理论力学 CAI

分析力学基础

达朗贝尔原理

达朗贝尔原理

要点

- 重点掌握：平面平移运动、定轴转动、平面一般运动刚体的达朗贝尔惯性力的简化结果
- 动反力：一般性了解

达朗贝尔原理

- **前言**
- 达朗贝尔惯性力与质点系达朗贝尔原理
- 一般运动刚体的动静法
- 平面运动刚体的动静法
- 定轴转动刚体的动静法 动反力

前言

- 质点系的达朗贝尔原理
  - 1743年由达朗贝尔提出
  - 与矢量动力学不同，从另一个角度给出了作用于系统的力与系统运动的关系
  - 构成了分析动力学的基础

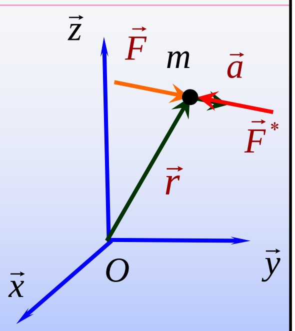
让·勒朗·达朗贝尔(法)
Jean le Rond d'Alembert
(1717～1783)

达朗贝尔原理

达朗贝尔惯性力、质点系达朗贝尔原理

- 达朗贝尔惯性力
- 质点系达朗贝尔原理

达朗贝尔惯性力



- 考虑惯性基下质点的运动

根据牛顿定律　质点的动力学方程

$$m\ddot{\vec r} = \vec F \qquad m\vec a = \vec F$$

定义达朗贝尔惯性力

$$\vec F^* = -m\ddot{\vec r}$$

$$\vec F^* = -m\vec a$$

质点达朗贝尔原理

$$\vec F + \vec F^* = \vec 0$$

质点运动的任意时刻，质点的达朗贝尔惯性力与作用于质点的所有真实的作用力组成平衡力系

- 动静法

$$\vec{F} + \vec{F}^* = \vec{0}$$

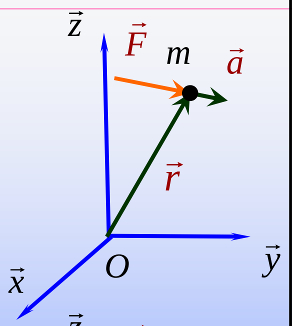
$\vec{F}$ 真实的作用力:
作用于质点的外力(包括理想约束力)

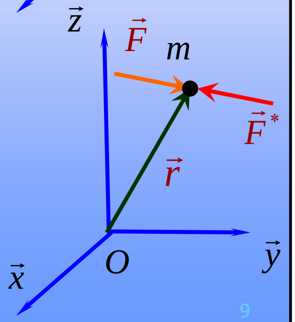
$\vec{F}^*$ 人为引入达朗贝尔惯性力:
使惯性基下的质点动力学方程变换为一种力的平衡方程的形式

$$m\vec{a} = \vec{F} \quad \Rightarrow \quad \vec{F} + \vec{F}^* = \vec{0}$$

动力学 “静力学”

这种处理方法称为动静法





质点系达朗贝尔原理

质点系 $(P_1, P_2, \cdots, P_n)$

质点$\boldsymbol{P_k}$ $(k = 1,2,\cdots,n)$ 所受的力

外力 $\vec{F}_k$

内力 质点$\boldsymbol{P_i}$所对$\boldsymbol{P_k}$的作用力

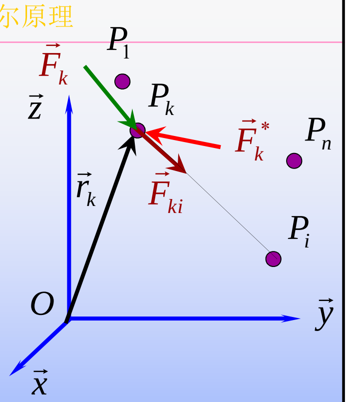
$\vec{F}_{ki}$ $(i = 1,2,\cdots,n; \neq k)$

牛顿定律

$$m_k \ddot{\vec{r}}_k = \vec{F}_k + \sum_{i=1,\neq k}^{n} \vec{F}_{ki}$$

定义达朗贝尔惯性力 $\vec{F}_k^* = -m_k \ddot{\vec{r}}_k$

$$\vec{F}_k + \vec{F}_k^* + \sum_{i=1,\neq k}^{n} \vec{F}_{ki} = \vec{0} \qquad (k = 1,2,\cdots,n)$$

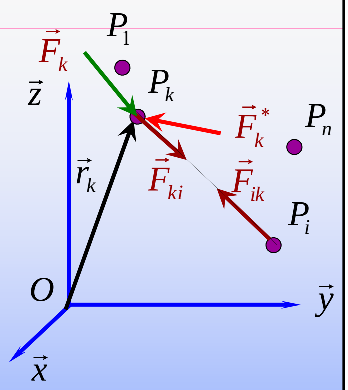


质点系 $(P_1, P_2, \cdots, P_n)$

质点$\boldsymbol{P_k}$ $(k=1,2,\cdots,n)$ 所受的力

合力系

$$\underbrace{\left(\vec{F}_1, \vec{F}_2, \cdots, \vec{F}_n,\right.}_{\text{外力系}} \quad \underbrace{\vec{F}_{ki},}_{\text{内力系}} \quad \underbrace{\left.\vec{F}_1^*, \vec{F}_2^*, \cdots, \vec{F}_n^*\right)}_{\text{达朗贝尔惯性力系}}$$



合力系向任意点简化结果为平衡力系 $\vec{F}_{ki} = -\vec{F}_{ik}$

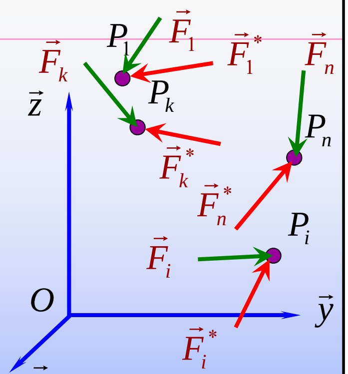
质点系 $(P_1, P_2, \cdots, P_n)$

外力系 $\left(\vec{F}_1, \vec{F}_2, \cdots, \vec{F}_n\right)$

达朗贝尔惯性力系 $\left(\vec{F}_1^*, \vec{F}_2^*, \cdots, \vec{F}_n^*\right)$

质点系达朗贝尔原理 动静法

外力系与达朗贝尔惯性力系构成平衡力系



平衡方程 外力系 惯性力系

力系主矢 $\sum_{k=1}^{n} \vec{F}_k + \sum_{k=1}^{n} \vec{F}_k^* = \vec{0}$

力系对任意点**A**的主矩 $\sum_{k=1}^{n} \vec{M}_A\left(\vec{F}_k\right) + \sum_{k=1}^{n} \vec{M}_A\left(\vec{F}_k^*\right) = \vec{0}$

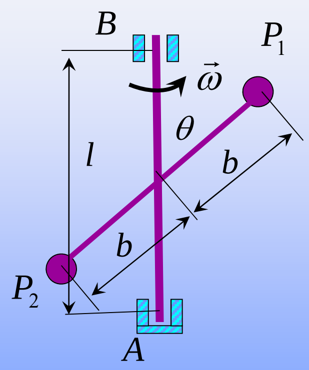
可以列出**6**个独立平衡方程

[例]

小球P_1与P_2与铅垂轴AB固连

将小球视为质点，质量均为m

轴AB作匀角速度ω旋转。



求轴承A与B处所受的力

[解] 连体基 $A-\vec{e}^{b}$

运动分析

系统作定轴匀角速度转动

质点P_1与P_2作匀速圆周运动转动

加速度 $\vec{a}_1$ $\vec{a}_2$ $a_1 = a_2 = \omega^2 b\sin\theta$

动静法 系统“冻结”（一般状态下）

加惯性力 $\vec{F}_1^*$ $\vec{F}_2^*$

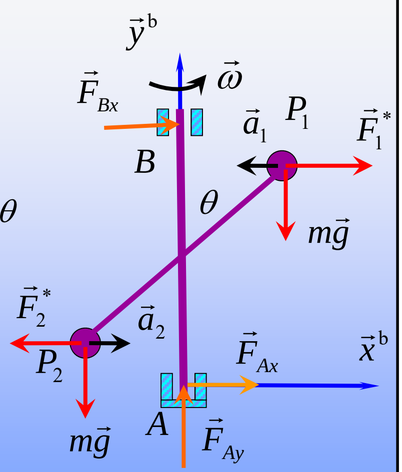
设定正向 与加速度方向相反

大小 $F_1^* = m_1 a_1$， $F_2^* = m_2 a_2$

$F_1^* = F_2^* = m\omega^2 b\sin\theta$

真实外力 主动力 $m\vec{g}$

理想约束力 $\vec{F}_{Ax}$ $\vec{F}_{Ay}$ $\vec{F}_{Bx}$ 设定正向



? $\vec{F}_{Az}$ $\vec{F}_{Bz}$

连体基 $A-\vec{e}^{\,b}$

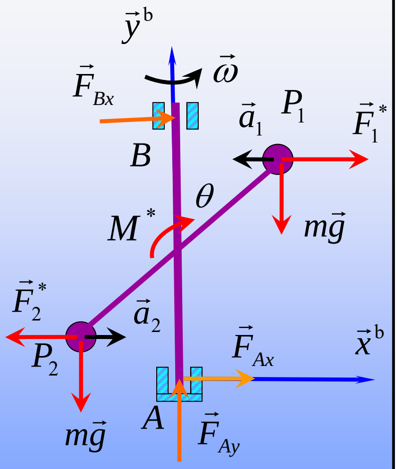
动静法 系统“冻结”（一般状态下）

主动力 $m\vec{g}$

理想约束力 $\vec{F}_{Ax}$ $\vec{F}_{Ay}$ $\vec{F}_{Bx}$

惯性力 $F_1^* = F_2^* = m\omega^2 b\sin\theta$

构成力偶 $M^* = 2b\cos\theta F_1^* = m\omega^2 b^2\sin 2\theta$



平面力系 平衡方程

$$\sum_k m_{Az}(\vec{F}_k) = 0 \qquad F_{Bx} l + M^* = 0$$

$$\sum_k F_x = 0 \qquad F_{Bx} + F_{Ax} = 0$$

$$\sum_k F_y = 0 \qquad F_{Ay} - 2mg = 0$$

连体基 $A-\vec{e}^{\,b}$

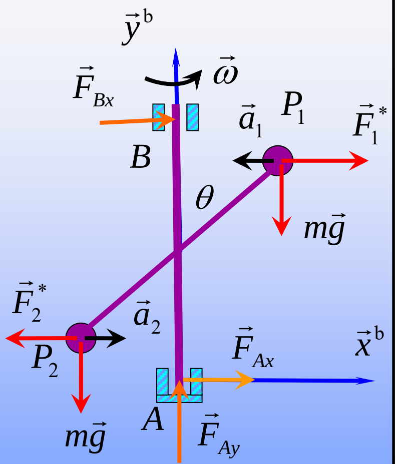
动静法 系统“冻结”（一般状态下）

平面力系 平衡方程

$$\sum_k m_{Az}(\vec{F}_k) = 0 \qquad F_{Bx} l + M^* = 0$$

$$\sum_k F_x = 0 \qquad F_{Bx} + F_{Ax} = 0$$

$$\sum_k F_y = 0 \qquad F_{Ay} - 2mg = 0$$



$$F_{Bx} = -\frac{m\omega^2 b^2}{l}\sin 2\theta \qquad F_{Ay} = 2mg$$

$$F_{Ax} = \frac{m\omega^2 b^2}{l}\sin 2\theta$$

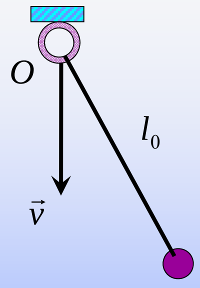
$M^* = m\omega^2 b^2\sin 2\theta$

由于平面*x-y*随轴*AB*一起转动，所以轴承受到的力在惯性基上观察是在不断的改变方向

[例]

变摆长的摆套在环上，摆绳原长为l_0，以匀速v向下拉

小球视为质点，质量为m



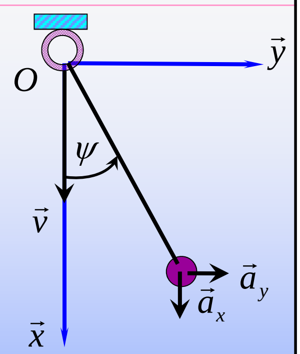
建立此摆的的动力学方程

[解] 惯性基 $O-\vec{e}$ 以小球为对象

小球运动的一般位置

笛卡儿坐标：x，y

$$x=(l_0-vt)\cos\psi$$
$$y=(l_0-vt)\sin\psi$$



小球加速度 $\vec{a}$

定义加速度分矢量 $\vec{a}_x$ $\vec{a}_y$ 的正向

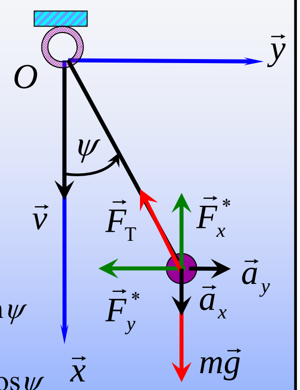
如果与基矢量一致 $a_x=\ddot{x}$ $a_y=\ddot{y}$

$$a_x=-(l_0-vt)\ddot{\psi}\sin\psi-(l_0-vt)\dot{\psi}^2\cos\psi+2v\dot{\psi}\sin\psi$$

$$a_y=(l_0-vt)\ddot{\psi}\cos\psi-(l_0-vt)\dot{\psi}^2\sin\psi-2v\dot{\psi}\cos\psi$$

$$a_x = -(l_0 - vt)\ddot{\psi}\sin\psi - (l_0 - vt)\dot{\psi}^2\cos\psi + 2v\dot{\psi}\sin\psi$$

$$a_y = (l_0 - vt)\ddot{\psi}\cos\psi - (l_0 - vt)\dot{\psi}^2\sin\psi - 2v\dot{\psi}\cos\psi$$



动静法

惯性力　　设定正向　　如果与加速度方向相反

$$F_x^* = ma_x \qquad F_y^* = ma_y$$

$$F_x^* = -m(l_0 - vt)\ddot{\psi}\sin\psi - m(l_0 - vt)\dot{\psi}^2\cos\psi + 2mv\dot{\psi}\sin\psi$$

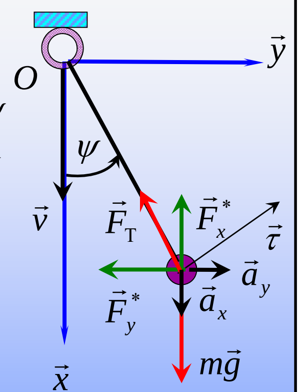
$$F_y^* = m(l_0 - vt)\ddot{\psi}\cos\psi - m(l_0 - vt)\dot{\psi}^2\sin\psi - 2mv\dot{\psi}\cos\psi$$

真实外力

主动力　$m\vec{g}$　　理想约束力　$\vec{F}_{\mathrm{T}}$

惯性基　$O-\boldsymbol{\vec{e}}$

动静法



$$\underline{F_x^*} = -m(l_0 - vt)\ddot{\psi}\sin\psi - m(l_0 - vt)\dot{\psi}^2\cos\psi + 2mv\dot{\psi}\sin\psi$$

$$\underline{F_y^*} = m(l_0 - vt)\ddot{\psi}\cos\psi - m(l_0 - vt)\dot{\psi}^2\sin\psi - 2mv\dot{\psi}\cos\psi$$

$m\vec{g}$　$\vec{F}_{\mathrm{T}}$

小球平衡方程

为了不出现 $\vec{F}_{\mathrm{T}}$　　定义 $\vec{\tau} \perp \vec{F}_{\mathrm{T}}$

$\vec{\tau}$:

$$-\underline{F_y^*}\cos\psi + \underline{F_x^*}\sin\psi - mg\sin\psi = 0$$

$$(l_0 - vt)\ddot{\psi} - 2v\dot{\psi} + g\sin\psi = 0$$

小球动力学方程

达朗贝尔原理

- 前言
- 达朗贝尔惯性力与质点系达朗贝尔原理
- 一般运动刚体的动静法
- 平面运动刚体的动静法
- 定轴转动刚体的动静法 动反力

一般运动刚体动静法

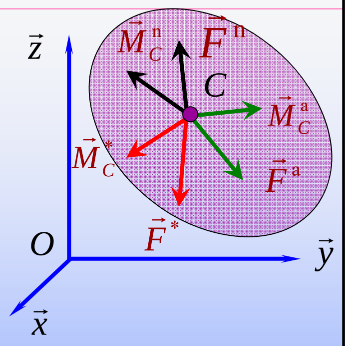
- 刚体的达朗贝尔原理
- 刚体达朗贝尔惯性力的简化

- 刚体达朗贝尔原理

质点系达朗贝尔原理

$$\underbrace{\sum_{k=1}^{n}\vec{F}_k}_{\vec{F}^{\mathrm{a}}+\vec{F}^{\mathrm{n}}} + \underbrace{\sum_{k=1}^{n}\vec{F}_k^*}_{\vec{F}^*} = 0 \qquad \underbrace{\sum_{k=1}^{n}\vec{M}_C(\vec{F}_k)}_{\vec{M}_C^{\mathrm{a}}+\vec{M}_C^{\mathrm{n}}} + \underbrace{\sum_{k=1}^{n}\vec{M}_C(\vec{F}_k^*)}_{\vec{M}_C^*} = 0$$

主动力与理想约束力主矢；惯性力系主矢；主动力与理想约束力对质心 *C* 的主矩；惯性力对质心 *C* 的主矩



刚体达朗贝尔原理

$$\vec{F}^{\mathrm{a}} + \vec{F}^{\mathrm{n}} + \vec{F}^* = \vec{0}$$

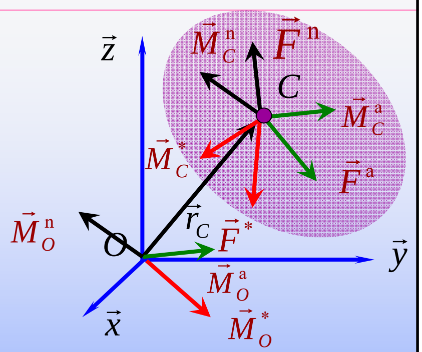
$$\vec{M}_C^{\mathrm{a}} + \vec{M}_C^{\mathrm{n}} + \vec{M}_C^* = \vec{0}$$

- 刚体达朗贝尔原理的变换

刚体达朗贝尔原理

对质心*C* $\quad \vec{F}^{\mathrm{a}} + \vec{F}^{\mathrm{n}} + \vec{F}^* = \vec{0}$

$\vec{M}_C^{\mathrm{a}} + \vec{M}_C^{\mathrm{n}} + \vec{M}_C^* = \vec{0}$



根据静力学的理论：

平衡方程中对其他点的主矩式也成立

对点*O*

$$\vec{M}_O^{\mathrm{a}} + \vec{M}_O^{\mathrm{n}} + \vec{M}_O^* = \vec{0}$$

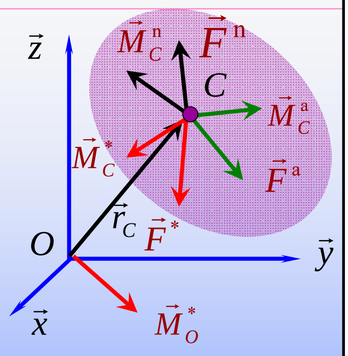
刚体达朗贝尔原理

$$\vec{F}^{\text{a}}+\vec{F}^{\text{n}}+\vec{F}^{*}=\vec{0}$$

$$\vec{M}_C^{\text{a}}+\vec{M}_C^{\text{n}}+\vec{M}_C^{*}=\vec{0}$$

$$\vec{M}_O^{\text{a}}+\vec{M}_O^{\text{n}}+\vec{M}_O^{*}=\vec{0}$$

独立的
坐标式
只有6个



由于

$$\vec{M}_O^{*}=\vec{M}_C^{*}+\vec{r}_C\times\vec{F}^{*}$$

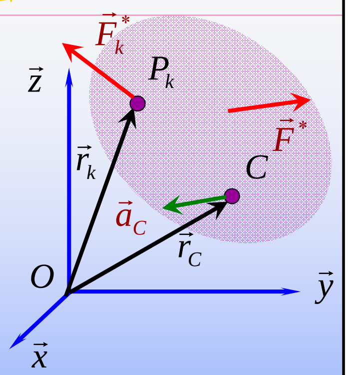
$$\vec{M}_O^{\text{a}}=\vec{M}_C^{\text{a}}+\vec{r}_C\times\vec{F}^{\text{a}}$$

$$\vec{M}_O^{\text{n}}=\vec{M}_C^{\text{n}}+\vec{r}_C\times\vec{F}^{\text{n}}$$

利用达朗贝尔原理的关键是计算达朗贝尔惯性力

- 刚体达朗贝尔惯性力

达朗贝尔惯性力的主矢



$$\vec{F}^{*}=\sum_{k=1}^{n}\vec{F}_k^{*}\quad=-\sum_{k=1}^{n}m_k\ddot{\vec{r}}_k$$

$$\vec{F}^{*}=-m\ddot{\vec{r}}_C=-m\vec{a}_C$$

$$\vec{F}^{*}=-\dot{\vec{p}}$$

$$m\vec{r}_C=\sum_{k=1}^{n}m_k\vec{r}_k$$

达朗贝尔惯性力对质心C的主矩

$$\vec{M}_C^* = \sum_{k=1}^{n} \vec{\rho}_k \times \vec{F}_k^* = -\sum_{k=1}^{n} \vec{\rho}_k \times \underline{m_k \ddot{\vec{r}}_k}$$

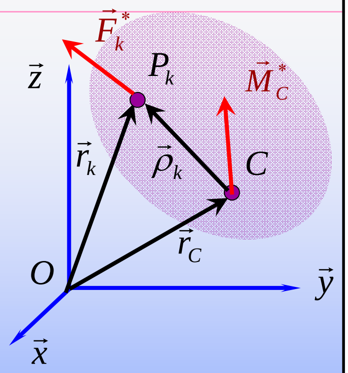
$$= \underline{-\sum_{k=1}^{n} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\vec{\rho}_k \times m_k \dot{\vec{r}}_k)} + \underline{\cancel{\sum_{k=1}^{n} \frac{\mathrm{d}\vec{\rho}_k}{\mathrm{d}t} \times m_k \dot{\vec{r}}_k}}$$

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{\mathrm{d}\vec{\rho}_k}{\mathrm{d}t} \times m_k \dot{\vec{r}}_k = \sum_{k=1}^{n} \dot{\vec{\rho}}_k \times m_k (\dot{\vec{r}}_C + \cancel{\dot{\vec{\rho}}_k})$$

$$= -\dot{\vec{r}}_C \times \cancel{\sum_{k=1}^{n} m_k \dot{\vec{\rho}}_k}$$

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\vec{\rho}_k \times m_k \dot{\vec{r}}_k) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \sum_{k=1}^{n} (\vec{\rho}_k \times m_k \dot{\vec{r}}_k) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \vec{L}_C$$

$$\vec{M}_C^* = -\frac{\mathrm{d}\vec{L}_C}{\mathrm{d}t}$$



$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\vec{\rho}_k \times m_k \dot{\vec{r}}_k)$$

$$= \frac{\mathrm{d}\vec{\rho}_k}{\mathrm{d}t} \times m_k \dot{\vec{r}}_k + \underline{\vec{\rho}_k \times m_k \ddot{\vec{r}}_k}$$

$$\vec{r}_k = \vec{r}_C + \vec{\rho}_k$$

$$\sum_{k=1}^{n} m_k \vec{\rho}_k = \vec{0}$$

达朗贝尔惯性力对质心C简化

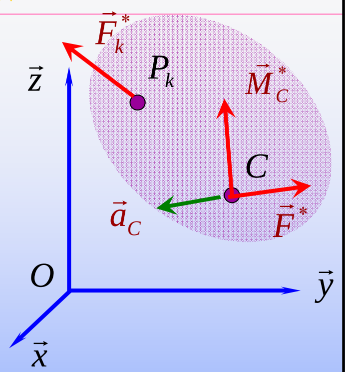
简化结果为作用于质心的一个力与一力偶

该力等于惯性力系的主矢

$$\vec{F}_C^* = \vec{F}^* = -m\vec{a}_C = -\dot{\vec{p}}$$

该力偶的力偶矩矢量等于惯性力系对质心C的主矩

$$\vec{M}_C^* = -\dot{\vec{L}}_C$$



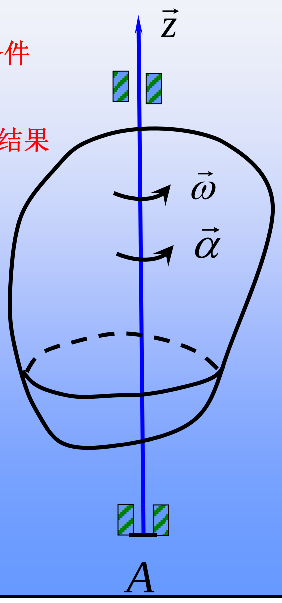
达朗贝尔原理

- 前言
- 达朗贝尔惯性力与质点系达朗贝尔原理
- 一般运动刚体的动静法
- **平面运动刚体的动静法**
- 定轴转动刚体的动静法 动反力

- 定轴转动刚体惯性力的简化 （一般情况）

不满足平面运动的惯量条件

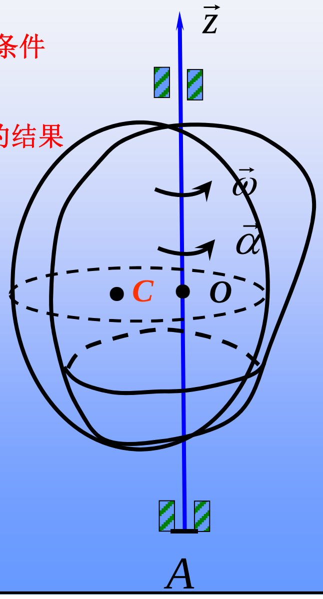
惯性力的简化没有简单的结果



- 定轴转动刚体惯性力的简化 （有垂直转轴的质量对称面）

满足平面运动的惯量条件

惯性力的简化有简单的结果



- **平面一般运动刚体惯性力的简化**

（有质量对称面，单刚体）

向质心*C*简化

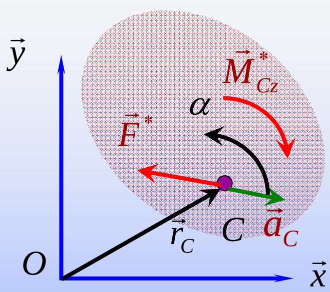
主矢 $F_x^* = ma_{Cx} = m\ddot{x}_C$

$F_y^* = ma_{Cy} = m\ddot{y}_C$

主矩

$$\vec{M}_C^* = -\dot{\vec{L}}_C = -J_{Cz}\dot{\omega}\vec{z} = -J_{Cz}\alpha\vec{z}$$

$$M_{Cz}^* = J_{Cz}\alpha$$



$$\vec{F}^* = -m\vec{a}_C = -m\ddot{\vec{r}}_C$$

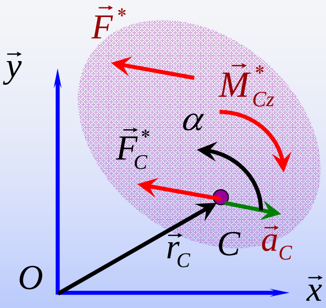
- **平面一般运动刚体惯性力的简化**

（有质量对称面，单刚体）

主矢 $\vec{F}^* = -m\vec{a}_C$

对质心C的主矩 $M_{Cz}^* = J_{Cz}\alpha$

对简化中心质心C的简化结果：



作用于质心C的力：$\vec{F}_C^* = \vec{F}^* = -m\vec{a}_C$

力偶：力偶矩矢量 $M_C^* = J_{Cz}\alpha$

$$F_x^* = ma_{Cx} = m\ddot{x}_C \qquad F_y^* = ma_{Cy} = m\ddot{y}_C$$

$$M_{Cz}^* = J_{Cz}\alpha = J_{Cz}\ddot{\varphi}$$

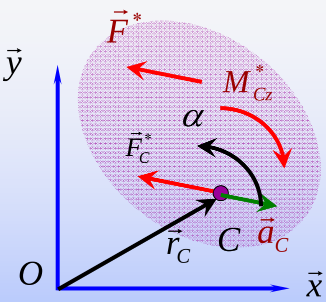
- **平动刚体惯性力的简化**

$\omega = 0 \qquad \alpha = 0 \qquad M_{Cz}^* = 0$

如果惯性力主矢的正向与质心加速度方向相反

$$F_x^* = ma_{Cx} = m\ddot{x}_C$$

$$F_y^* = ma_{Cy} = m\ddot{y}_C$$



平动刚体惯性力向质心简化结果：

只有一个过质心的力，其大小与方向等于惯性力的主矢

平动刚体惯性力向其他点简化结果？

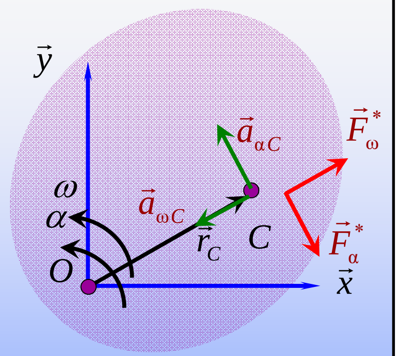
- 平面定轴转动刚体惯性力的简化

定轴O ω α

质心加速度 $\vec{a}_C = \vec{a}_{\omega C} + \vec{a}_{\alpha C}$

$a_{\omega C} = r_C\omega^2$ 质心向心加速度

$a_{\alpha C} = r_C\alpha$ 质心切向加速度



主矢

$$\vec{F}^* = \underbrace{-m\vec{a}_{\omega C}}_{\vec{F}^*_\omega} \underbrace{- m\vec{a}_{\alpha C}}_{\vec{F}^*_\alpha}$$

$$\vec{F}^* = -m\vec{a}_C = -m\ddot{\vec{r}}_C$$

$$\vec{F}^* = \vec{F}^*_\omega + \vec{F}^*_\alpha$$

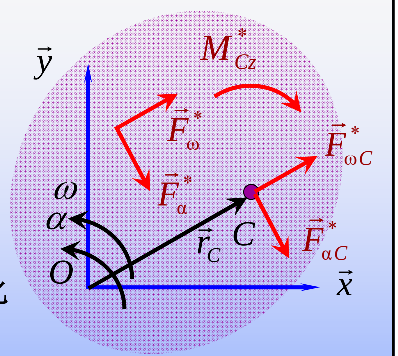
$F^*_\omega = mr_C\omega^2$ 离心惯性力

$F^*_\alpha = mr_C\alpha$ 切向惯性力

主矢 $\vec{F}^* = \vec{F}^*_\omega + \vec{F}^*_\alpha$

如果定义正向与 $\vec{a}_{\omega C}$ 反向 $F^*_\omega = mr_C\omega^2$

如果定义正向与 $\vec{a}_{\alpha C}$反向 $F^*_\alpha = mr_C\alpha$



对质心C的主矩 $M^*_{Cz} = J_{Cz}\alpha$

平面定轴转动刚体惯性力向质心C的简化结果（作为平面运动的特殊情况）：

一作用于质心C且等于主矢的力：分量为

$\vec{F}^*_{\omega C} = \vec{F}^*_\omega$ $\vec{F}^*_{\alpha C} = \vec{F}^*_\alpha$

一力偶：力偶矩矢量 $M^*_{Cz} = J_{Cz}\alpha$

定轴O　ω　α

对定轴O的主矩

质点P_k加速度　$\vec{a}_k = \vec{a}_{\omega k} + \vec{a}_{\alpha k}$

$$a_{\omega k} = r_k \omega^2 \qquad a_{\alpha k} = r_k \alpha$$

质点P_k惯性力

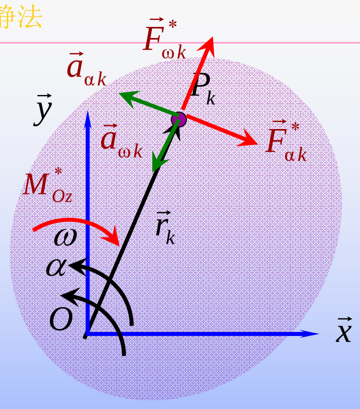
$$\vec{F}_k^* = -m_k \vec{a}_k = \vec{F}_{\omega k}^* + \vec{F}_{\alpha k}^*$$

$$F_{\omega k}^* = m_k r_k \omega^2 \qquad F_{\alpha k}^* = m_k r_k \alpha$$

$$\vec{M}_O^* = \sum_k \left(\vec{r}_k \times \vec{F}_k^*\right) = \sum_k \left(\vec{r}_k \times \vec{F}_{\alpha k}^*\right)$$

$$M_{Oz}^* = \sum_k \left(r_k m_k F_{\alpha k}^*\right) = \alpha \sum_k \left(m_k r_k^2\right) = \alpha J_{Oz}$$

$$M_{Oz} = J_{Oz} \alpha$$



主矢　$\vec{F}^* = \vec{F}_\omega^* + \vec{F}_\alpha^*$

如果定义正向与 $\vec{a}_{\omega C}$ 反向　$F_\omega^* = m r_C \omega^2$

如果定义正向与 $\vec{a}_{\alpha C}$反向　$F_\alpha^* = m r_C \alpha$

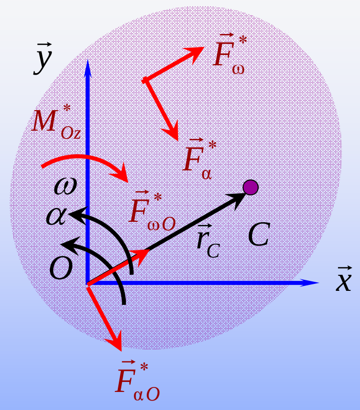
对定轴O的主矩　$M_{Oz}^* = J_{Oz} \alpha$

平面定轴转动刚体惯性力向定轴O的简化结果：

一作用于定轴O且等于主矢的力：分量为

$$\vec{F}_{\omega O}^* = \vec{F}_\omega^* \qquad \vec{F}_{\alpha O}^* = \vec{F}_\alpha^*$$

一力偶：力偶矩矢量 $M_{Oz}^* = J_{Oz} \alpha$



平面定轴转动刚体惯性力的简化结果：

对定轴***O***

作用点***O***的力 $\vec{F}^*_{\omega O}=\vec{F}^*_{\omega}$ $\quad\vec{F}^*_{\alpha O}=\vec{F}^*_{\alpha}$

力偶 $M^*_{Oz}=J_{Oz}\alpha$

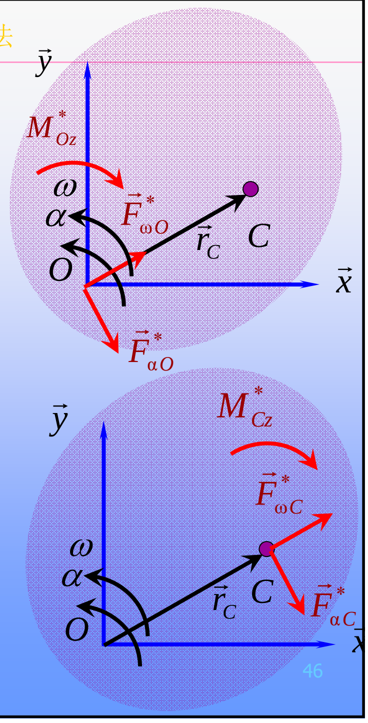
对质心***C***

作用点***C***的力 $\vec{F}^*_{\omega C}=\vec{F}^*_{\omega}$ $\quad\vec{F}^*_{\alpha C}=\vec{F}^*_{\alpha}$

力偶 $M^*_{Cz}=J_{Cz}\alpha$

如果定义正向与 $\vec{a}_{\omega C}$ 反向 $\quad F^*_{\omega}=mr_C\omega^2$

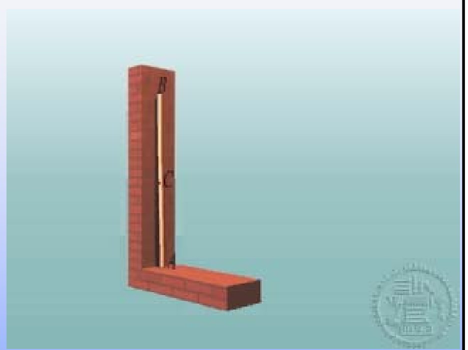
如果定义正向与 $\vec{a}_{\alpha C}$ 反向 $\quad F^*_{\alpha}=mr_C\alpha$



达朗贝尔原理的应用：写动力学方程

[例]

利用达朗贝尔原理建立杆***AB***的动力学方程



[解]

惯性基 $O-\vec{e}$ 选取 φ 为独立坐标

一般时刻

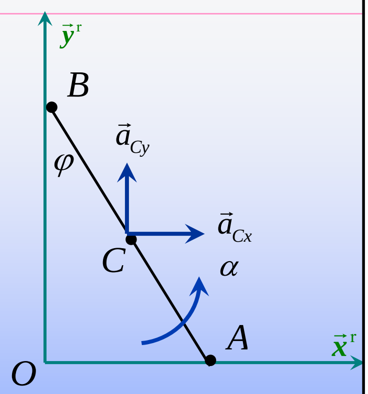
质心位置 $x_C = \dfrac{l}{2}\sin\varphi,\quad y_C = \dfrac{l}{2}\cos\varphi$

质心加速度

$$a_{Cx} = \ddot{x}_C = \frac{l}{2}\ddot{\varphi}\cos\varphi - \frac{l}{2}\dot{\varphi}^2\sin\varphi$$

$$a_{Cy} = \ddot{y}_C = -\frac{l}{2}\ddot{\varphi}\sin\varphi - \frac{l}{2}\dot{\varphi}^2\cos\varphi$$

角加速度 $\alpha = \ddot{\varphi}$



所有速度、加速度都取坐标正向

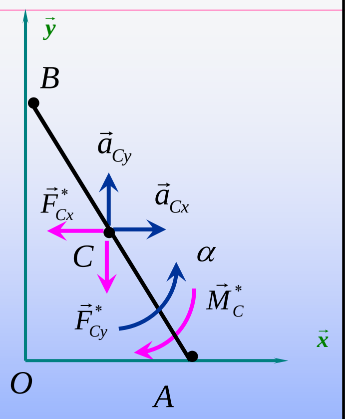
角速度、角加速度的正向为姿态角增大的方向

惯性力主矢 设定正向 与加速度方向相反

$$F_{Cx}^* = ma_{Cx} = \frac{ml}{2}\ddot{\varphi}\cos\varphi - \frac{ml}{2}\dot{\varphi}^2\sin\varphi$$

$$F_{Cy}^* = ma_{Cy} = -\frac{ml}{2}\ddot{\varphi}\sin\varphi - \frac{ml}{2}\dot{\varphi}^2\cos\varphi$$

惯性力主矩 设定正向 与角加速度方向相反



$$M_C^* = J_C\alpha = \frac{ml^2}{12}\ddot{\varphi}$$

注意惯性力系简化后的作用点应该在何处

受力分析（一般位置）

主动力 $m\vec{g}$

理想约束力 $\vec{F}_{\mathrm{N}A}$ $\vec{F}_{\mathrm{N}B}$

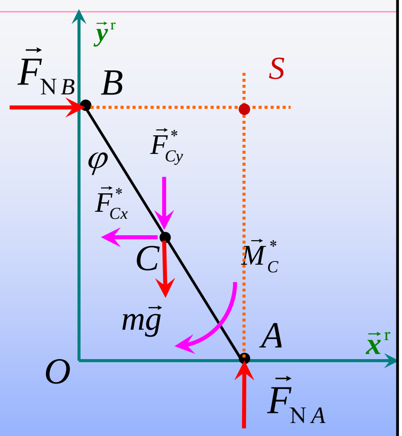
达朗贝尔惯性力 $\vec{F}_{Cx}^*$ $\vec{F}_{Cy}^*$ $\vec{M}_C^*$

平衡分析（一般位置）

$\sum M_{Sz}(\vec{F}_k)=0$ 未知约束力不出现

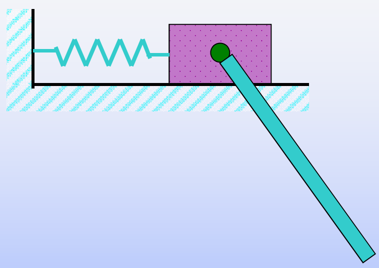
$$-M_C^*-\frac{F_{Cx}^* l}{2}\cos\varphi+\frac{(F_{Cy}^*+mg)l}{2}\sin\varphi=0$$

$$\ddot{\varphi}-\frac{3g}{2l}\sin\varphi=0$$



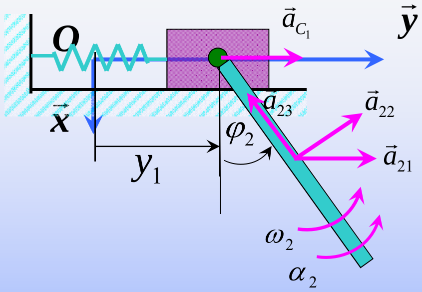
[例]

图示机构由均质滑块和长为**$2l$**的均质杆组成。
刚度为**k**的线弹簧连接滑块与墙面。
滑块在光滑的水平面滑动，均质杆由转动铰悬挂在滑块的质心**C_1**上可在铅垂面内摆动。滑块和摆杆质量分别为**m_1**和**m_2**



试利用达朗贝尔原理建立系统的独立坐标动力学方程

[解] 惯性基 $O-\vec{e}$ 点O在弹簧原长处



运动学分析

自由度为2

选取独立坐标 $y_1 \quad \varphi_2$

位形加速度分析

$$a_{C_1} = \ddot{y}_1 \quad \omega_2 = \dot{\varphi}_2 \quad \alpha_2 = \ddot{\varphi}_2$$

$$\vec{a}_{C_2} = \vec{a}_{21} + \vec{a}_{22} + \vec{a}_{23}$$

$$a_{21} = \ddot{y}_1,\ a_{22} = l\ddot{\varphi}_2,\ a_{23} = l\dot{\varphi}_2^2$$

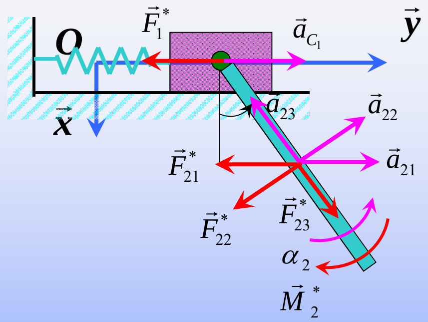
所有速度、加速度都取坐标正向

角速度、角加速度的正向为姿态角增大的方向

$$a_{C_1} = \ddot{y}_1 \quad \omega_2 = \dot{\varphi}_2 \quad \alpha_2 = \ddot{\varphi}_2$$

$$\vec{a}_{C_2} = \vec{a}_{21} + \vec{a}_{22} + \vec{a}_{23}$$

$$a_{21} = \ddot{y}_1,\ a_{22} = l\ddot{\varphi}_2,\ a_{23} = l\dot{\varphi}_2^2$$



达朗贝尔惯性力

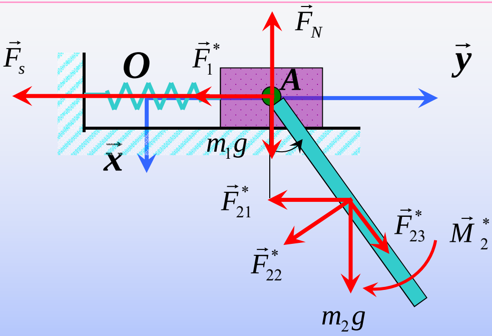
$$F_1^* = m_1\ddot{y}_1$$

$$F_{21}^* = m_2\ddot{y}_1 \qquad F_{22}^* = m_2 l\ddot{\varphi}_2$$

$$F_{23}^* = m_2 l\dot{\varphi}_2^2 \qquad M_2^* = \frac{m_2 l^2}{3}\ddot{\varphi}$$

受力分析

$\vec{F}_N$ $\vec{F}_s$ $m_1 g$ $m_2 g$



平衡方程

整体为对象 $\sum F_{iy} = 0$

$$(m_1 + m_2)\ddot{y}_1 + m_2 l\ddot{\varphi}_2 \cos\varphi_2 = -ky_1 + m_2 l\dot{\varphi}_2^2 \sin\varphi_2$$

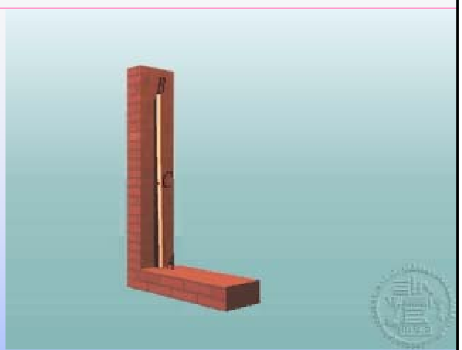
杆为对象 $\sum M_A = 0$

$$\ddot{y}_1 \cos\varphi_2 + \frac{4}{3} l\ddot{\varphi}_2 = -g\sin\varphi_2$$

达朗贝尔原理的应用：瞬时动力学问题

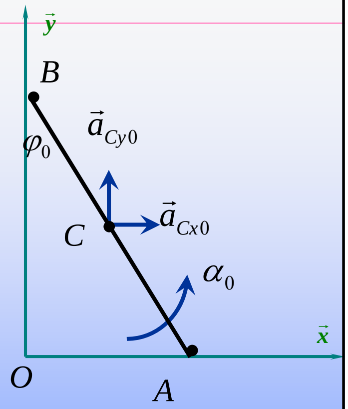
[例]

均质杆***AB***长为***l***，质量为***m***。
当该杆由静止开始，在地面与墙面上无摩擦地滑动



试利用达朗贝尔原理求解杆刚开始滑动时的角加速度与约束反力

[解]　惯性基 $O-\vec{e}$



运动学分析

杆的运动为平面一般运动

开始时刻　$\varphi = \varphi_0$

杆的角速度　$\omega_0 = \dot{\varphi}_0 = 0$

杆的角加速度　$\alpha_0 = \ddot{\varphi}_0 = ?$　定义正向

一般时刻

质心位置　$x_C = \frac{l}{2}\sin\varphi,\quad y_C = \frac{l}{2}\cos\varphi$

质心加速度

$$\ddot{x}_C = \frac{l}{2}\ddot{\varphi}\cos\varphi - \frac{l}{2}\dot{\varphi}^2\sin\varphi$$

$$\ddot{y}_C = -\frac{l}{2}\ddot{\varphi}\sin\varphi - \frac{l}{2}\dot{\varphi}^2\cos\varphi$$

开始时刻

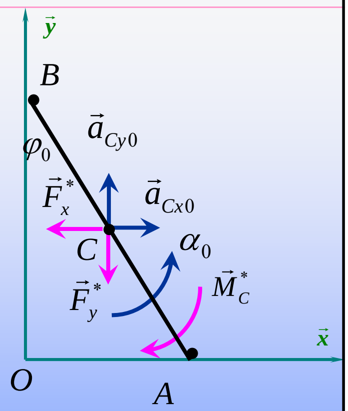
质心加速度

$$a_{Cx0} = \frac{l}{2}\ddot{\varphi}_0\cos\varphi_0$$

$$a_{Cy0} = -\frac{l}{2}\ddot{\varphi}_0\sin\varphi_0$$

$a_{Cx0} = \frac{l}{2}\ddot{\varphi}_0\cos\varphi_0$　　$\omega_0 = \dot{\varphi}_0 = 0$

$a_{Cy} = -\frac{l}{2}\ddot{\varphi}_0\sin\varphi_0$　　$\alpha_0 = \ddot{\varphi}_0 = ?$



惯性力主矢　　设定正向　与加速度方向相反

$$F_x^* = ma_{Cx0} = \frac{ml}{2}\ddot{\varphi}_0\cos\varphi_0$$

$$F_y^* = ma_{Cy0} = -\frac{ml}{2}\ddot{\varphi}_0\sin\varphi_0$$

惯性力主矩　　设定正向　与角加速度方向相反

$$M_C^* = J_C\alpha_0 = \frac{ml^2}{12}\ddot{\varphi}_0$$

注意惯性力系简化后
的作用点应该在何处

惯性力主矢

$$F_x^* = \frac{ml}{2}\ddot{\varphi}_0 \cos\varphi_0 \quad F_y^* = -\frac{ml}{2}\ddot{\varphi}_0 \sin\varphi_0$$

惯性力主矩 $M_C^* = \dfrac{ml^2}{12}\ddot{\varphi}_0$

受力分析

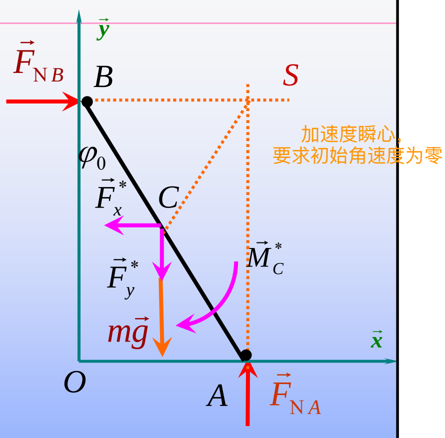
主动力 $m\vec{g}$ 理想约束力 $\vec{F}_{NA}$ $\vec{F}_{NB}$

平衡分析 φ_0 时刻

$$\sum_k M_{Sz}(\vec{F}_k) = 0$$ 未知约束力不出现

$$-M_C^* - \frac{F_x^* l}{2}\cos\varphi_0 + \frac{(F_y^* + mg)l}{2}\sin\varphi_0 = 0$$

$$\alpha_0 = \ddot{\varphi}_0 = \frac{3g}{2l}\sin\varphi_0$$



$$F_x^* = \frac{ml}{2}\ddot{\varphi}_0 \cos\varphi_0 \quad F_y^* = -\frac{ml}{2}\ddot{\varphi}_0 \sin\varphi_0$$

$$M_C^* = \frac{ml^2}{12}\ddot{\varphi}_0$$

平衡分析

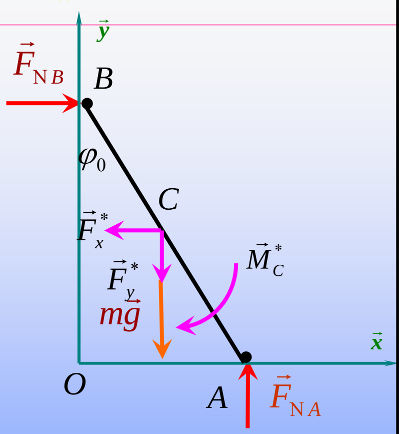
$$\sum_k m_{Sz}(\vec{F}_k) = 0 \quad \alpha_0 = \ddot{\varphi}_0 = \frac{3g}{2l}\sin\varphi_0$$

$$\sum_k F_{kx} = 0 \qquad F_{NB} - F_x^* = 0$$

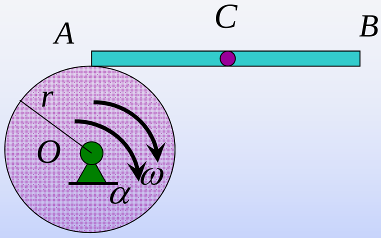
$$\sum_k F_{ky} = 0 \qquad F_{NA} - F_y^* - mg = 0$$

$$F_{NB} = F_x^* = \frac{3mg}{4}\cos\varphi_0 \sin\varphi_0$$

$$F_{NA} = mg + F_y^* = mg\left(1 - \frac{3}{4}\sin^2\varphi_0\right)$$



[例]

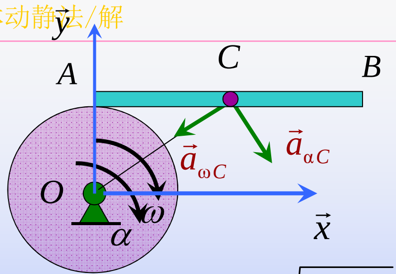


质量为*m*，长为*l*的均质杆*AB*一端*A*与半径为*r*的圆盘的边缘固结
圆盘以角速度ω与角加速度α绕*O*转动
不计重力

固定端约束,
两个方向的力和约束力偶

计算图示瞬时*AB*杆在*A*处的约束力

[解] 连体基 $O-\vec{e}$



运动分析 定轴*O* ω α

质心加速度 $\vec{a}_C = \vec{a}_{\omega C} + \vec{a}_{\alpha C}$

$a_{\omega C} = b\omega^2$ $a_{\alpha C} = b\alpha$

$$b = \sqrt{r^2 + \frac{l^2}{4}}$$

惯性力向点*O*简化

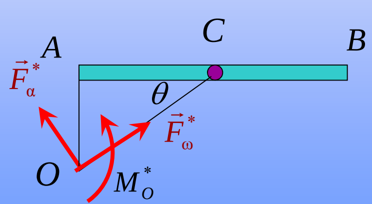
主矢正向设定

$F_{\omega}^{*} = mb\omega^2$ $F_{\alpha}^{*} = mb\alpha$

主矩正向设定

$M_O^{*} = J_O\alpha$

$$J_O = J_C + mb^2 = m(\frac{1}{3}l^2 + r^2)$$



注意惯性力系简化后
的作用点应该在何处

连体基 $O-\vec{e}$

$F_{\omega C}^{*}=mb\omega^{2}\quad F_{\alpha}^{*}=mb\alpha\quad M_{O}^{*}=J_{O}\alpha$

受力分析　对象**AB**

理想约束力正向设定 $F_{Ax}\quad F_{Ay}\quad M_{A}$

平衡分析

$$\sum_k F_{kx}=0$$

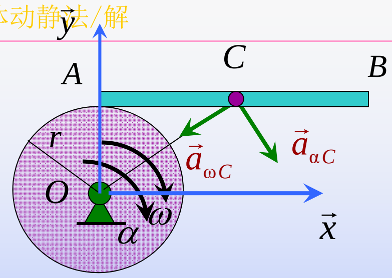
$$F_{Ax}-F_{\alpha}^{*}\sin\theta+F_{\omega}^{*}\cos\theta=0$$

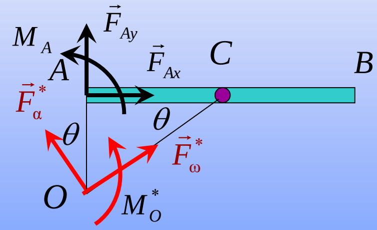
$$\sum_k F_{ky}=0$$

$$F_{Ay}+F_{\alpha}^{*}\cos\theta+F_{\omega}^{*}\sin\theta=0$$

$$\sum_k M_{Az}(\vec{F}_k)=0$$

$$M_{A}+M_{O}^{*}-rF_{\alpha}^{*}\sin\theta+rF_{\omega}^{*}\cos\theta=0$$





$b\sin\theta=r$

$b\cos\theta=l/2$

分析力学基础/达朗贝尔原理/平面运动刚体动静法/解

连体基 $O-\vec{e}$

$F_{\omega C}^{*}=mb\omega^{2}\quad F_{\alpha}^{*}=mb\alpha\quad M_{O}^{*}=J_{O}\alpha$

平衡方程

$$F_{Ax}-F_{\alpha}^{*}\sin\theta+F_{\omega}^{*}\cos\theta=0$$

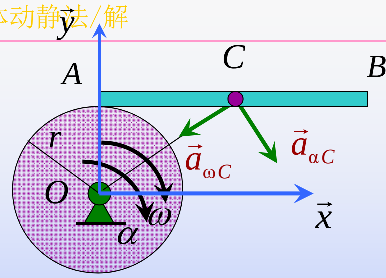
$$F_{Ay}+F_{\alpha}^{*}\cos\theta+F_{\omega}^{*}\sin\theta=0$$

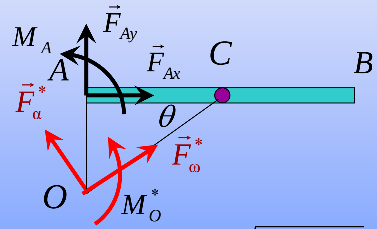
$$M_{A}+M_{O}^{*}-rF_{\alpha}^{*}\sin\theta+rF_{\omega}^{*}\cos\theta=0$$

$$F_{Ax}=mr\alpha-\frac{1}{2}ml\omega^{2}$$

$$F_{Ay}=-\frac{1}{2}ml\alpha-mr\omega^{2}$$

$$M_{A}=-\frac{1}{2}ml^{2}\alpha-\frac{1}{2}mrl\omega^{2}$$





$b=\sqrt{r^{2}+l^{2}/4}$

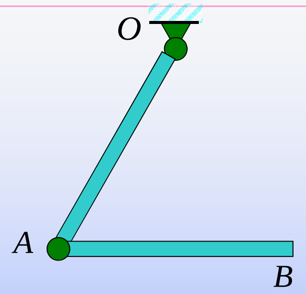
$J_{O}=J_{C}+mb^{2}=m(r^{2}+l^{2}/3)$

$b\sin\theta=r\qquad b\cos\theta=l/2$

[例]

两根质量为***m***，长为***l***的均质杆***OA***与***AB***以铰链连接，铰链***O***与机座连接

在图示位置无初速开始运动



求此瞬时两杆的瞬时角加速度

[解] 运动分析　　惯性基 $O-\vec{e}$

杆***OA***　定轴转动

角加速度 α_1　设定正向

质心加速度 $\vec{a}_{C_1}$　$a_{C1}=\alpha_1 l/2$

杆***AB***　平面一般运动

角加速度 α_2　设定正向

质心加速度 $\vec{a}_{C_2}=\vec{a}_{C_2x}+\vec{a}_{C_2y}$

连体基 $A-\vec{e}^2$

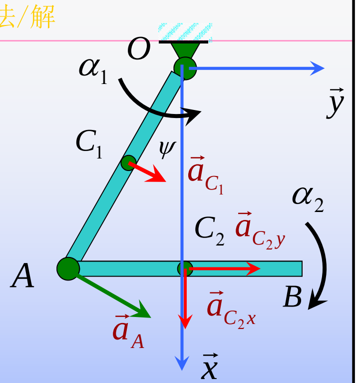
$$\vec{a}_{C_2}=\vec{a}^{e}_{tC_2}+\vec{a}^{e}_{\alpha C_2}+\cancel{\vec{a}^{e}_{\omega C_2}}$$

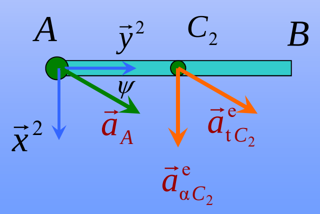
此瞬时角速度为**0**

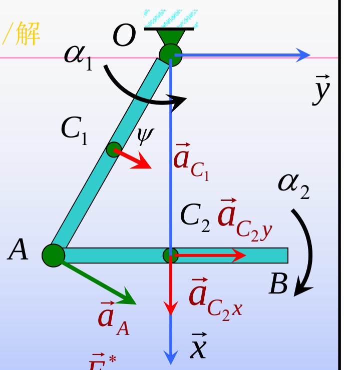
$$a^{e}_{tC2}=a_A=l\alpha_1 \qquad a^{e}_{\alpha C_2}=\alpha_2 l/2$$

$$a_{C_2x}=\alpha_1 l\sin\psi+l\alpha_2/2$$

$$a_{C_2y}=\alpha_1 l\cos\psi$$







$a_{C1}=\alpha_1 l/2 \qquad a_{C_2x}=\alpha_1 l\sin\psi + l\alpha_2/2$

$a_{C_2y}=\alpha_1 l\cos\psi$

惯性力分析

杆***OA*** 定轴转动 对点***O***简化

$F_1^*=m\alpha_1 l/2 \qquad M_{1O}^*=J_{1O}\alpha_1$

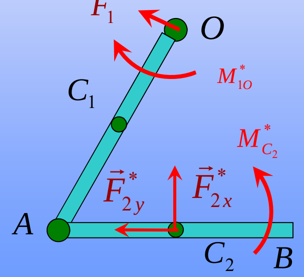
杆***AB*** 平面一般运动 对点***C*₂**简化

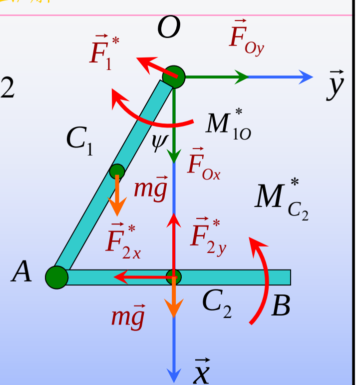
$F_{2x}^*=m\alpha_1 l\sin\psi + ml\alpha_2/2$

$F_{2y}^*=m\alpha_1 l\cos\psi$

$M_{C_2}^*=J_{C_2}\alpha_2$

注意惯性力系简化后的作用点应该在何处





$F_1^*=m\alpha_1 l/2 \qquad M_{1O}^*=J_{1O}\alpha_1$

$F_{2y}^*=m\alpha_1 l\cos\psi \qquad F_{2x}^*=m\alpha_1 l\sin\psi + ml\alpha_2/2$

$M_{C_2}^*=J_{C_2}\alpha_2$

受力分析

整体为对象

主动力 $m\vec{g}$ $m\vec{g}$ 约束力 $\vec{F}_{Ox}$ $\vec{F}_{Oy}$

平衡分析

$\sum_k M_{Oz}(\vec{F}_k)=0$

$M_{C_2}^* - M_{1O}^* - F_{2x}^* l\cos\psi + mgl\sin\psi/2=0$

$13\alpha_1-\alpha_2=3g/l$

$J_{1O}=m_2 l^2/3$

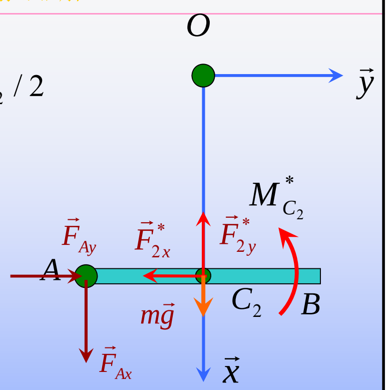
$J_{C_2}=m_2 l^2/12$

$\psi=\pi/6$

$F_1^* = m\alpha_1 l/2$ $\quad M_{1O}^* = J_{1O}\alpha_1$

$F_{2y}^* = m\alpha_1 l\cos\psi$ $\quad F_{2x}^* = m\alpha_1 l\sin\psi + ml\alpha_2/2$

$M_{C_2}^* = J_{C_2}\alpha_2$



受力分析

AB为对象

主动力 $m\vec{g}$ 约束力 $\vec{F}_{Ax}$ $\vec{F}_{Ay}$

平衡分析

$$\sum_k M_{Az}(\vec{F}_k) = 0$$

$$M_{C_2}^* + F_{2y}^* l/2 - mgl/2 = 0$$

$$3\alpha_1 - 4\alpha_2 = 6g/l$$

$J_{1O} = m_2 l^2/3$

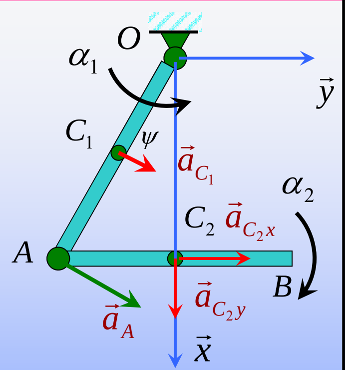
$J_{C_2} = m_2 l^2/12$

$\psi = \pi/6$

$$13\alpha_1 - \alpha_2 = 3\frac{g}{l}$$

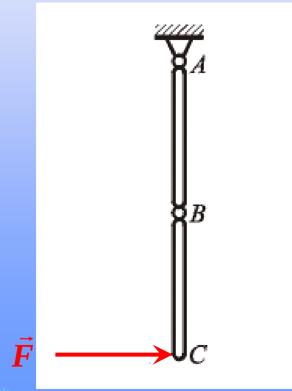
$$3\alpha_1 - 4\alpha_2 = 6\frac{g}{l}$$

$$\alpha_1 = \frac{18g}{55l} \qquad \alpha_2 = \frac{69g}{55l}$$



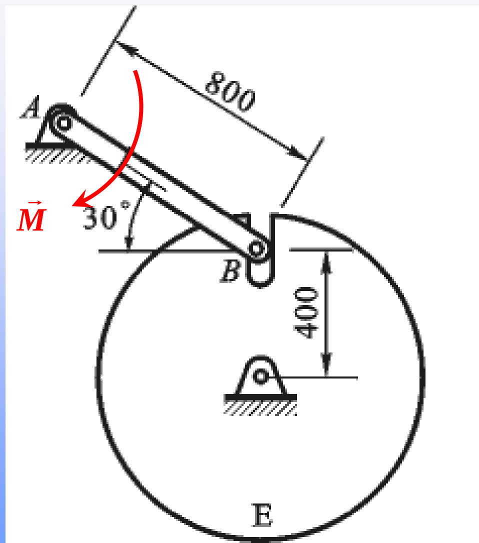
【例】

长l，重W的均质杆AB，BC在铅垂平面内用铰链B连接，并用铰链A固定如图示。今在C端作用一力$\vec{F}$。试求此瞬时两杆的角加速度。

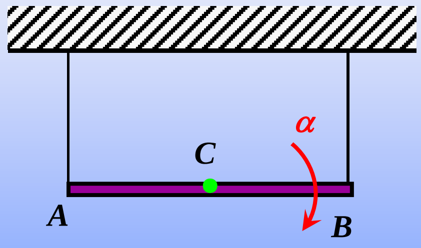


【例】

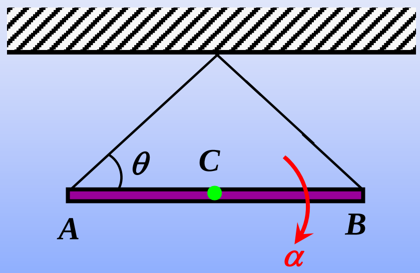
图示均质杆AB质量为18kg，长800mm，其A端固定，B端通过销子与盘E的光滑滑槽相连。盘E的质量为10kg，对于盘心的回转半径为300mm。若系统初始静止，试求当AB杆上作用一力偶M=15N.m时，杆与盘在图示瞬时的角加速度。



[例] 求剪断**B**端绳子瞬间杆子的角加速度（杆长为***l***，质量为***m***）



[例] 求剪断**B**端绳子瞬间杆子的角加速度（杆长为***l***，质量为***m***）



定轴转动刚体动静法 动反力

- 讨论对象

定轴转动刚体 ω α

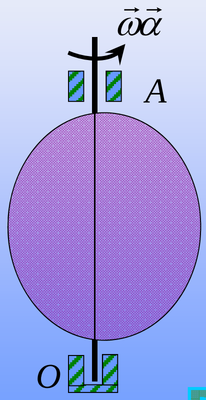
旋转轴$\boldsymbol{OA}$不是刚体的主轴

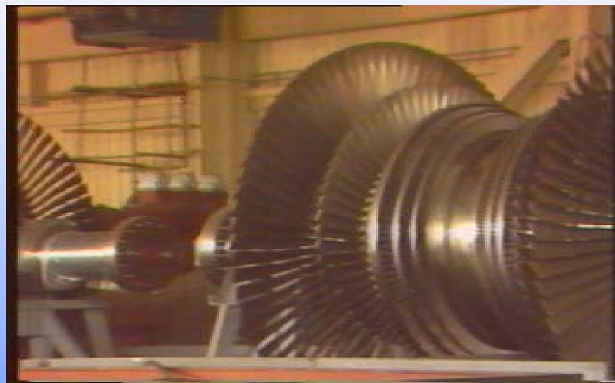
刚体的质心不在旋转轴$\boldsymbol{OA}$上

作用于刚体的力为空间力系

不能抽象为平面问题

刚体定轴转动的一般情况





重心不能偏

分析力学基础/达朗贝尔原理/定轴转动刚体动静法

- 运动分析

连体基 $O-\vec{e}$

刚体绕**Oz**轴的转角为 φ

角速度 $\vec{\omega}=\omega\vec{z}=\dot{\varphi}\vec{z}$

角加速度 $\vec{\alpha}=\alpha\vec{z}=\dot{\omega}\vec{z}=\ddot{\varphi}\vec{z}$

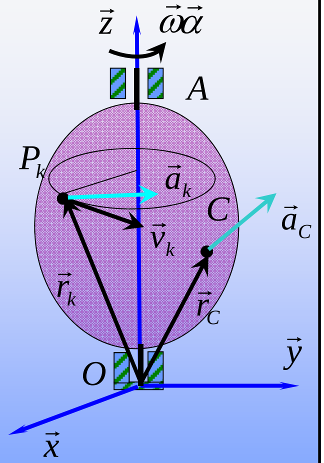
质点P_k的速度 $\vec{v}_k=\dot{\vec{r}}_k=\omega\vec{z}\times\vec{r}_k$

加速度

$$\vec{a}_k=\ddot{\vec{r}}_k=\alpha\vec{z}\times\vec{r}_k+\omega^2\vec{z}\times(\vec{z}\times\vec{r}_k)$$

质心**C**的加速度

$$\vec{a}_C=\ddot{\vec{r}}_C=\alpha\vec{z}\times\vec{r}_C+\omega^2\vec{z}\times(\vec{z}\times\vec{r}_C)$$



分析力学基础/达朗贝尔原理/定轴转动刚体动静法

- 惯性力的简化

$$\vec{a}_k=\alpha\vec{z}\times\vec{r}_k+\omega^2\vec{z}\times(\vec{z}\times\vec{r}_k)$$

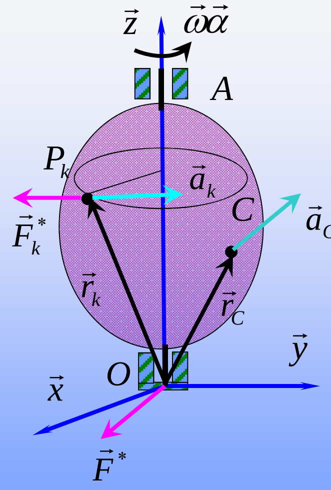
$$\vec{a}_C=\alpha\vec{z}\times\vec{r}_C+\omega^2\vec{z}\times(\vec{z}\times\vec{r}_C)$$

质点P_k的惯性力

$$\vec{F}_k^*=-m_k\vec{a}_k$$
$$=-\alpha m_k\vec{z}\times\vec{r}_k-\omega^2 m_k\vec{z}\times(\vec{z}\times\vec{r}_k)$$

惯性力主矢

$$\vec{F}^*=-m\vec{a}_C$$
$$=-m\alpha\vec{z}\times\vec{r}_C-m\omega^2\vec{z}\times(\vec{z}\times\vec{r}_C)$$



$$\vec{F}^*=-m\alpha\vec{z}\times\vec{r}_C-m\omega^2\vec{z}\times(\vec{z}\times\vec{r}_C)$$

$$\vec a_k = \alpha\vec z\times\vec r_k + \omega^2\vec z\times(\vec z\times\vec r_k)$$

$$\vec a_C = \alpha\vec z\times\vec r_C + \omega^2\vec z\times(\vec z\times\vec r_C)$$

$$\vec F_k^* = -m_k\vec a_k = -\alpha m_k\vec z\times\vec r_k - \omega^2 m_k\vec z\times(\vec z\times\vec r_k)$$

惯性力对点O的主矩

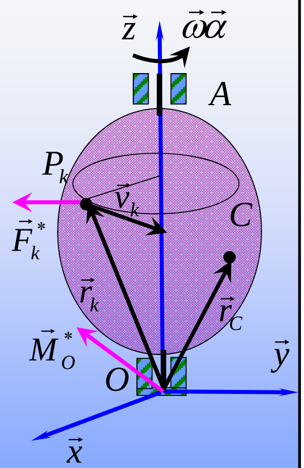
$$\vec M_O^* = \sum_{k=1}^{n}\vec r_k\times\vec F_k^*$$

$$= -\alpha\sum_{k=1}^{n} m_k\underline{\vec r_k\times(\vec z\times\vec r_k)} - \omega^2\sum_{k=1}^{n} m_k\underline{\vec r_k\times[\vec z\times(\vec z\times\vec r_k)]}$$

$$\vec r_k\times[\vec z\times(\vec z\times\vec r_k)] = -(\vec z\cdot\vec r_k)(\vec z\times\vec r_k)$$

$$\vec r_k\times(\vec z\times\vec r_k) = r_k^2\vec z - (\vec z\cdot\vec r_k)\vec r_k$$

$$\vec M_O^* = -\sum_{k=1}^{n} m_k\left[\alpha r_k^2\vec z - \alpha(\vec z\cdot\vec r_k)\vec r_k - \omega^2(\vec z\cdot\vec r_k)(\vec z\times\vec r_k)\right]$$



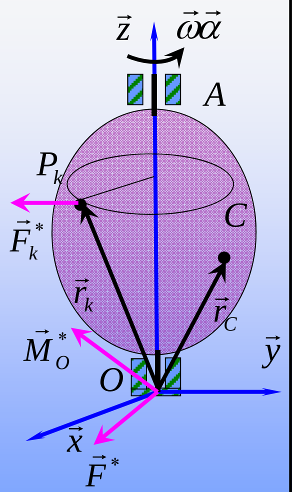
$$\vec a\times(\vec b\times\vec c) = (\vec a\cdot\vec c)\vec b - (\vec a\cdot\vec b)\vec c$$

定轴转动刚体惯性力的主矢

$$\vec F^* = -m\alpha\vec z\times\vec r_C - m\omega^2\vec z\times(\vec z\times\vec r_C)$$

定轴转动刚体惯性力对点O的主矩

$$\vec M_O^* = -\sum_{k=1}^{n} m_k\left[\alpha r_k^2\vec z - \alpha(\vec z\cdot\vec r_k)\vec r_k - \omega^2(\vec z\cdot\vec r_k)(\vec z\times\vec r_k)\right]$$

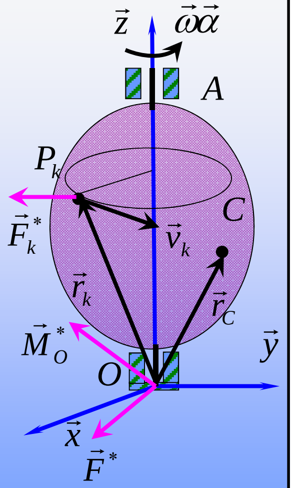


在连体基的坐标式

$$\boldsymbol F^* = -m\alpha\tilde{\boldsymbol z}\boldsymbol r_C - m\omega^2\tilde{\boldsymbol z}\tilde{\boldsymbol z}\boldsymbol r_C$$

$$\boldsymbol M_O^* = -\sum_{k=1}^{n} m_k\left[\alpha r_k^2\boldsymbol z - \alpha(\boldsymbol z^{\mathrm T}\boldsymbol r_k)\boldsymbol r_k - \omega^2(\boldsymbol z^{\mathrm T}\boldsymbol r_k)(\tilde{\boldsymbol z}\boldsymbol r_k)\right]$$

在连体基的坐标式



$$\boldsymbol{F}^*=-m\alpha\tilde{\boldsymbol z}\boldsymbol r_C-m\omega^2\tilde{\boldsymbol z}\tilde{\boldsymbol z}\boldsymbol r_C$$

$$\boldsymbol M_O^*=-\sum_{k=1}^{n}m_k\left[\alpha r_k^2\boldsymbol z-\alpha(\boldsymbol z^{\mathrm T}\boldsymbol r_k)\boldsymbol r_k-\omega^2(\boldsymbol z^{\mathrm T}\boldsymbol r_k)(\tilde{\boldsymbol z}\boldsymbol r_k)\right]$$

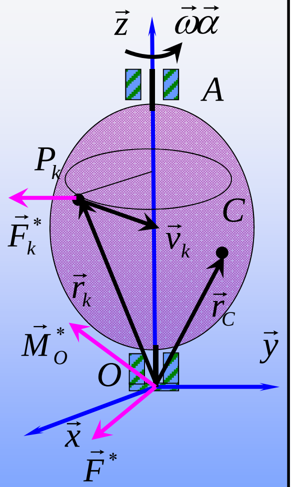
$$\boldsymbol z=\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix},\quad \tilde{\boldsymbol z}=\begin{pmatrix}0&-1&0\\1&0&0\\0&0&0\end{pmatrix},\quad r_C=\begin{pmatrix}x_C\\y_C\\z_C\end{pmatrix},\quad r_k=\begin{pmatrix}x_k\\y_k\\z_k\end{pmatrix}$$

$$\boldsymbol M_O^*=\sum_{k=1}^{n}m_k\left[\alpha\begin{pmatrix}z_kx_k\\z_ky_k\\-x_k^2-y_k^2\end{pmatrix}+\omega^2\begin{pmatrix}-z_ky_k\\z_kx_k\\0\end{pmatrix}\right]$$

$$\boldsymbol F^*=m\begin{pmatrix}\alpha y_C+\omega^2x_C\\-\alpha x_C+\omega^2y_C\\0\end{pmatrix}\qquad \boldsymbol M_O^*=\begin{pmatrix}J_{zx}\alpha-J_{zy}\omega^2\\J_{zy}\alpha+J_{zx}\omega^2\\-J_z\alpha\end{pmatrix}$$

$$r_k^2=x_k^2+y_k^2+z_k^2$$

小结：定轴转动刚体惯性力对点**O**可简化作用于点**O**一个力与一力偶



该力等于惯性力系的主矢 $\vec F^*$

该力偶的力偶矩矢量等于惯性力系对点**O**的主矩 $\vec M_O^*$

在连体基的坐标式

$$\boldsymbol F^*=m\begin{pmatrix}\alpha\cancel{y_C}+\omega^2\cancel{x_C}\\-\alpha\cancel{x_C}+\omega^2\cancel{y_C}\\0\end{pmatrix}\qquad \boldsymbol M_O^*=\begin{pmatrix}\cancel{J_{zx}}\alpha-J_{zy}\cancel{\omega^2}\\\cancel{J_{zy}}\alpha+J_{zx}\cancel{\omega^2}\\-J_z\alpha\end{pmatrix}$$

当质心在**Oz**轴上 $\boldsymbol F^*=\boldsymbol 0$

当**Oz**轴为刚体的主轴 $\boldsymbol M_O^*=\begin{pmatrix}0\\0^2\\-J_z\alpha\end{pmatrix}$ $\vec M_O^*=-J_z\alpha\vec z$

- 定轴运动刚体达朗贝尔原理

受力分析

主动力对点**O**的主矢与主矩 $\vec{F}^{a}$ $\vec{M}_{O}^{a}$

约束力 $\vec{F}_{Ax}$ $\vec{F}_{Ay}$ $\vec{F}_{Ox}$ $\vec{F}_{Oy}$ $\vec{F}_{Oz}$

平衡方程（空间力系）

$$\sum_k F_{kx}=0 \qquad F_x^{*}+F_x^{a}+F_{Ax}+F_{Ox}=0$$

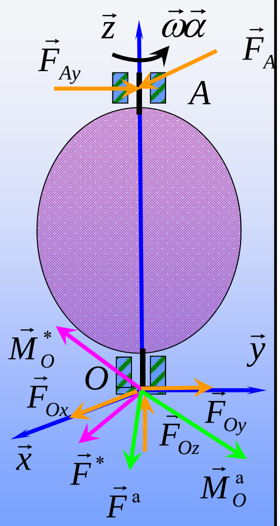
$$\sum_k F_{ky}=0 \qquad F_y^{*}+F_y^{a}+F_{Ay}+F_{Oy}=0$$

$$\sum_k F_{kz}=0 \qquad F_z^{a}+F_{Oz}=0$$

$$\sum_k m_{Ox}(\vec{F}_k)=0 \qquad M_{Ox}^{*}+M_{Ox}^{a}+lF_{Ay}=0$$

$$\sum_k m_{Oy}(\vec{F}_k)=0 \qquad M_{Oy}^{*}+M_{Oy}^{a}+lF_{Ax}=0$$

$$\sum_k m_{Oz}(\vec{F}_k)=0 \qquad M_{Oz}^{*}+M_{Oz}^{a}=0$$



$$\boldsymbol{F}^{*}=m\begin{pmatrix}\alpha y_C+\omega^2 x_C\\ -\alpha x_C+\omega^2 y_C\\ 0\end{pmatrix} \qquad \boldsymbol{M}_O^{*}=\begin{pmatrix}J_{zx}\alpha-J_{zy}\omega^2\\ J_{zy}\alpha+J_{zx}\omega^2\\ -J_z\alpha\end{pmatrix}$$

平衡方程

$$\sum_k F_{kx}=0 \qquad m\alpha y_C+m\omega^2 x_C+F_x^{a}+F_{Ax}+F_{Ox}=0$$

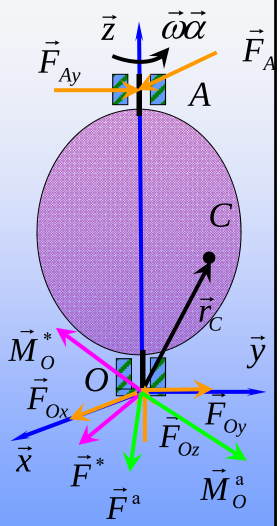
$$\sum_k F_{ky}=0 \qquad -m\alpha x_C+m\omega^2 y_C+F_y^{a}+F_{Ay}+F_{Oy}=0$$

$$\sum_k F_{kz}=0 \qquad F_z^{a}+F_{Oz}=0$$

$$\sum_k m_{Ox}(\vec{F}_k)=0 \qquad J_{zx}\alpha-J_{zy}\omega^2+M_{Ox}^{a}+lF_{Ay}=0$$

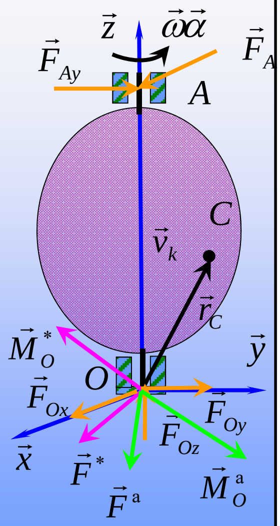
$$\sum_k m_{Oy}(\vec{F}_k)=0 \qquad J_{zy}\alpha+J_{zx}\omega^2+M_{Oy}^{a}+lF_{Ax}=0$$

$$\sum_k m_{Oz}(\vec{F}_k)=0 \qquad -J_z\alpha+M_{Oz}^{a}=0$$



5个方程可以解出理想约束力

$$\cancel{m\alpha y_C + m\omega^2 x_C} + F_x^{a} + F_{Ax} + F_{Ox} = 0$$
$$\cancel{-m\alpha x_C + m\omega^2 y_C} + F_y^{a} + F_{Ay} + F_{Oy} = 0$$
$$F_z^{a} + F_{Oz} = 0$$
$$\cancel{J_{zx}\alpha - J_{zy}\omega^2} + M_{Ox}^{a} + lF_{Ay} = 0$$
$$\cancel{J_{zy}\alpha + J_{zx}\omega^2} + M_{Oy}^{a} + lF_{Ax} = 0$$



刚体不转动　静平衡方程

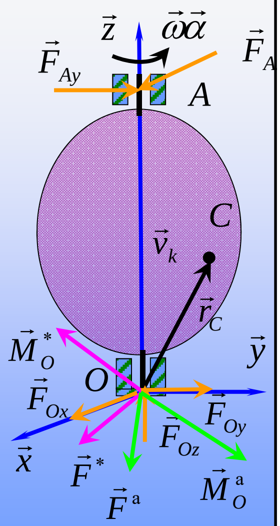
$$F_x^{a} + F_{Ax} + F_{Ox} = 0$$
$$F_y^{a} + F_{Ay} + F_{Oy} = 0$$
$$F_z^{a} + F_{Oz} = 0$$
$$M_{Ox}^{a} + lF_{Ay} = 0$$
$$M_{Oy}^{a} + lF_{Ax} = 0$$

约束力与主动力有关

可以解出理想约束反力

静约束反力

$$m\alpha y_C + m\omega^2 x_C + \cancel{F_x^{a}} + F_{Ax} + F_{Ox} = 0$$
$$-m\alpha x_C + m\omega^2 y_C + \cancel{F_y^{a}} + F_{Ay} + F_{Oy} = 0$$
$$\cancel{F_z^{a}} + F_{Oz} = 0$$
$$J_{zx}\alpha - J_{zy}\omega^2 + \cancel{M_{Ox}^{a}} + lF_{Ay} = 0$$
$$J_{zy}\alpha + J_{zx}\omega^2 + \cancel{M_{Oy}^{a}} + lF_{Ax} = 0$$



不考虑静约束反力部分　动平衡方程　刚体的约束力与刚体的运动有关

$$m\alpha y_C + m\omega^2 x_C + F_{Ax} + F_{Ox} = 0$$
$$-m\alpha x_C + m\omega^2 y_C + F_{Ay} + F_{Oy} = 0$$
$$J_{zx}\alpha - J_{zy}\omega^2 + lF_{Ay} = 0$$
$$J_{zy}\alpha + J_{zx}\omega^2 + lF_{Ax} = 0$$

解出理想动反力

动约束反力

动平衡方程

$$m\alpha y_C + m\omega^2 x_C + F_{Ax} + F_{Ox} = 0$$

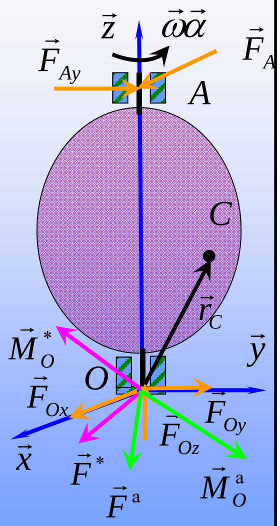
$$-m\alpha x_C + m\omega^2 y_C + F_{Ay} + F_{Oy} = 0$$

$$J_{zx}\alpha - J_{zy}\omega^2 + lF_{Ay} = 0$$

$$J_{zy}\alpha + J_{zx}\omega^2 + lF_{Ax} = 0$$

当*Oz*轴为主轴，质心在*Oz*轴上
轴承的动反力为零

系统处于动平衡

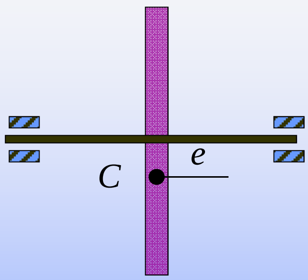


[例]

一质量为**m**均质圆盘转子以匀角速度旋转，轴承的布置对称，离转子中心均为***l*=0.5m**

角速度***ω*=12000r/min**

圆盘的质心***C***偏离该轴为***e*=0.01cm**



求轴承动反力

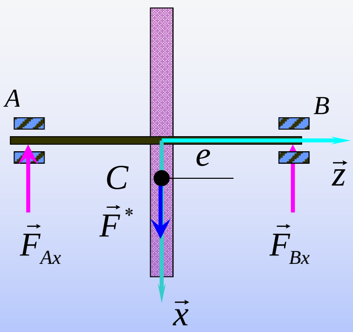
[解] 连体基 $C-\vec{e}$

$x_C = e \qquad y_C = z_C = 0$

Oz为主轴 $J_{xz} = 0 \quad J_{yz} = 0$

惯性力

$$F^* = m\begin{pmatrix} \cancel{\alpha y_C} + \omega^2 x_C \\ -\cancel{\alpha x_C} + \omega^2 y_C \\ 0 \end{pmatrix} \qquad M_O^* = \begin{pmatrix} J_x\cancel{\alpha} - J_{zy}\cancel{\omega^2} \\ J_{zy}\cancel{\alpha} + J_{zx}\cancel{\omega^2} \\ -J_z\cancel{\alpha} \end{pmatrix}$$



$\alpha = 0$

$F_x^* = m\omega^2 e \qquad F_y^* = F_z^* = 0 \qquad M_{Ox}^* = 0 \quad M_{Oy}^* = 0 \quad M_{Oz}^* = 0$

约束力 考虑到对称性 $F_{Ax} = F_{Bx}$ ***e*=0.01cm**

动平衡方程 $F_{Ax} = F_{Bx} = \dfrac{1}{2}F_x^* \quad = \dfrac{1}{2}m\omega^2 e = 16.1\dfrac{mg}{2}$

静反力 $F_{Ax} = F_{Bx} = \dfrac{mg}{2}$ 动反力是静反力**16.1**倍

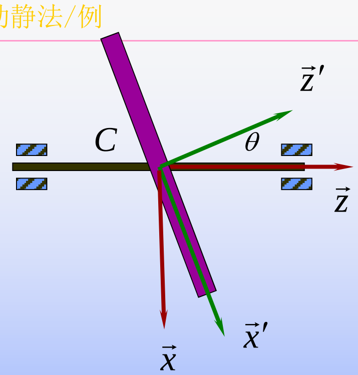
[例]

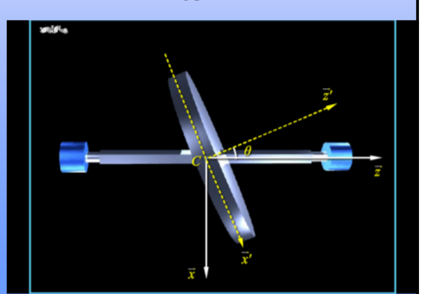
一质量为**m**均质圆盘转子以匀角速度旋转，轴承的布置对称，离转子中心均为***l*=0.5m**

角速度***ω*=12000r/min**

转子转轴与圆盘中心轴一小偏角

$\theta = 1^\circ$





求轴承动反力

[解] 连体基1 $C-\vec{e}'$ 中心主轴基

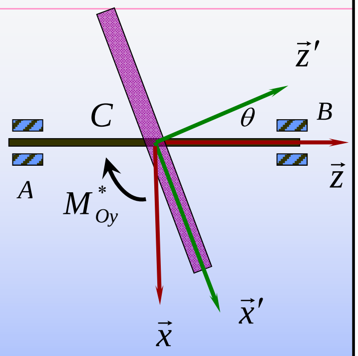
连体基2 $C-\vec{e}$

Ox与**Oz**非主轴， **Oy**为主轴

$$J_{xz}\neq 0 \quad J_{yz}=0 \quad x_C=y_C=z_C=0$$

惯性力

$$\boldsymbol{F}^*=m\begin{pmatrix}\cancel{\alpha y_C}+\cancel{\omega^2 x_C}\\ -\cancel{\alpha x_C}+\cancel{\omega^2 y_C}\\ 0\end{pmatrix} \qquad \boldsymbol{M}_O^*=\begin{pmatrix}\cancel{J_{zx}\alpha}-\cancel{J_{zy}\omega^2}\\ \cancel{J_{zy}\alpha}+J_{zx}\omega^2\\ \cancel{-J_z\alpha}\end{pmatrix}$$



$$\alpha=0$$

$$F_x^*=F_y^*=F_z^*=0$$

$$M_{Ox}^*=0,\quad M_{Oy}^*=J_{zx}\omega^2,\quad M_{Oz}^*=0$$

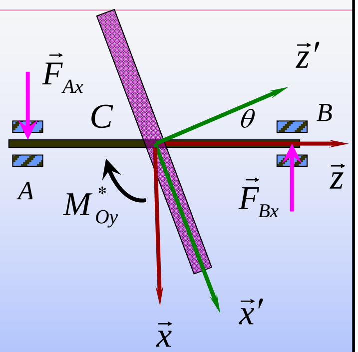
分析力学基础/达朗贝尔原理/定轴转动刚体动静法/解

连体基1 $C-\vec{e}'$ 中心主轴基

连体基2 $C-\vec{e}$ **Ox**与**Oz**非主轴， **Oy**为主轴

惯性力 $F_x^*=F_y^*=F_z^*=0$

$$M_{Ox}^*=0,\quad M_{Oy}^*=J_{zx}\omega^2,\quad M_{Oz}^*=0$$



约束力 考虑到对称性 $F_{Ax}=F_{Bx}$

动平衡方程 $M_{Oy}^*-2F_{Bx}l=0$

$$F_{Ax}=F_{Bx}=J_{xz}\omega^2/2l$$

$$F_{Ax}=F_{Bx}=56.4\frac{mg}{2}$$

$$J_{xz}=(J_{z'}-J_{x'})\sin\theta\cos\theta$$

$$=\frac{mr^2}{4}\sin\theta\cos\theta$$

$$\theta=1^\circ$$

静反力 $-F_{Ax}=F_{Bx}=\dfrac{mg}{2}$

动反力是静反力**56.4**倍

小结

- 动反力的计算可通过动平衡方程
  - 约束反力与达朗贝尔惯性力
- 静反力的计算可通过静平衡方程
  - 约束反力与主动力
- 动反力可能远大于静反力
- 动反力的产生与系统的质量分布有关
  - 通过调整质心位置与主轴的方位可消除动约束反力

$$\boldsymbol{F}^* = m\begin{pmatrix} \alpha y_C + \omega^2 x_C \\ -\alpha x_C + \omega^2 y_C \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \boldsymbol{M}_O^* = \begin{pmatrix} J_{zx}\alpha - J_{zy}\omega^2 \\ J_{zy}\alpha + J_{zx}\omega^2 \\ -J_z\alpha \end{pmatrix}$$