理论力学 CAI

刚体平面运动学

- 前言
- 刚体的连体基 刚体位形的描述
- 刚体的平面运动
- 刚体的姿态及其变化
- 基点的位置、速度与加速度
- 刚体上给定点的位置、速度与加速度
- 相对刚体运动的任意点的位置、速度与加速度

相对刚体运动任意点的位置 速度与加速度

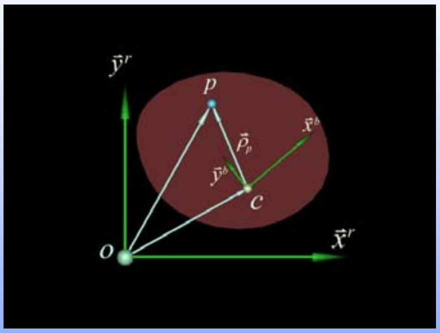
相对刚体运动的任意点位置、速度与加速度

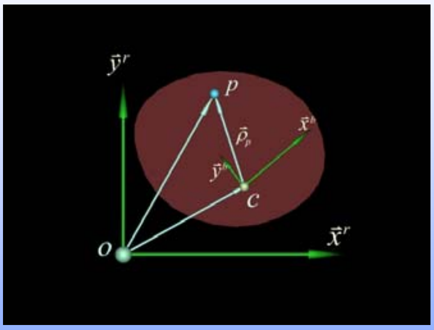
- 前言
- 动点的位置
- 动点的速度
- 动点的加速度
- 刚体系运动学矢量瞬时分析方法

相对刚体运动的任意点位置、速度与加速度

- 前言
- 动点的位置
- 动点的速度
- 动点的加速度
- 刚体系运动学矢量瞬时分析方法

前言





- 定点

- 动点

前言

- 考察相对刚体运动点（动点）的坐标系

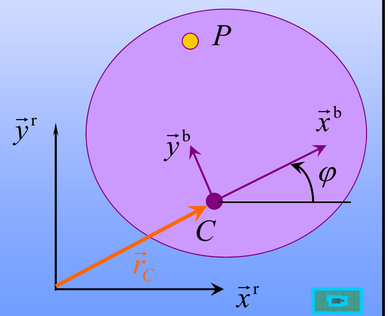
参考基－定基　　刚体连体基－动基

$O-\vec{\boldsymbol{e}}^{\mathrm{r}}$　　$C-\vec{\boldsymbol{e}}^{\mathrm{b}}$

绝对运动　　相对运动

- 动基的位形　　$\vec{r}_C(t)$　　$\boldsymbol{A}(t)$

$$\boldsymbol{q}=\begin{pmatrix}x_C & y_C & \varphi\end{pmatrix}^{\mathrm{T}}$$

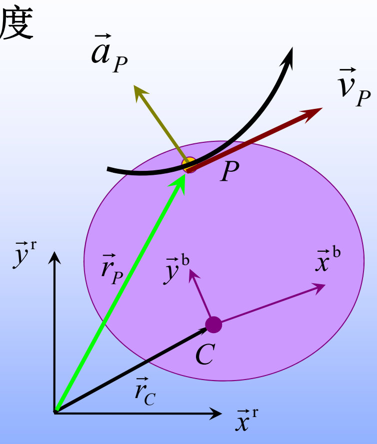


- 动点$\boldsymbol{P}$的绝对位置、速度与加速度

绝对轨迹　　$\vec{r}_P(t)$

绝对速度　　$\vec{v}_P=\dfrac{{}^{\mathrm{r}}\mathrm{d}\vec{r}_P}{\mathrm{d}t}=\dot{\vec{r}}_P$

绝对加速度　　$\vec{a}_P=\dfrac{{}^{\mathrm{r}}\mathrm{d}^2\vec{r}_P}{\mathrm{d}t^2}=\ddot{\vec{r}}_P$



- 动点***P*** 的绝对位置、速度与加速度

绝对轨迹 $\vec{r}_P(t)$

绝对速度 $\vec{v}_P = \dfrac{{}^{\mathrm{r}}\mathrm{d}\vec{r}_P}{\mathrm{d}t} = \dot{\vec{r}}_P$

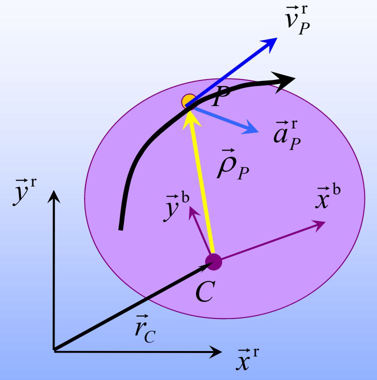
绝对加速度 $\vec{a}_P = \dfrac{{}^{\mathrm{r}}\mathrm{d}^2\vec{r}_P}{\mathrm{d}t^2} = \ddot{\vec{r}}_P$

- 动点***P*** 的相对位置、相对速度与相对加速度

相对轨迹 $\vec{\rho}_P(t)$

相对速度 $\vec{v}_P^{\mathrm{r}} = \dfrac{{}^{\mathrm{b}}\mathrm{d}\vec{\rho}_P}{\mathrm{d}t} = \mathring{\vec{\rho}}_P$

相对加速度 $\vec{a}_P^{\mathrm{r}} = \dfrac{{}^{\mathrm{b}}\mathrm{d}^2\vec{\rho}_P}{\mathrm{d}t^2} = \overset{\circ\circ}{\vec{\rho}}_P$



相对刚体运动任意点的位置、速度与加速度/前言

- 动点***P*** 的绝对位置、速度与加速度

绝对轨迹 $\vec{r}_P(t)$

绝对速度 $\vec{v}_P = \dfrac{{}^{\mathrm{r}}\mathrm{d}\vec{r}_P}{\mathrm{d}t} = \dot{\vec{r}}_P$

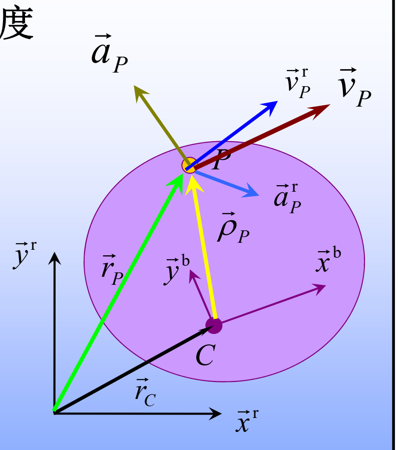
绝对加速度 $\vec{a}_P = \dfrac{{}^{\mathrm{r}}\mathrm{d}^2\vec{r}_P}{\mathrm{d}t^2} = \ddot{\vec{r}}_P$

- 动点***P*** 的相对位置、相对速度与相对加速度

相对轨迹 $\vec{\rho}_P(t)$

相对速度 $\vec{v}_P^{\mathrm{r}} = \dfrac{{}^{\mathrm{b}}\mathrm{d}\vec{\rho}_P}{\mathrm{d}t} = \mathring{\vec{\rho}}_P$

相对加速度 $\vec{a}_P^{\mathrm{r}} = \dfrac{{}^{\mathrm{b}}\mathrm{d}^2\vec{\rho}_P}{\mathrm{d}t^2} = \overset{\circ\circ}{\vec{\rho}}_P$



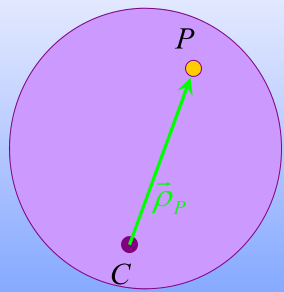
相对刚体运动的任意点位置、速度与加速度

- 前言
- 动点的位置
- 动点的速度
- 动点的加速度
- 刚体系运动学矢量瞬时分析方法

动点的位置

- 动点***P*** 相对动基的位置

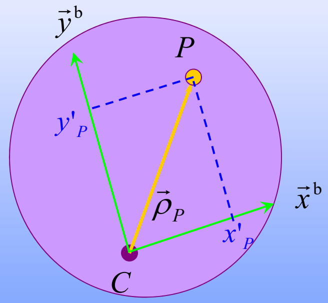
$\vec{\rho}_P(t)$ 不是动基的连体矢量



- 动点$\boldsymbol{P}$相对动基的位置

$\vec{\rho}_P(t)$ 不是动基的连体矢量

$\vec{e}^{\mathrm{b}}$: $\boldsymbol{\rho}'_P = (x'_P \quad y'_P)^{\mathrm{T}}$ 时变阵

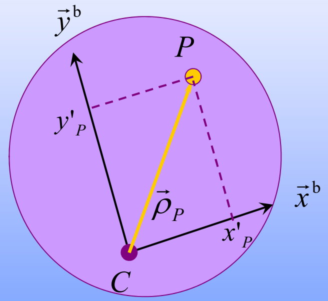


相对刚体运动任意点的位置、速度与加速度/动点的位置

- 动点$\boldsymbol{P}$相对动基的位置

$\vec{\rho}_P(t)$ 不是动基的连体矢量

$\vec{e}^{\mathrm{b}}$: $\boldsymbol{\rho}'_P = (x'_P \quad y'_P)^{\mathrm{T}}$ 时变阵



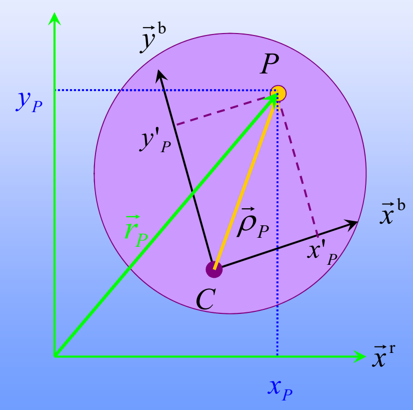
- 动点***P*** 相对动基的位置

$\vec{\rho}_P(t)$　不是动基的连体矢量

$\vec{e}^{\,b}$：　$\boldsymbol{\rho}'_P = (x'_P \quad y'_P)^{\mathrm{T}}$　时变阵

- 动点***P***在参考基上的位置

$\vec{e}^{\,r}$：　$\vec{r}_P(t)$　　$\boldsymbol{r}_P = (x_P \quad y_P)^{\mathrm{T}}$



- 动点***P*** 相对动基的位置

$\vec{\rho}_P(t)$　不是动基的连体矢量

$\vec{e}^{\,b}$：　$\boldsymbol{\rho}'_P = (x'_P \quad y'_P)^{\mathrm{T}}$　时变阵

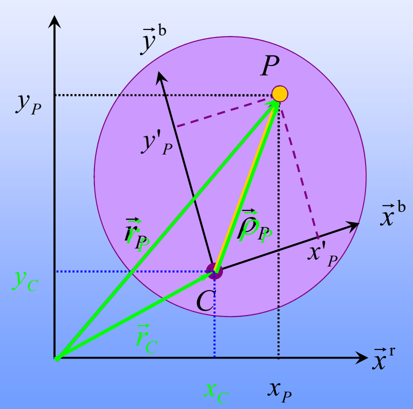
- 动点***P***在参考基上的位置

$\vec{e}^{\,r}$：　$\vec{r}_P(t)$　　$\boldsymbol{r}_P = (x_P \quad y_P)^{\mathrm{T}}$

- 动点***P***两位置矢量的关系

$$\vec{r}_P = \vec{r}_C + \vec{\rho}_P$$

$\vec{e}^{\,r}$：　$\boldsymbol{r}_P = \boldsymbol{r}_C + \boldsymbol{\rho}_P = \boldsymbol{r}_C + \boldsymbol{A}\boldsymbol{\rho}'_P$

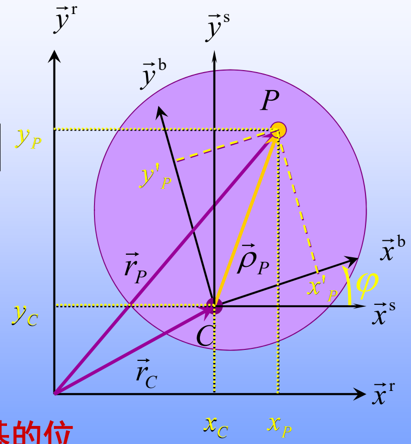


- 动点***P***的绝对相对位置的关系式

$$\boldsymbol{r}_P = \boldsymbol{r}_C + \boldsymbol{\rho}_P = \boldsymbol{r}_C + \boldsymbol{A\rho}'_P$$

$$\begin{pmatrix} x_P \\ y_P \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_C \\ y_C \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x'_P \\ y'_P \end{pmatrix}$$

点***P***在参考基上的绝对坐标	动基基点在参考基上的坐标	动基的方向余弦阵	点***P***在动基上的相对坐标



动点在参考基上的位置取决于动基的位形与动点相对于动基的位置

相对刚体运动的任意点位置、速度与加速度

- 前言
- 动点的位置
- **动点的速度**
- 动点的加速度
- 刚体系运动学矢量瞬时分析方法

动点的速度

- 动基的位形 $\vec{r}_C(t)$ $\boldsymbol{A}(t)$

$$\boldsymbol{q}=(x_C \quad y_C \quad \varphi)^{\mathrm{T}}$$

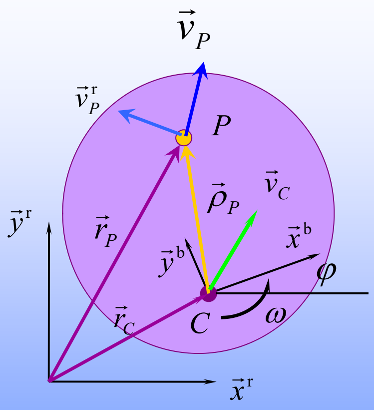
- 动基的位形速度 $\vec{v}_C(t)$ $\vec{\omega}(t)$

$$\dot{\boldsymbol{q}}=(v_{Cx} \quad v_{Cy} \quad \omega)^{\mathrm{T}}$$

- 动点相对动基的位置

$$\vec{\rho}(t)$$

- 研究动点的绝对速度与相对速度的关系



$$\vec{v}_P \sim \vec{v}_P^{\mathrm{r}}$$

相对刚体运动任意点的位置、速度与加速度/动点的速度

- 动点$\boldsymbol{P}$的速度 $\vec{r}_P=\vec{r}_C+\vec{\rho}_P$

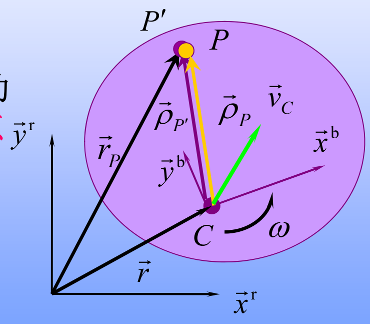
$$\dot{\vec{r}}_P=\dot{\vec{r}}_C+\dot{\vec{\rho}}_P$$

$$\vec{v}_P \quad \vec{v}_C \quad \dot{\vec{\rho}}_P=\mathring{\vec{\rho}}_P+\vec{\omega}\times\vec{\rho}_P$$

定义：

某瞬时在刚体上**(动基/动参考系)** 与动点***P*** 重合的点***P'***, 称为动点***P*** 的牵连点

该点随动基一起运动称点***P'***牵连运动



$$\vec{\rho}_{P'}=\vec{\rho}_P$$

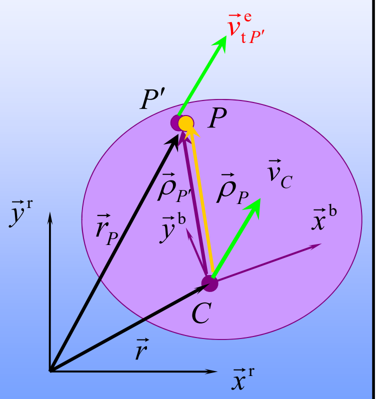
$$\vec{v}_P=\mathring{\vec{\rho}}_P+\vec{v}_C+\vec{\omega}\times\vec{\rho}_{P'}$$

- 动点*P*的速度

$$\vec{v}_P = \overset{\circ}{\vec{\rho}} + \underline{\vec{v}_C} + \vec{\omega}\times\vec{\rho}_{P'}$$

牵连点的平移牵连速度

$$\vec{v}^{\,e}_{tP'}$$



相对刚体运动任意点的位置、速度与加速度/动点的速度

- 动点*P*的速度

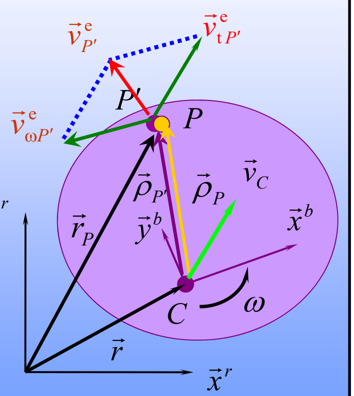
$$\vec{v}_P = \overset{\circ}{\vec{\rho}} + \underline{\vec{v}_C} + \underline{\vec{\omega}\times\vec{\rho}_{P'}}$$

牵连点的旋转牵连速度

$$\underline{\vec{v}^{\,e}_{tP'} \quad \vec{v}^{\,e}_{\omega P'}}$$

牵连点牵连速度

$$\vec{v}^{\,e}_{P'}$$



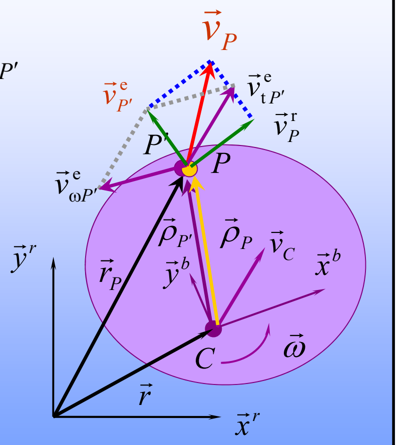
- 动点*P*的速度

$$\vec v_P = \mathring{\vec\rho} + \underbrace{\vec v_C}_{\vec v^{\mathrm e}_{\mathrm t P'}} + \underbrace{\vec\omega\times\vec\rho_{P'}}_{\vec v^{\mathrm e}_{\omega P'}}$$

点*P*相对速度 $\vec v^{\mathrm r}_P$ $\quad$ $\vec v^{\mathrm e}_{P'}$

$$\vec v_P = \vec v^{\mathrm r}_P + \vec v^{\mathrm e}_{P'}$$

动点*P* 的绝对速度为该点相对动基的相对速度与它对应的牵连点*P*’随动基的牵连速度之矢量和



- 动点*P* 的速度

$$\vec v_P = \vec v^{\mathrm r}_P + \vec v^{\mathrm e}_{P'}$$

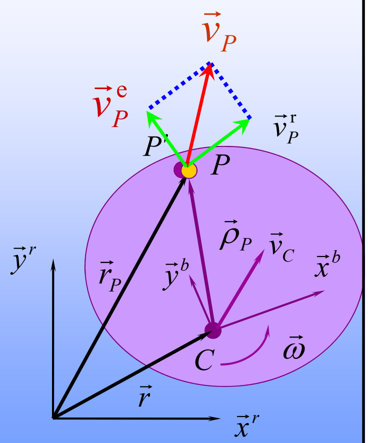
P 与P’位置重合

$$\vec v_P = \vec v^{\mathrm r}_P + \vec v^{\mathrm e}_P$$

$$\vec v^{\mathrm e}_P = \vec v_C + \vec\omega\times\vec\rho_P$$

定义 $\vec v^{\mathrm e}_P$ 为动点的牵连速度

动点*P* 的绝对速度为该点相对动基的相对速度与它牵连速度之矢量和



相对刚体运动的任意点位置、速度与加速度

- 前言
- 动点的位置
- 动点的速度
- **动点的加速度**
- 刚体系运动学矢量瞬时分析方法

动点的加速度

- 动基的位形 $\vec{r}_C(t)$ $\boldsymbol{A}(t)$

$$\boldsymbol{q} = \begin{pmatrix} x_C & y_C & \varphi \end{pmatrix}^{\mathrm{T}}$$

- 动基的位形速度 $\vec{v}_C(t)$ $\vec{\omega}(t)$

$$\dot{\boldsymbol{q}} = \begin{pmatrix} v_{Cx} & v_{Cy} & \omega \end{pmatrix}^{\mathrm{T}}$$

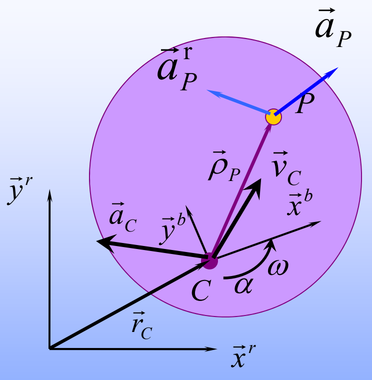
- 动基的位形加速度 $\vec{a}_C(t)$ $\vec{\alpha}(t)$

$$\ddot{\boldsymbol{q}} = \begin{pmatrix} a_{Cx} & a_{Cy} & \alpha \end{pmatrix}^{\mathrm{T}}$$

- 动点相对动基的位置

$$\vec{\rho}(t)$$

- 研究动点的绝对加速度与相对加速度的关系



$$\vec{a}_P \sim \vec{a}_P^{\mathrm{r}}$$

- 动点***P*** 的加速度

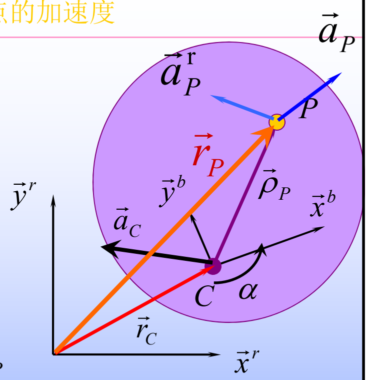
$$\dot{\vec{r}}_P = \dot{\vec{r}}_C + \dot{\vec{\rho}}_P$$

$$\ddot{\vec{r}}_P = \ddot{\vec{r}}_C + \ddot{\vec{\rho}}_P$$

$$\vec{a}_P \quad \vec{a}_C$$

$$\ddot{\vec{\rho}}_P = \overset{\circ\circ}{\vec{\rho}}_P + \dot{\vec{\omega}}\times\vec{\rho}_P + \vec{\omega}\times(\vec{\omega}\times\vec{\rho}_P) + 2\vec{\omega}\times\overset{\circ}{\vec{\rho}}_P$$

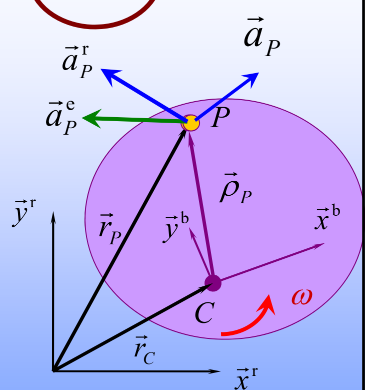
$$\vec{a}_P^{\mathrm{r}} \quad \vec{\alpha} \qquad\qquad \vec{v}_P^{\mathrm{r}}$$



$$\vec{a}_P = \vec{a}_P^{\mathrm{r}} + \vec{a}_C + \vec{\alpha}\times\vec{\rho}_P + \vec{\omega}\times(\vec{\omega}\times\vec{\rho}_P) + 2\vec{\omega}\times\vec{v}_P^{\mathrm{r}}$$

$$\vec{a}_P = \vec{a}_P^{\mathrm{r}} + \underbrace{\underbrace{\vec{a}_C}_{\vec{a}_{\mathrm{t}P}^{\mathrm{e}}} + \underbrace{\vec{\alpha}\times\vec{\rho}_P}_{\vec{a}_{\alpha P}^{\mathrm{e}}} + \underbrace{\vec{\omega}\times(\vec{\omega}\times\vec{\rho}_P)}_{\vec{a}_{\omega P}^{\mathrm{e}}}}_{\vec{a}_P^{\mathrm{e}}} + 2\vec{\omega}\times\vec{v}_P^{\mathrm{r}}$$

绝对加速度　　相对加速度　　牵连加速度

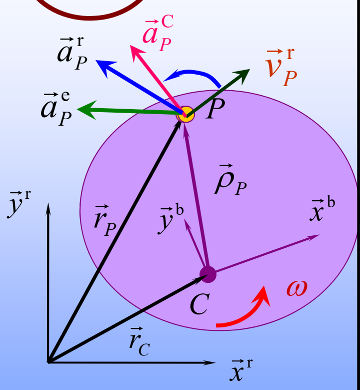


$$\vec{a}_P = \vec{a}_P^{\mathrm{r}} + \underbrace{\vec{a}_C + \vec{\alpha}\times\vec{\rho}_P + \vec{\omega}\times(\vec{\omega}\times\vec{\rho}_P)}_{\vec{a}_P^{\mathrm{e}}} + 2\vec{\omega}\times\vec{v}_P^{\mathrm{r}}$$

定义科氏(G.G. Coriolis)加速度

$$\vec{a}_P^{\mathrm{C}} = 2\vec{\omega}\times\vec{v}_P^{\mathrm{r}} = 2\omega\vec{z}\times\vec{v}_P^{\mathrm{r}}$$

方向垂直于 $\vec{v}_P^{\mathrm{r}}$ $\quad // \hat{\vec{v}}_P^{\mathrm{r}}$ $\quad$ 模 $2\omega v_P^{\mathrm{r}}$



$$\vec{a}_P = \vec{a}_P^{\mathrm{r}} + \vec{a}_P^{\mathrm{C}} + \vec{a}_P^{\mathrm{e}}$$

$$\vec{a}_P = \vec{a}_P^{\mathrm{r}} + \vec{a}_P^{\mathrm{C}} + \vec{a}_{\mathrm{t}P}^{\mathrm{e}} + \vec{a}_{\alpha P}^{\mathrm{e}} + \vec{a}_{\omega P}^{\mathrm{e}}$$

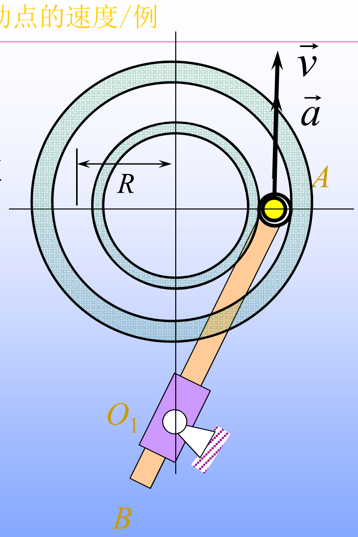
动点的绝对加速度为该点的相对动系的相对加速度、科氏加速度与它的牵连加速度之矢量和

[例]

图示机构中，O_1处安装一套筒，它可绕其转动。套筒中穿一杆AB，此杆在A处有一转动铰与一滑轮相连。滑轮在中心半径为R圆形槽内运动。

到达图示位置时，$\varphi_1=\pi/3$，滑轮在槽内的速度为v与切向加速度为a，方向如图所示。

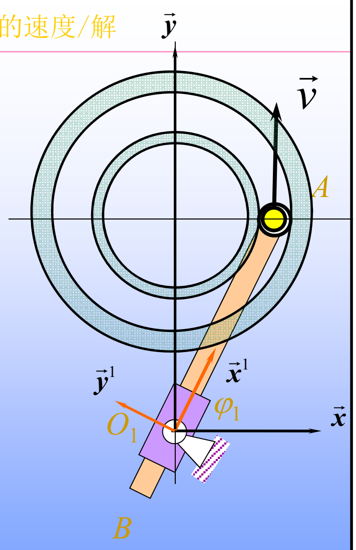
求：此瞬时,套筒的角加速度与杆AB在套筒中的相对滑移加速度



[解]

速度分析

定基 $O_1-\vec e$ 　　套筒$\mathbf{B_1}$(动基) $O_1-\vec e^{\,1}$



[解]

速度分析

定基 $O_1-\vec e$ 　　套筒$\mathbf{B_1}$(动基) $O_1-\vec e^{\,1}$

在套筒$\mathbf{B_1}$上考察点$\boldsymbol{A}$：动点 　　基点不动

$$\vec v_{1A} = \vec v^{\mathrm{r}}_{1A} + \cancel{\vec v^{\mathrm{e}}_{1A}} + \vec v^{\mathrm{e}}_{1\omega A} = \vec v^{\mathrm{r}}_{1A} + \vec v^{\mathrm{e}}_{1\omega A}$$

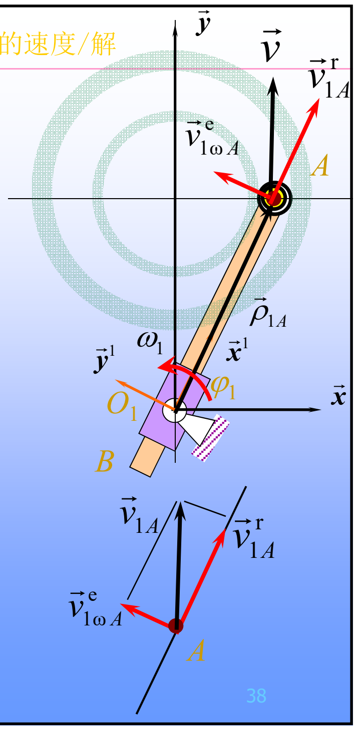
$\vec v^{\mathrm{r}}_{1A}$ 　　设定正向

$\vec v^{\mathrm{e}}_{1\omega A}$ 　　设定正向

$$\rho_{1A} = \frac{R}{\cos\varphi_1}$$

$$v^{\mathrm{e}}_{1\omega A} = \omega_1 \rho_{1A}$$

$$v^{\mathrm{e}}_{1\omega A} = \frac{\omega_1 R}{\cos\varphi_1}$$



[解]

速度分析

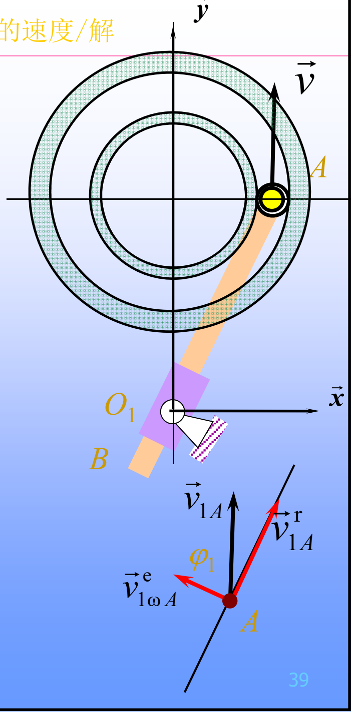
定基 $O_1-\vec{e}$　　套筒$\mathbf{B}_1$(动基) $O_1-\vec{e}^{\,1}$

在套筒$\mathbf{B}_1$上考察点A：动点

$$\vec{v}_{1A}=\vec{v}^{\,\mathrm{r}}_{1A}+\vec{v}^{\,\mathrm{e}}_{1\mathrm{t}A}+\vec{v}^{\,\mathrm{e}}_{1\omega A}=\vec{v}^{\,\mathrm{r}}_{1A}+\vec{v}^{\,\mathrm{e}}_{1\omega A}$$

在定基考察点A，绝对速度

$$\vec{v}=\vec{v}_{1A}=\vec{v}^{\,\mathrm{r}}_{1A}+\vec{v}^{\,\mathrm{e}}_{1\omega A}$$



$$\vec{v}=\vec{v}^{\,\mathrm{r}}_{1A}+\vec{v}^{\,\mathrm{e}}_{1\omega A}$$

$$v^{\mathrm{e}}_{1\omega A}=\frac{\omega_1 R}{\cos\varphi_1}$$

在动基上的坐标式

$\vec{x}^{\,1}$: $$v\sin\varphi_1=v^{\mathrm{r}}_{1A}$$

$\vec{y}^{\,1}$: $$v\cos\varphi_1=v^{\mathrm{e}}_{1\omega A}$$

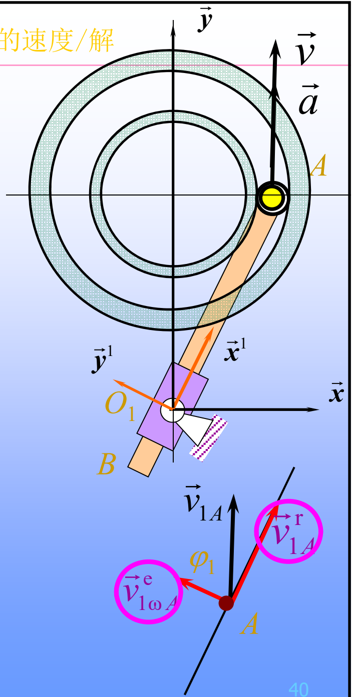
$$\varphi_1=\frac{\pi}{3}$$

$$v\cos\varphi_1=\frac{\omega_1 R}{\cos\varphi_1}$$

$$v^{\mathrm{r}}_{1A}=\frac{v\sqrt{3}}{2}$$

$$\omega_1=\frac{v\cos^2\varphi_1}{R}$$

$$\omega_1=\frac{3v}{4R}$$

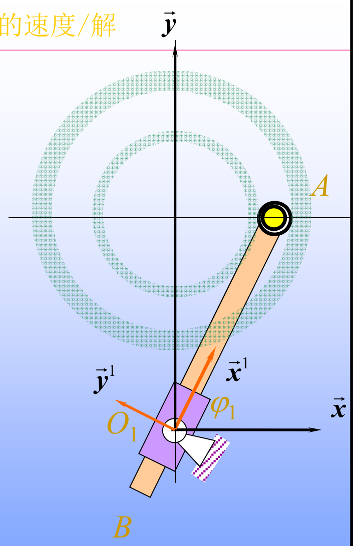


加速度分析

在套筒$\mathbf{B_1}$上考察点$\boldsymbol{A}$：动点　　基点不动

$$\vec a_{1A}=\vec a^{\rm r}_{1A}+\cancel{\vec a^{\rm e}_{1A}}+\vec a^{\rm e}_{1\alpha A}+\vec a^{\rm e}_{1\omega A}+\vec a^{\rm C}_{1A}$$

$$\vec a_{1A}=\vec a^{\rm r}_{1A}+\vec a^{\rm e}_{1\alpha A}+\vec a^{\rm e}_{1\omega A}+\vec a^{\rm C}_{1A}$$



$$\vec a_{1A}=\vec a^{\rm r}_{1A}+\vec a^{\rm e}_{1\alpha A}+\vec a^{\rm e}_{1\omega A}+\vec a^{\rm C}_{1A}$$

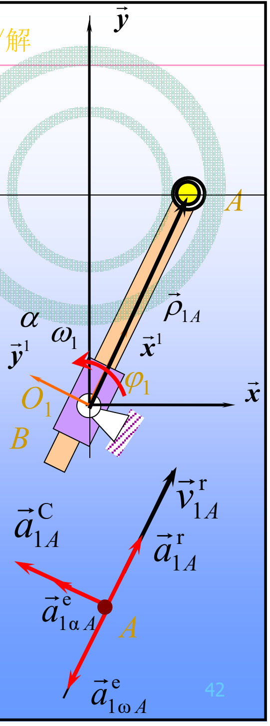
$$\omega_1=\frac{3v}{4R}\qquad v^{\rm r}_{1A}=\frac{v\sqrt3}{2}\qquad \varphi_1=\frac{\pi}{3}$$

$\vec a^{\rm r}_{1A}$　设定正向

$\vec a^{\rm e}_{1\omega A}$　设定正向　　$a^{\rm e}_{1\omega A}=\omega_1^2\rho_{1A}=\dfrac{\omega_1^2R}{\cos\varphi_1}=\dfrac{v^2}{8R}$

$\vec a^{\rm e}_{1\alpha A}$　设定正向　　$a^{\rm e}_{1\alpha A}=\alpha_1\rho_{1A}=\dfrac{\alpha_1R}{\cos\varphi_1}$

$\vec a^{\rm C}_{1A}$　正向已知　　$a^{\rm C}_{1A}=2\omega_1v^{\rm r}_{1A}=\dfrac{\sqrt3v^2}{4R}$



$$\vec{a}_{1A} = \vec{a}^{\mathrm{r}}_{1A} + \vec{a}^{\mathrm{e}}_{1\alpha A} + \vec{a}^{\mathrm{e}}_{1\omega A} + \vec{a}^{\mathrm{C}}_{1A}$$

$$a^{\mathrm{e}}_{1\omega A} = \frac{v^2}{8R} \qquad a^{\mathrm{e}}_{1\alpha A} = \frac{\alpha_1 R}{\cos\phi_1} \qquad a^{\mathrm{C}}_{1A} = \frac{\sqrt{3}v^2}{4R}$$

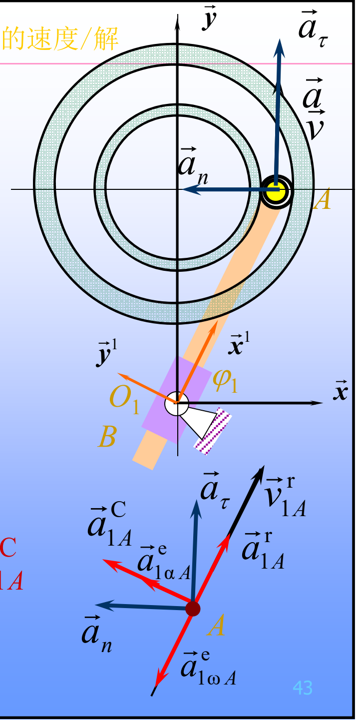
点A的绝对运动为圆周运动

点A的绝对加速度 $\vec{a}_A = \vec{a}_\tau + \vec{a}_n$

$$\vec{a}_\tau \qquad a_\tau = a \qquad \vec{a}_n \quad a_n = \frac{v^2}{R}$$

$$\vec{a}_A = \vec{a}_{1A}$$

$$\vec{a}_\tau + \vec{a}_n = \vec{a}^{\mathrm{r}}_{1A} + \vec{a}^{\mathrm{e}}_{1\alpha A} + \vec{a}^{\mathrm{e}}_{1\omega A} + \vec{a}^{\mathrm{C}}_{1A}$$



$$\vec{a}_\tau + \vec{a}_n = \vec{a}^{\mathrm{r}}_{1A} + \vec{a}^{\mathrm{e}}_{1\alpha A} + \vec{a}^{\mathrm{e}}_{1\omega A} + \vec{a}^{\mathrm{C}}_{1A}$$

$$a^{\mathrm{e}}_{1\omega A} = \frac{v^2}{8R} \qquad a^{\mathrm{e}}_{1\alpha A} = \frac{\alpha_1 R}{\cos\varphi_1} \qquad a^{\mathrm{C}}_{1A} = \frac{\sqrt{3}v^2}{4R} \qquad \varphi_1 = \frac{\pi}{3}$$

$$a_\tau = a \qquad a_n = \frac{v^2}{R}$$

未知 $a^{\mathrm{r}}_{1A} \quad \alpha_1 \quad (a^{\mathrm{e}}_{1\alpha A})$

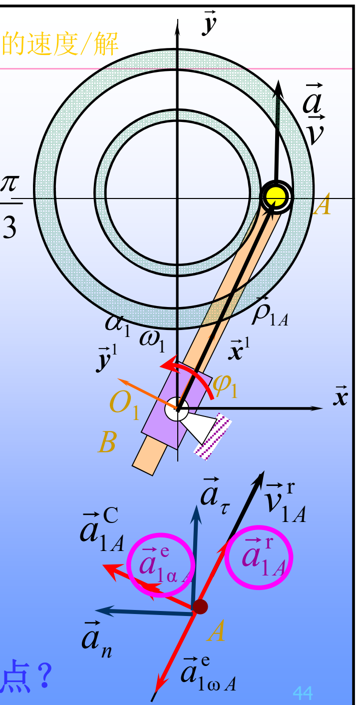
在动基上的坐标式

$$\vec{x}^1:\ a_\tau \sin\varphi_1 - a_n \cos\varphi_1 = a^{\mathrm{r}}_{1A} - a^{\mathrm{e}}_{1\omega A}$$

$$\vec{y}^1:\ a_\tau \cos\varphi_1 + a_n \sin\varphi_1 = a^{\mathrm{C}}_{1A} + a^{\mathrm{e}}_{1\alpha A}$$

$$a^{\mathrm{r}}_{1A} = \frac{\sqrt{3}}{2}a - \frac{3v^2}{8R} \qquad \alpha_1 = \frac{a}{4R} + \frac{\sqrt{3}v^2}{8R^2}$$

可否选其它兴趣点？



[例]

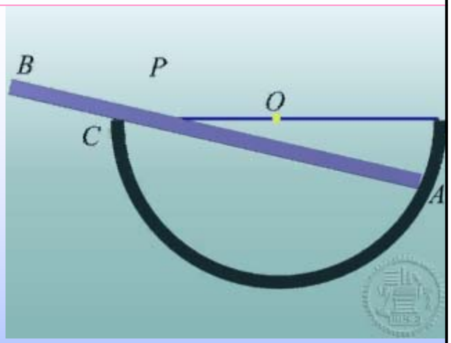
杆AB斜搁在一半径为R的半圆槽内。杆AB的A端以匀速沿圆周运动，同时B端在半圆槽点C处滑动。

图示瞬时，杆AB与半圆槽口的夹角为θ

求此时

杆AB的角速度与角加速度

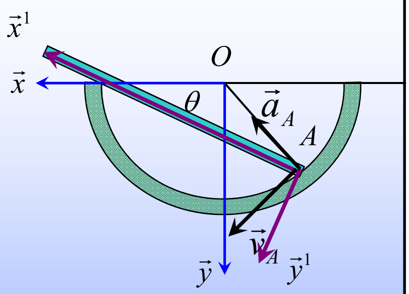
杆AB上与点C接触的点P的速度与加速度



[解]

定基 $O-\vec{e}$

动基: 杆连体基 $A-\vec{e}^1$



点A的绝对运动已知: 匀速圆周运动

点A的切向速度 $v_A = v$

点A的加速度:向心加速度 $a_A = \dfrac{v^2}{R}$

速度分析

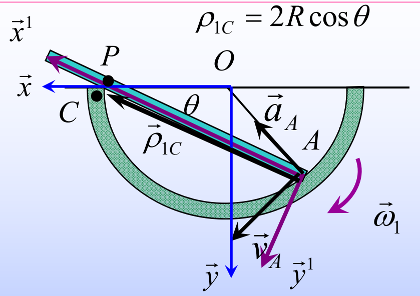
$\rho_{1C} = 2R\cos\theta$

对于动基 $\vec{e}^{1}$ 点C为兴趣点

$\vec{v}_{1C} = \vec{v}_{1C}^{\mathrm{r}} + \vec{v}_{1tC}^{\mathrm{e}} + \vec{v}_{1\omega C}^{\mathrm{e}}$

$\vec{v}_{1C} = \vec{0}$ 绝对不动

$\vec{0} = \vec{v}_{1C}^{\mathrm{r}} + \vec{v}_{1tC}^{\mathrm{e}} + \vec{v}_{1\omega C}^{\mathrm{e}}$

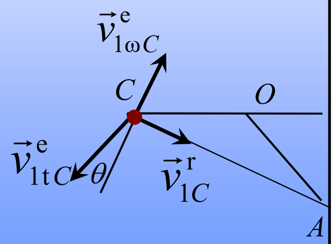


$\vec{v}_{1C}^{\mathrm{r}}$ 点C相对杆作直线运动 定义正向

$v_{1tC}^{\mathrm{e}} = v_A$

$\vec{v}_{1\omega C}^{\mathrm{e}}$ $\vec{\omega}_1$ 定义正向

$v_{1\omega C}^{\mathrm{e}} = \omega_1\rho_{1C} = 2R\omega_1\cos\theta$



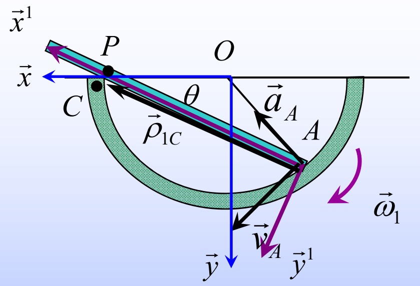
对于动基 $\vec{e}^{1}$ 点C为兴趣点

$v_{1\omega C}^{\mathrm{e}} = \omega_1\rho_{1C} = 2R\omega_1\cos\theta$

$v_{1tC}^{\mathrm{e}} = v_A = v$

$\vec{v}_{1C}^{\mathrm{r}}$ 点C相对沿x^1轴滑动 定义正向

$\vec{0} = \vec{v}_{1C}^{\mathrm{r}} + \vec{v}_{1tC}^{\mathrm{e}} + \vec{v}_{1\omega C}^{\mathrm{e}}$



未知 v_{1C}^{r} ω_1 $(v_{1\omega C}^{\mathrm{e}})$

在动基上的坐标式

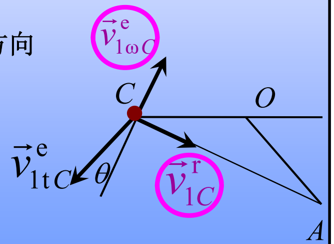
杆上点P速度反方向 ?

$\vec{x}^{1}$: $0 = -v_{1C}^{\mathrm{r}} + v\sin\theta$ $\quad v_{1C}^{\mathrm{r}} = v\sin\theta$

$\vec{y}^{1}$: $0 = -v_{1\omega C}^{\mathrm{e}} + v\cos\theta$ $\quad \omega_1 = \dfrac{v}{2R}$

$2R\omega_1\cos\theta = v\cos\theta$

杆的角速度



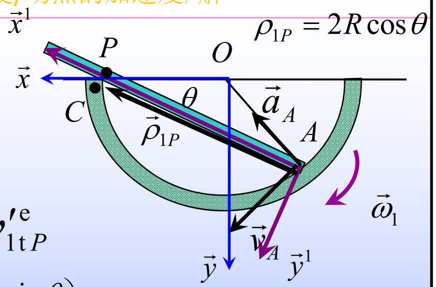
点P为给定点

$$\vec{v}_{1P} = \vec{v}^{\mathrm{e}}_{1\mathrm{t}P} + \vec{v}^{\mathrm{e}}_{1\omega P}$$

$$v^{\mathrm{e}}_{1\mathrm{t}P} = v_A = v$$

$$v^{\mathrm{e}}_{1\omega P} = \omega_1 \rho_{1P} = v\cos\theta \qquad \omega_1 = \frac{v}{2R}$$

$\rho_{1P} = 2R\cos\theta$

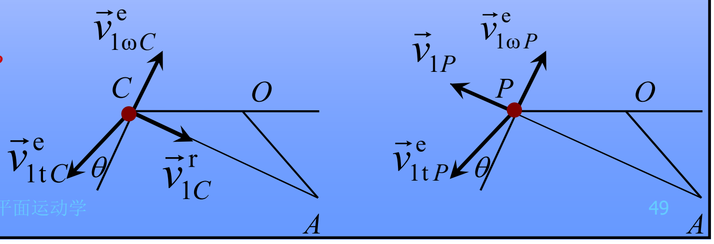


在动基上的坐标式 $\boldsymbol{v}'_{1P} = \boldsymbol{v}'^{\mathrm{e}}_{1\omega P} + \boldsymbol{v}'^{\mathrm{e}}_{1\mathrm{t}P}$

$$\begin{pmatrix} v'_{1Px} \\ v'_{1Py} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -v\cos\theta \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} v\sin\theta \\ v\cos\theta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v\sin\theta \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$v_{1P} = v\sin\theta \qquad v^{\mathrm{r}}_{1C} = v\sin\theta$$

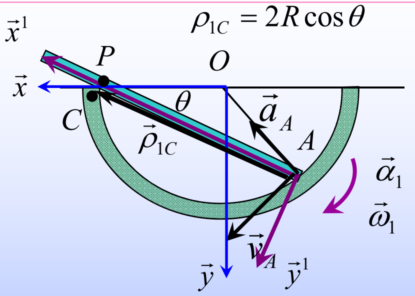
$$\vec{v}^{\mathrm{r}}_{1C} = -\vec{v}_{1P}$$



加速度分析

对于动基 $\vec{e}^1$ 点C为兴趣点

$\rho_{1C} = 2R\cos\theta$



$$\vec{a}_{1C} = \vec{a}^{\mathrm{r}}_{1C} + \vec{a}^{\mathrm{e}}_{1\mathrm{t}C} + \vec{a}^{\mathrm{e}}_{1\alpha C} + \vec{a}^{\mathrm{e}}_{1\omega C} + \vec{a}^{\mathrm{C}}_{1C}$$

$\vec{a}_{1C} = \vec{0}$ 绝对不动

$\vec{a}^{\mathrm{r}}_{1C}$ 点C相对沿x^1轴滑动 定义正向

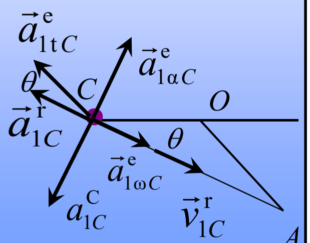
$\vec{a}^{\mathrm{e}}_{1\mathrm{t}C}$ $a^{\mathrm{e}}_{1\mathrm{t}C} = a_A = \frac{v^2}{R}$ 方向已知

$\vec{a}^{\mathrm{e}}_{1\alpha C}$ $\vec{\alpha}_1$ 定义正向 $\omega_1 = \frac{v}{2R}$

$$a^{\mathrm{e}}_{1\alpha C} = \alpha_1 \rho_{1C} = 2R\omega_1\cos\theta = v\cos\theta$$

$\vec{a}^{\mathrm{e}}_{1\omega C}$ $a^{\mathrm{e}}_{1\omega C} = \omega_1^2 \rho_{1C} = \frac{v^2\cos\theta}{2R}$ 方向已知

$\vec{a}^{\mathrm{C}}_{1C}$ $a^{\mathrm{C}}_{1C} = 2\omega_1 v^{\mathrm{r}}_{1C} = \frac{v^2\sin\theta}{R}$ 方向已知



$$v^{\mathrm{r}}_{1C} = v\sin\theta$$

相对刚体运动任意点的位置、速度与加速度/动点的加速度/解

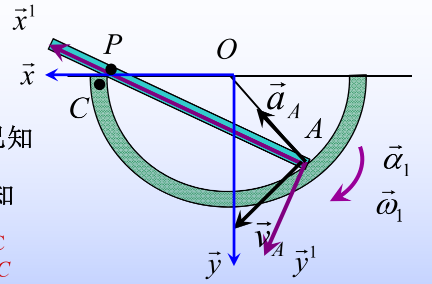
$\vec a^{\mathrm r}_{1C}$ 点C相对沿x^1轴滑动 定义正向

$a^{\mathrm e}_{1\mathrm tC} = \underline{a_A} = v^2/R$ 方向已知

$a^{\mathrm e}_{1\alpha C} = \alpha_1\rho_{1C} = \underline{2R\alpha_1\cos\theta}$

$a^{\mathrm e}_{1\omega C} = \omega_1^2\rho_{1C} = \underline{v^2\cos\theta/2R}$ 方向已知

$a^{\mathrm C}_{1C} = 2\omega_1 v^{\mathrm r}_{1C} = \underline{v^2\sin\theta/R}$ 方向已知



$$\vec 0 = \vec a^{\mathrm r}_{1C} + \vec a^{\mathrm e}_{1\mathrm tC} + \vec a^{\mathrm e}_{1\alpha C} + \vec a^{\mathrm e}_{1\omega C} + \vec a^{\mathrm C}_{1C}$$

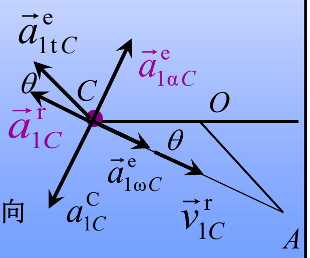
在动基上的坐标式

$\vec x^1:\quad 0 = a^{\mathrm r}_{1C} + \underline{a_A}\cos\theta - \underline{a^{\mathrm e}_{1\omega C}}$

$\vec y^1:\quad 0 = -\cancel{\underline{a_A}\sin\theta} - \underline{a^{\mathrm e}_{1\alpha C}} + \cancel{\underline{a^{\mathrm C}_{1C}}}$

$$a^{\mathrm r}_{1C} = -\frac{v^2\cos\theta}{2R}$$ 杆上点P的加速度反方向 ?

$\alpha_1 = 0$ 杆的角加速度



相对刚体运动任意点的位置、速度与加速度/动点的加速度/解

点P为给定点加速度

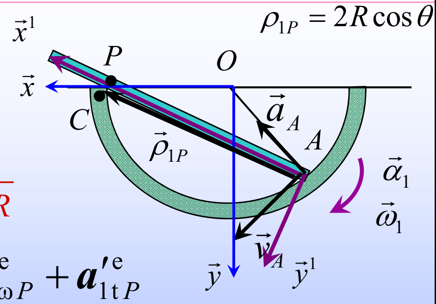
$\vec a_{1P} = \vec a^{\mathrm e}_{1\mathrm tP} + \vec a^{\mathrm e}_{1\alpha P} + \vec a^{\mathrm e}_{1\omega P}$

$\rho_{1P} = 2R\cos\theta$

$a^{\mathrm e}_{1\mathrm tP} = a_A = \dfrac{v^2}{R}$ $\alpha_1 = 0$

$a^{\mathrm e}_{1\alpha P} = \alpha_1\rho_{1P} = \cancel{2R\alpha_1\cos\theta}$ $\omega_1 = \dfrac{v}{2R}$

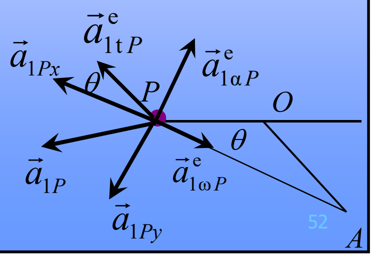
$a^{\mathrm e}_{1\omega P} = \omega_1^2\rho_{1P} = \dfrac{v^2\cos\theta}{2R}$



在动基上的坐标式 $\boldsymbol a'_{1P} = \boldsymbol a'^{\mathrm e}_{1\omega P} + \boldsymbol a'^{\mathrm e}_{1\mathrm tP}$

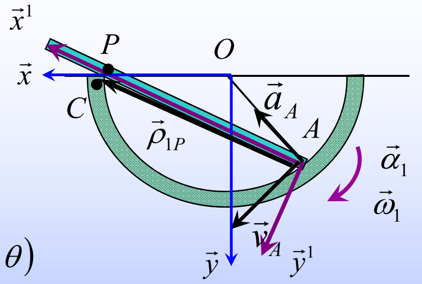
$$\begin{pmatrix} a'_{1Px} \\ a'_{1Py} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -v^2\cos\theta/2R \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} v^2\cos\theta/R \\ -v^2\sin\theta/R \end{pmatrix}$$

$$= \frac{v^2}{2R}\begin{pmatrix} \cos\theta \\ -2\sin\theta \end{pmatrix}$$



在动基上的坐标式

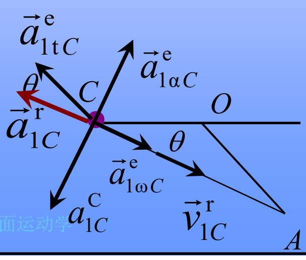
$$\begin{pmatrix}a'_{1Px}\\ a'_{1Py}\end{pmatrix}=\frac{v^2}{2R}\begin{pmatrix}\cos\theta\\ -2\sin\theta\end{pmatrix}$$

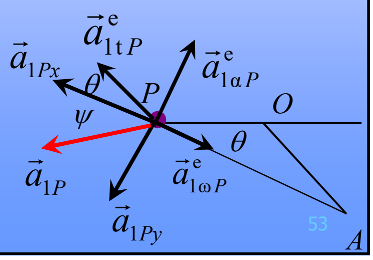


$$a_{1P}=\sqrt{a_{1Px}^2+a_{1Py}^2}=\frac{v^2}{2R}\sqrt{1+3\sin^2\theta}$$

$$\psi=\arctan\left(a_{1Py}/a_{1Px}\right)=\arctan\left(-2\tan\theta\right)$$

$$a_{1C}^{\mathrm{r}}=-\frac{v^2\cos\theta}{2R}\qquad \vec{a}_{1C}^{\mathrm{r}}\neq-\vec{a}_{1P}$$





- 动点的速度与加速度的关系小结

$$\vec{v}_P=\vec{v}_P^{\mathrm{r}}+\vec{v}_{\mathrm{t}P}^{\mathrm{e}}+\vec{v}_{\omega P}^{\mathrm{e}}$$

4个矢量的**8**个信息量间的关系。通过矢量几何可解决其中**2**个未知的信息量。

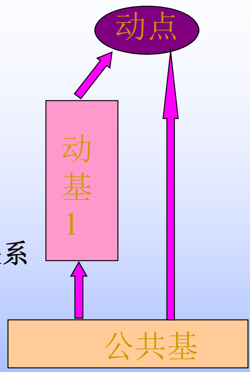
$$\vec{a}_P=\vec{a}_P^{\mathrm{r}}+\vec{a}_P^{\mathrm{C}}+\vec{a}_{\mathrm{t}P}^{\mathrm{e}}+\vec{a}_{\alpha P}^{\mathrm{e}}+\vec{a}_{\omega P}^{\mathrm{e}}$$

6个矢量间的关系,考虑到后两个转动牵连加速度在方向上必须相互垂直的关系，通过矢量几何可解决**11**个信息量中**2**个未知的信息量。

- 刚体矢量瞬时分析方法小结
  - 基本原理： $\vec{v}_P = \vec{v}_P^{\mathrm{r}} + \vec{v}_{\mathrm{t}P}^{\mathrm{e}} + \vec{v}_{\omega P}^{\mathrm{e}}$

    $\vec{a}_P = \vec{a}_P^{\mathrm{r}} + \vec{a}_P^{\mathrm{C}} + \vec{a}_{\mathrm{t}P}^{\mathrm{e}} + \vec{a}_{\alpha P}^{\mathrm{e}} + \vec{a}_{\omega P}^{\mathrm{e}}$

    通过矢量几何可解决2个未知的信息量
  - 根据问题的要求合理的选定动基
    - 已知动基的运动求动点相对运动与绝对运动的关系
    - 已知动点的相对运动与绝对运动求动基的运动
  - 关键：动点的选定
    - 动点绝对运动清楚
    - 动点的相对运动清楚
  - 仔细的分析相对运动与绝对运动的矢量几何关系
    - 矢量关系图
    - 合理选定矢量基，正确写出坐标式



相对刚体运动的任意点位置、速度与加速度

- 前言
- 动点的位置
- 动点的速度
- 动点的加速度
- **刚体系运动学矢量瞬时分析方法**

刚体系运动学的矢量瞬时分析方法

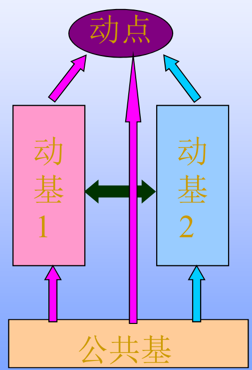
- 给定点速度与加速度关系是动点相应关系的特殊情况，具有普遍意义

$$\vec{v}_P = \vec{v}_P^{\mathrm{r}} + \vec{v}_{\mathrm{t}P}^{\mathrm{e}} + \vec{v}_{\omega P}^{\mathrm{e}} \qquad \vec{a}_P = \vec{a}_P^{\mathrm{r}} + \vec{a}_P^{\mathrm{C}} + \vec{a}_{\mathrm{t}P}^{\mathrm{e}} + \vec{a}_{\alpha P}^{\mathrm{e}} + \vec{a}_{\omega P}^{\mathrm{e}}$$

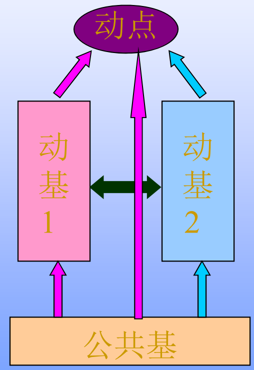
$$\vec{v}_P^{\mathrm{r}} = \vec{0} \qquad \Downarrow \qquad \vec{a}_P^{\mathrm{r}} = \vec{a}_P^{\mathrm{C}} = \vec{0}$$

$$\vec{v}_P = \vec{v}_{\mathrm{t}P}^{\mathrm{e}} + \vec{v}_{\omega P}^{\mathrm{e}} \qquad \vec{a}_P = \vec{a}_{\mathrm{t}P}^{\mathrm{e}} + \vec{a}_{\alpha P}^{\mathrm{e}} + \vec{a}_{\omega P}^{\mathrm{e}}$$

- 矢量瞬时分析方法可解决的问题
  - 在已知动基运动的情况下，求动点的绝对运动与其相对运动间的关系
  - 已知动点的相对运动与绝对运动求动基的运动
  - 如果有两个动基与一个公共参考基，通过动点在公共基下的绝对速度与加速度一致的原理，可在两个刚体(动基)的运动学间建立起关系

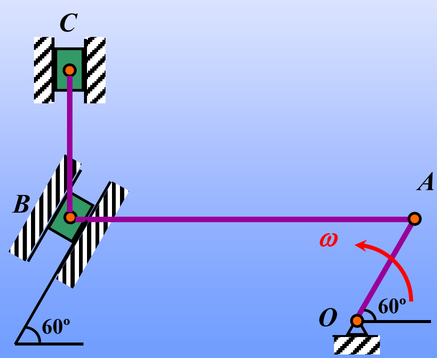


- 某个兴趣点在动基上的类型
  - 固结在动基1、动基2上的同一个点
  - 动基1上的固定点，动基2上的动点
  - 动基1、动基2上均为动点



[例]

配气机构中，$OA = r$，匀速转动， 在某瞬时 $\varphi = 60^\circ$。$AB \perp BC$, $AB = 6r$, $BC = 3\sqrt{3}\,r$。求该瞬时滑块C的速度和加速度。



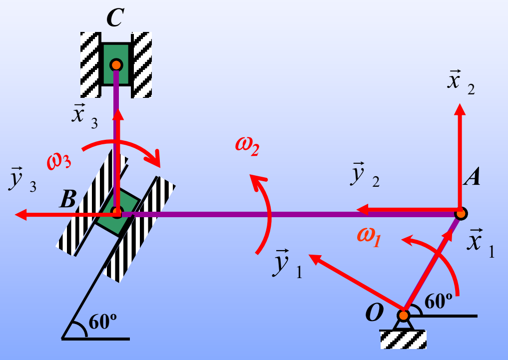
[解] 速度分析

每个刚体只建立1个连体基

已知信息最多的点为连体基基点

连体基

$O-\vec{e}_1 \quad A-\vec{e}_2 \quad B-\vec{e}_3$

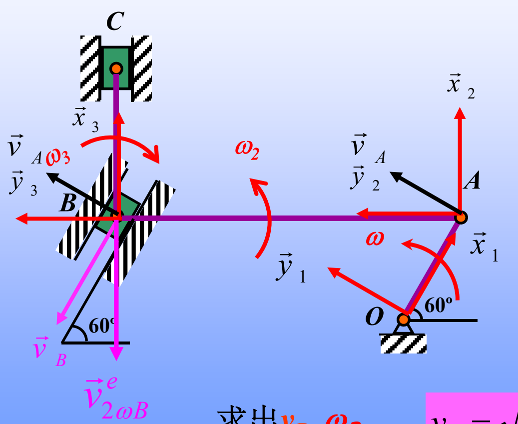


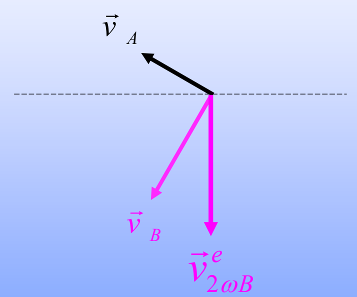
$$\vec{v}_C = \vec{v}_{3C} = \vec{v}_{3tC}^e + \vec{v}_{3\omega C}^e$$
$$= \vec{v}_B + \vec{v}_{3\omega C}^e$$

需先求出v_B

$$\vec{v}_B = \vec{v}_{2B} = \vec{v}_{2tB}^e + \vec{v}_{2\omega B}^e$$
$$= \vec{v}_A + \vec{v}_{2\omega B}^e$$

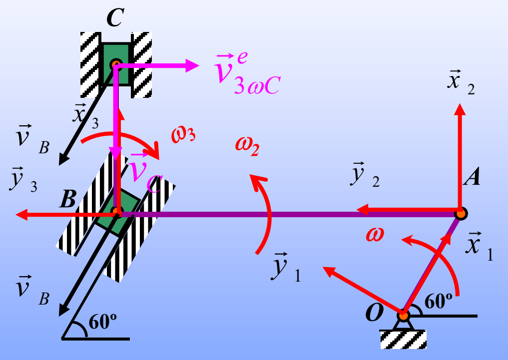
$$\vec{v}_B = \vec{v}_{2B} = \vec{v}_{2tB}^e + \vec{v}_{2\omega B}^e = \vec{v}_A + \vec{v}_{2\omega B}^e$$

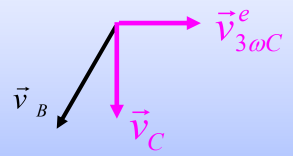




求出v_B, ω_2 $\quad v_B = \sqrt{3}r\omega \quad \omega_2 = \frac{\omega}{3}$

$$\vec{v}_C = \vec{v}_{3C} = \vec{v}^{e}_{3tC} + \vec{v}^{e}_{3\omega C} = \vec{v}_B + \vec{v}^{e}_{3\omega C}$$



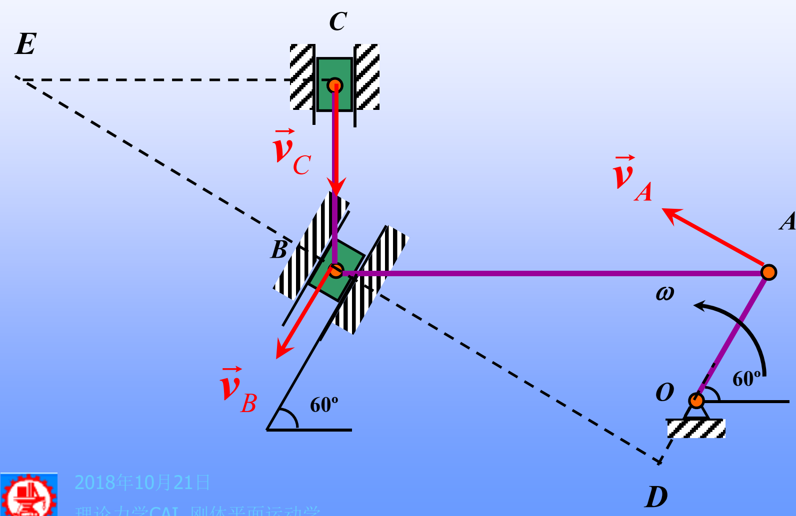


求出v_C, ω_3

$$v_C = \frac{3}{2} r\omega \qquad \omega_3 = \frac{\omega}{6}$$

速度分析：瞬心法

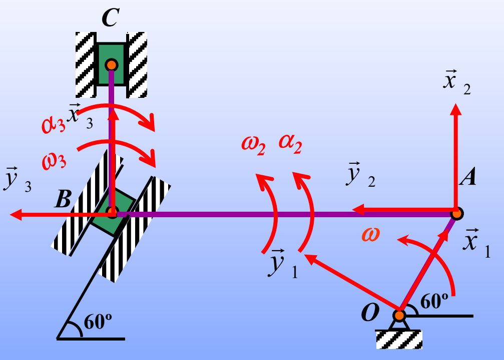
$$v_B = \sqrt{3} r\omega \qquad v_c = \frac{3}{2} r\omega \qquad \omega_{AB} = \frac{\omega}{3} \qquad \omega_{BC} = \frac{\omega}{6}$$



加速度分析：

每个刚体只建立1个连体基

已知信息最多的点为连体基基点



$$\vec{a}_C = \vec{a}_{3C}$$

$$= \vec{a}_{3tC}^e + \vec{a}_{3\omega C}^e + \vec{a}_{3\alpha C}^e$$

$$= \vec{a}_B + \vec{a}_{3\omega C}^e + \vec{a}_{3\alpha C}^e$$

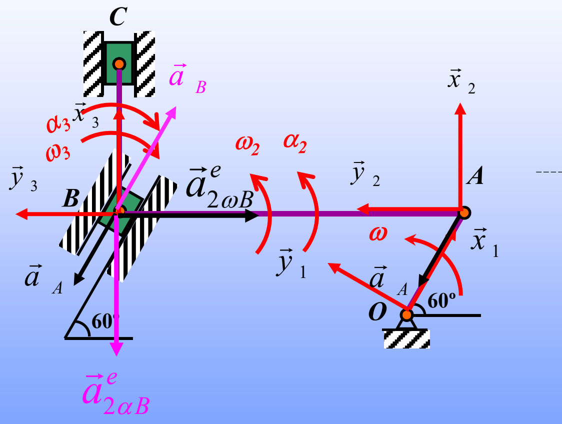
需先求出$\boldsymbol{a_B}$

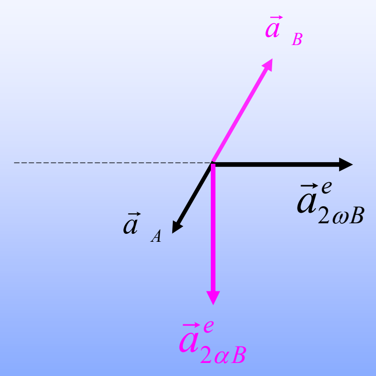
$$\vec{a}_B = \vec{a}_{2B}$$

$$= \vec{a}_{2tB}^e + \vec{a}_{2\omega B}^e + \vec{a}_{2\alpha B}^e$$

$$= \vec{a}_A + \vec{a}_{2\omega B}^e + \vec{a}_{2\alpha B}^e$$

$$\vec{a}_B = \vec{a}_{2B} = \vec{a}_{2tB}^e + \vec{a}_{2\omega B}^e + \vec{a}_{2\alpha B}^e = \vec{a}_A + \vec{a}_{2\omega B}^e + \vec{a}_{2\alpha B}^e$$



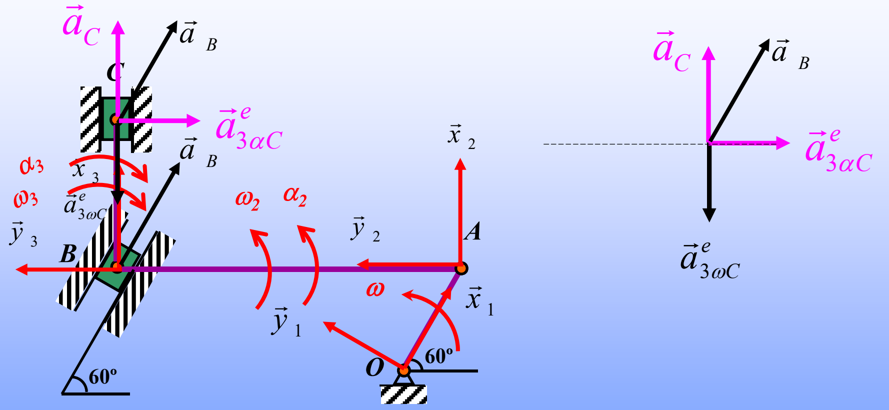


$$a_A = \omega^2 r, a_{2\omega B}^e = 6\omega_2^2 r, a_{2\alpha B}^e = 6\alpha_2 r$$

求出a_B

$$a_B = \frac{\omega^2 r}{3}$$

$$\vec{a}_C = \vec{a}_{3C} = \vec{a}^e_{3tC} + \vec{a}^e_{3\omega C} + \vec{a}^e_{3\alpha C} = \vec{a}_B + \vec{a}^e_{3\omega C} + \vec{a}^e_{3\alpha C}$$



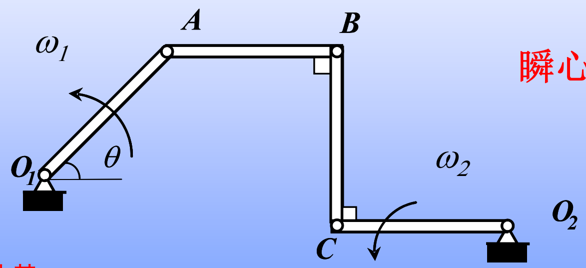
$$a^e_{3\omega C} = 3\sqrt{3}\omega_3^2 r$$

求出a_C

$$a_C = \frac{\sqrt{3}\omega^2 r}{12}$$

[例]

如图所示，四根杆子长度均为$l=0.4m$，通过平面铰链连接。主动杆O_1A、O_2C均作匀速转动，角速度$\omega_1=5rad/s$, $\omega_2=3rad/s$。求图示位置AB杆、BC杆的角速度（tgθ=4/3）。



瞬心法?

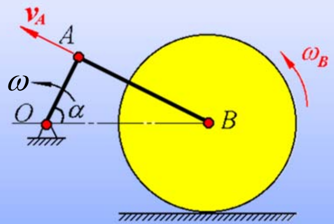
在两个连体基上考察B点

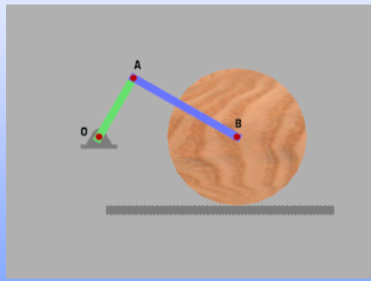
$\omega_{BC} = 4rad/s$ 逆时针

$\omega_{AB} = 6rad/s$ 顺时针

[例]

曲柄滚轮机构，滚子半径R=15cm, 曲柄转速 n =60 r/min，OA=15cm。
求：当α = 60°时 ($OA \perp AB$), 滚轮的ω_B， α_B.





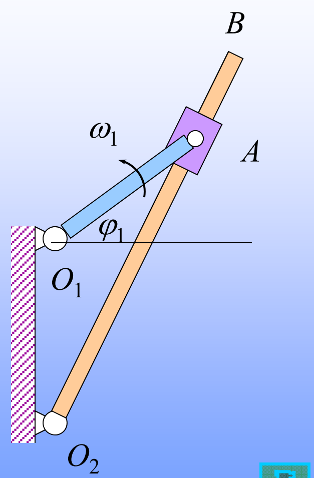
$$\omega_B = 4\sqrt{3}\pi / 3 = 7.25 rad/s$$

$$\alpha_B = a_B / BC_2 = 131.5/15 = 8.77 \mathrm{rad/s^2}$$

[例]

图示为一急回机构

已知长为l_1的曲柄O_1A以匀角速度ω_1转动，杆端为一个套筒，它可绕A自由转动，套筒穿在摇杆O_2B上，相对摇杆它又能相对滑动。令O_1 与 O_2 的间距也为l_1



图示瞬时曲柄的转角为φ_1=π/6

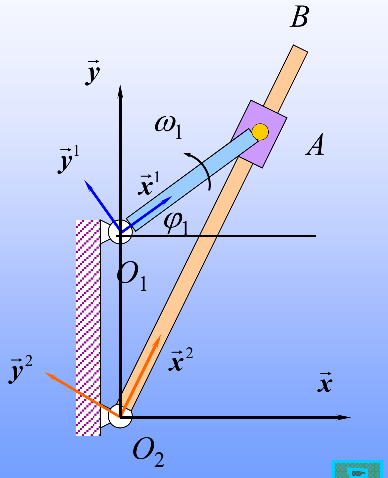
求：此瞬时

摇杆O_2B 的角速度ω_2 与角加速度α_2

套筒在摇杆上的滑动速度与加速度

[解] 速度分析

定基 $O_2-\vec{e}$　　曲柄B_1(动基1) $O_1-\vec{e}^1$　　摇杆B_2(动基2) $O_2-\vec{e}^2$



刚体系运动学矢量瞬时分析方法/解

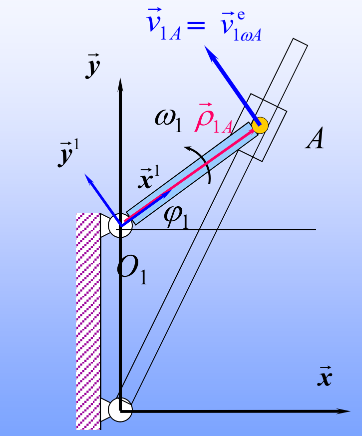
[解] 速度分析

定基 $O_2-\vec{e}$　　曲柄B_1(动基1) $O_1-\vec{e}^1$　　摇杆B_2(动基2) $O_2-\vec{e}^2$

在曲柄B_1上考察点A：给定点

$\vec{v}_{1A}=\cancel{\vec{v}^{e}_{1tA}}+\vec{v}^{e}_{1\omega A}=\vec{v}^{e}_{1\omega A}$　　基点不动

$\vec{v}^{e}_{1\omega A}$：　$v^{e}_{1\omega A}=\omega_1 l_1$　　方向已知



定基 曲柄B_1(动基1) 摇杆B_2(动基2)

$O_2-\vec{e}$ $O_1-\vec{e}^1$ $O_2-\vec{e}^2$

在曲柄B_1上考察点A：给定点

$\vec{v}_{1A}=\cancel{\vec{v}^{\mathrm{e}}_{1tA}}+\vec{v}^{\mathrm{e}}_{1\omega A}=\underline{\vec{v}^{\mathrm{e}}_{1\omega A}}$ 基点不动

$\vec{v}^{\mathrm{e}}_{1\omega A}$： $v^{\mathrm{e}}_{1\omega A}=\omega_1 l_1$ 方向已知

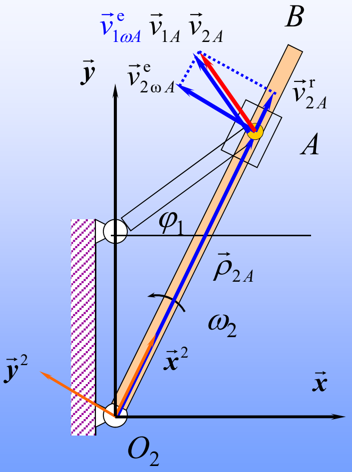
在摇杆B_2上考察点A：动点 基点不动

$\vec{v}_{2A}=\vec{v}^{\mathrm{r}}_{2A}+\cancel{\vec{v}^{\mathrm{e}}_{2tA}}+\vec{v}^{\mathrm{e}}_{2\omega A}=\underline{\vec{v}^{\mathrm{r}}_{2A}+\vec{v}^{\mathrm{e}}_{2\omega A}}$

$\vec{v}^{\mathrm{r}}_{2A}$：套筒相对运动为平动 设定正向

$\vec{v}^{\mathrm{e}}_{2\omega A}$： $v^{\mathrm{e}}_{2\omega A}=\omega_2\rho_{2A}$ 设定正向

$\underline{\vec{v}_{1A}}=\underline{\vec{v}_{2A}}$ $\vec{v}^{\mathrm{e}}_{1\omega A}=\vec{v}^{\mathrm{r}}_{2A}+\vec{v}^{\mathrm{e}}_{2\omega A}$



$\rho_{2A}=2l_1\cos\varphi_1$

$v^{\mathrm{e}}_{1\omega A}=\underline{\omega_1 l_1}$ $v^{\mathrm{e}}_{2\omega A}=\omega_2\rho_{2A}=\underline{2\omega_2 l_1\cos\varphi_1}$ $\rho_{2A}=2l_1\cos\phi_1$

$\vec{v}^{\mathrm{e}}_{1\omega A}=\vec{v}^{\mathrm{r}}_{2A}+\vec{v}^{\mathrm{e}}_{2\omega A}$

未知 v^{r}_{2A} ω_2 $(v^{\mathrm{e}}_{2\omega A})$

在 $\vec{e}^2$ 上的坐标式

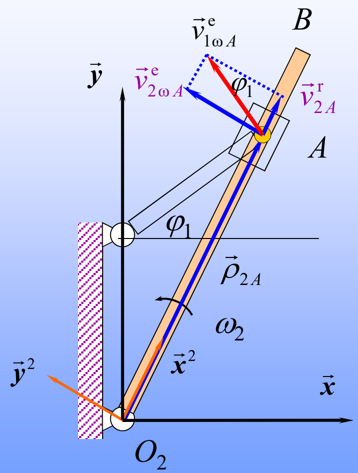
$\vec{x}^2$： $\underline{v^{\mathrm{e}}_{1\omega A}}\sin\varphi_1=v^{\mathrm{r}}_{2A}$

$\vec{y}^2$： $\underline{v^{\mathrm{e}}_{1\omega A}}\cos\varphi_1=\underline{v^{\mathrm{e}}_{2\omega A}}$

$\varphi_1=\pi/6$

$\omega_2=\dfrac{\omega_1}{2}$ $v^{\mathrm{r}}_{2A}=\dfrac{\omega_1 l_1}{2}$

摇杆O_2B 的角速度 套筒相对滑动速度



[解] 加速度分析

在摇杆$\mathbf{B}_2$上考察点A：动点　基点不动

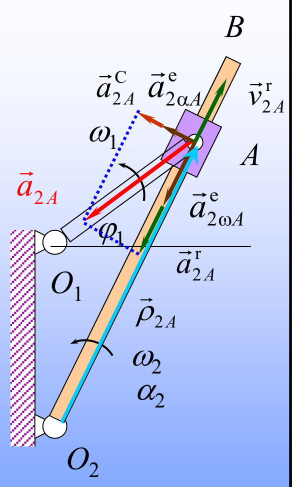
$$\vec{a}_{2A}=\vec{a}^{\mathrm{r}}_{2A}+\cancel{\vec{a}^{\mathrm{e}}_{2\mathrm{t}A}}+\vec{a}^{\mathrm{e}}_{2\alpha A}+\vec{a}^{\mathrm{e}}_{2\omega A}+\vec{a}^{\mathrm{C}}_{2A}$$

$\vec{a}^{\mathrm{e}}_{2\omega A}$：　$a^{\mathrm{e}}_{2\omega A}=\omega_2^2\rho_{2A}$　方向已知

$\vec{a}^{\mathrm{e}}_{2\alpha A}$：　$a^{\mathrm{e}}_{2\omega A}=\alpha_2\rho_{2A}$　设定正向

$\vec{a}^{\mathrm{C}}_{2A}$：　$a^{\mathrm{C}}_{2A}=2\omega_2 v^{\mathrm{r}}_{2A}$　方向已知

$\vec{a}^{\mathrm{r}}_{2A}$：　套筒相对运动为平动　设定正向



$$\rho_{2A}=2l_1\cos\varphi_1$$

[解] 加速度分析

在摇杆$\mathbf{B}_2$上考察点A：动点　基点不动

$$\vec{a}_{2A}=\vec{a}^{\mathrm{r}}_{2A}+\cancel{\vec{a}^{\mathrm{e}}_{2\mathrm{t}A}}+\vec{a}^{\mathrm{e}}_{2\alpha A}+\vec{a}^{\mathrm{e}}_{2\omega A}+\vec{a}^{\mathrm{C}}_{2A}$$

$\vec{a}^{\mathrm{e}}_{2\omega A}$：　$a^{\mathrm{e}}_{2\omega A}=\omega_2^2\rho_{2A}$　方向已知

$\vec{a}^{\mathrm{e}}_{2\alpha A}$：　$a^{\mathrm{e}}_{2\omega A}=\alpha_2\rho_{2A}$　设定正向

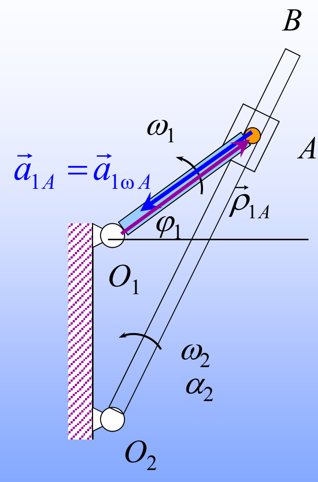
$\vec{a}^{\mathrm{C}}_{2A}$：　$a^{\mathrm{C}}_{2A}=2\omega_2 v^{\mathrm{r}}_{2A}$　方向已知

$\vec{a}^{\mathrm{r}}_{2A}$：　套筒相对运动为平动　设定正向

在曲柄$\mathbf{B}_1$上考察点A：给定点　基点不动

$$\vec{a}_{1A}=\cancel{\vec{a}^{\mathrm{e}}_{1\mathrm{t}A}}+\cancel{\vec{a}^{\mathrm{e}}_{1\alpha A}}+\vec{a}^{\mathrm{e}}_{1\omega A}$$　匀角速度

$\vec{a}^{\mathrm{e}}_{1\omega A}$：　$a^{\mathrm{e}}_{1\omega A}=\omega_1^2\rho_{1A}$　方向已知



[解] 加速度分析

在摇杆B_2上考察点A：动点　基点不动

$$\vec a_{2A} = \vec a^{r}_{2A} + \cancel{\vec a^{e}_{2tA}} + \vec a^{e}_{2\alpha A} + \vec a^{e}_{2\omega A} + \vec a^{C}_{2A}$$

$\vec a^{e}_{2\omega A}$： $a^{e}_{2\omega A} = \omega_2^2 \rho_{2A}$　方向已知

$\vec a^{e}_{2\alpha A}$： $a^{e}_{2\omega A} = \alpha_2 \rho_{2A}$　设定正向

$\vec a^{C}_{2A}$： $a^{C}_{2A} = 2\omega_2 v^{r}_{2A}$　方向已知

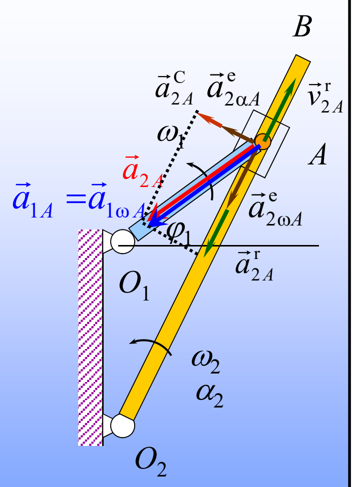
$\vec a^{r}_{2A}$： 套筒相对运动为平动　设定正向

在曲柄B_1上考察点A：给定点　基点不动

$$\vec a_{1A} = \cancel{\vec a^{e}_{1tA}} + \cancel{\vec a^{e}_{1\alpha A}} + \vec a^{e}_{1\omega A}$$ 匀角速度

$\vec a^{e}_{1\omega A}$： $a^{e}_{1\omega A} = \omega_1^2 \rho_{1A}$　方向已知

$$\vec a_{1A} = \vec a_{2A} \qquad \vec a^{e}_{1\omega A} = \vec a^{r}_{2A} + \vec a^{e}_{2\alpha A} + \vec a^{e}_{2\omega A} + \vec a^{C}_{2A}$$



$a^{e}_{1\omega A} = \omega_1^2 l_1$　　$\omega_2 = \omega_1 / 2$　　$v^{r}_{2A} = \omega_1 l_1 / 2$　　$\rho_{2A} = 2 l_1 \sin\varphi_1$

$$a^{e}_{2\alpha A} = \alpha_2 \rho_{2A} = 2\alpha_2 l_1 \cos\varphi_1$$

$$a^{e}_{2\omega A} = \omega_2^2 \rho_{2A} = 2\omega_2^2 l_1 \cos\varphi_1 = \omega_1^2 l_1 \cos\varphi_1 / 2$$

$$a^{C}_{2A} = 2\omega_2 v^{r}_{2A} = \omega_1 v^{r}_{2A} = \omega_1^2 l_1 / 2$$

$$\vec a^{e}_{1\omega A} = \vec a^{r}_{2A} + \vec a^{e}_{2\alpha A} + \vec a^{e}_{2\omega A} + \vec a^{C}_{2A}$$

在 $\vec e^{2}$ 上的坐标式

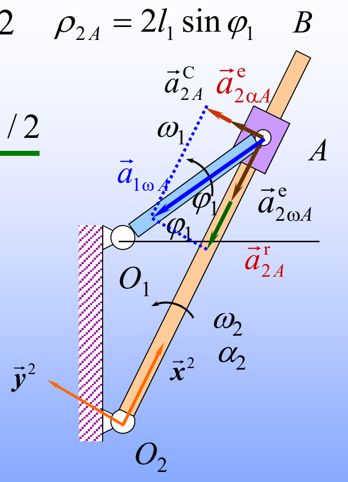
$\vec x^{2}$： $a^{e}_{1\omega A} \cos\varphi_1 = a^{r}_{2A} + a^{e}_{2\omega A}$

$\vec y^{2}$： $\cancel{a^{e}_{1\omega A} \sin\varphi_1} = a^{e}_{2\alpha A} + \cancel{a^{C}_{2A}}$

$\varphi_1 = \pi/6$

$$a^{r}_{2A} = -\frac{\sqrt{3}}{4} l_1 \omega_1^2 \qquad \alpha_2 = 0$$

套筒相对滑动加速度　　摇杆O_2B 的角加速度



以下为该题解答过程的简化版

[解] 速度分析

定基 $O_2-\vec{e}$　　摇杆B_2(动基) $O_2-\vec{e}^2$

A点为定轴转动刚体O_1A上的定点，摇杆上的动点

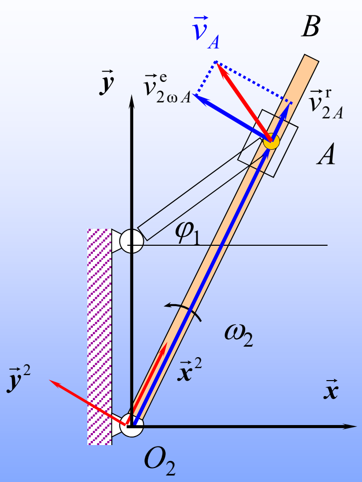
$$\vec{v}_A=\vec{v}_{2A}^{\mathrm{r}}+\vec{v}_{2\mathrm{t}A}^{\mathrm{e}}+\vec{v}_{2\omega A}^{\mathrm{e}}=\vec{v}_{2A}^{\mathrm{r}}+\vec{v}_{2\omega A}^{\mathrm{e}}$$

$$v_A=\omega_1 l_1 \qquad v_{2\omega A}^{\mathrm{e}}=2\omega_2 l_1\cos\varphi_1$$

在 $\vec{e}^2$上的坐标式

$$\vec{x}^2:\quad v_A\sin\varphi_1=v_{2A}^{\mathrm{r}}$$

$$\vec{y}^2:\quad v_A\cos\varphi_1=v_{2\omega A}^{\mathrm{e}}$$



$$\omega_2=\frac{\omega_1}{2} \qquad v_{2A}^{\mathrm{r}}=\frac{\omega_1 l_1}{2}$$

加速度分析

$$\vec{a}_A = \vec{a}_{\omega A} = \vec{a}^{\mathrm{r}}_{2A} + \vec{a}^{\mathrm{e}}_{2\mathrm{t}A} + \vec{a}^{\mathrm{e}}_{2\alpha A} + \vec{a}^{\mathrm{e}}_{2\omega A} + \vec{a}^{\mathrm{C}}_{2A}$$

$$= \vec{a}^{\mathrm{r}}_{2A} + \qquad \vec{a}^{\mathrm{e}}_{2\alpha A} + \vec{a}^{\mathrm{e}}_{2\omega A} + \vec{a}^{\mathrm{C}}_{2A}$$

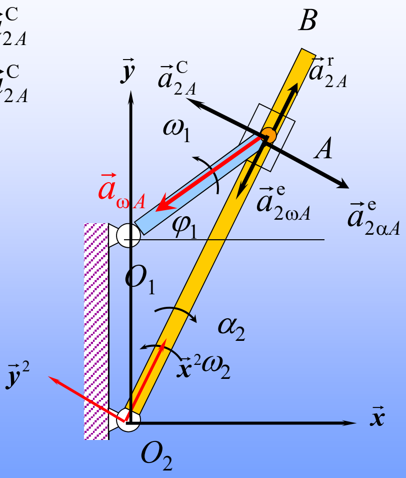
$$a_{\omega A} = \omega_1^2 l_1 \qquad a^{\mathrm{e}}_{2\omega A} = 2\omega_2^2 l_1 \cos\varphi_1$$

$$a^{\mathrm{e}}_{2\alpha A} = 2\alpha_2 l_2 \cos\varphi_1 \qquad a^{\mathrm{C}}_{2A} = 2\omega_2 v^{\mathrm{r}}_{2A}$$

在 $\vec{e}^2$上的坐标式

$$\vec{x}^2: \quad -a_{\omega A}\cos\varphi_1 = a^{\mathrm{r}}_{2A} - a^{\mathrm{e}}_{2\omega A}$$

$$\vec{y}^2: \quad a_{\omega A}\sin\varphi_1 = -a^{\mathrm{e}}_{2\alpha A} + a^{\mathrm{C}}_{2A}$$



$$a^{\mathrm{r}}_{2A} = \frac{\sqrt{3}}{4} l_1 \omega_1^2 \qquad \alpha_2 = 0$$

[例]

图示为一急回机构

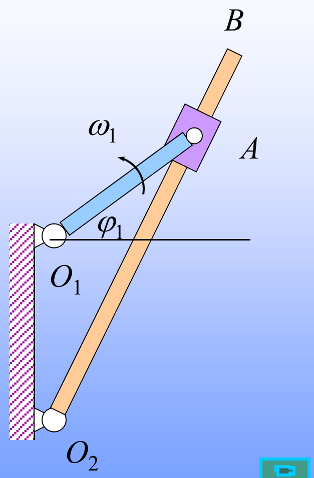
已知长为l_1的曲柄O_1A以匀角速度ω_1转动，杆端为一个套筒，它可绕A自由转动，套筒穿在摇杆O_2B上，相对摇杆它又能相对滑动。令O_1 与O_2 的间距也为l_1

图示瞬时曲柄的转角为$\varphi_1=\pi/6$

求：此瞬时

摇杆O_2B 的角速度ω_2 与角加速度α_2

套筒在摇杆上的滑动速度与加速度

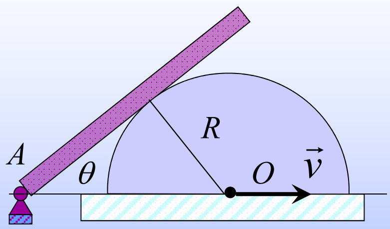


以O_2B杆上的A点为兴趣点是否可行？

[例]

图示凸轮摆杆机构，半径为$\boldsymbol{R}$的半圆凸轮以$\boldsymbol{v}$匀速向右运动，摆杆搁在凸轮上绕铰$\boldsymbol{A}$转动

当摆杆处于图示瞬时，角$\boldsymbol{\theta}$为30度



求此瞬时

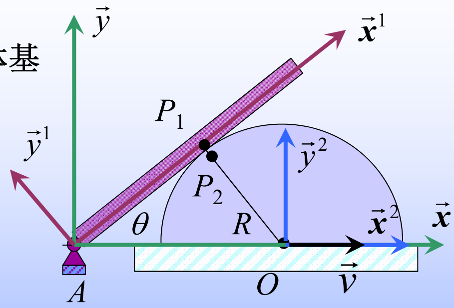
摆杆的角速度与角加速度

[解]

公共基	摆杆连体基	滑块连体基
$A-\vec{e}$	$A-\vec{e}^1$	$O-\vec{e}^2$

兴趣点的选取

方案1: 摆杆与滑块的接触点P1

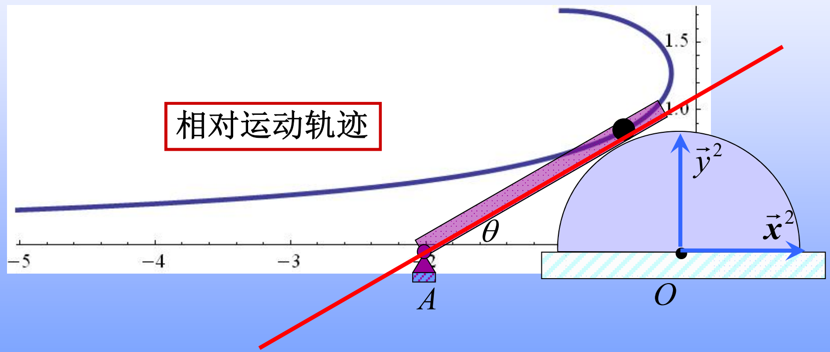


存在问题:

P_1与P_2不是共点

有相对运动, 规律不清

摆杆上的接触点P_1为兴趣点



方案2: 点O

绝对运动已知:向右平移

$$\vec{v}_O = \vec{v} \qquad \vec{a}_O = \vec{0}$$

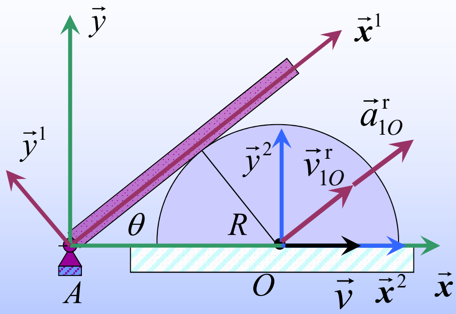
相对摆杆的运动清楚:

滑块在摆杆上又滚又滑

点O的相对运动平行于摆杆

$$\vec{v}_{1O}^{\mathrm{r}} = v_{1O}^{\mathrm{r}} \vec{x}_1$$

$$\vec{a}_{1O}^{\mathrm{r}} = a_{1O}^{\mathrm{r}} \vec{x}_1$$



39

速度分析

在摆杆上考察点$\boldsymbol{O}$: 动点　基点不动

$$\vec{v}_{1O}=\vec{v}^{\mathrm{r}}_{1O}+\cancel{\vec{v}^{\mathrm{e}}_{1\mathrm{t}O}}+\vec{v}^{\mathrm{e}}_{1\omega O}$$

摆杆定轴转动

$\vec{v}^{\mathrm{e}}_{1\omega O}$: $v^{\mathrm{e}}_{1\omega O}=\omega_1\rho_{1O}$　设定正向

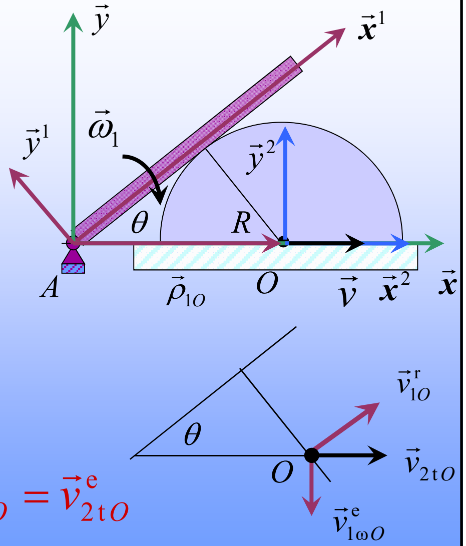
$\vec{v}^{\mathrm{r}}_{1O}$:　设定正向

在滑块上考察点$\boldsymbol{O}$: 定点

$$\vec{v}_{2O}=\vec{v}^{\mathrm{e}}_{2\mathrm{t}O}+\cancel{\vec{v}^{\mathrm{e}}_{2\omega O}}$$

滑块平动　$\vec{v}^{\mathrm{e}}_{2\mathrm{t}O}=\vec{v}$

$$\vec{v}_{1O}=\vec{v}_{2O}\qquad \vec{v}^{\mathrm{r}}_{1O}+\vec{v}^{\mathrm{e}}_{1\omega O}=\vec{v}^{\mathrm{e}}_{2\mathrm{t}O}$$



$$v^{\mathrm{e}}_{1\omega O}=\omega_1\rho_{1O}=\underline{\omega_1 R/\sin\theta}$$

$$v^{\mathrm{e}}_{2\mathrm{t}O}=\underline{v}$$

$$\vec{v}^{\mathrm{r}}_{1O}+\vec{v}^{\mathrm{e}}_{1\omega O}=\vec{v}^{\mathrm{e}}_{2\mathrm{t}O}$$

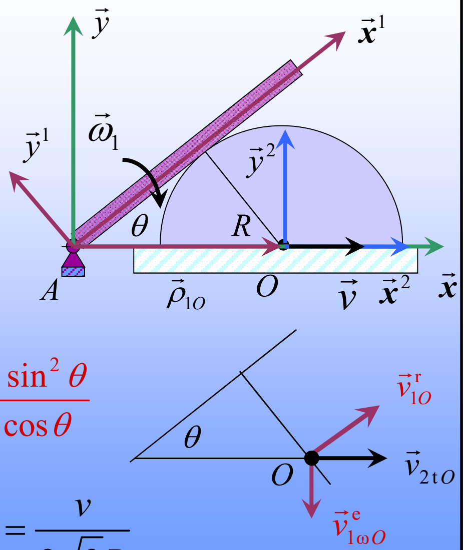
在参考基的坐标式

$\vec{x}$: $v^{\mathrm{r}}_{1O}\cos\theta=\underline{v^{\mathrm{e}}_{2\mathrm{t}O}}=v$

$\vec{y}$: $v^{\mathrm{r}}_{1O}\sin\theta-\underline{v^{\mathrm{e}}_{1\omega O}}=0$

$\vec{x}$: $v^{\mathrm{r}}_{1O}=\dfrac{v}{\cos\theta}$　　$\vec{y}$: $\omega_1=\dfrac{v^{\mathrm{r}}_{1O}\sin^2\theta}{R\cos\theta}$

$\theta=\dfrac{\pi}{6}$　　$v^{\mathrm{r}}_{1O}=\dfrac{2}{\sqrt{3}}v$　　$\omega_1=\dfrac{v}{2\sqrt{3}R}$



加速度分析

在摆杆上考察点***O*****:** 动点 基点不动

$\vec{a}_{1O} = \vec{a}^{\mathrm{r}}_{1O} + \cancel{\vec{a}^{\mathrm{e}}_{1tO}} + \vec{a}^{\mathrm{e}}_{1\alpha O} + \vec{a}^{\mathrm{e}}_{1\omega O} + \vec{a}^{\mathrm{C}}_{1O}$

摆杆定轴转动

$\vec{a}^{\mathrm{e}}_{1\alpha O}$： $a^{\mathrm{e}}_{1\alpha O} = \alpha_1 \rho_{1O}$ 设定正向

$a^{\mathrm{e}}_{1\omega O}$： $a^{\mathrm{e}}_{1\omega O} = \omega_1^2 \rho_{1O}$ 方向已知

$\vec{a}^{\mathrm{C}}_{1O}$： $a^{\mathrm{C}}_{1O} = 2\omega_1 v^{\mathrm{r}}_{1O}$ 方向已知

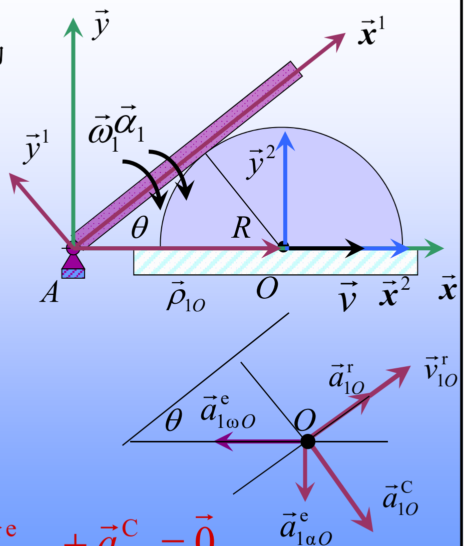
$\vec{a}^{\mathrm{r}}_{1O}$： 设定正向

在滑块上考察点***O*****:** 定点

$\vec{a}_{2O} = \vec{a}^{\mathrm{e}}_{2tO} + \cancel{\vec{a}^{\mathrm{e}}_{2\alpha O}} + \cancel{\vec{a}^{\mathrm{e}}_{2\omega O}}$

滑块匀速平动 $\vec{a}_{2O} = \vec{a}^{\mathrm{e}}_{2tO} = \vec{0}$

$\vec{a}_{1O} = \vec{a}_{2O}$ $\quad \vec{a}^{\mathrm{r}}_{1O} + \vec{a}^{\mathrm{e}}_{1\alpha O} + \vec{a}^{\mathrm{e}}_{1\omega O} + \vec{a}^{\mathrm{C}}_{1O} = \vec{0}$



速度分析结果 $v^{\mathrm{r}}_{1O} = 2v/\sqrt{3}$ $\quad \omega_1 = v/2\sqrt{3}R$

$a^{\mathrm{e}}_{1\alpha O} = \alpha_1 \rho_{1O} = 2\alpha_1 R$

$a^{\mathrm{e}}_{1\omega O} = \omega_1^2 \rho_{1O} = v^2/6R$

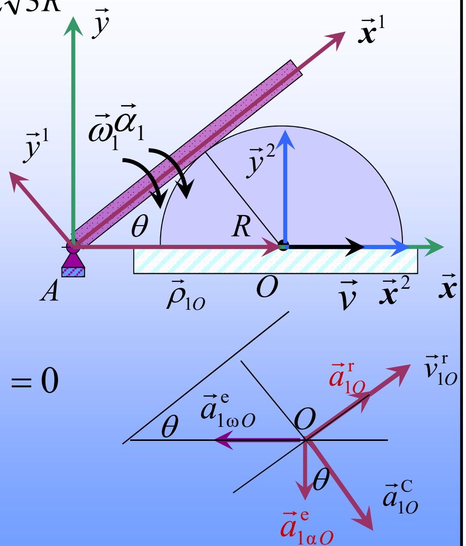
$a^{\mathrm{C}}_{1O} = 2\omega_1 v^{\mathrm{r}}_{1O} = 2v^2/3R$

$\vec{a}^{\mathrm{r}}_{1O} + \vec{a}^{\mathrm{e}}_{1\alpha O} + \vec{a}^{\mathrm{e}}_{1\omega O} + \vec{a}^{\mathrm{C}}_{1O} = \vec{0}$

在 $\vec{y}^1$ 坐标式

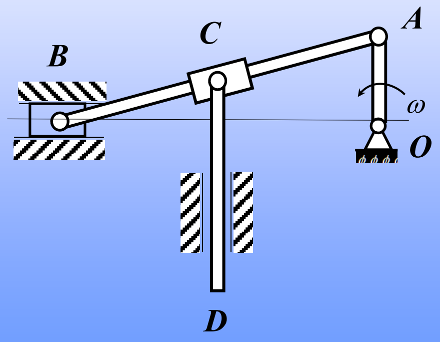
$$a^{\mathrm{e}}_{1\omega O}\sin\theta - a^{\mathrm{e}}_{1\alpha O}\cos\theta - a^{\mathrm{C}}_{1O} = 0$$

$$\alpha_1 = -\frac{7\sqrt{3}v^2}{36R^2}$$



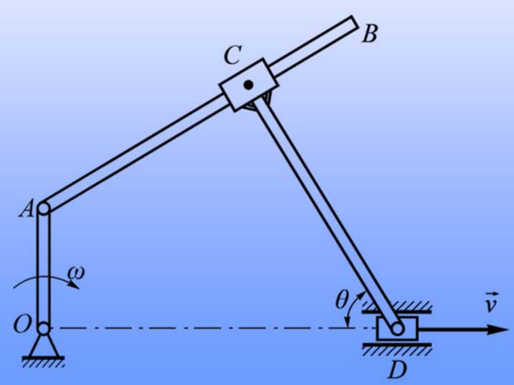
[例] (习题03-34)

一机构曲柄OA以匀角速度ω转动，在图示瞬时，$OA \perp OB$，套筒C位于连杆AB的中点。求此瞬时杆CD的速度和加速度。图中$OA=r$，$AB=4r$。

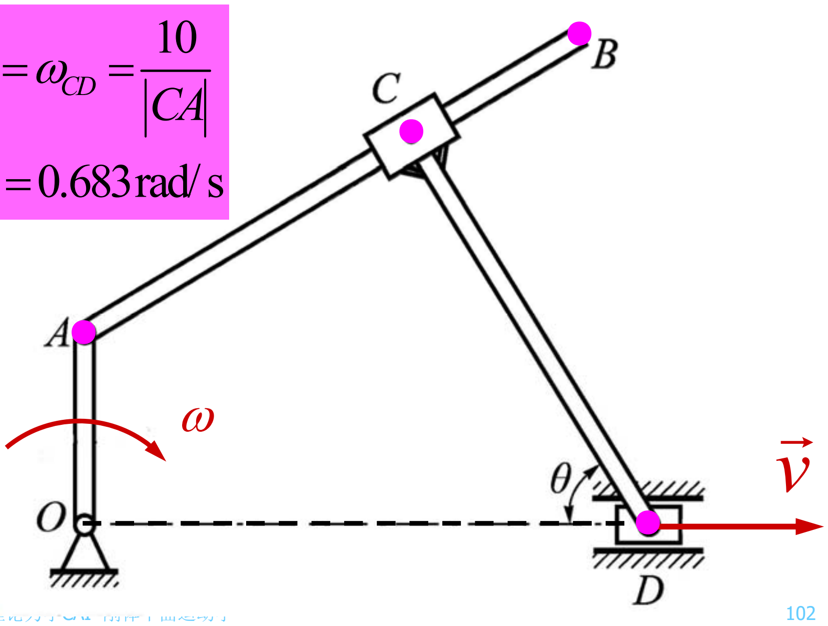


[例]

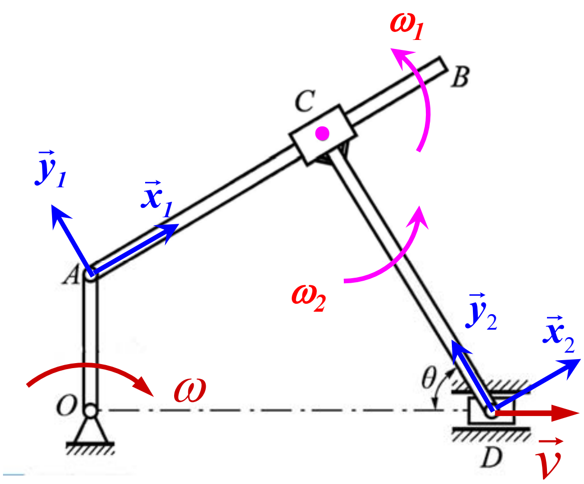
平面机构如图所示。套筒C与杆CD相互垂直并刚连。已知：$OA=r=10\text{cm}$，$CD=20\text{cm}$。在图示位置时，OA铅垂，$\theta=60°$，杆OA的角速度$\omega=4\text{rad/s}$，滑块D的速度$v=20\text{cm/s}$。试求该瞬时杆AB、CD的角加速度。



$$\omega_{AB}=\omega_{CD}=\frac{10}{|CA|}$$
$$=0.683\,\mathrm{rad/s}$$



法一



连体基：$A-\vec{e}_1$，$D-\vec{e}_2$

以CD杆上C点为兴趣点

速度分析：

$$\vec{v}_C=\vec{v}_{1C}=\vec{v}^{r}_{1C}+\vec{v}^{e}_{1tC}+\vec{v}^{e}_{1\omega C}$$

$$\vec{v}_C=\vec{v}_{2C}=\vec{v}^{e}_{2tC}+\vec{v}^{e}_{2\omega C}$$

$$\vec{v}_{1C}=\vec{v}_{2C}$$

$$\vec{v}^{r}_{1C}+\vec{v}^{e}_{1tC}+\vec{v}^{e}_{1\omega C}=\vec{v}^{e}_{2tC}+\vec{v}^{e}_{2\omega C}$$

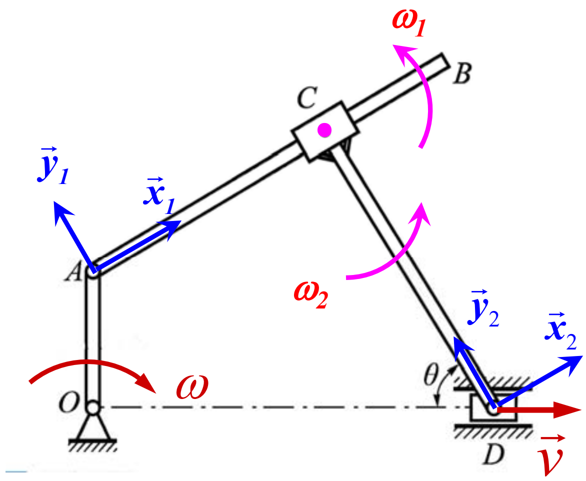
$v^{e}_{1tC}=v_A=\omega r$，$v^{e}_{2tC}=v$

$v^{e}_{1\omega C}=\omega_1\,|AC|$,

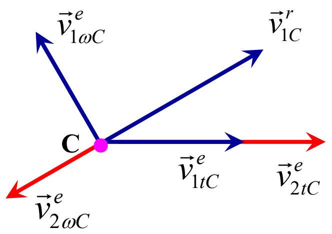
$v^{e}_{2\omega C}=\omega_2\,|CD|$,

$|AC|=20\left(\sqrt{3}-1\right)$,

法一



速度矢量图：

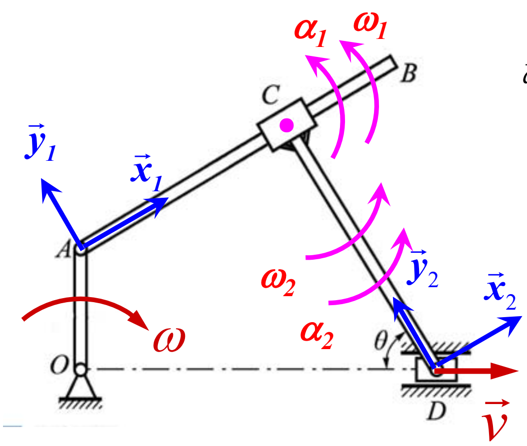


$$\vec{v}_{1C}^{r}+\vec{v}_{1tC}^{e}+\vec{v}_{1\omega C}^{e}=\vec{v}_{2tC}^{e}+\vec{v}_{2\omega C}^{e}$$

$\omega_1=\omega_2$,

坐标方程求出 $\omega_1,\omega_2,v_{1C}^{r}$

法一



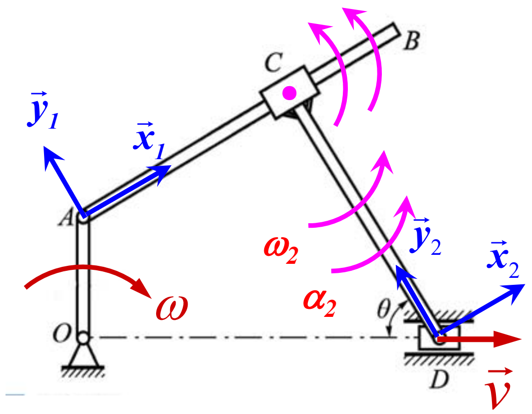
加速度分析：

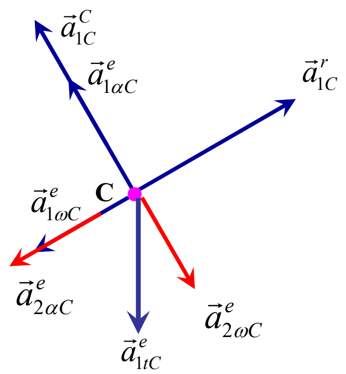
$$\vec{a}_C=\vec{a}_{1C}$$
$$=\vec{a}_{1C}^{r}+\vec{a}_{1tC}^{e}+\vec{a}_{1\omega C}^{e}+\vec{a}_{1\alpha C}^{e}+\vec{a}_{1C}^{C}$$
$$\vec{a}_C=\vec{a}_{2C}=\vec{a}_{2tC}^{e}+\vec{a}_{2\omega C}^{e}+\vec{a}_{2\alpha C}^{e}$$
$$\vec{a}_{1C}=\vec{a}_{2C}$$
$$\vec{a}_{1C}^{r}+\vec{a}_{1tC}^{e}+\vec{a}_{1\omega C}^{e}+\vec{a}_{1\alpha C}^{e}+\vec{a}_{1C}^{C}$$
$$=\vec{a}_{2tC}^{e}+\vec{a}_{2\omega C}^{e}+\vec{a}_{2\alpha C}^{e}$$

$$a_{1tC}^{e}=a_A=\omega^2 r,\quad a_{2tC}^{e}=a_D=0$$
$$a_{1\omega C}^{e}=\omega_1^2|AC|,\quad a_{2\omega C}^{e}=\omega_2^2|CD|,$$
$$a_{1\alpha C}^{e}=\alpha_1|AC|,\quad a_{2\alpha C}^{e}=\alpha_2|CD|,$$
$$a_{1C}^{C}=2\omega_1 v_{1C}^{r}$$

法一

加速度矢量图：

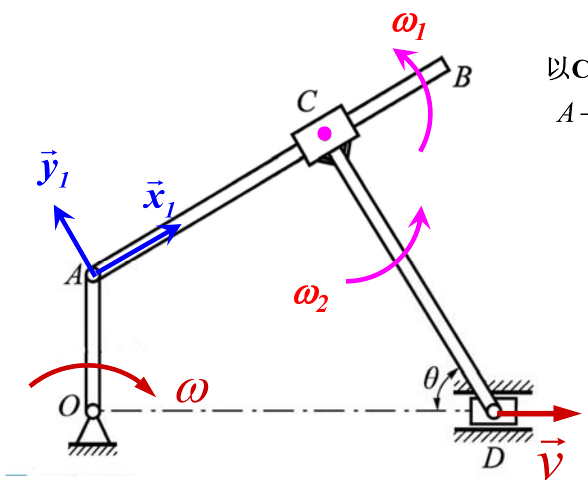




$$\vec{a}_{1C}^{r}+\vec{a}_{1tC}^{e}+\vec{a}_{1\omega C}^{e}+\vec{a}_{1\alpha C}^{e}+\vec{a}_{1C}^{C}=\vec{a}_{2\omega C}^{e}+\vec{a}_{2\alpha C}^{e}$$

$\alpha_1=\alpha_2$，坐标方程求出 $\alpha_1,\alpha_2,a_{1C}^{r}$

法二



连体基：$A-\vec{e}_1$

以CD杆上D点为兴趣点，在基 $A-\vec{e}_1$ 上为动点，相对轨迹为平行于AB的直线

速度分析：

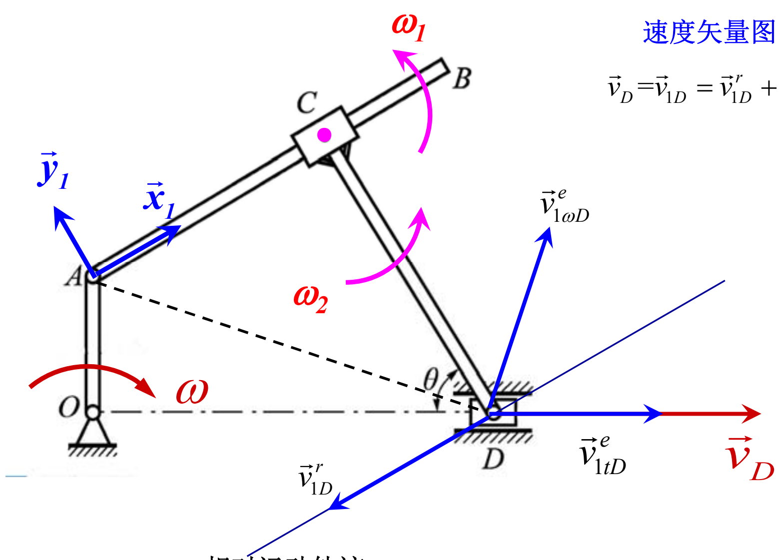
$$\vec{v}_D=\vec{v}_{1D}=\vec{v}_{1D}^{r}+\vec{v}_{1tD}^{e}+\vec{v}_{1\omega D}^{e}$$

$$v_{1tD}^{e}=v_A=\omega r,$$

$$v_{1\omega D}^{e}=\omega_1|AD|,$$

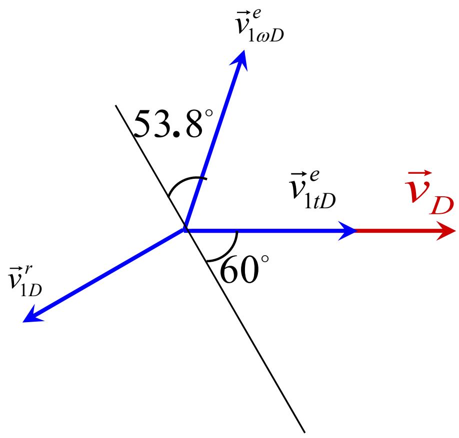
$$|AD|=20\sqrt{5-2\sqrt{3}}$$

法二



速度矢量图：

$$\vec{v}_D = \vec{v}_{1D} = \vec{v}_{1D}^{r} + \vec{v}_{1tD}^{e} + \vec{v}_{1\omega D}^{e}$$



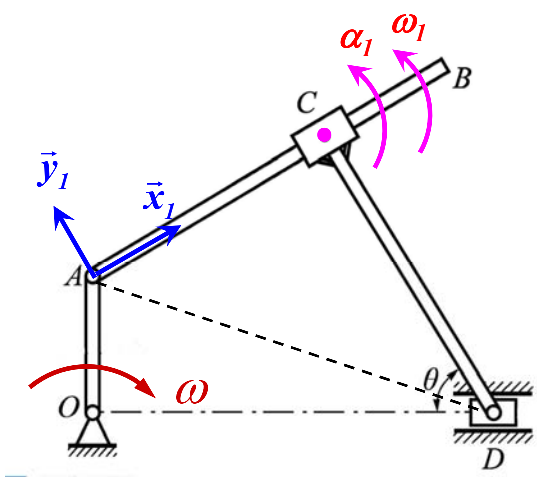
速度矢量图：

$$\vec{v}_D = \vec{v}_{1D} = \vec{v}_{1D}^{r} + \vec{v}_{1tD}^{e} + \vec{v}_{1\omega D}^{e}$$

坐标方程求出 ω_1, v_{1C}^{r}

$$\omega_1 = 0.683 rad/s$$

法二



加速度分析：

$$\vec{a}_D = \vec{0}$$
$$= \vec{a}^r_{1D} + \vec{a}^e_{1tD} + \vec{a}^e_{1\omega D} + \vec{a}^e_{1\alpha D} + \vec{a}^C_{1D}$$

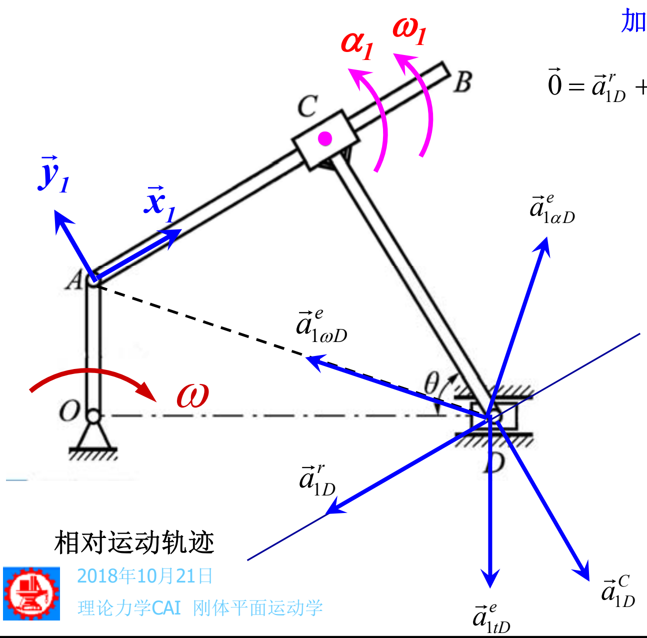
$$a^e_{1tD} = a_A = \omega^2 r,$$
$$a^e_{1\omega D} = \omega_1^2 \,|AD|,$$
$$a^e_{1\alpha D} = \alpha_1 \,|AD|,$$
$$a^C_{1D} = 2\omega_1 v^r_{1D},$$
$$|AD| = 20\sqrt{5-2\sqrt{3}}$$

相对运动轨迹

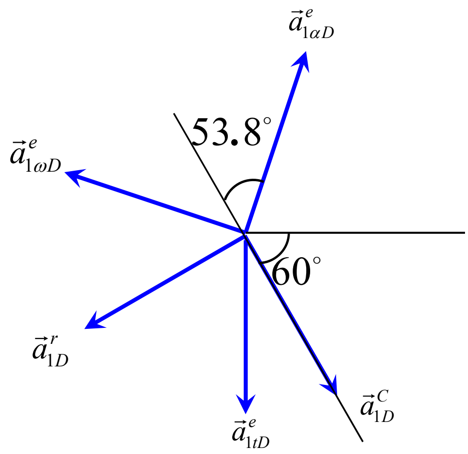
法二

加速度矢量图

$$\vec{0} = \vec{a}^r_{1D} + \vec{a}^e_{1tD} + \vec{a}^e_{1\omega D} + \vec{a}^e_{1\alpha D} + \vec{a}^C_{1D}$$



法二



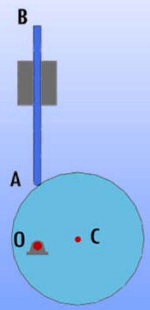
加速度矢量图

$$\vec{0}=\vec{a}^r_{1D}+\vec{a}^e_{1tD}+\vec{a}^e_{1\omega D}+\vec{a}^e_{1\alpha D}+\vec{a}^C_{1D}$$

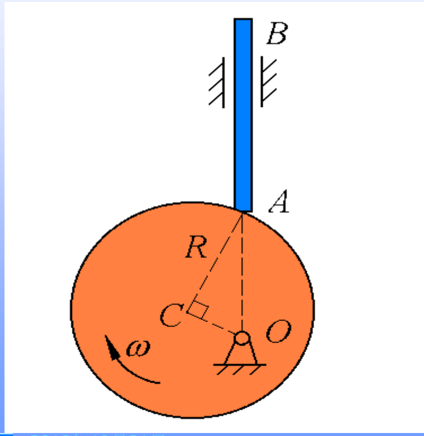
坐标方程求出　α_1, a^r_{1D}

【例】 圆盘凸轮机构，已知：***OC*=*e***， ***ω***为匀角速度，$R=\sqrt{3}e$ ， 图示瞬时， ***OC***⊥***CA*** 且 ***O***、***A***、***B***三点共线。

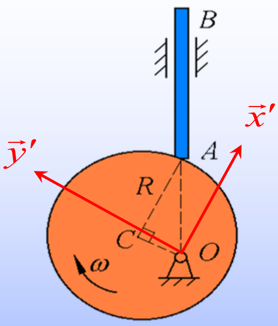
求：从动杆***AB***的速度、加速度。



【例】 圆盘凸轮机构，已知：$OC=e$， ω为匀角速度，$R=\sqrt{3}e$ ，图示瞬时， $OC\perp CA$ 且 O、A、B三点共线。求：从动杆AB的速度、加速度。

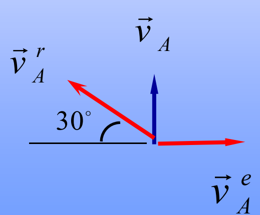


（两种动点动系的方法）



【法一】 动点取直杆上A点，动系固结于圆盘，定系固结于基座。

相对运动轨迹为圆轮圆周线

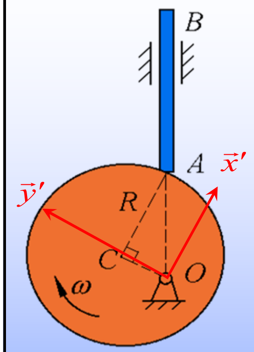


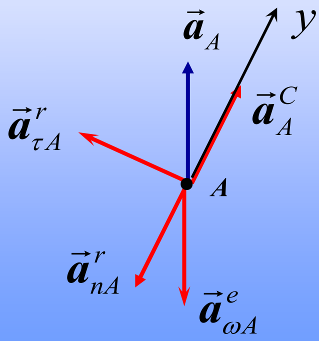
$$v_A=\frac{2\sqrt{3}}{3}e\omega$$

$$v_A^r=\frac{4\sqrt{3}}{3}e\omega$$

加速度分析：

$$\overset{?\surd}{\vec{a}_A} = \overset{?\surd}{\vec{a}^r_{\tau A}} + \overset{\surd\surd}{\vec{a}^r_{nA}} + \overset{\surd\surd}{\vec{a}^e_{\omega A}} + \overset{\surd\surd}{\vec{a}^C_A}$$





$$a^r_{nA} = \frac{(v^r_A)^2}{R}$$

$$a^e_{\omega A} = 2\omega^2 e$$

$$a^C_A = \frac{8\sqrt{3}}{3} e\omega^2$$

矢量等式向y轴投影：

$$a_A = -\frac{2}{9} e\omega^2$$

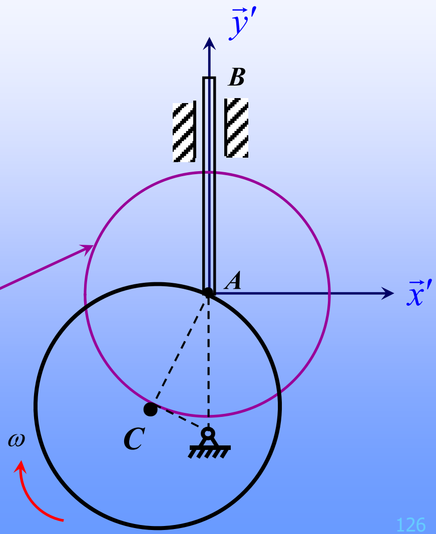
【法二】

动点取圆轮圆心C，动系固结于AB杆，基点A。

动系平移

相对运动轨迹为圆，圆心A

相对运动轨迹

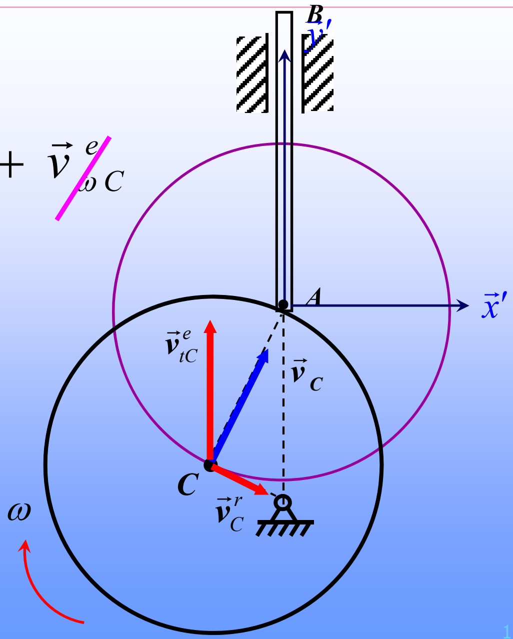


速度关系

$$\vec{v}_C = \vec{v}_C^{\,r} + \vec{v}_{tC}^{\,e} + \cancel{\vec{v}_{\omega C}^{\,e}}$$

$$v_{AB} = v_A = v_{tC}^e = \frac{2\sqrt{3}}{3}e\omega$$

$$v_C^r = \frac{\sqrt{3}}{3}e\omega$$

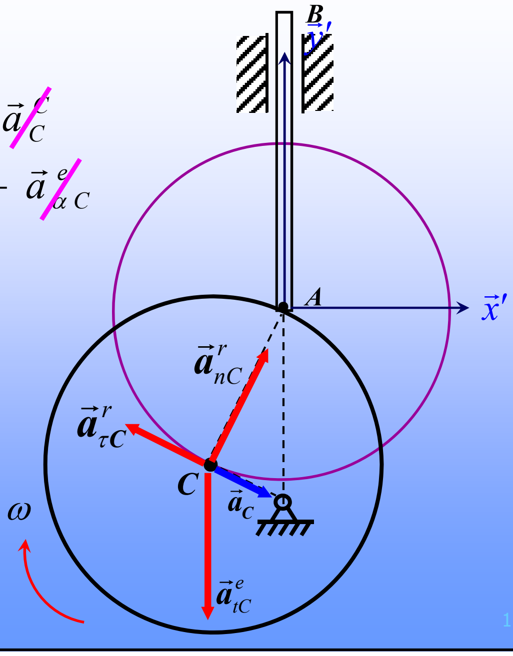


加速度关系

$$\vec{a}_C = \vec{a}_{\tau C}^{\,r} + \vec{a}_{nC}^{\,r} + \cancel{\vec{a}_C^{\,C}} + \vec{a}_{tC}^{\,e} + \cancel{\vec{a}_{\omega C}^{\,e}} + \cancel{\vec{a}_{\alpha C}^{\,e}}$$

科氏加速度 $a_C^C = 0$

$$a_{AB} = a_A = a_{tC}^e = \frac{2}{9}e\omega^2$$



- 刚体系矢量瞬时分析方法小结
  - 基本原理：
    - 对于两个动基与一个公共参考基，动点在公共基下的绝对速度与加速度一致
  - 根据问题的要求合理的选定动基
  - 关键：点的选定
    - 已知信息最多
    - 动点的相对运动清楚
  - 仔细的分析相对运动与绝对运动的矢量几何关系
    - 矢量关系图
    - 合理选定矢量基，正确写出坐标式
  - 加速度分析前一般需进行速度分析