理论力学 CAI

矢量动力学基础

- 前言
- 惯量
- 动量定理
- 动量矩定理
- 动能定理

动量矩定理

为什么要引入动量矩的概念?

$\omega = 0$　　　　$\omega \neq 0$

动量均为0，用动量无法区分谁在转动

动量矩定理

- 质点系对定点的动量矩
- 质点系对定点的动量矩定理
- 质点系对动点的动量矩
- 质点系对动点的动量矩定理

动量矩定理

- 质点系对定点的动量矩
- 质点系对定点的动量矩定理
- 质点系对动点的动量矩
- 质点系对动点的动量矩定理

质点系对定点的动量矩

- 对点的动量矩
- 对定轴的动量矩
- 平动刚体对定点的动量矩
- 定轴转动刚体对该轴的动量矩

- 对定点的动量矩

质点系 $(P_1, P_2, \cdots, P_n)$

质点$\boldsymbol{P_k}$的动量

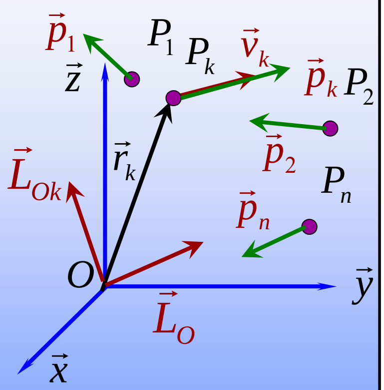
$$\vec{p}_k = m_k \vec{v}_k = m_k \dot{\vec{r}}_k \qquad (k = 1,2,\cdots,n)$$

质点$\boldsymbol{P_k}$对定点$\boldsymbol{O}$的动量矩

$$\vec{L}_{Ok} \overset{\text{def}}{=} \vec{M}_O(\vec{p}_k) = \vec{r}_k \times \vec{p}_k$$

定位矢量

$$\vec{L}_{Ok} = \vec{r}_k \times m_k \vec{v}_k = \vec{r}_k \times m_k \dot{\vec{r}}_k$$



质点系对定点$\boldsymbol{O}$的动量矩

$$\vec{L}_O = \sum_{k=1}^{n} \vec{M}_O(\vec{p}_k) = \sum_{k=1}^{n} \vec{r}_k \times \vec{p}_k = \sum_{k=1}^{n} \vec{r}_k \times m_k \vec{v}_k = \sum_{k=1}^{n} \vec{r}_k \times m_k \dot{\vec{r}}_k$$

- 对定轴的动量矩

$$\vec{L}_O = \sum_{k=1}^{n} \vec{M}_O(\vec{p}_k) = \sum_{k=1}^{n} \vec{r}_k \times \vec{p}_k$$

$$\underline{\boldsymbol{e}}: \quad \boldsymbol{L}_O = \sum_{k=1}^{n} \tilde{\boldsymbol{r}}_k \boldsymbol{p}_k \qquad \begin{pmatrix} 0 & -z_k & y_k \\ z_k & 0 & -x_k \\ -y_k & x_k & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p_{kx} \\ p_{ky} \\ p_{kz} \end{pmatrix}$$

$$L_{Ox} = \vec{x} \cdot \vec{L}_O = \sum_{k=1}^{n} (y_k p_{kz} - z_k p_{ky})$$ 标量

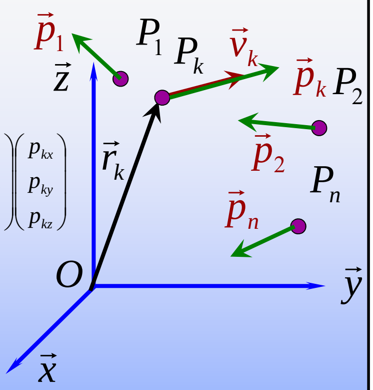
质点系对**Ox**轴的动量矩

$$L_{Oy} = \vec{y} \cdot \vec{L}_O = \sum_{k=1}^{n} (z_k p_{kx} - x_k p_{kz})$$

质点系对**Oy**轴的动量矩

$$L_{Oz} = \vec{z} \cdot \vec{L}_O = \sum_{k=1}^{n} (x_k p_{ky} - y_k p_{kx})$$

质点系对**Oz**轴的动量矩



$$\boldsymbol{L}_O = (L_{Ox} \quad L_{Oy} \quad L_{Oz})^{\mathrm{T}}$$

$$\boldsymbol{p}_k = (p_{kx} \quad p_{ky} \quad p_{kz})^{\mathrm{T}}$$

$$\boldsymbol{r}_k = (x_k \quad y_k \quad z_k)^{\mathrm{T}}$$

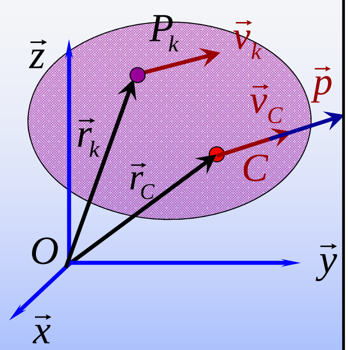
- 平动刚体对定点的动量矩

平动刚体 质心 $\vec{v}_k = \vec{v}_C$

$$\vec{L}_O = \sum_{k=1}^{n} \vec{r}_k \times m_k \vec{v}_k = \sum_{k=1}^{n} \vec{r}_k \times m_k \vec{v}_C$$

$$= \left(\sum_{k=1}^{n} m_k \vec{r}_k \right) \times \vec{v}_C = m\vec{r}_C \times \vec{v}_C$$

$$\vec{L}_O = \vec{r}_C \times m\vec{v}_C$$



$$\sum_{k=1}^{n} m_k \vec{r}_k = m\vec{r}_C$$

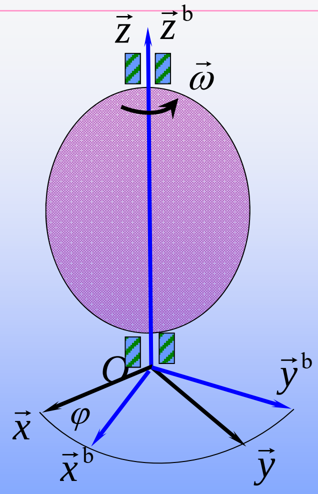
平动刚体对定点**O**的动量矩相当于
将刚体质量集中在质心的质点对定点**O**的动量矩

$$\vec{L}_O = \vec{r}_C \times \vec{p}$$

- 定轴转动刚体对该轴动量矩

惯性基 $O-\vec{\boldsymbol{e}}$　　连体基 $O-\vec{\boldsymbol{e}}^{\mathrm{b}}$

运动分析　姿态坐标 φ　　$\omega=\dot{\varphi}$



姿态坐标 φ　　$\omega=\dot{\varphi}$　　$\vec{\omega}=\omega\vec{z}$

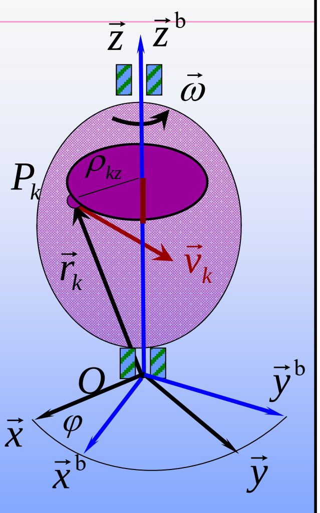
质点$\boldsymbol{P}_k$的速度　$\vec{v}_k=\vec{\omega}\times\vec{r}_k=\omega\vec{z}\times\vec{r}_k$

$$
\begin{aligned}
L_{Oz}&=\vec{z}\cdot\vec{L}_O=\sum_k\vec{z}\cdot(\vec{r}_k\times m_k\vec{v}_k)\\
&=\sum_k m_k\vec{v}_k\cdot(\vec{z}\times\vec{r}_k)\\
&=\omega\sum_k m_k(\vec{z}\times\vec{r}_k)\cdot(\vec{z}\times\vec{r}_k)\\
&=\omega\sum_k m_k\left|\vec{z}\times\vec{r}_k\right|^2=\omega\sum_k m_k\rho_{kz}^2
\end{aligned}
$$

$\vec{z}$　$\vec{z}^{\mathrm{b}}$　两轴重合

$J_{Oz}=J_{Oz^{\mathrm{b}}}=\sum_k m_k\rho_{kz}^2$　　常值

$L_{Oz}=J_{Oz}\omega$　刚体对固定轴$\boldsymbol{Oz}$的动量矩等于刚体对该轴转动惯量与角速度的积



动量矩定理

- 质点系对定点的动量矩
- 质点系对定点的动量矩定理
- 质点系对动点的动量矩
- 质点系对动点的动量矩定理

质点系对定点的动量矩定理

- 定理的描述
- 刚体定轴转动动力学方程
- 定理的积分形式
- 动量矩守恒定律

- **定理的描述**

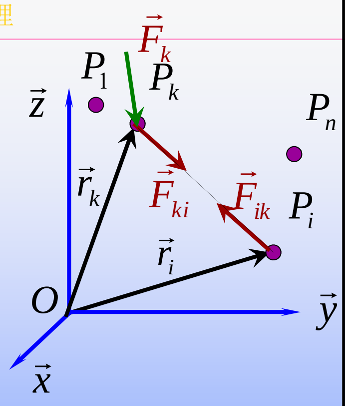
质点系 $(P_1,P_2,\cdots,P_n)$

质点$\boldsymbol{P_k}$ $(k=1,2,\cdots,n)$ 所受的力

外力 $\vec F_k$

内力 质点$\boldsymbol{P_i}$对$\boldsymbol{P_k}$的作用力

$\vec F_{ki}$ $(i=1,2,\cdots,n;\neq k)$



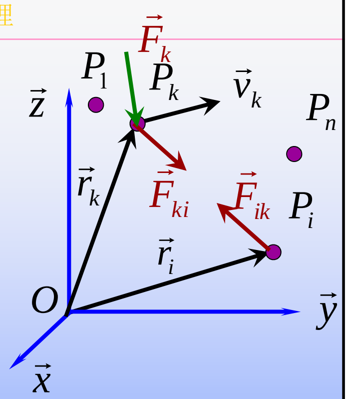
牛顿定律 $\underline{m_k\ddot{\vec r}_k} = \vec F_k + \sum_{i=1,\neq k}^{n}\vec F_{ki}$ $(k=1,2,\cdots,n)$

$$\vec L_O = \sum_{k=1}^{n}\vec r_k\times m_k\dot{\vec r}_k \qquad \dot{\vec L}_O = \sum_{k=1}^{n}\left(\cancel{\dot{\vec r}_k\times m_k\dot{\vec r}_k} + \vec r_k\times \underline{m_k\ddot{\vec r}_k}\right)$$

$$\dot{\vec L}_O = \sum_{k=1}^{n}\vec r_k\times\vec F_k + \cancel{\sum_{k=1}^{n}\sum_{i=1,\neq k}^{n}\vec r_k\times\vec F_{ki}}$$

$$\vec F_{ki} = -\vec F_{ik}$$
$$(i,k=1,2,\cdots,n)$$

$$\dot{\vec L}_O = \sum_{k=1}^{n}\vec r_k\times\vec F_k \qquad \dot{\vec L}_O = \vec M_O$$



质点系对定点动量矩对时间的绝对导数等于作用于质点系外力对该点的主矩

$\boldsymbol{e}$: $\dot{\boldsymbol L}_O = \boldsymbol M_O$

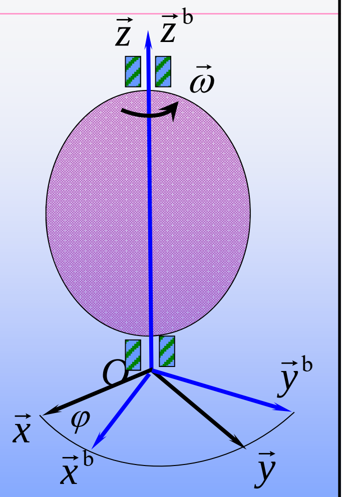
$$\dot L_{Ox} = M_{Ox} \qquad \dot L_{Oy} = M_{Oy} \qquad \dot L_{Oz} = M_{Oz}$$

$$\boldsymbol L_O = \begin{pmatrix} L_{Ox} & L_{Oy} & L_{Oz}\end{pmatrix}^{\mathrm T}$$
$$\boldsymbol M_O = \begin{pmatrix} M_{Ox} & M_{Oy} & M_{Oz}\end{pmatrix}^{\mathrm T}$$

质点系对定轴的动量矩对时间的绝对导数等于作用于质点系的外力对该轴的矩

- 刚体定轴转动动力学方程

惯性基 $O-\vec{e}$　　连体基 $O-\vec{e}^{\mathrm{b}}$



运动分析　姿态坐标 φ　　$\omega = \dot{\varphi}$

$$L_{Oz} = J_{Oz}\omega = J_{Oz}\dot{\varphi}$$

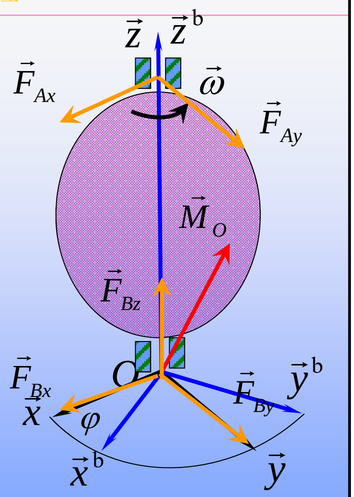
$$\dot{L}_{Oz} = \dot{J}_{Oz}\omega + J_{Oz}\dot{\omega}$$

$$\dot{J}_{Oz} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}J_{Oz} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}J_{Oz^{\mathrm{b}}} = 0$$

$$\dot{L}_{Oz} = J_{Oz}\dot{\omega}$$

$$\dot{L}_{Oz} = M_{Oz}$$

惯性基 $O-\vec{e}$　　连体基 $O-\vec{e}^{\mathrm{b}}$



$$L_{Oz} = J_{Oz}\omega = J_{Oz}\dot{\varphi}$$　　$J_{Oz} = J_{Oz^{\mathrm{b}}}$ 常值

$$\dot{L}_{Oz} = J_{Oz}\dot{\omega}$$

受力分析

理想约束力 $\vec{F}_{Ax}$ $\vec{F}_{Ay}$ $\vec{F}_{Bx}$ $\vec{F}_{By}$ $\vec{F}_{Bz}$

对 M_{Oz} 无贡献

主动力的对点O主矩 $\vec{M}_O$

对 M_{Oz} 有贡献　$M_{Oz} = \vec{M}_O \cdot \vec{z}$

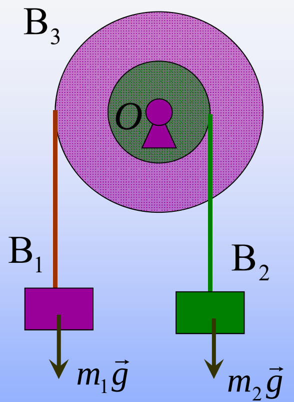
动力学方程

$$J_{Oz}\ddot{\varphi} = M_{Oz}$$

$$\dot{L}_{Oz} = M_{Oz}$$

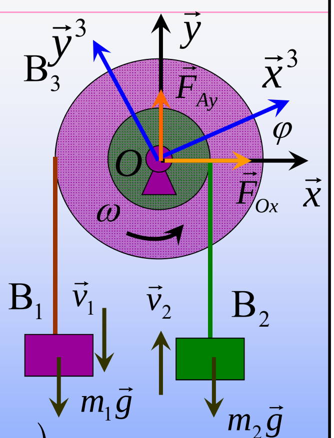
[例]

图示一滑轮组**B**$_3$在半径为$\boldsymbol{R}$的外滑轮上挂着质量为$\boldsymbol{m_1}$的重物**B**$_1$，在半径为$\boldsymbol{r}$的内滑轮上挂着质量为$\boldsymbol{m_2}$重物**B**$_2$。



试建立系统的动力学方程和讨论滑轮组的运动

[解] 惯性基 $O-\vec{e}$ **B**$_3$连体基 $O-\vec{e}^{\,3}$



运动分析

滑轮组定轴转动 $\omega=\dot{\varphi}$ 定义正向

对**z**轴动量矩 $L_{3Oz}=J_{Oz}\omega=J_{Oz}\dot{\varphi}$

重物$\boldsymbol{m_1}$与$\boldsymbol{m_2}$平动 $v_1=\omega R \quad v_2=\omega r$

对**z**轴动量矩 $L_{1Oz}=m_1v_1R=m_1\omega R^2$

$L_{2Oz}=m_2v_2r=m_2\omega r^2$

系统对**z**轴的动量矩

$$L_{Oz}=L_{1Oz}+L_{2Oz}+L_{3Oz}=\left(m_1R^2+m_2r^2+J_{Oz}\right)\omega$$

受力分析

主动力的对点**O**主矩 $M_{Oz}=m_1gR-m_2gr$

系统对z轴的动量矩

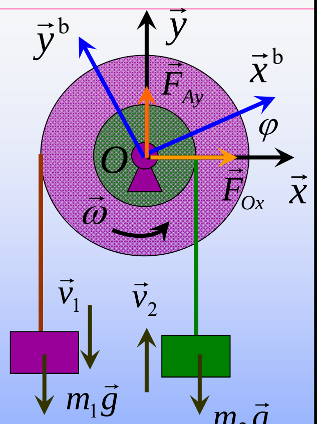
$$L_{Oz}=\left(m_1R^2+m_2r^2+J_{Oz}\right)\dot{\varphi}$$

主动力的对点O主矩

$$M_{Oz}=m_1gR-m_2gr$$

$$\dot{L}_{Oz}=M_{Oz}$$ 对定点和定轴

$$\left(m_1R^2+m_2r^2+J_{Oz}\right)\ddot{\varphi}=m_1gR-m_2gr$$



$$\ddot{\varphi}=\alpha \qquad \alpha=\frac{\left(m_1R-m_2r\right)g}{2\left(m_1R^2+m_2r^2+J_{Oz}\right)}$$

方程通解

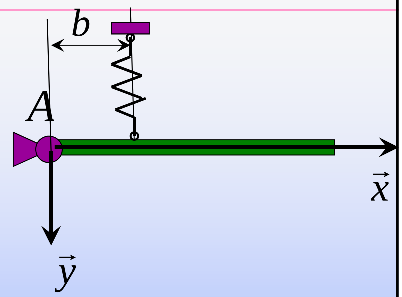
$$\varphi=\varphi_0+\dot{\varphi}_0t+\frac{1}{2}\alpha t^2$$

滑轮组匀角加速转动

如果 $t=0 \quad \varphi=0, \quad \dot{\varphi}=0$ 特解 $\varphi=\frac{1}{2}\alpha t^2$

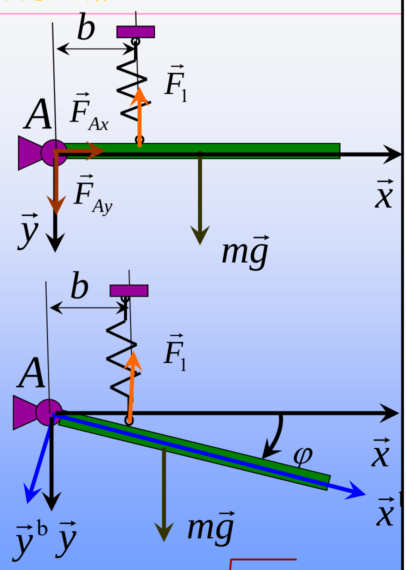
[例]

图示为一长为**l**，质量为**m**的均质杆。**A**端为理想约束铰与机座连接，在距离**A**为**b**处有一刚度为**k**的线弹簧。平衡时杆处在水平位置



求杆微小振动时的周期

[解]



平衡时杆处在水平位置　受力分析

$F_1 = ks$　　s 弹簧静伸长

弹簧力与重力平衡

$\sum M_{Az} = 0$　　$-ksb + mg\dfrac{l}{2} = 0$

杆运动的一般位形

微振动　$\sin\varphi \approx \varphi$　$\cos\varphi \approx 1$

$$F_1 \approx k(s + b\varphi)$$

$$M_{Az} \approx -k(\cancel{s} + b\varphi)b + \cancel{mg\frac{l}{2}\cos\varphi}$$

$$\approx -kb^2\varphi$$

动量矩定理　$J_{Az}\ddot{\varphi} = -kb^2\varphi$

动力学方程　$J_{Az}\ddot{\varphi} + kb^2\varphi = 0$

微振动方程　振动周期　$T = 2\pi\sqrt{\dfrac{J_{Az}}{kb^2}}$

动量矩定理的积分形式

质点系动量矩定理　$\dot{\boldsymbol{L}}_O = \boldsymbol{M}_O$　　$\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{L}_O = \boldsymbol{M}_O$

积分形式

$$\underline{\boldsymbol{L}_O} - \underline{\boldsymbol{L}_{O0}} = \underline{\int_{t_0}^{t} \boldsymbol{M}_O \,\mathrm{d}t}$$

时刻 t 质点系的动量矩

时刻 t_0 质点系的动量矩　　t_0 到 t 间隔内外力系的冲量主矩，冲量矩

质点系动量矩在时间间隔内的变化等于在同一时间间隔内的外力系的冲量主矩

$$L_{Ox} - L_{Ox0} = \int_{t_0}^{t} M_{Ox}\,\mathrm{d}t$$

$$L_{Oy} - L_{Oy0} = \int_{t_0}^{t} M_{Oy}\,\mathrm{d}t$$

$$L_{Oz} - L_{Oz0} = \int_{t_0}^{t} M_{Oz}\,\mathrm{d}t$$

$$\boldsymbol{L}_O = (L_{Ox} \quad L_{Oy} \quad L_{Oz})^{\mathrm{T}}$$

$$\boldsymbol{M}_O = (M_{Ox} \quad M_{Oy} \quad M_{Oz})^{\mathrm{T}}$$

动量矩守恒定律

$$\boldsymbol{L}_O - \boldsymbol{L}_{O0} = \int_{t_0}^{t} \boldsymbol{M}_O \,\mathrm{d}t$$

$\boldsymbol{M}_O = \boldsymbol{0}$　　$\boldsymbol{L}_O - \boldsymbol{L}_{O0} = \boldsymbol{0}$

当作用于质点系外力对点*O*的主矩为零时质点系对该点的动量矩保持不变

$L_{Ox} - L_{Ox0} = \int_{t_0}^{t} M_{Ox} \,\mathrm{d}t$　　$M_{Ox} = 0$　　$L_{Ox} - L_{Ox0} = 0$

对*x*轴动量矩保持不变

$L_{Oy} - L_{Oy0} = \int_{t_0}^{t} M_{Oy} \,\mathrm{d}t$　　$M_{Oy} = 0$　　$L_{Oy} - L_{Oy0} = 0$

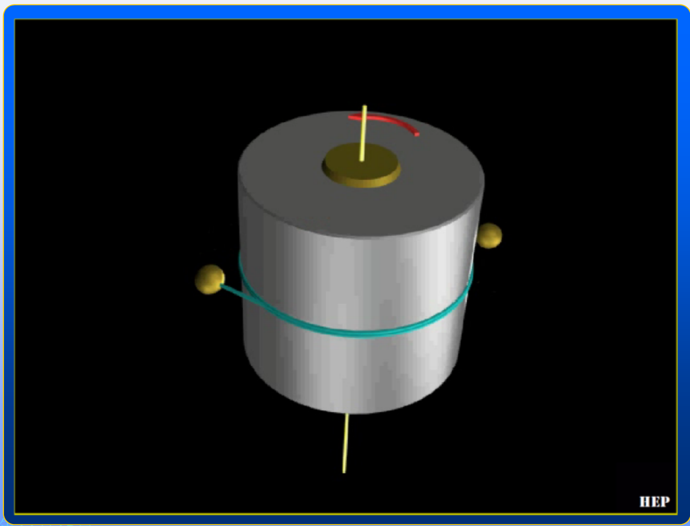
对*y*轴动量矩保持不变

$L_{Oz} - L_{Oz0} = \int_{t_0}^{t} M_{Oz} \,\mathrm{d}t,$　　$M_{Oz} = 0$　　$L_{Oz} - L_{Oz0} = 0$

对*z*轴动量矩保持不变

怎样才能越转越快？

卫 星 消 旋



动量矩定理

- 质点系对定点的动量矩
- 质点系对定点的动量矩定理
- 质点系对动点的动量矩
- 质点系对动点的动量矩定理

质点系对动点的动量矩

- 对动点的动量矩
- 对质心的动量矩
- 对不同动点动量矩间的关系

质点系对动点的动量矩

- 对动点的动量矩
- 对质心的动量矩
- 对不同动点动量矩间的关系

对动点的动量矩

- 绝对动量与相对动量
- 对动点的绝对动量矩与相对动量矩

- 绝对动量与相对动量

惯性基 $O-\vec{e}$

动点 D 平动基 $D-\vec{e}^{s}$

质点系 $(P_1, P_2, \cdots, P_n)$

质点P_k 的矢径 $\vec{r}_k$ 绝对 $\vec{d}_k$ 相对

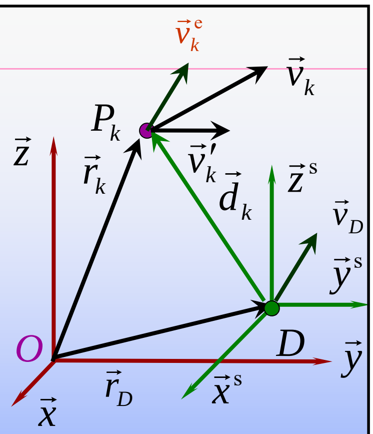
$\vec{r}_k = \vec{r}_D + \vec{d}_k$ $\dot{\vec{r}}_k = \dot{\vec{r}}_D + \dot{\vec{d}}_k$

$\dot{\vec{r}}_k = \vec{v}_k$ P_k 的绝对速度

$\mathring{\vec{d}}_k = \vec{v}_k' = \vec{v}_k^{r}$ P_k 的相对速度 $\dot{\vec{d}}_k = \mathring{\vec{d}}_k = \vec{v}_k'$

$\dot{\vec{r}}_D = \vec{v}_D$ D的绝对速度

P_k 的牵连速度 $\vec{v}_k^{e} = \vec{v}_{tk}^{e} + \cancel{\vec{v}_{\omega k}^{e}} = \vec{v}_D$



惯性基 $O-\vec{e}$

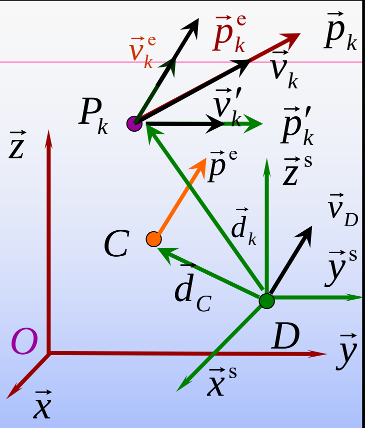
动点 D 平动基 $D-\vec{e}^{\,s}$

质点系 $(P_1,P_2,\cdots,P_n)$

P_k 的绝对速度 $\dot{\vec{r}}_k=\vec{v}_k$

P_k 的相对速度 $\vec{v}'_k=\dot{\vec{d}}_k$

P_k 的平动牵连速度 $\vec{v}^{\,e}_k=\vec{v}^{\,e}_{tk}=\vec{v}_D$



质点的绝对动量 $\vec{p}_k\overset{\text{def}}{=}m_k\vec{v}_k=m_k\dot{\vec{r}}_k$

质点的相对动量 $\vec{p}'_k\overset{\text{def}}{=}m_k\vec{v}'_k=m_k\dot{\vec{d}}_k$

质点的平动牵连动量 $\vec{p}^{\,e}_k\overset{\text{def}}{=}m_k\vec{v}^{\,e}_k=m_k\vec{v}_d$

质点系的平动牵连动量 $\vec{p}^{\,e}=\sum_k m_k\vec{v}^{\,e}_k=\left(\sum_k m_k\right)\vec{v}_D=m\vec{v}_D$

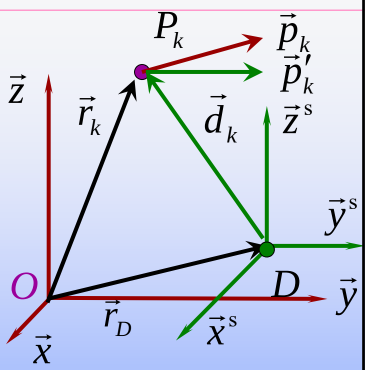
- 对动点绝对动量矩与相对动量矩

动点 D 平动基 $D-\vec{e}^{\,s}$

质点系 $(P_1,P_2,\cdots,P_n)$

质点的绝对动量 $\vec{p}_k\overset{\text{def}}{=}m_k\vec{v}_k=m_k\dot{\vec{r}}_k$

质点的相对动量 $\vec{p}'_k\overset{\text{def}}{=}m_k\vec{v}'_k=m_k\dot{\vec{d}}_k$



质点系对动点**D**的绝对动量矩

$$\vec{L}_D\overset{\text{def}}{=}\sum_k\vec{d}_k\times\vec{p}_k=\sum_k\vec{d}_k\times m_k\dot{\vec{r}}_k$$

质点系对动点**D**的相对动量矩

$$\vec{L}'_D\overset{\text{def}}{=}\sum_k\vec{d}_k\times\vec{p}'_k=\sum_k\vec{d}_k\times m_k\dot{\vec{d}}_k$$

动点 D 平动基 $D-\vec{e}^{\mathrm{s}}$ 质点系 $(P_1,P_2,\cdots,P_n)$

$\vec{p}^{\mathrm{e}}=m\vec{v}_D$ 质点系的平动牵连动量

$\vec{L}_D=\sum_k \vec{d}_k\times m_k\dot{\vec{r}}_k$ 质点系对动点**D**绝对动量矩

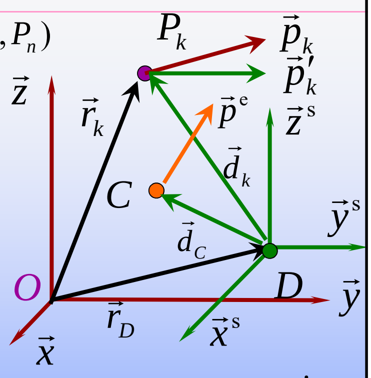
$\vec{L}'_D=\sum_k \vec{d}_k\times m_k\dot{\vec{d}}_k$ 质点系对动点**D**绝对动量矩

$$\vec{L}_D=\sum_k \vec{d}_k\times m_k\dot{\vec{r}}_k$$

$$=\left(\sum_k m_k\vec{d}_k\right)\times\dot{\vec{r}}_D+\sum_k \vec{d}_k\times m_k\dot{\vec{d}}_k$$

$$\vec{L}_D=\vec{d}_C\times m\dot{\vec{r}}_D+\vec{L}'_D$$

$$\vec{L}_D=\vec{L}'_D+\vec{d}_C\times m\vec{v}_D$$



$\dot{\vec{r}}_k=\dot{\vec{r}}_D+\dot{\vec{d}}_k$

质点系质心**C** $\vec{d}_C$

$\sum_k m_k\vec{d}_k=m\vec{d}_C$

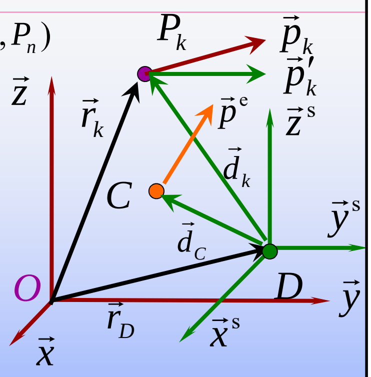
动点 D 平动基 $D-\vec{e}^{\mathrm{s}}$ 质点系 $(P_1,P_2,\cdots,P_n)$

$\vec{p}^{\mathrm{e}}=m\vec{v}_D$ 质点系的平动牵连动量

$\vec{L}_D=\sum_k \vec{d}_k\times m_k\dot{\vec{r}}_k$ 质点系对动点**D**绝对动量矩

$\vec{L}'_D=\sum_k \vec{d}_k\times m_k\dot{\vec{d}}_k$ 质点系对动点**D**绝对动量矩

$$\vec{L}_D=\vec{L}'_D+\vec{d}_C\times m\vec{v}_D$$



质点系对动点**D**绝对与相对动量矩的关系

$$\vec{L}_D=\vec{L}'_D+\vec{d}_C\times\vec{p}^{\mathrm{e}}$$

质点系对动点**D**的绝对动量等于相对动量矩加上平动牵连动量对动点**D**的矩

质点系对动点的动量矩

- 对动点的动量矩
- 对质心的动量矩
- 对不同动点动量矩间的关系

对质心的的动量矩

- 对质心的绝对动量矩与相对动量矩
- 平面一般运动刚体对质心的动量矩

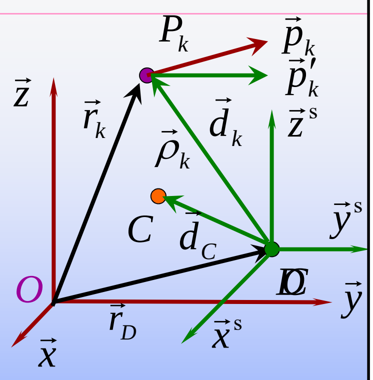
- 对质心的绝对与相对动量矩

惯性基 $O-\vec{e}$　　平动基 $C-\vec{e}^{s}$

动点 $D \Rightarrow C$　　$\vec{d}_C = \vec{0}$

$$\vec{L}_C = \vec{L}'_C$$

质点系对其质心的绝对动量矩与相对动量矩相等



$$\vec{L}_D = \vec{L}'_D + \cancel{\vec{d}_C \times m\vec{v}_D}$$

质点$\boldsymbol{P_k}$ 的矢径　$\vec{d}_k \Rightarrow \vec{\rho}_k$

质点系对质心$\boldsymbol{C}$的绝对动量矩　$\vec{L}_C \overset{\text{def}}{=} \sum_k \vec{\rho}_k \times \vec{p}_k = \sum_k \vec{\rho}_k \times m_k \dot{\vec{r}}_k$

质点的相对动量　$\vec{p}'_k \overset{\text{def}}{=} m_k \vec{v}'_k = m_k \dot{\vec{\rho}}_k$

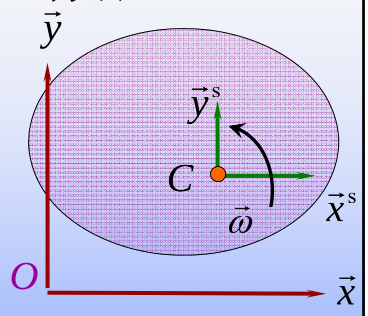
质点系对质心$\boldsymbol{C}$的相对动量矩　$\vec{L}'_C \overset{\text{def}}{=} \sum_k \vec{\rho}_k \times \vec{p}'_k = \sum_k \vec{\rho}_k \times m_k \dot{\vec{\rho}}_k$

- 平面一般运动刚体对质心的动量矩（方法1）

惯性基 $O-\vec{e}$　　平动基 $C-\vec{e}^{s}$

质心$\boldsymbol{C}$为动点

相对角速度等于绝对角速度　$\vec{\omega}$



刚体的相对运动 ➡ 刚体绕$\boldsymbol{C}$的定轴转动

绕动点$\boldsymbol{C}$相对动量矩 ＝ 绕$\boldsymbol{C}$定轴转动的动量矩　$\vec{L}'_C = J_{Cz}\vec{\omega}$

$$\vec{L}_C = \vec{L}'_C$$

绕动点$\boldsymbol{C}$绝对动量矩　$\vec{L}_C = J_{Cz}\vec{\omega}$

$$\vec{L}_C = J_{Cz}\omega\vec{z} \qquad L_C = J_{Cz}\omega$$

平面一般运动刚体绕动点C的绝对动量矩

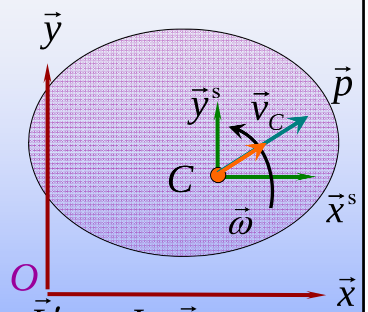
- 平面一般运动刚体对质心的动量矩（方法2）

惯性基 $O-\vec{e}$　　平动基 $C-\vec{e}^{s}$

刚体的平面一般运动

⇕

刚体的平动	刚体的平动动量	对C的动量矩
	$\vec{p}=m\vec{v}_C$	$\vec{L}_{C1}=\vec{0}$
+		
刚体绕C的转动	相对角速度等于绝对角速度	$\vec{\omega}$



绕C的定轴转动的相对动量矩　$\vec{L}'_{C2}=J_{Cz}\vec{\omega}$

平面一般运动刚体绕C的的绝对动量矩

$$\vec{L}_C=\vec{L}_{C1}+\vec{L}'_{C2}$$

$$\vec{L}_C=J_{Cz}\vec{\omega}=J_{Cz}\omega\vec{z}$$

背越式跳高分析

质点系对动点的动量矩

- 对动点的动量矩
- 对质心的动量矩
- 对不同动点动量矩间的关系

对不同动点动量矩间的关系

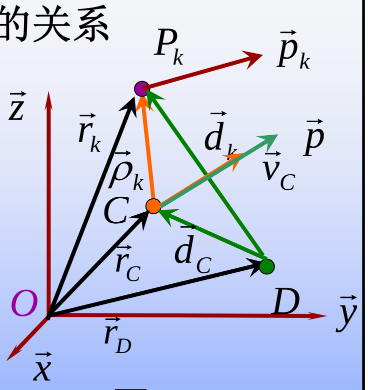
- 对任意动点与对质心动量矩的关系
- 平面一般运动对动点的动量矩
- 对定点的动量矩与对其质心动量矩的关系

- 对任意动点与对质心动量矩间的关系

质点P_k 矢径关系 $\vec{d}_k=\vec{d}_C+\vec{\rho}_k$

$$\vec{L}_D=\sum_k \vec{d}_k\times m_k\dot{\vec{r}}_k$$

$$=\vec{d}_C\times\underline{\left(\sum_k m_k\dot{\vec{r}}_k\right)}+\underbrace{\sum_k \vec{\rho}_k\times m_k\dot{\vec{r}}_k}_{\vec{L}'_C}$$



$$\vec{L}_D=\vec{L}'_C+\vec{d}_C\times m\vec{v}_C$$

$$\vec{L}_D=\vec{L}'_C+\vec{d}_C\times\vec{p}$$

质点系对任意动点的绝对动量矩等于质点系对其质心的相对动量矩与质点系动量对该动点的矩之矢量和

$$\sum_k m_k\vec{r}_k=m\vec{r}_C$$

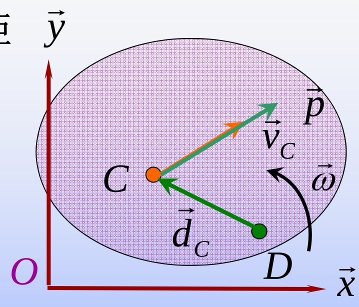
$$\sum_k m_k\dot{\vec{r}}_k=m\dot{\vec{r}}_C=m\vec{v}_C$$

$$\vec{p}=m\vec{v}_C$$

质点系动量

- 平面一般运动刚体对动点的动量矩

$$\vec{L}_D=\vec{L}'_C+\vec{d}_C\times m\vec{v}_C$$



平面一般运动 $\vec{L}'_C=J_{Cz}\omega\vec{z}$

$\vec{d}_C$， $\vec{v}_C$ 在同一平面内

$$\vec{d}_C\times m\vec{v}_C=m(\tilde{\mathbf{I}}\mathbf{d}_C)^{\mathrm{T}}\mathbf{v}_C\vec{z}$$

$$\vec{L}_D=L_D\vec{z}$$

$$L_D=J_C\omega+m(\tilde{\mathbf{I}}\mathbf{d}_C)^{\mathrm{T}}\mathbf{v}_C$$

特殊情况

平动 $\omega=0$ $\vec{L}_D=\vec{d}_C\times m\vec{v}_C=\vec{d}_C\times\vec{p}$

绕C定轴转动 $v_C=0$ $\vec{L}_D=\vec{L}'_C=J_{Cz}\omega\vec{z}$

- 平面一般运动刚体对瞬心的动量矩

瞬心S　　刚体的速度分布

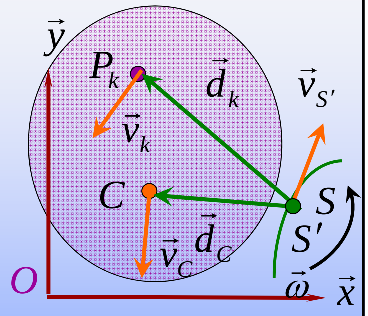
从时变的角度：

瞬心S在惯性基的运动轨迹是瞬心的定轨迹

刚体对瞬心S的动量矩

⇓

对定轨迹点S'的动量矩



$$\vec{d}_C \times m\vec{v}_C = m\vec{d}_C \times \left(\vec{\omega} \times \vec{d}_C\right) = m\omega d_C^2 \vec{z}$$

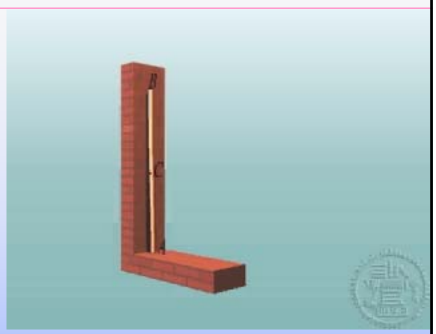
$$\vec{L}_{S'} = J_C \omega\vec{z} + m d_C^2 \omega\vec{z}$$
$$= \left(J_C + m d_C^2\right)\omega\vec{z} = J_{Sz}\omega\vec{z}$$

$$\vec{L}_D = J_C \vec{\omega} + \vec{d}_C \times m\vec{v}_C$$

$$L_{S'z} = J_{Sz}\omega$$

[例]

均质杆AB长为l，质量为m。
其一端A着地，一端B靠墙，
可在铅垂面运动



试求此杆对其质心C与对瞬心定轨迹点S'的绝对动量矩

[解]　惯性基 $O-\vec{e}$　　平动基 $C-\vec{e}^{s}$

杆的运动为平面一般运动

杆对其质心*C*的绝对动量矩

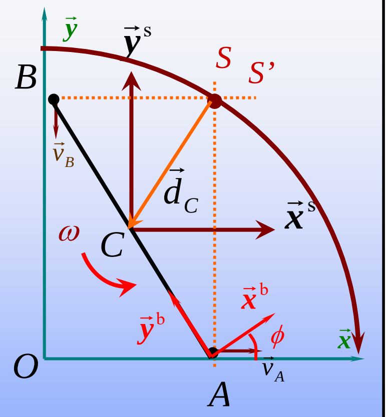
$$L_{Cz}=L'_{Cz}=J_{Cz}\omega=\frac{1}{12}ml^{2}\omega$$

杆对瞬心*S*的转动惯量

$$J_{Sz}=J_{Cz}+md_{C}^{2}=\frac{ml^{2}}{12}+\frac{ml^{2}}{4}=\frac{1}{3}ml^{2}$$

杆对瞬心定轨迹点*S'*的绝对动量矩

$$L_{S'z}=J_{Sz}\omega=\frac{1}{3}ml^{2}\omega$$

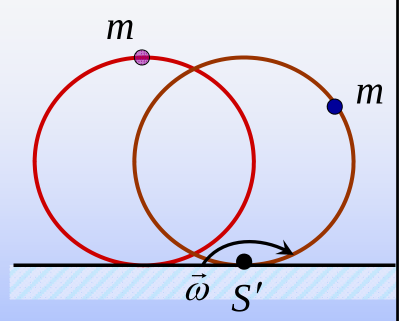


[例]

一质量为***m***，半径为***R***的圆环上固结一质量为***m***的质点

圆环在水平面上作无滑动的滚动

试求系统对瞬心定轨迹点***S'***的绝对动量矩



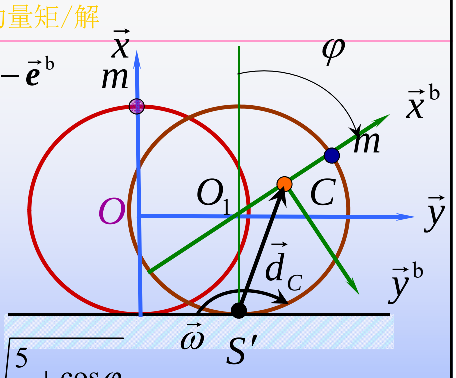
[解]　惯性基 $O-\vec{e}$　质心连体基 $C-\vec{e}^{\,b}$

系统质心C为O_1m的中点

系统对质心C的转动惯量

$$J_C = \underbrace{mR^2 + m\frac{R^2}{4}}_{环} + \underbrace{m\frac{R^2}{4}}_{质点} = \frac{3}{2}mR^2$$

$$d_C = \sqrt{R^2 + \frac{R^2}{4} - 2R\frac{R}{2}\cos(\pi-\varphi)} = R\sqrt{\frac{5}{4}+\cos\varphi}$$



系统对瞬心S的转动惯量

$$J_S = J_C + 2md_C^2 = \frac{3mR^2}{2} + 2mR^2\left(\frac{5}{4}+\cos\varphi\right) = 2mR^2(2+\cos\varphi)$$

系统对瞬心定轨迹点S'的绝对动量矩

$$L_{S'z} = J_{Sz}\omega = 2mR^2(2+\cos\varphi)\dot{\varphi}$$

对动点的动量矩

相对与绝对动量矩

$$\vec{L}_D = \vec{L}'_D + \vec{d}_C \times m\vec{v}_D$$

$$\boxed{\vec{L}_C = \vec{L}'_C}$$

平面一般运动对质心动量矩　$\vec{L}_C = \vec{L}'_C = J_C\omega\vec{z}$

对动点绝对动量矩与对质心动量矩关系

$$\vec{L}_D = \vec{L}'_C + \vec{d}_C \times m\vec{v}_C \qquad \vec{L}_D = \vec{L}_C + \vec{d}_C \times m\vec{v}_C$$

平面一般运动对瞬心动量矩　$\boxed{\vec{L}_S = J_S\omega\vec{z}}$

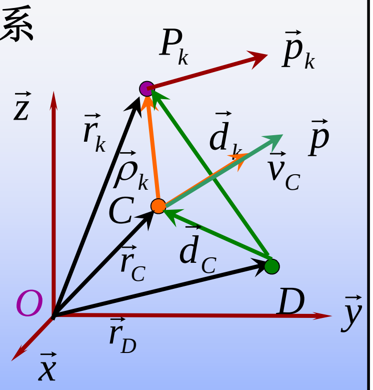
- 对定点与对质心动量矩间的关系

对任意动点动量矩的关系

$$\vec{L}_D = \vec{L}_C' + \vec{d}_C \times \vec{p}$$

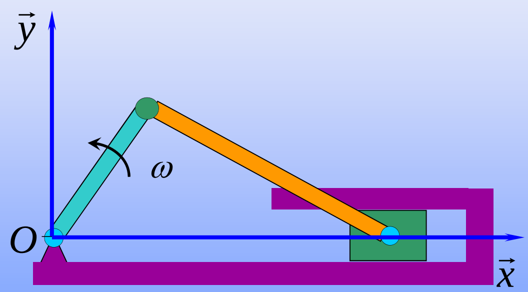
$$\boxed{\vec{L}_D = \vec{L}_C' + \vec{d}_C \times m\vec{v}_C}$$

特殊情况:***D***为定点同样成立



质点系对定点的动量矩等于质点系对其质心的相对动量矩与质点系动量对该定点的矩之矢量和

- 刚体系对***O***的绝对动量矩？

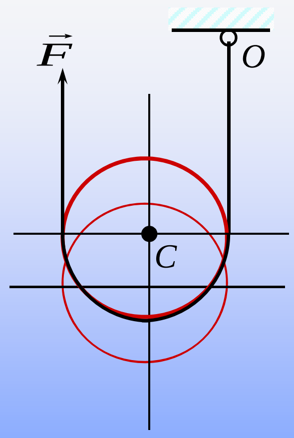


[例]

一质量为m，半径为r的均质圆盘绕有细软绳，该绳一端固结在点O。圆盘的另一端受一垂直向上主动力的作用，使圆盘质心C垂直向上运动，而圆盘与细软绳无滑动。

细软绳质量不计

试求圆盘质心加速度与细绳的拉力

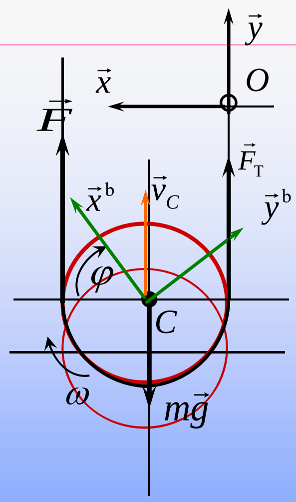


[解] 惯性基 $O-\vec{e}$ 质心连体基 $C-\vec{e}^{\,b}$

主动力 $m\vec{g}$ $\vec{F}$ $\vec{F}_T$

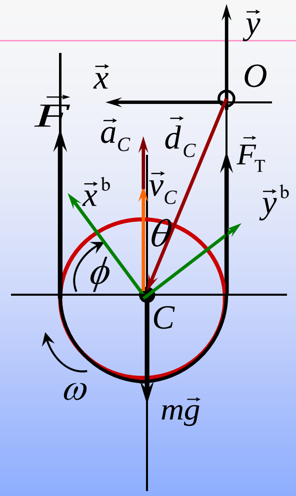
圆盘转过弧长与质心上升的距离相等

$\Delta y=\varphi r$ $v_C=\omega r$



[解] 惯性基 $O-\vec{e}$ 质心连体基 $C-\vec{e}^{\mathrm{b}}$

主动力 $m\vec{g}$ $\vec{F}$ $\vec{F}_{\mathrm{T}}$ $v_C=\omega r$



圆盘对定点O的动量矩

$$\vec{L}_O=\vec{L}'_C+\vec{d}_C\times m\vec{v}_C=\frac{3}{2}mrv_C\vec{z}$$

$$J_{Cz}\omega\vec{z}=\frac{1}{2}mr^2\frac{v_C}{r}\vec{z}$$

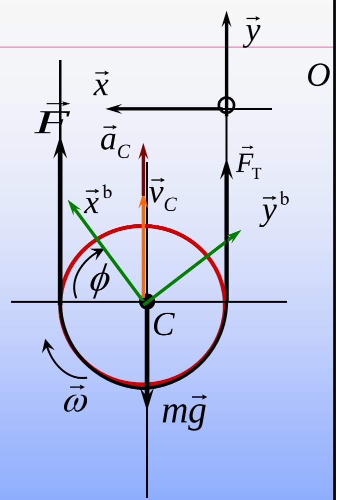
$$mv_Cd_C\sin(\pi-\theta)\vec{z}=mv_Cr\vec{z}$$

圆盘对定点O的动量矩定理

$$\frac{3}{2}mr\dot{v}_C=-mgr+2Fr$$

$$a_C=\dot{v}_C=\frac{2}{3m}(2F-mg)$$

圆盘对定点O的动量矩定理



$$\frac{3}{2}mr\dot{v}_C=-mgr+2Fr$$

$$a_C=\dot{v}_C=\frac{2}{3m}(2F-mg)$$

质心运动定理

$$ma_C=-mg+F+F_{\mathrm{T}}$$

细绳的拉力

$$F_{\mathrm{T}}=ma_C+mg-F$$

$$F_{\mathrm{T}}=\frac{1}{3}(F+mg)$$

另一解法？

动量矩定理

- 质点系对定点的动量矩
- 质点系对定点的动量矩定理
- 质点系对动点的动量矩
- 质点系对动点的动量矩定理

质点系对动点的动量矩定理

- 对任意动点的动量矩定理
- 对质心的动量矩定理

- 对任意动点的动量矩定理

质点系 $(P_1,P_2,\cdots,P_n)$

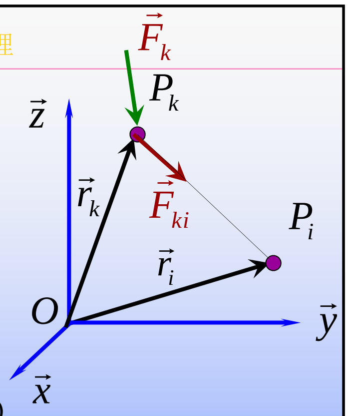
质点P_k $(k=1,2,\cdots,n)$ 所受的力

外力 $\vec{F}_k$

内力 质点P_i所对P_k的作用力力

$\vec{F}_{ki}$ $(i=1,2,\cdots,n;\neq k)$

牛顿定律 $m_k\ddot{\vec{r}}_k=\vec{F}_k+\sum_{i=1,\neq k}^{n}\vec{F}_{ki}\quad(k=1,2,\cdots,n)$



牛顿定律 $m_k\ddot{\vec{r}}_k=\vec{F}_k+\sum_{i=1,\neq k}^{n}\vec{F}_{ki}\quad(k=1,2,\cdots,n)$

$$\vec{L}_D=\sum_{k=1}^{n}\vec{d}_k\times m_k\dot{\vec{r}}_k$$

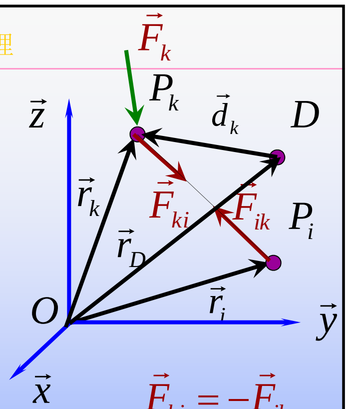
$$\dot{\vec{L}}_D=\sum_{k=1}^{n}\vec{d}_k\times m_k\ddot{\vec{r}}_k+\sum_{k=1}^{n}\dot{\vec{d}}_k\times m_k\dot{\vec{r}}_k$$

$$\sum_{k=1}^{n}\vec{d}_k\times m_k\ddot{\vec{r}}_k=\sum_{k=1}^{n}\vec{d}_k\times\vec{F}_k+\cancel{\sum_{k=1}^{n}\vec{d}_k\times\sum_{i=1,\neq k}^{n}\vec{F}_{ki}}$$

$=\vec{M}_D$ 质点系外力对该点的主矩

$$\sum_{k=1}^{n}\dot{\vec{d}}_k\times m_k\dot{\vec{r}}_k=\cancel{\sum_{k=1}^{n}\dot{\vec{r}}_k\times m_k\dot{\vec{r}}_k}-\dot{\vec{r}}_D\times\left(\sum_{k=1}^{n}m_k\dot{\vec{r}}_k\right)$$

$$=-\vec{v}_D\times\vec{p}$$



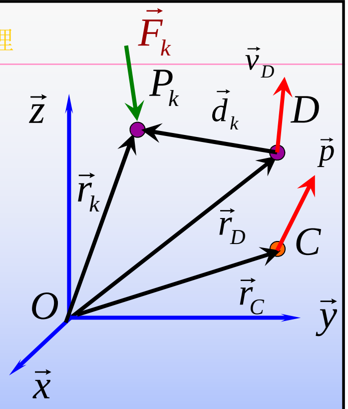
$\vec{F}_{ki}=-\vec{F}_{ik}$

$(i,k=1,2,\cdots,n)$

$\vec{d}_k=\vec{r}_k-\vec{r}_D$

$\sum_{k=1}^{n}m_k\dot{\vec{r}}_k=\vec{p}$

$$\dot{\vec{L}}_D+\vec{v}_D\times\vec{p}=\vec{M}_D$$



$$\dot{\vec L}_D + \vec v_D \times \vec p = \vec M_D$$

质点系相对动点绝对动量矩对时间的绝对导数与动点的速度与质点系动量叉积之矢量和等于质点系外力对该点的主矩

对动点的动量矩定理

特殊情况

***D*为定点** $v_D = 0$ $a_D = 0$ $\dot{\vec L}_D = \vec M_D$ 对定点的动量矩定理

$\vec v_D // \vec p$ $\vec v_D // \vec v_C$ $\dot{\vec L}_D = \vec M_D$

***D*为质心**

矢量动力学基础/动量矩定理/对动点的动量矩定理

- 对质心的动量矩定理

$\dot{\vec L}_D + \vec v_D \times \vec p = \vec M_D$ $\dot{\vec L}_C + \cancel{\vec v_C \times} \vec p = \vec M_C$ $m\vec v_C = \vec p$

$\dot{\vec L}_C = \vec M_C$ $\dot{\vec L}'_C = \vec M_C$ $\vec L_C = \vec L'_C$

质点系相对于其质心的绝对动量矩或相对动量矩对时间的绝对导数等于质点系外力对质心的主矩

$\vec e$: $\dot{\boldsymbol L}_C = \boldsymbol M_C$

$\vec e^s$: $\dot{\boldsymbol L}'_C = \boldsymbol M'_C$

$\dot L'_{Cx} = M'_{Cx}$ $\dot L'_{Cy} = M'_{Cy}$ $\dot L'_{Cz} = M'_{Cz}$

$\boldsymbol L'_C = \left(L'_{Cx} \quad L'_{Cy} \quad L'_{Cz}\right)^{\mathrm T}$

$\boldsymbol M'_C = \left(M'_{Cx} \quad M'_{Cy} \quad M'_{Cz}\right)^{\mathrm T}$

- 对质心的动量矩定理积分形式

$$\dot{\boldsymbol{L}}_C = \boldsymbol{M}_C \qquad \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{L}_C = \boldsymbol{M}_C$$

$$\dot{L}_{Cx} = M_{Cx} \quad \dot{L}_{Cy} = M_{Cy} \quad \dot{L}_{Cz} = M_{Cz}$$

$$\boldsymbol{L}_C - \boldsymbol{L}_{C0} = \underline{\int_{t_0}^{t} \boldsymbol{M}_C \,\mathrm{d}t}$$

时间t_0到t间隔内外力系对C的冲量主矩

$$L_{Cx} - L_{Cx0} = \int_{t_0}^{t} M_{Cx}\,\mathrm{d}t, \quad L_{Cy} - L_{Cy0} = \int_{t_0}^{t} M_{Cy}\,\mathrm{d}t, \quad L_{Cz} - L_{Cz0} = \int_{t_0}^{t} M_{Cz}\,\mathrm{d}t$$

- 对质心的动量矩守恒定律

$$\boldsymbol{L}_C - \boldsymbol{L}_{C0} = \int_{t_0}^{t} \boldsymbol{M}_C \,\mathrm{d}t \qquad \boldsymbol{M}_C = 0$$

$$\boldsymbol{L}_C - \boldsymbol{L}_{C0} = 0 \qquad \boldsymbol{L}_C = \boldsymbol{L}_{C0}$$

当作用于质点系外力对质心的主矩为零时质点系对质心的动量矩保持不变

$$L_{Cx} - L_{Cx0} = \int_{t_0}^{t} M_{Cx}\,\mathrm{d}t, \qquad M_{Cx} = 0 \qquad L_{Cx} = L_{Cx0}$$

对质心动量矩在x方向的分量保持不变

$$L_{Cy} - L_{Cy0} = \int_{t_0}^{t} M_{Cy}\,\mathrm{d}t, \qquad M_{Cy} = 0 \qquad L_{Cy} = L_{Cy0}$$

$$L_{Cz} - L_{Cz0} = \int_{t_0}^{t} M_{Cz}\,\mathrm{d}t, \qquad M_{Cz} = 0 \qquad L_{Cz} = L_{Cz0}$$

背越式跳高

起跳后运动员的空中姿态如何改变的

$$\boldsymbol{M}_C = 0$$

$$\boldsymbol{L}_C = \boldsymbol{L}_{C0}$$

对质心动量矩守恒

动力学量-动量矩包含两种信息：系统质量分布与系统的运动

在守恒的条件下，改变系统质量分布，可以改变系统的运动

跳板跳水

起跳后运动员的空中姿态如何改变的

$$\boldsymbol{M}_C = 0$$

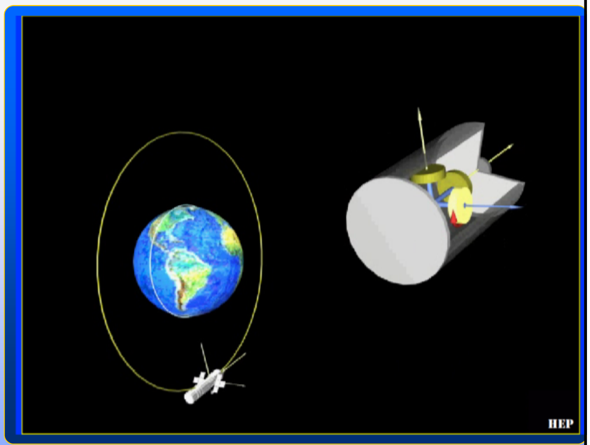
$$\boldsymbol{L}_C = \boldsymbol{L}_{C0}$$

对质心动量矩守恒

动力学量-动量矩包含两种信息：系统质量分布与系统的运动

在守恒的条件下，改变系统质量分布，可以改变系统的运动

卫星姿态调整



卫星姿态如何改变的

$$\boldsymbol{M}_C = 0$$

$$\boldsymbol{L}_C = \boldsymbol{L}_{C0}$$

对质心动量矩守恒

动力学量-动量矩包含两种信息：系统质量分布与系统的运动

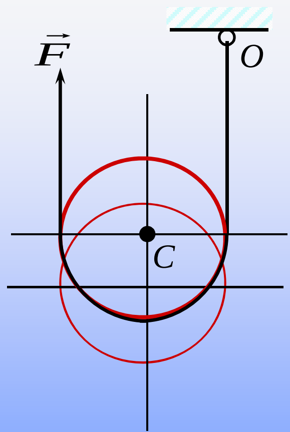
在守恒的条件下，控制系统部分构件的运动，改变系统的运动

[例]

一质量为m，半径为r的均质圆盘绕有细软绳，该绳一端固结在点O。圆盘的另一端受一垂直向上主动力的作用，使圆盘质心C垂直向上运动，而圆盘与细软绳无滑动。

细软绳质量不计

试求圆盘质心加速度与细绳的拉力



另一解法？

小结

对动点的动量矩 $\vec{L}_D = \sum_k \vec{d}_k \times m_k \vec{v}_k$ $\vec{L}'_D = \sum_k \vec{d}_k \times m_k \vec{v}'_k$

相对与绝对动量矩

$$\vec{L}_D = \vec{L}'_D + \vec{d}_C \times m\vec{v}_D \qquad \vec{L}_C = \vec{L}'_C$$

平面一般运动刚体对质心动量矩 $\vec{L}_C = \vec{L}'_C = J_C \omega \vec{z}$

对动点绝对动量矩与对质心动量矩关系

$$\vec{L}_D = \vec{L}'_C + \vec{d}_C \times m\vec{v}_C$$

平面一般运动对瞬心动量矩 $\vec{L}_S = J_S \omega \vec{z}$

小结

对定点的绝对动量矩 $\vec{L}_O = \sum \vec{r}_k \times m_k \vec{v}_k$

对定点绝对动量矩与对质心动量矩关系

$$\vec{L}_O = \vec{L}'_C + \vec{r}_C \times m\vec{v}_C$$

平动刚体 $\vec{L}_O = \vec{r}_C \times m\vec{v}_C$

定轴转动刚体 $L_{Oz} = J_{Oz}\omega$

平面一般运动刚体对定点动量矩 $\vec{L}_O = \vec{L}'_C + \vec{r}_C \times m\vec{v}_C$

小结

对动点的绝对动量矩定理

$$\dot{\vec{L}}_D + \vec{v}_D \times \vec{p} = \vec{M}_D$$

$$\dot{\vec{L}}_C = \dot{\vec{L}}'_C = \vec{M}_C$$

对定点的绝对动量矩定理

$$\dot{\vec{L}}_D = \vec{M}_D$$

定轴转动刚体

$$J_{Oz}\ddot{\varphi} = M_{Oz}$$

只有对质心、对定点的动量矩定理有简单形式