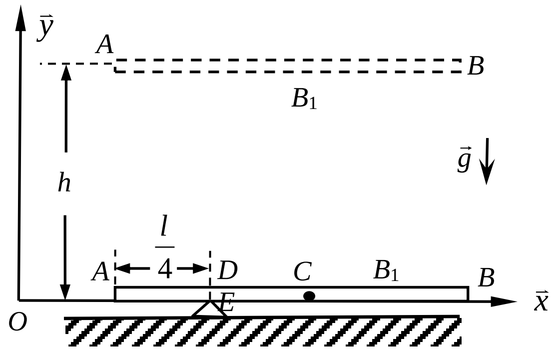
2012 理论力学期终试卷



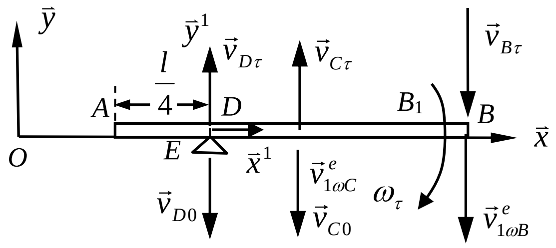
1． (20 分) 如图所示，均质杆 B_1 从高为 h 的水平位置无初速释放，在重力作用下向下运动，在图示水平位置杆 B_1 的点 D 与固定支座 E 发生碰撞。杆 B_1 的质量为 m，长为 l。点 D 与端点 A 的距离为 $l/4$。设杆 B_1 与支座 E 的碰撞恢复因数为 e（图中 O-$\bar{\boldsymbol{e}}$ 为惯性基）。求碰撞后

(1) 杆 B_1 的角速度；

(2) 支座 E 作用于杆 B_1 的碰撞冲量；

解：

(a) 碰撞过程的速度分析（总共 7 分）



设撞击前杆 B_1 的平动速度为 v_0，由机械能守恒：

$\frac{1}{2}mv_0{}^2 = mgh$， 解得：$v_0 = \sqrt{2gh}$

由于杆 B_1 直线平动，$\omega_0 = 0$，撞击前点 D 的速度为 $v_{D0} = v_{C0} = v_0$

设撞击后杆 B_1 的角速度为 ω_τ，点 D 的速度为 $\vec{v}_{D\tau}$，点 C 的速度为 $\vec{v}_{C\tau}$

$\vec{v}_{C\tau} = \vec{v}_{1C\tau} = \vec{v}^e_{1tC} + \vec{v}^e_{1\omega C}$， $v^e_{1tC} = v_{D\tau}$， $v^e_{1\omega C} = l\omega_\tau / 4$

$\bar{y}$： $v_{C\tau} = v_{D\tau} - l\omega_\tau / 4$ (1)

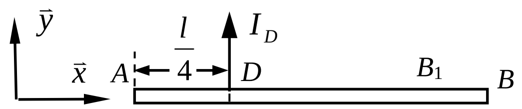
(b) 恢复因素定义（总共 3 分）

由恢复因素的定义：

$$e=\frac{v_{D\tau}-v_{E\tau}}{v_{E0}-v_{D0}}=\frac{v_{D\tau}-0}{0-(-v_0)}=\frac{v_{D\tau}}{v_0}\quad \text{或}\quad v_{D\tau}=ev_0 \quad (2)$$

(c) 动量定理和动量矩定理应用（总共 8 分）

受力图：



由动量定理积分形式：

$$m[v_{C\tau}-(-v_0)]=I_D \quad \text{或} \quad m(v_{C\tau}+v_0)=I_D \qquad (3)$$

由对质心动量矩定理积分形式：

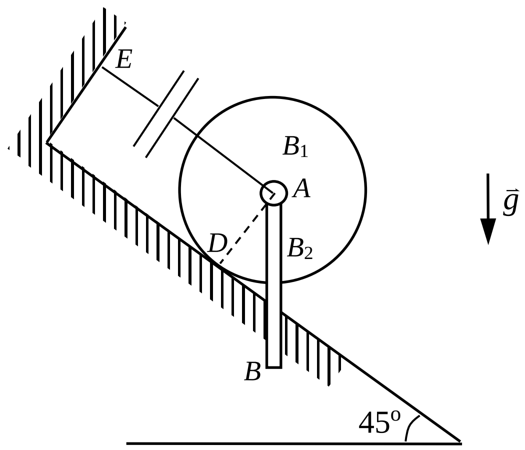
$$\frac{1}{12}ml^2(-\omega_\tau-0)=-\frac{l}{4}I_D \quad \text{或} \quad \frac{1}{3}ml\omega_\tau=I_D \quad (4)$$

(d) 计算结果（总共 2 分）

求解方程(1)– (4)

解得：$\omega_\tau=\dfrac{12(e+1)v_0}{7l}=\dfrac{12(e+1)}{7l}\sqrt{2gh}$

$$I_D=\frac{1}{3}ml\omega_\tau=\frac{4(e+1)m}{7}\sqrt{2gh}$$



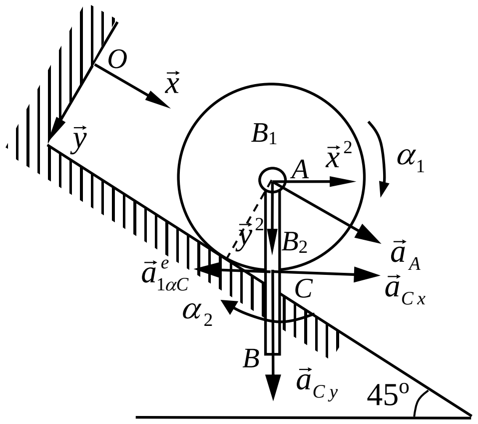
2．（20 分）图示系统，圆盘 B_1 可以在粗糙的斜面上作纯滚动，均质杆 B_2 与圆盘 B_1 通过圆柱铰 A 连接，铰点 A 为圆盘 B_1 的质心。斜面的倾角为45°。圆盘 B_1 和杆 B_2 的质量均为 m。设圆盘 B_1 的半径为 r，杆 B_2 的长度为$l=2r$。图示位置杆 B_2 铅垂，圆盘 B_1 由平行于斜面的软绳 AE 悬挂，使系统保持平衡。当软绳 AE 被割断时，系统在重力作用下无初速开始运动，请利用**达朗贝尔原理**求该瞬时

(1) 圆盘 B_1 的角加速度；

(2) 杆 B_2 的角加速度；

(3) 铰点 A 作用于杆 B_2 的约束力。

解：(a) 运动学分析(6 分)



建立惯性基 O-$\vec{\boldsymbol{e}}$，运动学分析如图所示。

设系统无初速开始运动时，圆盘 B_1 质心的加速度为 $\vec{a}_A$

由于圆盘 B_1 作纯滚动，$a_A = \alpha_1 r$

以 A 为基点，建立 B_2 的连体基 A-$\vec{\boldsymbol{e}}^{\,2}$，点 C 为给定点，点 C 的加速度为

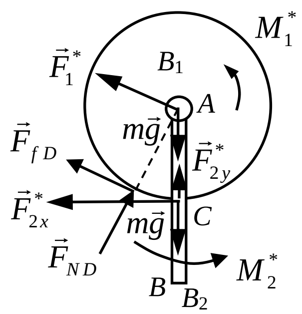
$$\vec{a}_C = \vec{a}^e_{2tC} + \vec{a}^e_{2\alpha C} + \vec{a}^e_{2\omega C}\text{，}\quad a^e_{2tC} = a_A$$

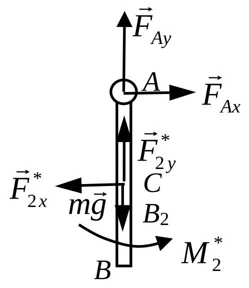
设杆 B_2 的角加速度为α_2，由于系统无初速开始运动，杆 B_2 的角速度为$\omega_2 = 0$，

$$a^e_{2\omega C} = 0\text{，}\quad a^e_{2\alpha C} = r\alpha_2$$

得到：$a_{Cx} = \dfrac{\sqrt{2}}{2} a_A - r\alpha_2 = \dfrac{\sqrt{2}}{2} r\alpha_1 - ra_2$，　$a_{Cy} = \dfrac{\sqrt{2}}{2} a_A = \dfrac{\sqrt{2}}{2} r\alpha_1$

(b) 受力图和惯性力系定义 (7 分)





$$F_1^* = ma_1 = mr\alpha_1,\ M_1^* = \frac{1}{2} mr^2 \alpha_1$$

$$F_{2x}^* = ma_{Cx} = m\left(\frac{\sqrt{2}}{2} r\alpha_1 - ra_2\right),\ F_{2y}^* = ma_{Cy} = m\left(\frac{\sqrt{2}}{2} ra_1\right)$$

$$M_2^* = \frac{1}{12} m(2r)^2 \alpha_2 = \frac{1}{3} mr^2 \alpha_2$$

(c) 动静法，写出平衡方程 (5 分)

取系统为研究对象，利用达朗贝尔原理，$\sum M_D(\vec{F})+\sum M_D(\vec{F}^*)=0$：

$$F_1^* r+M_1^*-\left(r-\frac{\sqrt{2}}{2}r\right)F_{2x}^*+\frac{\sqrt{2}}{2}rF_{2y}^*+M_2^*-2mg\frac{\sqrt{2}}{2}r=0 \quad (1)$$

取杆 AB 为研究对象，利用达朗贝尔原理，$\sum M_A(\vec{F})+\sum M_A(\vec{F}^*)=0$：

$$-rF_{2x}^*+M_2^*=0 \quad 或 \quad -\frac{\sqrt{2}}{2}mr^2\alpha_1+\frac{4}{3}mr^2\alpha_2=0 \quad (2)$$

(d) 求解 (2 分)

(1)- (2): $F_1^* r+M_1^*+\frac{\sqrt{2}}{2}rF_{2x}^*+\frac{\sqrt{2}}{2}rF_{2y}^*-2mg\frac{\sqrt{2}}{2}r=0$ 或

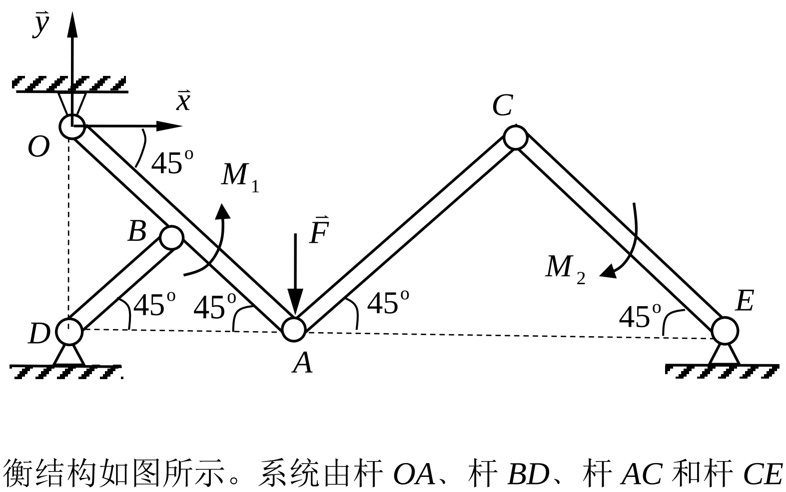
$$\frac{5}{2}mr^2\alpha_1-\frac{\sqrt{2}}{2}mr^2a_2-\sqrt{2}mgr=0 \quad (3)$$

由(2)：$\alpha_2=\frac{3\sqrt{2}}{8}\alpha_1$ (4)

将(4)代入(3)：

$$\frac{7}{4}mr^2\alpha_1-\sqrt{2}mgr=0$$

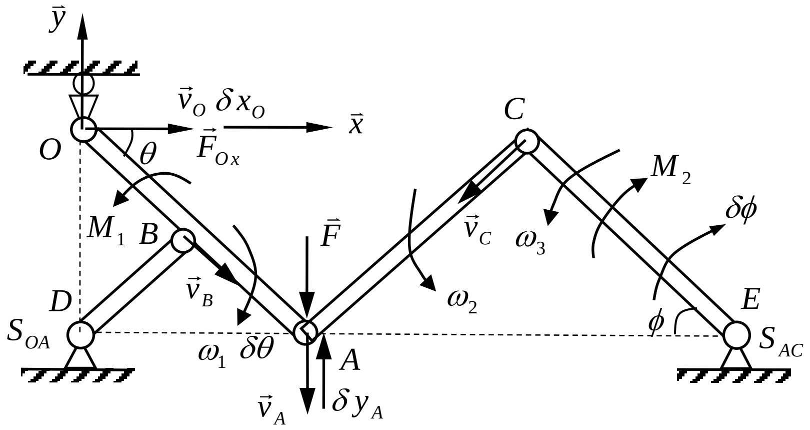
解得：$\alpha_1=\frac{4\sqrt{2}g}{7r}$，$\alpha_2=\frac{3g}{7r}$



3.（20 分）平面平衡结构如图所示。系统由杆 OA、杆 BD、杆 AC 和杆 CE 组成，铰 A、B、C 为圆柱铰，铰 O、铰 D 和铰 E 处为固定铰支座。杆 OA 的长度为 $\sqrt{2}l$，点 B 是杆 OA 的中点，杆 BD 的长度为 $\sqrt{2}l/2$，杆 AC 和杆 CE 的长度均为 $\sqrt{2}l$。图示位置 AD 和 AE 水平，OD

铅垂，铅垂力 $\vec{F}$ 作用于点 A，力偶 M_1 作用于杆 OA，力偶 M_2 作用于杆 CE，不计各物体的重量。图中 O-$\vec{\boldsymbol{e}}$ 为惯性基。利用**虚位移原理**求支座 O 处沿 $\bar{x}$ 方向的约束力。

解： 虚速度法：



(a)虚位移原理表达式(6 分)

建立惯性基 O-$\vec{\boldsymbol{e}}$，释放铰 O 沿 $\bar{x}$ 方向的约束，自由度为 1，取 θ 为广义坐标

由虚位移原理：$F_{Ox}\delta x_O - M_1\delta\theta - F\delta y_A + M_2\delta\phi = 0$

(b)建立运动学关系(10 分)

根据 $\vec{v}_O$ 和 $\vec{v}_B$ 的速度方向，确定点 D 为杆 OA 的速度瞬心 S_{OA}，设杆 OA 的角速度为 ω_1

$v_O = \omega_1 l$，$v_A = \omega_1 l$

$\dot{x}_O = v_O$，$\dot{y}_A = -v_A$，$\dot{\theta} = \omega_1$

得到：$\dot{x}_O = \dot{\theta} l$，$\dot{y}_A = -\dot{\theta} l$

即：$\delta x_O = \delta\theta l$，$\delta y_A = -\delta\theta l$

根据 $\vec{v}_A$ 和 $\vec{v}_C$ 的速度方向，确定点 E 为杆 AC 的速度瞬心 S_{AC}，设杆 AC 的角速度为 ω_2

$v_A = 2\omega_2 l$，$v_C = \omega_2\sqrt{2}l$

得到：$v_A = \omega_1 l = 2\omega_2 l$，即 $\omega_2 = \dfrac{1}{2}\omega_1$，$v_C = \omega_2\sqrt{2}l = \omega_1\sqrt{2}l/2$

设杆 CE 的角速度为 ω_3，$\omega_3 = v_C/\sqrt{2}l = \dfrac{1}{2}\omega_1$

由 $\dot{\phi} = -\omega_3 = -\dfrac{1}{2}\omega_1$，$\dot{\theta} = \omega_1$

得到：$\delta\phi = -\dfrac{1}{2}\delta\theta$

(c)主动力（偶）关系(4 分)

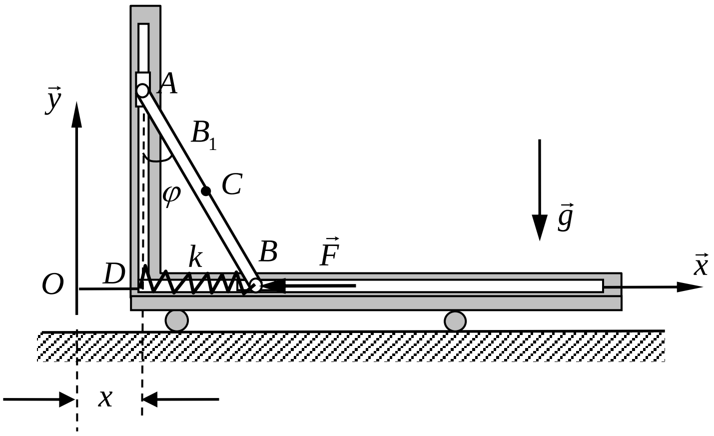
代入虚位移原理关系式：$F_{Ox}\delta x_O - M_1\delta\theta_1 - F\delta y_A + M_2\delta\phi = 0$，

得到：$F_{Ox}\, l\delta\theta - M_1\delta + F\, l\delta\theta - \dfrac{1}{2}M_2\delta\theta = 0$

即：$\left(F_{Ox}\, l - M_1 + F\, l - \dfrac{1}{2}M_2\right)\delta\theta = 0$

根据$\delta\theta$的独立性，$F_{Ox}l - M_1 + Fl - \frac{1}{2}M_2 = 0$

即：$F_{Ox} = \frac{M_1}{l} + \frac{M_2}{2l} - F$



4.（20 分）不计质量的小车在光滑的水平面上滑动，均质杆 B_1 的端点 A 和 B 分别在固结于小车的铅垂滑槽和水平滑槽上滑动。设均质杆 B_1 的质量为 m，长度为 $2l$。点 D 是小车的给定点（如图所示），在点 D 和点 B 之间有一弹簧，弹簧的刚度为k，原长为l_0。水平力$\vec{F}$作用于杆 B_1 的端点 B。

（1）以x和φ为广义坐标写出系统的动能和势能，写出拉格朗日函数。

（2）写出非有势力$\vec{F}$对应于x和φ的广义力。

（3）写出系统的第二类拉格朗日方程。

（4）若非有势力$\vec{F} = \vec{0}$，写出系统的初积分。

解：(a) 动能，势能和拉格朗日函数计算 (7 分)

建立惯性基 O-$\boldsymbol{\vec{e}}$，点 C 在惯性基上的坐标为：

$x_C = x + l\sin\varphi$， $y_C = l\cos\varphi$

$\dot{x}_C = \dot{x} + l\cos\varphi\dot{\varphi}$， $\dot{y}_C = -l\sin\varphi\dot{\varphi}$

系统的动能为：

$$
\begin{aligned}
T &= \frac{1}{2}mv_C{}^2 + \frac{1}{2}J_{C2}\dot{\varphi}^2 \\
&= \frac{1}{2}m\left(\dot{x}_C{}^2 + \dot{y}_C{}^2\right) + \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{12}m(2l)^2\dot{\varphi}^2 \\
&= \frac{1}{2}m\left(\dot{x}^2 + l^2\dot{\varphi}^2 + 2l\dot{x}\dot{\varphi}\cos\varphi\right) + \frac{1}{6}ml^2\dot{\varphi}^2 \\
&= \frac{1}{2}m\dot{x}^2 + \frac{2}{3}ml^2\dot{\varphi}^2 + ml\dot{x}\dot{\varphi}\cos\varphi
\end{aligned}
$$

系统的势能为：

$V = mgl\cos\varphi + \frac{1}{2}k(2l\sin\varphi - l_0)^2$

系统的拉格朗日函数为：

$$L = T - V = \frac{1}{2}m\dot{x}^2 + \frac{2}{3}ml^2\dot{\varphi}^2 + ml\dot{x}\dot{\varphi}\cos\varphi - mgl\cos\varphi - \frac{1}{2}k(2l\sin\varphi - l_0)^2$$

(b) 非有势力 $\vec{F}$ 对应于 x 和 φ 的广义力计算 (3 分)

水平力 $\vec{F}$ 为非有势力，作的虚功为：

$$\delta W = -F\delta x_B$$

$x_B = x + 2l\sin\varphi$， $\delta x_B = \delta x + 2l\cos\varphi\delta\varphi$

$$\delta W = -F\delta x - 2Fl\cos\varphi\delta\varphi = Q_x\delta x + Q_\varphi\delta\varphi$$

得到非有势力对应于 x 和 φ 的广义力为：

$$Q'_x = -F,\quad Q'_\varphi = -2Fl\cos\varphi$$

(c) 建立系统的第二类拉格朗日方程 (5 分)

系统的第二类拉格朗日方程为：

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}}\right) - \frac{\partial L}{\partial x} = Q'_x,\quad \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}}\right) - \frac{\partial L}{\partial \varphi} = Q'_\varphi$$

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{x}} = m\dot{x} + ml\dot{\varphi}\cos\varphi,\quad \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}}\right) = m\ddot{x} + ml\ddot{\varphi}\cos\varphi - ml\dot{\varphi}^2\sin\varphi,\quad \frac{\partial L}{\partial x} = 0$$

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}} = \frac{4}{3}ml^2\dot{\varphi} + ml\dot{x}\cos\varphi,\quad \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}}\right) = \frac{4}{3}ml^2\ddot{\varphi} + ml\ddot{x}\cos\varphi - ml\dot{x}\dot{\varphi}\sin\varphi$$

$$\frac{\partial L}{\partial \varphi} = -ml\dot{x}\dot{\varphi}\sin\varphi + mgl\sin\varphi - 2kl(2l\sin\varphi - l_0)\cos\varphi$$

系统的第二类拉格朗日方程为：

$$m\ddot{x} + ml\ddot{\varphi}\cos\varphi - ml\dot{\varphi}^2\sin\varphi = -F$$

$$\frac{4}{3}ml^2\ddot{\varphi} + ml\ddot{x}\cos\varphi - mgl\sin\varphi + 2lk(2l\sin\varphi - l_0)\cos\varphi = -2Fl\cos\varphi$$

(d) 写出系统的初积分(5 分)

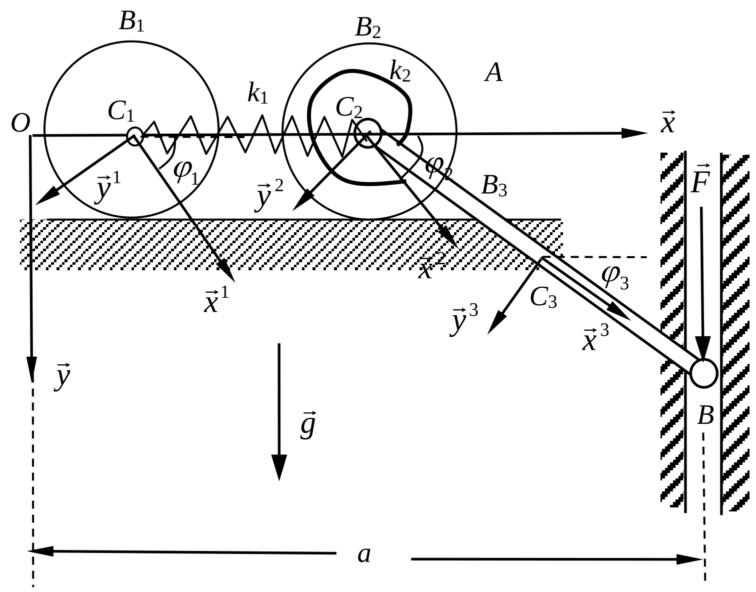
若非有势力 $\vec{F} = \vec{0}$，由于 L 不显含 x， x 为循环坐标

循环积分为： $\frac{\partial L}{\partial \dot{x}} = C_1$， 即 $m\dot{x} + ml\dot{\varphi}\cos\varphi = C_1$

由于 L 不显含 t，且为定常约束

广义能量守恒：$T+V=C_2$

即 $\dfrac{1}{2}m\dot{x}^2+\dfrac{2}{3}ml^2\dot{\varphi}^2+ml\dot{x}\dot{\varphi}\cos\varphi+mgl\cos\varphi+\dfrac{1}{2}k\left(2l\sin\varphi-l_0\right)^2=C_2$



5.（20 分）如图动力学系统由均质圆盘 B_1，均质圆盘 B_2 和均质杆 B_3 组成。圆盘 B_1 和圆盘 B_2 可以在水平面上作纯滚动，杆 B_3 与圆盘 B_2 在 A 处铰接，端点 B 可以在光滑的铅垂滑槽内滑动。设圆盘 B_1 和圆盘 B_2 的半径均为 r，杆 B_3 的长度为 $2l$。圆盘 B_1，圆盘 B_2 和杆 B_3 的质量分别为 m_1，m_2 和 m_3。圆盘 B_1 和圆盘 B_2 的质心 C_1 和 C_2 之间有线弹簧，刚度为 k_1，原长为 l_0。圆盘 B_2 与杆 B_3 之间有卷簧，刚度为 k_2，当 $\varphi_2=\varphi_3$ 时，卷簧的力偶矩为 0。铅垂力 $\vec{F}$ 作用于杆 B_3 的端点 B。 图中 O-$\vec{\boldsymbol{e}}$ 为惯性基。当 $\varphi_1=0$ 时， $x_1=0$；$\varphi_2=0$ 时， $x_2=c$。以系统的位形坐标写出封闭的带拉格朗日乘子的第一类拉格朗日方程。

解：(a) 位移约束方程，雅可比阵和加速度约束方程右项 (8 分)

建立惯性基 O-$\vec{\boldsymbol{e}}$，系统的运动学约束方程为：

$$\boldsymbol{\Phi}=\begin{bmatrix} x_1-r\varphi_1 \\ y_1 \\ x_2-c-r\varphi_2 \\ y_2 \\ x_3-l\cos\varphi_3-x_2 \\ y_3-l\sin\varphi_3-y_2 \\ x_3+l\cos\varphi_3-a \end{bmatrix}$$

$$
\boldsymbol{\Phi}_q = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -r & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -r & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 & l\sin\varphi_3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 1 & -l\cos\varphi_3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -l\sin\varphi_3 \end{bmatrix}
$$

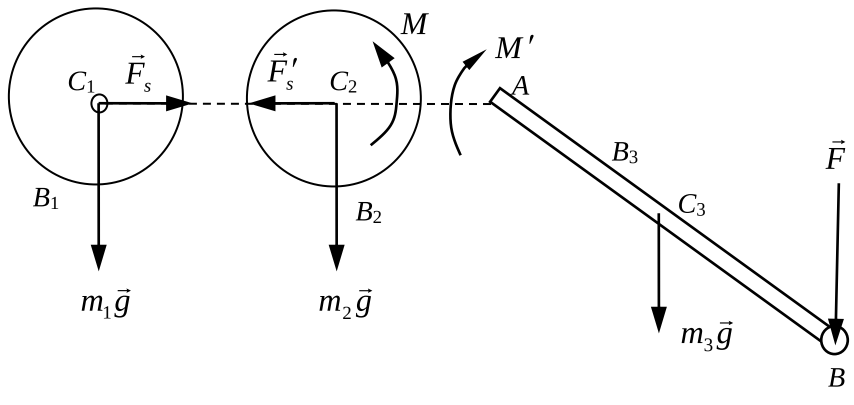
$$
\boldsymbol{\gamma} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ -l\cos\varphi_3\dot{\varphi}_3{}^2 \\ -l\sin\varphi_3\dot{\varphi}_3{}^2 \\ l\cos\varphi_3\dot{\varphi}_3{}^2 \end{bmatrix}
$$

(b) 增广质量阵和增广主动力阵 (8 分)

增广质量阵为：

$$
\boldsymbol{Z} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{Z}_1 & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \boldsymbol{Z}_2 & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \boldsymbol{Z}_3 \end{bmatrix}
$$

$$
\boldsymbol{Z}_1 = \begin{bmatrix} m_1 & 0 & 0 \\ 0 & m_1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2}m_1 r^2 \end{bmatrix}，\ \boldsymbol{Z}_2 = \begin{bmatrix} m_2 & 0 & 0 \\ 0 & m_2 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2}m_2 r^2 \end{bmatrix}，\ \boldsymbol{Z}_3 = \begin{bmatrix} m_3 & 0 & 0 \\ 0 & m_3 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{3}m_3 l^2 \end{bmatrix}
$$



$F_s = k_1(x_2 - x_1 - l_{10})$

卷簧k_2的力偶矩为$M = k_2(\varphi_2 - \varphi_3 - \varphi_0)$，由于$\varphi_2 = \varphi_3$时，卷簧的力偶矩为0，$\varphi_0 = 0$，

$M = k_2(\varphi_2 - \varphi_3)$

增广主动力阵为：

$$\hat{\boldsymbol{F}}^a = \begin{bmatrix} \hat{\boldsymbol{F}}_1^a \\ \hat{\boldsymbol{F}}_2^a \\ \hat{\boldsymbol{F}}_3^a \end{bmatrix}$$

$$\hat{\boldsymbol{F}}_1^a = \begin{bmatrix} k_1(x_2 - x_1 - l_0) \\ m_1 g \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \hat{\boldsymbol{F}}_2^a = \begin{bmatrix} -k_1(x_2 - x_1 - l_0) \\ m_2 g \\ -k_2(\varphi_2 - \varphi_3) \end{bmatrix}$$

$$\hat{\boldsymbol{F}}_3^a = \begin{bmatrix} 0 \\ m_3 g + F \\ Fl\cos\varphi_3 + k_2(\varphi_2 - \varphi_3) \end{bmatrix}$$

(c) 写出封闭的带拉格朗日乘子的第一类拉格朗日方程 (4 分)

封闭的带拉格朗日乘子的第一类拉格朗日方程为：

$$\begin{bmatrix} \boldsymbol{Z} & \boldsymbol{\Phi}_{\boldsymbol{q}}^T \\ \boldsymbol{\Phi}_{\boldsymbol{q}} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{\boldsymbol{q}} \\ \boldsymbol{\lambda} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \hat{\boldsymbol{F}}^a \\ \boldsymbol{\gamma} \end{bmatrix}$$

$$\ddot{\boldsymbol{q}} = \begin{bmatrix} \ddot{\boldsymbol{q}}_1^T & \ddot{\boldsymbol{q}}_2^T & \ddot{\boldsymbol{q}}_3^T \end{bmatrix}^T, \quad \ddot{\boldsymbol{q}}_i = \begin{pmatrix} \ddot{x}_i & \ddot{y}_i & \ddot{\varphi}_i \end{pmatrix}^T \ (i = 1, 2, 3)$$

$$\boldsymbol{\lambda} = \begin{bmatrix} \lambda_1 & \lambda_2 & \lambda_3 & \lambda_4 & \lambda_5 & \lambda_6 & \lambda_7 \end{bmatrix}^T$$