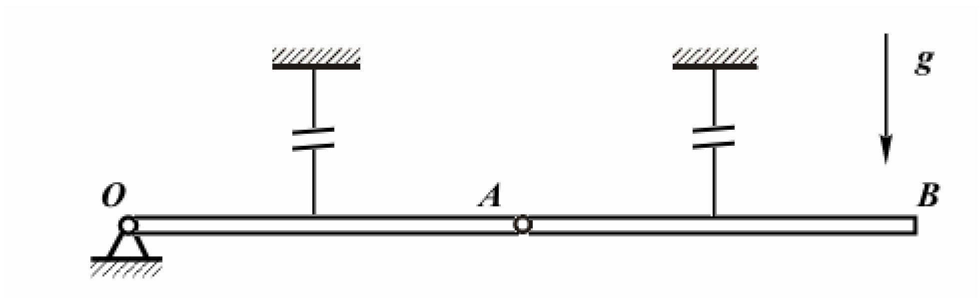
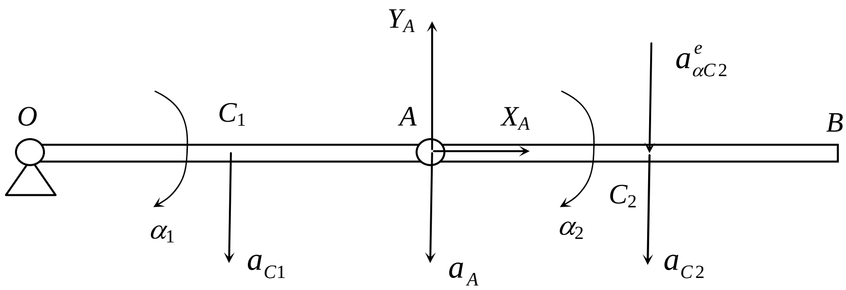
上海交通大学理论力学期终考试答案（A 卷）

姓名__________ 班级___________ 学号___________ 成绩___________



1．两根质量为 m，长为 l 的均质杆 OA 和 AB 以铰链连接，铰链 O 与机座连接，图示位置 OA 和 AB 水平，用软绳挂在支撑处。试用达兰贝尔原理计算在软绳剪断的瞬时（系统在图示位置无初速开始运动），杆 OA 和 AB 的角加速度。

解法[1]：



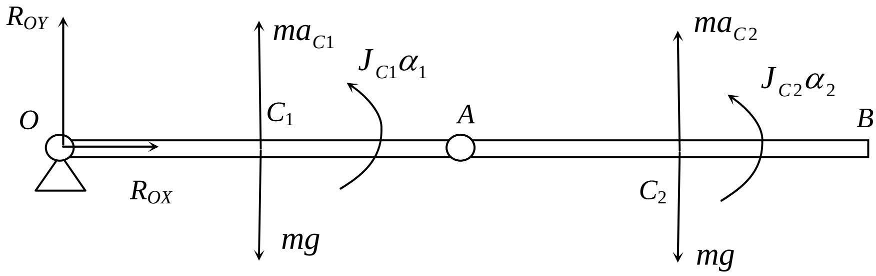
系统在图示位置无初速开始运动时，$\omega_1 = \omega_2 = 0$，得到 $a_{C1} = \frac{1}{2} l\alpha_1$。

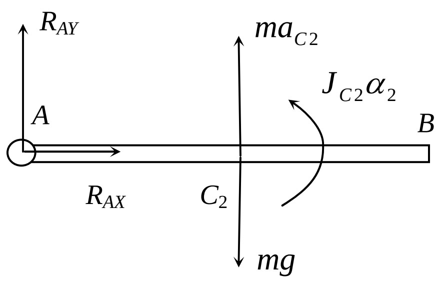
取 A 为基点，建立平动坐标系 AX_AY_A，$a_A = l\alpha_1$　(1)

AB 质心 C_2 的加速度的矢量式为

$$\vec{a}_{C2} = \vec{a}^e_{tC2} + \vec{a}^e_{\alpha C2} = \vec{a}_A + \vec{a}^e_{\alpha C2}$$

Y 方向投影式：$a_{C2} = a_A + a^e_{\alpha C2} = l\alpha_1 + \frac{1}{2} l\alpha_2$　　(2)





取系统为研究对象，由达兰贝尔原理，真实力和惯性力对 O 点的主矩为 0

$$J_{C1}\alpha_1 + J_{C2}\alpha_2 + ma_{C1}\frac{l}{2} + ma_{C2}\frac{3l}{2} - mg\frac{l}{2} - mg\frac{3l}{2} = 0$$

将(1)和(2)代入以上方程

$$\frac{1}{12}ml^2\alpha_1 + \frac{1}{12}ml^2\alpha_2 + m\frac{l^2}{4}\alpha_1 + m\frac{3l}{2}\left(l\alpha_1 + \frac{1}{2}l\alpha_2\right) - mg\frac{l}{2} - mg\frac{3l}{2} = 0$$

化简得到

$$11ml^2\alpha_1 + 5ml^2\alpha_2 - 12mgl = 0 \qquad (3)$$

取 AB 为研究对象，由达兰贝尔原理，真实力和惯性力对 O 点的主矩为 0

$$J_{C2}\alpha_2 + ma_{C2}\frac{l}{2} - mg\frac{l}{2} = 0$$

将(2)代入以上方程

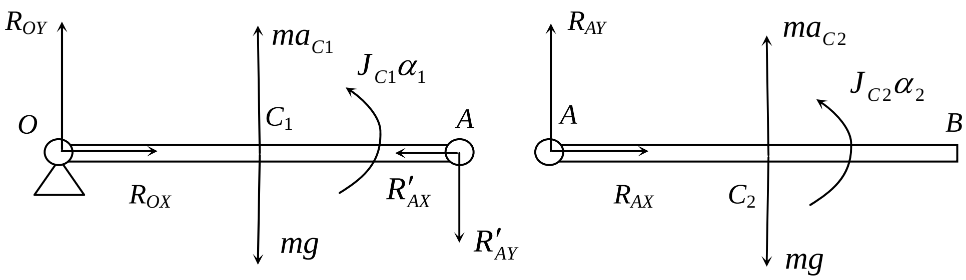
$$\frac{1}{12}ml^2\alpha_2 + m\frac{l}{2}\left(l\alpha_1 + \frac{1}{2}l\alpha_2\right) - mg\frac{l}{2} = 0$$

化简得到

$$3ml^2\alpha_1 + 2ml^2\alpha_2 - 3mgl = 0 \qquad (4)$$

由(3)，(4)， $\alpha_1 = \frac{9g}{7l}$， $\alpha_2 = -\frac{3g}{7l}$

解法[2]：



取 OA 为研究对象，由达兰贝尔原理，真实力和惯性力对 O 点的主矩为 0

$$J_{C1}\alpha_1 + ma_{C1}\frac{l}{2} - mg\frac{l}{2} - R_{AY}l = 0$$

将(1)和(2)代入以上方程

$$\frac{1}{12}ml^2\alpha_1 + m\frac{l^2}{4}\alpha_1 - mg\frac{l}{2} - R_{AY}l = 0$$

化简得到

$$\frac{1}{3}ml^2\alpha_1 - mg\frac{l}{2} - R_{AY}l = 0 \qquad (5)$$

取 AB 为研究对象，由达兰贝尔原理，真实力和惯性力对 C_2 点的主矩为 0

$$J_{C1}\alpha_2 - R_{AY}\frac{l}{2} = \frac{1}{12}ml^2\alpha_2 - R_{AY}\frac{l}{2} = 0 \qquad (6)$$

真实力和惯性力的主矢在 Y 方向分量为 0

$$R_{AY} + ma_{C2} - mg = 0$$

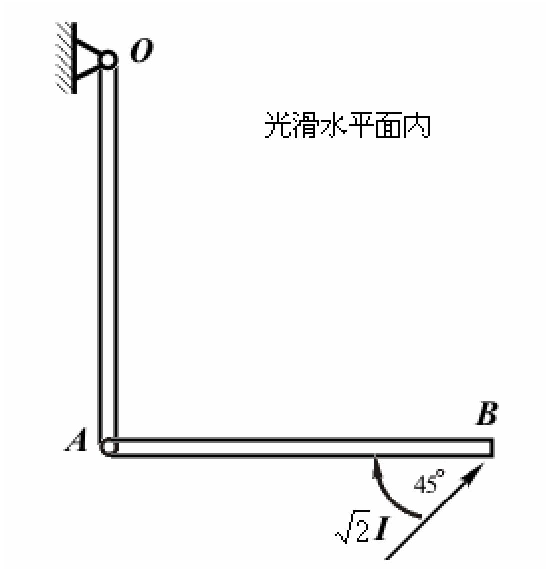
将(2)代入以上方程，得到

$$R_{AY} + m(l\alpha_1 + \frac{1}{2}l\alpha_2) - mg = 0 \qquad (7)$$

由(5)，(6)，(7)化简得到

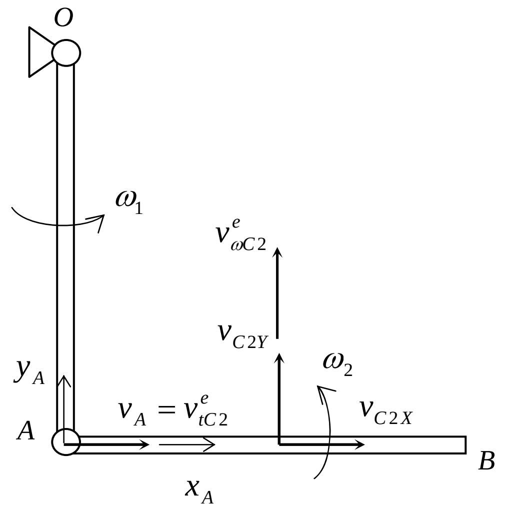
$$\begin{aligned} &2\alpha_1 - \alpha_2 - \frac{3g}{l} = 0 \\ &3\alpha_1 + 2\alpha_2 - \frac{3g}{l} = 0 \end{aligned} \qquad (8)$$

由方程(8)，$\alpha_1 = \frac{9g}{7l}$，$\alpha_2 = -\frac{3g}{7l}$



2．两根质量为 *m*，长为 *l* 的均质杆 *OA* 和 *AB* 以铰链连接，铰链 *O* 与机座连接，放在光滑的水平面内。图示位置，杆 *OA* 与 *AB* 垂直，系统静止。求在 B 处作用大小为$\sqrt{2}$ *I* 的冲量时 *OA* 和 *AB* 的角速度

解法[1]：



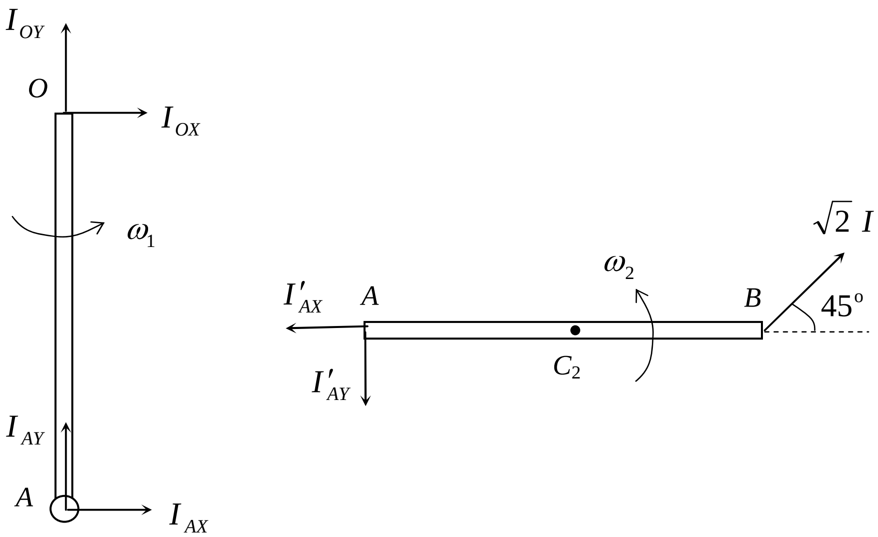
OA 绕 O 点转动，$v_A = l\alpha_1$

取 A 为基点，建立平动坐标系，AB 质心C_2的加速度的矢量式为

$\vec{v}_{C2} = \vec{v}^e_{tC2} + \vec{v}^e_{\omega C2} = \vec{v}_A + \vec{v}^e_{\omega C2}$

X 方向投影式：$v_{C2X} = v^e_{tC2} = l\omega_1$ (1)

Y 方向投影式：$v_{C2Y}=v^{e}_{\omega C2}=\dfrac{1}{2}l\omega_2 \qquad (2)$



取 OA 为研究对象，由对 O 点动量矩定理的积分形式

$$\frac{1}{3}ml^2\left(\omega_1-0\right)=I_{AX}l$$

取 AB 为研究对象，由动量定理的积分形式和对 C_2 点动量矩定理的积分形式

$$mv_{C2X}=I-I_{AX}$$

$$mv_{C2Y}=I-I_{AY}$$

$$\frac{1}{12}ml^2\left(\omega_2-0\right)=\left(I_{AY}+I\right)l$$

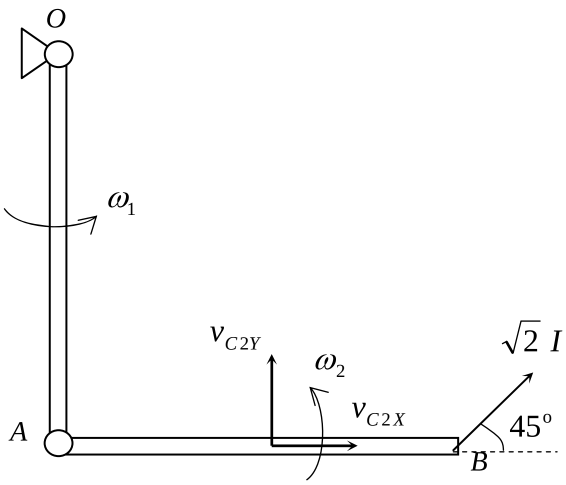
将(1), (2)代入，得到

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{3}ml^2\omega_1=I_{AX}l\\
&ml\omega_1=I-I_{AX}\\
&m\frac{l}{2}\omega_2=I-I_{AY}\\
&\frac{1}{12}ml^2\omega_2=\left(I_{AY}+I\right)\frac{l}{2}
\end{aligned}\qquad (3)$$

解方程 (3) 得到

$$\frac{4}{3}ml^2\omega_1=Il\text{，}\quad \omega_1=\frac{3I}{4ml}$$

$$\frac{1}{3}ml^2\omega_2 = I\,l\text{，}\quad \omega_2 = \frac{3I}{ml}$$



解法[2]：取系统为研究对象，撞击后，系统对固定点 O 的动量矩为

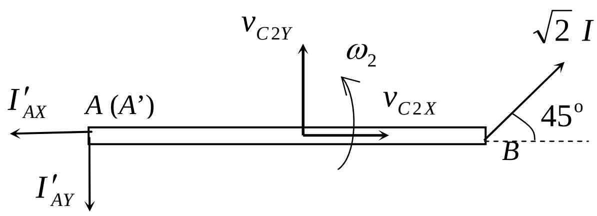
$$L_O = \frac{1}{3}ml^2\omega_1 + mv_{C2X}\,l + mv_{C2Y}\,\frac{l}{2} + \frac{1}{12}ml^2\omega_2$$

根据 $\Delta L_O = \sum m_O(\bar{I})$

$$\frac{1}{3}ml^2\omega_1 + mv_{C2X}\,l + mv_{C2Y}\,\frac{l}{2} + \frac{1}{12}ml^2\omega_2 = 2I\,l$$

将(1), (2)代入，化简得到

$$\frac{4}{3}ml^2\omega_1 + \frac{1}{3}ml^2\omega_2 = 2I\,l \quad (4)$$



取 AB 为研究对象，撞击后，系统对固定点 A' 的动量矩为

$$L_{A'} = mv_{C2Y}\,\frac{l}{2} + \frac{1}{12}ml^2\omega_2$$

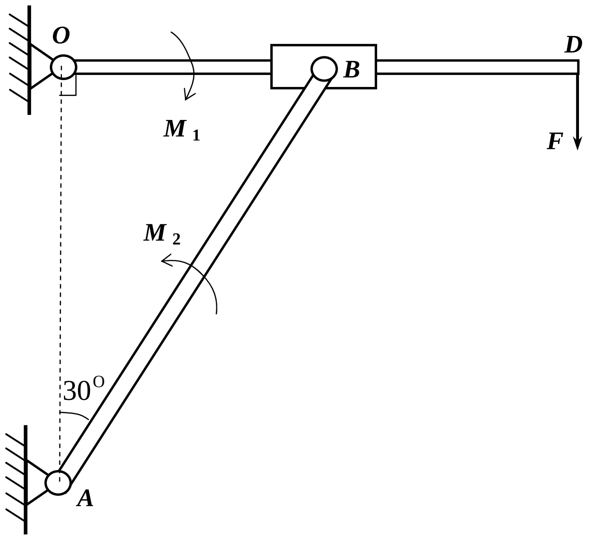
根据 $\Delta L_{A'} = \sum m_{A'}(\bar{I})$

$$mv_{C2Y}\,\frac{l}{2} + \frac{1}{12}ml^2\omega_2 = I\,l$$

将(2)代入，化简得到

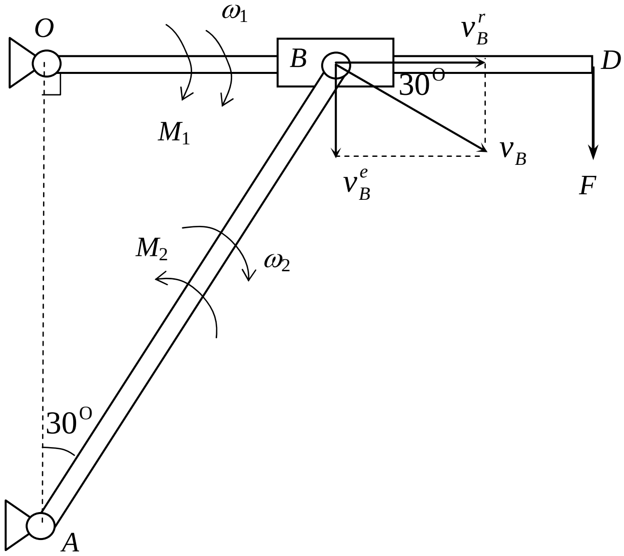
$$\frac{1}{3}ml^2\omega_2 = I\,l\,,\quad \omega_2 = \frac{3I}{ml}$$

代入(4)，得到$\omega_1 = \dfrac{3I}{4ml}$



3．运动机构在图示位置平衡，OD 水平，OA 铅垂。已知$\overline{OA} = \sqrt{3}\,R$，$AB$ 长$\overline{AB} = 2R$，OD 长$\overline{OD} = 2R$，在 OD 的端点作用铅垂向下的力 F。不计运动机构的重量，求图示位置平衡时M_1，M_2和 F 的关系式

解法[1]：



取 B 为动点，OD 为动参考系，设v_B^e，v_B^r分别为 B 点的牵连速度和相对速度，

则 $\vec{v}_B = \vec{v}_B^e + \vec{v}_B^r$

由图示几何法得到，$v_B^e = \dfrac{1}{2} v_B$

由关系式 $v_B = 2R\omega_2$，$v_B^e = R\omega_1$，得到

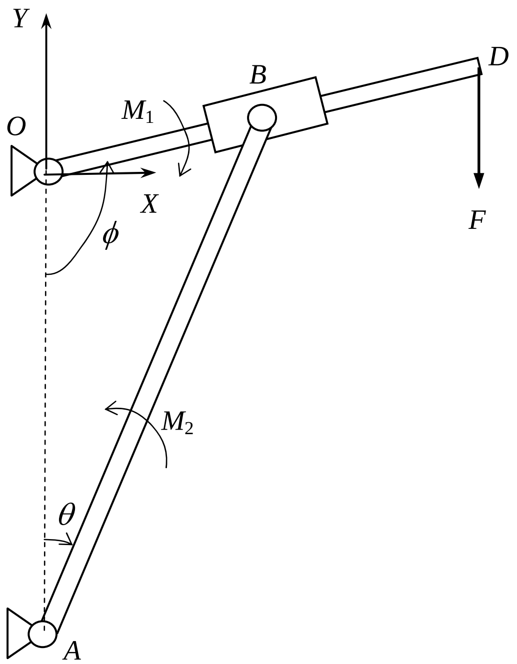
$\omega_1 = \omega_2$，$v_D = 2R\omega_1$ (1)，

根据虚位移原理

$M_1\omega_1 - M_2\omega_2 + Fv_D = 0$ (2)

将(1)代入(2)，得到M_1和M_2的关系式为

$M_1 - M_2 + 2RF = 0$



解法[2]：在三角形 OAB 中，由正弦定理

$$\frac{\sin\phi}{2R} = \frac{\sin(\phi+\theta)}{\sqrt{3}\,R}$$

等式两边求变分，得到虚位移$\delta\phi$，$\delta\theta$的关系为

$$\frac{\cos\phi}{2}\delta\phi = \frac{\cos(\phi+\theta)}{\sqrt{3}}(\delta\phi+\delta\theta) \quad (3)$$

又有 $y_D = \overline{OD}\sin\left(\phi - \frac{\pi}{2}\right) = -2R\cos\phi$， $\delta y_D = 2R\sin\phi\delta\phi \quad (4)$

将 $\phi = \frac{\pi}{2}$， $\theta = \frac{\pi}{6}$ 代入(3)，(4)

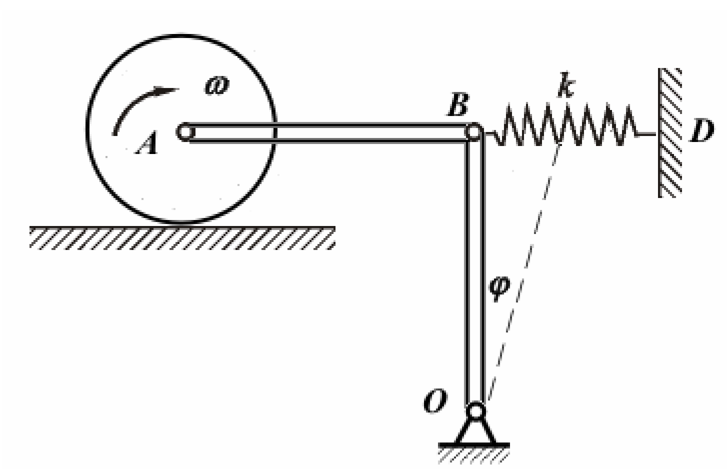
$0 = -\frac{1}{2\sqrt{3}}(\delta\phi+\delta\theta)$，得到 $\delta\phi = -\delta\theta$， $\delta y_D = 2R\delta\phi \quad (5)$

根据虚位移原理

$-M_1\delta\phi - M_2\delta\theta - F\delta y_D = 0 \quad (6)$

将(5)代入(6)，得到 M_1， M_2 和 F 的关系式为

$M_1 - M_2 + 2RF = 0$



4．图示机构中，均质圆盘半径为 R，质量为 m,沿水平面作纯滚动。水平杆 AB 质量不计，用铰链 A,B 分别与圆盘和杆 BO 相连。杆 BO 长为 l，质量也为 m，杆 B 端有一水平弹簧，质量不计，弹簧的刚度因数为 k。图示位置时弹簧为原长。试用第二类拉格朗日方程建立系统运动微分方程并求系统微振动周期。

解：取单自由度系统的独立的广义坐标为 ϕ，由于圆盘在斜面上作纯滚动，系统的动能为

$$T = \frac{1}{2}m\dot{x}_A{}^2 + \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}mr^2\left(\frac{\dot{x}_A}{r}\right)^2 + \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3}ml^2\dot{\phi}^2 \qquad (1)$$

对于微幅振动，$\dot{x}_A \approx l\dot{\phi}$

$$T = \frac{11}{12} m l^2 \dot{\phi}^2$$

取 O 为零势能点，系统的重力势能为

$$V_1 = mgl + \frac{mgl}{2}\cos\phi$$

对于微幅振动，弹性势能近似地表示为

$$V_2 = \frac{1}{2}k(l\phi)^2 = \frac{1}{2}kl^2\phi^2$$

总势能为$V = mgl + \frac{mgl}{2}\cos\phi + \frac{1}{2}kl^2\phi^2$

第二类拉格朗日方程为

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{\phi}}\right) - \frac{\partial T}{\partial \phi} + \frac{\partial V}{\partial \phi} = 0$$

$$\frac{11}{6} m l^2 \ddot{\phi} - \frac{mgl}{2}\sin\phi + kl^2\phi = 0$$

由$\sin\phi \approx \phi$，得到系统微振动方程为

$$\frac{11}{6} m l^2 \ddot{\phi} + \left(kl^2 - \frac{mgl}{2}\right)\phi = 0$$

即

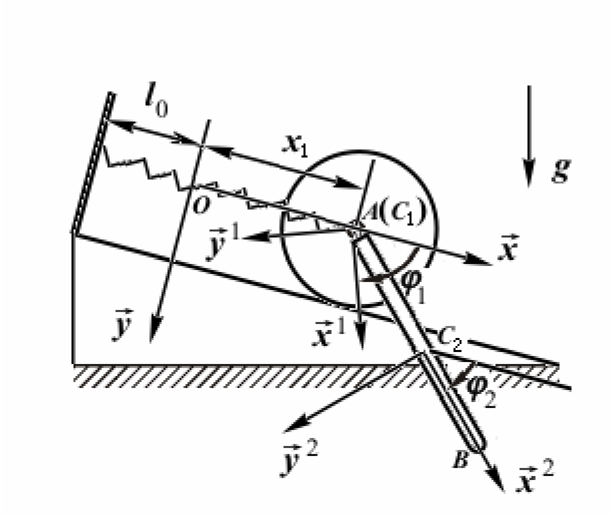
$$\ddot{\phi} + \frac{3(2kl^2 - mgl)}{11ml^2}\phi = 0$$

微振动圆频率为

$$\omega_n = \sqrt{\frac{3(2kl - mg)}{11ml}}$$

微振动的周期为

$$T = \frac{2\pi}{\omega_n} = 2\pi\sqrt{\frac{11ml}{3(2kl - mg)}}$$



5．如图所示，三角形斜面固定在地面上，斜面倾角为α。质量为 2*m*，半径为 *r* 的匀质圆柱在三角形斜面上作纯滚动。三角形斜面上有刚度系数为 *k*，原长为 l_0 的弹簧平行于斜面系在圆柱的轮心 C_1 上。质量为 *m*，长度为 *l* 的匀质直杆 *AB* 的 *A* 端与圆柱铰接。设绝对坐标系 O-*xy* 的原点 *O* 与弹簧未变形时的轮心重合，绝对坐标系的 *x* 方向平行于斜面，并且，当 $t = 0$ 时 $x_1=0$，$\varphi_1=0$，$\varphi_2=0$。写出圆柱和直杆 *AB* 组成的刚体系统的运动学约束方程，建立带拉格朗日乘子的封闭的第一类拉格朗日方程

解：圆柱和直杆 AB 组成的刚体系统的广义坐标阵为

$$\boldsymbol{q}=\begin{bmatrix}x_1 & y_1 & \phi_1 & x_2 & y_2 & \phi_2\end{bmatrix}^T$$

圆柱在斜面上作纯滚动，并且，当 $x_1=0$ 时，$\phi_1=0$，成立关系式

$$x_1-r\phi_1=0,\quad y_1=0$$

直杆 AB 的 A 端与圆柱铰接，于是

$$\begin{bmatrix}x_1\\ y_1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}x_2\\ y_2\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}\cos\phi_2 & -\sin\phi_2\\ \sin\phi_2 & \cos\phi_2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-l/2\\ 0\end{bmatrix}$$

整理得到系统的运动学约束方程为

$$\boldsymbol{\Phi}=\begin{bmatrix}x_1-r\phi_1\\ y_1\\ x_2-l\cos\phi_2/2-x_1\\ y_2-l\sin\phi_2/2-y_1\end{bmatrix}=\boldsymbol{0}\qquad(6)$$

约束方程的 JACOBI 矩阵为

$$\boldsymbol{\Phi}_q = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -r & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 1 & 0 & l\sin\phi_2/2 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 1 & -l\cos\phi_2/2 \end{bmatrix}$$

对运动学约束方程(6)关于时间求导，得到速度约束方程为

$$\boldsymbol{\Phi}_q \dot{\boldsymbol{q}} = \boldsymbol{0} \qquad (7)$$

对速度约束方程(7)关于时间求导，得到加速度约束方程为

$$\boldsymbol{\Phi}_q \dot{\boldsymbol{q}} = \boldsymbol{\gamma} \qquad (8)$$

其中，加速度约束方程的右项为

$$\boldsymbol{\gamma} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -l\cos\phi_2\dot{\phi}_2^{\,2}/2 \\ -l\sin\phi_2\dot{\phi}_2^{\,2}/2 \end{bmatrix}$$

系统的第一类拉格朗日方程为

$$\boldsymbol{M}\ddot{\boldsymbol{q}} + \boldsymbol{\Phi}_q^{\ T}\boldsymbol{\lambda} = \boldsymbol{F}^a \qquad (9)$$

其中，系统的增广质量阵和增广主动力阵为

$$\boldsymbol{M} = \begin{bmatrix} 2m & & & & & \\ & 2m & & & & \\ & & mr^2 & & & \\ & & & m & & \\ & & & & m & \\ & & & & & ml^2/12 \end{bmatrix},\quad \boldsymbol{F}^a = \begin{bmatrix} -kx_1 + 2mg\sin\alpha \\ 2mg\cos\alpha \\ 0 \\ mg\sin\alpha \\ mg\cos\alpha \\ 0 \end{bmatrix}$$

拉格朗日乘子列阵为

$$\boldsymbol{\lambda} = [\lambda_1 \ \ \lambda_2 \ \ \lambda_3 \ \ \lambda_4]^T$$

由(8)和(9)，得到封闭的第一类拉格朗日方程为

$$
\begin{bmatrix}
2m & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 0 \\
0 & 2m & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 \\
0 & 0 & mr^2 & 0 & 0 & 0 & -r & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & m & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & m & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & ml^2/12 & 0 & 0 & l\sin\phi_2/2 & -l\cos\phi_2/2 \\
1 & 0 & -r & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
-1 & 0 & 0 & 1 & 0 & l\sin\phi_2/2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & -1 & 0 & 0 & 1 & -l\cos\phi_2/2 & 0 & 0 & 0 & 0
\end{bmatrix}
\begin{bmatrix}
\ddot{x}_1 \\ \ddot{y}_1 \\ \ddot{\phi}_1 \\ \ddot{x}_2 \\ \ddot{y}_2 \\ \ddot{\phi}_2 \\ \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \lambda_3 \\ \lambda_4
\end{bmatrix}
=
\begin{bmatrix}
-kx_1 + 2mg\sin\alpha \\ 2mg\cos\alpha \\ 0 \\ mg\sin\alpha \\ mg\cos\alpha \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ -l\cos\phi_2\dot{\phi}_2^{\,2}/2 \\ -l\sin\phi_2\dot{\phi}_2^{\,2}/2
\end{bmatrix}
$$