SHANGHAI JIAO TONG UNIVERSITY

Institute of Media,
Information, and Network

命题逻辑的基本概念

Prof. Junni Zou

邹君妮

http://www.cs.sjtu.edu.cn/~zou-jn/

Dept. of Computer Science and Engineering

Shanghai Jiao Tong University

2 Mar. 2018

主要内容

- 命题基本概念
- 命题联结词
- 合式公式
- 重言式

什么是命题？

- **命题（proposition）：非真即假的陈述句**
  - 是陈述句，而非命令句、疑问句、感叹句等
  - 表达的内容可判断真假，非真即假
    - 真假的判定：与事实是否相符
    - 不能不真又不假，也不能又真又假
- **真值（truth value）：命题具有两种可能的取值，即真（true）和假（false）**
  - 分别用“T”(或“1”)和“F”(或“0”)表示

命题实例

- 雪是白的　　　　雪是黑的
  - 是命题，真值为T　　　　是命题，真值为F
- 好大的雪啊！　把门关上！　你要出去吗？
  - 不是命题
- 偶数可表示成两个素数之和（Goldbach猜想）
  - 是命题，目前不知其真假
- 1+101=110
  - 十进制范围中真值为F，二进制范围中真值为T
  - 不意味着同一命题有两个真值!不同数制是不同的命题
- 这句话是错的？

结论：

- 一切没有判断内容的句子都不能作为命题，如命令句、感叹句、疑问句、祈使句、二义性的陈述句。
- 命题一定是陈述句，但并非一切陈述句都是命题。
- 命题的真值有时可明确给出，有时还需要依靠环境、条件、实际情况时间才能确定其真值。

命题符号化

- **为了对命题进行逻辑演算，利用数学手段将命题符号化(形式化)**
- **通常用大写英文字母表示命题**
  - **命题常项**：用P表示“雪是白的”
  - **命题变项**：用P表示任意命题
- **命题 vs. 命题变项**
  - 命题：具体的陈述句，有确定的真值
  - 命题变项：不特指某个命题，真值不确定
  - 像常量和变量的关系

简单命题与复合命题

- **简单命题：简单句，不含任何“并且”，“或者”之类的联结词**
  - 例如：雪是白的
  - 又叫**原子命题**，不可分割
  - 如果按主语谓语分析，则是谓词逻辑的做法
- **复合命题：成分命题经联结词联结而成**
  - 联结词：并且，或者，非，如果…那么…
  - 又叫**分子命题**，可以分割

例：今天天气很冷。

今天天气很冷并且刮风。

今天天气很冷并且刮风，但室内暖和

复合命题的真值

- **复合命题的真值：成分命题的真值的函数**
  - 当成分命题被赋予任一真值组合时，联结词完全决定了复合命题的真值
  - 例如：“**张三学英语且李四学日语**”由简单命题“张三学英语”，“李四学日语”经联结词“且”联结而成。当这两个简单命题真值均为T时，该复合命题真值才为T

命题内容 vs. 形式

- **复合命题的内容与形式**
  - 形式逻辑并不关心命题内容为真为假的条件和环境等，只关心命题有真假的可能性，以及复合命题的真假规律性
  - 风马牛不相及的内容也可以组成复合命题
    例如：张三是教师，并且雪是白的

命题联结词

- **命题联结词(propositional connective): 将命题联结起来构成新命题**
  - 将命题视为运算对象，命题联结词视为运算符，从而构成运算表达式
  - 常用命题联结词：$\neg$，$\wedge$，$\vee$，$\rightarrow$，$\leftrightarrow$

否定词

- **否定(negation)：命题P加上否定词，就形成一个新命题 ¬ P，表达的是对P的否定**
  - "¬" 读作：非P
- **¬ 的定义可用真值关系给出： ¬ P为真， iff P为假**
  - 这种真值关系常用真值表(truth table)来表示
  - 当命题变项不多时，真值表是研究真值关系的重要工具

P	¬P
0	1
1	0

否定词

- ¬ **的例子**
  - 令P：张三去看球赛了

    ¬ **P**：张三没有去看球赛
  - 令Q：今天是星期三

    ¬ **Q**：今天不是星期三

合取词

- **合取(conjunction)：联结两个命题P和Q构成一个新命题 P∧Q，表达"P并且Q"**
  - 读作：P与Q，或P、Q的合取
- **∧ 的定义可用真值关系给出：**
  P∧Q为真， iff P和Q都为真

P	Q	P∧Q
0	0	0
0	1	0
1	0	0
1	1	1

合取词

- ∧ 的例子
  - 令P：教室里有10名女同学

    Q：教室里有15名男同学

P ∧ Q：教室里有10名女同学，并且有15名男同学

  - 令A：今天下雨了

    B：教室里有100张桌子

A ∧ B：今天下雨了，并且教室里有100张桌子

合取词

- **自然语言里的“和”、“与”、“并且”一般表示同类事物的并列；而形式逻辑中的∧只关心命题与命题之间的真值关系，并不考虑两命题是否有意义上的联系**
- **不是所有的“和”，“与”都要使用合取词表示**

  例如：“2**和**3的最小公倍数是6”，“点a位于点b**与**点c之间“
- **自然语言中的某些意义用∧表达不出来**

  例如：“这台机器质量很好，但是很贵”用∧表达时并无“转折”的语气

析取词

- **析取(disjunction)：联结两个命题P和Q构成一个新命题 P ∨ Q，表达“P或者Q”**
  - 读作：P或Q，P、Q的析取
- **∧ 的定义可用真值关系给出：**

P ∨ Q为假， iff P和Q都为假

P	Q	P∨Q
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	1

析取词

- ∨ 的例子
  - 令P：今天刮风
    Q：今天下雨

P∨Q：今天刮风，或者下雨

  - 令A：2小于3
    B：雪是黑的

A∨B：2小于3，或者雪是黑的

析取词

- **析取词与自然语言中的“或”不完全一样**
- **自然语言中的“或”具有二义性，有时具有相容性，“可兼或“，有时具有排斥性，“不可兼或”**
  - 例如：李芳爱唱歌或爱听音乐

    李芳是上海人或江苏人
- **析取词表达的“或”具有相容性，是“可兼或“**

蕴涵词

- **蕴涵(implication)：将两个命题P、Q联结起来,构成一个新命题P→Q，表达“如果P成立那么Q成立”**
  - 读作：P蕴涵Q， **P仅当Q**（充分条件）
  - P称前件(antecedent)，Q称后件(consequent)
- **→ 的定义可用真值关系给出： P → Q为假， iff P真而Q假**

P	Q	P→Q
0	0	1
0	1	1
1	0	0
1	1	1

蕴涵词

- $\rightarrow$ **的最重要用途是进行命题间的推理**
- **如果已知P→Q为真，那么只要P为真，必能推知Q为真**
  - **绝不可能P真而Q假**
  - 此即传统逻辑所称modus ponens推理规则
    - **肯定前件式，或称分离规则**

$$
\begin{array}{ll}
P\rightarrow Q & \because \text{若}P\text{则}Q \\
P & \because P \\
Q & \therefore Q
\end{array}
$$

蕴涵词

- **→ 称为实质蕴涵(material implication)，与自然语言“如果...那么...”有不同**
  - 自然语言的“如果P那么Q”，P和Q在内容上必定有因果关系
  - →只反映P和Q的真值间的关系：不能P真而Q假，与命题内容无关

  例如：如果2是偶数，则天上就可以掉馅饼。

  两个简单命题无任何关系，但此命题合法。
- **P为假时，不论Q的真假，P → Q都为真**

蕴涵词

- **→的例子**

令P：$2\times 2=4$；　P'：$2\times 2=5$.

Q：雪是白的；Q'：雪是黑的.

则 $P\to Q$ 为真

$P'\to Q$ 为真

$P'\to Q'$ 为真

$P\to Q'$ 为假

蕴涵词

- $\rightarrow$的例子
  - P：天不下雨
    Q：我去看电影
    如果天不下雨，那么我去看电影：$P \rightarrow Q$。
  - P：我不到学校去。
    Q：我生病。
    如果我不到学校去，那么我生病：$P \rightarrow Q$。
  - P：我去踢足球。
    Q：我有时间。
    仅当我有时间，我去踢足球：$P \rightarrow Q$。

蕴涵词

- **下面几个命题是等价的**

  1）**如果**约翰学习微积分，**那么**他是大学一年级学生。

  2）约翰学习微积分**仅当**他是大学一年级学生。

  3）**只有**约翰是大学一年级学生，他**才**能学习微积分。

  4）**除非**约翰是大学一年级学生，**否则**他不学习微积分。

双条件词

- **双条件/等价(biconditional /equivalence)：将两个命题P、Q联结起来，构成一个新命题P $\leftrightarrow$ Q，表达“等价于”，“当且仅当”等**
  - 读作：P等价于Q，**P当且仅当Q**（充要条件）
- **$\leftrightarrow$ 的定义可用真值关系给出：P $\leftrightarrow$ Q为真， iff P和Q同为真假**

P	Q	P $\leftrightarrow$ Q
0	0	1
0	1	0
1	0	0
1	1	1

双条件词

- ↔ 的例子

令P: △ABC是等腰三角形

Q: △ABC中有两个角相等

则$P \leftrightarrow Q$表达了“△ABC是等腰三角形当且仅当△ABC中有两个角相等”.

就此例而言: $P \leftrightarrow Q$为真.

若把“等腰”换成“直角”，则$P \leftrightarrow Q$为假

总结

联结词	记号	复合命题	记法	读法	真值结果
否定	$\neg$	A是不对的	$\neg A$	非A	$\neg A$为真当且仅当A为假
合取	$\wedge$	A并且B	$A \wedge B$	A合取B	$A \wedge B$为真当且仅当A, B同为真
析取	$\vee$	A或者B	$A \vee B$	A析取B	$A \vee B$为真当且仅当A, B中至少一个为真
蕴涵	$\rightarrow$	若A，则B	$A \rightarrow B$	A蕴涵B	$A \rightarrow B$为假当且仅当A为真B为假
等价	$\leftrightarrow$	A当且仅当B	$A \leftrightarrow B$	A等价于B	$A \leftrightarrow B$为真当且仅当A, B同为真假

总结

1、联结词是句子与句子之间的联结，而非单纯的名词、形容词、数词等的联结；

2、联结词是两个句子真值之间的联结，而非句子的具体含义的联结，两个句子之间可以无任何地内在联系.

自然语言的形式化表示

- **为了进行逻辑演算，需要对自然语言用形式化的逻辑语言进行表示**
- **方法：**
  - 根据自然语言的含义，确定若干简单命题，用命题符号P、Q...表示
  - 根据自然语言的含义，确定简单命题之间的关系，用命题联结词将它们联结起来
- **需要仔细考察自然语言的含义，抽取出隐含的简单命题和联结词**

自然语句形式化举例

- **例子：**

(1)张三不是学生

令P: 张三是学生，则(1): $\neg P$

令P: 张三不是学生，如何?

(2)张三既聪明又用功

令P: 张三聪明； Q:张三用功，则(2): $P \wedge Q$

令P: 张三既聪明又用功，如何?

思考: 张三虽然聪明但不用功

(3)张三一感冒就发烧

令P: 张三感冒； Q: 张三发烧，则(3): $P \rightarrow Q$

自然语句形式化举例

- **例子（续）：**

(4)张三和李四是学生

令P: 张三是学生. Q: 李四是学生. 则(4): $P \wedge Q$

思考: 张三和李四是表兄弟.也用$\wedge$?

(5)张三或李四当班长

令P: 张三当班长. Q: 李四当班长.则(5): $P \vee Q$?

不可兼或! (5)应表示为:$(P \wedge \neg Q) \vee (\neg P \wedge Q)$

思考: 张三和李四至少一人是学生. $P \vee Q$合适.

思考: 张三或李四都可当班长. 也用$\vee$?

自然语句形式化举例

设P：王超是一个思想品德好的学生；

设P：教室的灯不亮可能是灯管坏了

设P：周末天气晴朗；
　Q：学院将组织我们到石像湖春游。

设P：两个三角形全等；
　Q：三角形的三条边全部相等。
则命题（5）可表示为P↔Q。

（5）两个三角形全等**当且仅当**三角形的三条边全部相等。

自然语句形式化举例

设命题　　P：明天上午七点下雨；

Q：明天上午七点下雪；

可符号化为：

$(P\wedge Q\wedge R)\vee(\neg P\wedge Q\wedge R)\vee$

$(P\wedge\neg Q\wedge R)\vee(\neg P\wedge\neg Q\wedge R)$。

可符号化为：$(P\vee Q)\rightarrow\neg R$。

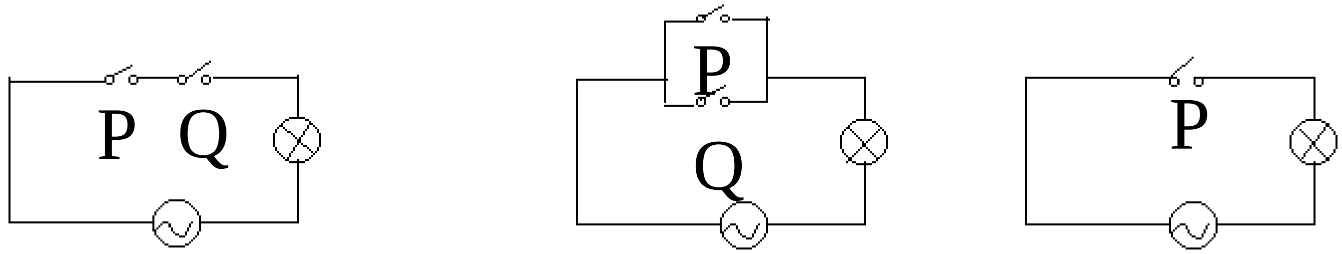
可符号化为：$(\neg P\wedge\neg Q)\rightarrow R$。

关于联结词

- **联结词是由命题定义新命题的基本方法**
  - ¬,∧,∨,→,↔是最常用的
  - 还可定义其他联结词，但既不常用，又都可由这五个联结词表示出来
    - 事实上，只需两个基本联结词：¬,∧或者¬,∨
- **联结词∧,∨,¬ 对应着数字电路的与门，或门，和非门电路，命题逻辑(布尔逻辑)是数字电路分析和设计的理论基础和工具**

联结词与数字电路

例：用复合命题表示如下图所示的开关电路：

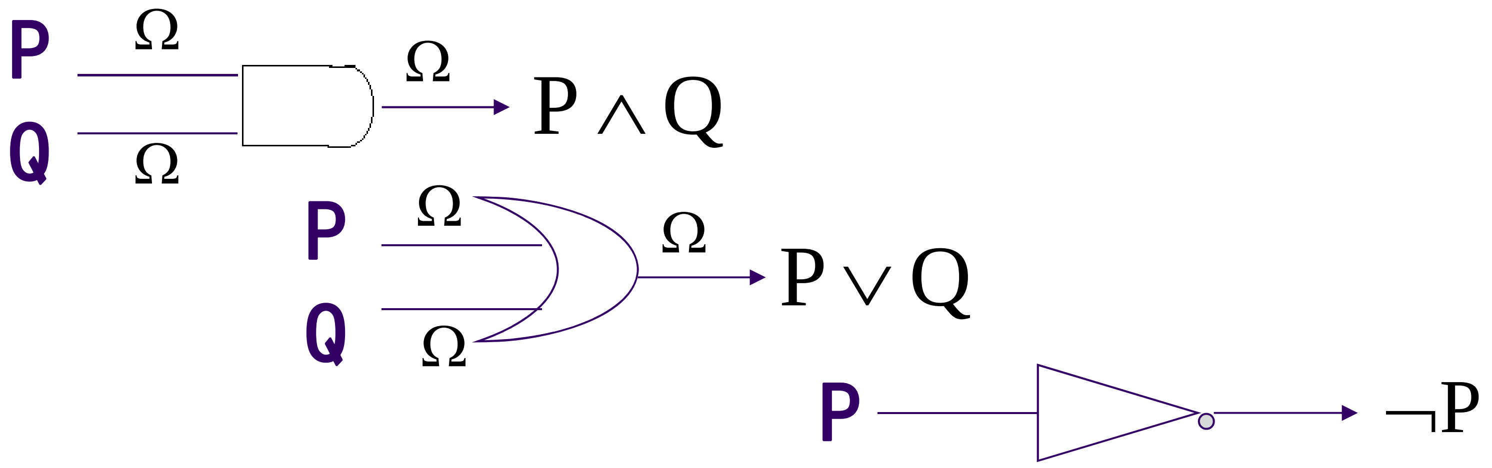


设：A：开关P闭合；B：开关Q闭合。

$A \wedge B$　　　　$A \vee B$　　　　A

联结词与数字电路

例：用复合命题表示如下图所示的逻辑电路：



解:设P：输入端P为高电位, Q：输入端Q为高电位, 则

“与门”对应于P∧Q；

“或门”对应于P∨Q；

“非门”对应于P。

命题公式

- **定义：命题公式**

(1) 命题变元本身（原子命题）是命题公式

(2) 如果α是公式，那么 $\neg\alpha$ 是命题公式

(3) 如果α、β是公式，那么 $(\alpha\wedge\beta)$, $(\alpha\vee\beta)$, $(\alpha\rightarrow\beta)$ 和 $(\alpha\leftrightarrow\beta)$是命题公式

命题公式是仅由有限步使用规则(1)-(3)后产生的结果

- **所定义的命题公式称为合式公式(well-formed formula，简记为wff)**

是否为wff？

- **根据公式的合式定义，层层归约，直到原子命题即可判断**
- **例子**

$\neg(P\wedge Q)$

$(\neg\neg P\rightarrow(P\wedge Q))$

$(((P\rightarrow Q)\wedge(Q\rightarrow R))\leftrightarrow(P\rightarrow R))$

$\neg(\neg P)$ 这个公式是wff？

$((P\rightarrow Q)\rightarrow(\wedge Q))$

$(P\rightarrow Q$

简写约定

- **为了减少括号的数量，可以引入优先级的约定**
  - 括号中的运算为最优先级
  - 按$\neg,\wedge,\vee,\rightarrow,\leftrightarrow$的次序安排优先级
  - 相同联结词按从左到右的优先次序
- **例如：**

  $(P\rightarrow(Q\vee R))$，可写成$P\rightarrow(Q\vee R)$，进而写成$P\rightarrow Q\vee R$

  $(P\rightarrow(P\rightarrow R))$，可写成$P\rightarrow(P\rightarrow R)$，但不能写成$P\rightarrow P\rightarrow R$

无括号表示法

- **wff采用联结词中缀表示法,需要用括号区分运算次序**
- **波兰表示法(前缀): A θ B 表示为 θAB**
- **逆波兰表示法(后缀): A θ B 表示为 ABθ**
- **(逆)波兰式无需括号，便于计算机处理**

例: $(P\to(Q\vee R))$

波兰式: $\to P\vee QR$

逆波兰式: $PQR\vee\to$

命题公式的真值(语义)

- **命题公式的真值由其成员命题的真值决定，常用真值表方法计算**
- **设公式 α 由成分命题P1, ..., Pn联结而成**
  - 对P1, ..., Pn的真值指派决定了α 的真值
  - 指定P1、P2、...、Pn一组真值，则这组真值称为α的一个解释，常记为 I ，可表示为真值表的一行
  - α 总共有2^n个解释，构成α 的真值表(2^n行)

命题公式的真值(语义)

求下面公式的真值表：

$$G = (P \rightarrow ((\neg P \leftrightarrow Q) \wedge R)) \vee Q$$

其中，P、Q、R是G的所有命题变元。

P Q R	$\neg P$	$\neg P \leftrightarrow Q$	$((\neg P \leftrightarrow Q) \wedge R$	$P \rightarrow ((\neg P \leftrightarrow Q) \wedge R)$	G
0 0 0	1	0	0	1	1
0 0 1	1	0	0	1	1
0 1 0	1	1	0	1	1
0 1 1	1	1	1	1	1
1 0 0	0	1	0	0	0
1 0 1	0	1	1	1	1
1 1 0	0	0	0	0	1
1 1 1	0	0	0	0	1

重言式

- **若公式α在任一解释 I下，真值都为T，就称α为重言式（或永真式）**
  - 例如: $P \vee \neg P$ 是重言式
  - 重言式由$\wedge, \vee, \rightarrow, \leftrightarrow$联结所得公式仍是重言式
  - 重言式反映了逻辑规律
- **若公式α在某个解释 I_0下值为T，则称α是可满足的**
- **若公式α在任一解释 I下值都为F，就称α为矛盾式（永假式，或不可满足式）**
  - 例如: $P \wedge \neg P$ 是永假式

重言式

- **定理：（三类公式之间的关系）**

1、α 永真 *iff* $\neg\alpha$ 永假.

2、α 可满足 *iff* $\neg\alpha$ 非永真.

3、α 非永假 *iff* α 可满足.

重言式

例题：写出下列公式的真值表，并验证其公式是重言式、矛盾式、可满足公式。

（1）$G_1 = (P \rightarrow Q) \leftrightarrow (\neg P \vee Q)$；

（2）$G_2 = (P \leftrightarrow Q) \leftrightarrow (\neg(P \rightarrow Q) \vee \neg(Q \rightarrow P))$；

（3）$G_3 = (P \rightarrow \neg Q) \vee \neg Q$。

重言式

三个公式的真值表如下：

P Q	$(P\rightarrow Q)\leftrightarrow(\neg P\vee Q)$	$(P\leftrightarrow Q)\leftrightarrow(\neg(P\rightarrow Q)\vee\neg(Q\rightarrow P))$	$(P\rightarrow\neg Q)\vee\neg Q$
0 0	1	0	1
0 1	1	0	1
1 0	1	0	1
1 1	1	0	0

永真公式
可满足公式

永假公式

可满足公式

代入保持重言式

- **代入规则：将公式α 中的命题变元P的所有出现都替换成公式β，记为 $\alpha[P/\beta]$**
  - 针对命题变项代入
  - 处处代入
- **定理：若α是重言式，则 $\alpha[P/\beta]$ 也是重言式**
- **代入时被替换的是命题变元(原子命题)，而不能是复合命题**
- **代入时必须对同一命题变项处处替换以同一公式**

上海交通大學
SHANGHAI JIAO TONG UNIVERSITY

Institute of Media,
Information, and Network

Q & A

Many Thanks

zou-jn@cs.sjtu.edu.cn