

理论力学 CAI 静力学

- 力
- 力偶
- 力系的简化
- 约束
- 力系的平衡
- 摩擦与摩擦力

力偶



理论力学CAI

版权所有, 2000 (c) 上海交通大学工程力学系

静力学

力偶

- 力偶的定义
- 力偶的性质
- 力偶系及其合成



2018年9月11日

理论力学CAI 静力学

2

力偶

- 力偶的定义
- 力偶的性质
- 力偶系及其合成

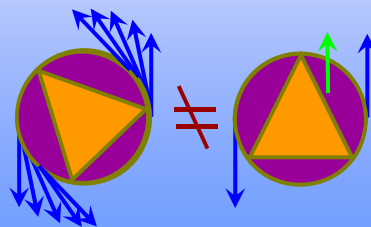
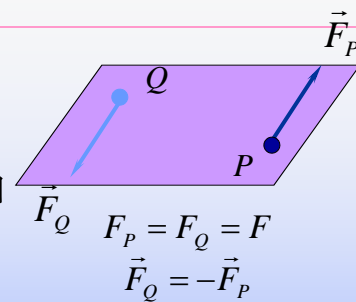


2018年9月11日
理论力学CAI 静力学

3

力偶的定义

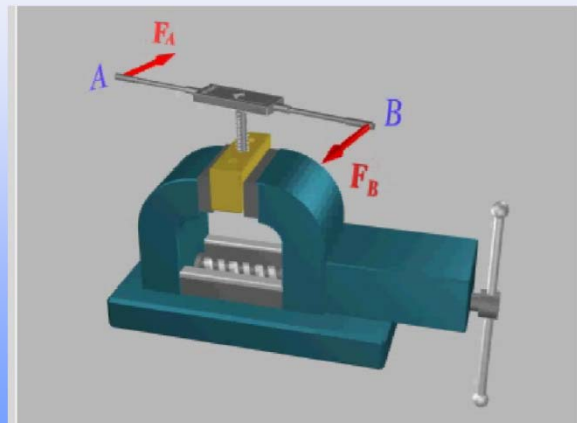
- 力偶的定义
 - 大小相等、方向相反、作用线相互平行的一对力称为**力偶**
 - **特殊的力系** (\vec{F}_P, \vec{F}_Q)
- 不可再简化的力系
 - 不可能有一个力与其等效
- 力偶的作用效果
 - 引起变形体扭曲
 - 改变刚体转动状态



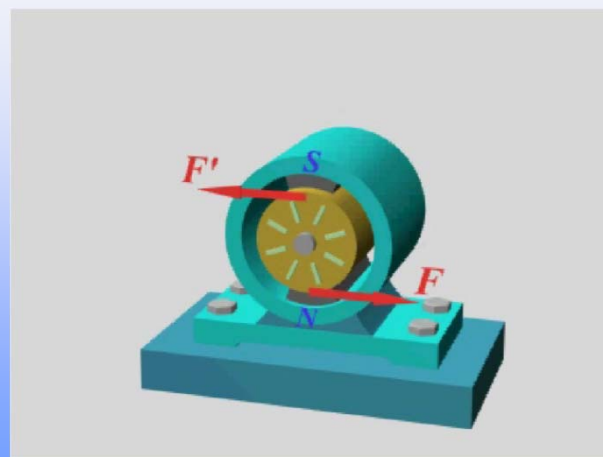
2018年9月11日
理论力学CAI 静力学

4

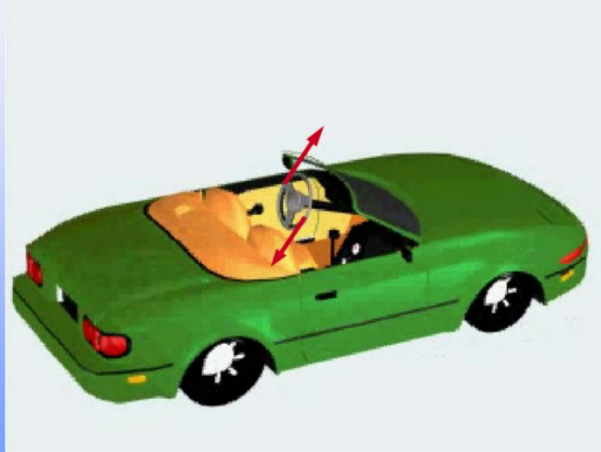
•力偶的作用的工程实例



•力偶的作用的工程实例



- 力偶的作用的工程实例



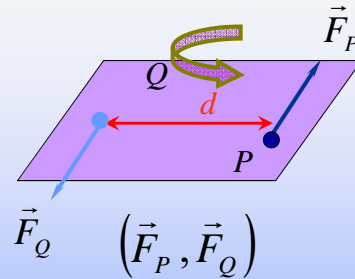
力偶

- 力偶的定义
- 力偶的性质
- 力偶系及其合成



力偶的性质

- 力偶的三个基本要素
 - 作用面
 - 两力构成的平面
 - 力与力臂
 - 力的大小
 - 两力作用线的距离
 - 转动方向（右手法则）
 - 两力构成的旋转效应的方向



- 力偶对任意点的矩

计算力偶对任意点 O 的矩之矢量和

$$\vec{M}_O(\vec{F}_P) + \vec{M}_O(\vec{F}_Q) = \vec{r}_P \times \vec{F}_P + \vec{r}_Q \times \vec{F}_Q$$

$$= \vec{r}_P \times \vec{F}_P - \vec{r}_Q \times \vec{F}_P$$

$$= (\vec{r}_P - \vec{r}_Q) \times \vec{F}_P = \vec{r}_{QP} \times \vec{F}_P$$

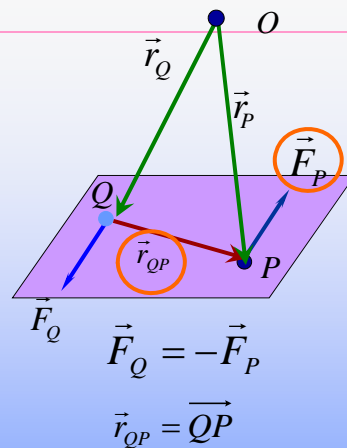
与矩心 O 无关！！

与力偶的要素有关

定义

$$\vec{M} \stackrel{\text{def}}{=} \vec{r}_{QP} \times \vec{F}_P = \vec{r}_{PQ} \times \vec{F}_Q$$

称为力偶矩矢量



力偶/力偶的性质

• 力偶矩矢量的特征

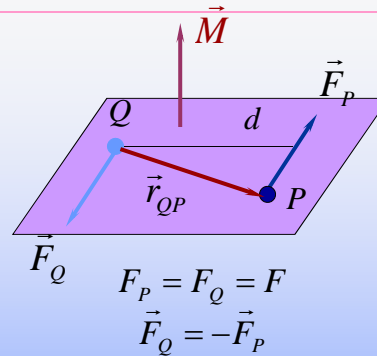
力偶矩矢量 $\vec{M} \stackrel{\text{def}}{=} \vec{r}_{QP} \times \vec{F}_P$

矢量方向 垂直于力偶作用面

\vec{r}_{QP} \vec{F}_P \vec{M} 右手法则

矢量大小

$M = F_P d = Fd$ 定义为力偶矩的大小



力偶矩矢量包含力偶的三要素信息：大小、作用面、力偶转向

力偶 (\vec{F}_P, \vec{F}_Q) 可由力偶矩矢量 \vec{M} 描述



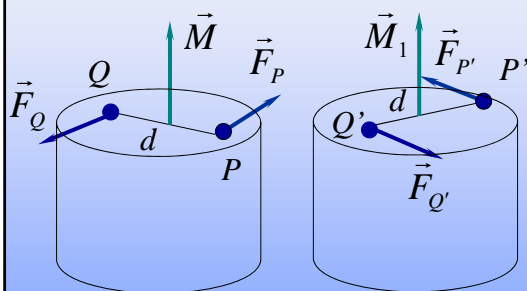
2018年9月11日
理论力学CAI 静力学

11

力偶/力偶系及其合成

• 力偶的等效性（刚体） (\vec{F}_P, \vec{F}_Q) $\vec{F}_Q = -\vec{F}_P$ $F_P = F_Q = F$

$$\vec{M} = \vec{r}_{QP} \times \vec{F}_P \quad M = Fd$$



$$\vec{M} = \vec{M}_1$$

力方向与作用点改变(间距不变)

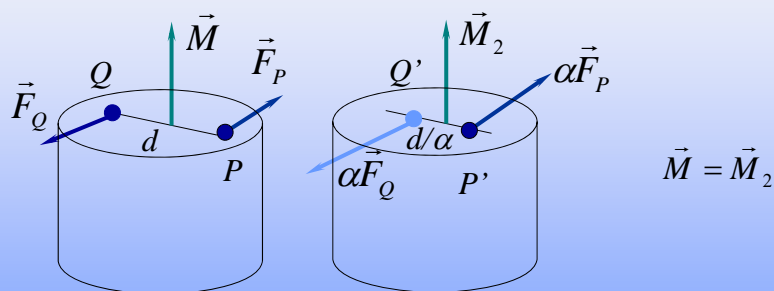


2018年9月11日
理论力学CAI 静力学

12

力偶/力偶系及其合成

- 力偶的等效性（刚体） (\vec{F}_P, \vec{F}_Q) $\vec{F}_Q = -\vec{F}_P$ $F_P = F_Q = F$
 $\vec{M} = \vec{r}_{QP} \times \vec{F}_P$ $M = Fd$



力与力臂大小相应改变

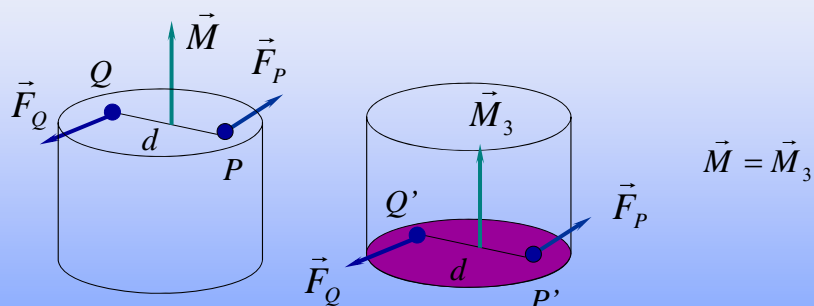


2018年9月11日
理论力学CAI 静力学

13

力偶/力偶系及其合成

- 力偶的等效性（刚体） (\vec{F}_P, \vec{F}_Q) $\vec{F}_Q = -\vec{F}_P$ $F_P = F_Q = F$
 $\vec{M} = \vec{r}_{QP} \times \vec{F}_P$ $M = Fd$



力偶作用面平移

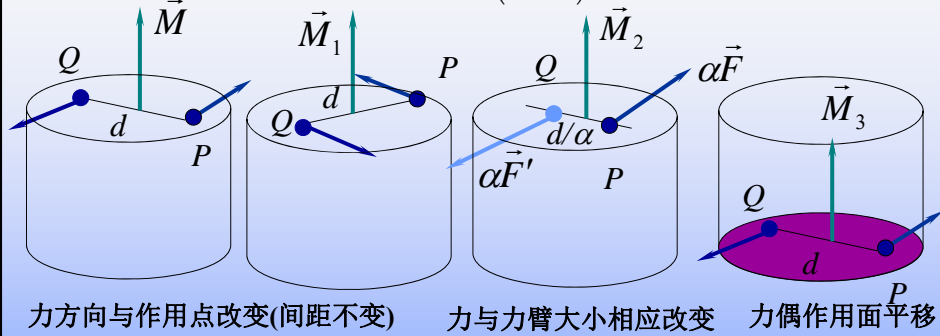


2018年9月11日
理论力学CAI 静力学

14

力偶/力偶系及其合成

• 力偶的等效性 (刚体) (\vec{F}, \vec{F}')



$$\vec{M} = \vec{M}_1 = \vec{M}_2 = \vec{M}_3$$

力偶矩矢量为自由矢量

? 给定力偶矩矢量, 对应的力偶系是唯一的吗

? 对于变形体会如何



2018年9月11日
理论力学CAI 静力学

15

力偶/力偶的性质

• 力偶矩矢量的计算

力偶矩矢量 $\vec{M} \stackrel{\text{def}}{=} \vec{r}_{QP} \times \vec{F}_P$

\vec{F}_P 对点Q的矩

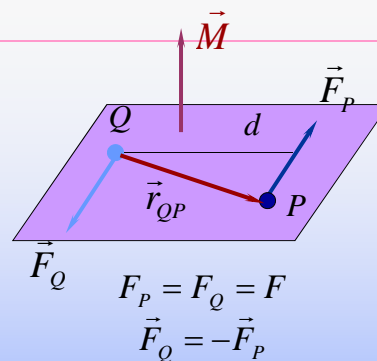
$$\vec{M}_Q(\vec{F}_P) = \vec{r}_{QP} \times \vec{F}_P$$

$$\vec{M} = \vec{M}_Q(\vec{F}_P)$$

力偶 (\vec{F}_P, \vec{F}_Q) 可由力偶矩矢量 \vec{M} 描述

该物理量等于力 \vec{F}_P 对点Q的矩

? 力偶矩=力矩



2018年9月11日
理论力学CAI 静力学

16

力偶

- 力偶的定义
- 力偶的性质
- 力偶系及其合成



力偶系及其合成

- 两力偶的合成
- 力偶系的合成



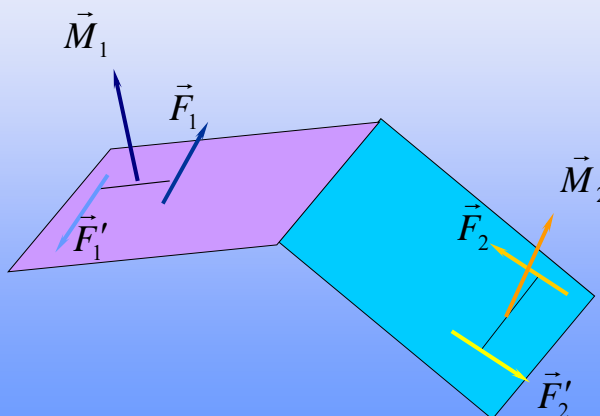
两力偶的合成

力偶1: (\vec{F}_1, \vec{F}'_1)

力偶矩矢量 \vec{M}_1

力偶2: (\vec{F}_2, \vec{F}'_2)

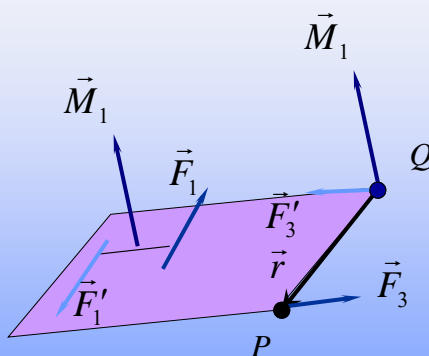
力偶矩矢量 \vec{M}_2



对于力偶1

$$(\vec{F}_1, \vec{F}'_1) = (\vec{F}_3, \vec{F}'_3)$$

$$\vec{M}_1 = \vec{r} \times \vec{F}_3$$



力偶/力偶系及其合成

对于力偶1

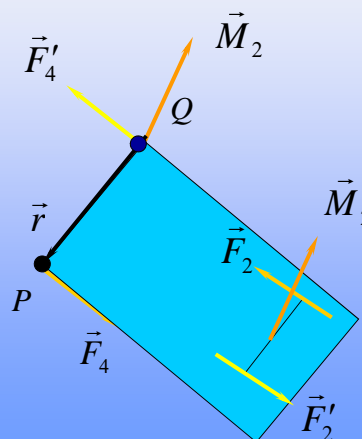
$$(\vec{F}_1, \vec{F}'_1) = (\vec{F}_3, \vec{F}'_3)$$

$$\vec{M}_1 = \vec{r} \times \vec{F}_3$$

对于力偶2

$$(\vec{F}_2, \vec{F}'_2) = (\vec{F}_4, \vec{F}'_4)$$

$$\vec{M}_2 = \vec{r} \times \vec{F}_4$$



2018年9月11日
理论力学CAI 静力学

22

力偶/力偶系及其合成

对于力偶1

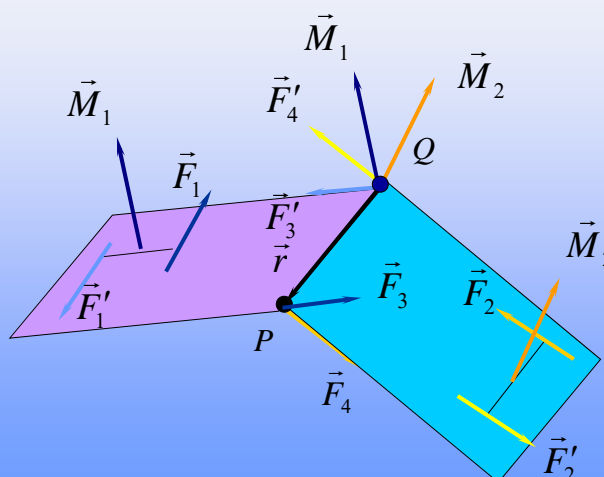
$$(\vec{F}_1, \vec{F}'_1) = (\vec{F}_3, \vec{F}'_3)$$

$$\vec{M}_1 = \vec{r} \times \vec{F}_3$$

对于力偶2

$$(\vec{F}_2, \vec{F}'_2) = (\vec{F}_4, \vec{F}'_4)$$

$$\vec{M}_2 = \vec{r} \times \vec{F}_4$$



2018年9月11日
理论力学CAI 静力学

23

力偶/力偶系及其合成

汇交力
系的合
力

$$\vec{F} = \vec{F}_3 + \vec{F}_4$$

$$\vec{F}' = \vec{F}'_3 + \vec{F}'_4$$

$$\vec{M}_1 = \vec{r} \times \vec{F}_3$$

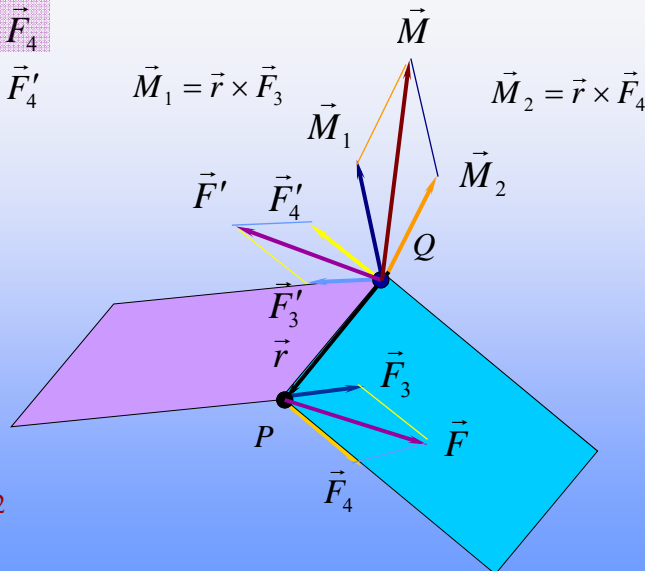
$$\vec{M}_2 = \vec{r} \times \vec{F}_4$$

合力偶: (\vec{F}, \vec{F}')

合力偶矩矢量

$$\begin{aligned}\vec{M} &= \vec{r} \times \vec{F} \\ &= \vec{r} \times (\vec{F}_3 + \vec{F}_4) \\ &= \vec{r} \times \vec{F}_3 + \vec{r} \times \vec{F}_4\end{aligned}$$

$$\vec{M} = \vec{M}_1 + \vec{M}_2$$



2018年9月11日
理论力学CAI 静力学

两力偶的合力偶矩等于两力偶矩的矢量和 24

力偶/力偶系及其合成

力偶系的合成

n 个力偶的集合构成力偶系 $(\vec{M}_1, \vec{M}_2, \dots, \vec{M}_n)$

合力偶矩 $\vec{M} = \sum_{i=1}^n \vec{M}_i$

合力偶矩等于力偶系所有力偶矩的矢量和

合力偶矩矢量坐标式 $\vec{M} = \sum_{i=1}^n \vec{M}_i$

参考基 $\vec{e} = (\vec{x} \quad \vec{y} \quad \vec{z})^T$

$$\vec{M} = (M_x \quad M_y \quad M_z)^T$$

$$\vec{M}_i = (M_{ix} \quad M_{iy} \quad M_{iz})^T$$

$$M_x = \sum_{i=1}^n M_{ix} \quad M_y = \sum_{i=1}^n M_{iy} \quad M_z = \sum_{i=1}^n M_{iz}$$

合力偶矩的坐标等于力偶系各力偶矩对应坐标的代数和



2018年9月11日
理论力学CAI 静力学

25

- 小结

- 力与力偶的性质
 - 对刚体作用的性质
- 基本力系
 - 汇交力系
 - 力偶系
- 基本力系的合成
 - 汇交力系与一个作用于汇交点的合力等效
 - 力偶系与一个合力偶等效

$$\vec{F}_O = \vec{F}_R = \sum_{i=1}^n \vec{F}_i \qquad \vec{M} = \sum_{i=1}^n \vec{M}_i$$

