理论力学 CAI 数学基础

For 静力学

数学基础 For 静力学

- 矩阵
- 矢量

矢量

- 矢量、矢量基与基矢量
- 矢量的代数描述
- 平面矢量

矢量

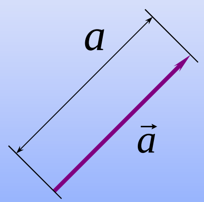
- 矢量、矢量基与基矢量
- 矢量的代数描述
- 平面矢量

矢量、矢量基与基矢量

- 几何矢量的定义
- 几何矢量的运算
- 矢量基与基矢量

几何矢量的定义

- 具有方向与大小的量称为几何矢量(矢量)
  - 用上面加一箭头的白斜体字母表示 $\vec{a}$
  - 它的大小称为模 $|\vec{a}| = a$
- 几何表示：有向线段
  - 线段长度为矢量的模
  - 指向为矢量的方向



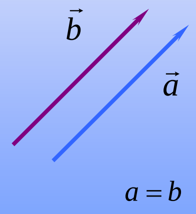
- 模为1的矢量：单位矢量
- 模为零的矢量：零矢量 $\vec{0}$

3

几何矢量的运算

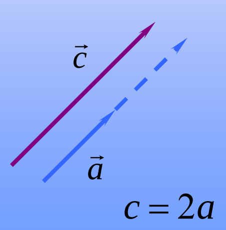
- 矢量相等：两矢量的模相等、方向一致

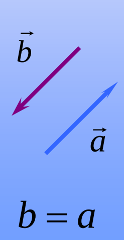
$$\vec{a} = \vec{b}$$



- 标量α与矢量的积
  - $\alpha > 0$，方向与该矢量相同，模是它的$|\alpha|$倍
  - $\alpha < 0$，方向与该矢量相反，模是它的$|\alpha|$倍

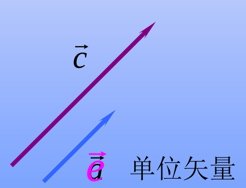
$$\vec{c} = 2\vec{a} \qquad \vec{b} = -\vec{a}$$



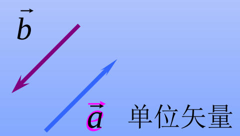


- 标量α与矢量的积
  - $\alpha > 0$，方向与该矢量相同，模是它的$|\alpha|$倍
  - $\alpha < 0$，方向与该矢量相反，模是它的$|\alpha|$倍

$$\vec{c} = 2\vec{a} \qquad \vec{b} = -\vec{a}$$



$c = 2$



$b = -1$

- 矢量模概念的拓展

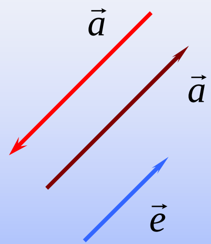
$\vec{a} = a\vec{e}$ 单位矢量

模 $a = |\vec{a}| = |a\vec{e}| = |a||\vec{e}| = |a|$

a 拓展为含方向概念的矢量模

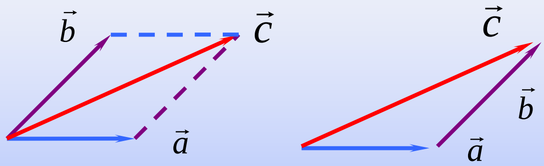
$a > 0$ 与单位矢量方向一致

$a < 0$ 与单位矢量方向相反



- 矢量和：平行四

$$\vec{c}=\vec{a}+\vec{b}$$

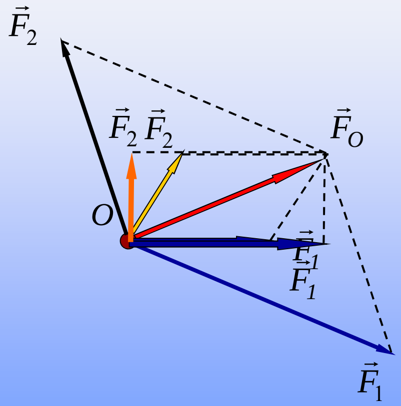


三角形法则

交换律 $\vec{a}+\vec{b}=\vec{b}+\vec{a}$

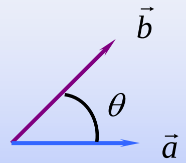
结合律 $\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}\ =\left(\vec{a}+\vec{b}\right)+\vec{c}\ =\vec{a}+\left(\vec{b}+\vec{c}\right)$

- 矢量的分解



矢量的分解不唯一

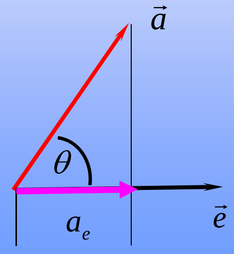
- 矢量点(标)积：
  - 为一个标量，其大小为



$$\alpha = \vec{a}\cdot\vec{b} \overset{\text{def}}{=} ab\cos\theta$$

$\vec{b} = \vec{e}$　单位矢量

$$\vec{a}\cdot\vec{e} = a\cos\theta \ = a_e$$
$$\vec{e}\cdot\vec{a} = a\cos\theta = a_e$$

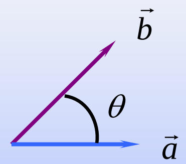


矢量 $\vec{a}$ 在 $\vec{e}$ 上的投影（广义）

矢量 $\vec{a}$ 在 $\vec{e}$ 上的投影矢量

$$\vec{a}_e = a_e\vec{e}$$

- 矢量点(标)积：
  - 为一个标量，其大小为

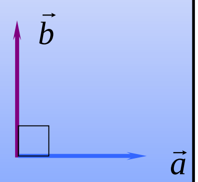


$$\alpha = \vec{a}\cdot\vec{b} \overset{\text{def}}{=} ab\cos\theta$$

两矢量正交　$\vec{a}\cdot\vec{b} = 0$

两矢量并行　$\vec{a}\cdot\vec{b} = ab$

$\vec{a}\cdot\vec{a} = a^2$　矢量模的平方



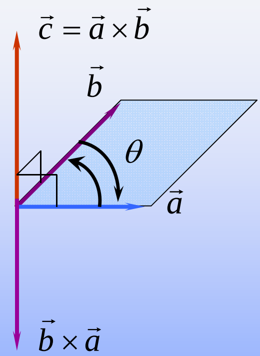
交换律　$\vec{a}\cdot\vec{b} = \vec{b}\cdot\vec{a}$

分配律　$\vec{a}\cdot(\vec{b}+\vec{c}) = (\vec{a}\cdot\vec{b}) + (\vec{a}\cdot\vec{c})$

- 矢量叉(矢)积： $\vec{c} = \vec{a} \times \vec{b}$
  - 为一个矢量

方向垂直于两矢量构成的平面

$\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ (右手法则)



大小 $c \overset{\text{def}}{=} ab\sin\theta$

$\vec{a}$, $\vec{b}$ 构成的平行四边形的面积

两矢量并行 $\vec{a} \times \vec{b} = \vec{0}$ $\vec{a} \times \vec{a} = \vec{0}$

无交换律 $\vec{a} \times \vec{b} = -\vec{b} \times \vec{a}$

分配律 $\vec{a} \times (\vec{b} + \vec{c}) = (\vec{a} \times \vec{b}) + (\vec{a} \times \vec{c})$

- 矢量积的混合运算

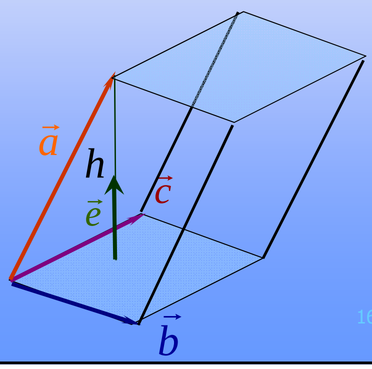
两重叉积 $\vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c}) = \vec{b}(\vec{a} \cdot \vec{c}) - (\vec{b} \cdot \vec{a})\vec{c}$

混合积 $\vec{a} \cdot (\vec{b} \times \vec{c}) = \vec{c} \cdot (\vec{a} \times \vec{b}) = \vec{b} \cdot (\vec{c} \times \vec{a})$

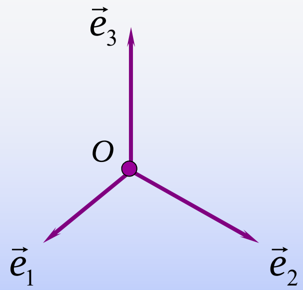
$V = \vec{a} \cdot \underline{(\vec{b} \times \vec{c})}$

$\vec{b} \times \vec{c} = \underbrace{s}_{\text{底面积}}\vec{e}$ $\vec{a} \cdot \vec{e} = \underbrace{h}_{\text{高}}$

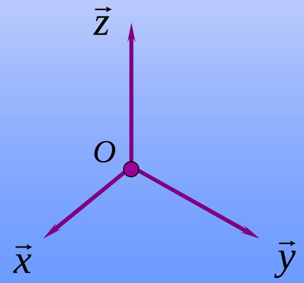
V为四棱柱的体积



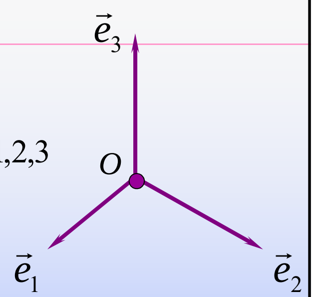
矢量基与基矢量



- 矢量基：三个相互正交的矢量构成的三维空间
- 基点：原点**O**
- 基矢量：构成矢量基的三个单位矢量 $\vec{e}_1$，$\vec{e}_2$，$\vec{e}_3$



基矢量 $\vec{e}_1$， $\vec{e}_2$， $\vec{e}_3$



- 单位矢量 $\vec{e}_\alpha \cdot \vec{e}_\beta = \delta_{\alpha\beta} \quad \alpha, \beta = 1,2,3$

$$\delta_{\alpha\beta} = \begin{cases} 1 & \text{当}\alpha = \beta \\ 0 & \text{当}\alpha \neq \beta \end{cases}$$

$$\vec{e}_1 \cdot \vec{e}_1 = \delta_{11} = 1 \qquad \vec{e}_2 \cdot \vec{e}_1 = \delta_{21} = 0$$

- 右旋正交 $\vec{e}_\alpha \times \vec{e}_\beta = \varepsilon_{\alpha\beta\gamma} \vec{e}_\gamma$

$\alpha \neq \beta \neq \gamma$

$\alpha, \beta, \gamma = 1,2,3$

$$\varepsilon_{\alpha\beta\gamma} = \begin{cases} +1 & \text{当}\alpha, \beta, \gamma\text{依次循环} \\ -1 & \text{其余} \end{cases}$$

$$\vec{e}_1 \times \vec{e}_2 = \varepsilon_{123} \vec{e}_3 = \vec{e}_3 \qquad \vec{e}_2 \times \vec{e}_1 = \varepsilon_{213} \vec{e}_3 = -\vec{e}_3$$

矢量

- 矢量、矢量基与基矢量
- 矢量的代数描述
- 平面矢量

矢量的代数描述

- 矢量与矢径
- 矢量的运算与坐标阵运算的关系

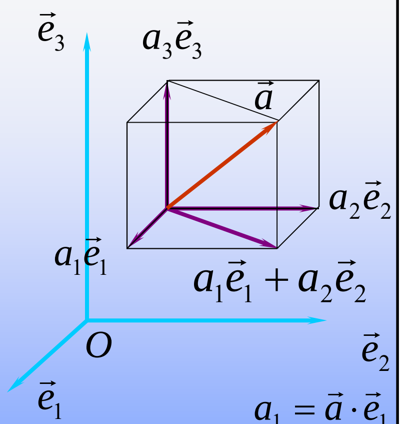
矢量与矢径

- 矢量的代数表达式：

在基 $\boldsymbol{e}=(\vec{e}_1 \quad \vec{e}_2 \quad \vec{e}_3)^{\mathrm{T}}$ 下

任意矢量可表示如下矢量和

$$\vec{a}=a_1\vec{e}_1+a_2\vec{e}_2+a_3\vec{e}_3$$



- 矢量的分(矢)量：

$$a_1\vec{e}_1,\quad a_2\vec{e}_2,\quad a_3\vec{e}_3$$

- 各分量的**模(广义)**称为**矢量**在该基下**的坐标**

$$a_1,\quad a_2,\quad a_3$$

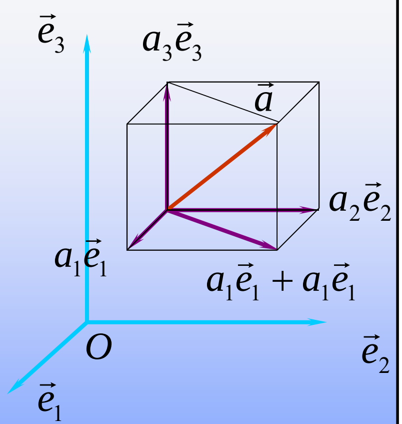
$$a_1=\vec{a}\cdot\vec{e}_1$$
$$a_2=\vec{a}\cdot\vec{e}_2$$
$$a_3=\vec{a}\cdot\vec{e}_3$$

坐标实为矢量在三个基矢量方向的**投影**

- 矢量的分解与合成

$$\vec{a}=a_1\vec{e}_1+a_2\vec{e}_2+a_3\vec{e}_3$$

在基 $\boldsymbol{e}=(\vec{e}_1 \quad \vec{e}_2 \quad \vec{e}_3)^{\mathrm{T}}$ 下 任意矢量



$\vec{a}$ 分解 ⇒ / ⇐ 合成 $a_1\vec{e}_1$, $a_2\vec{e}_2$, $a_3\vec{e}_3$ 相互正交

- 矢量 $\vec{a}$ 在基 $\vec{\boldsymbol{e}}$ 下的坐标阵

$$\boldsymbol{a}=\begin{pmatrix}a_1 & a_2 & a_3\end{pmatrix}^{\mathrm{T}}$$

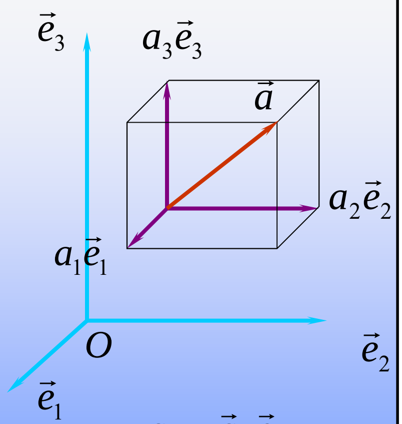
在给定的矢量基下，矢量与其的坐标阵一一对应

$$\vec{a}\xleftrightarrow{\vec{\boldsymbol{e}}}\boldsymbol{a}$$

坐标阵又称“代数矢量”

$$\boldsymbol{a}=\begin{pmatrix}a_1\\a_2\\a_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\vec{a}\cdot\vec{e}_1\\\vec{a}\cdot\vec{e}_2\\\vec{a}\cdot\vec{e}_3\end{pmatrix}=\vec{a}\cdot\begin{pmatrix}\vec{e}_1\\\vec{e}_2\\\vec{e}_3\end{pmatrix}$$

$$\boldsymbol{a}=\vec{a}\cdot\vec{\boldsymbol{e}}=\vec{\boldsymbol{e}}\cdot\vec{a}$$



$$a_1=\vec{a}\cdot\vec{e}_1$$
$$a_2=\vec{a}\cdot\vec{e}_2$$
$$a_3=\vec{a}\cdot\vec{e}_3$$

无法区分黑白时可加下横线 $\underline{a}$

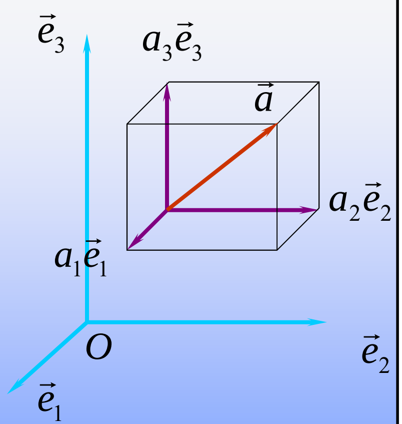
- 矢量 $\vec{a}$ 在基 $\vec{\boldsymbol{e}}$ 下的坐标阵

$$\boldsymbol{a}=\begin{pmatrix}a_1 & a_2 & a_3\end{pmatrix}^{\mathrm{T}}$$

在给定的矢量基下，矢量与其的坐标阵一一对应

$$\vec{a}\xleftrightarrow{\vec{\boldsymbol{e}}}\boldsymbol{a}$$

坐标阵又称“代数矢量”



- 矢量的坐标方阵

$$\tilde{\boldsymbol{a}}=\begin{pmatrix}0 & -a_3 & a_2\\a_3 & 0 & -a_1\\-a_2 & a_1 & 0\end{pmatrix}$$

反对称阵 $\tilde{\boldsymbol{a}}^{\mathrm{T}}=-\tilde{\boldsymbol{a}}$

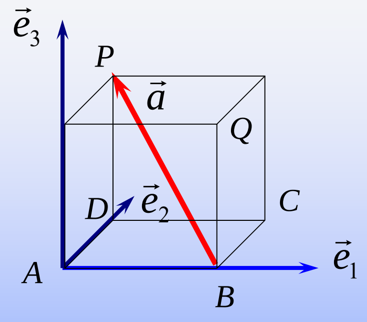
[例] 一长方体，

AB=1，BC=1.2, BQ=0.8

对于图中给定的基 $\boldsymbol{\vec{e}}$ ，

写出矢量 $\vec{a}$ 在该基上的

坐标阵与坐标方阵

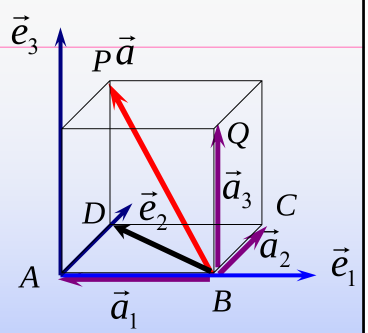


解： 定义 $\vec{a}_1=\overrightarrow{BA}=-\vec{e}_1$

$\vec{a}_2=\overrightarrow{BC}=1.2\vec{e}_2$

$\vec{a}_3=\overrightarrow{BQ}=0.8\vec{e}_3$

$$\vec{a}=\vec{a}_1+\vec{a}_2+\vec{a}_3=\underset{a_1}{-}\vec{e}_1+\underset{a_2}{1.2}\vec{e}_2+\underset{a_3}{0.8}\vec{e}_3$$



坐标阵

$$\boldsymbol{a}=\begin{pmatrix}-1\\1.2\\0.8\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1 & 1.2 & 0.8\end{pmatrix}^{\mathrm{T}}$$

$$\tilde{\boldsymbol{a}}=\begin{pmatrix}0 & -a_3 & a_2\\ a_3 & 0 & -a_1\\ -a_2 & a_1 & 0\end{pmatrix}$$

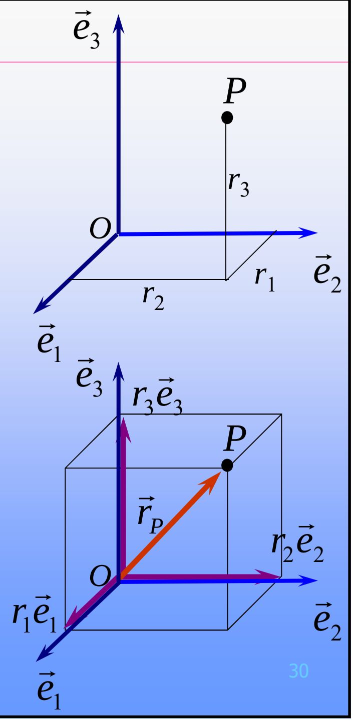
坐标方阵

$$\tilde{\boldsymbol{a}}=\begin{pmatrix}0 & -0.8 & 1.2\\ 0.8 & 0 & 1\\ -1.2 & -1 & 0\end{pmatrix}$$

- 点的坐标
  - 对于空间点P
  - 点P的坐标 r_1，r_2，r_3
- 点的矢径
  - 起点为基点O指向P的矢量，称为点P的矢径 $\vec{r}_P$
  - 点P的矢径的坐标阵

$$\boldsymbol{r}_P = \begin{pmatrix} r_1 & r_2 & r_3 \end{pmatrix}^{\mathrm{T}}$$

点P矢径的坐标阵的三个坐标与该点的三个空间坐标一一对应



矢量的运算与坐标阵运算的关系

- 同一个基下两种运算的关系：

矢量运算式

$\vec{a} = \vec{b}$

$\vec{c} = \vec{a} + \vec{b}$

$\vec{c} = \alpha\vec{a}$

$\alpha = \vec{a}\cdot\vec{b} = \vec{b}\cdot\vec{a}$

$\vec{c} = \vec{a}\times\vec{b} = -\vec{b}\times\vec{a}$

$$\vec{\boldsymbol{e}}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{a} = \vec{\boldsymbol{e}}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{b}$$

$$\vec{\boldsymbol{e}}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{c} = \boldsymbol{a}^{\mathrm{T}}\vec{\boldsymbol{e}}\times\vec{\boldsymbol{e}}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{b} = (a_2b_3 - a_3b_2)\vec{e}_1 + (a_3b - a_1b_3)\vec{e}_2 + (a_1b_2 - a_2b_1)\vec{e}_3 = \vec{\boldsymbol{e}}^{\mathrm{T}}\tilde{\boldsymbol{a}}\boldsymbol{b}$$

$$\vec{\boldsymbol{e}}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{c} = \vec{\boldsymbol{e}}^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})$$

$$\vec{\boldsymbol{e}}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{c} = \alpha\vec{\boldsymbol{e}}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{a}$$

$$\boldsymbol{a}^{\mathrm{T}}\vec{\boldsymbol{e}}\cdot\vec{\boldsymbol{e}}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{b} = \boldsymbol{a}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{I}_3\boldsymbol{b} = \boldsymbol{a}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{b}$$

坐标阵运算式

$\boldsymbol{a} = \boldsymbol{b}$

$\boldsymbol{c} = \boldsymbol{a} + \boldsymbol{b}$

$\boldsymbol{c} = \alpha\boldsymbol{a}$

$\alpha = \boldsymbol{a}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{b} = \boldsymbol{b}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{a}$

$\boldsymbol{c} = \tilde{\boldsymbol{a}}\boldsymbol{b} = -\tilde{\boldsymbol{b}}\boldsymbol{a}$

- 矢量与矢径的关系

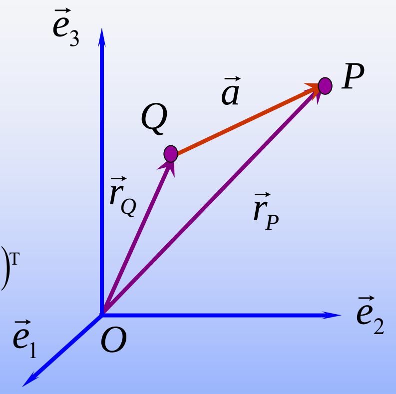
$\vec{a} = \overrightarrow{QP}$　　$\vec{a} = \vec{r}_P - \vec{r}_Q$

任意矢量等于矢端矢径减去矢尾矢径

矢量坐标阵与矢端矢尾坐标的关系

$\boldsymbol{r}_P = (r_{P1} \quad r_{P2} \quad r_{P3})^{\mathrm{T}}$　　$\boldsymbol{r}_Q = (r_{Q1} \quad r_{Q2} \quad r_{Q3})^{\mathrm{T}}$

$$\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r_{P1} \\ r_{P2} \\ r_{P3} \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} r_{Q1} \\ r_{Q2} \\ r_{Q3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r_{P1} - r_{Q1} \\ r_{P2} - r_{Q2} \\ r_{P3} - r_{Q3} \end{pmatrix}$$



$$\boldsymbol{a} = \boldsymbol{r}_P - \boldsymbol{r}_Q$$

$$\underline{a} = \underline{r}_P - \underline{r}_Q$$

矢量坐标阵等于与矢端坐标阵减矢尾坐标阵

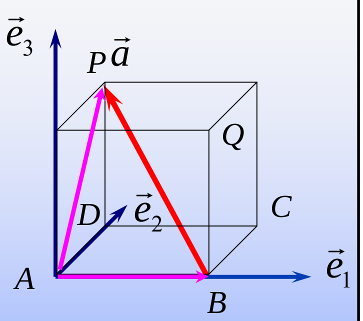
[例] 一长方体，

AB=1，**BC**=1.2, BQ=0.8

对于图中给定的基 $\vec{\boldsymbol{e}}$，

写出矢量 $\vec{a}$ 在该基上的

坐标阵与坐标方阵



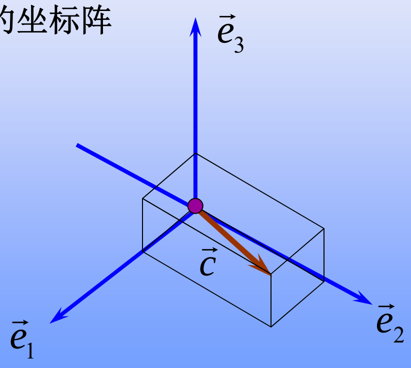
通过B、P两点的矢径坐标来计算　$\overrightarrow{BP} = \overrightarrow{AP} - \overrightarrow{AB}$

$$\underline{a} = \underline{r}_P - \underline{r}_B = \begin{pmatrix} 0 \\ 1.2 \\ 0.8 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1.2 \\ 0.8 \end{pmatrix}$$

[例]已知矢量 $\vec{a}$ 与 $\vec{b}$ 在某基下的坐标阵分别为

$$\boldsymbol{a} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \end{pmatrix}^{\mathrm{T}} \qquad \boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}^{\mathrm{T}}$$

求矢量 $\vec{c} = \vec{a} + \vec{b}$ 在该基下的坐标阵



矢量/代数描述/矢量运算与坐标阵运算的关系

[解]解析法

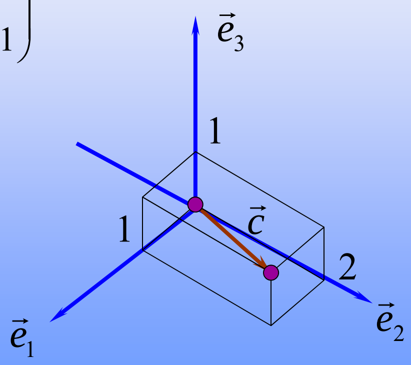
$$\boldsymbol{a} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \end{pmatrix}^{\mathrm{T}} \quad \boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}^{\mathrm{T}}$$

$$\vec{c} = \vec{a} + \vec{b}$$

对应的坐标运算式

$$\boldsymbol{c} = \boldsymbol{a} + \boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

根据坐标阵直接得到矢径 $\vec{c}$



[解]解析法

$$\boldsymbol{a}=\begin{pmatrix}1 & 2 & 0\end{pmatrix}^{\mathrm{T}} \quad \boldsymbol{b}=\begin{pmatrix}0 & 0 & 1\end{pmatrix}^{\mathrm{T}}$$

$$\vec{c}=\vec{a}+\vec{b}$$

对应的坐标运算式

$$\boldsymbol{c}=\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}=\begin{pmatrix}1\\2\\0\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix}$$

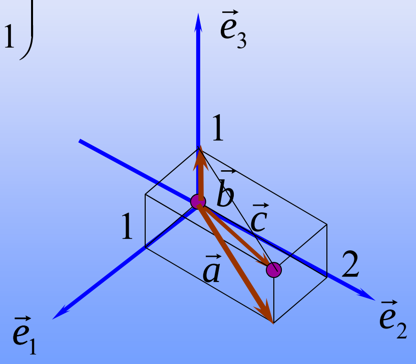
根据坐标阵直接得到矢径 $\vec{c}$

几何法

$\boldsymbol{a}=\begin{pmatrix}1 & 2 & 0\end{pmatrix}^{\mathrm{T}}$ ⇒ $\vec{a}$

$\boldsymbol{b}=\begin{pmatrix}0 & 0 & 1\end{pmatrix}^{\mathrm{T}}$ ⇒ $\vec{b}$

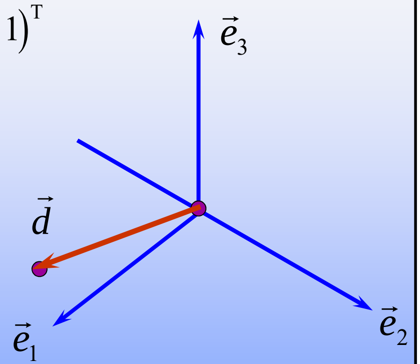
根据平行四边形法则 ⇒ $\vec{c}$



⇒ $\boldsymbol{c}=\begin{pmatrix}1 & 2 & 1\end{pmatrix}^{\mathrm{T}}$

[例]已知矢量 $\vec{a}$ 与 $\vec{b}$ 在某基下的坐标阵分别为

$$\boldsymbol{a}=\begin{pmatrix}1 & 2 & 0\end{pmatrix}^{\mathrm{T}} \qquad \boldsymbol{b}=\begin{pmatrix}0 & 0 & 1\end{pmatrix}^{\mathrm{T}}$$



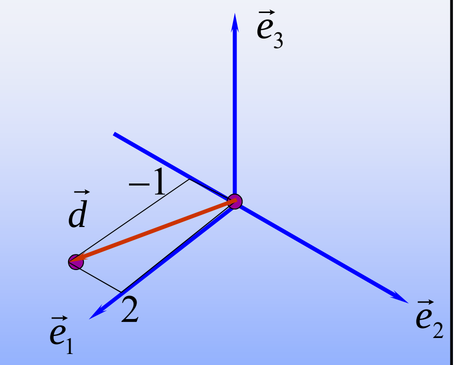
求矢量 $\vec{d}=\vec{a}\times\vec{b}$ 在该基下的坐标阵

[解]解析法 $\vec{d}=\vec{a}\times\vec{b}$ $\boldsymbol{a}=(1\ 2\ 0)^{\mathrm{T}}$ $\boldsymbol{b}=(0\ 0\ 1)^{\mathrm{T}}$

对应的坐标运算式

$$\boldsymbol{d}=\tilde{\boldsymbol{a}}\boldsymbol{b}=\begin{pmatrix}0&0&2\\0&0&-1\\-2&1&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2\\-1\\0\end{pmatrix}$$

根据坐标阵直接得到矢径 $\vec{d}$



矢量/矢量的坐标阵/矢量的运算与坐标阵运算的关系

[解]解析法 $\vec{d}=\vec{a}\times\vec{b}$ $\boldsymbol{a}=(1\ 2\ 0)^{\mathrm{T}}$ $\boldsymbol{b}=(0\ 0\ 1)^{\mathrm{T}}$

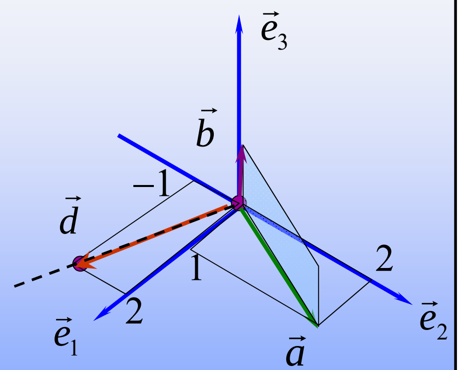
对应的坐标运算式

$$\boldsymbol{d}=\tilde{\boldsymbol{a}}\boldsymbol{b}=\begin{pmatrix}0&0&2\\0&0&-1\\-2&1&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2\\-1\\0\end{pmatrix}$$

根据坐标阵直接得到矢径 $\vec{d}$

几何法 $\boldsymbol{a}=(1\ 2\ 0)^{\mathrm{T}} \Rightarrow \vec{a}$

$\boldsymbol{b}=(0\ 0\ 1)^{\mathrm{T}} \Rightarrow \vec{b}$



$\vec{d}=\vec{a}\times\vec{b}$

垂直于 $\vec{a},\vec{b}$ 平面，即平行于 $\vec{e}_1,\vec{e}_2$ 平面，垂直于 $\vec{a}$, $\vec{b}$

模为 $\vec{a},\vec{b}$ 构成的平行四边形的面积 $ab=\left(\sqrt{2^2+1^2}\right)\cdot 1=\sqrt{5}$

得到矢径 $\vec{d} \Rightarrow \boldsymbol{d}=(2\quad -1\quad 0)^{\mathrm{T}}$

比较两种方法的繁易

矢量

- 矢量、矢量基与基矢量
- 矢量的代数描述
- 平面矢量

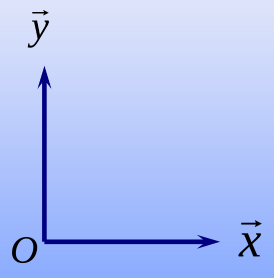
平面矢量

- 问题的提出
  - 当所有的矢量的变化与运算均发生在同一平面内
  - 或这些矢量仅可能与垂直于该平面的矢量发生运算
  - 这些矢量的代数描述可在一个二维空间中进行
  - 这类矢量称为平面矢量

- 平面矢量基

基矢量 $\vec{x}$ 与 $\vec{y}$ 构成一平面矢量基 $\vec{\boldsymbol{e}}$

$$\vec{\boldsymbol{e}}=(\vec{x}\quad \vec{y})^{\mathrm{T}}$$



垂直于该平面的单位矢量记为 $\vec{z}$ 且

$$\vec{z}=\vec{x}\times\vec{y}$$

单位矢量 $\vec{z}$ 称为法矢量

平面矢量/定义与运算

- 平面矢量的代数描述

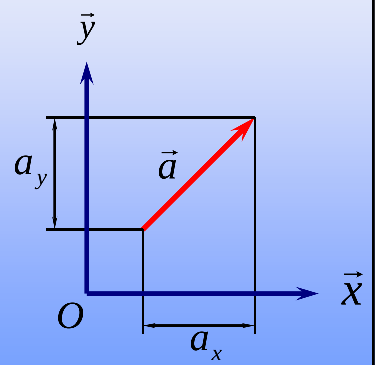
矢量 $\vec{a}$ 在平面矢量基 $\vec{\boldsymbol{e}}=(\vec{x}\quad \vec{y})^{\mathrm{T}}$ 下的坐标阵为二阶列阵

$$\boldsymbol{a}=(a_x\quad a_y)^{\mathrm{T}}$$ 无坐标方阵

矢量 $\vec{a}$ 的代数表达

$$\vec{a}=a_x\vec{x}+a_y\vec{y}$$

$$\vec{a}=\boldsymbol{a}^{\mathrm{T}}\vec{\boldsymbol{e}}=\vec{\boldsymbol{e}}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{a}$$



平面矢量的代数描述是一般矢量代数描述的特殊情况：

$\vec{z}$ 向的坐标恒为零

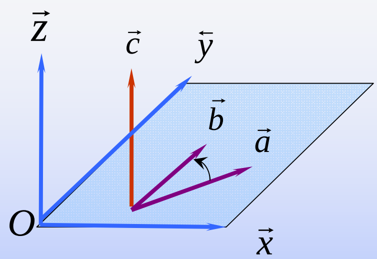
- 平面矢量运算与坐标阵运算的关系
  - 同一个基下两种运算的关系

矢量运算式	坐标阵运算式（二阶）
$\vec{a} = \vec{b}$	$\boldsymbol{a} = \boldsymbol{b}$
$\vec{c} = \vec{a} + \vec{b}$	$\boldsymbol{c} = \boldsymbol{a} + \boldsymbol{b}$
$\vec{c} = \alpha\vec{a}$	$\boldsymbol{c} = \alpha\boldsymbol{a}$
$\alpha = \vec{a}\cdot\vec{b} = \vec{b}\cdot\vec{a}$	$\alpha = \boldsymbol{a}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{b} = \boldsymbol{b}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{a}$

- 平面矢量的叉积

定义叉积矢量的正向与法矢量一致

$$\vec{c} = \vec{a} \times \vec{b} = c\vec{z}$$



按三维空间处理

$\boldsymbol{a} = (a_x \quad a_y \quad 0)^{\mathrm{T}}$ $\quad \boldsymbol{b} = (b_x \quad b_y \quad 0)^{\mathrm{T}}$

$$\boldsymbol{c} = \tilde{\boldsymbol{a}}\boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & a_y \\ 0 & 0 & -a_x \\ -a_y & a_x & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} b_x \\ b_y \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ a_x b_y - a_y b_x \end{pmatrix}$$

矢量 $\vec{c} = \vec{a} \times \vec{b}$ 的模 $\quad c = a_x b_y - a_y b_x$

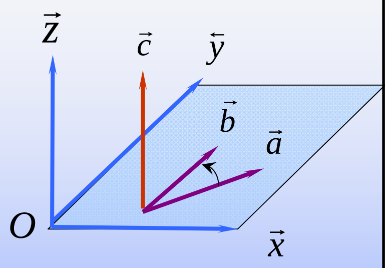
$$\vec{c} = (a_x b_y - a_y b_x)\vec{z}$$

按二维空间处理

$$\boldsymbol{a}=\begin{pmatrix}a_x & a_y\end{pmatrix}^{\mathrm{T}} \qquad \boldsymbol{b}=\begin{pmatrix}b_x & b_y\end{pmatrix}^{\mathrm{T}}$$

三维对照 $\boldsymbol{c}=\tilde{\boldsymbol{a}}\boldsymbol{b}$ 无坐标方阵

引入反对称阵 $\tilde{\boldsymbol{I}}\overset{\mathrm{def}}{=}\begin{pmatrix}0 & -1\\ 1 & 0\end{pmatrix}$



$$c=(\tilde{\boldsymbol{I}}\boldsymbol{a})^{\mathrm{T}}\boldsymbol{b}=\left[\begin{pmatrix}0 & -1\\ 1 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a_x\\ a_y\end{pmatrix}\right]^{\mathrm{T}}\begin{pmatrix}b_x\\ b_y\end{pmatrix}=a_xb_y-a_yb_x$$

$$\vec{c}=(a_xb_y-a_yb_x)\vec{z} \qquad \vec{c}=\vec{a}\times\vec{b}=(\tilde{\boldsymbol{I}}\boldsymbol{a})^{\mathrm{T}}\boldsymbol{b}\vec{z}$$

小结

- 几何矢量的定义与运算
- 基与基矢量
- 几何矢量的代数表达
  - 坐标阵，坐标方阵
- 几何矢量与代数矢量的对应关系
- 几何矢量的运算与坐标阵运算的关系
- 平面矢量的特点

- 公式

$$\vec{a} = \vec{\boldsymbol{e}}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{a} = \boldsymbol{a}^{\mathrm{T}}\vec{\boldsymbol{e}} \qquad \boldsymbol{a} = \vec{a}\cdot\vec{\boldsymbol{e}} = \vec{\boldsymbol{e}}\cdot\vec{a}$$

$$\alpha = \vec{a}\cdot\vec{b} = \vec{b}\cdot\vec{a} \qquad \alpha = \boldsymbol{a}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{b} = \boldsymbol{b}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{a}$$

$$\vec{c} = \vec{a}\times\vec{b} = -\vec{b}\times\vec{a} \qquad \boldsymbol{c} = \tilde{\boldsymbol{a}}\boldsymbol{b} = -\tilde{\boldsymbol{b}}\boldsymbol{a}$$

$$\vec{a}\times\left(\vec{b}\times\vec{c}\right) = \vec{b}\left(\vec{a}\cdot\vec{c}\right) - \left(\vec{b}\cdot\vec{a}\right)\vec{c}$$

$$\vec{a}\cdot\left(\vec{b}\times\vec{c}\right) = \vec{c}\cdot\left(\vec{a}\times\vec{b}\right) = \vec{b}\cdot\left(\vec{c}\times\vec{a}\right)$$