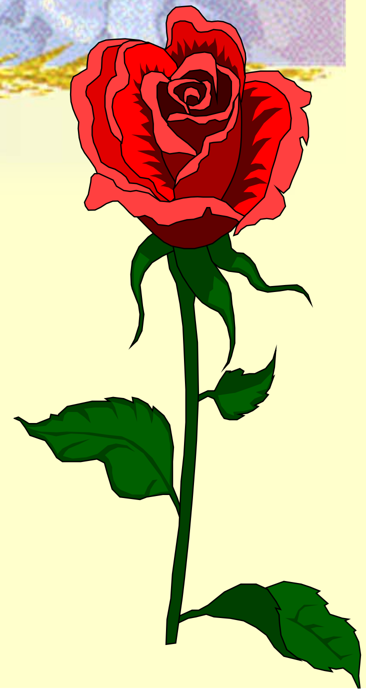
随机模拟方法与应用

Stochastic Simulation Methods and Its Applications

肖柳青 博士

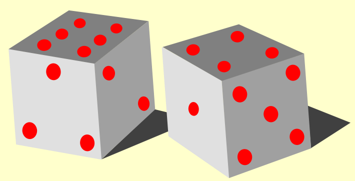
lucyxiao@sjtu.edu.cn

PUB:SSMA_xiao@yeah.net



第2章 懂点概率论：随机事件的数学描述方法

2.1 直观的概率
2.2 理解概率的公理
2.3 随机变量与概率分布
2.4 随机变量的数字特征-矩量
2.5 随机变量的变换



肖柳青 上海交通大学 数学系

§2.1　直观的概率

上面一章的例子引出了随机数的概念，人们并不知道每次试验随机数将会出现什么值，而只能说它出现某个值的可能性有多大。

直观上，人们将这种可能性大小与大量重复试验中该值出现的频率相联系。例如在抛钱币试验中，只要钱币是均匀的，人们都会说抛一次出现正面的可能性是50%，即有一半的可能性出现正面。

下面我们用掷骰子的实验来引入概率的概念。

特殊 →→→古典、几何定义 →→→ 频率定义 →→→公理化定义

输光、得分问题

随机试验所有可能结果为有限个等可能的情形；将等可能思想发展到含无穷多个元素的样本空间

克服等可能观点不易解决的问题

1933年, kolmogorov 柯尔莫哥洛夫

一、频率及其稳定性

定义1 如果在 N 次重复试验中事件 A 发生了 $n(A)$ 次，则称 $n(A)$ 为事件 A 发生的**频数**，称比值 $\dfrac{n(A)}{N}$ 为事件 A 在 n 次试验中发生的**频率**，记为 $f_n(A)$，即

$$\boxed{f_n(A)=\frac{n(A)}{N}}$$

A 发生的频繁程度

稳定性？

事件的统计规律性

基本性质 (1) $0 \le f_n(A) \le 1$;

(2) $f_n(\Omega)=1$;

(3) 设 $A_1, A_2, \cdots, A_k$ 两两互不相容的事件，则

$$f_n(A_1+A_2+\cdots+A_k)=f_n(A_1)+f_n(A_2)+\cdots+f_n(A_k)$$

大数定律以严格的数学形式表达了随机现象最根本的性质之一： **平均结果的稳定性**

它是随机现象统计规律的具体表现.

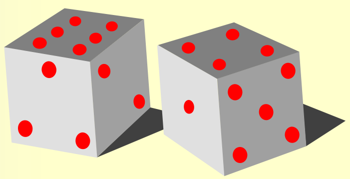
$$P(A)=\lim_{N\to\infty}\frac{n(A)}{N}$$

大数律中最重要的一类无疑就是讨论独立试验序列的,

大数律在理论和实际中都有广泛的应用.

以掷骰子实验为例

- 如果我们感兴趣的事件是“所出现的面是偶数”，那么其概率是多少呢？事实上，当我们掷一次骰子时，会出现有6种可能的结果，这6种结果是等可能地出现其中之一，而其中属于偶数点面的是2、4或6，即有3种；它们占总数的比例是3/6 =1/2。因此可以断定，出现偶数点面的概率是1/2。



- 这种概率的确定方法是计算比例数，人们需要计数所有可能出现结果的总数，其中属于所关心事件的结果又有多少，那么后者与前者之比就是该事件发生的概率。事实上，概率论的一套公理体系也就是建立在这样的考虑之上的，其中采用了集合来表示一系列可能发生的结果。

2.2 理解概率的公理化定义

概率的公理化定义

即通过规定概率应具备的基本性质来定义概率

定义 设 Ω 是样本空间， $\mathscr{F}$ 为所有事件空间，如果对于 Ω 中的每一个事件 A，Ac 为补集，对于 A 的事件，都对应一个实数 $P(A)$，使得 $P(A)$ 满足下述五个公理：

$n\to\infty$ 时，$f_n(A)\to P(A)$

非负性

规范性

可列可加性

（1） $\Omega\in\mathscr{F}$；

（2） 如果 $A\in\mathscr{F}$，则补集 $Ac=\Omega\setminus A\in\mathscr{F}$；

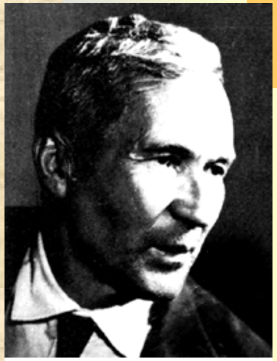
（3） 如果 $A_i\in\mathscr{F}$, $i=1,2,\cdots$， 则 $\bigcup_{i=1}^{\infty}A_i\in\mathcal{F}$

（4） $0\le P(A)\le 1$， 且 $P(\Omega)=1$，

（5） 若事件 $A_1,A_2,\cdots,A_n,\cdots$ 两两互不相容，则有

$$P(A_1+A_2+\cdots+A_n+\cdots)=P(A_1)+P(A_2)+\cdots P(A_n)+\cdots$$

称 $P(A)$ 为事件 A 的概率，



柯尔莫哥洛夫，A. H.

数学上所说的“公理”，就是一些不加证明而公认的前提，然后以此为基础，推演出所讨论对象的进一步的内容.

在学习几何和代数时，我们已经知道公理是数学体系的基础.

柯尔莫哥洛夫提出的公理为数很少且极为简单， 但在此基础上建立起了概率论的宏伟大厦.

由概率的三条公理，我们可推导出概率的若干重要性质. 它们在计算概率时很有用，尤其是加法公式.

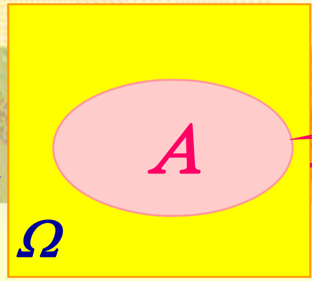
例2.1. 让我们再回到掷骰子实验，用字母A、B、C、D、E和F分别表示掷出骰子的点是1、2、3、4、5和6的基本事件，即全空间是$\Omega = \{A, B, C, D, F, F\}$。那么，显然$P(A) = P(B) = \cdots = P(F) = \frac{1}{6}$满足定义概率公理的要求。然而，骰子被掷出偶数点面的事件是$E_0 = B \bigcup D \bigcup F$；注意：直接事件$B$、$D$和$F$必然都是两两互斥的；则有$P(E_0) = P(B) + P(D) + P(F) = \frac{1}{6} + \frac{1}{6} + \frac{1}{6} = \frac{1}{2}$。骰子被掷出奇数点的事件是$E_1 = \Omega \backslash E_0$，故有$P(E_1) = 1 - P(E_0) = \frac{1}{2}$。另外，对于事件$A \bigcup E_0$，由于$A$和$E_0$是互斥事件，故有

$$P(A \bigcup E_0) = P(A) + P(E_0) = \frac{1}{6} + \frac{1}{2} = \frac{2}{3}$$

另外，对于事件$A^c \bigcup E_0$，有

$$\begin{aligned} P(A^c \bigcup E_0) &= P(A^c) + P(E_0) - P(A^c \bigcap E_0) \\ &= (1 - P(A)) + P(E_0) - P(E_0) \\ &= (1 - \frac{1}{6}) + \frac{1}{2} - \frac{1}{2} = \frac{5}{6} \end{aligned}$$

设边长为1个单位
的正方形
表示样本空间Ω



封闭曲线所围点的
集合表示事件 A

把图形的面积理解
为相应事件的概率

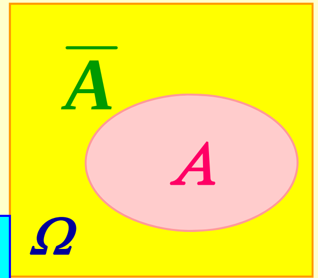
基本性质

1^0 $P(\Phi)=0$;

可加性

2^0 若事件 $A_1, A_2, \cdots, A_n$ 两两互不相容，则有

$$P(A_1+A_2+\cdots+A_n)=P(A_1)+P(A_2)+\cdots P(A_n)$$



3^0 对任一事件A， $P(\overline{A})=1-P(A)$

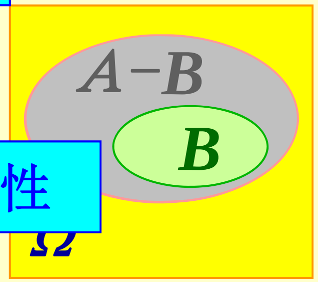
余概公式

区别？

$P(A)=1-P(\overline{A})$

可以通过计算$P(\overline{A})$得到 $P(A)$

余概公式

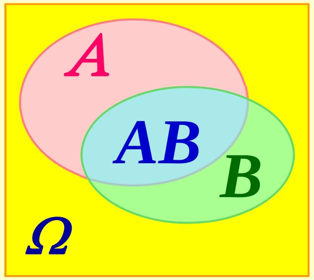


4^0 设 A、B是两个事件，且 $B\subset A$，则有

(1) $P(A-B)=P(A)-P(B)$; (2) $P(B)\le P(A)$.

保号性

$AB\subset B$



5^0 对任意两个事件A、B，有

加法公式

$$P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(AB)$$

推广

$$P(\bigcup_{i=1}^{n}A_i)=\sum_{i=1}^{n}P(A_i)-\sum_{1\le i<j\le n}P(A_iA_j)+\sum_{1\le i<j<k\le n}P(A_iA_jA_k)-\cdots+(-1)^{n-1}P(A_1A_2\cdots A_n).$$

在解决许多概率问题时，往往需要在有某些附加信息(条件)下求事件的概率.

如在事件 B 发生的条件下求事件 A 发生的概率，这种概率问题就是

§2.2　条件概率

一、条件概率

例1（P.20 例1）

两台车床加工同一零件(见表)

	正品数	次品数	总计
第一台加工的零件	35	5	40
第二台加工的零件	50	10	60
总 计	85	15	40

从这 100 个零件中任取 1 个，(1) 求取到的零件是正品的概率；(2) 若取到的零件是第一台车床加工，求它是正品的概率.

解 设 A = {取到的是正品}， B = {取到的是第一台车床加工的}，

C = {取到的是第一台车床加工的正品}， 则

(1) $P(A) = \frac{85}{100} = 0.85$.

在缩小的样本空间里来考虑问题

(2) ∵ 取到的正品零件是由第一台车床加工， $P(A|B)$ $P(C)$ $= \frac{35}{40} = 0.875$.

在B发生的条件下A发生的概率

容易看到 $P(A) \neq P(C)$

$\triangleq P(A|B)$

$$P(A|B) = \frac{\text{在 } B \text{ 发生条件下} A \text{ 包含的样本数}}{\text{缩减的样本空间 } \Omega_B \text{ 包含的样本数}}$$

$$P(A|B) = \frac{35}{40} = \frac{35/100}{40/100} = \frac{P(AB)}{P(B)}$$

???

定义　设A、B是两个事件，且 $P(B)>0$，则称

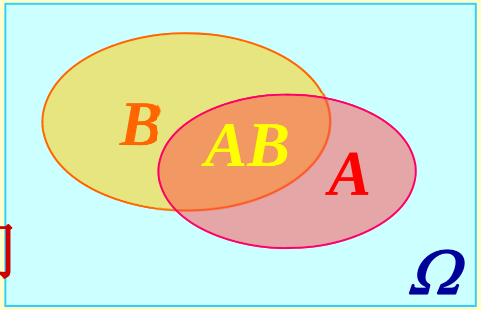
$$P(A|B)=\frac{P(AB)}{P(B)}$$

是概率

为在事件 B 发生的条件下，事件 A 的条件概率.

用古典概型的思想去理解：

若事件B已发生, 为使 A 也发生, 试验结果必须是既在 B 中又在A 中的样本点，即此点必属于AB. 由于我们已知B已发生，故B变成了新的样本空间



同样满足概率的五条公理

1. 对任一事件A，$0\le P(A|B)\le 1$;

2. $P(\Omega|B)=1$;

3.设 $A_1,\cdots,A_n,\cdots$互不相容，则

$$P[(A_1+\cdots+A_n+\cdots)|B]=P(A_1|B)+\cdots+P(A_n|B)+\cdots$$

自行验

条件概率的性质

概率的性质都适用于条件概率

自行写出

条件概率$P(A|B)$与$P(A)$的区别？

每一个随机试验都是在一定条件下进行的，$P(A)$是在该试验条件下事件A发生的可能性大小.

条件概率$P(A|B)$是在原条件下又添加“B发生”这个条件时A发生的可能性大小.

$P(A)$与$P(A|B)$的区别在于两者发生的条件不同，它们是两个不同的概念，在数值上一般也不同.

条件概率$P(A|B)$与$P(A)$数值关系？

$$P(A|B) \le P(A) \quad 或 \quad P(A|B) \ge P(A)\ ?$$

条件概率的计算

1）在原样本空间中直接用定义计算：$P(A\mid B)=\dfrac{P(AB)}{P(B)}$，$P(B)>0$；

2）在减缩的样本空间中（加入条件后改变了的情况）直接计算.

例　现题库有20套试题，其中7套已在考试中用. 现从这20套题中不放回地连取两次，每次取一套，共取两套， 问在第一次取到的是未曾用过的试题的情况下，第二次取到的也是未曾用过的试题的概率是多少？

解　设 $A_i=\{$第 i 次取到的是未曾用过的试题$\}$， $i=1,2$.

方法 1）$P(A_1)=\dfrac{13}{20}$， $P(A_1A_2)=\dfrac{C_{13}^2}{C_{20}^2}=\dfrac{39}{95}$，$P(A_2\mid A_1)=\dfrac{P(A_1A_2)}{P(A_1)}=\dfrac{12}{19}$.

方法 2）Ω的点数 20 ⟶ 19

A_1 发生后的缩减样本空间所含样本点总数

在缩减样本空间中 A_2 所含样本点个数

12

$\therefore\ P(A_2\mid A_1)=\dfrac{12}{19}$.

二、 乘法公式

由条件概率的定义 $P(A|B)=\dfrac{P(AB)}{P(B)}$

若已知$P(B)$, $P(A|B)$时, 可以反求$P(AB)$.

即　若$P(B)>0$, 则 $P(AB)=P(B)P(A|B)$　(1)

对调A、B的位置，则有

即　若$P(A)>0$, 则 $P(BA)=P(A)P(B|A)$　(2)

(1)和(2)式统称为乘法公式，利用它可计算两个事件同时发生的概率

而　$P(AB)=P(BA)$　故　$P(B)P(A|B)=P(A)P(B|A)$

注意 $P(AB)$与 $P(A|B)$的区别！

涉及 A与 B 同时发生时， 用$P(AB)$;

有包含或主从关系时， 用$P(A|B)$.

推广到多个事件的乘法公式:

当 $P(A_1A_2\ldots A_{n-1})>0$ 时，有

$$P(A_1A_2\ldots A_n)=P(A_1)P(A_2|A_1)P(A_3|A_1A_2)\cdots$$

$$\cdots P(A_n|A_1A_2\ldots A_{n-1})$$

例4 设有 100 件产品，其中有 5 件次品. 现从中连续取3次，每次不放回地取 1 件，求第 3 次才取到正品的概率.

解 设 A_i={第 i 次取到的是次品}，i=1, 2, 3. 则所求概率为:

$$P(A_1A_2\overline{A}_3)=P(A_1)P(A_2|A_1)P(\overline{A}_3|A_1A_2)$$

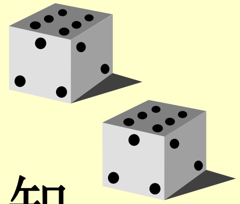
$$P(A_1)=\frac{5}{100},\qquad P(A_2|A_1)=\frac{4}{99},\qquad P(\overline{A}_3|A_1A_2)=\frac{95}{98},$$

$$\therefore\ P(A_1A_2\overline{A}_3)=0.002.$$

三. 事件的独立性

一般地 $P(A|B)\neq P(A)$

例子　将一颗均匀骰子连掷两次，设 $A=\{$第二次掷出6点$\}$，$B=\{$第一次掷出6点$\}$，　显然 $P(A|B)=P(A)$，



这表明，事件B发生，并不影响事件A 发生的概率.

若 $\boxed{P(A|B)=P(A)}$，由乘法公式 $P(AB)=P(B)P(A|B)$ 知，

$$\boxed{P(AB)=P(A)P(B)}$$

反之，若$P(AB)=P(A)P(B)$，且$P(B)>0$，则 $P(A)=P(AB)/P(B)=P(A|B)$　(P23.Th1)

在条件 $P(B)>0$下，$P(A|B)=P(A) \Leftrightarrow P(AB)=P(A)P(B)$.

定义 (P.37 定义8) 若事件A, B 满足$P(AB)=P(A)P(B)$，则称事件A与B相互独立. 简称独立.

比用 $P(A|B)=P(A)$ 或 $P(B|A)=P(B)$ 好，不受$P(B)>0$ 或 $P(A)>0$的制约

不可能事件与任一事件都是相互独立的
必然事件/

例1　从一副不含大小王的扑克牌中任取一张，记 A={**抽到** K}，B={**抽到的牌是黑色的**}，问 A、B 是否独立？

解　由于 $P(A)=4/52=1/13$，　$P(B)=26/52=1/2$，

$P(AB)=2/52=1/26.$

显见，$P(AB)=P(A)P(B)$，　所以事件 A、B 独立.

也可以通过计算条件概率去做:

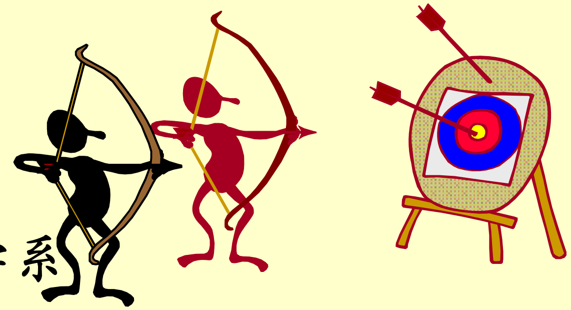
由于 $P(A)=1/13$，　$P(A|B)=2/26=1/13$，

显见 $P(A)=P(A|B)$，所以事件 A、B 独立.

实际应用中往往根据问题的实际意义判断两事件是否独立

例如:　甲、乙两人向同一目标射击，记 A={甲命中}，B={乙命中}，A 与 B 是否独立？

由于“甲命中”并不影响“乙命中”的概率(即一事件发生与否并不影响另一事件发生的概率)，故可认为 A 与 B 独立.



又如：一批产品共n件，从中抽取2件, 设A_i={第 i 件是合格品} i=1, 2,

若抽取是有放回的, 因为第一次抽取的结果不会影响第二次抽取结果, 所以 A_1与 A_2独立.

若抽取是无放回的，因为第一次抽取的结果会影响到第二次抽取结果, 则 A_1与 A_2不独立.

Th2（P.198） 若两事件 A、B 独立, 则 $\overline{A}$与B, A与$\overline{B}$, $\overline{A}$与$\overline{B}$ 也相互独立.

证 仅证A与 $\overline{B}$ 独立.

概率的性质

$$\because\ P(A\overline{B}) = P(A-AB) = P(A) - P(AB)$$

A、B 独立

$$= P(A) - P(A)P(B) = P(A)[1-P(B)]$$

$$= P(A)P(\overline{B})$$

故A与$\overline{B}$独立 .

两个事件独立的定义可以推广到三个事件

对于三个事件A、B、C，若下面的四个等式

$$\left\{\begin{aligned}&P(AB)=P(A)P(B),\\&P(AC)=P(A)P(C),\\&P(BC)=P(B)P(C),\\&P(ABC)=P(A)P(B)P(C),\end{aligned}\right.$$

两两独立

反之?

对$n\,(n>2)$个事件

两两独立 $\not\Rightarrow$ 相互独立

$\Leftarrow$

同时成立，则称事件A、B、C相互独立．

可类似写出 n 个事件的独立性定义：

设 $A_1, A_2, \ldots, A_n$ 是 n 个事件，如果对其中任意一组事件

$A_{i_1}, A_{i_2}, \cdots, A_{i_k}\,(1<k\le n)$， 有

$$P(A_{i_1}A_{i_2}\cdots A_{i_k})=P(A_{i_1})P(A_{i_2})\cdots P(A_{i_k})$$

则称事件 $A_1, A_2, \ldots, A_n$ 为相互独立．

等式总数为： $C_n^2+C_n^3+\cdots+C_n^n=(1+1)^n-C_n^1-C_n^0=2^n-n-1$.

注意独立性的概念在计算概率中的应用

对于独立事件，许多概率计算可得到简化：

例2 三人独立地去破译一份密码, 已知各人能译出的概率分别为1/5, 1/3, 1/4, 问三人中至少有一人能将密码译出的概率是多少?

解 将三人编号为1, 2, 3, 记 $A_i=\{$第 i 个人破译出密码$\}$ $i=1,2,3$

所求为 $P(A_1\cup A_2\cup A_3)$

已知 $P(A_1)=1/5,\quad P(A_2)=1/3,\quad P(A_3)=1/4,$

$$\underline{P(A_1\cup A_2\cup A_3)} = 1-P(\overline{A_1\cup A_2\cup A_n})$$

$$=1-P(\overline{A}_1\overline{A}_2\overline{A}_3)$$

$$\underline{=1-P(\overline{A}_1)P(\overline{A}_2)P(\overline{A}_3)}$$

$$\underline{=1-[1-P(A_1)][1-P(A_2)][1-P(A_3)]}$$

$$=1-\frac{4}{5}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{3}{4}=\frac{3}{5}=0.6\,.$$

n个独立事件和的概率公式:

设事件 $A_1, A_2, \cdots, A_n$ 相互独立, 则

$$P(A_1 \cup \cdots \cup A_n) = 1 - P(\overline{A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n})$$

$$= 1 - P(\bar{A}_1 \bar{A}_2 \cdots \bar{A}_n)$$

$\bar{A}_1, \bar{A}_2, \cdots, \bar{A}_n$ 也相互独立

$$\boxed{= 1 - P(\bar{A}_1) P(\bar{A}_2) \cdots P(\bar{A}_n)}$$

n个相互独立事件至少有一个发生的概率
=== 1 - 各自对立事件概率的乘积

若n个相互独立事件$A_1, A_2, \cdots, A_n$发生的概率分别为$p_1, \cdots, p_n$, 则“ $A_1, A_2, \cdots, A_n$ 至少有一个发生”的概率为

$$\boxed{P(A_1 \cup \cdots \cup A_n) = 1 - (1 - p_1) \cdots (1 - p_n)}$$

类似可以得出: “ $A_1, A_2, \cdots, A_n$至少有一个不发生”的概率为

$$\boxed{P(\bar{A}_1 \cup \bar{A}_2 \cup \cdots \cup \bar{A}_n) = 1 - p_1 p_2 \cdots p_n} = 1 - P(A_1) P(A_2) \cdots P(A_n)$$

例3　一玩电子游戏者在一次射击中命中率为$p=0.004$，求n次射击过程中击中目标的概率.

解　设A_i={第i次射击时击中目标} $i=1,\cdots,n$，

小概率事件

则 $P(A_i)=p=0.004$，且$A_1,A_2,\cdots,A_n$相互独立，

再设A={击中目标}，　则有 $A=\bigcup_{i=1}^{n}A_i$，

故 $P(A)=1-P(\bar{A}_1)P(\bar{A}_2)\cdots P(\bar{A}_n)$

$$=1-(1-p)^n$$

$$=1-0.996^n.$$

当$n=500$时，$P(A)=0.865$.

只要$P(A)=p<1$，就有 $\lim_{n\to\infty}P(A)=\lim_{n\to\infty}[1-(1-p)^n]=1$

只要你坚持重复地做，发生概率再小的事件总会发生.

我们介绍了事件独立性的概念. 不难发现，当事件相互独立时，乘法公式变得十分简单，因而也就特别重要和有用.

需要指出的是，不少复杂事件概率的计算需要上面所讲的加法公式和乘法公式的综合运用和推广.

加法公式
$P(A+B)=P(A)+P(B)$
（A、B互斥）

乘法公式
$P(AB)= P(A)P(B|A)$
（$P(A)>0$）

综合运用

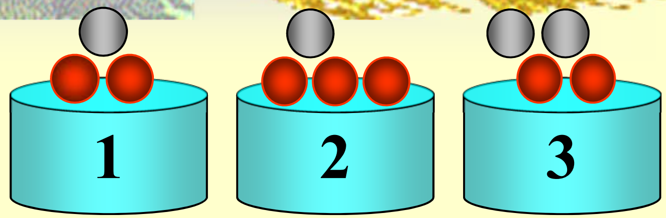
这就是下面将介绍的

§ 1.3　全概率公式与贝叶斯公式

它们主要被用于计算比较复杂事件的概率.

先看一个引例：

引例 三个罐子分别编号为1,2,3，1号装有2红1黑球，2号装有3红1黑球，3号装有2红2黑球. 某人从中随机取一罐，再从中任意取出一球，求取得红球的概率.



解 记 B_i = { 球取自 i 号罐 } i=1, 2, 3;

A = { 取得红球 }

则 A 发生总是伴随着 B_1，B_2，B_3 之一同时发生，

即 $\boxed{A = AB_1 + AB_2 + AB_3，\quad 且\ AB_1、AB_2、AB_3\ 两两互斥，}$

运用加法公式

$$P(A) = P(AB_1) + P(AB_2) + P(AB_3)$$

对求和中的每一项运用乘法公式

$$= \sum_{i=1}^{3} P(B_i)P(A|B_i)$$

1/3

依题意: $P(A|B_1)=2/3$, $P(A|B_2)=3/4$, $P(A|B_3)=1/2$,

代入数据计算得：$P(A) \approx 0.639$.

将此例中所用的方法推广到一般的情形，就得到在概率计算中常用的全概(率)公式 .

一、全概率公式:

定义 若 n 个事件 $B_1, B_2, \ldots, B_n$ 满足

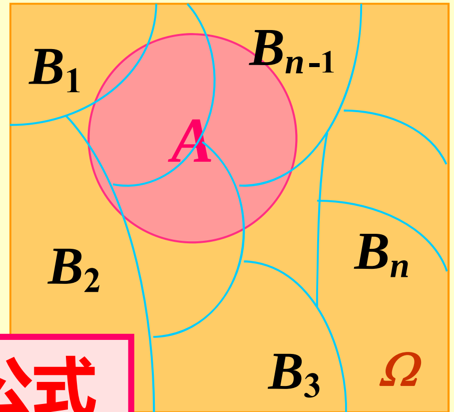
两两互斥

$$\bigcup_{i=1}^{n} B_i = \Omega, \qquad B_i B_j = \Phi \quad (i \neq j,\ i, j = 1, 2, \cdots n),$$

则称 $B_1, B_2, \ldots, B_n$ 为 Ω 的一个划分，或称其是一个完备事件组.

定理1（P.24 Th） 设 $B_1, B_2, \ldots, B_n$ 是 Ω 的一个划分，

且 $P(B_i)>0$, $i = 1, 2, \cdots, n$, 则对任一事件 $A \subset \Omega$,



有
$$\boxed{P(A) = \sum_{i=1}^{n} P(B_i) P(A|B_i)}$$

全概(率)公式

全概率公式的来由，不难由上式看出:

"全"部概率 $P(A)$ 被分解成了许多部分之和

它的理论和实用意义在于:

在较复杂情况下直接计算 $P(A)$ 不易，但 A 总是伴随着某个 B_i 出现. 适当地去构造这一组 B_i 往往可以简化计算.

我们再换一个角度去理解全概率公式：

某一事件 A 的发生有各种可能的原因（如 n 个），如果 A 是由原因 B_i（$i=1, 2, \ldots, n$）所引起，则 A 发生的概率是

$$P(AB_i) = P(B_i)P(A|B_i)$$

由于每一原因都可能导致 A 发生，故 A 发生的概率是各原因引起 A 发生概率的总和，即有全概率公式 .

$$P(A) = \sum_{i=1}^{n} P(AB_i) = \sum_{i=1}^{n} P(B_i)P(A|B_i)$$

转化到

将一个难求的概率 **n 个容易求的概率上去**

例1 三人同时对飞机进行射击，三人击中的概率分别为0.4、0.5、0.7．飞机被一人击中而击落的概率为0.2，被两人击中而击落的概率为0.6，若三人都击中飞机必定被击落．求飞机被击落的概率.

解 设 A={飞机被击落}， B_i={飞机被 i 个人击中} $i=1,2,3$，

则 $A = AB_1 + AB_2 + AB_3$， 由全概率公式

$$P(A) = P(B_1)P(A|B_1) + P(B_2)P(A|B_2) + P(B_3)P(A|B_3)$$

依题意， $P(A|B_1) = 0.2$, $P(A|B_2) = 0.6$, $P(A|B_3) = 1$,

为求$P(B_i)$， 设 H_i ={飞机被第 i 人击中}， $i=1,2,3$

可求得:

$$P(B_1) = P(H_1\overline{H}_2\overline{H}_3 + \overline{H}_1 H_2\overline{H}_3 + \overline{H}_1\overline{H}_2 H_3),$$
$$P(B_2) = P(H_1 H_2\overline{H}_3 + H_1\overline{H}_2 H_3 + \overline{H}_1 H_2 H_3),$$
$$P(B_3) = P(H_1 H_2 H_3),$$

将数据代入计算得: $P(B_1)$=0.36， $P(B_2)$=0.41， $P(B_3)$=0.14，

于是 $$P(A) = P(B_1)P(A|B_1) + P(B_2)P(A|B_2) + P(B_3)P(A|B_3)$$
$$= 0.36\times0.2 + 0.41\times0.6 + 0.14\times1 = 0.458$$

即飞机被击落的概率为0.458 .

例2: 在 n 张彩票中有一张奖券， 现有两人依次摸取彩票，求第二人摸到奖券的概率.

解 设 A={第二人摸到}，B_1={第1人摸到}，B_2={第1人没摸到}，

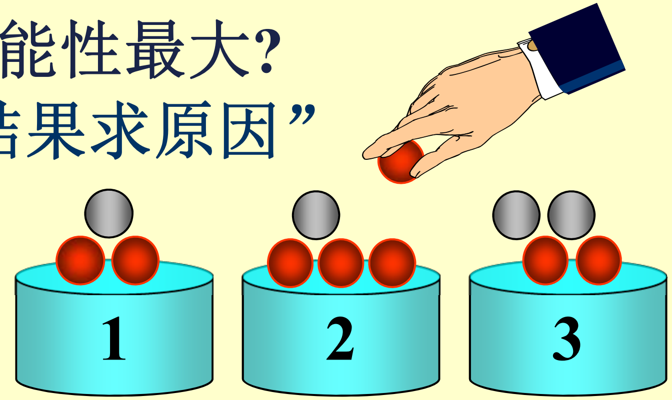
显然 $B_2=\overline{B}_1$，且 $P(B_1)=\dfrac{1}{n}$，$P(B_2)=1-\dfrac{1}{n}=\dfrac{n-1}{n}$，$P(A|B_1)=0$，$P(A|B_2)=\dfrac{1}{n-1}$，

由全概率公式 $$P(A)=\sum_{i=1}^{2}P(B_i)P(A|B_i)=\frac{1}{n}\times 0+\frac{n-1}{n}\times\frac{1}{n-1}=\frac{1}{n}.$$

再看一个问题：

某人从任一罐中任意摸出一球，发现是红球，求该球是取自1号罐的概率. 或问：该球取自哪号罐的可能性最大?

它实际上是本节引例的反问题，是“已知结果求原因”



这一类问题在实际中是更为常见，它所求的是已知某结果发生的条件下，各原因发生可能性大小，或帮助人们确定某结果(事件A)发生的最可能原因. 是求一个条件概率.

下面就介绍为解决这类问题而引出的 Bayes(贝叶斯)公式

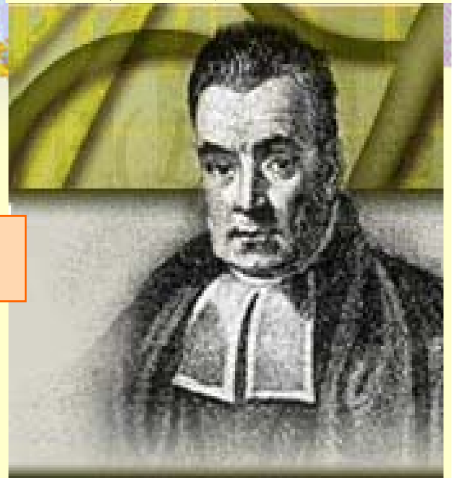
定理2:(P.25 Th) 设 $B_1, B_2, \cdots, B_n$ 是样本空间 Ω 的一个划分，且 $P(B_i) > 0,\ i=1, 2, \ldots, n$，则对任一事件 $A \subset \Omega$，有

$$\underbrace{P(B_i \mid A)}_{\text{后验概率}} = P(B_i)P(A \mid B_i) \Big/ \sum_{j=1}^{n} \underbrace{P(B_j)}_{\text{先验概率}} P(A \mid B_j)$$

Bayes公式或逆概公式

该公式由Bayes于1763年给出.

它是在已知事件 A 发生的条件下，通过计算后验概率来寻找导致 A 发生的原因 $B_1, B_2, \cdots, B_n$ 的可能的大小.



概率论理论创立人 Thomas Bayes。如果你使用过 Google, 你就已经从贝叶斯的理论中受益了。

Thomas Bayes，一位伟大的数学大师，1702年出生于伦敦，后来成为了一名Presbyterian minister. 和他的同事们不同：他认为上帝的存在可以通过方程式证明，虽然他看到了自己的两篇论文被发表了，但是《Essay Toward Solving a Problem in the Doctrine of Chances》却一直到他死后的第三年(1764年)才被发表. 他的理论很有效，照亮了今天的计算领域，研究者正在把对这种思想的应用从基因研究推广到fillering email的研究. 搜索巨人Google和Autonomy(一家出售信息恢复工具的公司)，都使用了Bayesian principles 为数据搜索提供近似的. 研究人员还使用贝叶斯模型来判断症状和疾病之间的相互关系，开发能够根据数据和经验来决定行动的人工智能设备，创建个人机器人. 值得一提的是，后来的学者还依据贝叶斯公式的思想发展了一整套统计推断方法，叫作“贝叶斯统计”. 可见贝叶斯公式的影响 .

例3 三部自动的机器生产同样的零件, 其中机器甲生产的占40%, 机器乙生产的占25%, 机器丙生产的占35 %, 已知机器甲、乙、丙生产的零件分别有 10%、5%和1%不合格, 现从总产品中随即地抽取一个零件, 发现是不合格品, 求:

(1) 它是由机器甲生产出来的概率; ,

(2) 它是由哪一部机器生产出来的可能性大.

解 设B_1,B_2,B_3分别表示事件: 任取的零件为甲、乙、丙机器生产, $A=\{$抽取的零件是不合格品$\}$, 由条件知

$$P(B_1)=0.40,\quad P(B_2)=0.25,\quad P(B_1)=0.35,$$

$$P(A\mid B_1)=0.10,\quad P(A\mid B_2)=0.05,\quad P(A\mid B_1)=0.01,$$

(1) 所求概率为 $P(B_1|A)$, 由 Bayes公式 代入数据得

$$P(B_1\mid A)=P(B_1)P(A\mid B_1)\Big/\sum_{j=1}^{3}P(B_j)P(A\mid B_j)\approx 0.714\,;$$

(2) 类似(1)的计算可得 $P(B_2|A)\approx 0.063$,

比较可知是机器甲生产出来的可能性大.

- **例子2.3** 一座别墅在过去的20年里一共发生过2次被盗，别墅的主人有一条狗，狗平均每周晚上叫3次，在盗贼入侵时狗叫的概率被估计为0.9，问题是：在狗叫的时候发生入侵的概率是多少？
- 我们假设 事件为狗在晚上叫为盗贼入侵，则

$$P(A) = 3/7 \qquad P(B) = 2/(20 \cdot 365.25) = 2/7305$$

$$P(A|B) = 0.9$$

- 按照Beyes公式很容易算出结果：

$$P(B|A) = \frac{0.9 \cdot 2/7305}{3/7} = 0.000574948665...$$

- 这表明：主人家不能指望靠狗叫来防盗。

肖柳青 上海交通大学 数学系