上 海 交 通 大 学 试 卷（ A 卷）

（ 2015 至 2016 学年第一学期）

班级号__________ 学号____________ 姓名___________

课程名称： 概率论与数理统计 成绩____________

一、填空题（本大题共 6 小题，每小题 3 分，共 18 分）

1. 设总体 X 服从区间 (a,b) 上的均匀分布，即 $X\sim U(a,b)$，其中参数 a,b 都未知，$X_1,X_2,\cdots,X_n$ 是取自该总体的简单样本，则参数 a,b 的极大似然估计量分别为 $\hat{a}=$__________，和 $\hat{b}=$__________。

2. 设 $F(x,y)$ 为随机变量 (X,Y) 的联合分布函数，已知 $P(X>0,Y>0)=0.38$，$P(X>0)=0.5$，$P(Y>0)=0.6$，则 $F(0,0)=$__________。

3. 设总体 X 的分布列为 $P(X=k)=\dfrac{1}{4}$，$k=0,1,2,3$。若 X_1,X_2,X_3 为来自该总体的样本，$N=\min(X_1,X_2,X_3)$，$M=\max(X_1,X_2,X_3)$，则 $P(MN=1)=$__________。

4. 设二维正态随机变量 $(X,Y)\sim N(1,4;1,4;0.6)$，$U=X-2Y$，$V=3X+2Y$，则 $\operatorname{cov}(U,V)=$__________。

5. 设 X_1,X_2,X_3,X_4 是来自正态总体 $N(0,\ 9)$ 的简单样本，$a=$_____，和 $b=$_____ 时，$Y=\dfrac{(X_1+2X_2)^2}{a}+\dfrac{(2X_3-3X_4)^2}{b}$ 服从 χ^2 分布。

6. 设随机变量 X 的密度函数为 $f(x)=\begin{cases}\dfrac{3}{2}x^2 & -1<x<1\\ 0 & \text{其它}\end{cases}$，则 $Y=X^2$ 的密度函数为__________。

二、选择题（本大题共 6 小题，每小题 3 分，共 18 分）

7. 设随机变量 X 服从泊松分布，且 $P(X=1)=P(X=2)$，则 $E(X+1)^2$ 为（ ）。

   （A）8； （B）9； （C）11； （D）12。

我承诺，我将严格遵守考试纪律。

承诺人：

题号	1~6	7~12	13~16	17~20	总分
得分					
批阅人(流水阅卷教师签名处)					

8. 设 $X_1, X_2, \cdots, X_n$ 是取自正态总体 $N(\mu, \sigma^2)$ 的简单样本，其中 μ 未知。σ^2 的置信度为 $1-\alpha$ 的单侧置信区间为 $(-\infty, \hat{\sigma}^2)$，则单侧置信上限 $\hat{\sigma}^2$ 估计量应为(　　)。

(A) $\dfrac{\sum_{i=1}^{n}(X_i-\overline{X})^2}{\chi_{\alpha}^2(n)}$；　　(B) $\dfrac{\sum_{i=1}^{n}(X_i-\overline{X})^2}{\chi_{1-\alpha}^2(n)}$；

(C) $\dfrac{\sum_{i=1}^{n}(X_i-\overline{X})^2}{\chi_{\alpha}^2(n-1)}$；　　(D) $\dfrac{\sum_{i=1}^{n}(X_i-\overline{X})^2}{\chi_{1-\alpha}^2(n-1)}$。

9. 设 X_1, X_2, X_3 是独立同分布的随机变量，数学期望、方差都存在，下面正确的有哪些为（可多选）(　　)。

(A) $D(X_1+X_2+X_3)=D(3X_1)=9D(X_1)$；　　(B) $D(X_1+X_2+X_3)=3D(X_1)$；

(C) $E(X_1+X_2+X_3)=3E(X_1)$；　　(D) $X_1=X_2=X_3$。

10. 设 $X_1, X_2, \cdots, X_{n+m}$ 是来自正态总体 $X \sim N(0, \sigma^2)$ 的简单样本，随机变量

$$Y=\frac{m\sum_{i=1}^{n}(X_i^2)}{n\sum_{j=1}^{m}(X_{n+j}^2)}$$ 服从的分布为(　　)。

(A) $\chi^2(1)$；　(B) F(n-1, m-1)；　(C) F(n, m)；　(D) $\chi^2(n)$。

11. 设 A 与 B 为互不相容的事件，且 $P(A)>0, P(B)>0$，则下列各式中正确的是(　　)。

(A) $P(\overline{B} \mid A)=0$；　　(B) $P(A\cap\overline{B})=P(A)$；

(C) $P(\overline{A}\cap B)=0$；　　(D) $P(A\cap B)=P(A)P(B)$。

12. 设 X 的密度函数为 $f(x)=\frac{1}{2}e^{-|x-3|}$, $-\infty<x+\infty$，且 c 满足 $P(X>c)=P(X\le c)$，则 c 等于(　　)。

（A）1/3；　（B）3；　（C）1/2；　（D）2。

三、计算与证明题（本大题共 8 小题，每小题 8 分，共 64 分）

13. 某制造厂的产品是由 B1，B2 和 B3 三台机器所生产，其中 B1，B2 和 B3 所生产的产品份额分别为 20%，35%和 45%，据以往的经验知这三台机器生产出的产品的次品率分别为 25%，10%和 20%，现从该厂生产的产品中随机的抽查三件，

（1）请给出这三件产品中次品数的分布律；

（2）如果这三件产品都是次品，其中恰有一件是由 B3 所生产的概率是多少？

14. 设随机变量 X、Y 相互独立同分布，其密度函数都为

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{10}{x^2}, & x>10;\\ 0, & 其它。\end{cases}$$

（1）求 X 分布函数 $F_X(x)$；

（2）求随机变量 $Z=\dfrac{X}{Y}$ 的概率密度函数。

15. 假设一个人数学能力测试的分数X是0和1之间的一个数字，音乐天赋测试分数也是在0和1之间一个数字，并且假设，美国的大学生群体，分数X和 Y的联合概率密度函数为

$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{2}{5}(2x+3y), & 0\le x\le 1, 0\le y\le 1;\\ 0 & , \text{其它}.\end{cases}$$

（1） 大学生群体数学能力测试分数大于0.8的概率是多少？

（2） Y取何值时，X有条件密度函数，并给出条件密度函数 $f_{X|Y}(x|y)$；

（3） 如果大学生的音乐天赋的测试分数为0.3时，数学能力测试分数介于0.6到0.8之间的概率是多少？

16. 设 $X_1,X_2,\cdots,X_n$ 是取自总体 X 的简单样本，该总体的密度函数为

$$f(x;\beta)=\begin{cases}\dfrac{2}{\beta^2}(\beta-x), & 0<x<\beta;\\ 0, & \text{其它}.\end{cases}$$

（1） 求未知参数 β 的矩估计量 $\hat{\beta}$，并判断其无偏性；

（2） 证明 $\hat{\beta}$ 是 β 的一致估计量。

17. 设“概率统计”某次考试的学生成绩服从正态分布，从中随机抽取 36 位考生的成绩，算得平均成绩为 71.5 分，标准差为 15 分。问在显著性水平 $\alpha=0.05$ 下，

（1）能否认为这次考试全体考生的平均成绩显著偏小于 75 分；

（2）能否认为标准差为 14 分。

$t_{0.05}(35)=1.69,\quad t_{0.025}(35)=2.03,\quad t_{0.05}(36)=1.68,\quad t_{0.025}(36)=2.02$

$\chi^2_{0.05}(35)=49.8,\quad \chi^2_{0.025}(35)=53.2,\quad \chi^2_{0.95}(35)=22.46,\quad \chi^2_{0.975}(35)=20.57$

18. 某物理学家通过他的设备对体重为 μ 的人群的体重做了 n 次独立的测量，他知道他的设备的局限性使得这种测量的标准差为 σ，$\overline{X}$ 表示物理学家 n 次测量值的平均值。

（1）用 Chebyshev 不等式估计，测量次数 n 至少为多少才能满足不等式 $P(|\overline{X}-\mu|<\frac{\sigma}{4})\geq 0.99$；

（2）用中心极限定理估计，至少测量多少次才能使得（1）中的不等式成立。

$\Phi(2.575)=0.995,\quad \Phi(1.960)=0.975,\quad \Phi(1.645)=0.950$。

19. 一个商店每周四进货，以备周五、周六和周日3天销售，根据多周的统计，这三天的销售件数X,Y,Z相互独立，其分布为

X	9	10	11		Y	13	14	15		Z	17	18	19
p	0.3	0.5	0.2		p	0.3	0.6	0.1		p	0.1	0.8	0.1

（1）求这三天销售件数总和的的平均销售量；

（2）如果进货44件，求44件不够卖的概率；

（3）如果进货40件，求40件不够卖的概率。

20 （1）请叙述以概率收敛的定义；

（2）假设随机变量$X_1,X_2,\cdots X_n$都服从正态分布 N(0, 100)；并且当$|j-i|\ge 2$时，X_i与X_j相互独立，$Y_n=\dfrac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i$，请证明随机变量序列$\{Y_n\}_{n=1}^{+\infty}$以概率收敛到0。