理论力学 CAI

分析力学基础

- 前言
- 达朗贝尔原理
- 虚位移原理
- 动力学普遍方程
- 拉格朗日第一类方程
- 拉格朗日第二类方程

虚位移原理

要点

- 虚位移的定义：坐标（位置矢量）的等时变分
- 虚功（率）原理求平衡问题主动力之间的关系

虚位移原理

- 前言
- 虚位移
- 虚位移原理及其应用
- 广义力 质点系平衡条件

虚位移原理

- 前言
- 虚位移
- 虚位移原理及其应用
- 广义力 质点系平衡条件

前言

- 虚位移原理是分析静力学的一个基本原理
- 从力的功出发直接建立起系统处于平衡时主动力间的关系
  - 矢量力学：主动力与约束力间的关系
- 虚位移原理与达朗贝尔原理一起构成了分析动力学的基础

虚位移原理

- 前言
- **虚位移**
- 虚位移原理及其应用
- 广义力 质点系平衡条件

虚位移

- 质点系运动学关系的描述
- 实位移与虚位移
- 独立（广义）坐标虚位移

质点系运动学关系的描述

- 笛卡儿坐标

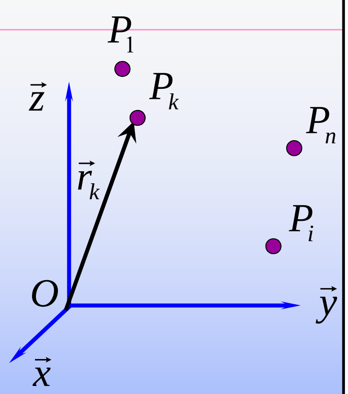
质点系 $(P_1, P_2, \cdots, P_n)$

惯性基 $O - \vec{e}$

质点$\boldsymbol{P_k}$ $(k = 1, 2, \cdots, n)$ 的矢径

$\vec{r}_k$ $\quad \boldsymbol{r}_k = \begin{pmatrix} x_k & y_k & z_k \end{pmatrix}^{\mathrm{T}}$

质点$\boldsymbol{P_k}$笛卡儿坐标

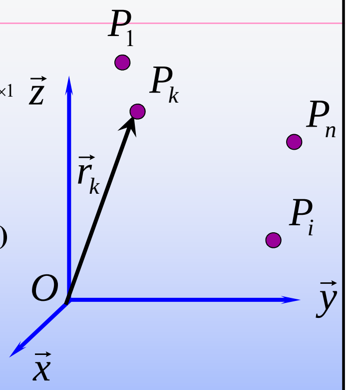


质点系笛卡儿坐标阵 $\boldsymbol{q} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{r}_1^{\mathrm{T}} & \boldsymbol{r}_2^{\mathrm{T}} & \cdots & \boldsymbol{r}_n^{\mathrm{T}} \end{pmatrix}^{\mathrm{T}} \in \Re^{3n\times1}$

质点系的运动 　　运动 $\boldsymbol{q}(t)$

质点系 $(P_1, P_2, \cdots, P_n)$ 质点系笛卡儿坐标阵

惯性基 $O-\vec{e}$ $\quad \boldsymbol{q} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{r}_1^{\mathrm{T}} & \boldsymbol{r}_2^{\mathrm{T}} & \cdots & \boldsymbol{r}_n^{\mathrm{T}} \end{pmatrix}^{\mathrm{T}} \in \Re^{3n\times 1}$



- 自由质点系

处理动力学问题一般方法　外力 → 动力学方程 → 运动 $\boldsymbol{q}(t)$

- 非自由质点系

$\boldsymbol{q} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{r}_1^{\mathrm{T}} & \boldsymbol{r}_2^{\mathrm{T}} & \cdots & \boldsymbol{r}_n^{\mathrm{T}} \end{pmatrix}^{\mathrm{T}}$ 不独立

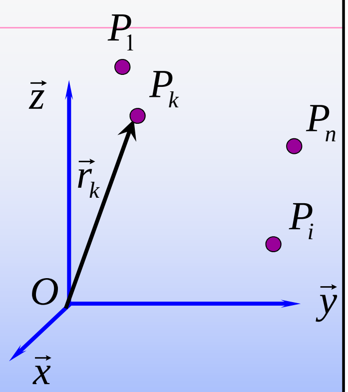
约束方程 $\boldsymbol{\Phi}(\boldsymbol{q}, t) = \boldsymbol{0} \quad \in \Re^{s\times 1}$ $\qquad \boldsymbol{\Phi} = \begin{pmatrix} \Phi_1 & \Phi_2 & \cdots & \Phi_s \end{pmatrix}^{\mathrm{T}}$

处理动力学问题一般方法　外力 → 动力学方程 约束方程 → 运动 $\boldsymbol{q}(t)$

- 非自由质点系的独立坐标

质点系 $(P_1, P_2, \cdots, P_n)$

质点系笛卡儿坐标阵



$\boldsymbol{q} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{r}_1^{\mathrm{T}} & \boldsymbol{r}_2^{\mathrm{T}} & \cdots & \boldsymbol{r}_n^{\mathrm{T}} \end{pmatrix}^{\mathrm{T}}$ 不独立

约束方程 $\boldsymbol{\Phi}(\boldsymbol{q}, t) = \boldsymbol{0} \quad \in \Re^{s\times 1}$

自由度 $\delta = 3n - s$ $\qquad \boldsymbol{q} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{u}^{\mathrm{T}} & \boldsymbol{w}^{\mathrm{T}} \end{pmatrix}^{\mathrm{T}}$

$\boldsymbol{w} \in \Re^{\delta\times 1}$ 独立坐标 广义坐标

$\boldsymbol{u} \in \Re^{s\times 1}$ 非独立坐标 $\qquad \boldsymbol{\Phi} = \begin{pmatrix} \Phi_1 & \Phi_2 & \cdots & \Phi_s \end{pmatrix}^{\mathrm{T}}$

处理动力学问题独立坐标方法

外力 → 动力学方程 → 运动 $\boldsymbol{w}(t)$ 约束方程 → 运动 $\boldsymbol{u}(t)$

- 非自由质点系约束方程的另一形式

质点系 $(P_1, P_2, \cdots, P_n)$

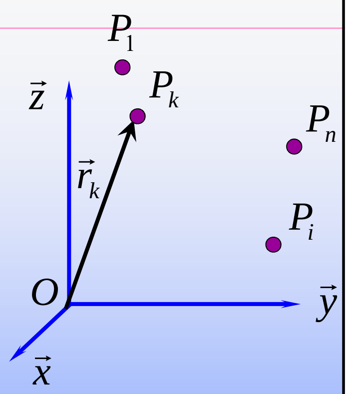
质点系笛卡儿坐标阵

$$\boldsymbol{q} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{r}_1^{\mathrm{T}} & \boldsymbol{r}_2^{\mathrm{T}} & \cdots & \boldsymbol{r}_n^{\mathrm{T}} \end{pmatrix}^{\mathrm{T}}$$ 不独立

自由度 $\delta = 3n - s$

另外定义独立（广义）坐标 $\boldsymbol{w} \in \Re^{\delta \times 1}$

约束方程 $\boldsymbol{q} = \boldsymbol{q}(\boldsymbol{w}, t) \in \Re^{3n \times 1}$

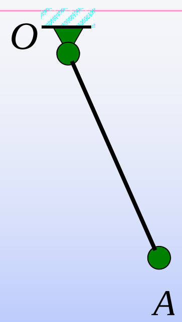


处理动力学问题独立坐标方法

外力 → 动力学方程 → 运动 $\boldsymbol{w}(t)$ → 约束方程 → 运动 $\boldsymbol{q}(t)$

[例]

质量为m，摆长为l的单摆



试描述摆的运动

[解] 惯性基 $O-\vec{e}$ 笛卡儿坐标 $\boldsymbol{q}=(x\quad y)^{\mathrm{T}}$

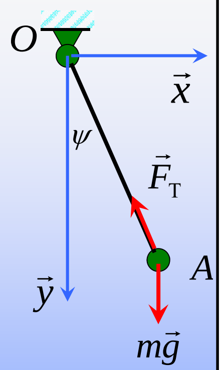
方法1

约束方程 $\Phi = x^2 + y^2 - l^2 = 0$

动力学方程

$m\ddot{x} = -F_{\mathrm{T}}\sin\psi \qquad m\ddot{x} = -F_{\mathrm{T}}\dfrac{x}{l}$

$m\ddot{y} = mg - F_{\mathrm{T}}\cos\psi \qquad m\ddot{y} = mg - F_{\mathrm{T}}\dfrac{y}{l}$



方法2 自由度 $\delta = 1$ 另外定义独立（广义）坐标 ψ

约束方程 $x = l\sin\psi$

$y = l\cos\psi$

动力学方程 $ml^2\ddot{\psi} = -mgl\sin\psi$

$\boldsymbol{\Phi}(\boldsymbol{q},t)=\boldsymbol{0}$

$\boldsymbol{q}=\boldsymbol{q}(\boldsymbol{w},t)$

实位移与虚位移

- 真实运动 外力 → 动力学方程 约束方程 → 真实运动 $\boldsymbol{q}(t)$

唯一性（初始条件）

实位移 $\mathrm{d}\boldsymbol{q} = (\mathrm{d}\boldsymbol{r}_1^{\mathrm{T}} \quad \mathrm{d}\boldsymbol{r}_2^{\mathrm{T}} \quad \cdots \quad \mathrm{d}\boldsymbol{r}_n^{\mathrm{T}})^{\mathrm{T}}$

- 可能运动 → 约束方程 → 可能运动 $\boldsymbol{q}^*(t)$

多种可能

可能位移 $\mathrm{d}\boldsymbol{q}^* = (\mathrm{d}\boldsymbol{r}_1^{*\mathrm{T}} \quad \mathrm{d}\boldsymbol{r}_2^{*\mathrm{T}} \quad \cdots \quad \mathrm{d}\boldsymbol{r}_n^{*\mathrm{T}})^{\mathrm{T}}$

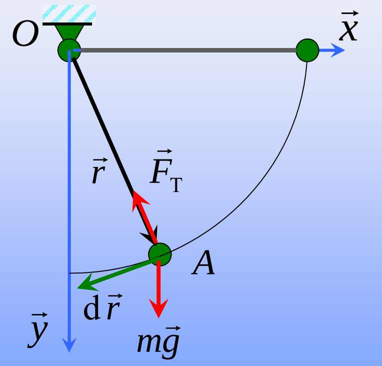
可能位移满足的方程

$$\boldsymbol{\Phi}_q\,\mathrm{d}\boldsymbol{q} + \boldsymbol{\Phi}_t\,\mathrm{d}t = \boldsymbol{0} \qquad \boldsymbol{\Phi}(\boldsymbol{q},t)=\boldsymbol{0}$$

[例] 外力 $m\vec{g}$ $\vec{F}_\mathrm{T}$

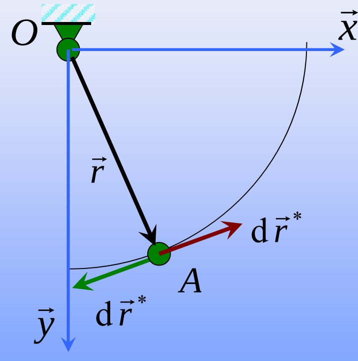
约束

初始条件



实位移 $\mathrm{d}\boldsymbol{r}$

约束



可能位移 $\mathrm{d}\boldsymbol{r}^*$

- 虚位移

可能位移 $\mathrm{d}\boldsymbol{q}^* = (\mathrm{d}\boldsymbol{r}_1^{*\mathrm{T}} \quad \mathrm{d}\boldsymbol{r}_2^{*\mathrm{T}} \quad \cdots \quad \mathrm{d}\boldsymbol{r}_n^{*\mathrm{T}})^\mathrm{T}$ 多种可能

$\mathrm{d}\boldsymbol{q}_1^*$ $\quad \boldsymbol{\Phi}_q \mathrm{d}\boldsymbol{q}_1^* + \boldsymbol{\Phi}_t \mathrm{d}t = \boldsymbol{0}$

$\mathrm{d}\boldsymbol{q}_2^*$ $\quad \boldsymbol{\Phi}_q \mathrm{d}\boldsymbol{q}_2^* + \boldsymbol{\Phi}_t \mathrm{d}t = \boldsymbol{0}$

虚位移 $\delta\boldsymbol{q} = \mathrm{d}\boldsymbol{q}_2^* - \mathrm{d}\boldsymbol{q}_1^*$

虚位移满足的方程

$$\boldsymbol{\Phi}_q \delta\boldsymbol{q} = \boldsymbol{0}$$

微分 $\boldsymbol{\Phi}(\boldsymbol{q}, t) = \boldsymbol{0}$

$\mathrm{d}\boldsymbol{\Phi} = \boldsymbol{\Phi}_q \mathrm{d}\boldsymbol{q} + \boldsymbol{\Phi}_t \mathrm{d}t$

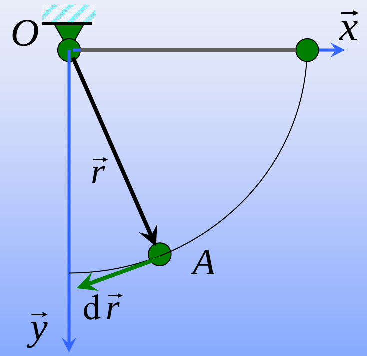
$\delta\boldsymbol{\Phi} = \boldsymbol{\Phi}_q \delta\boldsymbol{q}$

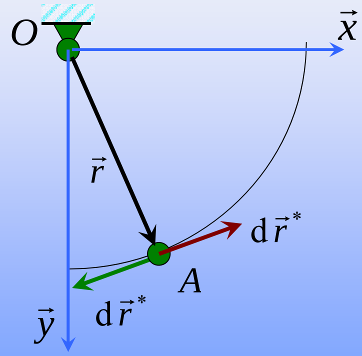
虚位移理解为坐标的等时变分，为一小量

定常约束：虚位移即为可能位移，实位移为虚位移之一

非定常约束：虚位移一般不是可能位移

[例]　定常约束





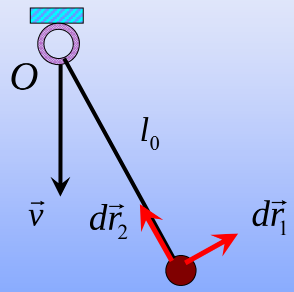
实位移 $d\vec{r}$

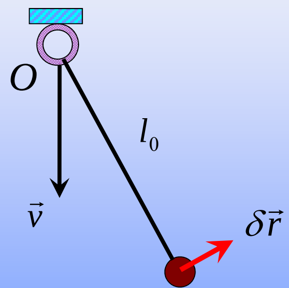
可能位移 $d\vec{r}^*$

||

虚位移 $\delta\vec{r}$

[例]　非定常约束：虚位移一般不是可能位移





可能位移 $d\vec{r}_1 + d\vec{r}_2$

虚位移 $\delta\vec{r}$

t不变

独立坐标虚位移

- 描述1 $\boldsymbol{q}=\left(\boldsymbol{r}_1^{\mathrm{T}} \quad \boldsymbol{r}_2^{\mathrm{T}} \quad \cdots \quad \boldsymbol{r}_n^{\mathrm{T}}\right)^{\mathrm{T}} \in \Re^{3n\times 1}$

约束方程 $\boldsymbol{\Phi}(\boldsymbol{q},t)=\boldsymbol{0} \quad \in \Re^{s\times 1}$

自由度 $\delta=3n-s \quad \boldsymbol{q}=\left(\boldsymbol{u}^{\mathrm{T}} \quad \boldsymbol{w}^{\mathrm{T}}\right)^{\mathrm{T}}$

$\boldsymbol{w}\in\Re^{\delta\times 1}$ 独立（广义）坐标 $\boldsymbol{u}\in\Re^{s\times 1}$ 非独立坐标

约束方程微分 $\boldsymbol{\Phi}_q\,\mathrm{d}\boldsymbol{q}+\boldsymbol{\Phi}_t\,\mathrm{d}t=\boldsymbol{0}$

等时变分 $\boldsymbol{\Phi}_q\,\delta\boldsymbol{q}=\boldsymbol{0} \quad \begin{pmatrix}\boldsymbol{\Phi}_u & \boldsymbol{\Phi}_w\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\delta\boldsymbol{u}\\ \delta\boldsymbol{w}\end{pmatrix}=\boldsymbol{0}$

非独立坐标与独立坐标虚位移间关系 $\delta\boldsymbol{u}=-\boldsymbol{\Phi}_u^{-1}\boldsymbol{\Phi}_w\,\delta\boldsymbol{w}$

- 描述2

另外定义独立（广义）坐标 $\boldsymbol{w}\in\Re^{\delta\times 1}$

约束方程 $\boldsymbol{q}=\boldsymbol{q}(\boldsymbol{w},t) \quad \in\Re^{3n\times 1}$

约束方程微分

$$\mathrm{d}\boldsymbol{q}=\boldsymbol{q}_w\,\mathrm{d}\boldsymbol{w}+\boldsymbol{q}_t\,\mathrm{d}t \qquad \boldsymbol{q}_w\in\Re^{3n\times s}$$

等时变分

笛卡尔坐标与独立坐标虚位移间关系 $\delta\boldsymbol{q}=\boldsymbol{q}_w\,\delta\boldsymbol{w}$

- 可能速度、实速度、虚速度

独立的完整约束方程

$$\boldsymbol{\Phi} = \boldsymbol{\Phi}(\boldsymbol{q}, t) = \boldsymbol{0} \qquad \boldsymbol{\Phi} = \begin{pmatrix} \Phi_1 & \cdots & \Phi_s \end{pmatrix}^{\mathrm{T}}$$

约束方程对时间的导数－速度约束方程

$$\dot{\boldsymbol{\Phi}} \overset{\mathrm{def}}{=} \boldsymbol{\Phi}_q \dot{\boldsymbol{q}} + \boldsymbol{\Phi}_t = \boldsymbol{0} \qquad \boldsymbol{\Phi}_q \dot{\boldsymbol{q}} = -\boldsymbol{\Phi}_t$$

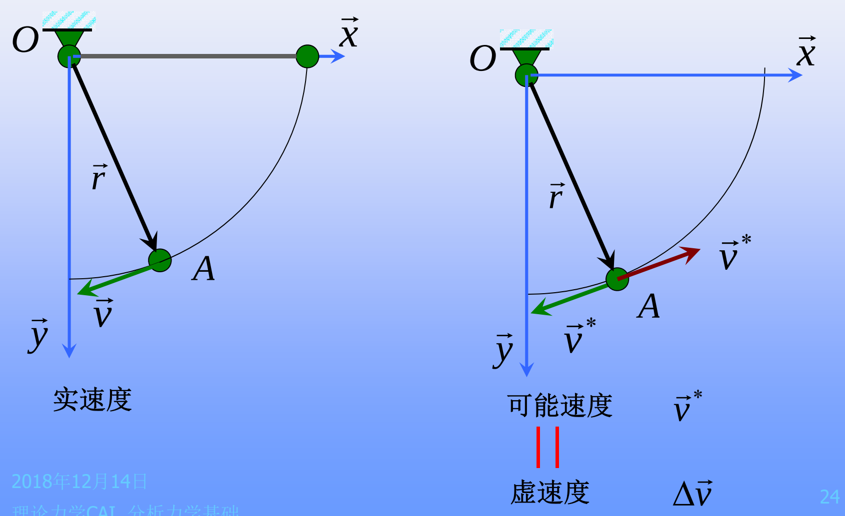
可能速度：满足速度约束方程的速度

实速度：外力作用下质点系实际速度

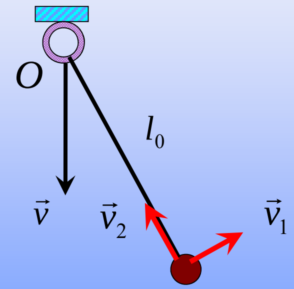
虚速度：虚位移对应的速度，称为速度的变更，不一定是小量

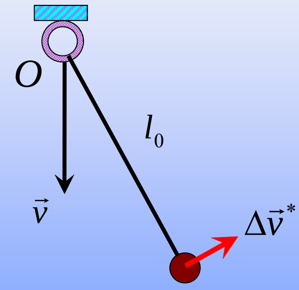
$$\boldsymbol{\Phi}_q \Delta \dot{\boldsymbol{q}} = \boldsymbol{0}$$

[例] 定常约束：虚速度是可能速度



[例]　　非定常约束：虚速度一般不是可能速度



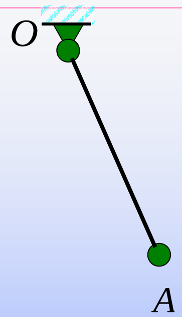


可能速度　$\vec{v}_1+\vec{v}_2$

虚速度　$\Delta\vec{v}^*$

[例]

质量为m，摆长为l的单摆



求摆笛卡儿坐标与独立坐标虚位移的关系

[解] 方法1　惯性基 $O-\vec{e}$　笛卡儿坐标 $\boldsymbol{q}=(x\quad y)^{\mathrm{T}}$

笛卡儿坐标虚位移　$\delta\boldsymbol{q}=(\delta x\quad \delta y)^{\mathrm{T}}$

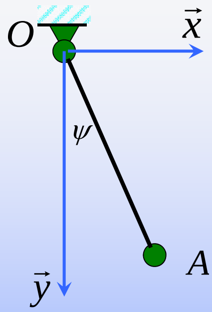
约束方程　$\Phi=x^2+y^2-l^2=0$

等时变分　$\delta\Phi=2x\delta x+2y\delta y=0$

定义独立（广义）坐标 $w=(y)$　非独立坐标 $u=(x)$

非独立坐标与独立坐标虚位移的关系　$\delta x=-\dfrac{y}{x}\delta y$

笛卡儿坐标与独立坐标虚位移的关系　$\delta\boldsymbol{q}=\begin{pmatrix}\delta x\\ \delta y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-y/x\\ 1\end{pmatrix}\delta y$　$x\neq 0$



分析动力学基础/虚位移原理/虚位移/解

方法2　惯性基 $O-\vec{e}$　笛卡儿坐标 $\boldsymbol{q}=(x\quad y)^{\mathrm{T}}$

自由度 $\delta=1$　另外定义独立（广义）坐标 ψ

约束方程

$$x=l\sin\psi\qquad y=l\cos\psi$$

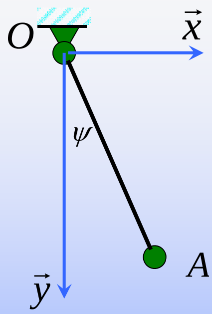
等时变分

$$\delta x=l\cos\psi\,\delta\psi\qquad \delta y=-l\sin\psi\,\delta\psi$$

笛卡儿坐标与独立坐标虚位移的关系

$$\delta\boldsymbol{q}=\begin{pmatrix}\delta x\\ \delta y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}l\cos\psi\\ -l\sin\psi\end{pmatrix}\delta\psi$$

比较　$\delta\boldsymbol{q}=\begin{pmatrix}\delta x\\ \delta y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-y/x\\ 1\end{pmatrix}\delta y$　$x\neq 0$



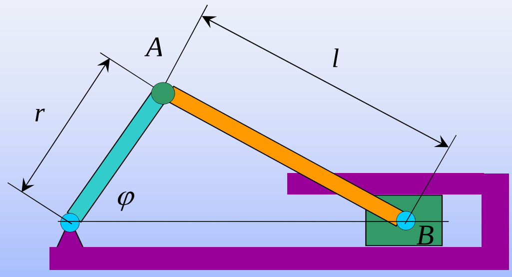
合理选取广义坐标是有意义的

[例]

曲柄滑块机构，曲柄长r，连杆长l

该机构只有一个独立变量

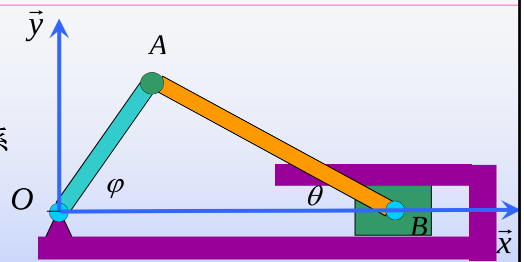
令曲柄的转角φ为广义坐标



求点A与B的虚位移与广义坐标虚位移的关系

[解] 参考基：$O-\vec{e}$

方法1（坐标法）



写出点A的坐标与广义坐标的关系

$x_A = r\cos\varphi \quad y_A = r\sin\varphi$

等时变分

$$\delta x_A = -r\sin\varphi\delta\varphi$$

$$\delta y_A = r\cos\varphi\delta\varphi$$

写出点B的坐标与广义坐标的关系

$x_B = r\cos\varphi + l\cos\theta \qquad y_B = 0$

等时变分

$$\delta x_B = -r\sin\varphi\delta\varphi - l\sin\theta\delta\theta$$

$$\delta x_B = -[r\sin(\varphi+\theta)/\cos\theta]\delta\varphi \qquad \delta y_B = 0$$

附加几何关系

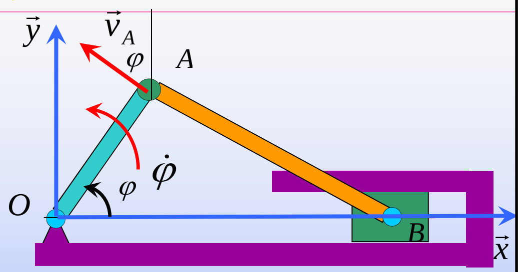
$$r\sin\varphi - l\sin\theta = 0$$

等时变分

$$\delta\theta = (r\cos\varphi / l\cos\theta)\delta\varphi$$

参考基： $O-\vec{e}$

方法2（速度法）



写出点A的速度与广义速度的关系

$\vec{v}_A \quad v_A = r\dot{\varphi}$ 方向设定

$\dot{x}_A = v_{Ax} = -v_A \sin\varphi$

$\dot{y}_A = v_{Ay} = v_A \cos\varphi$

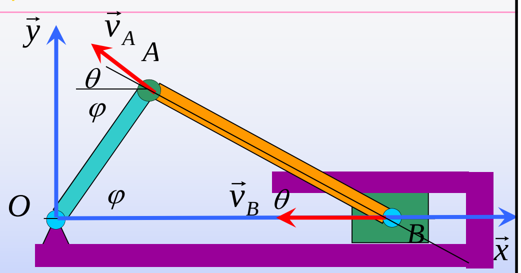
$\dot{x}_A = -r\dot{\varphi}\sin\varphi \qquad \mathrm{d}\,x_A = -r\sin\varphi\,\mathrm{d}\,\varphi$

$\dot{y}_A = r\dot{\varphi}\cos\varphi \qquad \mathrm{d}\,y_A = r\cos\varphi\,\mathrm{d}\,\varphi$

$$\delta x_A = -r\sin\varphi\delta\varphi$$

$$\delta y_A = r\cos\varphi\delta\varphi$$

参考基： $O-\vec{e}$



写出点B的速度与广义速度的关系

$v_A\cos(\frac{\pi}{2}-\varphi-\theta) = v_B\cos\theta$

$v_A\sin(\varphi+\theta) = v_B\cos\theta$

$\dot{x}_B = v_{Bx} = -v_B = -v_A\sin(\varphi+\theta)/\cos\theta$

$\dot{x}_B = -r\dot{\varphi}\sin(\varphi+\theta)/\cos\theta$

$\dot{y}_B = 0$

连杆的长度不可改变，点A与点B的速度矢量在杆上的投影相等

$\mathrm{d}\,x_B = \left[-r\sin(\varphi+\theta)/\cos\theta\right]\mathrm{d}\,\varphi$

$\mathrm{d}\,y_B = 0$

$$\delta\,x_B = -\left[r\sin(\varphi+\theta)/\cos\theta\right]\delta\,\varphi$$

$$\delta\,y_B = 0$$

虚位移原理

- 前言
- 虚位移
- 虚位移原理及其应用
- 广义力 质点系平衡条件

虚位移原理与应用

- 原理描述

具有双面理想约束的质点系，其平衡的充分必要条件为：系统内所有主动力对于质点系的任意虚位移所作的元功之和为零，即

$$\delta W = \sum_{k=1}^{n} \vec{F}_k^{\mathrm{a}} \cdot \delta \vec{r}_k = 0$$

元功δW称为虚功，故虚位移原理也称为虚功原理

虚功率原理与应用

- 原理描述

具有双面理想约束的质点系，其平衡的充分必要条件为：系统内所有主动力对于质点系的任意虚速度所作的虚功率之和为零，即

$$\delta W = \sum_{k=1}^{n} \vec{F}_k^{\mathrm{a}} \cdot \delta \vec{r}_k = 0$$

$$\Delta P = \sum_{k=1}^{n} \vec{F}_k^{\mathrm{a}} \cdot \Delta \dot{\vec{r}}_k = 0$$

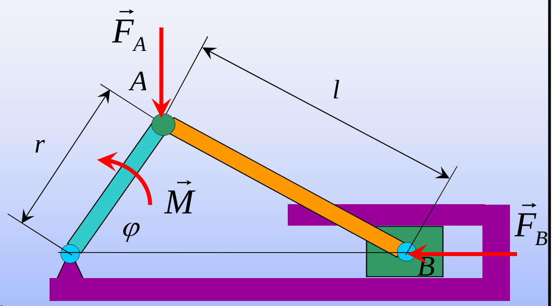
ΔP称为虚功率

原理的应用

- 系统在给定位置平衡时，求主动力之间的关系
- 求系统在已知主动力作用下的平衡位置
- 求平衡系统的约束反力
- 求平衡结构系统内二力杆的内力

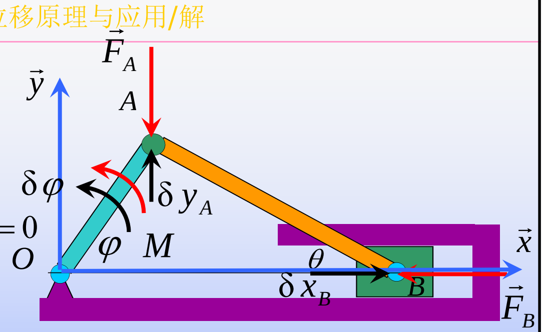
[例]

曲柄滑块机构。在图示位置，系统受到力偶、铅垂力与水平力，该机构处于平衡



求这些主动力(偶)之间的关系

[解] 参考基：$O-\vec{e}$



以系统为对象 定义虚位移

虚功原理 注意做功正负！

$$\delta W = M\,\delta\varphi - F_A\,\delta y_A - F_B\,\delta x_B = 0$$

定义独立坐标的变分 $\delta\varphi$

关系 $\delta y_A = r\cos\varphi\delta\varphi$

$$\delta x_B = -\left[r\sin(\varphi+\theta)/\cos\theta\right]\delta\varphi$$

$$\left[M - F_A r\cos\varphi + F_B r\sin(\varphi+\theta)/\cos\theta\right]\delta\underline{\varphi} = 0$$

平衡的充要条件 独立坐标的变分

$$M - F_A r\cos\varphi + F_B r\sin(\varphi+\theta)/\cos\theta = 0$$

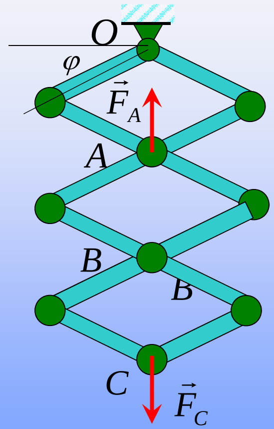
平衡位置已知 → 主动力间的关系

主动力已知 → 平衡位置

[例]

图示机构是由**8**根连杆铰接成**3**个相同的菱形。菱形的边长为b，铰O固定，铰A、B与C限定在铅垂线上运动。不计各杆的重量

求机构在如图所示位置处于平衡时，力F_A与F_C的比



[解] 参考基：$O-\vec{e}$

一个自由度 定义角φ为广义坐标

定义虚位移

虚功原理 $-F_A\delta y_A + F_C\delta y_C = 0$

虚位移的关系

$y_A = 2b\sin\varphi \qquad \delta y_A = 2b\cos\varphi\delta\varphi$

$y_C = 6b\sin\varphi \qquad \delta y_C = 6b\cos\varphi\delta\varphi$

平衡的充要条件

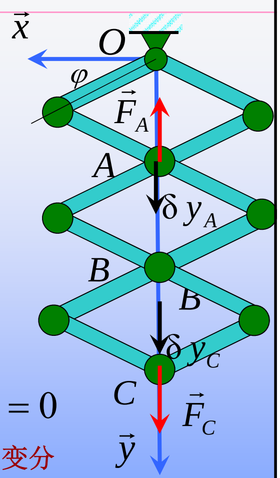
$$(-2F_A b\cos\varphi + 6F_C b\cos\varphi)\delta\varphi = 0$$

独立坐标的变分

$$2F_A b\cos\varphi + 6F_C b\cos\varphi = 0$$

$$-F_A + 3F_C = 0 \qquad F_A : F_C = 3:1$$

在此条件下任何位置都平衡

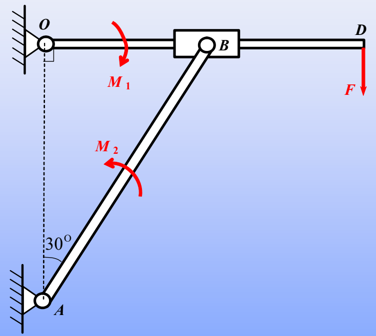


[例]

运动机构在图示位置平衡，***OD***水平，***OA***铅垂。

$$\overline{OA}=\sqrt{3}\ R \qquad \overline{OD}=2R$$

$$\overline{AB}=2R$$

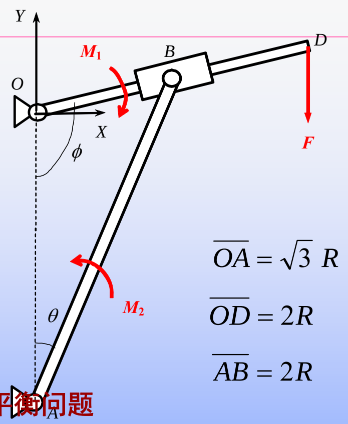


在***OD***的端点作用铅垂向下的力***F***。不计运动机构的重量。

求图示位置平衡时 M_1、M_2 和 F 的关系式。

（机动04年期末考试题）

[解1] 坐标法 根据虚功原理：



$$-M_1\delta\phi-M_2\delta\theta-F\delta y_D=0 \qquad \textbf{(1)}$$

在三角形**OAB**中，由正弦定理：

$$\frac{\sin\phi}{2R}=\frac{\sin(\phi+\theta)}{\sqrt{3}\,R}$$

$$\overline{OA}=\sqrt{3}\ R \qquad \overline{OD}=2R \qquad \overline{AB}=2R$$

两边求变分，得到虚位移 $\delta\phi$、$\delta\theta$ 的关系：

$$\frac{\cos\phi}{2}\delta\phi=\frac{\cos(\phi+\theta)}{\sqrt{3}}(\delta\phi+\delta\theta) \qquad \textbf{(2)}$$

坐标法适用于求解一般位置的平衡问题

$$y_D=\overline{OD}\sin\left(\phi-\frac{\pi}{2}\right)=-2R\cos\phi \qquad \delta y_D=2R\sin\phi\delta\phi \qquad \textbf{(3)}$$

将 $\phi=\dfrac{\pi}{2}$、$\theta=\dfrac{\pi}{6}$ 代入**(2)**和**(3)**： $0=-\dfrac{1}{2\sqrt{3}}(\delta\phi+\delta\theta)$

得到： $\delta\phi=-\delta\theta \qquad \delta y_D=2R\delta\phi \qquad \textbf{(4)}$

将**(4)**代入**(1)**，得： $(M_1-M_2+2RF)\delta\theta=0 \qquad M_1-M_2+2RF=0$

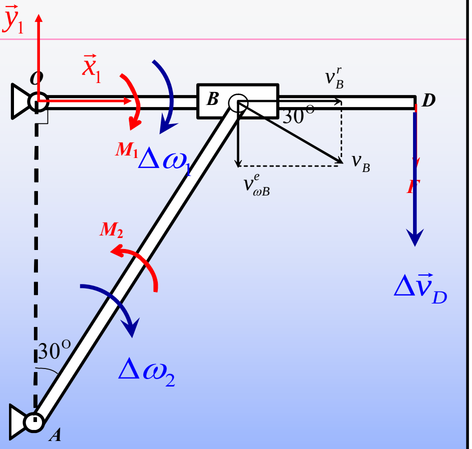
[解2] 虚速度法

根据虚功率原理：

$$M_1\Delta\omega_1 - M_2\Delta\omega_2 + F\Delta v_D = 0 \qquad (1)$$

取AB上的B点为动点，

OD连体基 $O-\vec{e}_1$ 为动参考系：



$$\vec{v}_B = \vec{v}_{\omega B}^e + \vec{v}_B^r$$

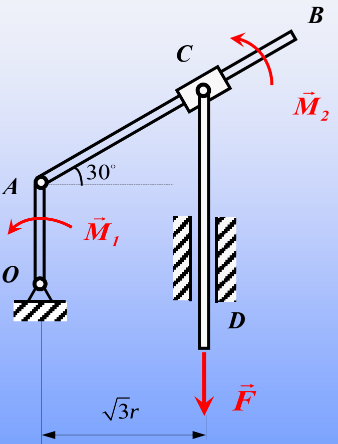
由图示几何法得：$v_{\omega B}^e = \dfrac{1}{2} v_B$

由关系式 $v_B = 2R\omega_2$　$v_{\omega B}^e = R\omega_1$

得：$\omega_1 = \omega_2$　$v_D = 2R\omega_1$　(2)

将(2)代入(1)，得：$\left(M_1 - M_2 + 2RF\right)\Delta\omega_1 = 0$　$M_1 - M_2 + 2RF = 0$

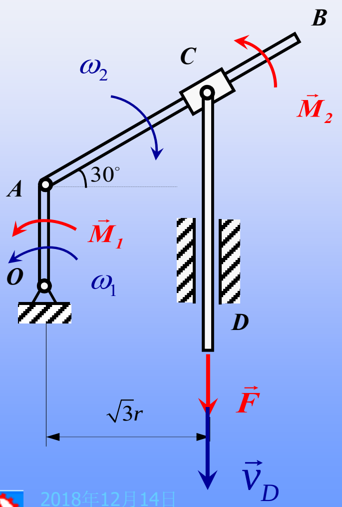
虚速度法适用于求解特定位置的平衡问题



【例】

平面机构，在力F、力偶M_1、M_2作用下，在图示位置平衡，设OA = r，处于垂直，CD与OA平行，不计自重。若M_1已知，试用虚位移原理求M_2与F的大小。

[解1] 以整个系统为研究对象，系统自由度为2

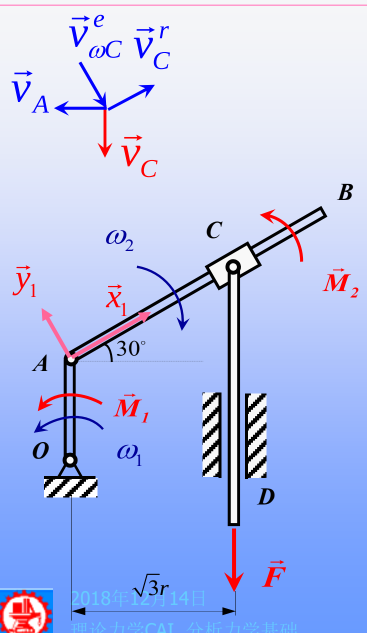


定义虚速度

$$M_1\Delta\omega_1 - M_2\Delta\omega_2 + F\Delta v_D = 0$$

选取独立虚速度 $\omega_1 \quad \vec{v}_D$

独立虚速度有无其他方案？



以整个系统为研究对象，系统自由度为2

$$M_1\Delta\omega_1 - M_2\Delta\omega_2 + F\Delta v_D = 0$$

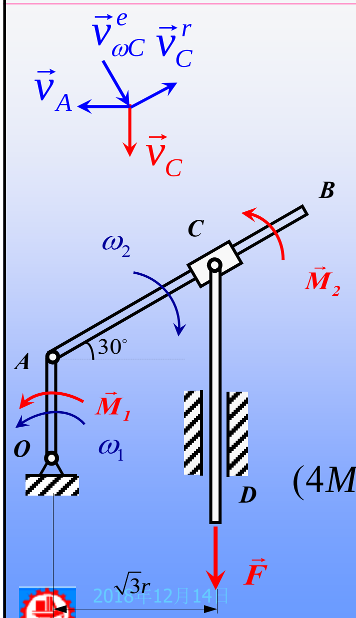
AB连体基 $A-\vec{e}_1$，**C**为动点

$$\vec{v}_C = \vec{v}^{r}_{C} + \vec{v}_A + \vec{v}^{e}_{\omega C} \quad v_C = v_D$$

$$v_A = \omega_1 r \quad v^{e}_{\omega C} = 2\omega_2 r$$

$$v_D \cos 30^\circ = v^{e}_{\omega C} - v_A \cos 60^\circ$$

$$\omega_2 = \frac{\sqrt{3}v_D + \omega_1 r}{4r}$$



$$M_1\Delta\omega_1 - M_2\Delta\omega_2 + F\Delta v_D = 0$$

$$\Delta\omega_2 = \frac{\sqrt{3}\Delta v_D + \Delta\omega_1 r}{4r}$$

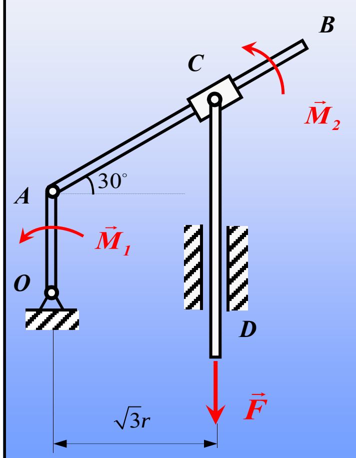
$$M_1\Delta\omega_1 - M_2\frac{\sqrt{3}\Delta v_D + \Delta\omega_1 r}{4r} + F\Delta v_D = 0$$

$$(4M_1 r - M_2 r)\Delta\omega_1 + (4Fr - \sqrt{3}M_2)\Delta v_D = 0$$

$$(\underline{4M_1 r - M_2 r})\Delta\omega_1 + (\underline{4Fr - \sqrt{3}M_2})\Delta v_D = 0$$

$\Delta\omega_1$ Δv_D 独立

系统平衡的条件



$$Q_1 = 4M_1 r - M_2 r = 0$$

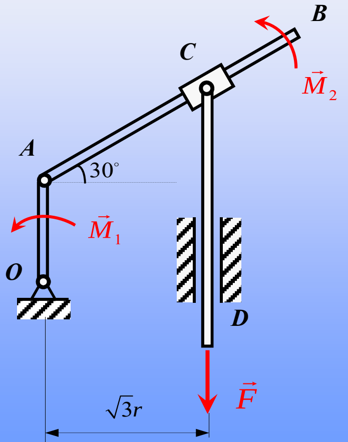
$$Q_2 = 4Fr - \sqrt{3}M_2 = 0$$

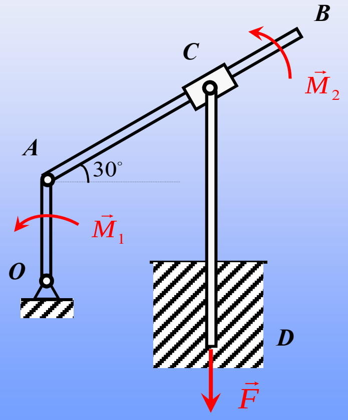
$$M_2 = 4M_1$$

$$F = \frac{\sqrt{3}M_2}{4r} = \frac{\sqrt{3}M_1}{r}$$

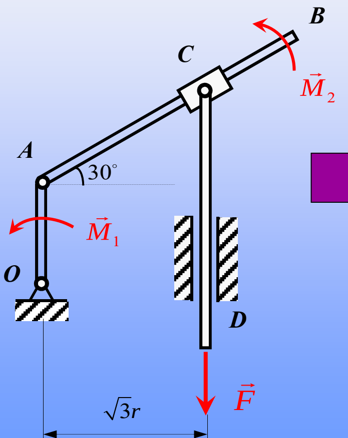
[解2]　求M_2

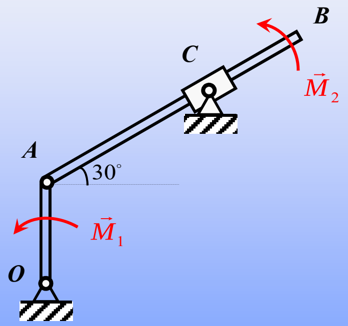
(1) 先使CD杆不动 系统自由度为1，整个系统等价于如下系统

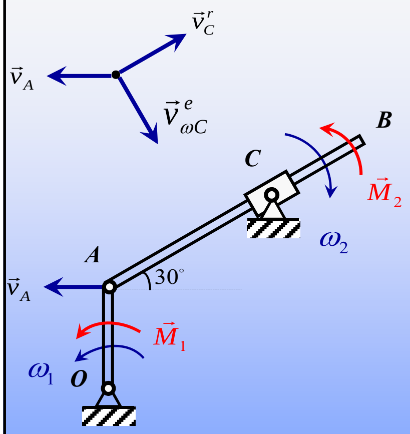




或为







给OA杆虚角速度。C点的虚速度为零。

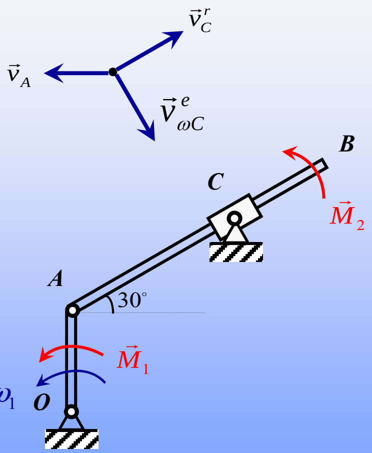
$$\Delta P = 0$$

$$M_1\Delta\omega_1 - M_2\Delta\omega_1 = 0$$

C点为兴趣点，动系AB杆

$$\vec{v}_C = \vec{0} = \vec{v}_C^r + \vec{v}_A + \vec{v}_{\omega C}^e$$

$$0 = v_A \cos 60^0 - v_{\omega C}^e$$



$$0 = v_A \cos 60^0 - v_{\omega C}^e$$

$$v_A = r\omega_1 \qquad v_{\omega C}^e = 2r\omega_2$$

$$\omega_1 = 4\omega_2$$

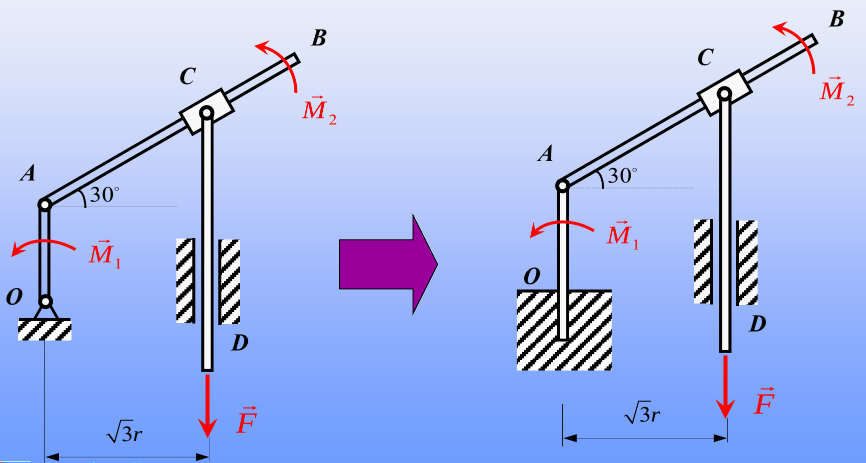
$$\Delta\omega_1 = 4\Delta\omega_2$$

$$\Delta P = 0$$

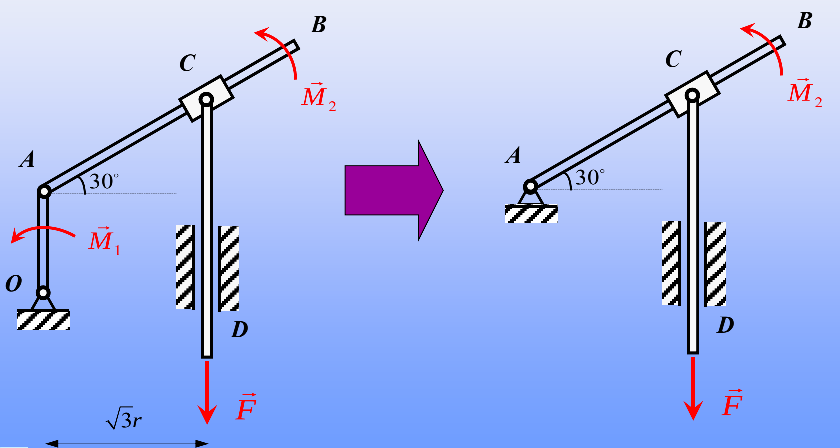
$$M_1\Delta\omega_1 - M_2\Delta\omega_2 = 0$$

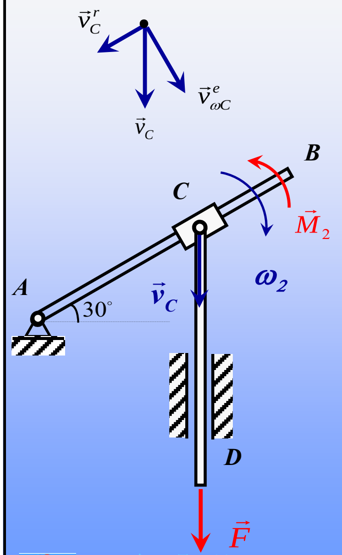
$$M_2 = 4M_1$$

第1种方法求F　　使OA杆不动，系统等价为



或为





给CD杆虚速度。

C点为兴趣点，动系AB杆

$$\vec{v}_C = \vec{v}_{\omega C}^e + \vec{v}_C^r$$

$$v_C \cos 30^\circ = 2r\omega_2$$

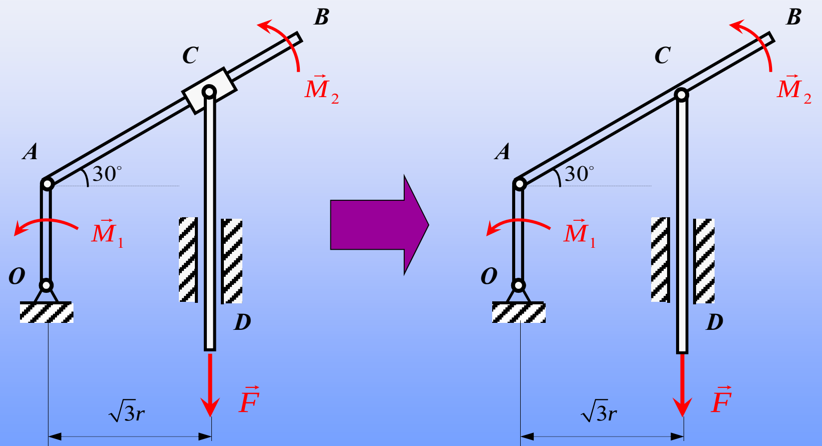
$$v_C = \frac{4r\omega_2}{\sqrt{3}}$$

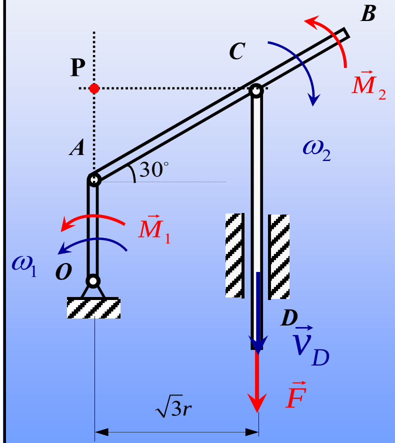
$$\Delta P = 0$$

$$F\Delta v_C - M_2 \Delta\omega_2 = 0$$

$$F = \frac{\sqrt{3}M_2}{4r} = \frac{\sqrt{3}M_1}{r}$$

第2种方法求F: 以整个系统为研究对象，去除C点相对AB杆的滑动





选取虚速度　　ω_1

$$M_1\Delta\omega_1 - M_2\Delta\omega_2 + F\Delta v_D = 0$$

速度瞬心P

$$v_A = \omega_1 r \quad \omega_2 = \omega_1$$

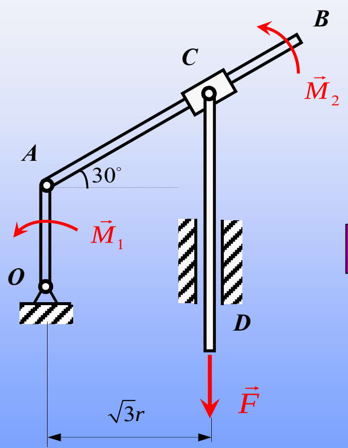
$$v_D = v_C = \sqrt{3}\omega_2 r = \sqrt{3}\omega_1 r$$

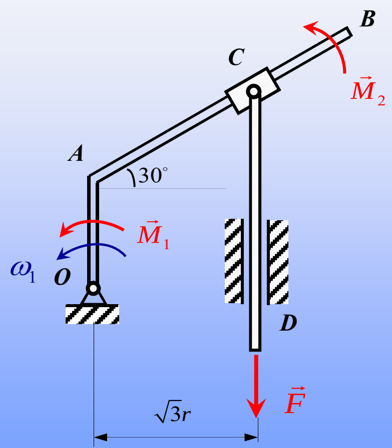
$$\omega_2 = \omega_1 \qquad v_D = \sqrt{3}\omega_1 r$$

$$M_1\Delta\omega_1 - M_2\Delta\omega_1 + \sqrt{3}F\Delta\omega_1 r = 0$$

$$F = \sqrt{3}M_1 / r$$

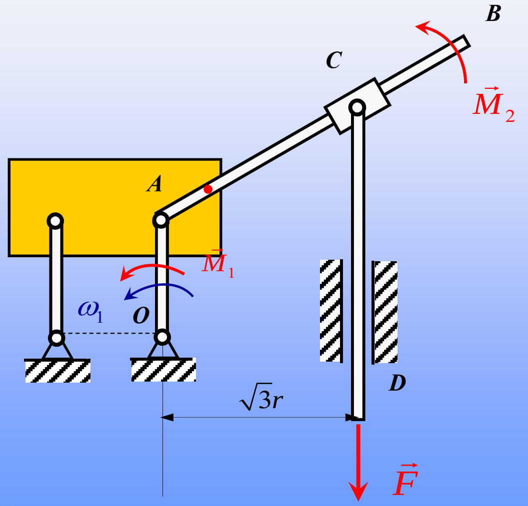
第3种方法求F:　　　OA杆、AB杆固接



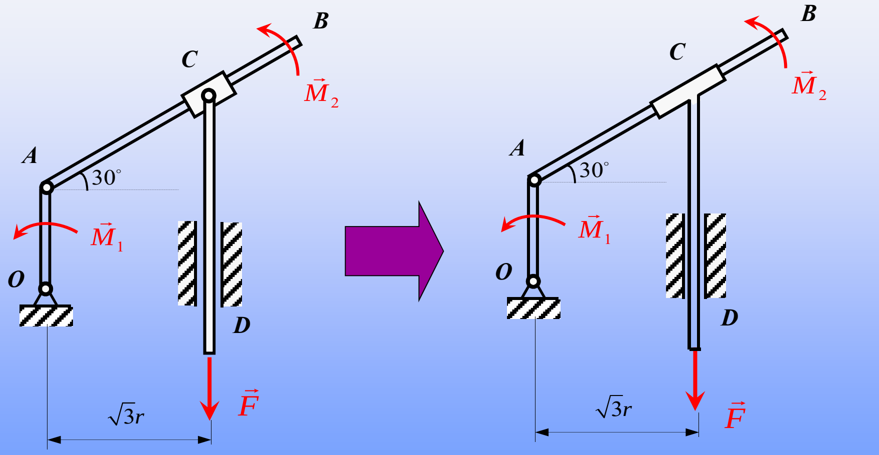


C点为兴趣点，动系OAB杆

第4种方法求F　　给OA杆虚角速度，AB杆不转动，跟随A点平移



第5种方法求F:　　CD杆、AB杆无相对转动

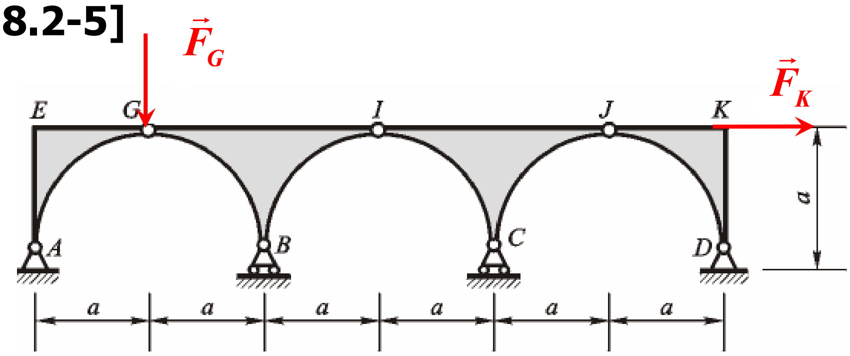


思考：以上各种单独求解方法的理论根据是什么（运动学角度）？

原理的应用

- 系统在给定位置平衡时，求主动力之间的关系
- 求系统在已知主动力作用下的平衡位置
- 求平衡系统的约束反力
- 求平衡结构系统内二力杆的内力

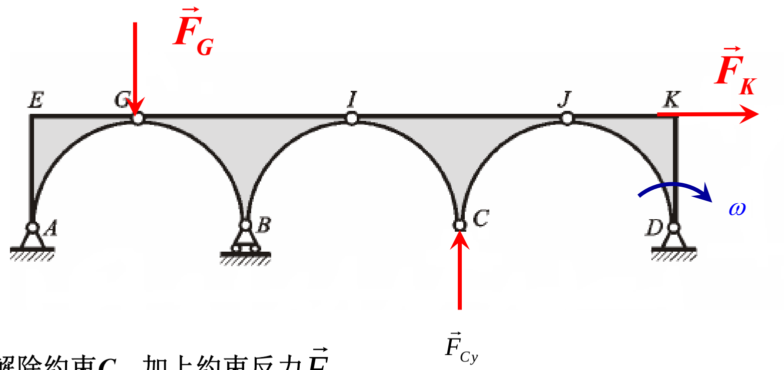
[例8.2-5]



图示一三孔拱桥，不计桥自重，桥上有两集中载荷

求支座C的理想约束力

[解]



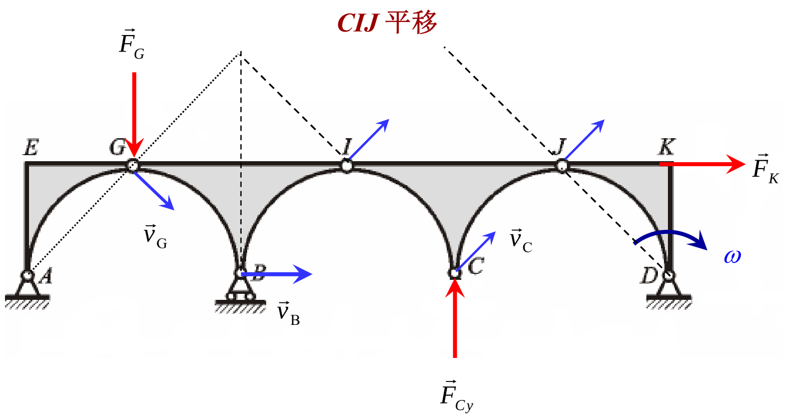
解除约束*C*，加上约束反力$\vec{F}_{Cy}$

系统有一个自由度

定义虚角速度

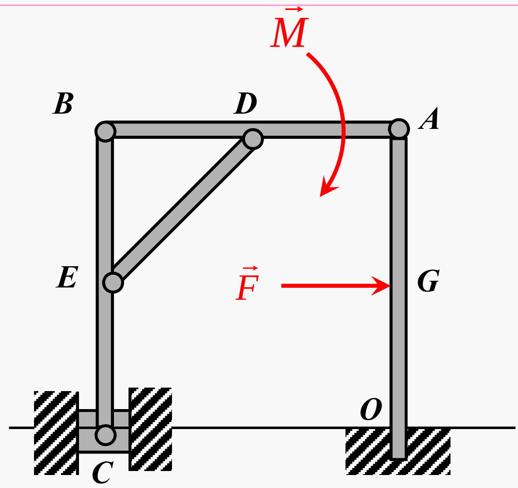
$$\vec{F}_{Cy}\cdot\Delta\vec{v}_C+\vec{F}_G\cdot\Delta\vec{v}_G+\vec{F}_K\cdot\Delta\vec{v}_K=0$$

虚速度法 $\vec{F}_{Cy}\cdot\Delta\vec{v}_C+\vec{F}_G\cdot\Delta\vec{v}_G+\vec{F}_K\cdot\Delta\vec{v}_K=0$



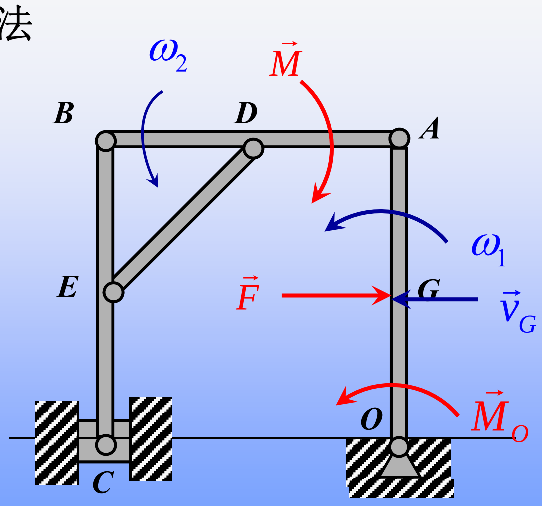
$$F_{Cy}=-(F_G+F_K)$$

[例8.2-6]

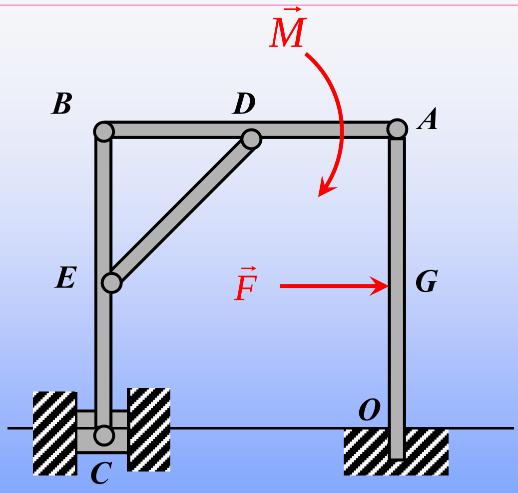


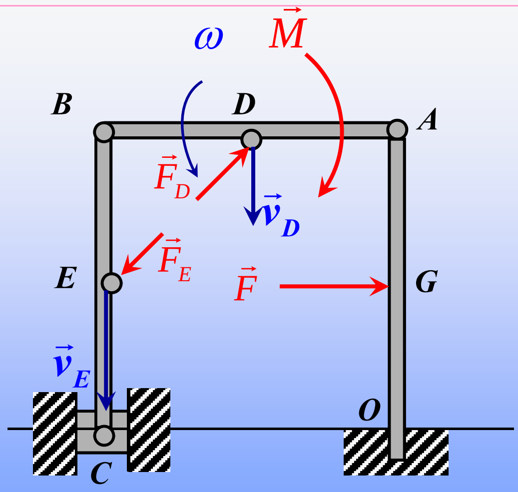
求固定端O处的约束力偶及ED杆的内力

[解] 虚速度法

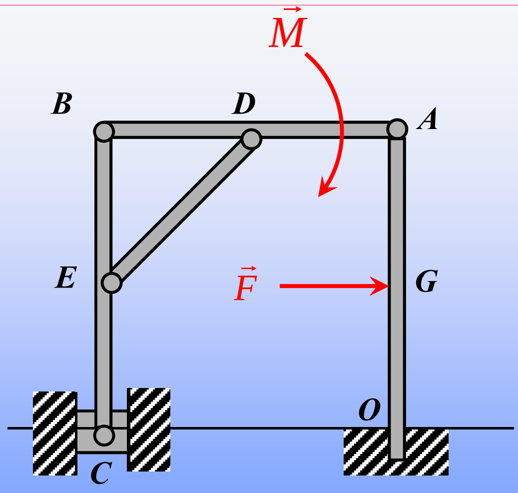


$$M_O\omega_1 - Fv_G - M\omega_2 = 0$$

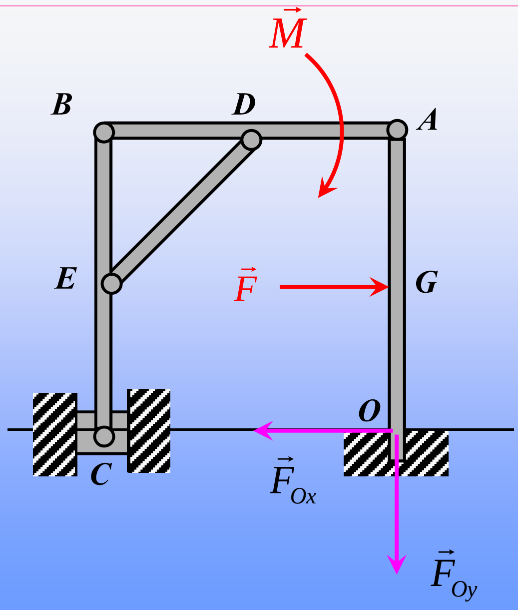




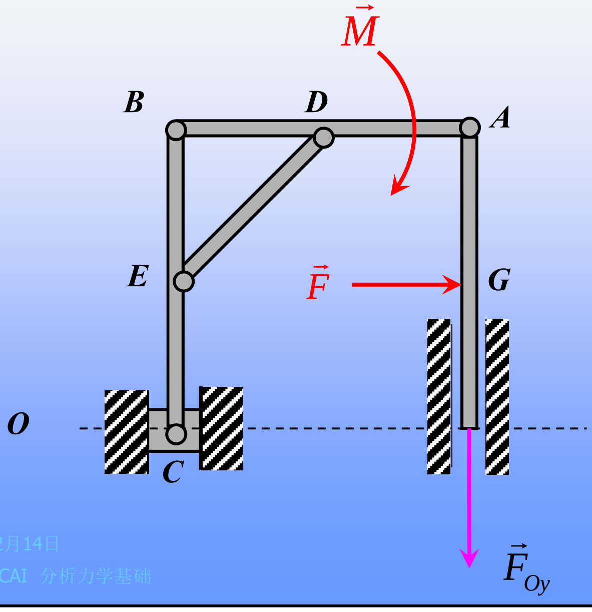
$$-M\omega-\frac{\sqrt{2}}{2}F_D v_D+\frac{\sqrt{2}}{2}F_E v_E=0$$



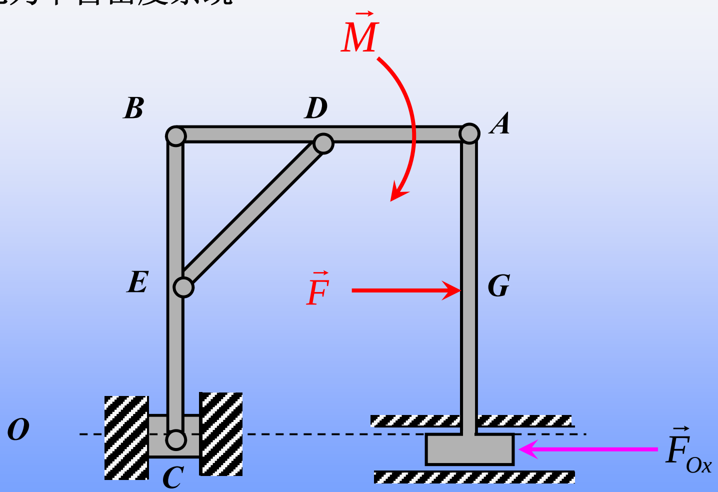
如何求固定端O处的约束反力？



求Foy　化为单自由度系统

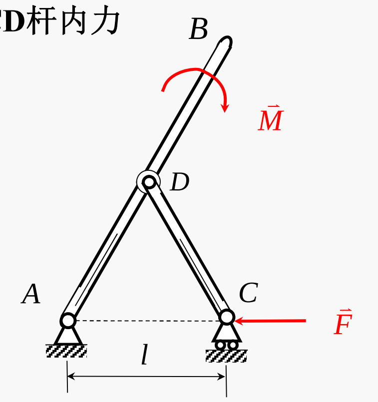


求Fox　化为单自由度系统



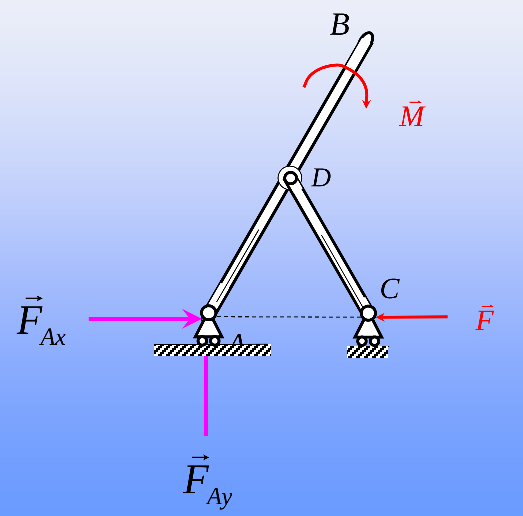
[习题8-13] 求A、C处的约束反力

CD杆内力

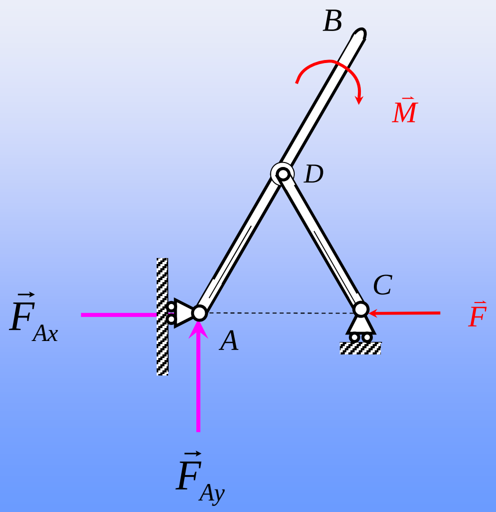


如何拆约束？ 如何加约束变为单自由度系统？

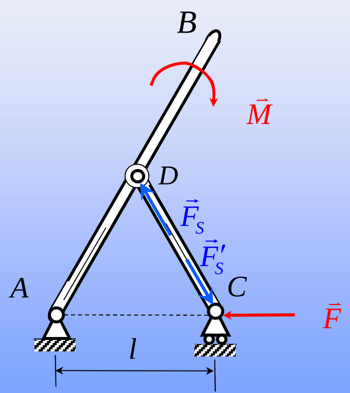
求F_{Ax}



求F_{Ay}



求CD杆内力



小结

- 写出主动力的虚功（率）的表达式
- 通过运动学的关系分析，得到有关点的虚位移（虚速度）和刚体的虚姿态位移（虚角速度）
  - 虚位移：对坐标等时变分
  - 虚速度：直接给定的速度
- 代入虚功（率）原理的表达式，得到只含独立坐标虚位移（虚速度）的等式
- 得到平衡充要条件
  - 已知主动力可求平衡位形
  - 已知平衡位形可求主动力应满足的关系
- 为了求理想约束力，需释放约束，将该约束力作主动力处理

虚位移原理