的散射实验表明质子线度<10^{-15}m

（2）电子对撞实验表明电子线度<10^{-18}m

11.2 库仑定律　电力叠加原理

一、库仑定律

1785年，库仑对电荷间的电力相互作用进行了定量研究。

在真空中，两个静止点电荷间的相互作用电力的方向沿着它们的连线；同号电荷相斥，异号电荷相吸；其大小与它们的电量的乘积成正比，与它们之间距离的平方成反比。

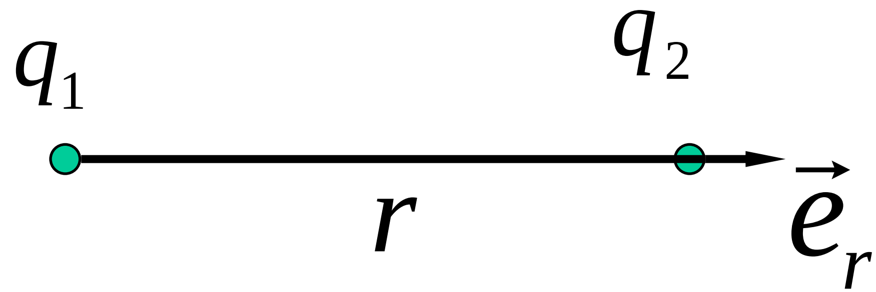
可表示为：

$$F = k\frac{q_1 q_2}{r^2}$$

k：静电力常数

矢量式：

$$\vec{F} = k\frac{q_1 q_2}{r^2}\vec{e}_r$$



$$= k\frac{q_1 q_2}{r^3}\vec{r}$$

令 $k = \dfrac{1}{4\pi\varepsilon_0}$

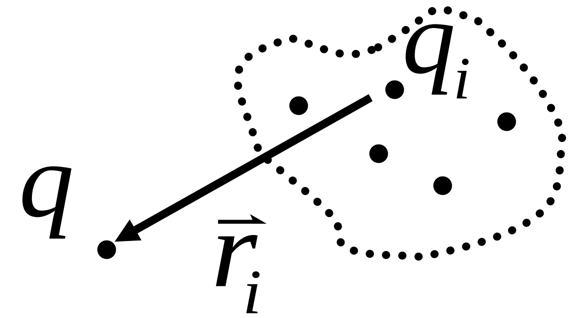
则 $\vec{F} = \dfrac{q_1 q_2}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\vec{e}_r$

$\varepsilon_0 = \dfrac{1}{4\pi k} = 8.851\times 10^{-12}\,\mathrm{C}^2/\mathrm{N}\cdot\mathrm{m}^2$ 为真空介电常数

二、电力叠加原理

设有*n*个点电荷组成的点电荷系，点电荷 q 受到其他点电荷 q_i 作用的总电力为

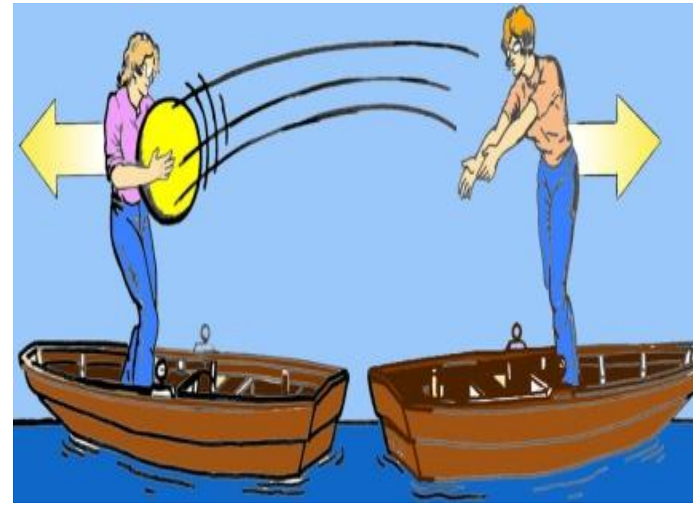
$$\vec{\boldsymbol{F}} = \sum_{\boldsymbol{i}} \vec{\boldsymbol{F}}_{\boldsymbol{i}} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \sum_{\boldsymbol{i}} \frac{\boldsymbol{q}\boldsymbol{q}_{\boldsymbol{i}}}{\boldsymbol{r}_{\boldsymbol{i}}^{2}} \vec{\boldsymbol{e}}_{\boldsymbol{i}}$$



11.3 电场强度

一、电场 静电场

两种观点：超距作用与近距作用



交换粒子是现代相互作用理论的基础

电荷 ⟷ 电荷（电场）

经典场论 → 量子场论

原子及以上尺度　　亚原子尺度

注意：

- 处于电场中的任何电荷都将受到电场力的作用
- 当电荷相对于观测者运动时，电场是变化的
- 相对于观察者静止的电荷产生的电场—**静电场**

形成电场的电荷称为源电荷

二、电场强度

描述场中各点电场的强弱变化的物理量— 电场强度

试验电荷条件

（1）（正）点电荷—可以准确测量电场的分布

（2）电量足够小—不显著地影响电场的分布

把试验电荷放到电场中任意场点，测量受力情况，试验表明：

（1）受力与位置（场点）有关

（2）比值 $\vec{F}/q_0$ 与试验电荷无关

定义电场强度：$$\vec{E}=\frac{\vec{F}}{q_0}$$

- 电场强度的方向为正电荷所受电场力的方向。

讨论:

•静电场为矢量场： $\vec{E}=\vec{E}(x,y,z)$

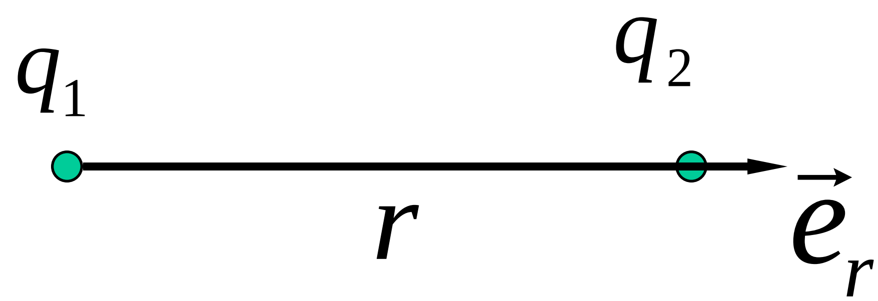
•电场强度单位：国际单位制 $\mathrm{N}\cdot\mathrm{C}^{-1}$或： $\mathrm{V}\cdot\mathrm{m}^{-1}$

•定义电场强度后，点电荷（q）处于外场中时受电场作用力：

$$\vec{F}=q\vec{E}$$

三、点电荷电场的电场强度

根据库仑定律，



q_2 受到的电场力为

$$\vec{F} = \frac{q_1 q_2}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\vec{e}_r$$

根据电场强度的定义有 $\vec{E} = \dfrac{\vec{F}}{q_2} = \dfrac{q_1}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\vec{e}_r$

- 球对称

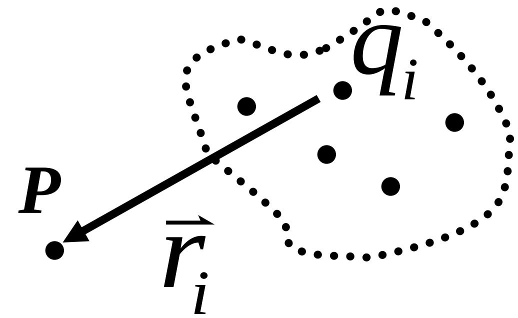
$$E(x, y, z) = E(r)$$

$$E(r)\Big|_{r=c} = \text{const.}$$

四、点电荷系电场的电场强度

设源电荷是有 ***n*** 个点电荷 $q_{1,}q_{2,}\cdots q_n$

则在场中 ***P*** 处的场强：



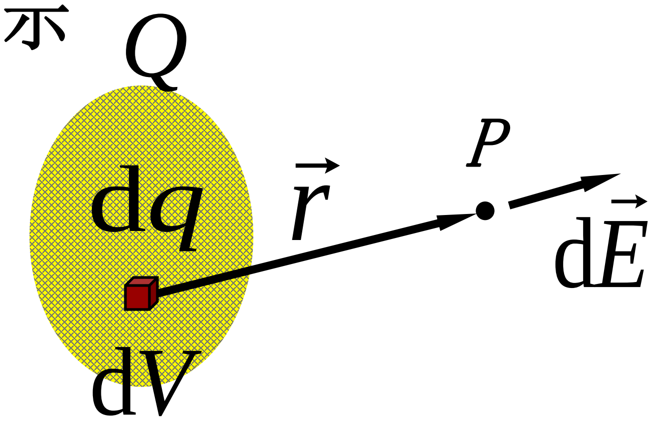
$$\vec{E}=\frac{\vec{F}}{q_0}=\frac{\sum_{i}^{n}\vec{F}_i}{q_0}$$

$$=\sum_{i=1}^{n}\vec{E}_i=\sum_{i=1}^{n}\frac{q_i}{4\pi\varepsilon_0 r_i^{\,2}}\vec{e}_i$$

这一结论称为场强叠加原理

五、任意带电体的场强

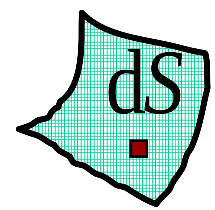
若为电荷连续分布的带电体，如图所示



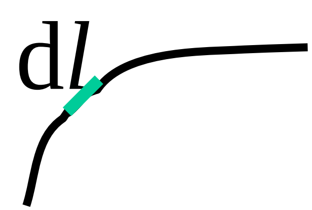
可以把带电体切割成无穷多个电荷元，每个电荷元可看作点电荷：

$$\vec{E}=\int_{(Q)}\mathrm{d}\vec{E}=\int_{(Q)}\frac{\mathrm{d}q}{4\pi\varepsilon_0 r^3}\vec{r}$$

- 体电荷分布　$\rho=\dfrac{\mathrm{d}q}{\mathrm{d}V}$　$\mathrm{d}q=\rho\mathrm{d}V$
- 面电荷分布　$\sigma=\dfrac{\mathrm{d}q}{\mathrm{d}S}$　$\mathrm{d}q=\sigma\mathrm{d}S$



- 线电荷分布　$\lambda=\dfrac{\mathrm{d}q}{\mathrm{d}l}$　$\mathrm{d}q=\lambda\mathrm{d}l$



[例] 求均匀带电直线的电场分布。

解： 电荷线密度为λ

$$\mathrm{d}q = \frac{q}{L}\mathrm{d}x = \lambda \mathrm{d}x$$

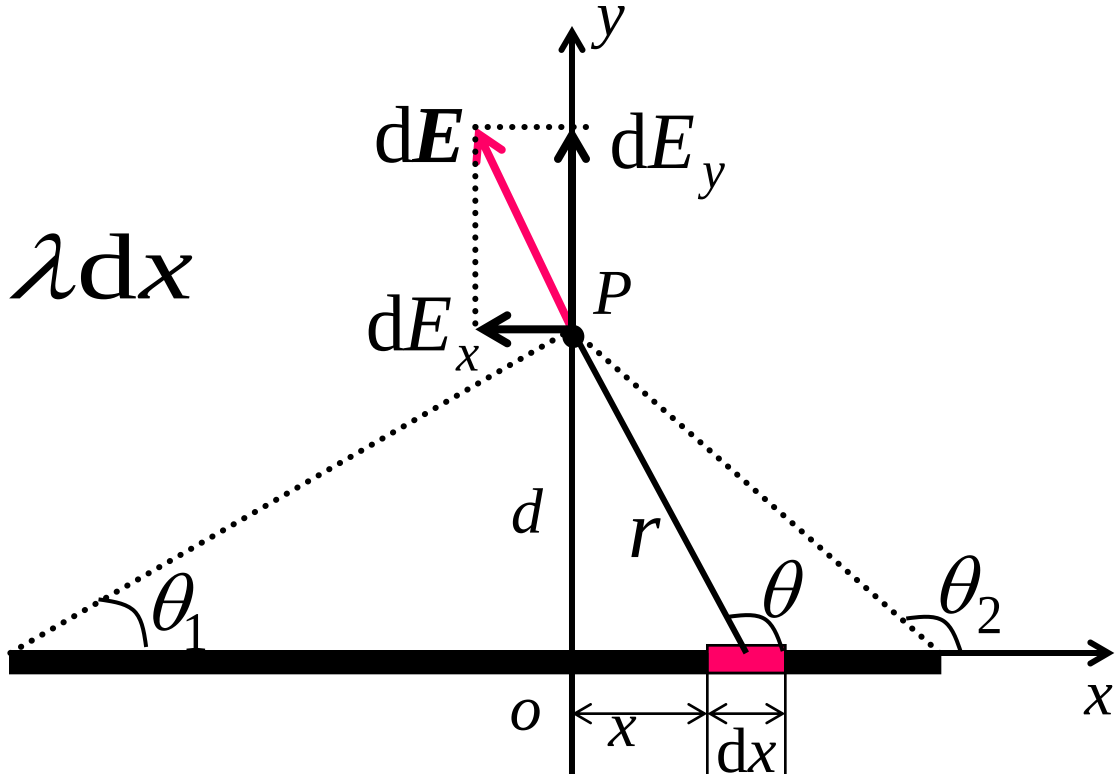
$$\mathrm{d}E = \frac{\mathrm{d}q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}$$

$$\mathrm{d}E_x = \mathrm{d}E\cos\theta$$

$$\mathrm{d}E_y = \mathrm{d}E\sin\theta$$

$$E_x = \int \mathrm{d}E_x = \int \mathrm{d}E\cos\theta = \int \frac{\lambda \mathrm{d}x}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\cos\theta$$

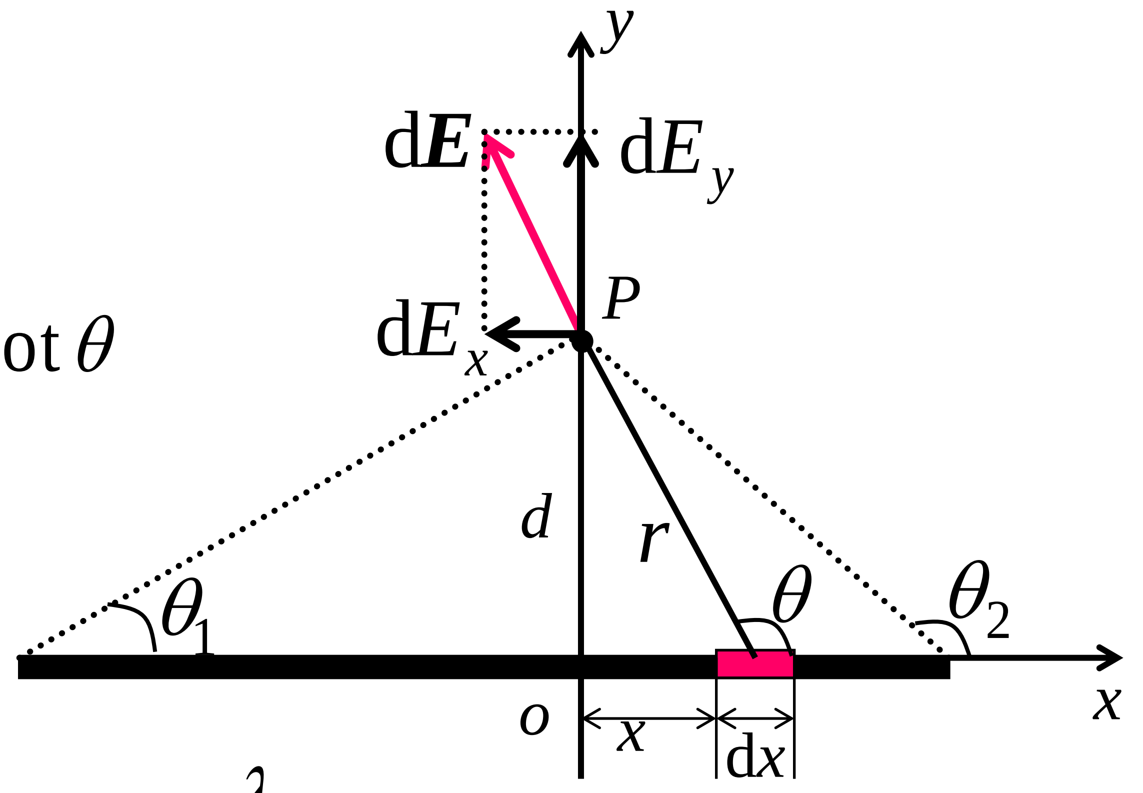
$$E_y = \int \mathrm{d}E_y = \int \mathrm{d}E\sin\theta = \int \frac{\lambda \mathrm{d}x}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\sin\theta$$



$$E_x = \int \frac{\lambda \mathrm{d}x}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\cos\theta$$

$$r = \frac{d}{\sin\theta} \qquad x = -d\cot\theta$$

$$\mathrm{d}x = \frac{d}{\sin^2\theta}\mathrm{d}\theta$$



$$E_x = \int_{\theta_1}^{\theta_2} \frac{\lambda}{4\pi\varepsilon_0 d}\cos\theta \mathrm{d}\theta = \frac{\lambda}{4\pi\varepsilon_0 d}(\sin\theta_2 - \sin\theta_1)$$

$$E_y = \int_{\theta_1}^{\theta_2} \frac{\lambda}{4\pi\varepsilon_0 d}\sin\theta \mathrm{d}\theta = \frac{\lambda}{4\pi\varepsilon_0 d}(\cos\theta_1 - \cos\theta_2)$$

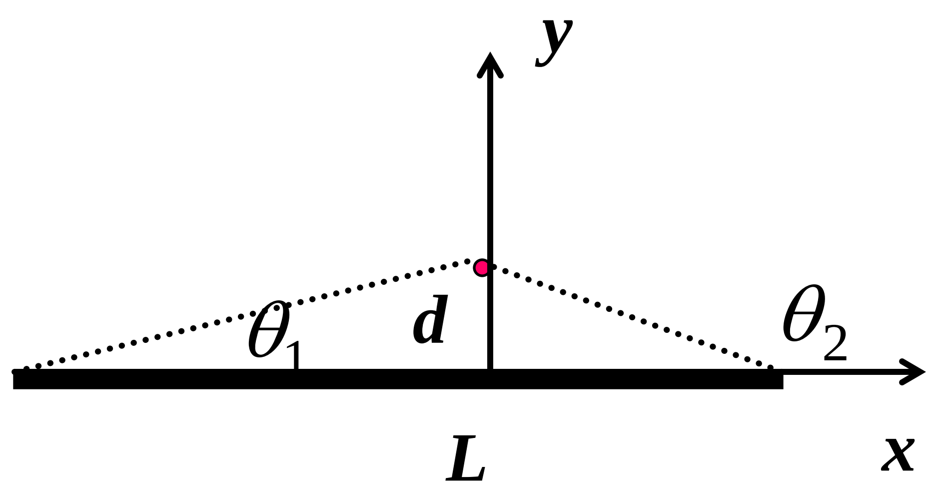
$$\vec{\boldsymbol{E}} = \boldsymbol{E}_x \vec{\boldsymbol{i}} + \boldsymbol{E}_y \vec{\boldsymbol{j}}$$

$$E_x = \frac{\lambda}{4\pi\varepsilon_0 d}(\sin\theta_2 - \sin\theta_1) \quad E_y = \frac{\lambda}{4\pi\varepsilon_0 d}(\cos\theta_1 - \cos\theta_2)$$

对其结果进行讨论： **1.** 无限长，即 $d \ll L$

$$\theta_1 = 0 \quad \theta_2 = \pi$$

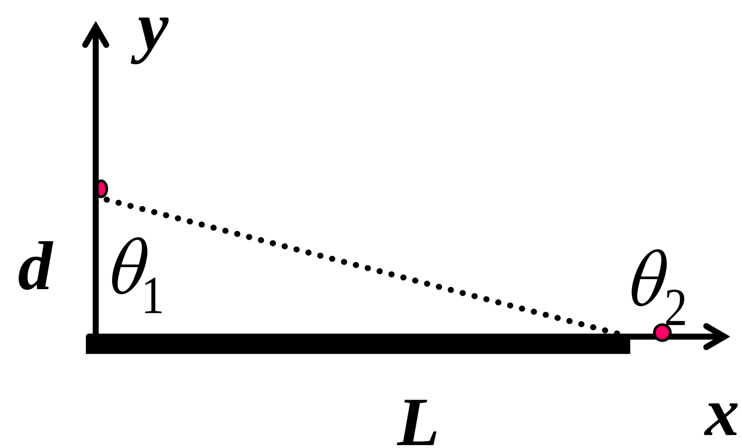
$$\therefore E_x = 0 \qquad E_y = \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0 d}$$



$$E_x = \frac{\lambda}{4\pi\varepsilon_0 d}(\sin\theta_2 - \sin\theta_1) \quad E_y = \frac{\lambda}{4\pi\varepsilon_0 d}(\cos\theta_1 - \cos\theta_2)$$

2. 半无限长 即 $\theta_1 = \frac{\pi}{2} \quad \theta_2 = \pi$

$$E_x = -\frac{\lambda}{4\pi\varepsilon_0 d} \qquad E_y = \frac{\lambda}{4\pi\varepsilon_0 d}$$

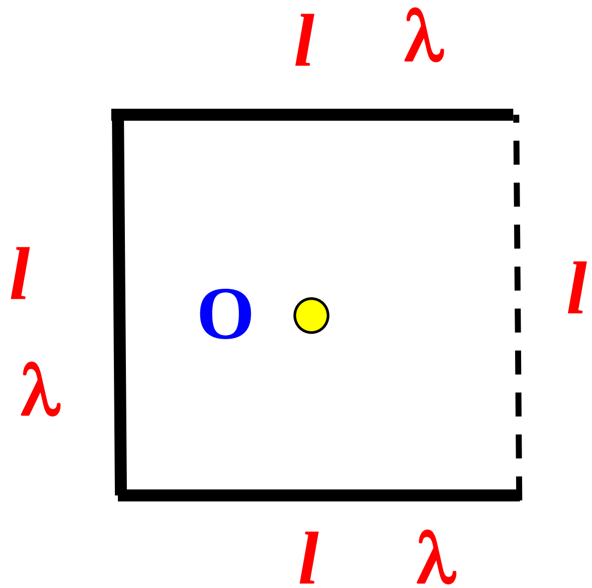


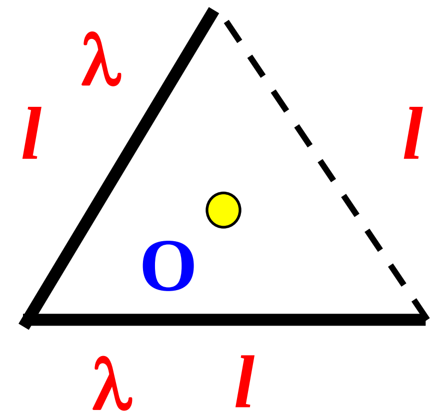
或 $\theta_1 = 0 \quad \theta_2 = \frac{\pi}{2}$

$$E_x = \frac{\lambda}{4\pi\varepsilon_0 d} \qquad E_y = \frac{\lambda}{4\pi\varepsilon_0 d}$$

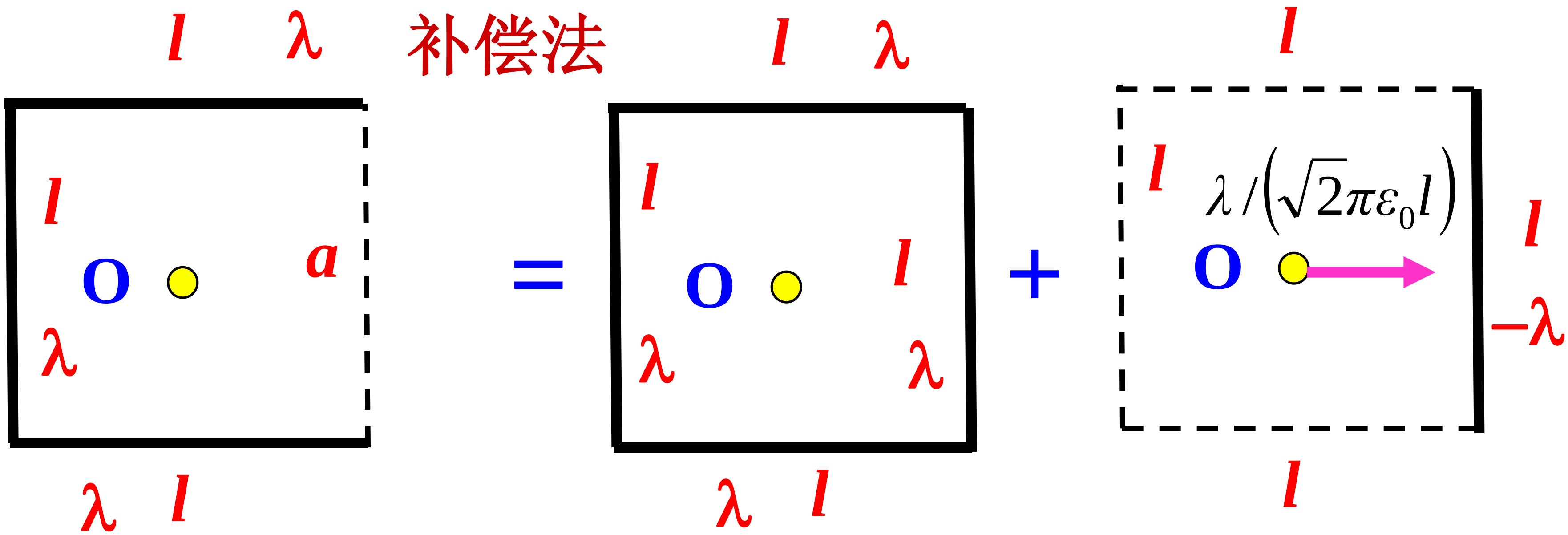
3. *p*点在直线上或在直线的延长线上，不可使用上述公式，要具体分析。

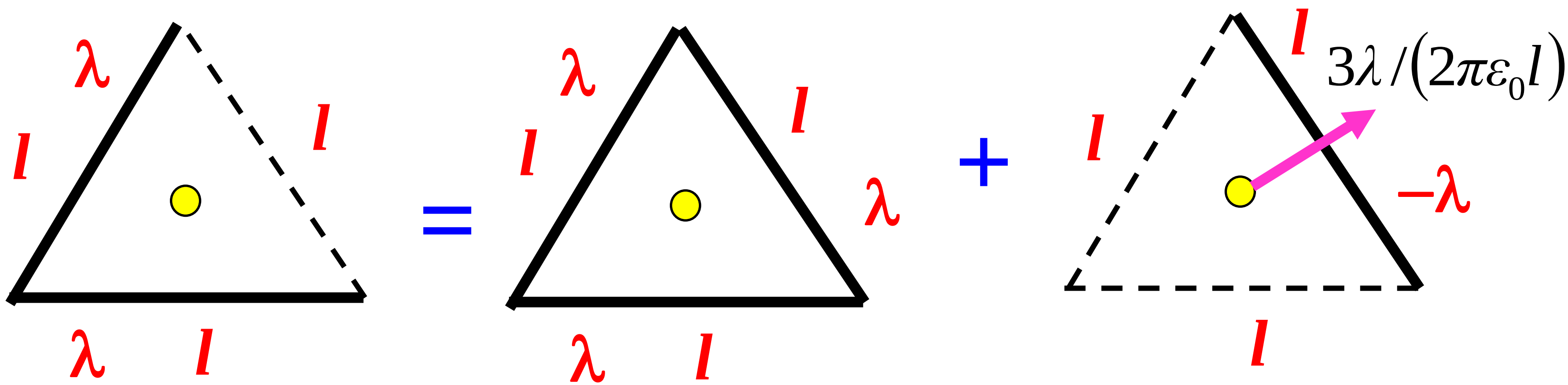
已知分别把均匀带电λ(>0)的细棒弯成如图所示形状，求中心O处的电场。





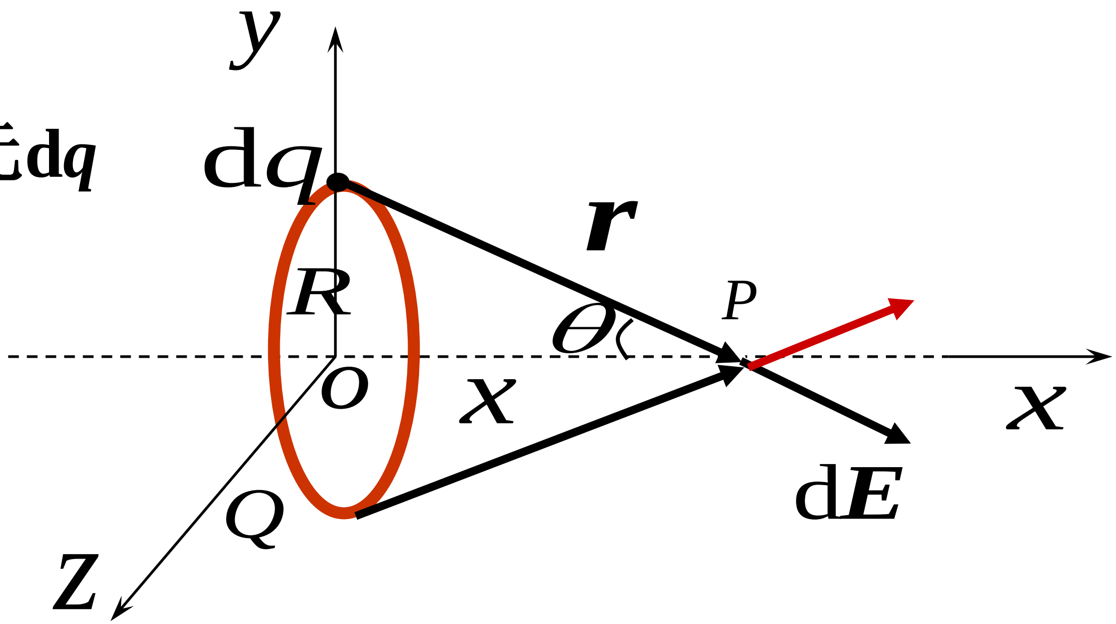
补偿法





[例] 均匀带电圆环轴线上的场

解：在圆环上任取电荷元**d*q***



$$\boxed{\mathrm{d}\vec{E} = \frac{\mathrm{d}q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\vec{e}_r}$$

$$\mathrm{d}E_x = \mathrm{d}E\cos\theta$$

$$\mathrm{d}E_{\perp x} = \mathrm{d}E\sin\theta$$

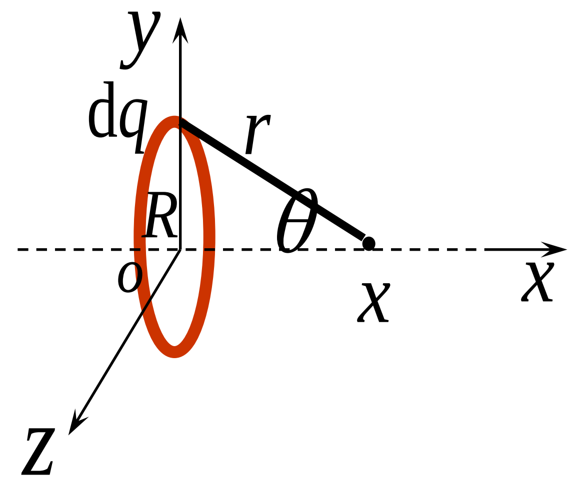
由对称性分析知

垂直***x*** 轴的场强为**0**

$$\Longrightarrow \boxed{\vec{E} = E_x\vec{i}}$$

$$\vec{E} = E_x \vec{i}$$

$$E = E_x = \int_{(Q)} \frac{\mathrm{d}q}{4\pi\varepsilon_0 r^2} \cos\theta$$



$$\cos\theta = \frac{x}{r}$$

$$= \frac{\cos\theta}{4\pi\varepsilon_0 r^2} \int_{(Q)} \mathrm{d}q \rightarrow$$

$$\boxed{\boldsymbol{E} = \frac{\boldsymbol{xQ}}{4\pi\boldsymbol{\varepsilon}_0\left(\boldsymbol{x}^2 + \boldsymbol{R}^2\right)^{3/2}}}$$

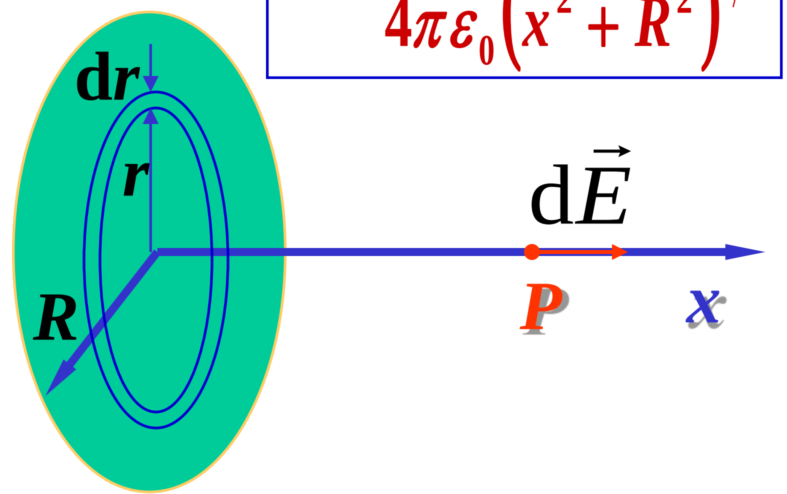
若 $\boldsymbol{x} \gg \boldsymbol{R}$

$$\boxed{E \approx \frac{Q}{4\pi\,\varepsilon_0 x^2} \approx \frac{Q}{4\pi\,\varepsilon_0 r^2}}$$

点电荷

[例] 有一均匀带电的薄圆盘，半径为R，面电荷密度为 σ 。求圆盘轴线上任一点的场强。

$$E=\frac{xQ}{4\pi\varepsilon_0\left(x^2+R^2\right)^{3/2}}$$



解： 利用前例结果

$$Q\to \mathrm{d}q=\sigma 2\pi r\mathrm{d}r$$

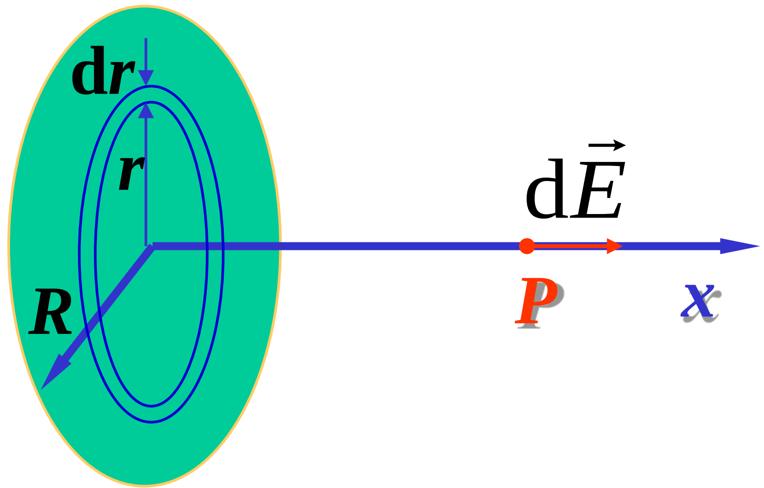
$$R\to r$$

$$\mathrm{d}E=\frac{\mathrm{d}qx}{4\pi\varepsilon_0(x^2+r^2)^{\frac{3}{2}}}$$

$$=\frac{\sigma 2\pi r\mathrm{d}rx}{4\pi\varepsilon_0(x^2+r^2)^{\frac{3}{2}}}=\frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\frac{xr\mathrm{d}r}{(x^2+r^2)^{\frac{3}{2}}}$$

$$E=\int_0^R \frac{\sigma x}{2\varepsilon_0}\frac{r\mathrm{d}r}{(x^2+r^2)^{\frac{3}{2}}}=\frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\left(1-\frac{x}{\sqrt{x^2+R^2}}\right)$$

讨论：1. 若$x \ll R$，则 $E=\dfrac{\sigma}{2\varepsilon_0}$



2. 若$x \gg R$

则：
$$E=\frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\left(1-\frac{1}{\sqrt{1+\dfrac{R^2}{x^2}}}\right)$$

$$\approx\frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\frac{R^2}{2x^2}$$

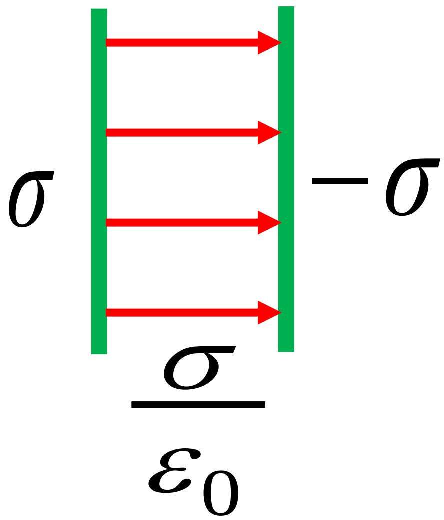
$$=\frac{q}{4\pi\varepsilon_0 x^2}$$

——点电荷的场！

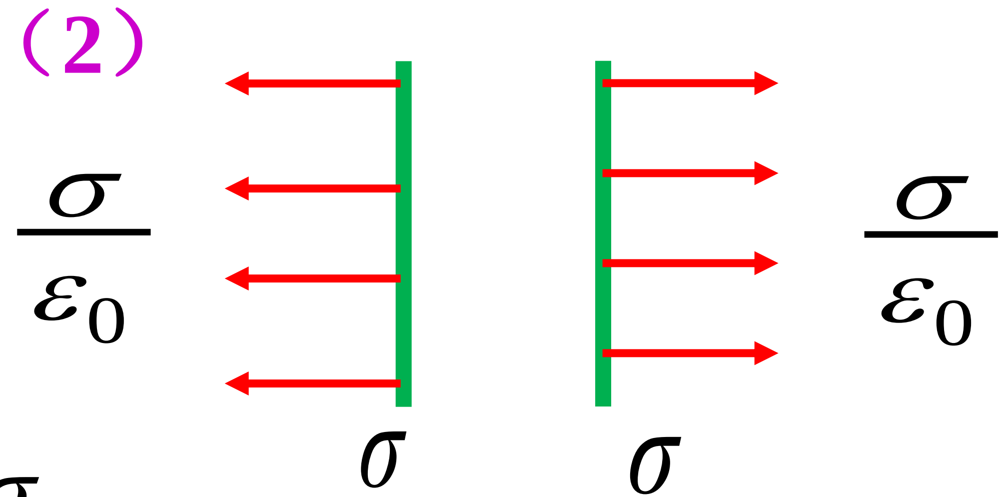
无限大带电平面的电场叠加问题

$$\vec{E} = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\vec{i}$$

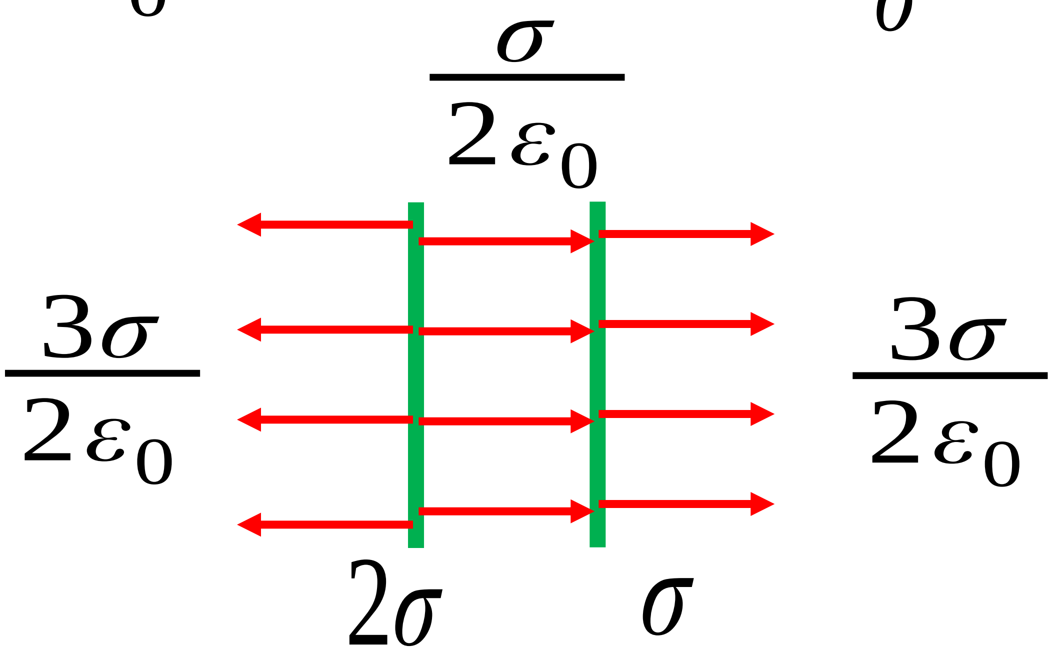
（1）



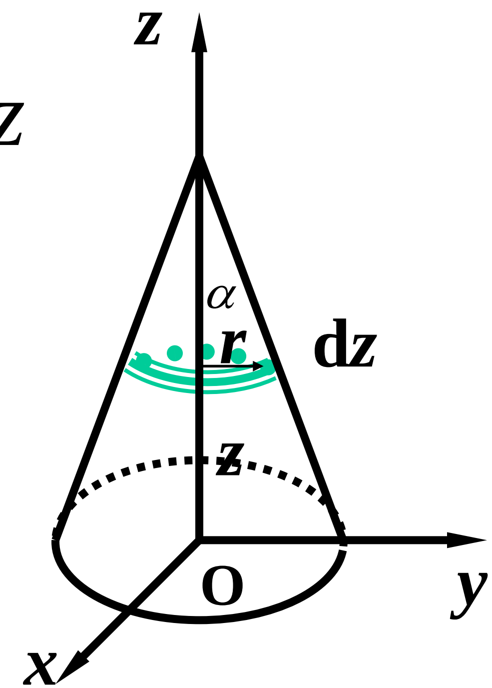
（2）



（3）



[习题] 求高为**H**，底面半径为**R**的均匀带电锥体在顶点处的电场强度。



解：$\mathrm{d}q=\rho(\pi r^2\mathrm{d}z)\Rightarrow\sigma=\dfrac{\mathrm{d}q}{\pi r^2}=\rho\mathrm{d}z$

$$\vec{E}=\int_0^H\frac{\rho\mathrm{d}z}{2\varepsilon_0}\left(1-\frac{H-z}{\sqrt{(H-z)^2+r^2}}\right)\vec{k}$$

$$=\int_0^H\frac{\rho\mathrm{d}z}{2\varepsilon_0}(1-\cos\alpha)\vec{k}$$

$$=\frac{\rho H}{2\varepsilon_0}(1-\cos\alpha)\vec{k}$$

$$=\frac{\rho H}{2\varepsilon_0}\left(1-\frac{H}{\sqrt{H^2+R^2}}\right)\vec{k}$$

$$E=\frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\left(1-\frac{x}{\sqrt{x^2+R^2}}\right)$$

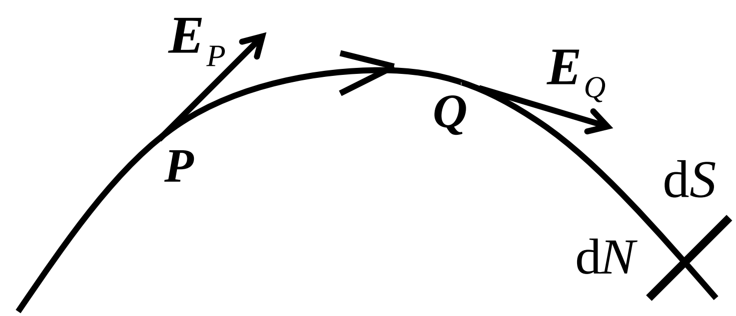
11.3 高斯定理

描述电场的两种方法：电场线和电通量。

一、电场线

（1）曲线上各点的切线方向都与该点处的场强方向一致

（2）电场线密度 $$E = \frac{\mathrm{d}N}{\mathrm{d}S}$$



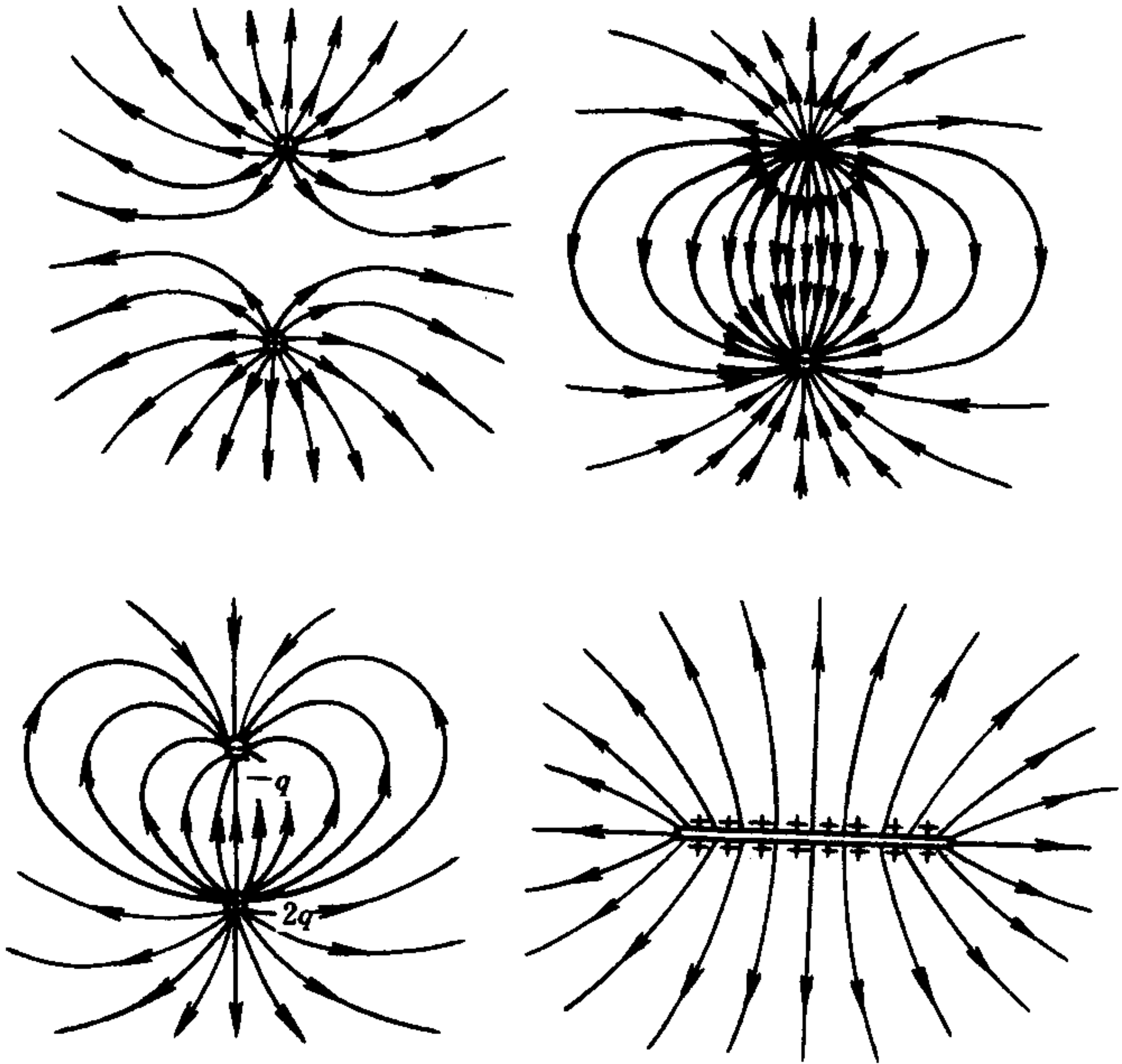
电场线的性质：

- 电场线起自于正电荷或无穷远，止于负电荷或无穷远 ，没有电荷处不中断;

- 对于静电场不可能出现单一绕向的闭合电场线。

- 两条电场线不会相交，不能相切。

几种典型带电系统的电场线

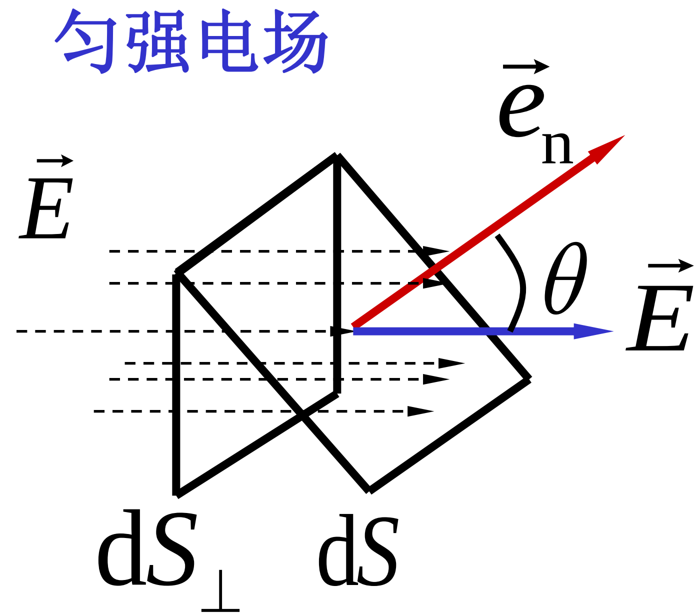


二、电通量

通过电场中任意一给定面的电场线总根数，即为通过该面的电通量

通过面积元 $\mathrm{d}S_{\perp}$ 的电通量为

$$\mathrm{d}\Phi = E\mathrm{d}S_{\perp}$$



通过面积元 $\mathrm{d}S$ 的电通量为

$$\mathrm{d}\Phi = E\mathrm{d}S_{\perp} = E\cos\theta \mathrm{d}S$$

$$\mathrm{d}\Phi = \vec{E}\cdot\mathrm{d}\vec{S} \qquad \mathrm{d}\vec{S} = \mathrm{d}S\vec{e}_{\mathrm{n}}$$

$\vec{e}_n$ ——面元的法向单位矢量

把曲面分成许多个面积元，每一面元处视为匀强电场

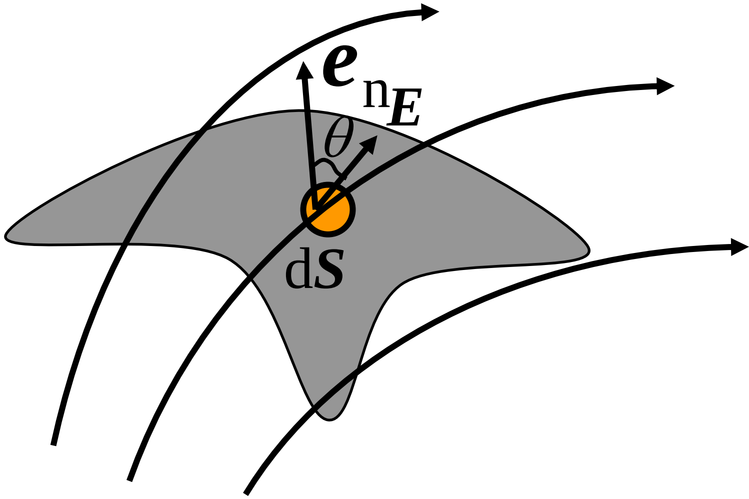
$$\mathrm{d}\Phi = \vec{E} \cdot \mathrm{d}\vec{S}$$

对整个曲面积分，即得：

$$\Phi = \iint \mathrm{d}\Phi$$

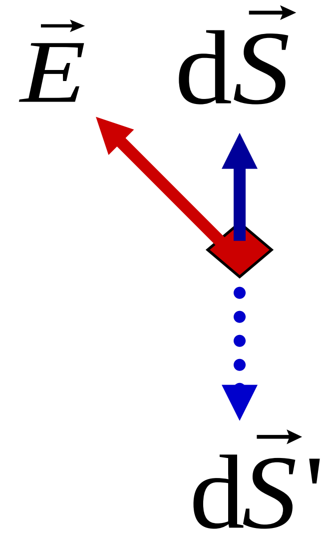
$$= \iint_S \vec{E} \cdot \mathrm{d}\vec{S}$$

非匀强电场



讨论：

1. $\mathrm{d}\Phi = \vec{E}\cdot\mathrm{d}\vec{S}$ 的正、负取决于面元的法线方向与电场强度方向的关系



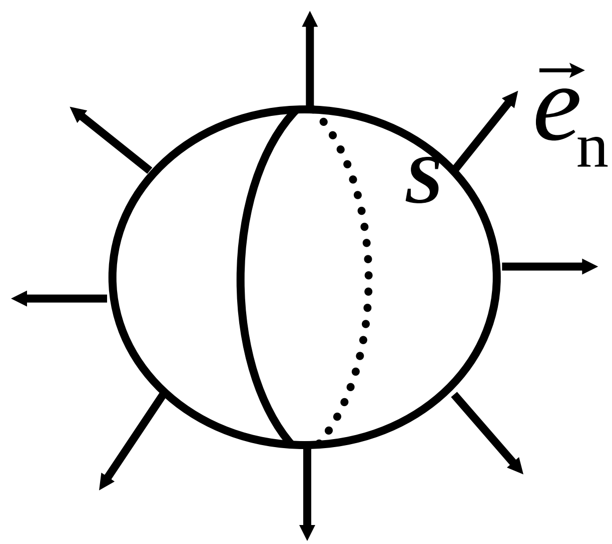
如图所示： $\vec{E}\cdot\mathrm{d}\vec{S} > 0$

若面元法向相反： $\vec{E}\cdot\mathrm{d}\vec{S}' < 0$

2. 通过闭合曲面的电通量

规定闭合曲面法线方向向外为正！

$$\Phi = \oint\!\!\!\oint_S \vec{E}\cdot\mathrm{d}\vec{S}$$

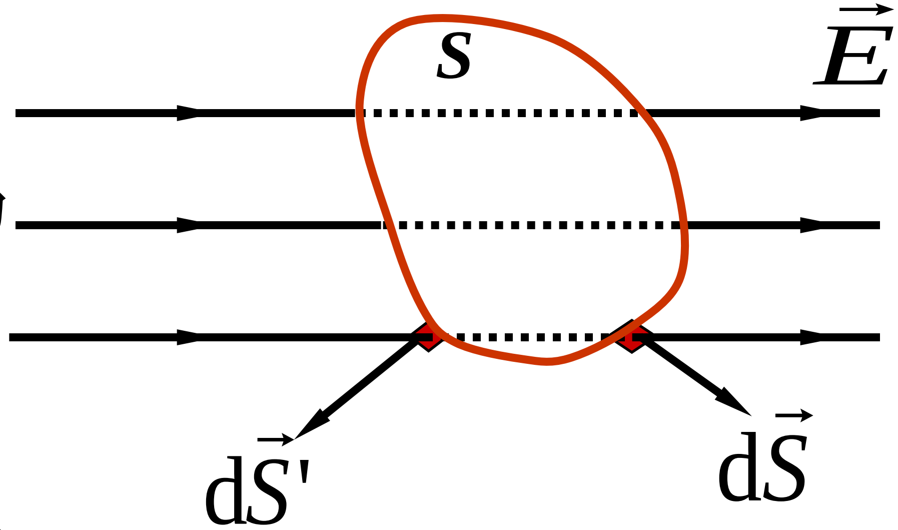


$\vec{E}\cdot \mathrm{d}\vec{S}'<0$

➢电场线穿入，每一根电场线对电通量的贡献为-1。

$\vec{E}\cdot \mathrm{d}\vec{S}>0$

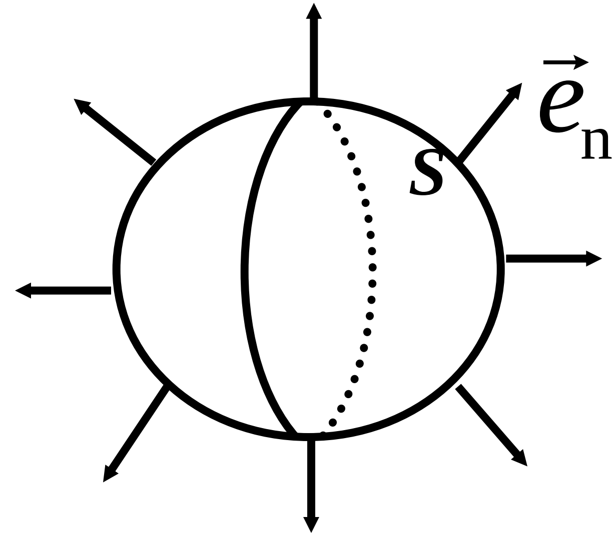
➢电场线穿出，每一根电场线对电通量的贡献为1。



2. 通过闭合曲面的电通量

规定闭合曲面法线方向向外为正！

$$\Phi=\oiint_S \vec{E}\cdot \mathrm{d}\vec{S}$$



三、静电场的高斯定理

高斯(**K.F.Gauss**)是德国物理学家和数学家，他在理论物理和实验物理以及数学方面均有杰出的贡献。他导出的高斯定理表述了电场中通过任一闭合曲面的电通量与该曲面所包围的源电荷之间的定量关系，是静电场的一条基本定理，也是电磁场理论的基本规律之一。

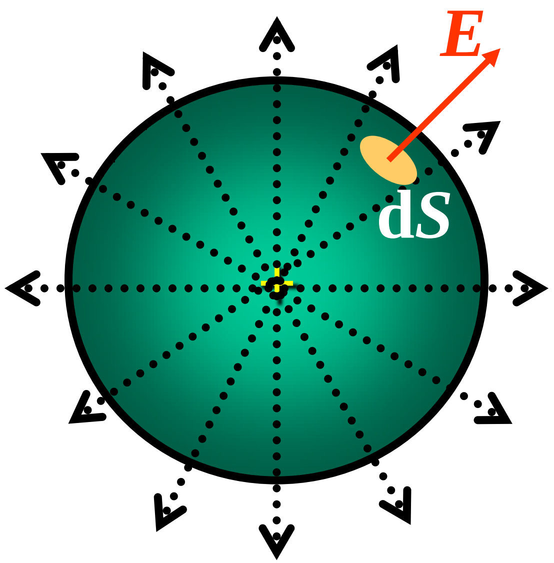
真空中的高斯定理：

在真空中，通过任一闭合曲面的电场强度通量等于该曲面所包围的所有电量代数和的 $1/\varepsilon_0$ 倍。

$$\Phi_e = \oint_S \vec{E} \cdot \mathrm{d}\vec{S} = \frac{1}{\varepsilon_o}\sum_{i=1}^{n} q_i$$

验证高斯定理：

1. 点电荷在球形高斯面的球心处



球面场强：

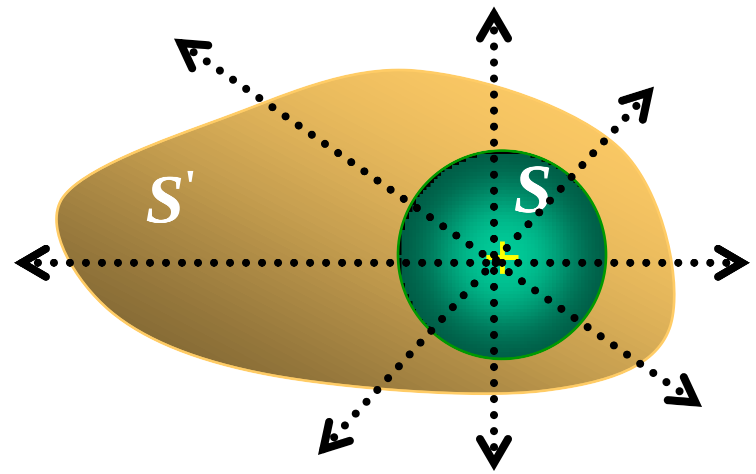
$$E = \frac{q}{4\pi\varepsilon_o R^2}$$

$$\mathrm{d}\,\Phi_e = E\cos 0°\mathrm{d}S = \frac{q\mathrm{d}S}{4\pi\varepsilon_o R^2}$$

$$\Phi_e = \oiint_S \frac{q\mathrm{d}S}{4\pi\varepsilon_o R^2} = \frac{q}{4\pi\varepsilon_o R^2} 4\pi R^2 = \frac{q}{\varepsilon_o}$$

2.　点电荷在任意形状的高斯面内

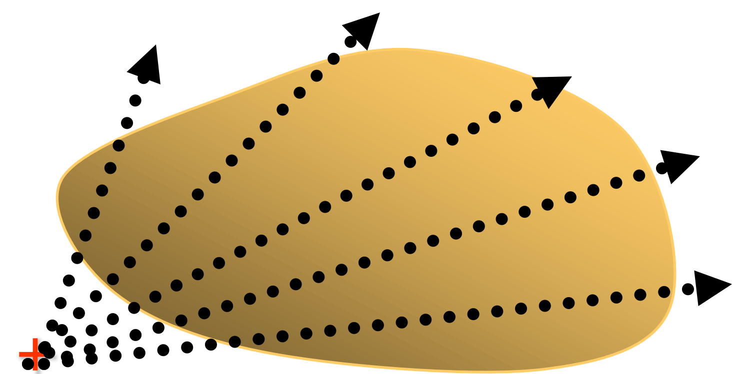
通过球面S的电场线也必通过任意曲面S'，即它们的电通量相等。为q/ε_0



$$\Phi_e = \oiint_{S'} \vec{E} \cdot \mathrm{d}\vec{S} = \frac{q}{\varepsilon_o}$$

3. 电荷q在闭合曲面以外

穿进曲面的电场线条数等于穿出曲面的电场线条数。

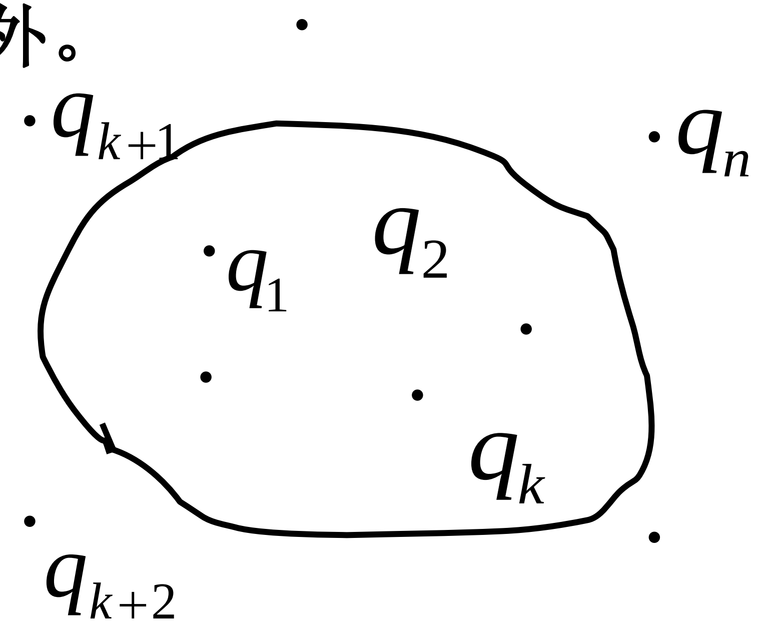


$$\Phi_e = \oiint_{S} \vec{E} \cdot \mathrm{d}\vec{S} = 0$$

4. 任意电荷系的静电场

由 n 个点电荷组成，其中 $q_1, q_2, \cdots q_k$ 在闭合面内，

$q_{k+1}, q_{k+2}, \cdots q_n$ 在闭合面外。



按场强叠加原理

$$\vec{E} = \sum_{i=1}^{n} \vec{E}_i$$

则通过闭合面的电通量

$$\Phi = \oiint_S \vec{E} \cdot \mathrm{d}\vec{S} = \oiint_S \sum_{i=1}^{n} \vec{E}_i \cdot \mathrm{d}\vec{S} = \sum_{i=1}^{k} \oiint_S \vec{E}_i \cdot \mathrm{d}\vec{S} + \sum_{i=k+1}^{n} \oiint_S \vec{E}_i \cdot \mathrm{d}\vec{S}$$

$$= \sum_{i=1}^{k} \frac{q_i}{\varepsilon_0}$$

若电荷连续分布,则为: $\oiint_S \vec{E} \cdot \mathrm{d}\vec{S} = \iiint_V \frac{\rho \mathrm{d}V}{\varepsilon_0}$

讨论

1. 闭合面内、外电荷

对 $\vec{E}$ 都有贡献

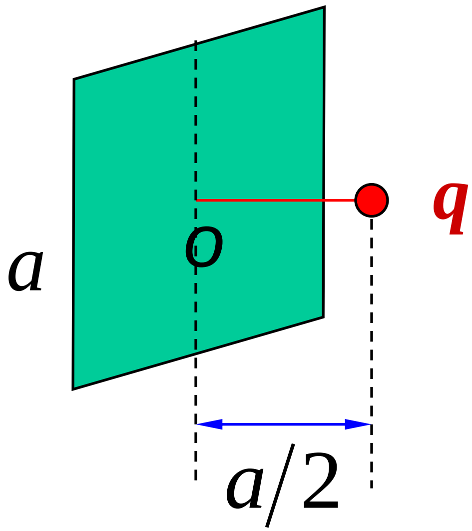
对电通量 $\oiint_S \vec{E}\cdot \mathrm{d}\vec{S}$ 的贡献有差别

只有闭合面内的电量对电通量有贡献

2. 静电场性质的基本方程　　有源场

3. 源于库仑定律　高于库仑定律

【例】 有一边长为 a 的正方形平面，其中垂线上距正方形中心 o 点为 $a/2$ 处有一电量为 q 的正点电荷，则通过该正方形平面的电通量为：（ ）

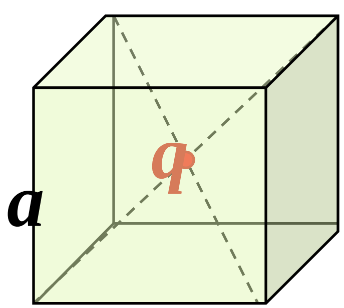


(1) $\dfrac{4\pi q}{6\varepsilon_0}$

(2) $\dfrac{q}{6\varepsilon_0}$

(3) $\dfrac{q}{3\pi\varepsilon_0}$

(4) $\dfrac{q}{6\pi\varepsilon_0}$



$$\oint_S \vec{E}\cdot d\vec{s} = \frac{q}{\varepsilon_0}$$

11.4 高斯定理的应用

高斯定理从理论上阐明了电场与电荷的关系，并且在源电荷分布具有高对称性的条件下，提供了根据源电荷分布来计算场强的方法。当然，反过来也可由场强的分布来确定源电荷的分布。

常见的高对称电荷分布有：

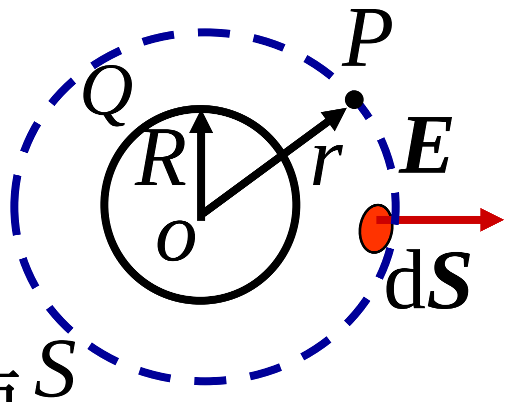
球对称性、柱对称性、平面对称性

[例] 一均匀带电球面，总电量为Q，半径为R，求电场强度分布。

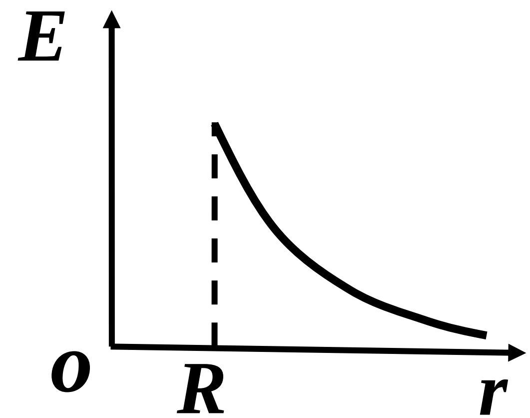
解：根据对称性分析，电场分布也应具有球对称性，

且电场强度方向应沿径向！

$$\vec{E} = E(r)\vec{e}_r$$



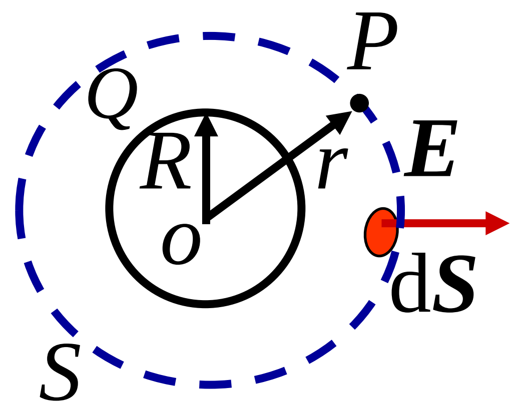
我们可以选择以球心为中心的球面为**Gauss面**S。



$$\oiint_S \vec{E}\cdot \mathrm{d}\vec{S} = \oiint_S E\mathrm{d}S$$

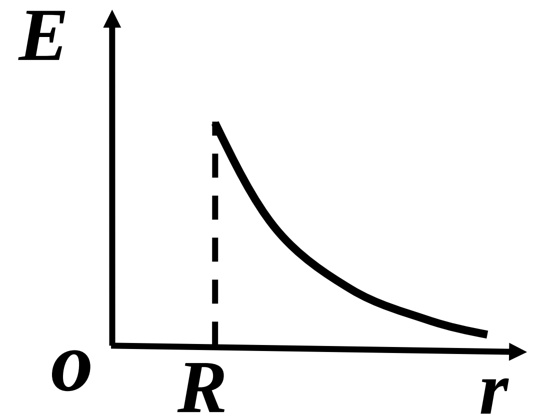
$$= E\oiint_S \mathrm{d}S = E4\pi r^2$$

$$\oint\!\!\oint_S \vec{E}\cdot \mathrm{d}\vec{S} = E\,4\pi r^2 = \frac{\sum_i q_i}{\varepsilon_0}$$



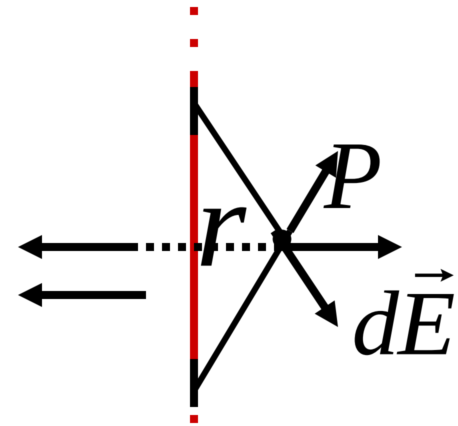
$(\,r > R\,)$ $\quad \sum_i q_i = Q \qquad E = \dfrac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}$

$(\,r < R\,)$ $\quad \sum_i q_i = 0 \qquad \boldsymbol{E} = \mathbf{0}$



[例]　均匀带电的无限长的直线 线密度 λ

◆对称性的分析

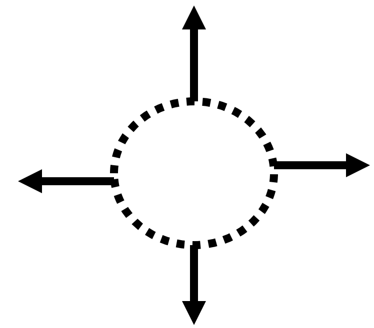


◆取合适的高斯面

◆计算电通量

$$\oint\!\!\!\oint_S \vec{E}\cdot \mathrm{d}\vec{S} = \iint_{\text{侧面}} \vec{E}\cdot \mathrm{d}\vec{S} + \iint_{\text{两底面}} \vec{E}\cdot \mathrm{d}\vec{S}$$

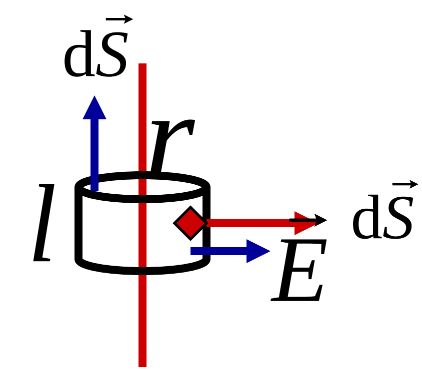
$$= \boldsymbol{E}\,2\pi \boldsymbol{r}\boldsymbol{l}$$



◆利用高斯定理解出E

$$\boldsymbol{E}\,2\pi \boldsymbol{r}\boldsymbol{l} = \frac{\lambda \boldsymbol{l}}{\varepsilon_0}$$

$$\boxed{\boldsymbol{E} = \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0 \boldsymbol{r}}}$$



[例]无限大均匀带电平面的电场分布（电荷面密度为σ）

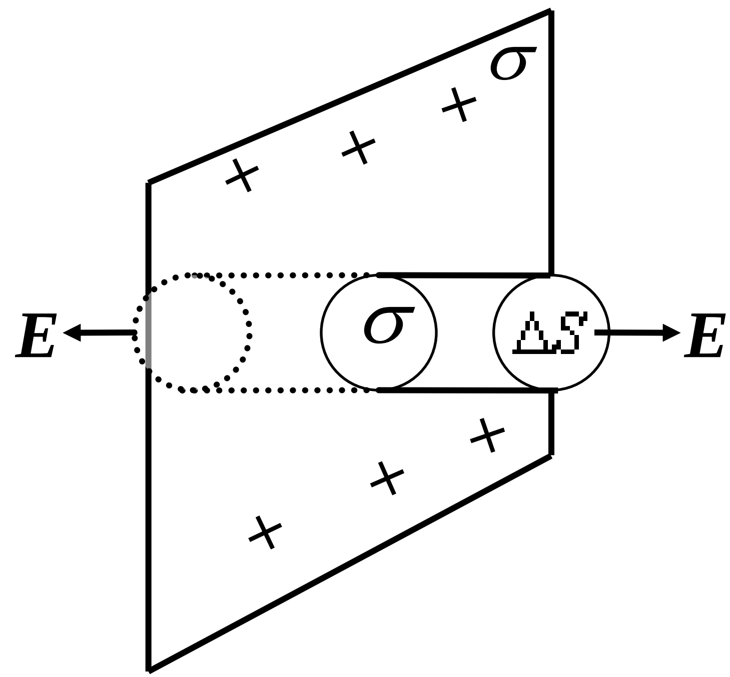
解： 根据电场分布性质，Gauss面的选择如图所示。

$$\oiint_S \vec{E}\cdot d\vec{S}=\frac{\sigma\Delta S}{\varepsilon_0}$$

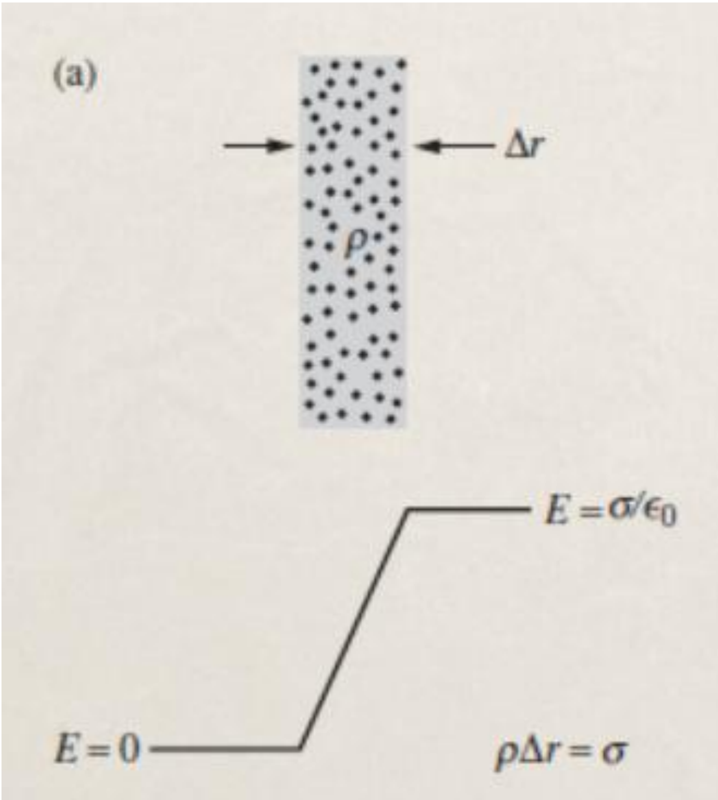
$$\oiint_S \vec{E}\cdot d\vec{S}=2\Phi_{底面}+\Phi_{侧面}$$

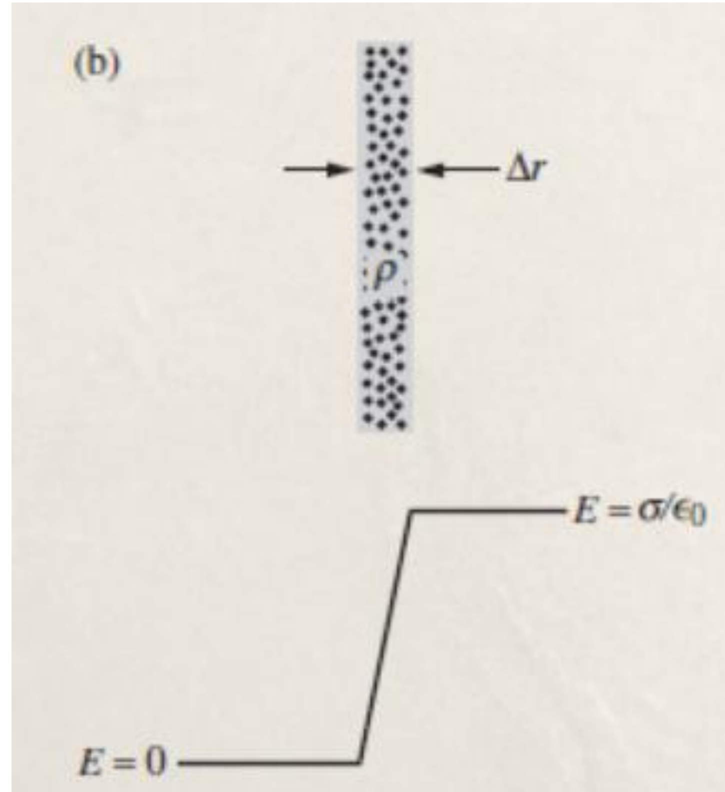
$$\Phi_{底面}=E(d)\Delta S,\quad \Phi_{侧面}=0$$

$$2E(d)\Delta S=\frac{\sigma\Delta S}{\varepsilon_0}\qquad E=\frac{\sigma}{2\varepsilon_o}$$

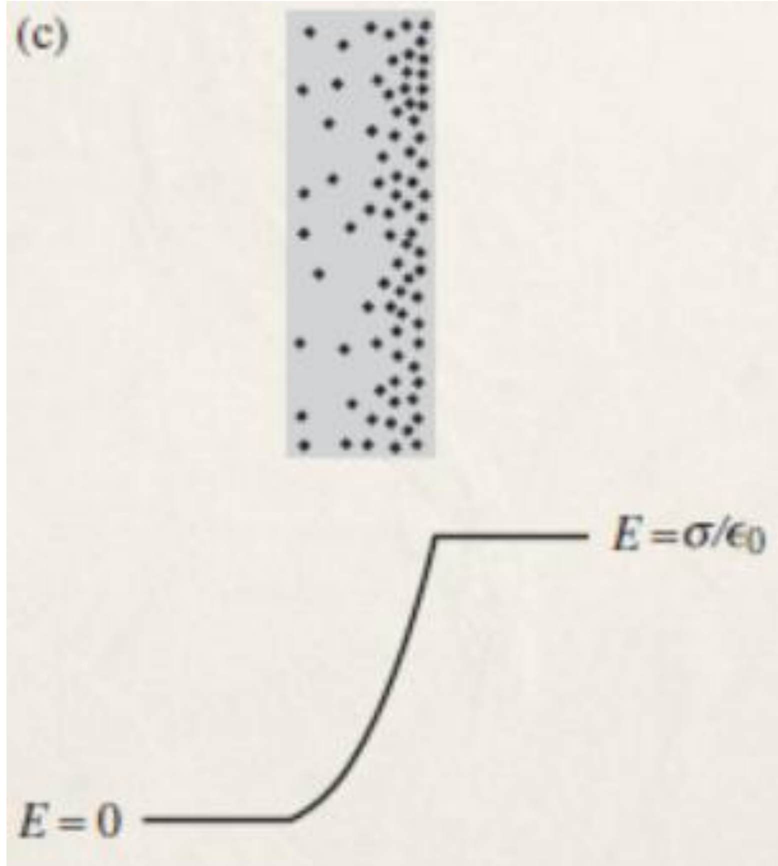


The force on a layer of charge

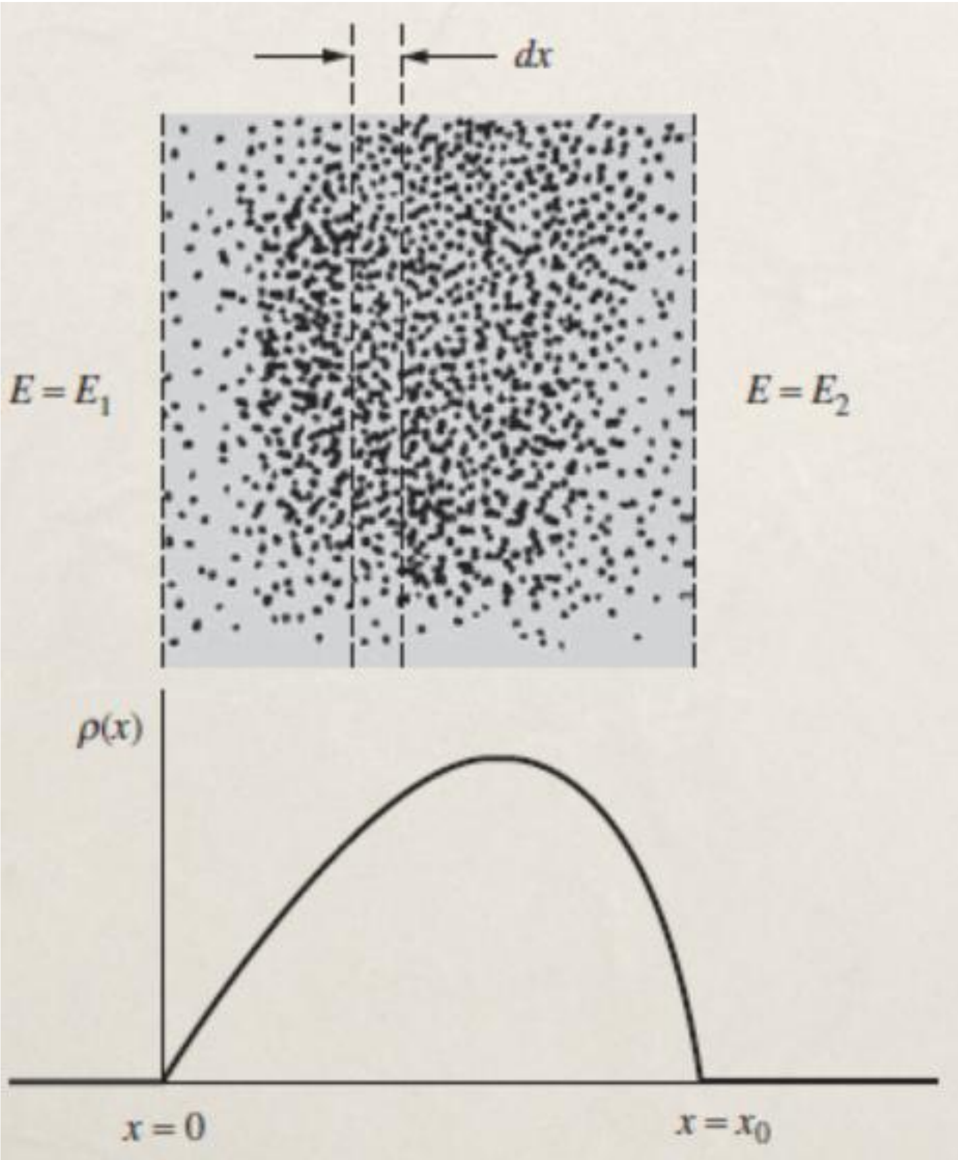




$$E_2 - E_1 = \frac{\sigma}{\epsilon_0}$$



$$E_2 - E_1 = \frac{\sigma}{\epsilon_0}$$



$$dF = E\rho\, dx \cdot A$$

$$\frac{F}{A} = \int \frac{dF}{A} = \int_0^{x_0} E\rho\, dx$$

$$\mathrm{d}E = \frac{\rho dx}{\varepsilon_0}$$

$$\frac{F}{A} = \int_{E_1}^{E_2} \epsilon_0 E\, dE = \frac{\epsilon_0}{2}(E_2^2 - E_1^2)$$

$$E_2 - E_1 = \frac{\sigma}{\epsilon_0}$$

$$\boxed{\frac{F}{A} = \frac{1}{2}(E_1 + E_2)\sigma}$$

[例] 真空中有一球对称电场，其电场强度由下式确定：

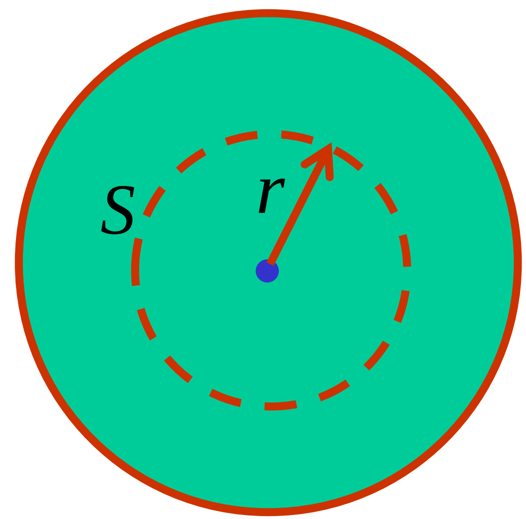
$\vec{E}(r)=k\dfrac{r_0-r}{r^3}\vec{r}$，式中 r_0 和k为常数（$r_0>0$），$\vec{r}$ 为原点到场点的位矢，求

（1）以原点为球心，r为半径的球形区域内的电量$q(r)$，原点处有无电荷，电量为多少？

（2）空间的电荷密度 $\rho(r)$ 。

解：

$$\oiint_S \vec{E}\cdot d\vec{S}=k\frac{r_0-r}{r^2}4\pi r^2=4\pi k(r_0-r)$$



$$\oiint_S \vec{E}\cdot d\vec{S}=\frac{q(r)}{\varepsilon_0}$$

$$\Rightarrow q(r)=4\pi\varepsilon_0 k(r_0-r)$$

原点处有点电荷，电量为 $4\pi\varepsilon_0 k r_0$

[例] 真空中有一球对称电场，其电场强度由下式确定：

$\vec{E}(r)=k\dfrac{r_0-r}{r^3}\vec{r}$，式中 r_0 和**k**为常数（$r_0>0$），$\vec{r}$ 为原点到场点的位矢，求

（1）以原点为球心，**r**为半径的球形区域内的电量**q(r)**，原点处有无电荷，电量为多少？

（2）空间的电荷密度 $\rho(r)$ 。

$$q(r)=4\pi\varepsilon_0 k(r_0-r)$$

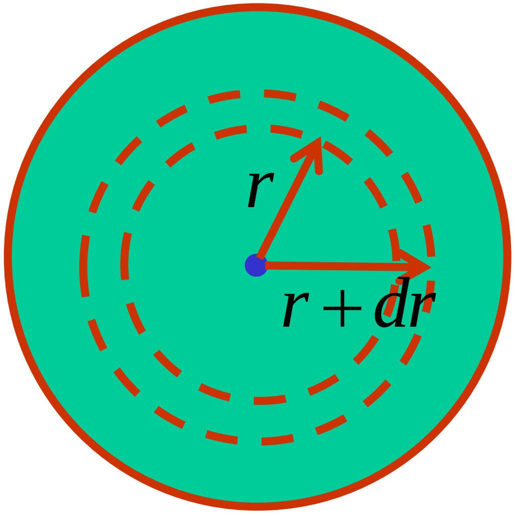
解：

$$q(r+dr)-q(r)$$

$$=4\pi\varepsilon_0 k(r_0-r-dr)-4\pi\varepsilon_0 k(r_0-r)$$

$$=-4\pi\varepsilon_0 kdr$$

$$\boxed{dq(r)=-4\pi\varepsilon_0 k\mathrm{d}r}$$



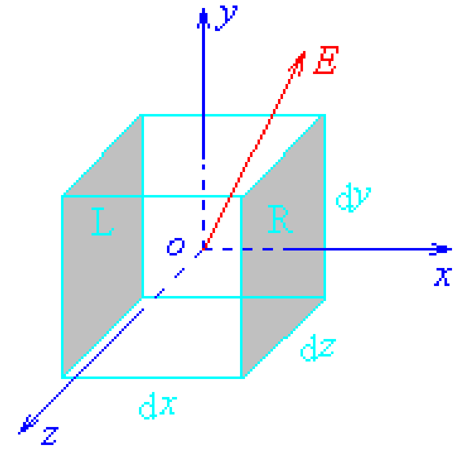
$$q(r+dr)-q(r)=\rho(r)4\pi r^2 dr$$

$$\Rightarrow \rho(r)=-\frac{\varepsilon_0 k}{r^2}$$

[例] 空间静电场的场强分布***E***（***x***，***y***，***z***）已知，求空间电荷密度分布。

设电场由在空间连续分布的电荷产生。可在电场中取一直角坐标体积元**dxdydz**，并以该体积元的表面为高斯面。

并设$\boldsymbol{E}_x$，$\boldsymbol{E}_y$，$\boldsymbol{E}_z$分别为原点处场强的三个分量



$$\mathrm{d}\Phi_{\mathrm{eR}} = (E_x + \frac{\partial E_x}{\partial x}\frac{\mathrm{d}x}{2})\mathrm{d}y\mathrm{d}z$$

$$\mathrm{d}\Phi_{\mathrm{eL}} = -(E_x - \frac{\partial E_x}{\partial x}\frac{\mathrm{d}x}{2})\mathrm{d}y\mathrm{d}z$$

通过左右两个侧面的电通量 $\mathrm{d}\Phi_{\mathrm{e1}} = \mathrm{d}\Phi_{\mathrm{eR}} + \mathrm{d}\Phi_{\mathrm{eL}} = \dfrac{\partial E_x}{\partial x}\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$

同理 $$\mathrm{d}\Phi_{\mathrm{e2}} = \frac{\partial E_y}{\partial y}\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z \qquad \mathrm{d}\Phi_{\mathrm{e3}} = \frac{\partial E_z}{\partial z}\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$$

$$\mathrm{d}\Phi_{\mathrm{e}} = \mathrm{d}\Phi_{\mathrm{e1}} + \mathrm{d}\Phi_{\mathrm{e2}} + \mathrm{d}\Phi_{\mathrm{e3}} = (\frac{\partial E_x}{\partial x} + \frac{\partial E_y}{\partial y} + \frac{\partial E_z}{\partial z})\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$$

根据高斯定理：$\mathrm{d}\Phi_e = \rho \mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z/\varepsilon_0$，有

$$\frac{\partial E_x}{\partial x}+\frac{\partial E_y}{\partial y}+\frac{\partial E_z}{\partial z}=\frac{\rho}{\varepsilon_0} \qquad \rho=\varepsilon_0\left(\frac{\partial E_x}{\partial x}+\frac{\partial E_y}{\partial y}+\frac{\partial E_z}{\partial z}\right)$$

$$\nabla=\vec{i}\,\frac{\partial}{\partial x}+\vec{j}\,\frac{\partial}{\partial y}+\vec{k}\,\frac{\partial}{\partial z} \quad \Rightarrow \quad \nabla\cdot\boldsymbol{E}=\frac{\rho}{\varepsilon_0}$$

梯度算子

高斯定理微分形式

电场强度的散度

$$\mathrm{d}\Phi_e=\mathrm{d}\Phi_{e1}+\mathrm{d}\Phi_{e2}+\mathrm{d}\Phi_{e3}=\left(\frac{\partial E_x}{\partial x}+\frac{\partial E_y}{\partial y}+\frac{\partial E_z}{\partial z}\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$$

矢量场散度定义： $\nabla\cdot\vec{A}=\lim_{\Delta V\to 0}\frac{\oiint_{(S)}\vec{A}\cdot d\vec{S}}{\Delta V}$

矢量场高斯定理： $\oiint_{(S)}\vec{A}\cdot d\vec{S}=\iiint_V \nabla\cdot\vec{A}dV$

Surface encloses volume

11.5 环流定理与电势

一、 环流定理

$$\oint_l \vec{E} \cdot \mathrm{d}\vec{l} = 0$$

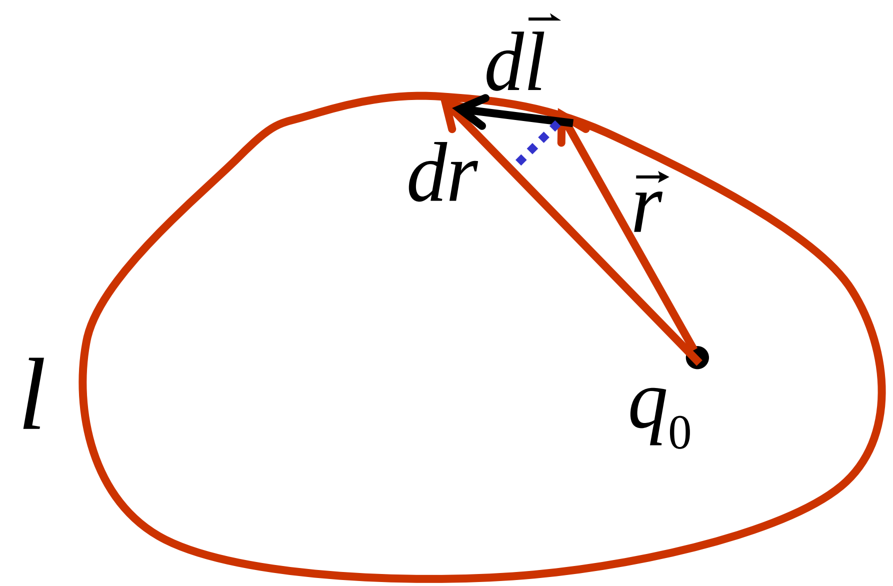
静电场中，电场强度沿任意闭合路径的环流为零。

证明： **1.** 点电荷的静电场 $\because \vec{E}=\dfrac{q_0}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\vec{e}_r$

$$\oint_l \vec{E}\cdot \mathrm{d}\vec{l}=\oint_l \frac{q_0}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\vec{e}_r\cdot \mathrm{d}\vec{l}=\oint_l \frac{q_0}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\mathrm{d}r=0$$

$$\vec{e}_r\cdot \mathrm{d}\vec{l}=\cos\theta dl=dr$$

θ: $d\vec{l}$、$\vec{r}$ 夹角



2. 点电荷系的静电场

总场强 $$\vec{E} = \sum_{i=1}^{n} \vec{E}_i$$

那么 $$\oint_l \vec{E} \cdot \mathrm{d}\vec{l} = \oint_l \sum_{i=1}^{n} \vec{E}_i \cdot \mathrm{d}\vec{l} = \sum_{i=1}^{n} \oint_l \vec{E}_i \cdot \mathrm{d}\vec{l} = 0$$

3. 连续分布电荷的静电场

连续分布电荷是由大量电荷元**d*q***

（可视为点电荷）组成的

故环流定理同样成立。

环流定理的物理意义:

在静电场中外来电荷 q_0 所受静电场力 $\vec{F}=q_0\vec{E}$

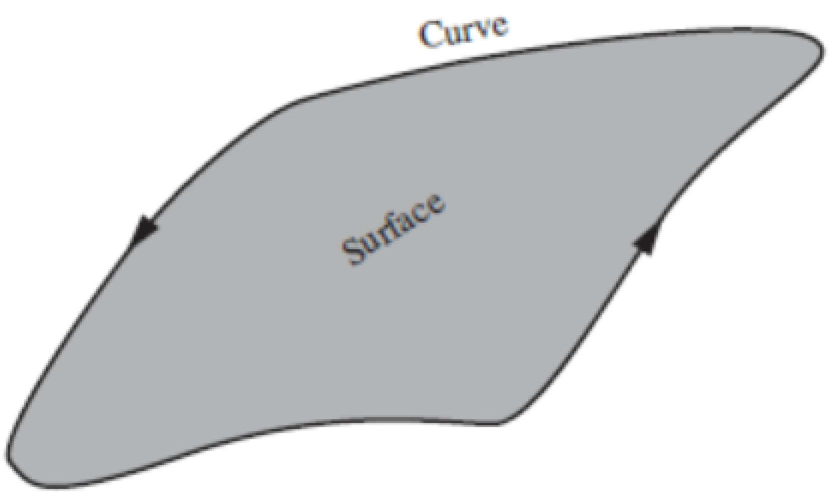
$$\oint_l \vec{F}\cdot\mathrm{d}\vec{l}=\oint_l q_0\vec{E}\cdot\mathrm{d}\vec{l}=q_0\oint_l \vec{E}\cdot\mathrm{d}\vec{l}=0$$

表明静电场力为保守力，或静电场是保守场。

环流定理 $\oint_l \vec{E}\cdot \mathrm{d}\vec{l} = 0$

环流定理微分形式 $\nabla\times\vec{E}=0$ 静电场的旋度为零

证明： 斯托克斯定理 $\oint_{\text{curve}} \vec{A}\cdot\mathrm{d}\vec{l} = \iint_{\text{surface}} (\nabla\times\vec{A})\cdot\mathrm{d}\vec{s}$



Curve encloses surface

三、电势差和电势

因静电场力为保守力，所以有相关势能——电势能。

$$A_{ab}=\int_a^b q_0\vec{E}\cdot\mathrm{d}\vec{l}=-(W_b-W_a)$$

q_0同除上式两边得：

$$-\left(\frac{W_b}{q_0}-\frac{W_a}{q_0}\right)=\int_a^b \vec{E}\cdot\mathrm{d}\vec{l}$$

令电势 $\boldsymbol{V_b=\frac{W_b}{q_0},V_a=\frac{W_a}{q_0}}$

$$-\left(\frac{W_b}{q_0}-\frac{W_a}{q_0}\right)=\int_a^b \vec{E}\cdot\mathrm{d}\vec{l}$$

则：$-(V_b-V_a)=\int_a^b \vec{E}\cdot\mathrm{d}\vec{l}$

或 $V_a-V_b=\int_a^b \vec{E}\cdot\mathrm{d}\vec{l}$

电势 $V_b = \dfrac{W_b}{q_0}, V_a = \dfrac{W_a}{q_0}$

与试验电荷无关，反映了电场在a、b两点的性质，称 a b两点电势差

电势的单位

SI 制： V (伏特)

四、电势零点

被指定其电势值为零的参考位置——电势零点

现用 P_0 表示电势零点， 则场中任一点***P***的电势

$$V=\int_{P}^{P_0}\vec{E}\cdot\mathrm{d}\vec{l}$$

它等于将单位正电荷自***P***点沿任意路径移动到电势零点$\boldsymbol{P_0}$过程中电场力做的功。

若源电荷为有限大小，常以无限远为电势零点。

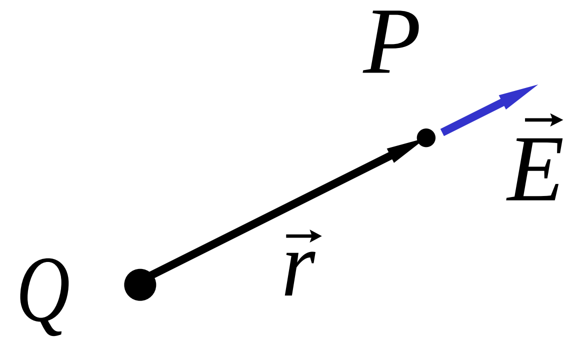
$$V=\int_{p}^{\infty}\vec{E}\cdot\mathrm{d}\vec{l}$$

在实际应用中，取大地、仪器外壳等为电势零点。

11.6 电势的计算

可用定义式： $V=\int_{P}^{P_0}\vec{E}\cdot \mathrm{d}\vec{l}$

1. 点电荷场电势



$$V_P=\int_{(P)}^{\infty}\vec{E}\cdot \mathrm{d}\vec{l}$$

$$=\int_{(P)}^{\infty}\frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r^3}\vec{r}\cdot \mathrm{d}\vec{l}=\int_{r}^{\infty}\frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}dr$$

$$V=\frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r}$$

- 点电荷的电势是球对称的，对称中心在点电荷处；
- 电势是标量，正负与电荷及电势零点选择有关。

2. 点电荷系

按场强叠加原理： $\vec{E}=\sum_{i=1}^{n}\vec{E}_i$

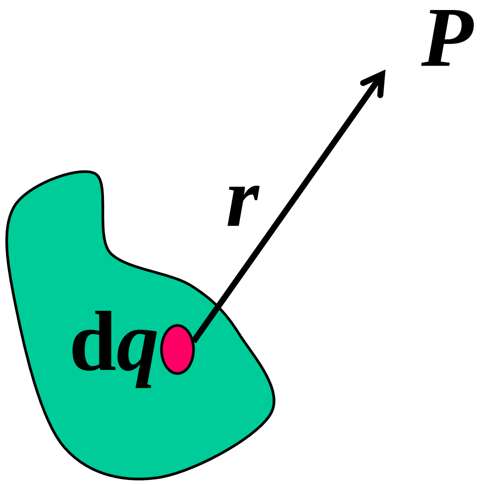
$$V=\int_P^{\infty}\vec{E}\cdot d\vec{l}=\int_P^{\infty}\sum_{i=1}^{n}\vec{E}_i\cdot d\vec{l}=\sum_{i=1}^{n}\int_P^{\infty}\vec{E}_i\cdot d\vec{l}$$

$$=\sum_{i=1}^{n}V_i=\sum_{i=1}^{n}\frac{q_i}{4\pi\varepsilon_0 r_i}$$

此式的含义为：点电荷系电场在某场点的电势等于各个点电荷电场在同一场点的电势的代数和，这一结论称为电势叠加原理。

3. 对于连续分布电荷

对于电荷元 $\mathrm{d}q$



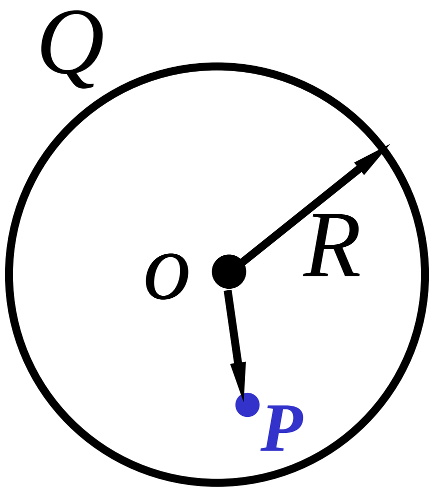
$$\mathrm{d}V = \frac{\mathrm{d}q}{4\pi\varepsilon_0 r}$$

按电势叠加原理，***P***点的总电势为

$$V = \int_{(Q)} \frac{\mathrm{d}q}{4\pi\varepsilon_0 r}$$

[例] 计算均匀带电球面的电势分布。

解：利用电势定义式进行计算



均匀带电球面电场的分布为：

$$\vec{E} = \begin{cases} 0 & (r < R) \\ \dfrac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r^3}\vec{r} & (r > R) \end{cases}$$

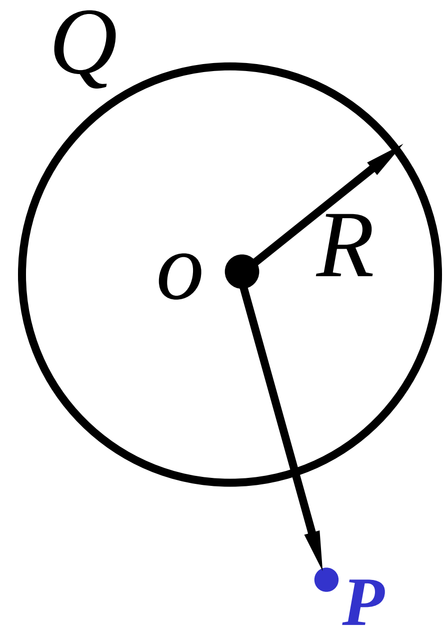
（1）场点在球面内即 $r < R$，如图

$$V = \int_{(P)}^{\infty} \vec{E} \cdot \mathrm{d}\vec{l} = \int_{r}^{R} 0 \cdot \mathrm{d}r + \int_{R}^{\infty} \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\mathrm{d}r = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 R}$$

（2）场点在球面外，即 $r > R$

$$V = \int_r^{\infty} \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r^2} \mathrm{d}r$$

$$= \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r}$$



（1）场点在球面内即 $r < R$，如图

$$V = \int_{(P)}^{\infty} \vec{E} \cdot \mathrm{d}\vec{l} = \int_r^R 0 \cdot \mathrm{d}r + \int_R^{\infty} \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r^2} \mathrm{d}r = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 R}$$

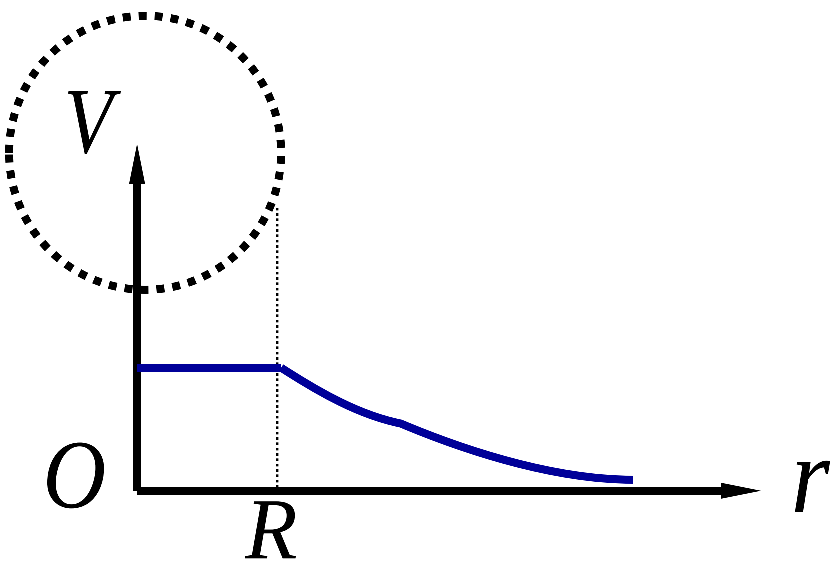
• 电势分布

$$V=\begin{cases}\dfrac{Q}{4\pi\varepsilon_0 R}, & r\le R \\ \dfrac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r}, & r>R\end{cases}$$

等势体

与电量集中在球心的点电荷的电势分布相同

• 电势示意



[例] 无限长均匀带电直线的电势分布

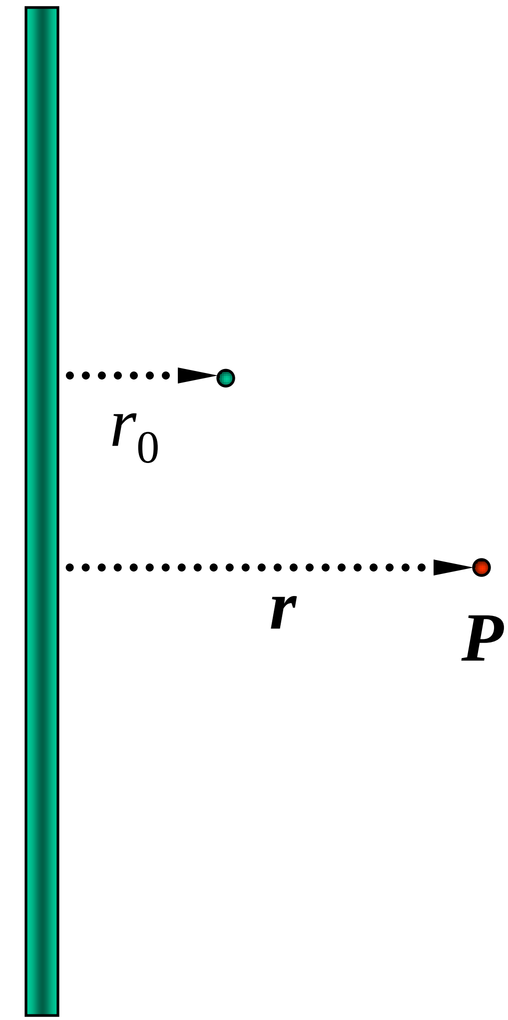
解：　电场强度 $\vec{E} = \dfrac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0 r^2}\vec{r}$

按定义：选有限远点为电势零点

$$V = \int_{r}^{r_0} \vec{E}\cdot d\vec{l}$$

$$= \int_{r}^{r_0} \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0 r} dr$$

$$= \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0} \ln r \Big|_{r}^{r_0} = \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0} \ln\frac{r_0}{r}$$



•对无限长均匀带电直线，只能选有限远点为电势零点；

•对无限大均匀带电平面，也只能选有限远点为电势零点。

11.7 电势与电场强度的关系

一、等势面

将场中相等电势值的各点连成一个连续的曲面

等势面的性质：

1. 电荷沿等势面移动，电场力不做功

$$A_{ab}=-qV_{ba}=-q\cdot 0=0$$

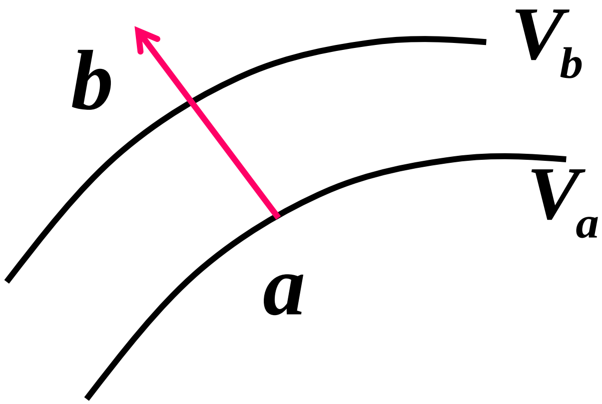
2. 电场强度与等势面正交；

电场线由电势高的地方指向电势低的地方

$$dA = q\vec{E}\cdot d\vec{l} = qEdl\cos\theta = 0 \quad \cos\theta = 0, \therefore \theta = \frac{\pi}{2}$$

$$q > 0 \quad A_{ab} = q(V_a - V_b)$$

$$\therefore V_a > V_b$$

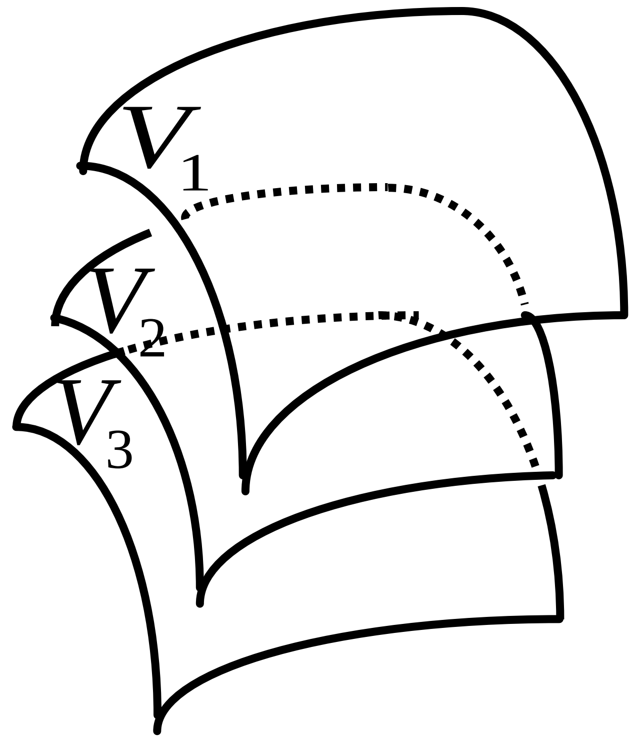


3. 相邻等势面间距小处，场强大；间距大处，场强小。

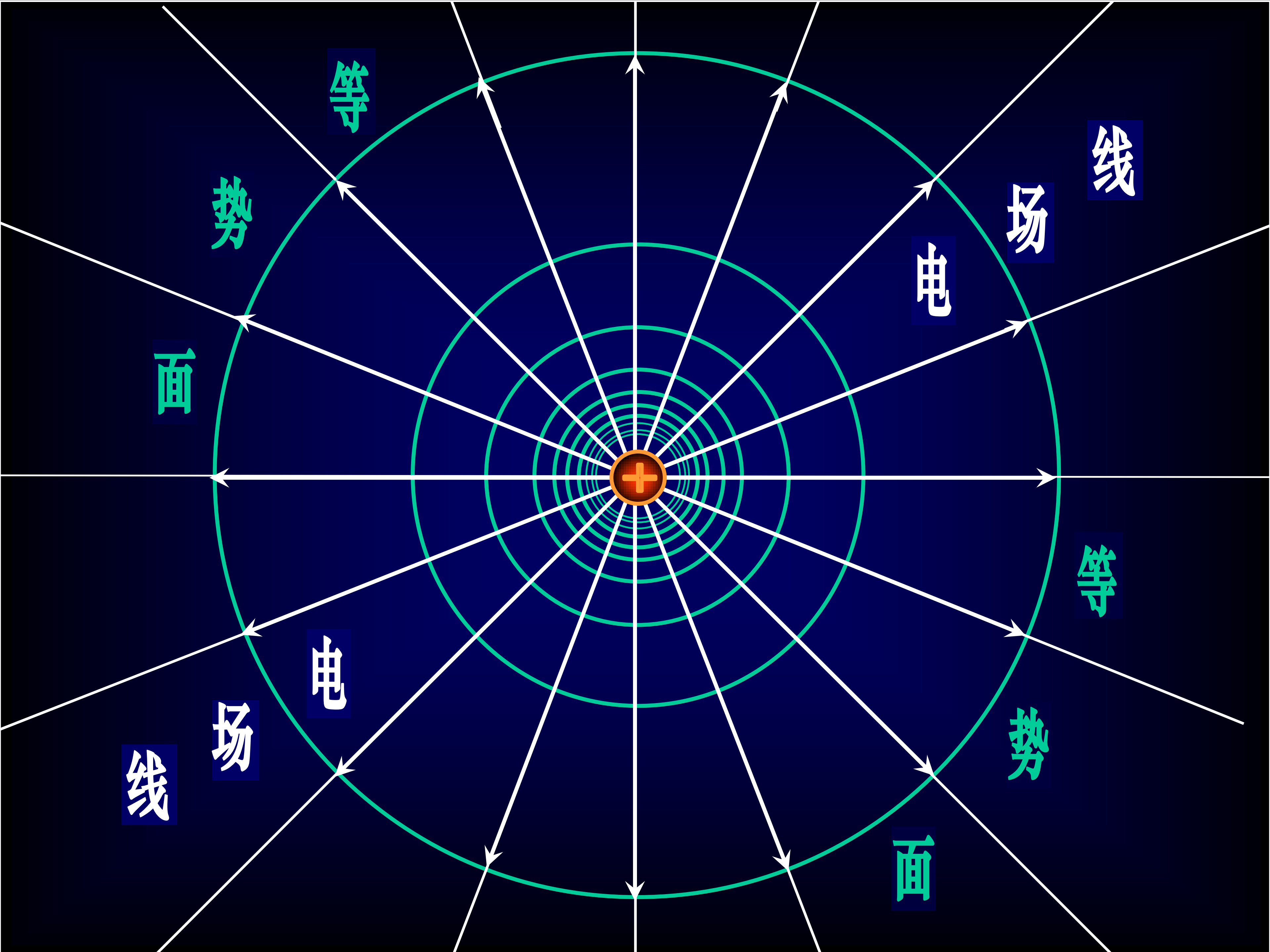
$$\boxed{\Delta V_{12} = \Delta V_{23}}$$

$$\boxed{\Delta V \approx E\Delta n}$$

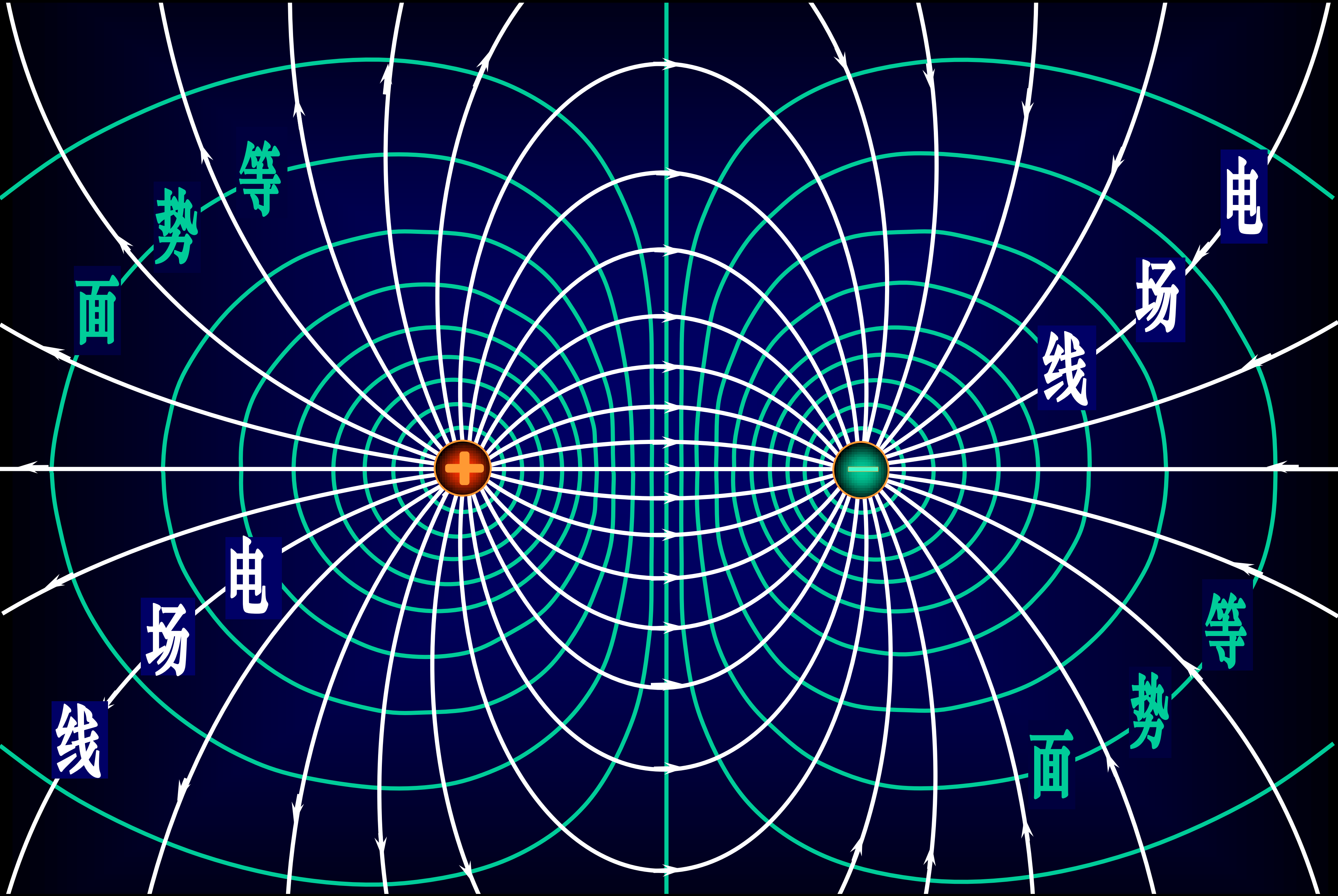
$$E \cdot \Delta n = \text{Const.} \Rightarrow E \propto 1/\Delta n$$

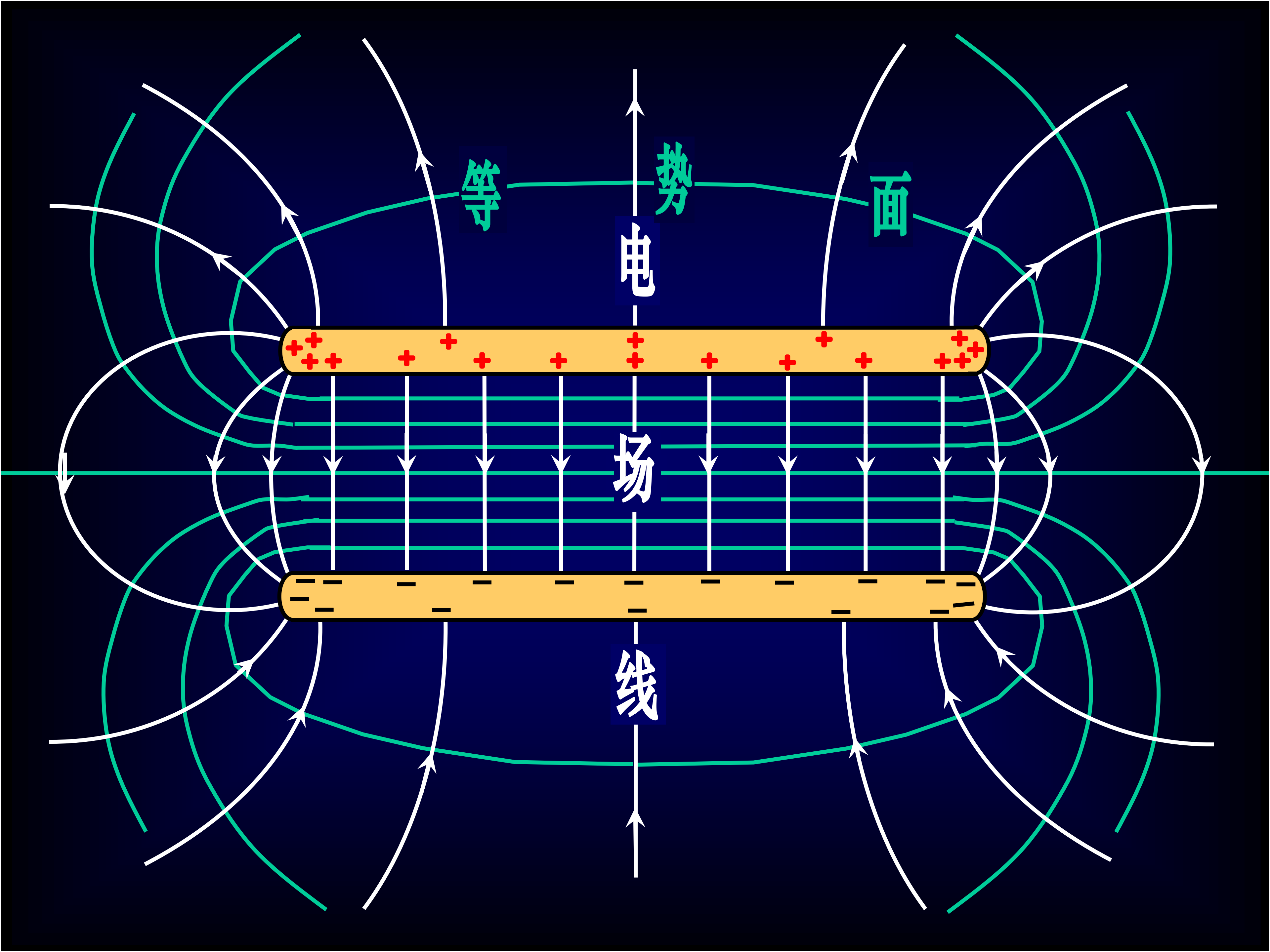


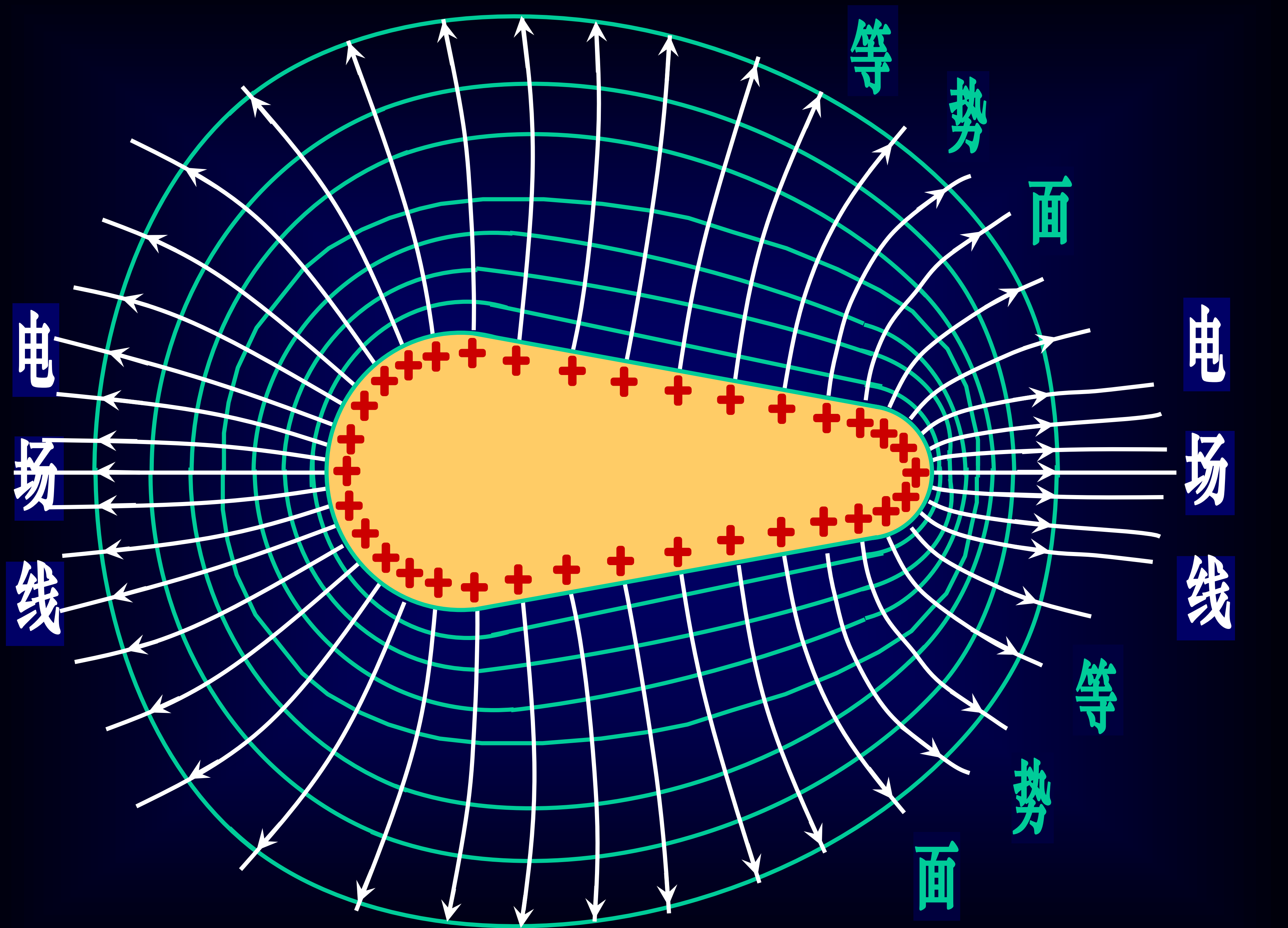
等势面的疏密反映了场的强弱



等势面
电场线
+
电场线
等势面


等势面
电场线
电场线
等势面


等势面
电场线

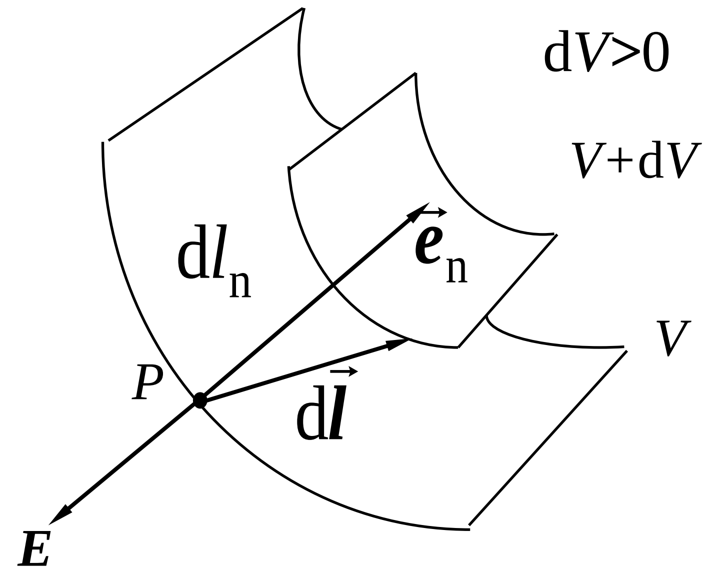

等势面
电场线
电场线
等势面
+

三、电势梯度

若外来电荷 q_0

从**P**点选取某任意方

向上的路径微元移动 $\mathrm{d}\vec{l}$

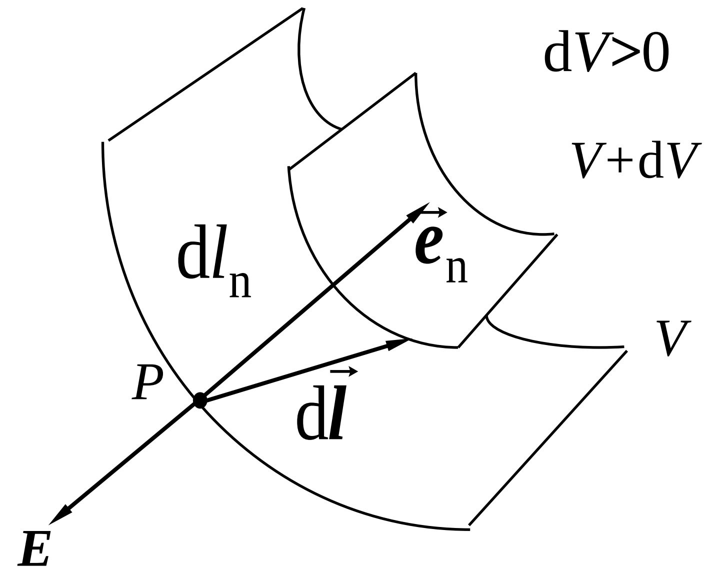


电场力的功

$$\mathrm{d}A = q_0\vec{E}\cdot\mathrm{d}\vec{l} = -q_0[(V+\mathrm{d}V)-V] = -q_0\mathrm{d}V$$

或 $-\mathrm{d}V = \vec{E}\cdot\mathrm{d}\vec{l} = E_l\mathrm{d}l$ $\quad E_l = -\dfrac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}l}$

$\dfrac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}l}$： 电势沿 $\mathrm{d}\vec{l}$ 方向的空间变化率



若取 $\mathrm{d}\vec{l}$ 沿 $\vec{e}_n$ 方向， 而已知电场强度的法向分量等于$\boldsymbol{E}$，则有：

$$E = -\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}l_n} \qquad \because \mathrm{d}l_n < \mathrm{d}l \quad \therefore \frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}l_n} > \frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}l}$$

矢量表示式：$\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}l_n}\vec{e}_n$ 称之为电势梯度，或用 $\mathrm{grad}V$

矢量关系式 $\vec{E}=-\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}l_n}\vec{e}_n=-\mathrm{grad}V$

上式说明电场强度与电势梯度大小相等，方向相反。

根据：$E_l=-\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}l}$

$\mathrm{d}\vec{l}$ 沿x、y、z方向

$$\boldsymbol{E}_x=-\frac{\partial \boldsymbol{V}}{\partial \boldsymbol{x}},\boldsymbol{E}_y=-\frac{\partial \boldsymbol{V}}{\partial \boldsymbol{y}},\boldsymbol{E}_z=-\frac{\partial \boldsymbol{V}}{\partial \boldsymbol{z}}$$

$$\vec{\boldsymbol{E}} = \boldsymbol{E}_x\vec{\boldsymbol{i}} + \boldsymbol{E}_y\vec{\boldsymbol{j}} + \boldsymbol{E}_z\vec{\boldsymbol{k}} = -\frac{\partial \boldsymbol{V}}{\partial \boldsymbol{x}}\vec{\boldsymbol{i}} - \frac{\partial \boldsymbol{V}}{\partial \boldsymbol{y}}\vec{\boldsymbol{j}} - \frac{\partial \boldsymbol{V}}{\partial \boldsymbol{z}}\vec{\boldsymbol{k}}$$

利用梯度算子 $\nabla = \vec{i}\frac{\partial}{\partial x} + \vec{j}\frac{\partial}{\partial y} + \vec{k}\frac{\partial}{\partial z}$

那么 $\vec{E} = -\nabla V$

如果为极坐标 $\mathrm{d}V = \frac{\partial V}{\partial r}\mathrm{d}r + \frac{\partial V}{\partial \theta}\mathrm{d}\theta$

$$\vec{E}\cdot\mathrm{d}\vec{l} = (E_r\vec{e}_r + E_\theta\vec{e}_\theta)\cdot(\mathrm{d}r\vec{e}_r + r\mathrm{d}\theta\vec{e}_\theta)$$

$$= E_r\mathrm{d}r + E_\theta r\mathrm{d}\theta$$

$-\mathrm{d}V = \vec{E}\cdot\mathrm{d}\vec{l}$ $\quad\therefore \boldsymbol{E}_r = -\frac{\partial \boldsymbol{V}}{\partial \boldsymbol{r}}, \boldsymbol{E}_\theta = -\frac{\partial \boldsymbol{V}}{\boldsymbol{r}\partial \theta}$

场强 $\vec{E}$ 与电势**V**的两种关系：

积分关系 $$V=\int_{P}^{P_0}\vec{E}\cdot d\vec{l}$$

微分关系 $$\vec{E}=-\nabla V=-\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}l_n}\vec{e}_n=-\mathrm{grad}V$$

[例]已知电场强度 $\vec{E}=(E_0+2cx)\vec{i}+4cy\vec{j}$ ，

E_0 和 c为常数，求电势，零点取为 $V(0,0)=0$

$$\vec{E}=-\nabla V=-\left(\frac{\partial V}{\partial x}\vec{i}+\frac{\partial V}{\partial y}\vec{j}+\frac{\partial V}{\partial z}\vec{k}\right)$$

$$=(E_0+2cx)\vec{i}+4cy\vec{j}$$

$$\Rightarrow \frac{\partial V}{\partial x}=-E_0-2cx \Rightarrow V=-E_0x-cx^2+f(y)$$

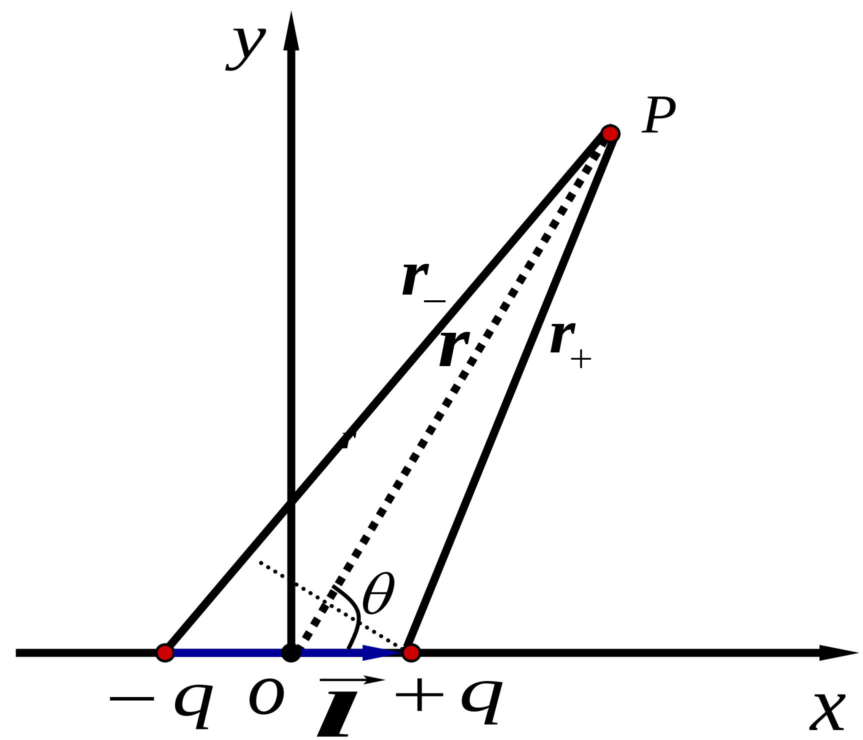
$$\Rightarrow \frac{\partial V}{\partial y}=-4cy \quad \Rightarrow V=-2cy^2+g(x)$$

$$V(0,0)=0 \Rightarrow V=-E_0x-cx^2-2cy^2$$

[例] 计算 电偶极子电场的电势和电场强度

(电偶极矩 $\vec{p} = q\vec{l}$)

解：



$$V = V_+ + V_-$$

$$= \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{r_+} - \frac{1}{r_-}\right)$$

$$= \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{r_- - r_+}{r_- r_+}$$

当 $l << r$ 时： $r_+ r_- \approx r^2$

$$r_- - r_+ \approx l\cos\theta$$

$$V=\frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{r_- - r_+}{r_- r_+}=\frac{ql\cos\theta}{4\pi\varepsilon_0 r^2}=\frac{\vec{p}\cdot\vec{r}}{4\pi\varepsilon_0 r^3}$$

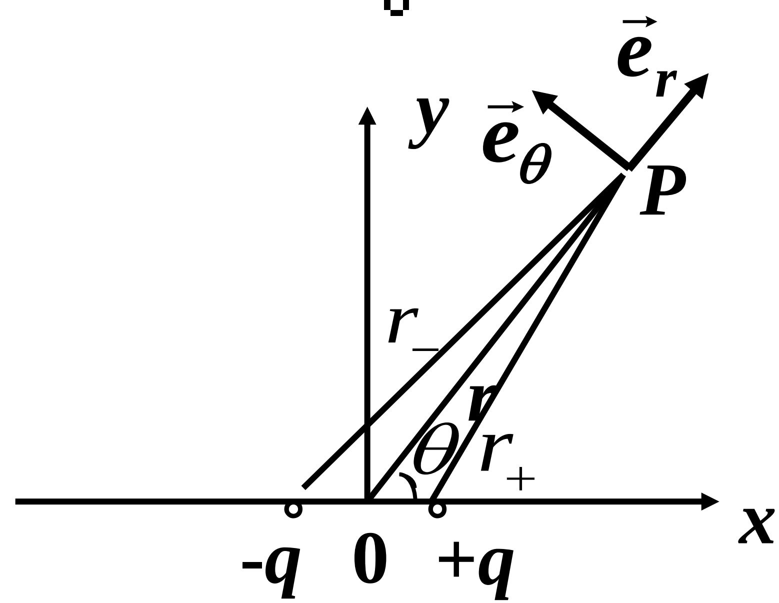
场强

$$E_r=-\frac{\partial V}{\partial r}=-\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{p\cos\theta}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\right)=\frac{p\cos\theta}{2\pi\varepsilon_0 r^3}$$

$$E_\theta=-\frac{\partial V}{r\partial\theta}=-\frac{\partial}{r\partial\theta}\left(\frac{p\cos\theta}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\right)=\frac{p\sin\theta}{4\pi\varepsilon_0 r^3}$$

$$\vec{E}=E_r\vec{e}_r+E_\theta\vec{e}_\theta$$

$$=\frac{p\cos\theta}{2\pi\varepsilon_0 r^3}\vec{e}_r+\frac{p\sin\theta}{4\pi\varepsilon_0 r^3}\vec{e}_\theta$$



$$\vec{E} = E_r \vec{e}_r + E_\theta \vec{e}_\theta$$

$$= \frac{p\cos\theta}{2\pi\varepsilon_0 r^3}\vec{e}_r + \frac{p\sin\theta}{4\pi\varepsilon_0 r^3}\vec{e}_\theta = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0 r^3}\left(2p\cos\theta\vec{e}_r + p\sin\theta\vec{e}_\theta\right)$$

$$= \frac{1}{4\pi\varepsilon_0 r^3}\left(3p\cos\theta\vec{e}_r - p\cos\theta\vec{e}_r + p\sin\theta\vec{e}_\theta\right)$$

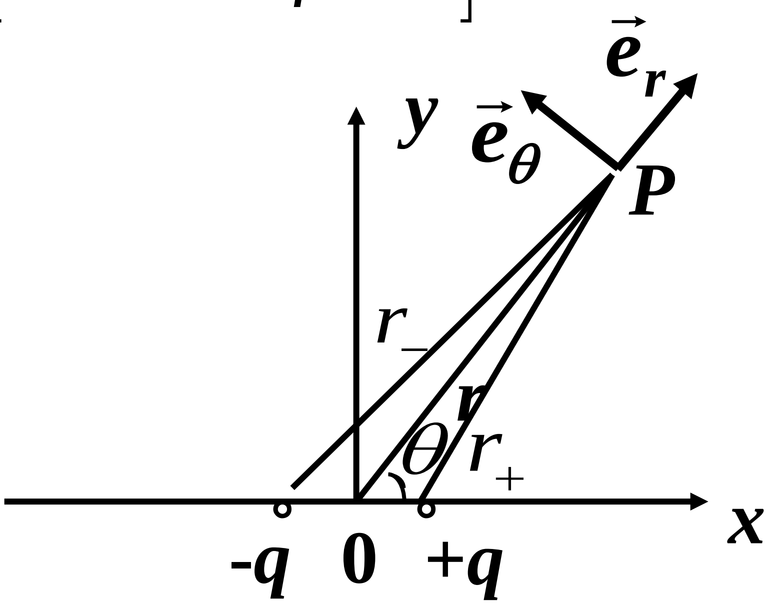
$$= \frac{1}{4\pi\varepsilon_0 r^3}\left[-\vec{p} + \frac{3(\vec{r}\cdot\vec{p})\vec{r}}{r^2}\right]$$

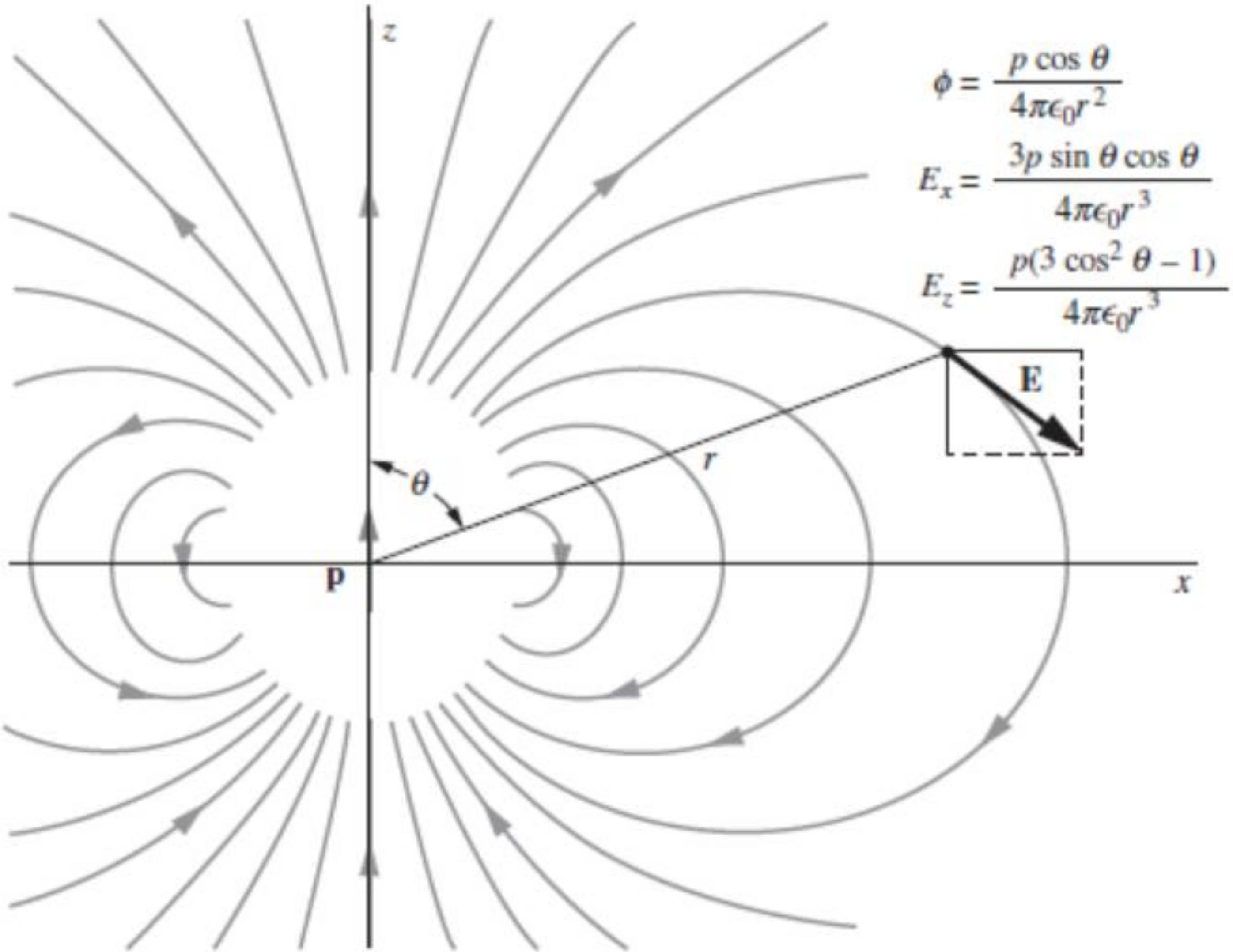
$$3p\cos\theta\vec{e}_r = \frac{3(\vec{r}\cdot\vec{p})\vec{r}}{r^2}$$

$$\vec{e}_r = \cos\theta\vec{i} + \sin\theta\vec{j}$$

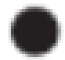
$$\vec{e}_\theta = -\sin\theta\vec{i} + \cos\theta\vec{j}$$

$$\vec{p} = p\vec{i}$$



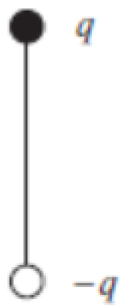


The electric field of a dipole, indicated field lines.



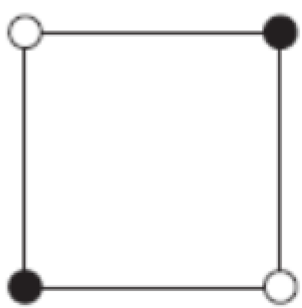
Monopole

单极



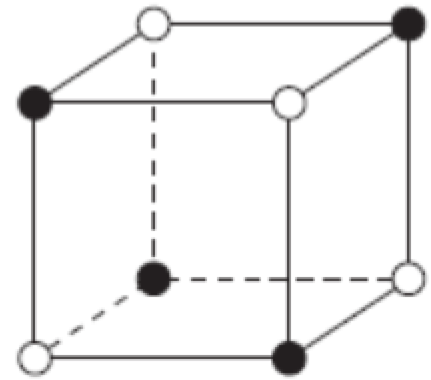
Dipole

电偶极子



Quadrupole

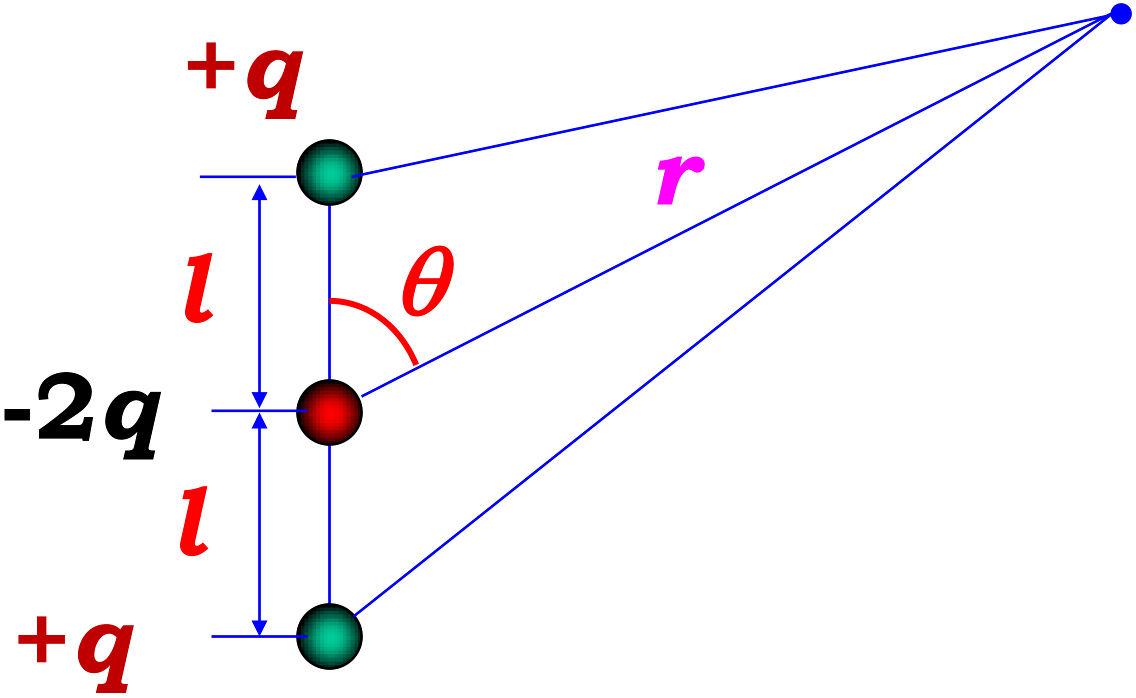
电四极子



Octupole

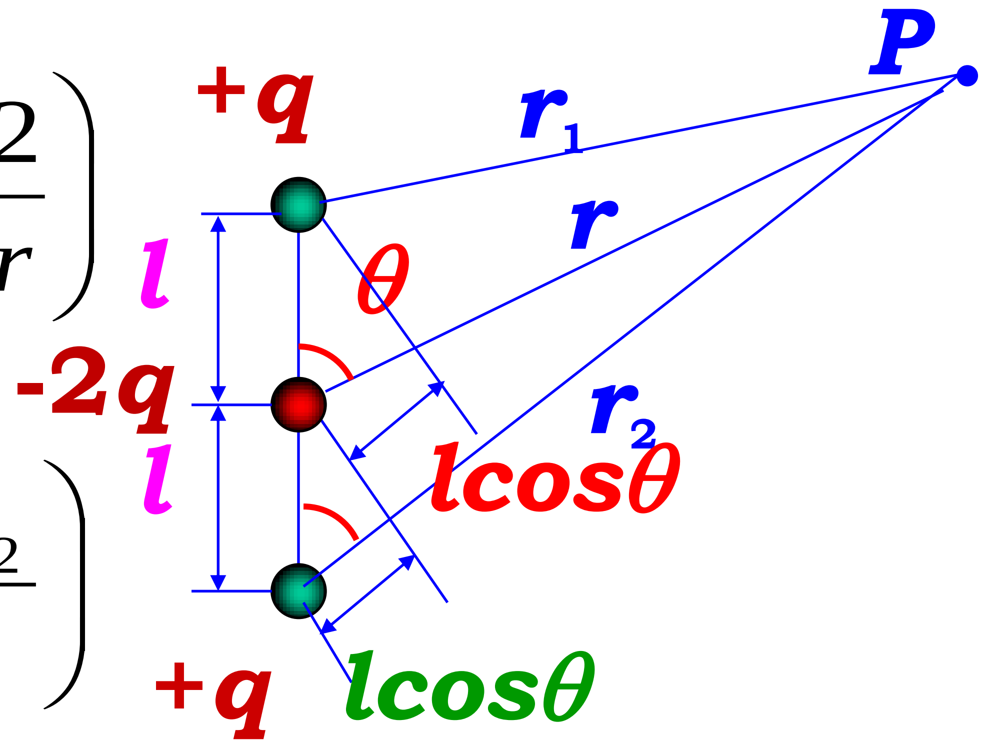
电八极子

【例】试计算如图线性电四极子在很远处($r>>l$)的电势。



解:

$$V=\frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{r_1}+\frac{1}{r_2}-\frac{2}{r}\right)$$



$$=\frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{r-r_1}{r_1 r}+\frac{r-r_2}{r_2 r}\right)$$

$$\approx\frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{l\cos\theta}{r_1 r}+\frac{-l\cos\theta}{r_2 r}\right)=\frac{ql\cos\theta}{4\pi\varepsilon_0}\frac{r_2-r_1}{r_1 r r_2}$$

$$\approx\frac{ql\cos\theta}{4\pi\varepsilon_0}\frac{2l\cos\theta}{r^3}=\frac{q(l\cos\theta)^2}{2\pi\varepsilon_0 r^3}$$

电势的多极展开

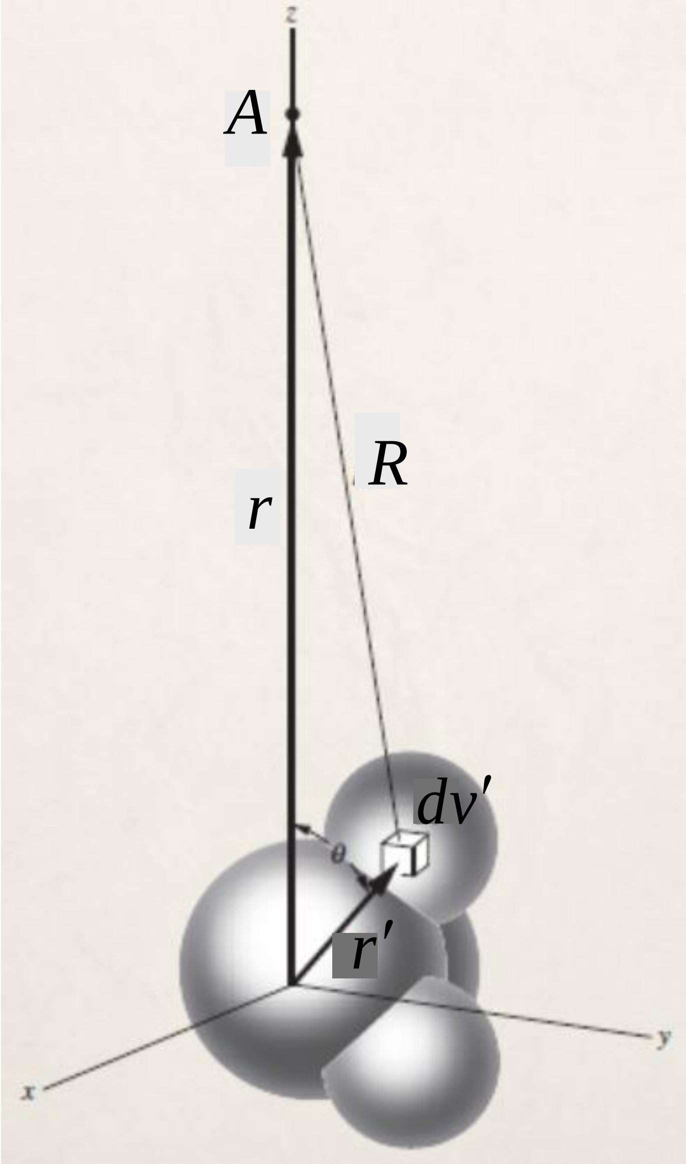
研究任意电荷分布在A点产生的电势

$$\phi_A = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\int \frac{\rho(x',y',z')\,dv'}{R}$$

$$dv' = dx'dy'dz'$$

$$R = \sqrt{r^2 + r'^2 - 2rr'\cos\theta}$$

$$\phi_A = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\int \rho\, dv'(r^2 + r'^2 - 2rr'\cos\theta)^{-1/2}$$



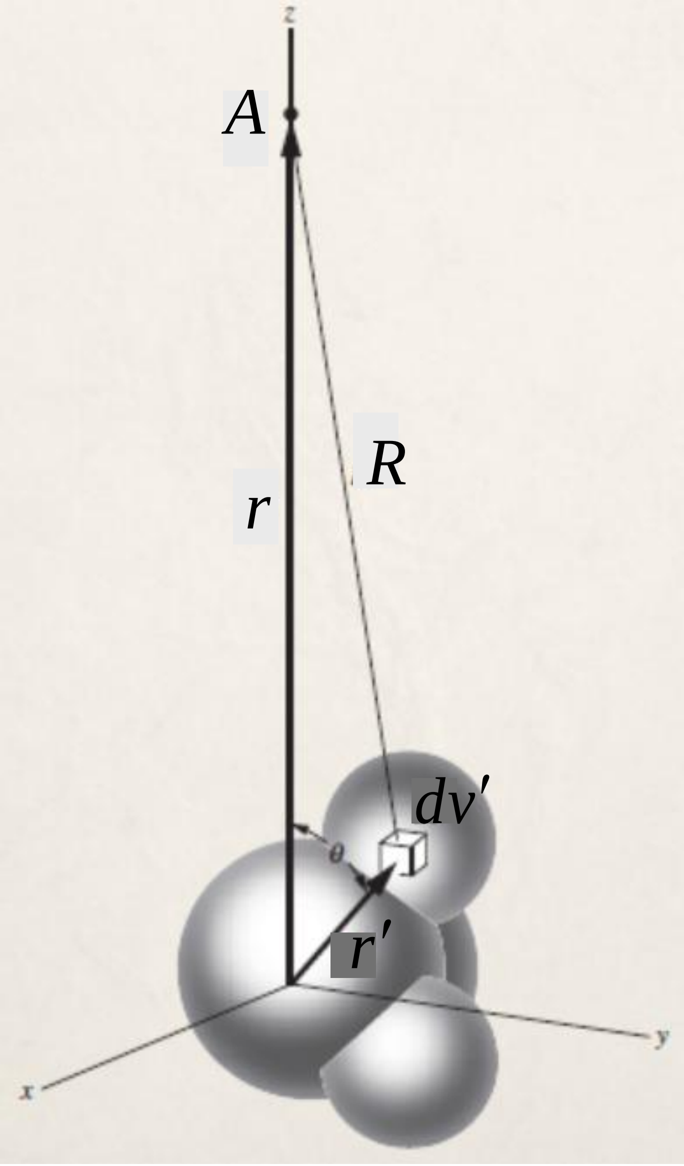
$$r' << r$$

$$(r^2 + r'^2 - 2rr'\cos\theta)^{-1/2} = \frac{1}{r}\left[1 + \left(\frac{r'^2}{r^2} - \frac{2r'}{r}\cos\theta\right)\right]^{-1/2}$$

$$(1+\delta)^{-1/2} = 1 - \delta/2 + 3\delta^2/8 - \cdots$$

$$(r^2 + r'^2 - 2rr'\cos\theta)^{-1/2}$$
$$= \frac{1}{r}\left[1 + \frac{r'}{r}\cos\theta + \left(\frac{r'}{r}\right)^2 \frac{(3\cos^2\theta - 1)}{2} + \mathcal{O}\left[\left(\frac{r'}{r}\right)^3\right]\right]$$

$$\phi_A = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\left[\frac{1}{r}\underbrace{\int \rho\, dv'}_{K_0} + \frac{1}{r^2}\underbrace{\int r'\cos\theta\,\rho\, dv'}_{K_1} + \frac{1}{r^3}\underbrace{\int r'^2\frac{(3\cos^2\theta - 1)}{2}\rho\, dv'}_{K_2} + \cdots\right]$$



$$\phi_A = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\left[\frac{1}{r}\underbrace{\int \rho\, dv'}_{K_0} + \frac{1}{r^2}\underbrace{\int r' \cos\theta\, \rho\, dv'}_{K_1} \right.$$

$$\left. + \frac{1}{r^3}\underbrace{\int r'^2 \frac{(3\cos^2\theta - 1)}{2}\rho\, dv'}_{K_2} + \cdots \right]$$

Each of the integrals above, K_0, K_1, K_2, and so on, has a value that depends only on the structure of the charge distribution, not on the distance to point A. Hence the potential for all points along the z axis can be written as a power series in $1/r$ with constant coefficients:

$$\phi_A = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\left[\frac{K_0}{r} + \frac{K_1}{r^2} + \frac{K_2}{r^3} + \cdots\right]$$

This power series is called the *multipole expansion* of the potential,

电势的多极展开

$$\phi_A = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\left[\frac{1}{r}\underbrace{\int \rho\, dv'}_{K_0} + \frac{1}{r^2}\underbrace{\int r'\cos\theta\,\rho\, dv'}_{K_1} + \frac{1}{r^3}\underbrace{\int r'^2\frac{(3\cos^2\theta - 1)}{2}\rho\, dv'}_{K_2} + \cdots\right]$$

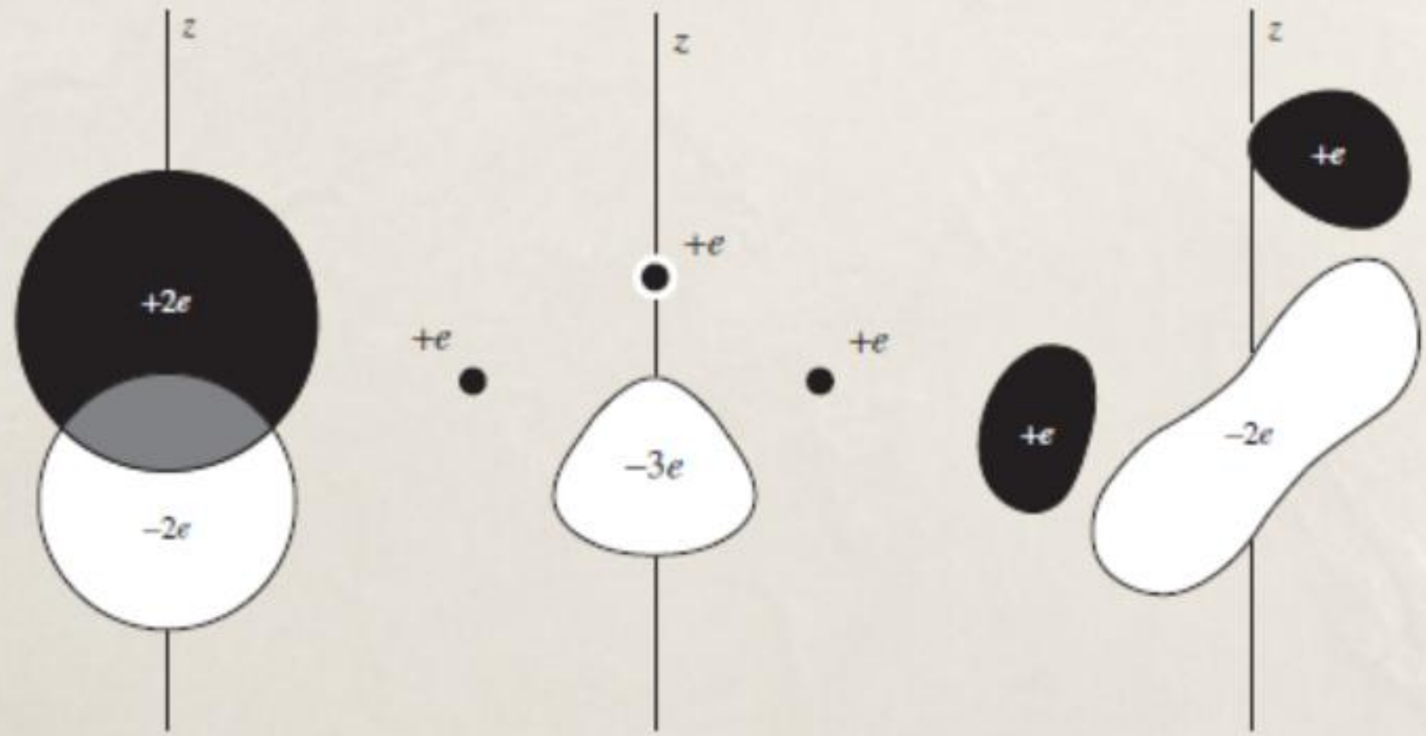
$K_0 = Q$ **A point charge** the *quadrupole moment* of the distribution,

$$K_1 = \int r'\cos\theta\rho dv' \qquad z' = r'\cos\theta$$

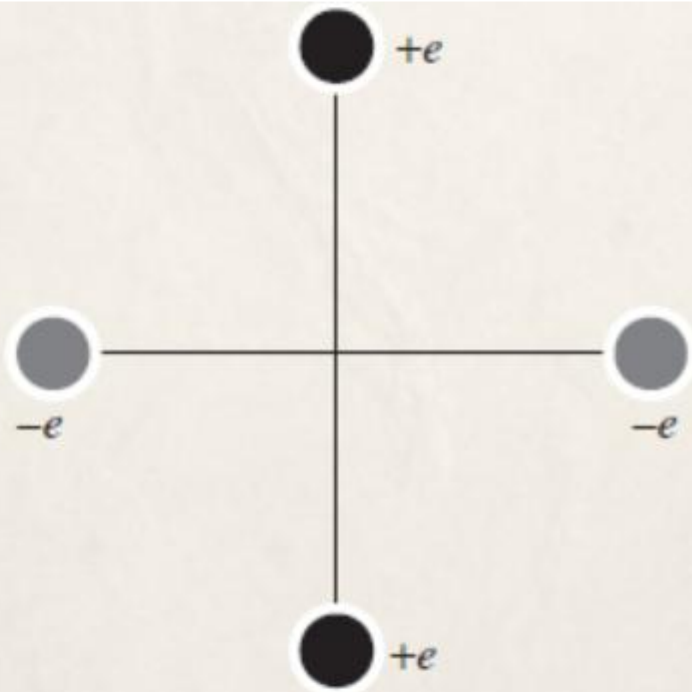
This term measures the relative displacement, in the direction toward A, of the positive and negative charge.

one component of the *dipole moment* of the distribution.

电偶极矩



$K_0 = 0,\ K_1 \neq 0$



$$K_0 = K_1 = 0$$

$$K_2 \neq 0$$

$$\phi_A = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0 r^2} K_1 = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0 r^2} \int r' \cos\theta \rho dv'$$

$$r' \cos\theta \leftrightarrow \hat{r} \cdot \vec{r}'$$

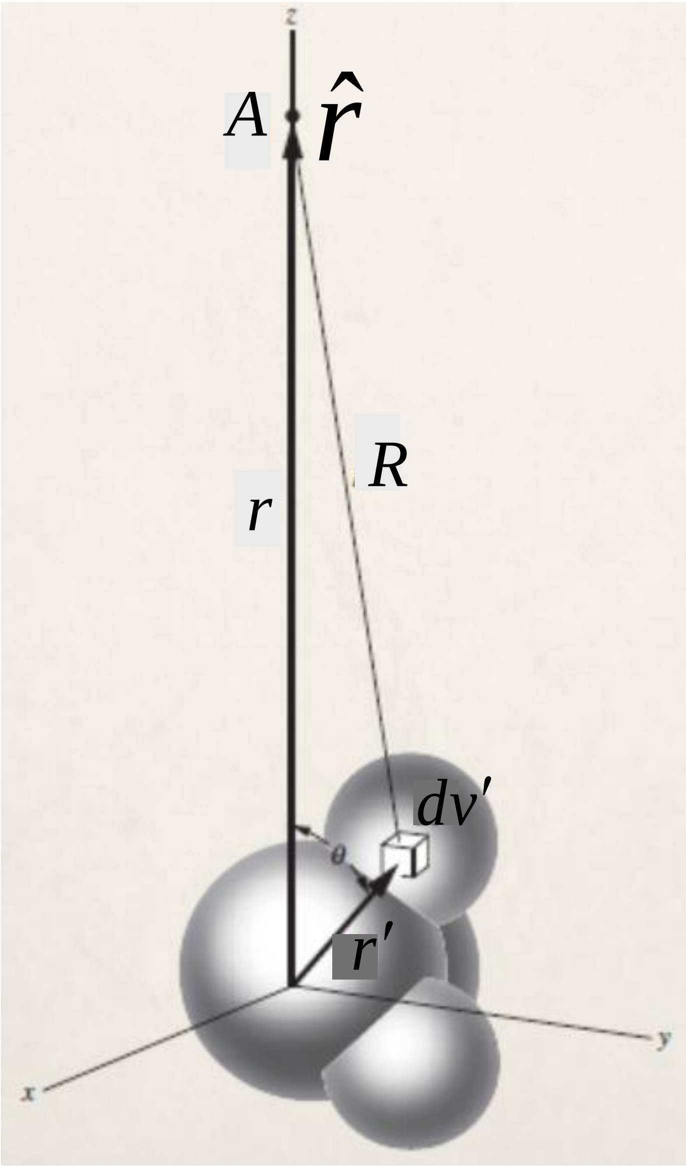
$$\phi_A = \frac{1}{4\pi\epsilon_0 r^2} \int \hat{\mathbf{r}} \cdot \mathbf{r}' \rho \, dv' = \frac{\hat{\mathbf{r}}}{4\pi\epsilon_0 r^2} \cdot \int \mathbf{r}' \rho \, dv',$$

$$\boxed{\mathbf{p} = \int \mathbf{r}' \rho \, dv'}$$

等量异号点电荷 $\vec{p} = q\vec{l}$

$$\phi(\mathbf{r}) = \frac{\hat{\mathbf{r}} \cdot \mathbf{p}}{4\pi\epsilon_0 r^2}.$$

$$\boxed{\phi = \frac{p\cos\theta}{4\pi\epsilon_0 r^2}}$$



$$\phi_A = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\left[\frac{1}{r}\underbrace{\int \rho\, dv'}_{K_0} + \frac{1}{r^2}\underbrace{\int r' \cos\theta\, \rho\, dv'}_{K_1} + \frac{1}{r^3}\underbrace{\int r'^2 \frac{(3\cos^2\theta - 1)}{2} \rho\, dv'}_{K_2} + \cdots\right]$$

Each of the integrals above, K_0, K_1, K_2, and so on, has a value that depends only on the structure of the charge distribution, not on the distance to point A. Hence the potential for all points along the z axis can be written as a power series in $1/r$ with constant coefficients:

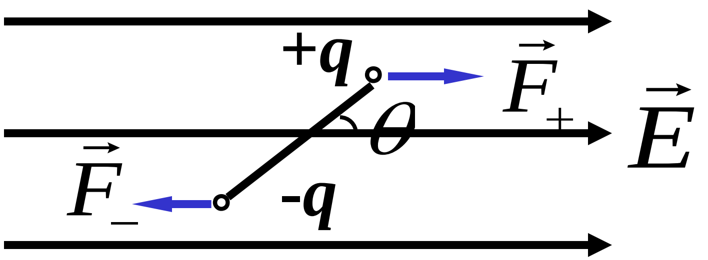
$$\phi_A = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\left[\frac{K_0}{r} + \frac{K_1}{r^2} + \frac{K_2}{r^3} + \cdots\right]$$

This power series is called the *multipole expansion* of the potential,

电势的多极展开

[例]讨论电偶极子在均匀外电场中受到的作用力、力矩及它所具有的电势能。

解：电偶极子受力



$$\vec{F} = q\vec{E}_+ + (-q)\vec{E}_- = 0$$

但力偶矩不为零！

力偶矩为：

$$M = Fl\sin\theta$$

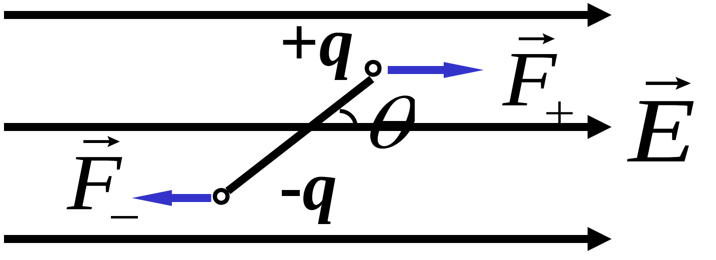
$$= qEl\sin\theta = pE\sin\theta$$

$$\longrightarrow \vec{M} = \vec{p} \times \vec{E}$$

电势能

$$W = W_+ + W_- = qV_+ + (-q)V_-$$

$$= q(V_+ - V_-)$$



$$-(V_+ - V_-) = \int_-^+ \vec{E}\cdot \mathrm{d}\vec{l} = El\cos\theta$$

$$W = -qEl\cos\theta$$

$$= -pE\cos\theta = -\vec{p}\cdot\vec{E}$$

$$\longrightarrow \vec{M} = \vec{p}\times\vec{E}$$

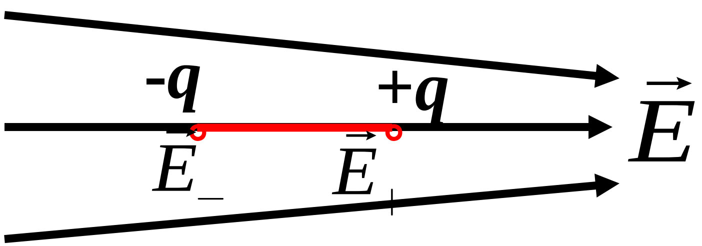
非匀强电场

$$\vec{F} = q\vec{E}_+ + (-q)\vec{E}_- = q(-\nabla V_+) + (-q)(-\nabla V_-)$$

$$= q(\nabla V_- - \nabla V_+) = q\nabla(V_- - V_+) = q\nabla(\vec{E}\cdot\vec{l}) = \nabla(\vec{E}\cdot\vec{p})$$

$$\because W = -\vec{p}\cdot\vec{E}$$

$$\therefore \vec{F} = -\nabla W$$



特例 $\vec{p}\,//\,\vec{E}$

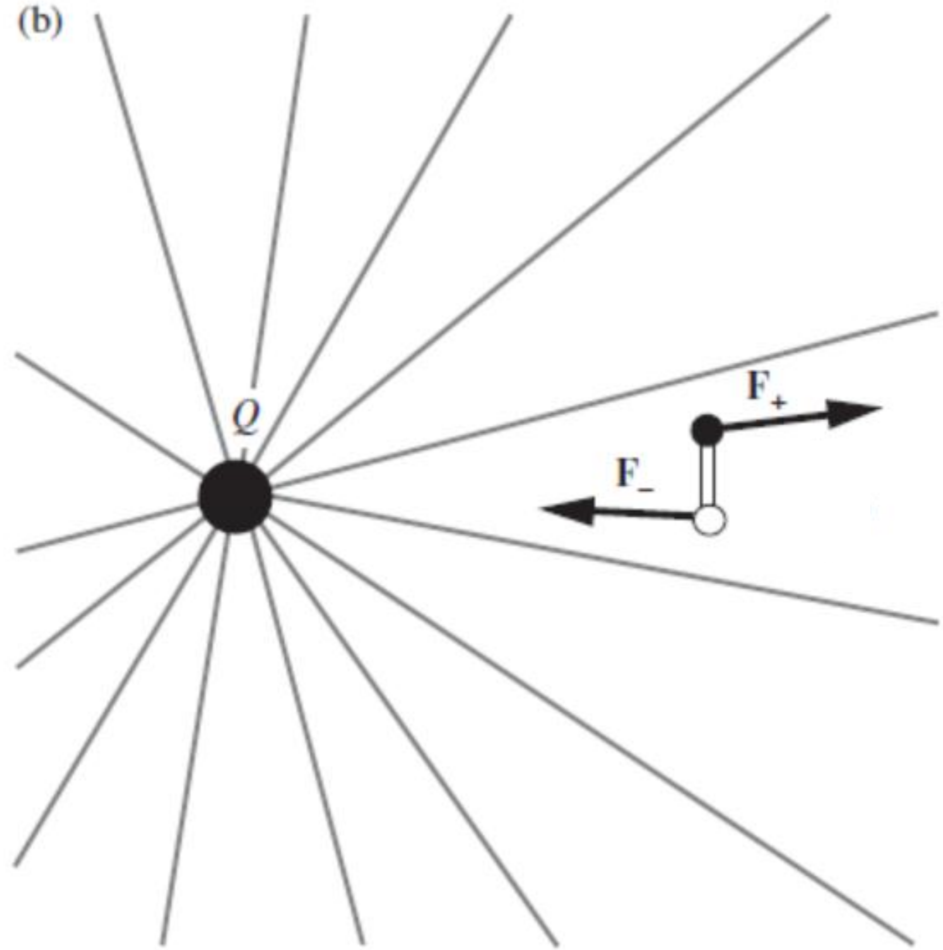
$$F = qE_+ + (-q)E_- = q\Delta E = q\Delta l\frac{\Delta E}{\Delta l} = p\frac{dE}{dl}$$

指向场强大小增加方向

$$\vec{F} = \nabla(\vec{E}\cdot\vec{p})$$

$$\Rightarrow \vec{F} = (\vec{p}\cdot\nabla)\vec{E}$$

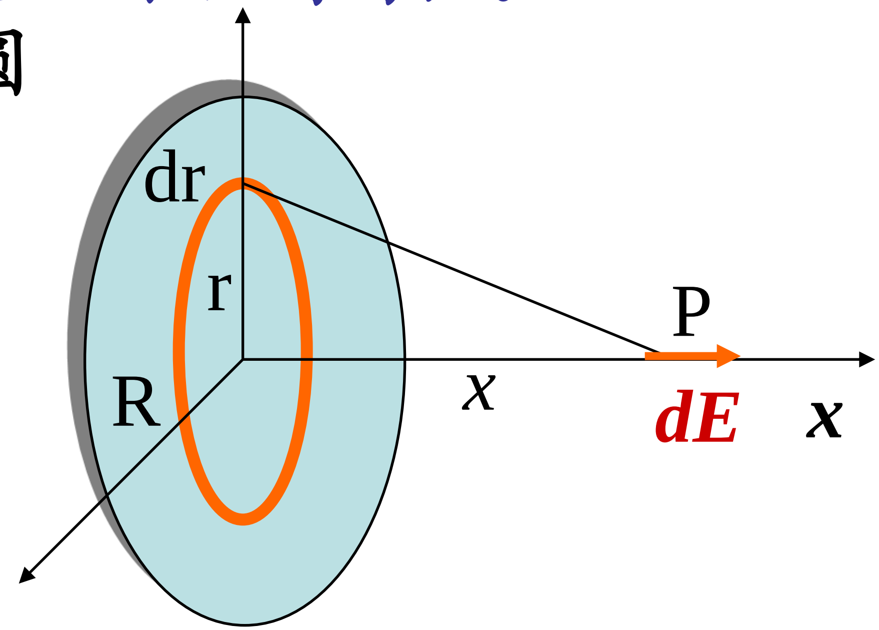
自己证明



[例] 已知圆盘半径为R，电荷面密度为σ，应用电势梯度的概念，求均匀带电圆盘轴线上一点P的场强。

解：取半径为r，宽度为 dr的圆环，圆环上电量为dq= σ2πrdr，它在P点的电势为

$$dV = \frac{dq}{4\pi\varepsilon_0\sqrt{r^2+x^2}}$$



整个圆盘在P点的电势

$$V = \int dV = \int_0^R \frac{dq}{4\pi\varepsilon_0\sqrt{r^2+x^2}}$$

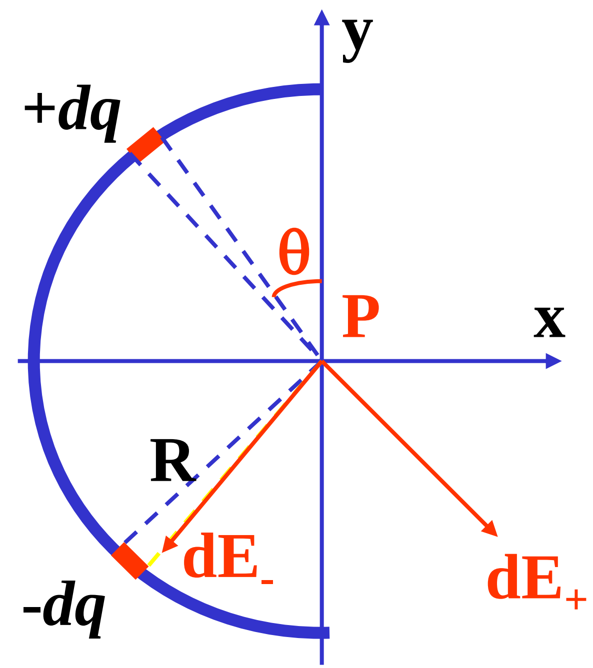
$$= \int_0^R \frac{\sigma r dr}{2\varepsilon_0\sqrt{r^2+x^2}} = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}(\sqrt{R^2+x^2}-x)$$

$$E_x = -\frac{dV}{dx} = -\frac{d}{dx}[\frac{\sigma}{2\varepsilon_0}(\sqrt{R^2+x^2}-x)] = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}(1-\frac{x}{\sqrt{R^2+x^2}})$$

（由对称性） $E_y = E_z = 0$

[例]一根细玻璃棒被弯成半径为R的半圆形，其上半段均匀带电+*q*，下半段均匀带电-*q*。求半圆中心P点的电场强度。

$$\lambda = \frac{2q}{\pi R}$$



$$dE_{+} = \frac{\lambda\, dl}{4\pi\varepsilon_o R^2} = \frac{\lambda R d\theta}{4\pi\varepsilon_o R^2}$$

$$dE_{+y} = dE_{+} \cos\theta$$

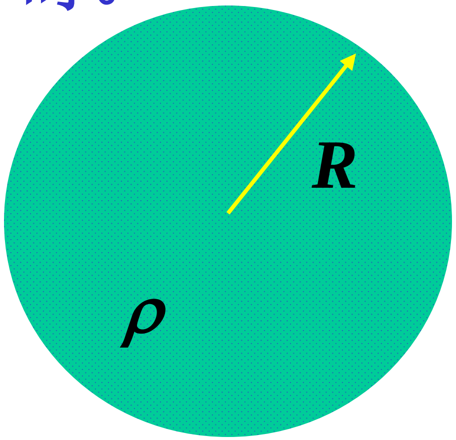
$$E_{+y} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\lambda \cos\theta}{4\pi\varepsilon_o R} d\theta = \frac{\lambda}{4\pi\varepsilon_o R} = \frac{q}{2\pi^2\varepsilon_o R^2}$$

$$E = E_{+y} + E_{-y} = \frac{q}{\pi^2\varepsilon_o R^2}$$

[例]求均匀带电球体的场强分布。（已知球体半径为R，电荷密度为ρ)

解：　根据对称性分析，电场分布也应具有球对称性。

$$\Rightarrow \left|\vec{E}(r)\right| = \text{const.}$$ 当 r=const. 时。



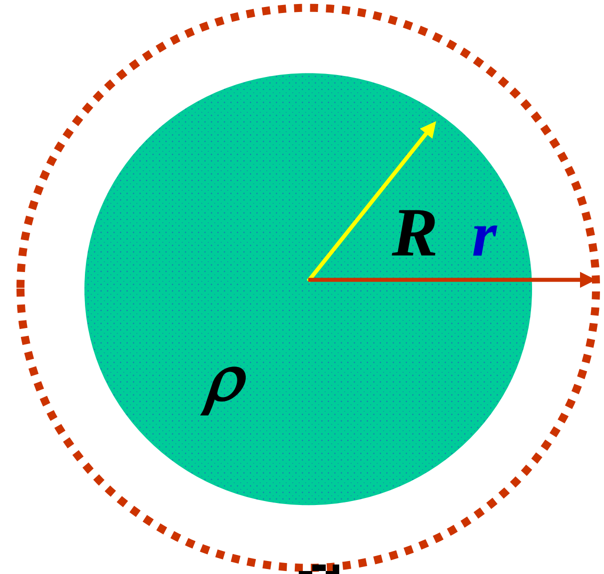
且电场强度方向应沿径向！

$$\Rightarrow \vec{E} = E(r)\vec{e_r}$$

我们可以选择以球心为中心的球面为Gauss面。

（1）球外某点的场强

$$\oint_S \vec{E}\cdot d\vec{S} = \frac{q}{\varepsilon_0} \qquad q = \rho\frac{4}{3}\pi R^3$$



$$\oint_S \vec{E}\cdot d\vec{S} = \oint_S E(r)\,dS$$

$$= E(r)\oint_S dS = E(r)\,4\pi r^2 = \frac{q}{\varepsilon_0}$$

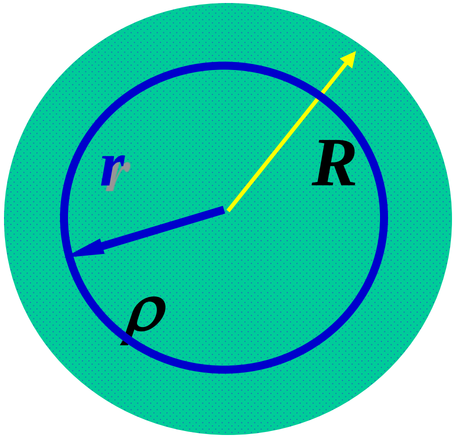
$$E(r) = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r^3} = \frac{\rho R^3}{3r^3}$$

$$\vec{E} = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r^3}\vec{r} = \frac{\rho R^3}{3r^3}\vec{r} \qquad (r \geq R)$$

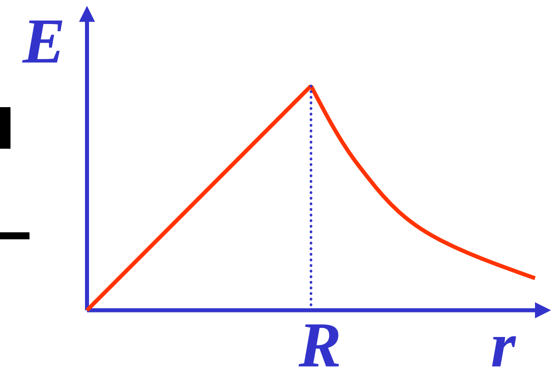
（2）求球体内一点的场强

$$\oint_S \vec{E}\cdot d\vec{S} = \frac{\sum q_i}{\varepsilon_0} = \frac{1}{\varepsilon_0}\cdot\rho\cdot\frac{4}{3}\pi r^3$$

$$= \frac{4\pi\rho r^3}{3\varepsilon_0}$$



$$\Rightarrow E(r)\cdot 4\pi r^2 = \frac{4\pi\rho r^3}{3\varepsilon_0}$$



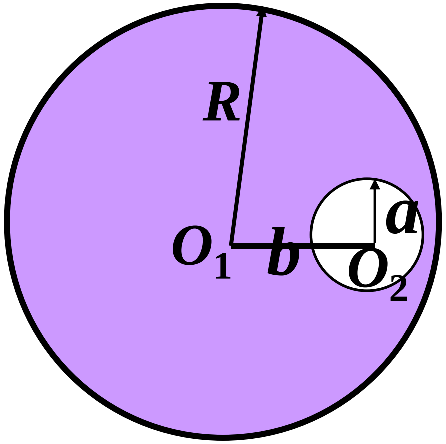
$$\Rightarrow E(r) = \frac{\rho r}{3\varepsilon_0}\quad (r < R)$$

$$\Rightarrow \vec{E} = \frac{\rho}{3\varepsilon_0}\vec{r}$$

[习题] 求半径为R的均匀带电球体球腔（半径为a）内的电场强度。

解：用补偿法求解

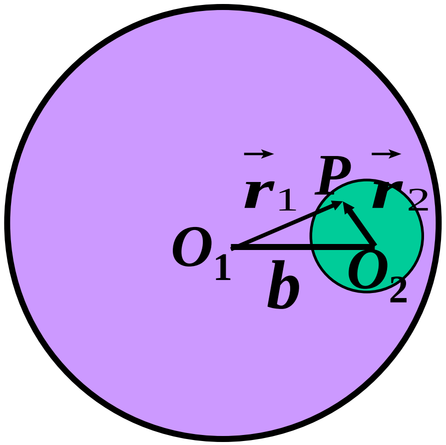
在空腔处填补$\pm\rho$的电荷分布



→ $+\rho$ 的大球和$-\rho$的小球

$$\vec{E}=\vec{E}_{+}+\vec{E}_{-}$$

$$=\frac{(+\rho)}{3\varepsilon_0}\vec{r}_1+\frac{(-\rho)}{3\varepsilon_0}\vec{r}_2$$



$$=\frac{\rho}{3\varepsilon_0}(\vec{r}_1-\vec{r}_2)=\frac{\rho}{3\varepsilon_0}\overrightarrow{O_1O_2}$$

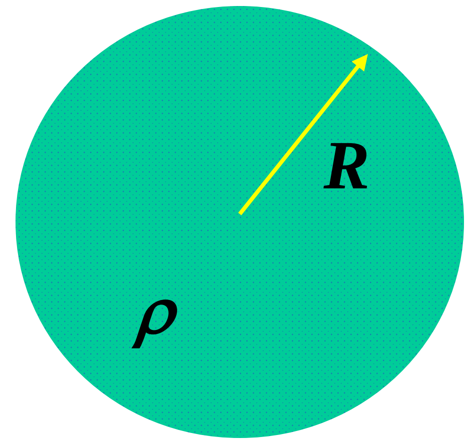
$$=\frac{\rho}{3\varepsilon_0}\vec{b}$$

——为均匀场！

$$\boxed{\vec{E}=\frac{\rho}{3\varepsilon_0}\vec{r}}$$

[例] 半径为R的均匀带电球体，带电量为q。求电势分布。

解：已知球内外的电场分布



$$\vec{E}_1 = \frac{q\vec{r}}{4\pi\varepsilon_0 R^3} \quad (r \le R)$$

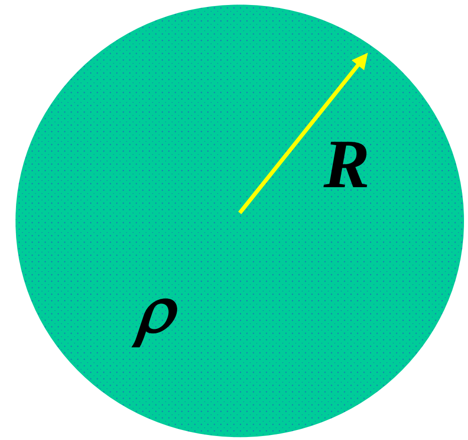
$$\vec{E}_2 = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r^3}\vec{r} \quad (r \ge R)$$

球外一点的电势

$$V_2 = \int_r^\infty \vec{E}_2 \cdot d\vec{r} = \int_r^\infty E_2 dr = \int_r^\infty \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r^2} dr$$

$$= \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r}$$

球内一点的电势：



$$V_1=\int_r^{\infty}\vec{E}\cdot d\vec{r}$$

$$=\int_r^R E_1 dr+\int_R^{\infty}E_2 dr$$

$$=\int_r^R \frac{qr}{4\pi\varepsilon_0 R^3}dr+\int_R^{\infty}\frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}dr$$

$$=\frac{q}{8\pi\varepsilon_0 R^3}(R^2-r^2)+\frac{q}{4\pi\varepsilon_0 R}=\frac{q(3R^2-r^2)}{8\pi\varepsilon_0 R}$$

注：也可以用电势叠加原理求球内外的电势分布

1923诺贝尔物理学奖

R.A.密立根 研究元电荷和光电效应，通过油滴实验证明电荷有最小单位

光子：传递电磁相互作用。

引力子：传递引力相互作用。

中间玻色子（$W^{\pm}$，Z^{0}）：传递弱相互作用。

胶子：夸克间的强相互作用由胶子传递。
（核子之间的核力是强相互作用的剩余效应）。