

## 刚体的平面运动

- 刚体平面运动的动力学条件
- 处理动力学问题的一般方法
- 处理动力学问题的独立坐标方法
- 处理瞬时动力学问题的直接分析法



2018年11月24日  
理论力学CAI 刚体动力学

1

## 处理动力学问题的独立坐标方法

- 以系统描述位形的独立坐标为变量建立动力学方程
  - 方程个数为 $\delta = n - s$ ， $\delta$ 为系统的自由度
  - 方程为 $\delta$ 个独立坐标的二阶微分方程组
  - 方程组并不含未知理想约束力

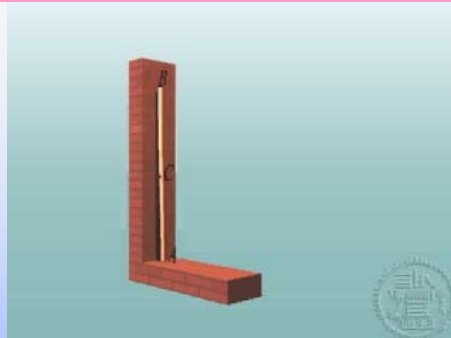


2018年11月24日  
理论力学CAI 刚体动力学

2

[例]

利用独立坐标方法建立杆AB的动力学方程



2018年11月24日  
理论力学CAI 刚体动力学

3

[解]

惯性基  $O-\vec{e}$  连体基  $C-\vec{e}^b$

受力分析 (一般位置)

主动力  $m\vec{g}$

理想约束力  $\vec{F}_{NA}$   $\vec{F}_{NB}$

运动学分析

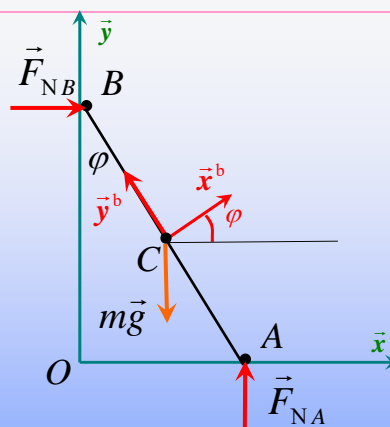
位形坐标  $x_C$   $y_C$   $\varphi$

约束方程  $s=2$

$$x_C = \frac{l}{2} \sin \varphi, \quad y_C = \frac{l}{2} \cos \varphi$$

自由度  $\delta=1$

选取独立坐标  $\varphi$



2018年11月24日  
理论力学CAI 刚体动力学

4

建立以独立坐标为变量的  
动力学方程  $\varphi$

动量定理 ~~动量矩定理~~

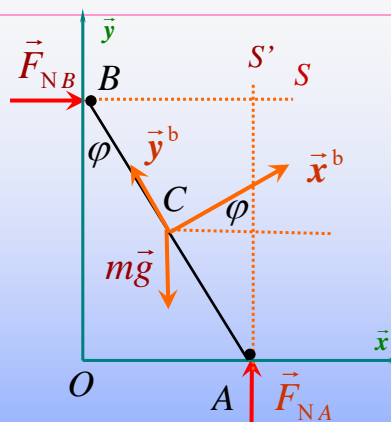
矩心 定点  $O$  质心  $C$  ~~瞬心  $S'$~~

约束力不出现

$$\dot{\vec{L}}_{S'} + \vec{v}_{S'} \times \vec{p} = \vec{M}_{S'}$$

$$\vec{M}_{S'z} = M_{S'z} \vec{z}$$

$$M_{S'z} = mg \frac{l}{2} \sin \varphi$$



2018年11月24日  
理论力学CAI 刚体动力学

5

$$\dot{\vec{L}}_{S'} + \vec{v}_{S'} \times \vec{p} = \vec{M}_{S'}$$

$$\vec{M}_{S'z} = M_{S'z} \vec{z} \quad M_{S'z} = mg \frac{l}{2} \sin \varphi$$

杆对瞬心定轨迹点  $S'$  的绝对动量矩

$$L_{S'z} = J_{S'z} \omega = \frac{1}{3} ml^2 \dot{\varphi}$$

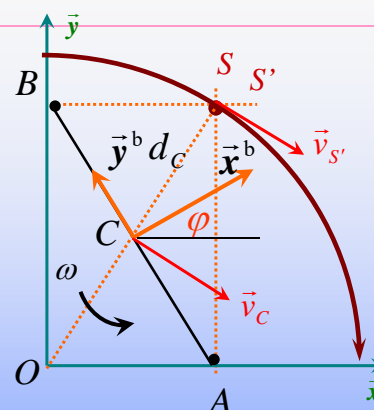
$$\dot{L}_{S'z} = J_{S'z} \dot{\omega} = \frac{1}{3} ml^2 \ddot{\varphi}$$

瞬心定轨迹 点  $O$  为圆心的圆

$$\vec{v}_{S'} \parallel \vec{v}_C \quad \vec{v}_{S'} \times \vec{p} = \vec{v}_{S'} \times m \vec{v}_C = \vec{0}$$

动力学方程

$$\frac{ml^2}{3} \ddot{\varphi} = \frac{mgl}{2} \sin \varphi$$



$$\ddot{\varphi} - \frac{3g}{2l} \sin \varphi = 0$$



2018年11月24日  
理论力学CAI 刚体动力学

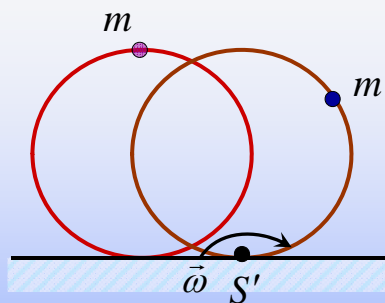
6

[例]

一质量为 $m$ ，半径为 $R$ 的圆环  
上固结一质量为 $m$ 的质点

圆环在水平面上作无滑动的  
滚动

利用独立坐标方法建立系  
统的动力学方程



2018年11月24日  
理论力学CAI 刚体动力学

7

[解] 惯性基  $O-\vec{e}$  质心连体基  $C-\vec{e}^b$   
系统质心 $C$ 为 $O_1m$ 的中点

受力分析（一般位置）

主动力  $2m\vec{g}$

理想约束力  $\vec{F}_N$

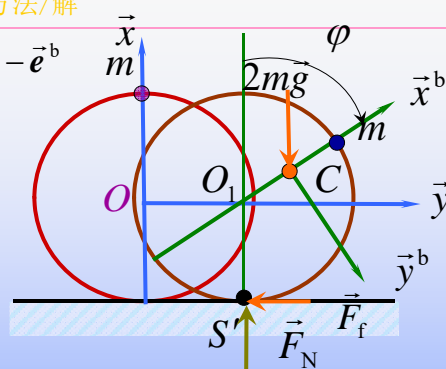
摩擦力  $\vec{F}_f$

运动学分析

位形坐标  $x_C y_C \varphi$

自由度为1

选取独立坐标  $\varphi$



2018年11月24日  
理论力学CAI 刚体动力学

8

建立以独立坐标为变量的  
动力学方程  $\varphi$

动量定理 动量矩定理  
矩心 定点  $O$  质心  $C$  瞬心  $S'$   
约束力摩擦力不出现

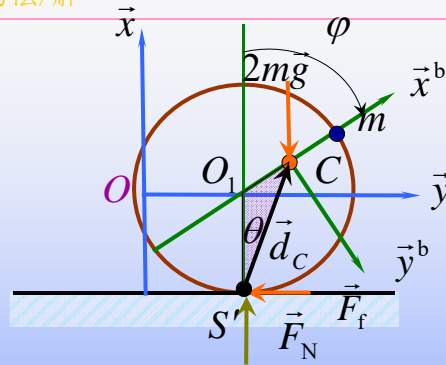
$$\dot{\vec{L}}_{S'} + \vec{v}_{S'} \times \vec{p} = \vec{M}_{S'}$$

$$\vec{M}_{S'z} = M_{S'z} \vec{z} \quad M_{S'z} = 2mgd_c \sin \theta$$

$$\frac{R/2}{\sin \theta} = \frac{d_c}{\sin(\pi - \varphi)} \quad \sin \theta = \frac{R}{2d_c} \sin \varphi$$

$$M_{S'z} = mgR \sin \varphi$$

有无其他方法?



2018年11月24日  
理论力学CAI 刚体动力学

9

$$\dot{\vec{L}}_{S'} + \vec{v}_{S'} \times \vec{p} = \vec{M}_{S'}$$

$$\vec{M}_{S'z} = M_{S'z} \vec{z} \quad M_{S'z} = mgR \sin \varphi$$

系统对瞬心  $S$  的转动惯量

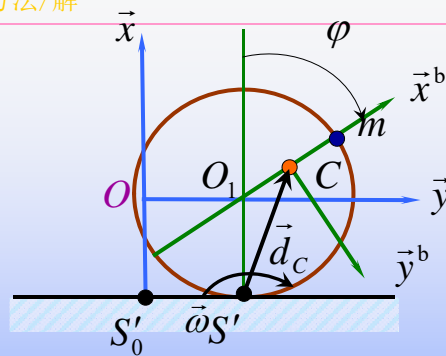
$$J_{S'z} = J_{Cz} + 2md_c^2 = 2mR^2(2 + \cos \varphi)$$

系统对瞬心定轨迹点  $S'$  的绝对动量矩

$$\begin{aligned} \vec{L}_{S'} &= L_{S'z} \vec{z} = J_{S'z} \omega \vec{z} \\ &= 2mR^2(2 + \cos \varphi) \dot{\varphi} \vec{z} \end{aligned}$$

$$\dot{\vec{L}}_{S'} = \frac{d}{dt}(J_{S'z} \dot{\varphi}) \vec{z} = \left[ \frac{d}{dt}(J_{S'z}) \dot{\varphi} + J_{S'z} \frac{d\dot{\varphi}}{dt} \right] \vec{z}$$

$$= [2mR^2(2 + \cos \varphi) \ddot{\varphi} - 2mR^2 \dot{\varphi}^2 \sin \varphi] \vec{z}$$



$$J_{Cz} = \frac{3}{2}mR^2 \quad d_c^2 = R^2 \left( \frac{5}{4} + \cos \varphi \right)$$



2018年11月24日  
理论力学CAI 刚体动力学

10

刚体动力学/刚体的平面运动/独立坐标方法/解

$$\dot{\vec{L}}_{S'} + \vec{v}_{S'} \times \vec{p} = \vec{M}_{S'}$$

$$\vec{M}_{S'z} = M_{S'z} \vec{z} \quad M_{S'z} = mgR \sin \varphi$$

$$\dot{\vec{L}}_{S'} = \dot{L}_{S'z} \vec{z}$$

瞬心定轨迹 直线

$$x_{S'} = \overline{S'_0 S'} = R\varphi \quad v_{S'} = R\dot{\varphi} \quad \text{方向如图} \quad \sin \theta = \frac{R}{2d_c} \sin \varphi$$

$$\vec{v}_C = \dot{\varphi} \vec{z} \times \vec{d}_C \quad v_C = \dot{\varphi} d_C \quad \text{方向如图}$$

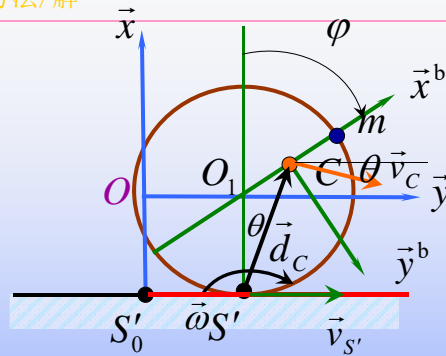
$$\vec{v}_{S'} \times \vec{p} = \vec{v}_{S'} \times 2m\vec{v}_C = 2mRd_c \dot{\varphi}^2 \sin \theta \vec{z} = mR^2 \dot{\varphi}^2 \sin \varphi \vec{z}$$

有无其他方法?

11



2018年11月24日  
理论力学CAI 刚体动力学



刚体动力学/刚体的平面运动/独立坐标方法/解

$$\dot{\vec{L}}_{S'} + \vec{v}_{S'} \times \vec{p} = \vec{M}_{S'}$$

$$\vec{M}_{S'z} = M_{S'z} \vec{z} \quad M_{S'z} = mgR \sin \varphi$$

$$\dot{\vec{L}}_{S'} =$$

$$\left[ 2mR^2 (2 + \cos \varphi) \ddot{\varphi} - 2mR^2 \dot{\varphi}^2 \sin \varphi \right] \vec{z}$$

$$\vec{v}_{S'} \times \vec{p} = mR^2 \dot{\varphi}^2 \sin \varphi \vec{z}$$

$$\left[ 2mR^2 (2 + \cos \varphi) \ddot{\varphi} - 2mR^2 \dot{\varphi}^2 \sin \varphi \right] \vec{z} + mR^2 \dot{\varphi}^2 \sin \varphi \vec{z} = mgR \sin \varphi \vec{z}$$

$$\dot{\vec{L}}_{S'} \quad \vec{v}_{S'} \times \vec{p} \quad \vec{M}_{S'}$$

$$2R(2 + \cos \varphi) \ddot{\varphi} - R \dot{\varphi}^2 \sin \varphi - g \sin \varphi = 0$$



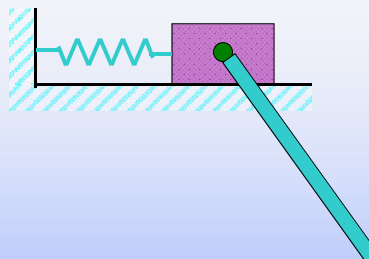
2018年11月24日  
理论力学CAI 刚体动力学

若初始位置  $\varphi_0 = 0, \dot{\varphi}_0 \neq 0$  求约束力?

12

[例]

图示机构由均质滑块和长为 $2l$ 的均质杆组成。  
刚度为 $k$ 的线弹簧连接滑块与墙面。  
滑块在光滑的水平面滑动，均质杆由转动铰悬挂在滑块的质心 $C_1$ 上可在铅垂面内摆动。滑块和摆杆质量分别为 $m_1$ 和 $m_2$



试利用独立坐标方法建立系统的动力学方程

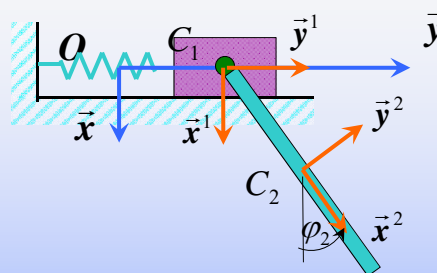


2018年11月24日  
理论力学CAI 刚体动力学

13

[解] 惯性基  $O - \vec{e}$  点 $O$ 在弹簧原长处

滑块连体基  $C_1 - \vec{e}^1$   
摆杆连体基  $C_2 - \vec{e}^2$



2018年11月24日  
理论力学CAI 刚体动力学

14

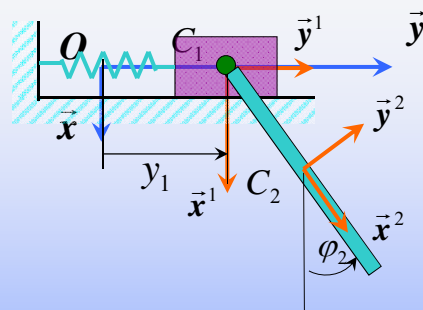
[解] 惯性基  $O-\vec{e}$  点 $O$ 在弹簧原长处

滑块连体基  $C_1-\vec{e}^1$   
摆杆连体基  $C_2-\vec{e}^2$

运动学分析

自由度为2

选取独立坐标  $y_1 \quad \varphi_2$



2018年11月24日  
理论力学CAI 刚体动力学

15

建立以独立坐标为变量的  
动力学方程  $y_1$

以整体为对象

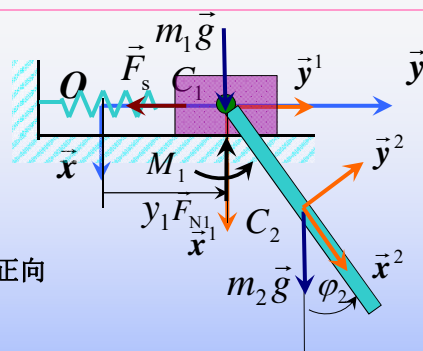
受力分析 (一般位置)

重力  $m_1\vec{g} \quad m_2\vec{g}$

线弹性力  $F_s = ky_1$

滑槽理想约束力  $\vec{F}_{N1} \quad M_1$

设定正向



动力学定理

动量定理

动量矩定理

方向  $\vec{x}$

$\vec{y}$

约束力不出现  $\vec{F}_{N1} \quad M_1$



2018年11月24日  
理论力学CAI 刚体动力学

16



### 动量定理 $\vec{y}$

动量  $\underline{p_y = m_1 v_{C_1 y} + m_2 v_{C_2 y}}$

滑块质心速度  $v_{C_1 y} = v_{C_1} = \dot{y}_1$

摆杆质心速度 摆杆连体基  $\vec{e}'$

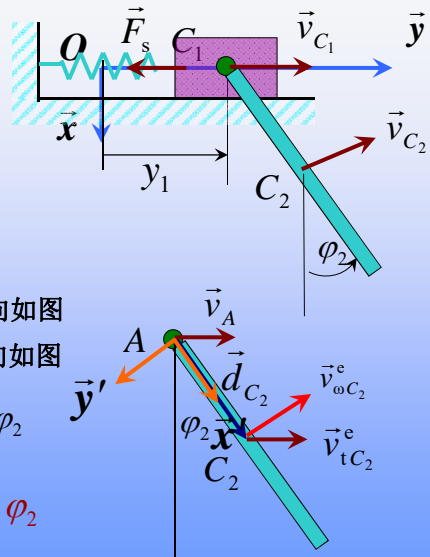
$\underline{\vec{v}_{C_2} = \vec{v}_{tC_2} + \vec{v}_{\omega C_2}}$

$v_{tC_2}^e = v_A = v_{C_1} = \dot{y}_1$  方向如图

$\vec{v}_{\omega C_2}^e = \dot{\varphi}_2 \vec{z} \times \vec{d}_{C_2}$   $v_{\omega C_2}^e = \dot{\varphi}_2 l$  方向如图

$v_{C_2 y} = v_{tC_2}^e + v_{\omega C_2}^e \cos \varphi_2 = \dot{y}_1 + l \dot{\varphi}_2 \cos \varphi_2$

$\underline{p_y = (m_1 + m_2) \dot{y}_1 + m_2 l \dot{\varphi}_2 \cos \varphi_2}$



$\underline{p_y = (m_1 + m_2) \dot{y}_1 + m_2 l \dot{\varphi}_2 \cos \varphi_2}$

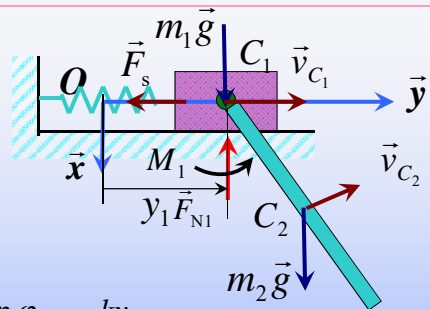
外力:  $\vec{F}_s = -ky_1 \vec{y}$   $m_1 \vec{g}$   $m_2 \vec{g}$

$\vec{F}_{N1}$   $M_1$

$\underline{\dot{p}_y = F_{Ry}}$

$(m_1 + m_2) \ddot{y}_1 + \underline{m_2 l \ddot{\varphi}_2 \cos \varphi_2 - m_2 l \dot{\varphi}_2^2 \sin \varphi_2} = -ky_1$

$\underline{(m_1 + m_2) \ddot{y}_1 + m_2 l \ddot{\varphi}_2 \cos \varphi_2 = -ky_1 + m_2 l \dot{\varphi}_2^2 \sin \varphi_2}$



建立以独立坐标为变量的  
动力学方程

以摆杆为对象

动量定理

动量矩定理

矩心

质心

$C_2$

动点

$A$

对动点的绝对动量矩

约束力不出现

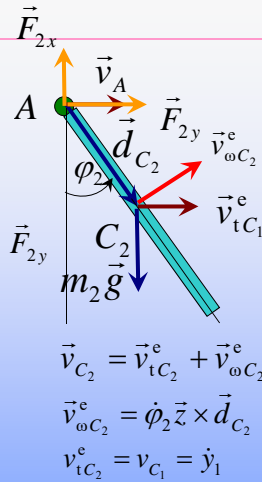
$$\vec{L}_A = \vec{L}_{C_2} + \vec{d}_{C_2} \times m_2 \vec{v}_{C_2}$$

$$\vec{L}_{C_2} = J_{C_2} \dot{\varphi}_2 \vec{z} = \frac{1}{3} m_2 l^2 \dot{\varphi}_2 \vec{z}$$

$$\vec{d}_{C_2} \times m_2 \vec{v}_{C_2} = m_2 [\vec{d}_{C_2} \times \vec{v}_{C_1} + \vec{d}_{C_2} \times (\dot{\varphi}_2 \vec{z} \times \vec{d}_{C_2})]$$

$$= m_2 (d_{C_2} v_{C_1} \cos \varphi_2 + d_{C_2}^2 \dot{\varphi}_2) \vec{z} = m_2 (l \dot{y}_1 \cos \varphi_2 + l^2 \dot{\varphi}_2) \vec{z}$$

$$\vec{L}_A = \left( m_2 l \dot{y}_1 \cos \varphi_2 + \frac{4}{3} m_2 l^2 \dot{\varphi}_2 \right) \vec{z}$$



2018年11月24日  
理论力学CAI 刚体动力学

$$\vec{L}_A = \left( m_2 l \dot{y}_1 \cos \varphi_2 + \frac{4}{3} m_2 l^2 \dot{\varphi}_2 \right) \vec{z}$$

对动点的绝对动量矩  
定理

$$\dot{\vec{L}}_A + \vec{v}_A \times \vec{p}_2 = \vec{M}_A$$

$$\vec{M}_A = -m_2 g l \sin \varphi_2 \vec{z}$$

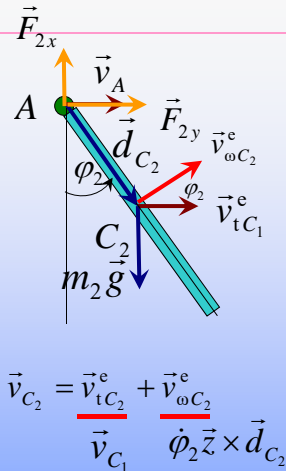
$$\vec{v}_A \times \vec{p}_2 = \vec{v}_{C_1} \times m_2 \vec{v}_{C_2}$$

$$= m_2 [\vec{v}_{C_1} \times \vec{v}_{C_1} + \vec{v}_{C_1} \times (\dot{\varphi}_2 \vec{z} \times \vec{d}_{C_2})]$$

$$= m_2 l \dot{y}_1 \dot{\varphi}_2 \sin \varphi_2 \vec{z}$$

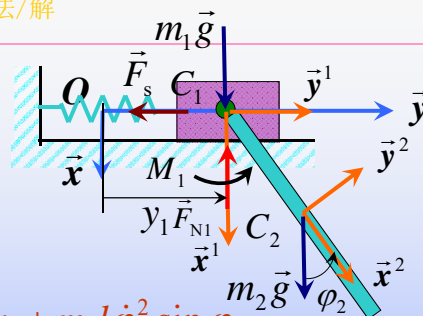
$$m_2 l \dot{y}_1 \cos \varphi_2 - m_2 l \dot{y}_1 \dot{\varphi}_2 \sin \varphi_2 + \frac{4}{3} m_2 l^2 \ddot{\varphi}_2 + m_2 l \dot{y}_1 \dot{\varphi}_2 \sin \varphi_2 = -m_2 g l \sin \varphi_2$$

$$\ddot{y}_1 \cos \varphi_2 + \frac{4}{3} l \ddot{\varphi}_2 = -g \sin \varphi_2$$



2018年11月24日  
理论力学CAI 刚体动力学

## 系统动力学方程



$$(m_1 + m_2)\ddot{y}_1 + m_2 l \ddot{\phi}_2 \cos \phi_2 = -ky_1 + m_2 l \dot{\phi}_2^2 \sin \phi_2$$

$$\ddot{y}_1 \cos \phi_2 + \frac{4}{3} l \ddot{\phi}_2 = -g \sin \phi_2$$

$$\begin{pmatrix} (m_1 + m_2) & m_2 l \cos \phi_2 \\ \cos \phi_2 & \frac{4}{3} l \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \ddot{y}_1 \\ \ddot{\phi}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -ky_1 + m_2 l \dot{\phi}_2^2 \sin \phi_2 \\ -g \sin \phi_2 \end{pmatrix}$$



2018年11月24日  
理论力学CAI 刚体动力学

约束反力?

24

## 两种处理动力学问题方法的比较

- 一般方法

- 建模的过程具有程式化的特点不太容易出错

- 建立刚体系动力学模型是以每个刚体为单元，定义它们的3个位形坐标、建立3个统一形式的动力学方程
- 系统的坐标与动力学方程由它们组集而成
- 由于未知的理想约束力的存在，引入的加速度约束关系也比较规范
- 多少个理想约束力定有多少个约束关系

- 缺点是动力学模型的规模太大



2018年11月24日  
理论力学CAI 刚体动力学

25

- 独立坐标方法

- 建立动力学方程的步骤

- 由运动学入手，分析系统的自由度，定义描述系统位形的独立坐标
    - 进行运动学分析，建立刚体质心速度和角速度与独立坐标速度间的关系
    - 直接由动力学基本原理建立动力学方程

- 所得到的动力学方程个数最少

- 建立动力学方程的方法讲究技巧

- 系统独立坐标的定义不是唯一的
    - 建方程的简繁的程度以及方程的简洁程度取决于独立坐标的选取，无一定的规律可循
    - 要求读者有清楚的运动学与动力学概念以及建立动力学方程的经验，不然容易出错



– 无法求理想约束力

理论力学CAI 刚体动力学

26

## 刚体的平面运动

- 刚体平面运动的动力学条件
- 处理动力学问题的一般方法
- 处理动力学问题的独立坐标方法
- 处理瞬时动力学问题的直接分析法



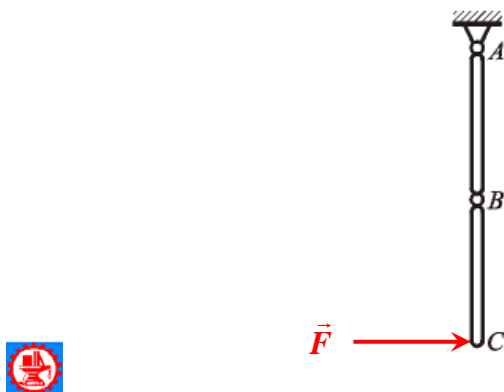
2018年11月24日

理论力学CAI 刚体动力学

27

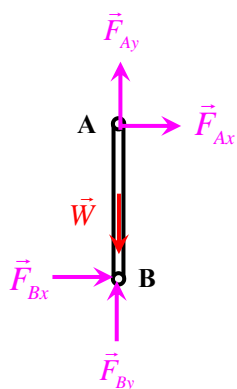
**【例】**

长 $l$ ，重 $W$ 的均质杆 $AB$ ， $BC$ 在铅垂平面内用铰链 $B$ 连接，并用铰链 $A$ 固定如图示。今在 $C$ 端作用一力 $\vec{F}$ 。试求此瞬时两杆的角加速度。

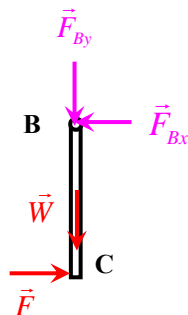


**【解】：** 分别以 $AB$ 杆和 $BC$ 杆为研究对象。

$AB$ 受力图：

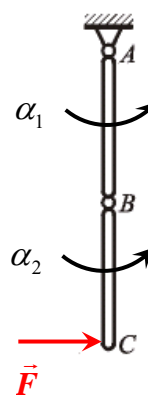


$BC$ 受力图：



**独立**未知运动量

速度层面已知



6个**独立**未知量： $F_{Ax}, F_{Ay}, F_{Bx}, F_{By}, \alpha_1, \alpha_2$

6个**独立**动力学方程，可解。

AB: 定轴转动, 对轴A动量矩定理

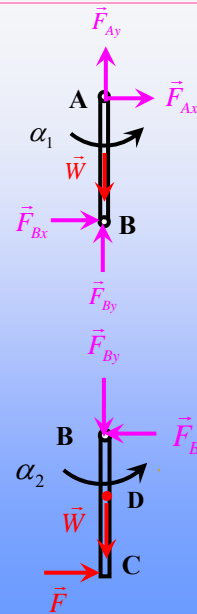
$$J_A \alpha_1 = F_{Bx} l$$

$$\frac{1}{3} \frac{W}{g} l^2 \alpha_1 = F_{Bx} l$$

BC: 平面一般运动

对质心动量矩定理

$$\frac{1}{12} \frac{W}{g} l^2 \alpha_2 = (F + F_{Bx}) l / 2$$



BC: 质心加速度 运动学定点公式

连体基  $B - \vec{e}_1$

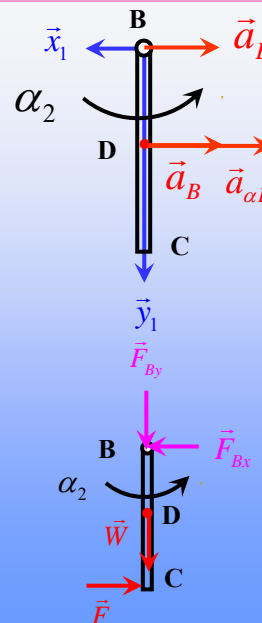
$$\vec{a}_D = \vec{a}_B + \cancel{\vec{a}_{\omega D}^e} + \vec{a}_{\alpha D}^e$$

$$a_{Dx} = \alpha_1 l + \alpha_2 l / 2$$

质心运动定理

$$\frac{W}{g} a_{Dx} = F - F_{Bx}$$

$$\frac{W}{g} (\alpha_1 l + \alpha_2 l / 2) = F - F_{Bx}$$



3个方程, 3个未知数

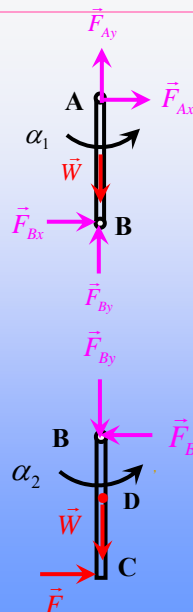
$$\begin{cases} \frac{1}{3} \frac{W}{g} l^2 \alpha_1 = F_{Bx} l \\ \frac{1}{12} \frac{W}{g} l^2 \alpha_2 = (F + F_{Bx}) l / 2 \\ \frac{W}{g} (\alpha_1 l + \alpha_2 l / 2) = F - F_{Bx} \end{cases}$$

以上3式解出:

$$\alpha_1 = -\frac{6Fg}{7Wl} \quad \alpha_2 = \frac{30Fg}{7Wl}$$

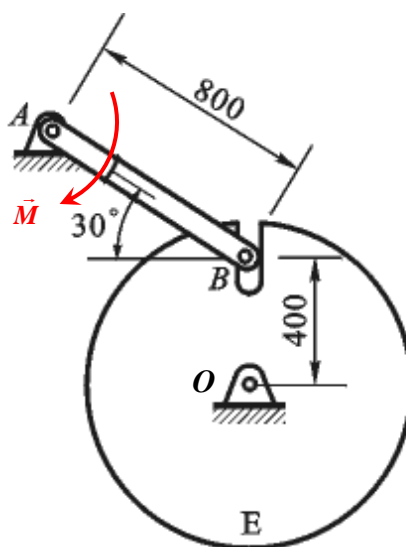


错误做法:  $J_B \alpha_2 = Fl$   $\alpha_2 = \frac{3Fg}{Wl}$



### 【例】

图示均质杆AB质量为18kg, 长800mm, 其A端固定, B端通过销子与盘E的光滑滑槽相连。盘E的质量为10kg, 对于盘心的回转半径为300mm。若系统初始静止, 试求当AB杆上作用一力偶  $M=15\text{N}\cdot\text{m}$  时, 杆与盘在图示瞬时的角加速度。



【解】 未知量分析

未知约束力:

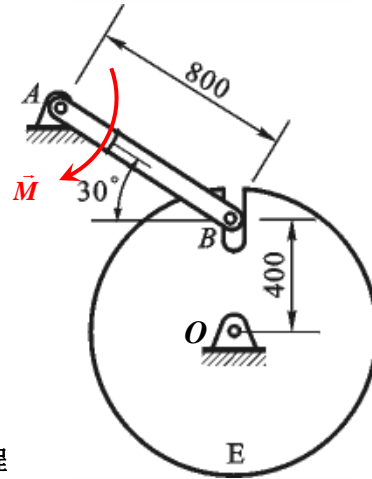
$$F_{Ox}, F_{Oy}, F_{Ax}, F_{Ay}, F_N$$

未知运动量 (速度层面已知):

$$\alpha_E, \alpha_{AB}$$

7个未知量, 6个独立的动力学方程

$\alpha_E, \alpha_{AB}$  不独立, 可补充运动学方程



圆盘E (对Oz轴的动量矩定理):

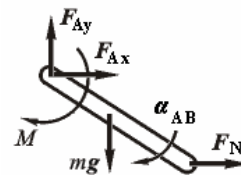
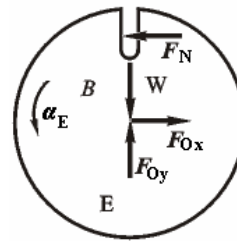
$$m_E \rho_0^2 \alpha_E = F_N \times 0.4$$

AB杆 (对Az轴的动量矩定理):

$$\frac{1}{3} m_{AB} l^2 \alpha_{AB} = M$$

$$-F_N (0.8) \sin 30^\circ + m_{AB} g (0.4) \cos 30^\circ$$

补充运动学方程





AB杆B点为兴趣点

连体基  $O-\vec{e}_1$

运动学动点公式

$$\vec{a}_B = \vec{a}_{\omega B} + \vec{a}_{\alpha B}$$

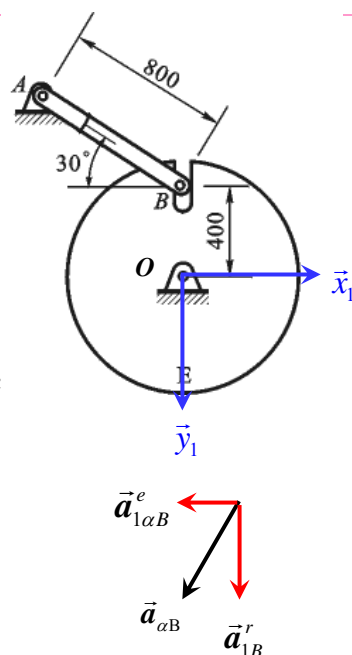
$$= \vec{a}_{1B}^r + \vec{a}_{1\alpha B}^e + \vec{a}_{A\omega B}^e + \vec{a}_{AB}^C$$

$$a_{\omega B} = a_{1\omega B}^e = a_{1B}^C = 0 (\omega_{AB} = \omega_E = 0)$$

$$a_{\alpha B} = 0.8\alpha_{AB}, a_{1\alpha B}^e = 0.4\alpha_E,$$

x轴投影，得：

$$\alpha_{AB} = \alpha_E$$

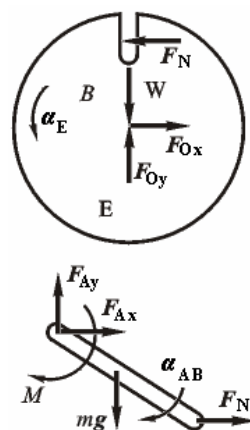


三个方程，三个未知数：

$$\begin{cases} m_E \rho_0^2 \alpha_E = F_N \times 0.4 \\ \frac{1}{3} m_{AB} l^2 \alpha_{AB} = M \\ -F_N (0.8) \sin 30^\circ + m_{AB} g (0.4) \cos 30^\circ \\ \alpha_{AB} = \alpha_E \end{cases}$$

解出：  $\alpha_{AB} = \alpha_E$

$$= (M + 0.2\sqrt{3}mg) / (\frac{1}{3}m_{AB}l^2 + m_E\rho_0^2) = 16.06\text{rad/s}^2$$



## 应用动量矩定理要正确选择矩心

对动点的绝对动量矩定理

$$\dot{\vec{L}}_D + \vec{v}_D \times \vec{p} = \vec{M}_D$$

对定点的绝对动量矩定理

$$\dot{\vec{L}}_O = \vec{M}_O$$

定轴转动刚体

$$J_{Oz} \ddot{\varphi} = M_{Oz}$$

单刚体

平面运动刚体

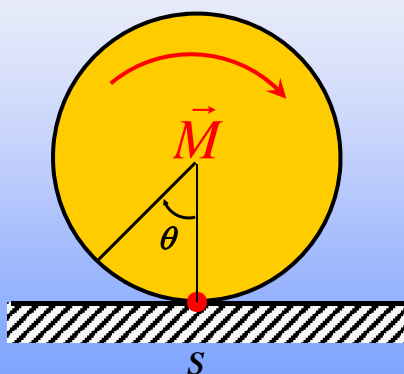
$$J_{Cz} \ddot{\varphi} = M_{Cz}$$

单刚体

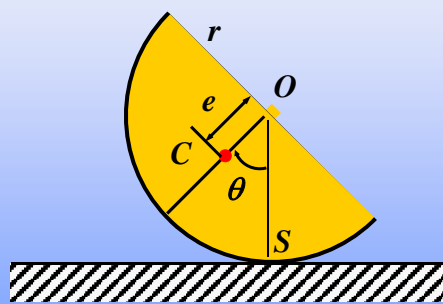
只有对质心、对定点的动量矩定理有简单形式



【例】分别写出动力学方程



$$J_{Sz} \ddot{\theta} = M$$



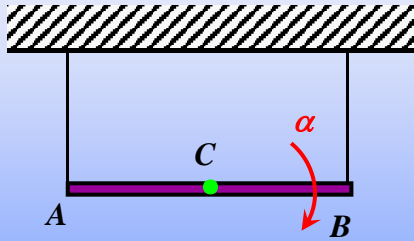
$$\left( \frac{3}{2}mR^2 - 2mRe \cos \theta \right) \ddot{\theta} + mRe\dot{\theta}^2 \sin \theta + mge \sin \theta = 0$$



用对瞬心定轨迹点的绝对动量矩定理

[例] 求剪断B端绳子瞬间杆子的角加速度（杆长为 $l$ ，质量为 $m$ ）

对点A的动量矩定理：



$$J_A \alpha = mg \frac{l}{2}$$

$$\alpha = \frac{3g}{2l} \quad \checkmark$$

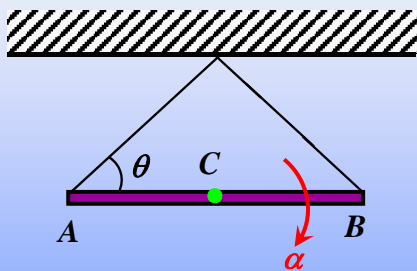
A点不是固定点，有加速度

结果正确，方法错误！



[例] 求剪断B端绳子瞬间杆子的角加速度（杆长为 $l$ ，质量为 $m$ ）

对点A的动量矩定理：



$$J_A \alpha = mg \frac{l}{2} \quad \times$$

$$\alpha = \frac{3g}{2l} \quad \times$$

$$\alpha = \frac{6 \sin^2 \theta}{1 + 3 \sin^2 \theta} \frac{g}{l} \quad \checkmark$$

A点不是固定点，有加速度

