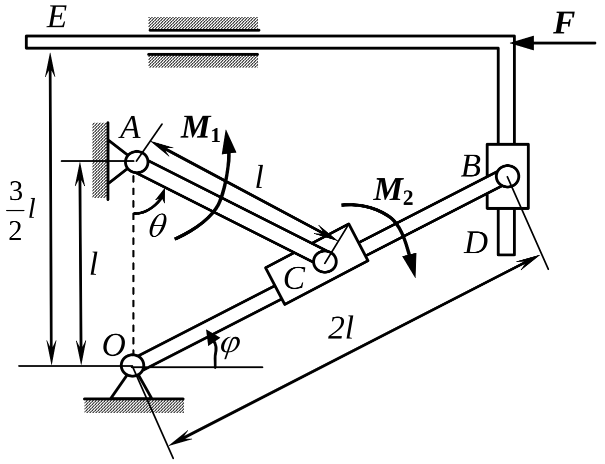
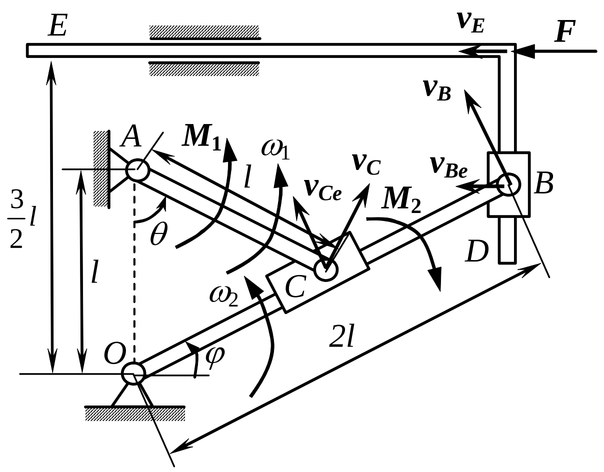
2007 理论力学期末考试答案（A 卷）



1. 平面运动机构如图所示。杆 AC 长 l，杆 OB 长 $2l$。各物体的重量和摩擦力均不计。力偶 M_1 和 M_2 分别作用于杆 AC 和杆 OB，水平力 F 作用于杆 ED。图示位置 $\theta=60^\circ$，用虚位移原理求（1）图示位置平衡时 M_1，M_2 和 F 的关系。（20 分）

求（2）A 点的 Y 方向的约束力



解:

(1) 由虚位移原理

$$M_1\delta\theta - M_2\delta\varphi dt - F\delta x_E = 0$$

根据关系式

$$v_{Ce} = \frac{1}{2}v_C = \frac{1}{2}\omega_1 l,\quad \omega_2 = \frac{1}{2}\omega_1 l/l = \frac{1}{2}\omega_1,\quad v_B = 2l\omega_2 = l\omega_1$$

$$v_E = v_{Be} = \frac{1}{2}v_B = \frac{1}{2}l\omega_1$$

于是得到

$$\omega_2 dt = \frac{1}{2}\omega_1 dt,\quad v_E dt = \frac{1}{2}l\omega_1 dt$$

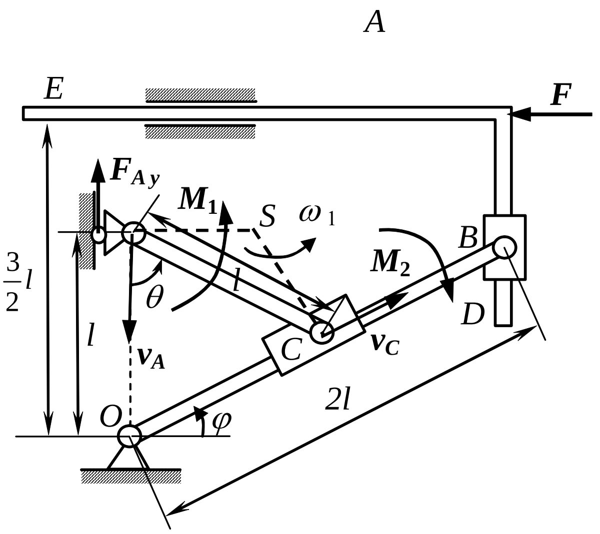
即 $d\varphi = \frac{1}{2}d\theta$， $dx_E = -v_E dt = -\frac{1}{2}l\omega_1 dt$

由于是定常约束，$\delta\varphi = d\varphi$， $\delta\theta = d\theta$， $\delta x_E = dx_E$

$\delta\varphi=\frac{1}{2}\delta\theta$， $\delta x_E=-\frac{1}{2}l\delta\theta$

代入得到

$M_1\delta\theta-M_2\frac{1}{2}\delta\theta+F\frac{1}{2}l\delta\theta=0$ 即 $2M_1-M_2+Fl=0$



(2) 释放 A 铰点的 Y 方向的约束，即 A 点可以上下滑动，附加 F_{Ay}。此时为两个自由度问题，设广义坐标为 θ,φ，令 $\delta\varphi=0$，则 $\delta x_E=\delta x_B=0$。

S 为速度瞬心，图示位置 $v_A=\omega_1\overline{AS}=\frac{l}{\sqrt{3}}\omega_1$

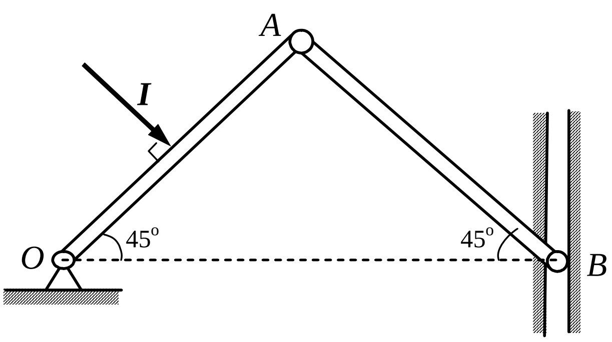
由 $v_A dt=\frac{l}{\sqrt{3}}\omega_1 dt$，得到 $-dy_A=\frac{l}{\sqrt{3}}d\theta$，对于定常约束，$-\delta y_A=\frac{l}{\sqrt{3}}\delta\theta$

主动力的虚功为

$$\delta W=F_{Ay}\delta y_A+M_1\delta\theta=\left(-\frac{F_{Ay}l}{\sqrt{3}}+M_1\right)\delta\theta$$

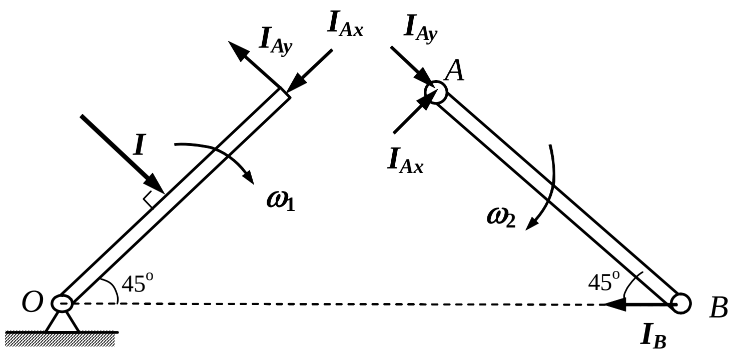
对应于 θ 的广义力为 $Q_\theta=-\frac{F_{Ay}l}{\sqrt{3}}+M_1=0$

$$F_{Ay}=\frac{\sqrt{3}M_1}{l}$$



2. 长为 l 的均质杆 OA 和长为 l 的均质杆 AB 用铰链连接，如图所示。杆 AB 在 B 端的销子可以在铅垂滑槽内无摩擦滑动。杆 OA 和 AB 的质量均为 m。初始系统静止。求在杆 AO 的中点处作用垂直冲量 I 后，杆 OA 和 AB 的角速度。（20 分）

解:



运动学关系：$\omega_2 = \omega_1 = \omega$

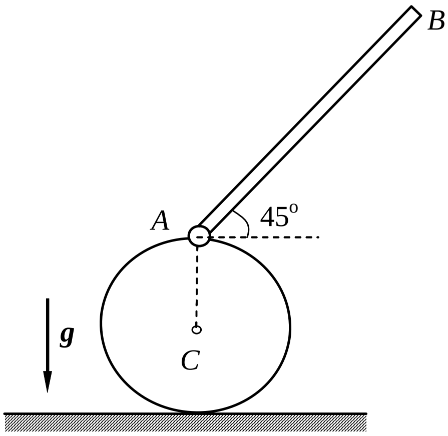
动力学方程:

OA: $\quad \dfrac{1}{3}ml^2\omega = \dfrac{l}{2}I - l\,I_{Ay}$

AB: $\quad \dfrac{1}{12}ml^2\omega = \dfrac{l}{2}(I_{Ax} + \dfrac{I_B}{\sqrt{2}})$

$$ml\omega = I_{Ay} - I_B/\sqrt{2}, \quad ml\omega/2 = -I_{Ax} + I_B/\sqrt{2}$$

解得: $\quad \dfrac{5}{3}ml^2\omega = \dfrac{l}{2}I$ ， $\quad \omega = \dfrac{3I}{10ml}$

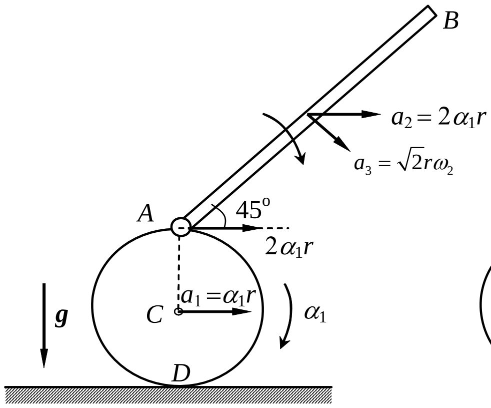


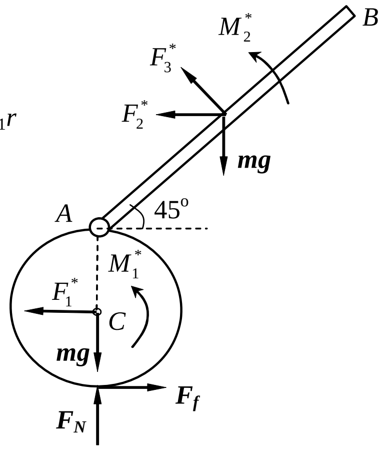
3. 如图所示，长为 l 的杆 AB 和半径为 r 的圆盘 C 通过铰链 A 连接，杆 AB 和圆盘 C 的质量均为 m，$l = 2\sqrt{2}\,r$。地面粗糙。图示位置杆 AB 与水平线夹角为 45°，用达朗贝尔原理求系统在图示位置无初速地开始运动时杆 AB 的角加速度和圆盘轮心 C 的加速度。（20 分）

解：惯性力简化：

$$M_1^* = \frac{1}{2}mr^2\alpha_1\text{，}\ M_2^* = \frac{1}{12}m\left(2\sqrt{2}\,r\right)^2\alpha_2 = \frac{2}{3}mr^2\alpha_2$$

$$F_1^* = m\alpha_1 r\text{，}\ F_2^* = 2m\alpha_1 r\text{，}\quad F_3^* = m\,\alpha_2\sqrt{2}\,r$$

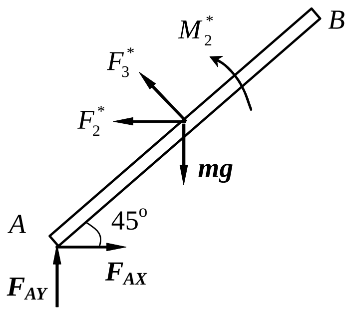




取系统为研究对象，对 D 取矩：

$$mr^2\alpha_1 + \frac{1}{2}mr^2\alpha_1 + 2mr\alpha_1\cdot 3r + m\sqrt{2}r\alpha_2\cdot 2\sqrt{2}r + \frac{2}{3}mr^2\alpha_2 - mgr = 0$$

即 $$\frac{15}{2}mr^2\alpha_1 + \frac{14}{3}mr^2\alpha_2 - mgr = 0$$

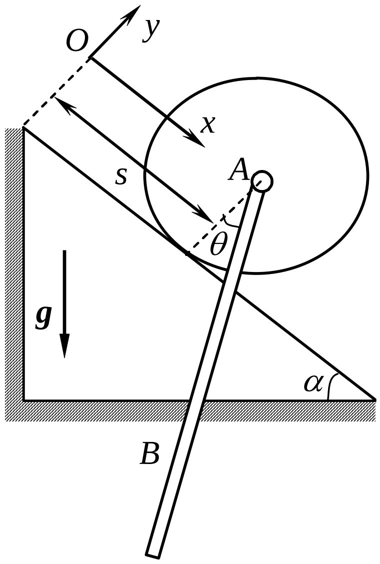


取 AB 为研究对象，对 A 取矩：

$$2mr\alpha_1\cdot r + m\sqrt{2}r\alpha_2\cdot\sqrt{2}r + \frac{2}{3}mr^2\alpha_2 - mgr = 0$$

即 $$2mr^2\alpha_1 + \frac{8}{3}mr^2\alpha_2 - mgr = 0$$

解得： $$\alpha_1 = -\frac{3g}{16r}\text{，}\ \alpha_2 = \frac{33g}{64r}$$



4. 如图所示，斜面固定于地面，斜面的倾角为α。半径为 r, 质量为 m 的圆盘可在粗糙的斜面上纯滚动，长为 $4r$，质量为 m 的杆 AB 与圆盘在 A 点铰接。以 s 和θ为广义坐标，(1) 写出系统的动能和势能（以 O 为零势能点）。(2) 写出系统的初积分。（20 分）

解：动能：

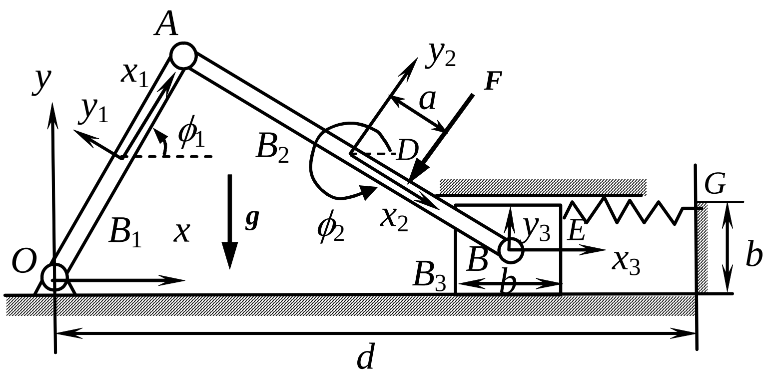
$$T=\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{2}\cdot mr^2\left(\frac{\dot{s}}{r}\right)^2+\frac{1}{2}m\left[\dot{s}^2+4r^2\dot{\theta}^2+4r\dot{s}\dot{\theta}\cos\theta\right]+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{12}\cdot m\left(4r\right)^2\dot{\theta}^2$$
$$=\frac{5}{4}m\dot{s}^2+\frac{8}{3}mr^2\dot{\theta}^2+2mr\dot{s}\dot{\theta}\cos\theta$$

势能

$$V=-mgs\sin\alpha-mg\left(s\sin\alpha+\frac{l}{2}\cos\left(\alpha-\theta\right)\right)=-2mgs\sin\alpha-2mgr\cos\left(\alpha-\theta\right)$$

初积分：　$T_2+V=C$，即

$$\frac{5}{4}m\dot{s}^2+\frac{8}{3}mr^2\dot{\theta}^2+2mr\dot{s}\dot{\theta}\cos\theta-2mgs\sin\alpha-2mgr\cos\left(\alpha-\theta\right)=C$$



5. 曲柄-连杆-滑块机构如图所示。xyz 为绝对基, 设曲柄 OA 为 B_1，连杆 AB 为 B_2，滑块 B 为 B_3，以各物体的质心为原点，建立连体基 $x_iy_iz_i$，$i = 1, 2, 3$。曲柄、连杆和滑块的质量均为 m，曲柄 OA 长 l，连杆 AB 长 $1.5l$，滑块为边长 b 的均质正方体。曲柄 OA 和连杆 AB 通过铰链 A 连接，连杆 AB 和滑块 B 通过铰链 B 连接，不计摩擦。力 F 作用于连杆的 D 点，其作用线垂直于 AB，D 点与连杆质心的距离为 a。此外，刚度为 k、原长为 l_0 的线弹簧连接滑块的边界点 E 和墙上的 G 点，E 点在滑块连体基 $x_3y_3z_3$ 上的坐标为$(b/2, b/2, 0)$，G 点在绝对基 xyz 上的坐标为$(d, b/2, 0)$。B_1，B_2 和 B_3 的位形坐标分别为 $\boldsymbol{q}_1 = \begin{bmatrix} x_1 & y_1 & \phi_1 \end{bmatrix}^T$，$\boldsymbol{q}_2 = \begin{bmatrix} x_2 & y_2 & \phi_2 \end{bmatrix}^T$ 和 $\boldsymbol{q}_3 = \begin{bmatrix} x_3 & y_3 & \phi_3 \end{bmatrix}^T$。

(1) 以 $\boldsymbol{q} = \begin{bmatrix} x_1 & y_1 & \phi_1 & x_2 & y_2 & \phi_2 & x_3 & y_3 & \phi_3 \end{bmatrix}^T$ 为系统的广义坐标，写出系统的运动学约束方程，雅可比矩阵和加速度约束方程的右项。

(2) 写出系统的增广质量阵和增广主动力阵。

(3) 写出系统封闭的第一类拉格朗日方程。（20 分）

解：$\boldsymbol{\Phi} = \begin{bmatrix} x_1 - 0.5l\cos\phi_1 \\ y_1 - 0.5l\sin\phi_1 \\ x_2 - x_1 - 0.5l\cos\phi_1 - 0.75l\cos\phi_2 \\ y_2 - y_1 - 0.5l\sin\phi_1 - 0.75l\sin\phi_2 \\ x_3 - x_2 - 0.75l\cos\phi_2 \\ y_3 - y_2 - 0.75l\sin\phi_2 \\ y_3 \\ \phi_3 \end{bmatrix}$，$\boldsymbol{\gamma} = \begin{bmatrix} -0.5l\dot{\phi}_1^2\cos\phi_1 \\ -0.5l\dot{\phi}_1^2\sin\phi_1 \\ -0.5l\dot{\phi}_1^2\cos\phi_1 - 0.75l\dot{\phi}_2^2\cos\phi_2 \\ -0.5l\dot{\phi}_1^2\sin\phi_1 - 0.75l\dot{\phi}_2^2\sin\phi_2 \\ -0.75l\dot{\phi}_2^2\cos\phi_2 \\ -0.75l\dot{\phi}_2^2\sin\phi_2 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$

$$
\boldsymbol{\Phi}_q=\begin{bmatrix}
1 & 0 & 0.5l\sin\phi_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\
0 & 1 & -0.5l\cos\phi_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\
-1 & 0 & 0.5l\sin\phi_1 & 1 & 0 & 0.75l\sin\phi_2 & 0 & 0 & 0\\
0 & -1 & -0.5l\cos\phi_1 & 0 & 1 & -0.75l\cos\phi_2 & 0 & 0 & 0\\
0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0.75l\sin\phi_2 & 1 & 0 & 0\\
0 & 0 & 0 & 0 & -1 & -0.75l\cos\phi_2 & 0 & 1 & 0\\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0\\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1
\end{bmatrix}
$$

增广质量阵

$$
\boldsymbol{Z}=diag(m,m,ml^2/12,m,m,3ml^2/16,m,m,mb^2/6)
$$

增广主动力阵

$$
\boldsymbol{F}^a=\begin{bmatrix}
0\\
-mg\\
0\\
F\sin\phi_2\\
-F\cos\phi_2-mg\\
-Fa\\
k\left(d-x_3-0.5b-l_0\right)\\
0\\
-0.5bk\left(d-x_3-0.5b-l_0\right)
\end{bmatrix}
$$

封闭方程: $\begin{bmatrix}\boldsymbol{Z} & \boldsymbol{\Phi}_q^{\mathrm{T}}\\ \boldsymbol{\Phi}_q & \boldsymbol{0}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\ddot{\boldsymbol{q}}\\ \boldsymbol{\lambda}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\boldsymbol{F}^a\\ \boldsymbol{\gamma}\end{bmatrix}$

$$
\boldsymbol{\lambda}=\begin{bmatrix}\lambda_1 & \lambda_2 & \lambda_3 & \lambda_4 & \lambda_5 & \lambda_6 & \lambda_7 & \lambda_8\end{bmatrix}^{\mathrm{T}}
$$