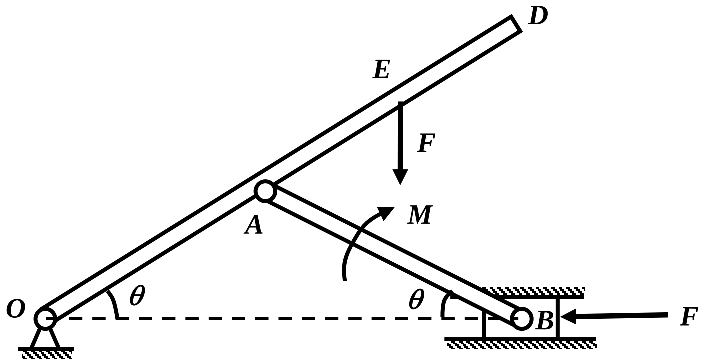
理论力学期终考试试卷（A）

（机动学院 05－06 学年）2005.12.1

1．曲柄连杆滑块机构如图所示。曲柄 OD 长 $2l$，与长为 l 的连杆 AB 用铰链连接，铰点 A 为 OD 的中点。在 OD 的 E 处作用铅垂向下、大小为 F 的力，$\overline{AE}=l/2$；在滑块 B 上作用水平向左、大小为 F 的力；在连杆 AB 上作用顺时针、大小为 M 的力偶。不计各构件的重力，用虚位移原理求系统平衡时 M 和 F 之间的关系。



用虚位移原理

$$-F\delta y_E - F\delta x_B + M\delta\theta = 0$$

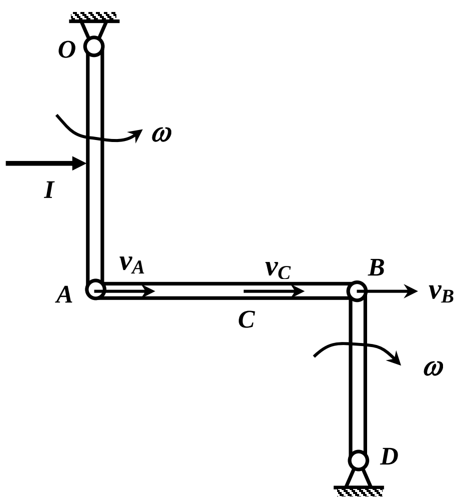
$$y_E = \frac{3l}{2}\sin\theta，\ \delta y_E = \frac{3l}{2}\cos\theta\,\delta\theta$$

$$x_B = 2l\cos\theta，\ \delta x_B = -2l\sin\theta\,\delta\theta$$

$$-F\frac{3l}{2}\cos\theta\,\delta\theta + F2l\sin\theta\,\delta\theta + M\delta\theta = 0$$

得到平衡条件为

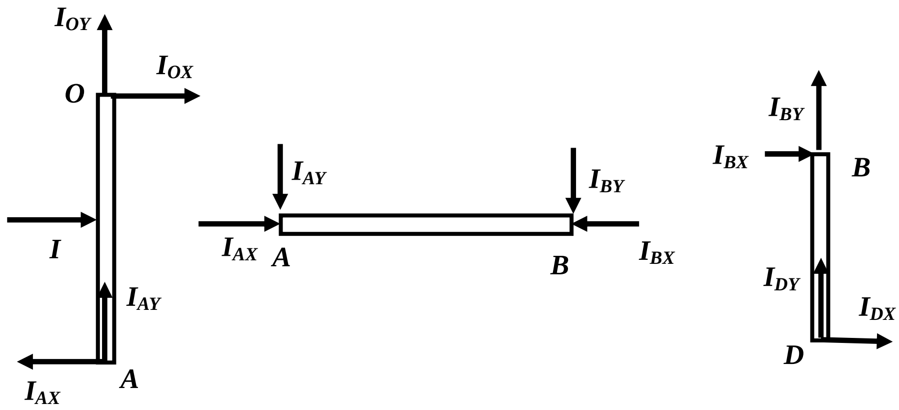
$$-F\frac{3l}{2}\cos\theta + F2l\sin\theta + M = 0$$



2．长为 l 的匀质杆 OA，AB 和长为 $2l/3$ 的匀质杆 BD 用铰链连接，如图所示。OA，BD，AB 的质量均为 m。碰撞前系统静止，在 OA 的中点处作用水平的冲量 $\boldsymbol{I}$，求碰撞后杆 OA，AB 和 BD 的角速度

解：运动学分析 $\omega_{OA}=\omega$

AB 作瞬时平动，$\omega_{AB}=0$，$\omega_{BD}=\dfrac{v_B}{2l/3}=\dfrac{v_A}{2l/3}=\dfrac{3}{2}\omega$

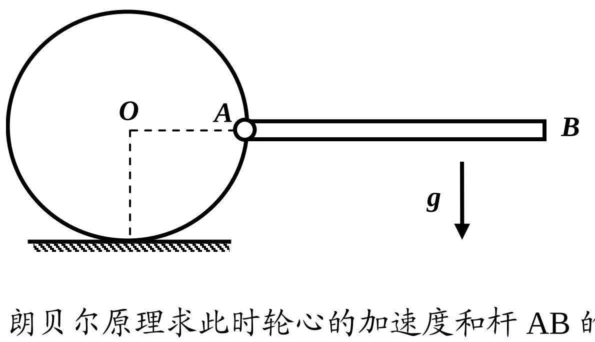


$\dfrac{1}{3}ml^2\omega=\dfrac{I\,l}{2}-I_{AX}\,l$ （1），$m\omega l=I_{AX}-I_{BX}$ （2）

$\dfrac{1}{3}m\left(\dfrac{2}{3}l\right)^2\dfrac{3}{2}\omega=I_{BX}\dfrac{2}{3}l$ （3）， $O=I_{AY}+I_{BY}$ (4) $O=I_{AY}\dfrac{l}{2}-I_{BY}\dfrac{l}{2}$ (5)

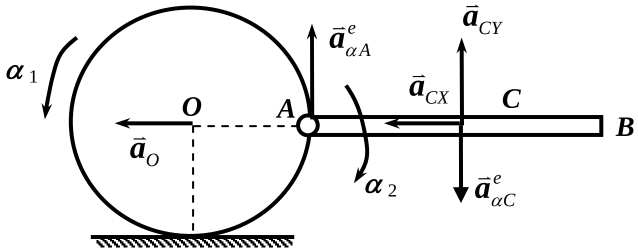
（1）+（2）× l +（3）×3 / 2 ：

$\dfrac{5}{3}ml^2\omega=\dfrac{I\,l}{2}$， 得到 $\omega=\dfrac{3I}{10ml}$，$\omega_{OA}=\omega=\dfrac{3I}{10ml}$，$\omega_{BD}=\dfrac{3}{2}\omega=\dfrac{9I}{20ml}$，$\omega_{AB}=0$



3．一长为 $2r$，质量为 m 的杆，一端铰接于圆轮轮缘上一点 A，圆轮放在一粗糙的水平面上，如图所示。设圆轮的质量为 $2m$，半径为 r，可以看作匀质圆盘。图示位置 AB 水平，系统无初速地开始运动，用达朗贝尔原理求此时轮心的加速度和杆 AB 的角加速度。

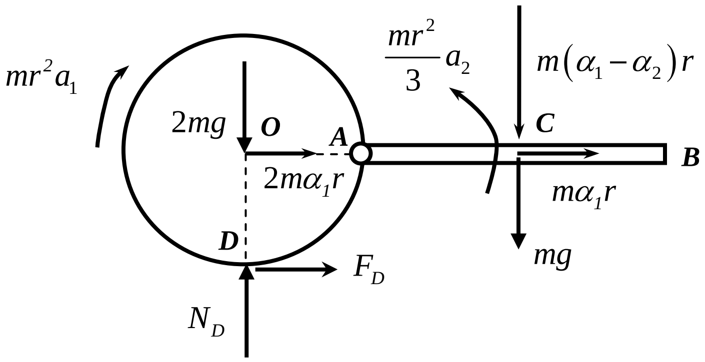
解：运动学分析

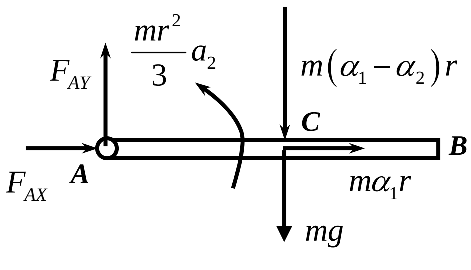


$$\vec{\boldsymbol{a}}_C = \vec{\boldsymbol{a}}_A + \vec{\boldsymbol{a}}^e_{\alpha C} = \vec{\boldsymbol{a}}_O + \vec{\boldsymbol{a}}^e_{\alpha A} + \vec{\boldsymbol{a}}^e_{\alpha C}$$

$$\boldsymbol{a}_{CX} = \boldsymbol{a}_O = \alpha_1 r，\quad \boldsymbol{a}_{CY} = \boldsymbol{a}^e_{\alpha A} - \boldsymbol{a}^e_{\alpha C} = \alpha_1 r - \alpha_2 r$$

受力图





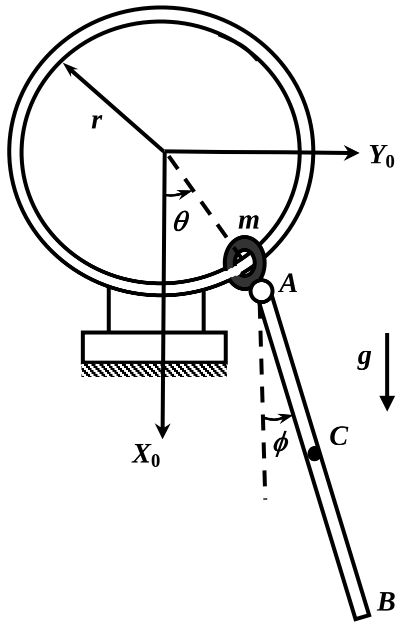
$$-3mr^2\alpha_1 - mr^2\alpha_1 - 2mr^2\left(\alpha_1 - \alpha_2\right) + \frac{mr^2}{3} a_2 - 2mgr = 0 \qquad (1)$$

$$-mr^2\left(\alpha_1 - \alpha_2\right) + \frac{mr^2}{3} a_2 - mgr = 0 \qquad (2)$$

得到

$$-6mr^2\alpha_1 + \frac{7}{3} mr^2 a_2 = 2mgr，\quad -mr^2\alpha_1 + \frac{4}{3} mr^2 a_2 = mgr$$

$$\frac{17}{3}mr^2a_2=4mgr, \quad a_2=\frac{12g}{17r}, \quad a_1=\frac{4}{3}\cdot\frac{12g}{17r}-\frac{g}{r}=\frac{16g}{17r}-\frac{g}{r}=-\frac{g}{17r}$$



4. 如图所示，长为 l，质量为 m 的杆 AB 的 A 端与质量为 m 的质点铰接，质点 m 可在光滑的固定圆轨道上滑动。以 θ 和 ϕ 为系统广义坐标

（1）写出系统的动能和势能

（2）写出系统的拉格朗日函数

（3）写出系统的第二类拉格朗日方程。

解：系统的动能为

$$T=\frac{1}{2}m\left(\dot{x}_1^{\,2}+\dot{y}_1^{\,2}\right)+\frac{1}{2}m\left(\dot{x}_C^{\,2}+\dot{y}_C^{\,2}\right)+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{12}ml^2\dot{\phi}^2$$

$$x_1=r\cos\theta, \quad y_1=r\sin\theta$$

$$x_C=r\cos\theta+\frac{l}{2}\cos\phi, \quad y_C=r\sin\theta+\frac{l}{2}\sin\phi$$

$$\dot{x}_1=-r\sin\theta\,\dot{\theta}, \quad \dot{y}_1=r\cos\theta\,\dot{\theta}$$

$$\dot{x}_C=-r\sin\theta\,\dot{\theta}-\frac{l}{2}\sin\phi\,\dot{\phi}, \quad \dot{y}_C=r\cos\theta\,\dot{\theta}+\frac{l}{2}\cos\phi\,\dot{\phi}$$

$$T=\frac{1}{2}mr^2\dot{\theta}^2+\frac{1}{2}m\left[r^2\dot{\theta}^2+\frac{l^2\dot{\phi}^2}{4}+rl\dot{\theta}\dot{\phi}\cos(\theta-\phi)\right]+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{12}ml^2\dot{\phi}^2$$

$$=mr^2\dot{\theta}^2+\frac{1}{6}ml^2\dot{\phi}^2+\frac{1}{2}mrl\dot{\theta}\dot{\phi}\cos(\theta-\phi)$$

$$V=-mgr\cos\theta-mg\left(r\cos\theta+\frac{l}{2}\cos\phi\right)=-2mgr\cos\theta-mg\frac{l}{2}\cos\phi$$

拉格朗日函数为

$$L=T-V$$

$$=mr^2\dot{\theta}^2+\frac{1}{6}ml^2\dot{\phi}^2+\frac{1}{2}mrl\dot{\theta}\dot{\phi}\cos(\theta-\phi)+2mgr\cos\theta+mg\frac{l}{2}\cos\phi$$

系统的第二类拉格朗日方程为

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial\dot{\theta}}\right)-\frac{\partial L}{\partial\theta}=0, \quad \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial\dot{\phi}}\right)-\frac{\partial L}{\partial\phi}=0$$

$$\frac{\partial L}{\partial\dot{\theta}}=2mr^2\dot{\theta}+\frac{1}{2}mrl\,\dot{\phi}\cos(\theta-\phi)$$

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{\phi}} = \frac{1}{3}ml^2\dot{\phi} + \frac{1}{2}mrl\dot{\theta}\cos(\theta-\phi)$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}}\right) = 2mr^2\ddot{\theta} + \frac{1}{2}mrl\ddot{\phi}\cos(\theta-\phi) - \frac{1}{2}mrl\dot{\phi}\sin(\theta-\phi)(\dot{\theta}-\dot{\phi})$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\phi}}\right) = \frac{1}{3}ml^2\ddot{\phi} + \frac{1}{2}mrl\ddot{\theta}\cos(\theta-\phi) - \frac{1}{2}mrl\dot{\theta}\sin(\theta-\phi)(\dot{\theta}-\dot{\phi})$$

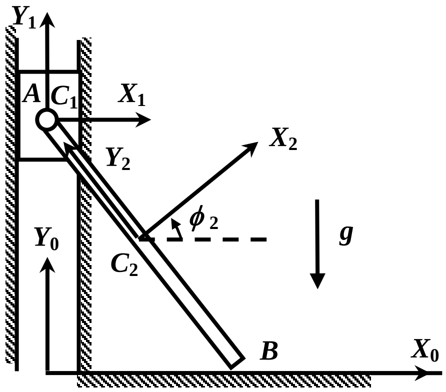
$$\frac{\partial L}{\partial \theta} = -\frac{1}{2}mrl\dot{\theta}\dot{\phi}\sin(\theta-\phi) - 2mgr\sin\theta$$

$$\frac{\partial L}{\partial \phi} = \frac{1}{2}mrl\dot{\theta}\dot{\phi}\sin(\theta-\phi) - mg\frac{l}{2}\sin\phi$$

系统的第二类拉格朗日方程为

$$2mr^2\ddot{\theta} + \frac{1}{2}mrl\ddot{\phi}\cos(\theta-\phi) + \frac{1}{2}mrl\dot{\phi}^2\sin(\theta-\phi) + 2mgr\sin\theta = 0$$
$$\frac{1}{3}ml^2\ddot{\phi} + \frac{1}{2}mrl\ddot{\theta}\cos(\theta-\phi) - \frac{1}{2}mrl\dot{\theta}^2\sin(\theta-\phi) + mg\frac{l}{2}\sin\phi = 0$$

5. 如图所示，滑块 A 与长为 l 的杆 AB 用铰链连接。杆 AB 的 B 点可在地面上无摩擦滑动，此外，滑块 A 可在滑槽内无摩擦上下滑动。滑块 A 的质量为 m，关于质心的转动惯量为 J_1，杆 AB 的质量为 m，关于质心的转动惯量为 $J_2 = ml^2/12$。



（1）以 $\boldsymbol{q} = [x_1 \ \ y_1 \ \ \phi_1 \ \ x_2 \ \ y_2 \ \ \phi_2]^T$ 为系统的广义坐标，写出系统的运动学约束方程，雅可比矩阵和加速度约束方程的右项。

（2）写出系统增广质量阵和增广主动力阵。

（3）写出系统的封闭的第一类拉格朗日方程。

解：取系统的广义坐标为 $\boldsymbol{q} = [x_1 \ \ y_1 \ \ \phi_1 \ \ x_2 \ \ y_2 \ \ \phi_2]^T$

约束方程为

$$\boldsymbol{\Phi}=\begin{bmatrix} x_1 \\ \phi_1 \\ x_2-x_1-\dfrac{l}{2}\sin\phi_2 \\ y_2-y_1+\dfrac{l}{2}\cos\phi_2 \\ y_2-\dfrac{l}{2}\cos\phi_2 \end{bmatrix}=\mathbf{0}$$

因此，系统的自由度为 1

Jacobian 阵和加速度约束方程的右项为

$$\boldsymbol{\Phi_q}=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 1 & 0 & -\dfrac{l}{2}\cos\phi_2 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 1 & -\dfrac{l}{2}\sin\phi_2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & \dfrac{l}{2}\sin\phi_2 \end{bmatrix}，\ \boldsymbol{\gamma}=\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -\dfrac{l}{2}\sin\phi_2\dot{\phi}_2^{\,2} \\ \dfrac{l}{2}\cos\phi_2\dot{\phi}_2^{\,2} \\ -\dfrac{l}{2}\cos\phi_2\dot{\phi}_2^{\,2} \end{bmatrix}$$

系统的增广质量阵和增广主动力阵为

$$\boldsymbol{M}=\begin{bmatrix} m & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & m & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & J_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & m & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & m & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & ml^2/12 \end{bmatrix},\ \boldsymbol{F}^a=\begin{bmatrix} 0 \\ -mg \\ 0 \\ 0 \\ -mg \\ 0 \end{bmatrix}$$

系统的封闭的第一类拉格朗日方程为

$$\begin{bmatrix} \boldsymbol{M} & \boldsymbol{\Phi_q}^T \\ \boldsymbol{\Phi_q} & \mathbf{0} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \ddot{\boldsymbol{q}} \\ \boldsymbol{\lambda} \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} \boldsymbol{F}^a \\ \boldsymbol{\gamma} \end{bmatrix}$$

其中，$\boldsymbol{\lambda}=\begin{bmatrix}\lambda_1 & \lambda_2 & \lambda_3 & \lambda_4 & \lambda_5\end{bmatrix}^T$ 为拉格朗日乘子列阵。