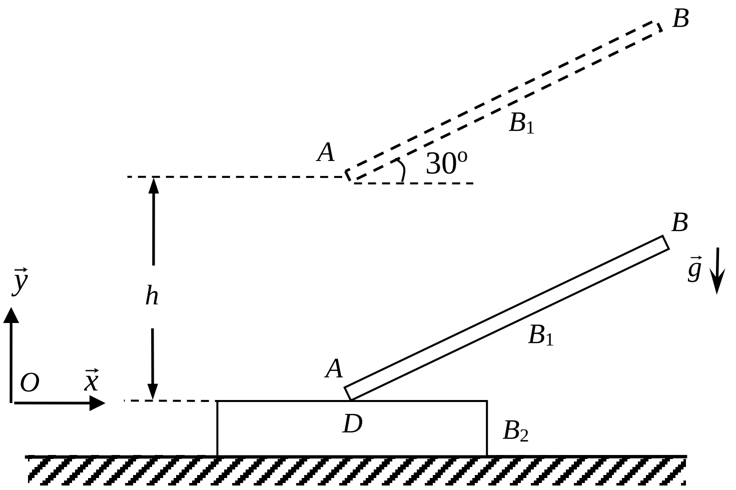
上 海 交 通 大 学 试 卷（A 卷 答 案）

（ 20_14_ 至 20_15 学年 第 1 学期 ）

班级号______________________ 学号______________ 姓名 _______

课程名称 __理论力学 D_______________________ 成绩 ________



1．(20 分) 如图所示，滑块 B_2 在光滑的水平面上作直线平动。均质杆 B_1 从高为 h 的与水平线夹角为 30° 的倾斜位置无初速释放，在重力作用下向下运动，在图示水平位置杆 B_1 的点 A 与滑块上表面的中点 D 发生碰撞，恢复因数为 0，接触处有足够摩擦阻力阻止点 A 相对滑块滑动。杆 B_1 的质量为 m，长为 l。滑块 B_2 的质量为 m。求碰撞后

（1） 杆 B_1 的角速度和滑块 B_2 的速度；

（2） 接触点 A 作用于杆 B_1 的碰撞冲量。

解：如图建立惯性基 $\vec{\boldsymbol{e}}$

(a) 动能定理的应用（总共 3 分）

设碰撞前杆撞击点的速度为 v_0， 由动能定理

$$\frac{1}{2}mv_0{}^2 = mgh \text{（2 分）} \quad \text{得到} \quad v_0 = \sqrt{2gh} \quad \text{（1 分）}$$

(b) 恢复因素定义（总共 3 分）

设碰撞后点 A 的 $\vec{y}$ 方向速度为 $v_{Ay\tau}$

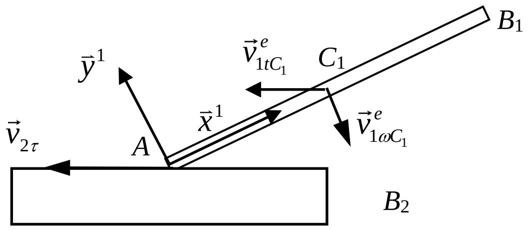
由恢复因素的定义：

$$e=\frac{v_{Ay\tau}-v_{Dy\tau}}{v_{Dy0}-v_{Ay0}}=\frac{v_{Ay\tau}-0}{0-(-v_0)}=0$$，（0.5 分）得到 $v_{Ay\tau}=0$ （1 分）

由于接触处有足够摩擦阻止点 A 相对滑块滑动，$v_{Ax\tau}=v_{Dx\tau}=v_{2\tau}$ （0.5 分）

于是 $v_{A\tau}=v_{2\tau}$ （1 分）

(c) 碰撞过程的速度分析（总共 4 分）



以点 A 为基点建立杆 B_1 的连体基 $\vec{\boldsymbol{e}}^1$

设撞击后杆的角速度为 $\omega_{1\tau}$，杆 B_1 质心 C_1 的速度为 $\vec{v}_{C_1\tau}$

$\vec{v}_{C_1\tau}=\vec{v}_{1C_1\tau}=\vec{v}^e_{1tC_1}+\vec{v}^e_{1\omega C_1}$ （1 分）， $v^e_{1tC_1}=v_{A\tau}=v_{2\tau}$， $v^e_{1\omega C_1}=l\omega_{1\tau}/2$ （1 分）

$$\vec{x}:\quad v_{C_1x\tau}=-v_{2\tau}+\frac{l}{2}\omega_{1\tau}\sin\frac{\pi}{6}=-v_{2\tau}+\frac{l}{4}\omega_{1\tau}$$ （1 分）

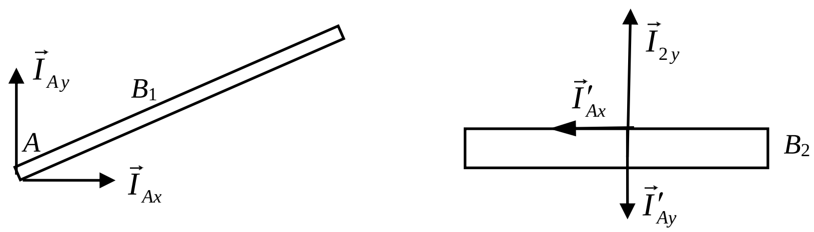
$$\vec{y}:\quad v_{C_1y\tau}=-\frac{l}{2}\omega_{1\tau}\cos\frac{\pi}{6}=-\frac{\sqrt{3}}{4}l\omega_{1\tau}$$ （1 分）

(d) 杆 B_1 的角速度和滑块 B_2 的速度以及接触点 A 作用于杆 B_1 的碰撞冲量计算（总共 10 分）

解 1：用动量定理和动量矩定理积分形式计算

由于杆 B_1 直线平动，$\omega_{10}=0$，撞击前质心 C_1 的速度为 $v_{C1y0}=-v_0$

受力图：



以杆 B_1 为研究对象，由动量定理积分形式：

$$mv_{C_1x\tau}=I_{Ax} \quad 或 \quad m\left(-v_{2\tau}+\frac{l}{4}\omega_{1\tau}\right)=I_{Ax} \quad (1) \quad （2 分）$$

$$m\left(v_{C_1y\tau}-\left(-v_0\right)\right)=I_{Ay} \quad 或 \quad m\left(-\frac{\sqrt{3}}{4}l\omega_{1\tau}+v_0\right)=I_{Ay} \quad (2) \quad （2 分）$$

由对质心动量矩定理积分形式：

$$\frac{1}{12}ml^2\left(\omega_{1\tau}-0\right)=-\frac{1}{4}l\,I_{Ax}+\frac{\sqrt{3}}{4}l\,I_{Ay} \quad 或 \quad \frac{1}{3}ml\omega_{\tau}=-I_{Ax}+\sqrt{3}I_{Ay} \quad (3) \quad （2 分）$$

以小车 B_2 为研究对象，由动量定理积分形式：

$$m\left(v_{2\tau}-0\right)=I'_{Ax} \text{ 或 } mv_{2\tau}=I_{Ax} \quad (4) \quad （2 分）$$

求解方程(1)− (4)

得到 $\omega_{1\tau}=\dfrac{24}{29l}\sqrt{6gh}$ (0.5 分)， $v_{2\tau}=\dfrac{l}{8}\omega_{1\tau}=\dfrac{3}{29}\sqrt{6gh}$ (0.5 分)

$I_{Ax}=\dfrac{3}{29}m\sqrt{6gh}$ (0.5 分)， $I_{Ay}=\dfrac{11}{29}m\sqrt{2gh}$ (0.5 分)

解 2：用动量守恒和动量矩守恒计算：

取系统为研究对象，在 $\vec{x}$ 方向动量守恒

$$m\left(-v_{2\tau}\right)+mv_{C_1\tau x}=m\left(-v_{2\tau}\right)+m\left(-v_{2\tau}+\frac{l}{4}\omega_{1\tau}\right)=0 \text{ 或 } v_{2\tau}=\frac{1}{8}l\omega_{1\tau} \quad (5) \quad （2 分）$$

取杆 B_1 为研究对象，碰撞前后关于点 A' (地面上与 A 重合一点)动量矩守恒

$$mv_{C_1\tau x}\frac{1}{4}l-mv_{C_1\tau y}\frac{\sqrt{3}}{4}l+\frac{1}{12}ml^2\omega_{1\tau}=mv_0\frac{\sqrt{3}}{4}l \quad (6) \quad （2 分）$$

或 $\dfrac{1}{3}l\omega_{1\tau}-v_{2\tau}\dfrac{1}{4}=v_0\dfrac{\sqrt{3}}{4}$

求解方程(5)− (6)

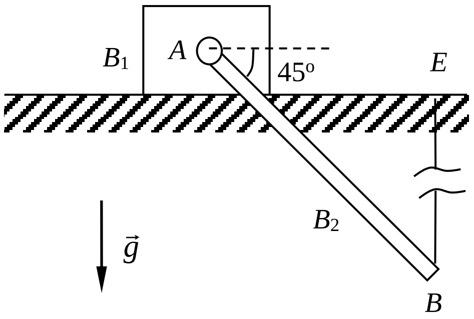
得到 $\omega_{1\tau}=\dfrac{24}{29l}\sqrt{6gh}$ (0.5 分)， $v_{2\tau}=\dfrac{l}{8}\omega_{1\tau}=\dfrac{3}{29}\sqrt{6gh}$ (0.5 分)

代入方程(1)− (2)

$$mv_{C_1x\tau}=I_{Ax} \quad 或 \quad m\left(-v_{2\tau}+\frac{l}{4}\omega_{1\tau}\right)=I_{Ax} \quad (1) \quad （2 分）$$

$$m\left(v_{C_1y\tau}-\left(-v_0\right)\right)=I_{Ay} \quad 或 \quad m\left(-\frac{\sqrt{3}}{4}l\omega_{1\tau}+v_0\right)=I_{Ay} \quad (2) \quad （2 分）$$

得到 $I_{Ax}=\dfrac{3}{29}m\sqrt{6gh}$ (0.5 分)， $I_{Ay}=\dfrac{11}{29}m\sqrt{2gh}$ (0.5 分)



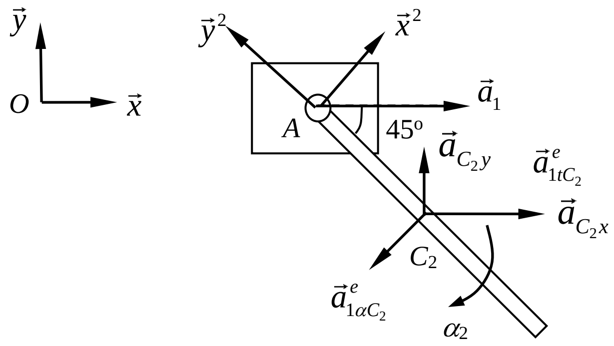
2．（20 分）图示系统，滑块 B_1 放置在光滑的水平面上，与均质杆 B_2 通过圆柱铰 A 连接，杆 B_2 由软绳 BE 悬挂。杆 B_2 的长度为 l。滑块 B_1 和杆 B_2 质量均为 m。图示位置杆 B_2 与水平线的夹角为 45°，BE 铅垂，使系统保持平衡。当软绳 BE 被割断时，系统在重力作用下无初速开始运动，请利用达朗贝尔原理求该瞬时

(1) 滑块 B_1 的加速度;

(2) 杆 B_2 的角加速度。

(a) 运动学分析(总共 7 分)

建立惯性基 O-$\vec{\boldsymbol{e}}$，画出运动学分析图。



（1 分）

设滑块 B_1 的加速度为 $\vec{a}_1$，杆 B_2 的角加速度为 α_2

以 A 为基点，建立 B_2 的连体基 A-$\vec{\boldsymbol{e}}^2$，点 C_2 的加速度为

$\vec{a}_{C_2} = \vec{a}^e_{2tC_2} + \vec{a}^e_{2\alpha C_2} + \vec{a}^e_{2\omega C_2}$ （1 分）

系统无初速开始运动时，由于 $\omega_2 = 0$，$a^e_{2\omega C_2} = \omega_2 l/2 = 0$ （1 分）

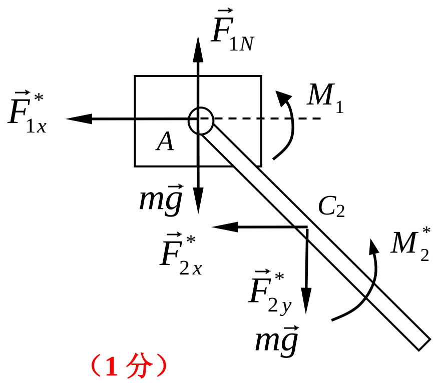
$a^e_{2tc_2} = a_A = a_1$ ，系统无初速开始运动，$a^e_{2\alpha C_2} = \alpha_2 \dfrac{l}{2}$ （2 分）

在 x 轴上投影：$a_{C_2x}=a_1-\dfrac{\sqrt{2}}{4}\alpha_3 l$ （1 分）

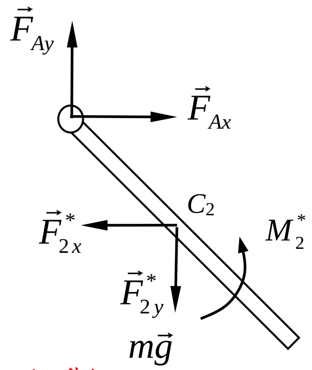
在 y 轴上投影：$a_{C_2y}=-\dfrac{\sqrt{2}}{4}\alpha_3 l$ （1 分）

(b) 受力图和惯性力系定义 (总共 6 分)

取系统为研究对象，画出受力图，取 B_2 为研究对象，画出受力图



（1 分）



（1 分）

$F_1^*=ma_A=ma_1$ （1 分），$F_{2x}^*=ma_{C2x}=m\left(a_1-\dfrac{\sqrt{2}}{4}\alpha_2 l\right)$ （1 分）

$F_{2y}^*=ma_{C2y}=-\dfrac{\sqrt{2}}{4}m\alpha_2 l$ （1 分），$M_2^*=\dfrac{1}{12}ml^2\alpha_2$ （1 分）

(c) 动静法，写出平衡方程 (5 分)

取系统为研究对象，利用达朗贝尔原理，$\sum\left(F_x+F_x^*\right)=0$：

$$F_1^*+F_{2x}^*=0 \quad 或 \quad a_1=\frac{\sqrt{2}}{8}\alpha_2 l \quad (1)$$ （2 分）

取杆 B2 为研究对象，利用达朗贝尔原理，$\sum M_A(\vec{F})+\sum M_A(\vec{F}^*)=0$：

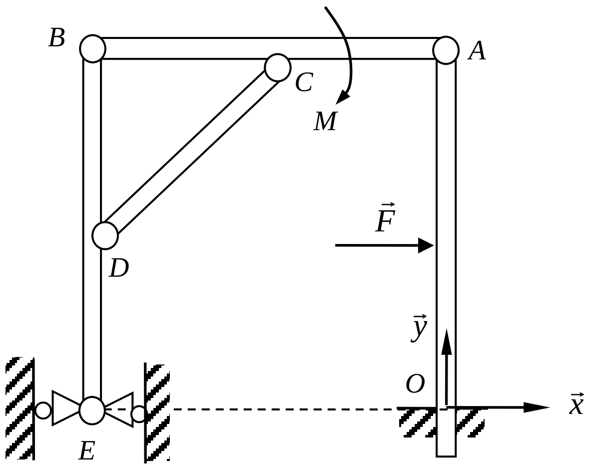
$$M_2^*-\frac{\sqrt{2}}{4}l F_{2x}^*-\frac{\sqrt{2}}{4}l F_{2y}^*-mg\frac{\sqrt{2}}{4}l=0 \quad (2)$$

$$或 \quad \frac{1}{3}ml^2\alpha_2-\frac{\sqrt{2}}{4}l\,ma_1-mg\frac{\sqrt{2}}{4}l=0$$ （3 分）

$$\frac{13}{12}ml^2\alpha_2-mg\sqrt{2}l=0$$

(d) 计算结果 (2 分)

解得：$a_1=\dfrac{3}{13}g$，$\alpha_2=\dfrac{12\sqrt{2}}{13}\dfrac{g}{l}$ （2 分）



3. （20 分）平衡系统由杆 OA、杆 AB、杆 CD 和杆 BE 组成。铰 O 为固定端支座，铰 A、B、C、D 为圆柱铰，铰 E 为滑动铰支座。图示位置 AB 水平，OA 和 BE 铅垂。已知：$\overline{OA}=\overline{AB}=\overline{BE}=a$，点 C 和点 D 分别为杆 AB 和杆 BE 的中点。水平力 $\vec{F}$ 作用于杆 OA 的中点，大小为 F。杆 AB 上作用一力偶 M，力偶矩的大小为 $M=Fa$，不计各杆件的重量。用**虚位移原理**求：

(1) 固定端 O 处的约束力偶；

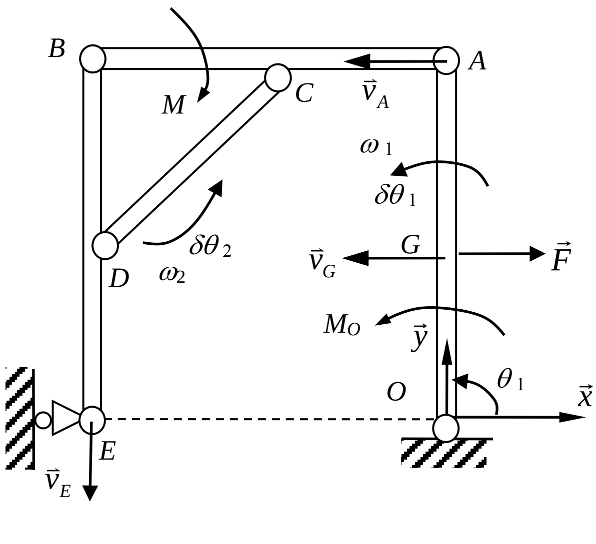
(2) 杆 CD 的内力（注明拉压力）。

解：(a) 固定端 O 处的约束力偶计算 (总共 10 分)

释放点 O 的转动约束。系统的自由度为 1，以 θ_1 为独立的广义坐标，由虚位移原理：

$M_O\delta\theta_1+F\delta x_G-m\delta\theta_2=0$ **（3 分）**

（1 分）



杆 OA 绕 O 点作定轴转动，$v_G=\omega_1\dfrac{a}{2}$，$\dot{\theta}_1=\omega_1$ **（1 分）**

$\dot{x}_G = -v_G$，　得到 $\dot{x}_G = -\dot{\theta}_1 \dfrac{a}{2}$，　$\delta x_G = -\delta\theta_1 \dfrac{a}{2}$ （1 分）

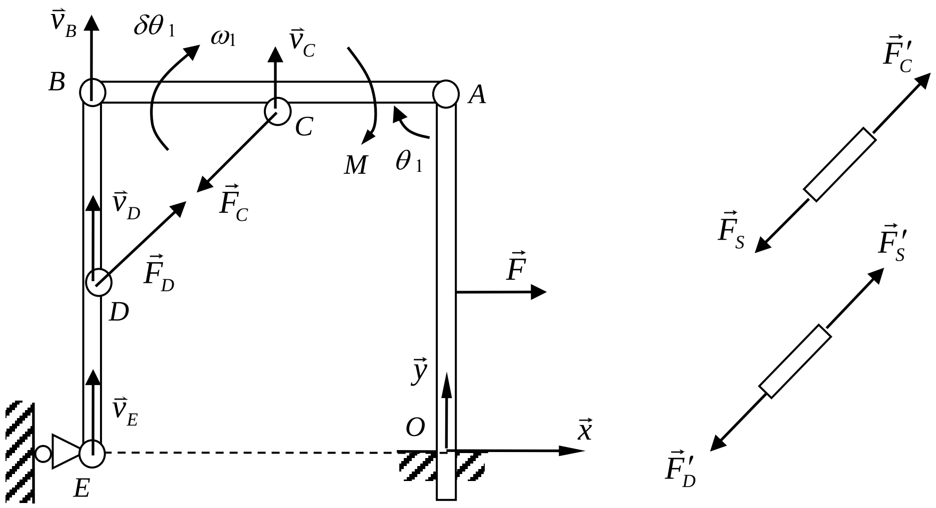
由于 $\vec{v}_A$ 水平，$\vec{v}_E$ 铅垂，刚体 ABE 的速度瞬心 S_{ABE} 为 O 点（1 分）

$v_A = \omega_1 a = \omega_2 a$，得到：$\omega_2 = \omega_1$，　$\delta\theta_2 = \delta\theta_1$ （1 分）

$$M_O\delta\theta_1 + F\delta x_G - M\delta\theta_2 = \delta\theta_1\left(M_O - F\frac{a}{2} - M\right) = 0 \quad \text{（1 分）}$$

根据 $\delta\theta_1$ 的独立性，得到：$M_O - F\dfrac{a}{2} - M = 0$，$M_O = M + F\dfrac{a}{2} = \dfrac{3}{2}Fa$ （1 分）

(b) 杆 CD 的内力计算(总共 10 分)



（1 分）

将两力杆 CD 截断，假定内力 $\vec{F}_S$ 为拉力，平衡时约束力 F_C 和 F_D 与 F_S 的关系式为：

$F_C = F_C' = F_S$，$F_D = F_D' = F_S$，AB 杆绕 A 作定轴转动，系统的自由度为 1，以 θ_1 为独立的广义坐标，由虚位移原理：

$$M\delta\theta_1 - \frac{\sqrt{2}}{2}F_C\delta y_C + \frac{\sqrt{2}}{2}F_D\,\delta y_D = 0 \text{（2 分）即}\quad M\delta\theta_1 - \frac{\sqrt{2}}{2}F_S\delta y_C + \frac{\sqrt{2}}{2}F_S\delta y_D = 0 \quad \text{（1 分）}$$

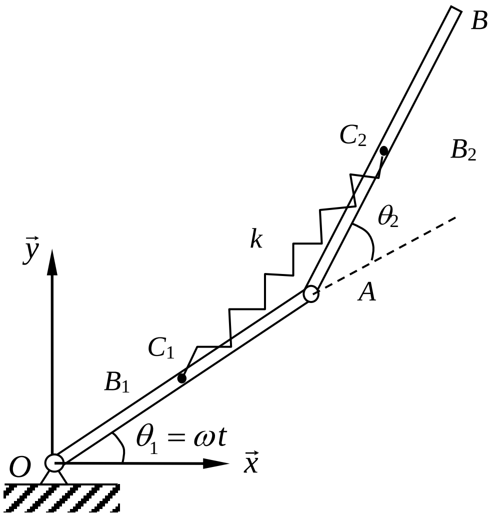
杆 AB 绕 A 点作定轴转动，$v_C = \omega_1\dfrac{a}{2}$，$\dot{\theta}_1 = \omega_1$，$\dot{y}_C = v_C$（1 分）得到 $\delta y_C = \delta\theta_1\dfrac{a}{2}$　(1)　（1 分）

$\vec{v}_E // \vec{v}_B$，由速度投影定理，　$v_E = v_B = a\omega_1$，杆 AB 作瞬时平动，$\omega_2 = 0$，$v_D = v_B = a\omega_1$（1 分）

$\dot{y}_D = v_D$，得到　$\delta y_D = a\delta\theta_1$　(2)　（1 分）将(1)，(2)代入虚功原理：

$$M\delta\theta_1 - \frac{\sqrt{2}}{2}F_s\,\delta\theta_1\frac{a}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}F_s\,a\delta\theta_1 = \delta\theta_1\left(M + \frac{\sqrt{2}}{4}F_s\,a\right) = 0 \text{（1 分）}$$

解得：$F_s = -\dfrac{2\sqrt{2}M}{a} = -2\sqrt{2}F$ （压力）（1 分）



4.（20 分）图示系统，均质杆 B_1 与基座铰接于 O，与均质杆 B_2 通过圆柱铰 A 连接，放置在光滑的水平面上。θ_1, θ_2 分别为杆 B_1 的姿态角和杆 B_2 相对于杆 B_1 的姿态角。杆 B_1 以匀角速度 ω 绕 O 点作定轴转动，$\theta_1 = \omega t$。杆 B_1 和杆 B_2 的长度均为 l。不计杆 B_1 的质量，杆 B_2 的质量为 m。在杆 B_1 和杆 B_2 的质心 C_1 和 C_2 之间有一弹簧，弹簧的刚度为 $k = m\omega^2$，原长为 $l_0 = l$。

(1) 以杆 B_2 相对于杆 B_1 的姿态角 θ_2 为广义坐标写出系统的动能和势能，写出拉格朗日函数。

(2) 写出系统的初积分。

(3) 若初始时刻，$\theta_2 = \dfrac{2\pi}{3}$，$\dot{\theta}_2 = 0$，求当 $\theta_2 = 0$ 时，杆 B_2 相对于杆 B_1 的角速度 $\dot{\theta}_2$。

解：(a) 写出系统的动能，势能和拉格朗日函数 (总共 11 分)

以 θ_2 为广义坐标，均质杆 B_2 的质心的坐标为：

$$x_{C2} = l\cos\omega t + \frac{l}{2}\cos(\omega t + \theta_2),\quad y_{C2} = l\sin\omega t + \frac{l}{2}\sin(\omega t + \theta_2)$$ **（1 分）**

$$\dot{x}_{C2} = -\omega l\sin\omega t - \frac{l}{2}\sin(\omega t + \theta_2)(\omega + \dot{\theta}_2),\quad y_{C2} = \omega l\cos\omega t + \frac{l}{2}\cos(\omega t + \theta_2)(\omega + \dot{\theta}_2)$$

（1 分）

$$T = \frac{1}{2}m\left(\dot{x}_{C2}{}^2 + \dot{y}_{C2}{}^2\right) + \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{12}ml^2\left(\omega + \dot{\theta}_2\right)^2$$ **（2 分）**

$$=\frac{1}{2}ml^2\omega^2+\frac{1}{8}ml^2\left(\omega+\dot{\theta}_2\right)^2+\frac{1}{2}ml^2\omega\cos\theta_2\left(\omega+\dot{\theta}_2\right)+\frac{1}{24}ml^2\left(\omega+\dot{\theta}_2\right)^2$$

$$=\left(\frac{1}{2}\cos\theta_2+\frac{2}{3}\right)ml^2\omega^2+ml^2\left(\frac{1}{2}\cos\theta_2+\frac{1}{3}\right)\omega\dot{\theta}_2+\frac{1}{6}ml^2\dot{\theta}_2^{\,2}$$ **（3 分）**

$V=\frac{1}{2}k\left(\overline{C_1C_2}-l_0\right)^2$， $l_0=l$ **（1 分）**，$\overline{C_1C_2}=2\cdot\frac{l}{2}\cos\frac{\theta_2}{2}=l\cos\frac{\theta_2}{2}$ **（1 分）**

$V=\frac{1}{2}k\left(l\cos\frac{\theta_2}{2}-l\right)^2$ **（1 分）**

$$L=T-V=\left(\frac{1}{2}\cos\theta_2+\frac{2}{3}\right)ml^2\omega^2+ml^2\left(\frac{1}{2}\cos\theta_2+\frac{1}{3}\right)\omega\dot{\theta}_2+\frac{1}{6}ml^2\dot{\theta}_2^{\,2}$$
$$-\frac{1}{2}k\left(l\cos\frac{\theta_2}{2}-l\right)^2$$ **（1 分）**

(b) 写出初积分 (总共 6 分)

由于 L 不显含 t，且为非定常约束

广义能量守恒：$T_2-T_0+V=C$ **（3 分）**

$\frac{1}{6}ml^2\dot{\theta}_2^{\,2}-\left(\frac{1}{2}\cos\theta_2+\frac{2}{3}\right)ml^2\omega^2+\frac{1}{2}k\left(l\cos\frac{\theta_2}{2}-l\right)^2=C$ **（3 分）**

(c) 计算杆 B_2 相对于杆 B_1 的角速度 (总共 3 分)

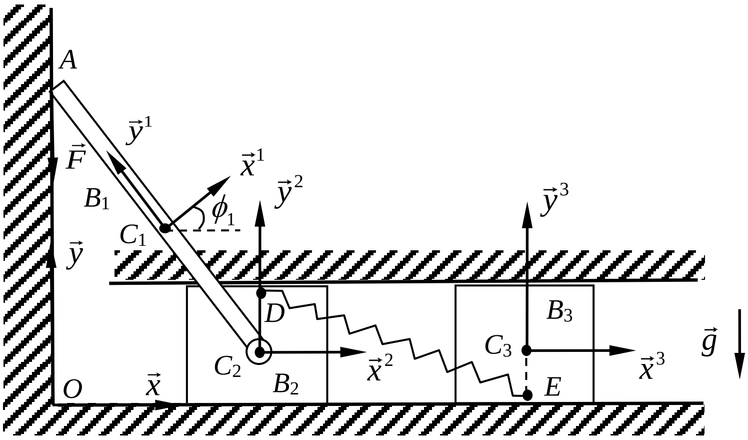
考虑初始条件：$\theta_2=\frac{2\pi}{3}$， $\dot{\theta}_2=0$，以及 $k=m\omega^2$

$C=-\frac{5}{12}ml^2\omega^2+\frac{1}{2}k\left(\frac{l}{2}\right)^2=-\frac{5}{12}ml^2\omega^2+\frac{1}{8}kl^2$ **（1 分）**

初积分为：$\frac{1}{6}ml^2\dot{\theta}_2^{\,2}-\left(\frac{1}{2}\cos\theta_2+\frac{2}{3}\right)ml^2\omega^2+\frac{1}{2}k\left(l\cos\frac{\theta_2}{2}-l\right)^2=-\frac{5}{12}ml^2\omega^2+\frac{1}{8}kl^2$ **（1 分）**

当 $\theta_2=0$ 时，$\frac{1}{6}ml^2\dot{\theta}_2^{\,2}=\frac{3}{4}ml^2\omega^2+\frac{1}{8}kl^2=\frac{7}{8}ml^2\omega^2$

解得：$\dot{\theta}_2=\frac{\sqrt{21}}{2}\omega$ **（1 分）**



5.（20 分）如图动力学系统由均质杆 B_1，均质方块 B_2 和均质方块 B_3 组成。杆 B_1 的 A 端搁置在光滑的墙上，另一端与均质方块 B_2 在 C_2 处铰接，方块 B_2 和 B_3 在光滑的水平面上作直线平动。设杆 B_1 的长度为 $2l$，方块 B_2 和 B_3 的边长均为 $2a$, 杆 B_1、方块 B_2 和方块 B_3 的质量分别为 m_1, m_2 和 m_3。方块 B_2 和方块 B_3 关于质心的转动惯量分别为 J_2 和 J_3，点 D 为方块 B_2 的给定点，该点在连体基 $\vec{x}^2\ \vec{y}^2$ 下的坐标为 $(0,b)$，点 E 为方块 B_3 的给定点，该点在连体基 $\vec{x}^3\ \vec{y}^3$ 下的坐标为 $(0,-b)$，点 D 和点 E 之间有一弹簧，刚度为 k，原长为 l_0。铅垂力 $\vec{F}$ 作用于 B_1 的点 A，力的大小为 F。不计所有摩擦。图中 O-$\boldsymbol{\vec{e}}$ 为惯性基。以系统的位形坐标写出封闭的带拉格朗日乘子的第一类拉格朗日方程。

解：(a) 位移约束方程，雅可比阵和加速度约束方程右项 (总共 8 分)
建立惯性基 O-$\boldsymbol{\vec{e}}$，系统的运动学约束方程为：

$$\boldsymbol{\Phi} = \begin{bmatrix} x_1 - l\sin\phi_1 \\ x_2 - x_1 - l\sin\phi_1 \\ y_2 - y_1 + l\cos\phi_1 \\ y_2 - a \\ \phi_2 \\ y_3 - a \\ \phi_3 \end{bmatrix} = \mathbf{0} \quad \text{（3 分）}$$

系统的位形坐标为 $\boldsymbol{q} = \begin{bmatrix} x_1 & y_1 & \phi_1 & x_2 & y_2 & \phi_2 & x_3 & y_3 & \phi_3 \end{bmatrix}^{\mathrm{T}}$（1 分）

$$\boldsymbol{\Phi}_q = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -l\cos\phi_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & -l\cos\phi_1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -l\sin\phi_1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \text{（2 分）}$$

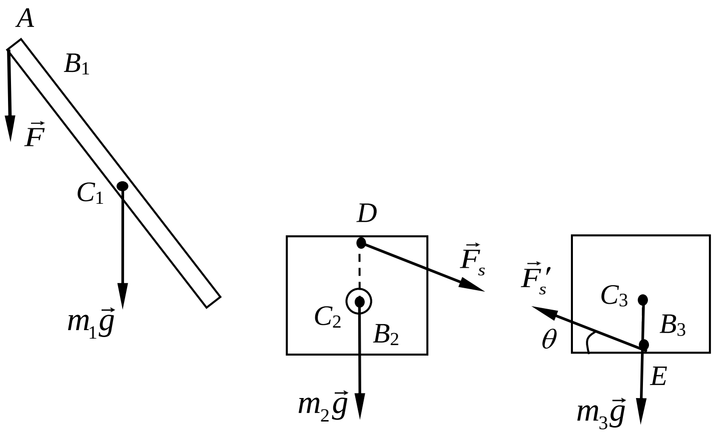
$$\boldsymbol{\gamma} = \begin{bmatrix} -l\sin\phi_1\dot{\phi}_1^2 \\ -l\sin\phi_1\dot{\phi}_1^2 \\ l\cos\phi_1\dot{\phi}_1^2 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \text{（2 分）}$$

(b) 增广质量阵和增广主动力阵 (总共 9 分)

增广质量阵为：

$$\boldsymbol{Z} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{Z}_1 & \boldsymbol{0} & \boldsymbol{0} \\ \boldsymbol{0} & \boldsymbol{Z}_2 & \boldsymbol{0} \\ \boldsymbol{0} & \boldsymbol{0} & \boldsymbol{Z}_3 \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{Z}_1 = \begin{bmatrix} m_1 & 0 & 0 \\ 0 & m_1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{12}m_1(2l)^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} m_1 & 0 & 0 \\ 0 & m_1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{3}m_1 l^2 \end{bmatrix} \text{（1 分）}$$

$$\boldsymbol{Z}_2 = \begin{bmatrix} m_2 & 0 & 0 \\ 0 & m_2 & 0 \\ 0 & 0 & J_2 \end{bmatrix} \text{（1 分），} \quad \boldsymbol{Z}_3 = \begin{bmatrix} m_3 & 0 & 0 \\ 0 & m_3 & 0 \\ 0 & 0 & J_3 \end{bmatrix} \text{（1 分）}$$



弹簧力为 $F_s = k\left(\sqrt{(x_3 - x_2)^2 + 4b^2} - l_0\right)$

设弹簧力与水平线的夹角为θ，$\cos\theta=\dfrac{x_3-x_2}{\sqrt{(x_3-x_2)^2+4b^2}}$，$\sin\theta=\dfrac{2b}{\sqrt{(x_3-x_2)^2+4b^2}}$

增广主动力阵为：

$$\hat{\boldsymbol{F}}^a=\begin{bmatrix}\hat{\boldsymbol{F}}_1^a\\ \hat{\boldsymbol{F}}_2^a\\ \hat{\boldsymbol{F}}_3^a\end{bmatrix}，\quad \hat{\boldsymbol{F}}_1^a=\begin{bmatrix}0\\ -F-m_1g\\ Fl\sin\phi_1\end{bmatrix}\text{（2 分）}，\quad \hat{\boldsymbol{F}}_2^a=\begin{bmatrix}F_s\cos\theta\\ -F_s\sin\theta-m_2g\\ -F_s\cos\theta b\end{bmatrix}\text{（2 分）}$$

$$\hat{\boldsymbol{F}}_3^a=\begin{bmatrix}-F_s\cos\theta\\ F_s\sin\theta-m_3g\\ -F_s\cos\theta b\end{bmatrix}\text{（2 分）}$$

(c) 写出封闭的带拉格朗日乘子的第一类拉格朗日方程 (总共 3 分)

封闭的带拉格朗日乘子的第一类拉格朗日方程为：

$$\begin{bmatrix}\boldsymbol{Z} & \boldsymbol{\Phi}_{\boldsymbol{q}}^T\\ \boldsymbol{\Phi}_{\boldsymbol{q}} & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\ddot{\boldsymbol{q}}\\ \boldsymbol{\lambda}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\hat{\boldsymbol{F}}^a\\ \gamma\end{bmatrix}\text{（2 分）}$$

$$\ddot{\boldsymbol{q}}=\begin{bmatrix}\ddot{\boldsymbol{q}}_1^T & \ddot{\boldsymbol{q}}_2^T & \ddot{\boldsymbol{q}}_3^T\end{bmatrix}^T，\ \ddot{\boldsymbol{q}}_i=\begin{pmatrix}\ddot{x}_i & \ddot{y}_i & \ddot{\varphi}_i\end{pmatrix}^T\ (i=1,2,3)$$

$$\boldsymbol{\lambda}=\begin{bmatrix}\lambda_1 & \lambda_2 & \lambda_3 & \lambda_4 & \lambda_5 & \lambda_6 & \lambda_7\end{bmatrix}^T\text{（1 分）}$$