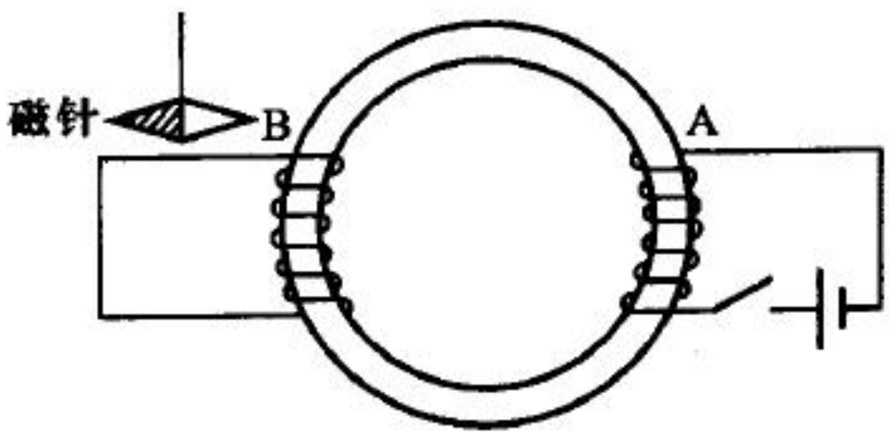
第 16 章 变化的电磁场

16.1 电磁感应定律

法拉第（Michael Faraday, 1791-1867），伟大的英国物理学家和化学家.他创造性地提出场的思想，磁场这一名称是法拉第最早引入的。他是电磁理论的创始人之一，于1831年发现电磁感应现象，后又相继发现电解定律，物质的抗磁性和顺磁性，以及光的偏振面在磁场中的旋转。

- 1831年8月29日 Faraday 做了第一个电磁感应实验并取得成功。

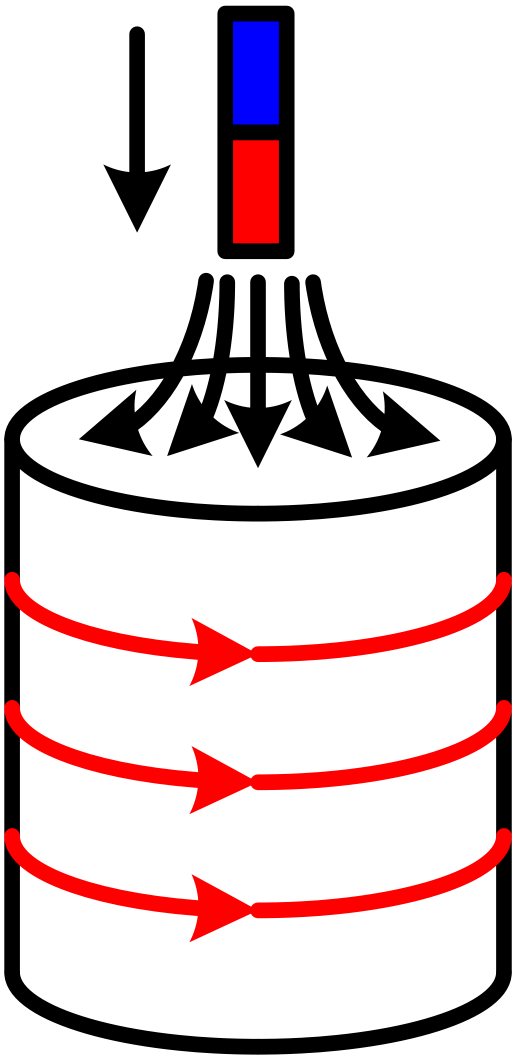


示意图

Michael Faraday (1791–1867) was one of 10 children of a blacksmith in London. As a youngster, with little formal education, Michael was apprenticed to a bookbinder. But he longed to enter "the service of Science" and ultimately became one of the greatest experimentalists of all time.

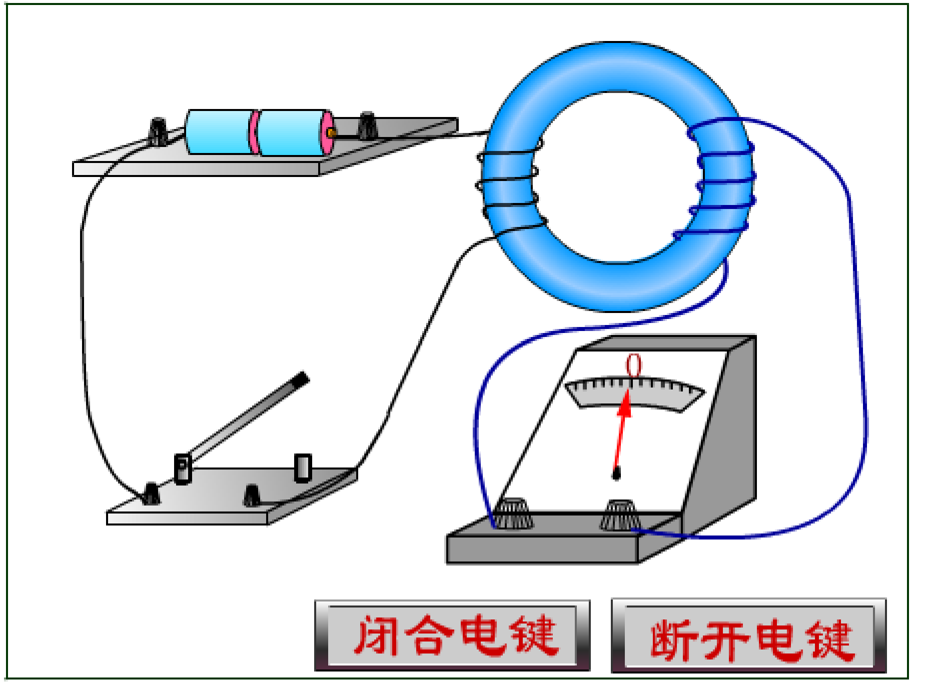
一、楞次定则

楞次定则：感应电动势产生的感应电流的方向总是使感应电流的磁场通过回路的磁通量阻碍原磁通量的变化。



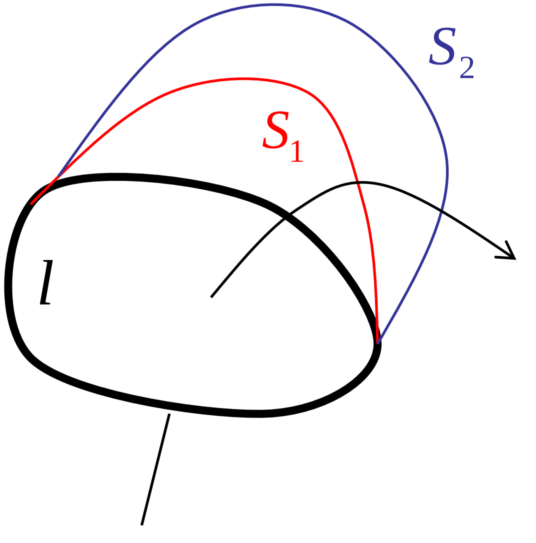
二、 电磁感应定律

当穿过闭合回路所围面积的磁通量发生变时，回路中会产生感应电动势，且感应电动势正比于磁通量对时间变化率的负值。



$$\varepsilon = -\frac{\mathrm{d}\Phi_{\mathrm{m}}}{\mathrm{d}t}$$

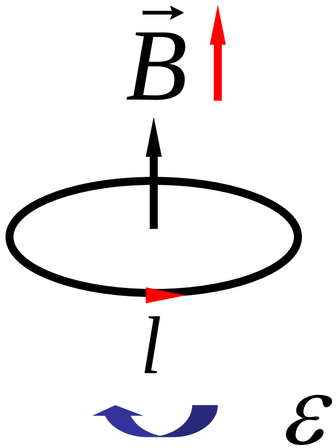
SI： $\varepsilon(\mathrm{V}), \Phi_{\mathrm{m}}(\mathrm{Wb})$



注：1. Φ_m：通过回路的磁通量

2. Φ_m：有正负

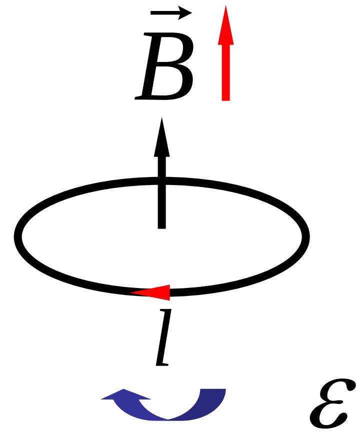
$$\varepsilon = -\frac{\mathrm{d}\Phi_\mathrm{m}}{\mathrm{d}t}$$



$\Phi_\mathrm{m} > 0$

$\Delta\Phi_\mathrm{m} > 0$

$\varepsilon < 0$

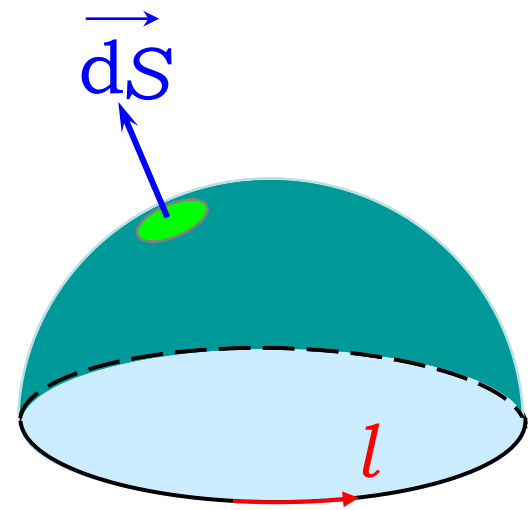


$\Phi_\mathrm{m} < 0$

$\Delta\Phi_\mathrm{m} < 0$

$\varepsilon > 0$

约定：先规定回路正方向，从而得到磁通量，再求感应电动势。若为正，则与规定的回路方向相同。若为负，则其方向与假设方向相反。



※ 环路绕行方向l和环路面积法线方向 呈右螺旋关系.

若回路线圈有*N*匝，则由于串联关系

$$\varepsilon = -N\frac{\mathrm{d}\Phi_{\mathrm{m}}}{\mathrm{d}t} = -\frac{\mathrm{d}(N\Phi_{\mathrm{m}})}{\mathrm{d}t} = -\frac{\mathrm{d}\Psi}{\mathrm{d}t}$$

$\Psi = N\Phi_{\mathrm{m}}$——磁通链　　一般情况：$\Psi = \sum_i \Phi_{\mathrm{m}i}$

设线圈电阻为***R***　　$I = \dfrac{\varepsilon}{R} = -\dfrac{1}{R}\dfrac{\mathrm{d}\Psi}{\mathrm{d}t}$

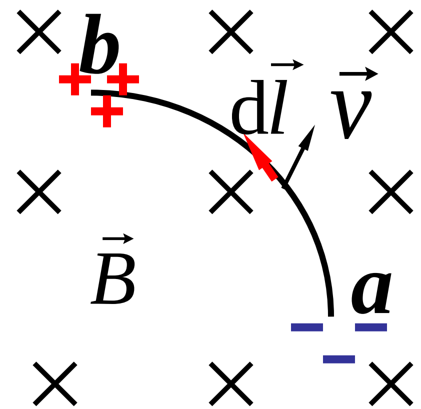
在t_1到t_2时间内流过的电量：

磁强计的设计原理

$$q = \left|\int_{t_1}^{t_2} I\mathrm{d}t\right| = \frac{1}{R}\left|\int_{\Psi_1}^{\Psi_2}\mathrm{d}\Psi\right| = \frac{1}{R}\left|\Psi_2 - \Psi_1\right|$$

16.2 动生电动势

一、洛伦兹力产生动生电动势



设稳恒磁场 $\vec{B}$ 导线运动

载流子受力 $\vec{F} = q\vec{v} \times \vec{B}$ 如 ***q>0***

动生电动势的非静电力场来源 ⇨ 洛伦兹力

$$\vec{E}_{\mathrm{k}} = \frac{\vec{F}}{q} = \vec{v} \times \vec{B}$$

$$\varepsilon = \int_a^b \vec{E}_{\mathrm{k}} \cdot \mathrm{d}\vec{l} = \int_a^b (\vec{v} \times \vec{B}) \cdot \mathrm{d}\vec{l}$$ 如 $\varepsilon > 0, \varepsilon \,//\, \mathrm{d}\vec{l}$

对于导线回路 $\varepsilon = \oint_l \left(\vec{v} \times \vec{B}\right) \cdot \mathrm{d}\vec{l}$

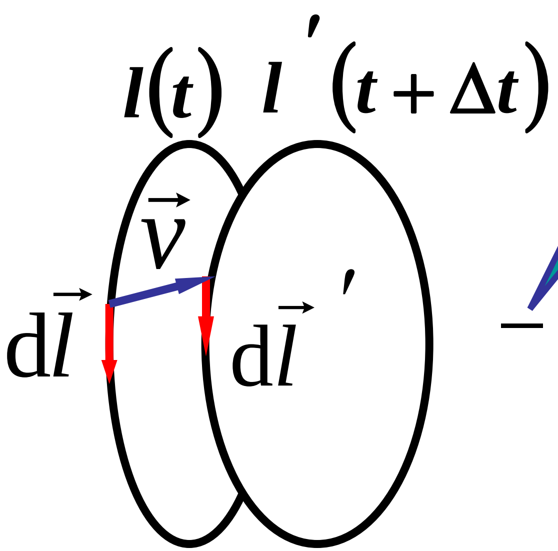
试证明：在稳恒磁场中，动生电动势

$$\varepsilon = \oint_l (\vec{v} \times \vec{B}) \cdot d\vec{l} = -\frac{d\Phi_m}{dt}$$

证明：如图 Δt 时间内 $d\vec{l}$ 扫过面积

$$d\vec{S} = d\vec{l} \times \vec{v} \Delta t$$

左、右底面和侧面构成闭合曲面 S！



$$\Rightarrow \oiint_S \vec{B} \cdot d\vec{S} = 0$$

? ?

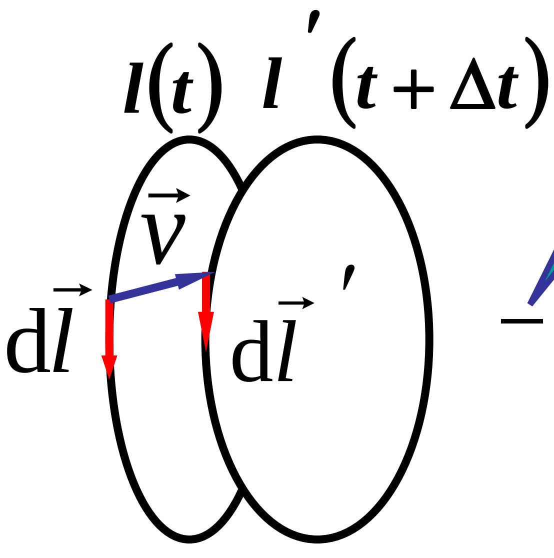
$$-\iint_l \vec{B} \cdot d\vec{S} + \iint_{S'} \vec{B} \cdot (d\vec{l} \times \vec{v} \Delta t) + \iint_{l'} \vec{B} \cdot d\vec{S} = 0$$

$$\because\ \vec{\alpha}\cdot(\vec{\beta}\times\vec{\gamma})=\vec{\beta}\cdot(\vec{\gamma}\times\vec{\alpha})=\vec{\gamma}\cdot(\vec{\alpha}\times\vec{\beta})$$

$$\Rightarrow \oint_l \left(\vec{v}\times\vec{B}\right)\cdot \mathrm{d}\vec{l}\,\Delta t=-\left(\iint_{l'}\vec{B}\cdot\mathrm{d}\vec{S}-\iint_{l}\vec{B}\cdot\mathrm{d}\vec{S}\right)$$

$$=-\Delta\varPhi_{\mathrm{m}}$$

$\Delta t\to 0$时， $\Longrightarrow$ $$\varepsilon=\oint_l\left(\vec{v}\times\vec{B}\right)\cdot\mathrm{d}\vec{l}=-\frac{\mathrm{d}\varPhi_{\mathrm{m}}}{\mathrm{d}t}$$



? ?

$$-\iint_{l}\vec{B}\cdot\mathrm{d}\vec{S}+\iint_{S'}\vec{B}\cdot\left(\mathrm{d}\vec{l}\times\vec{v}\Delta t\right)+\iint_{l'}\vec{B}\cdot\mathrm{d}\vec{S}=0$$

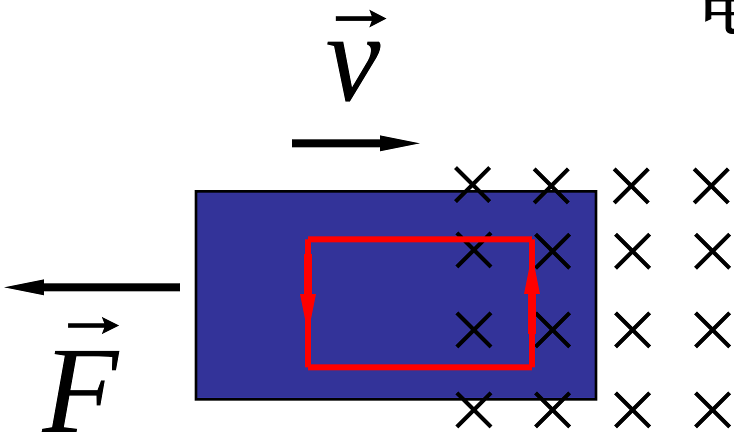
非闭合回路：

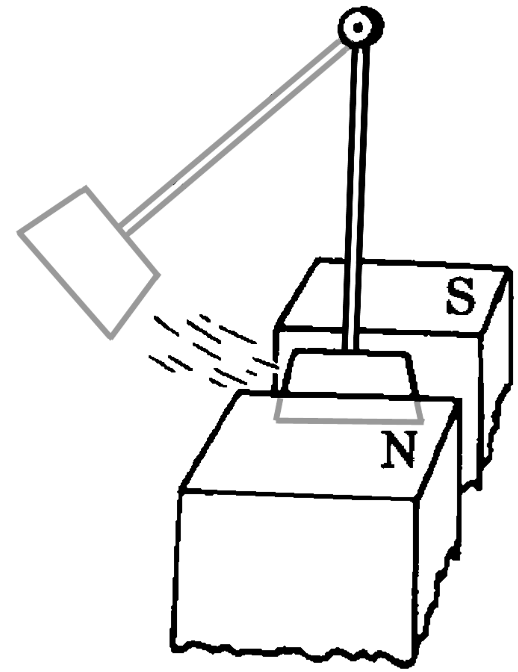
$$\varepsilon=\int_a^b(\vec{v}\times\vec{B})\cdot\mathrm{d}\vec{l}$$

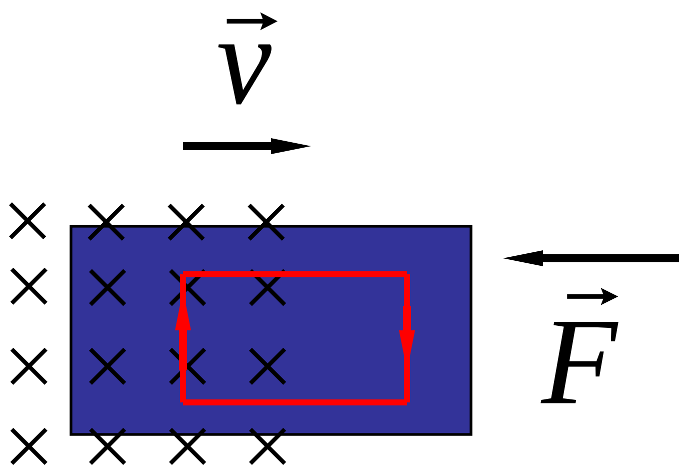
$$=-\frac{\boxed{\mathrm{d}\Phi_{\mathrm{m}}}}{\mathrm{d}t}$$

d*t* 时间内扫过面积的磁通量

电磁阻尼：



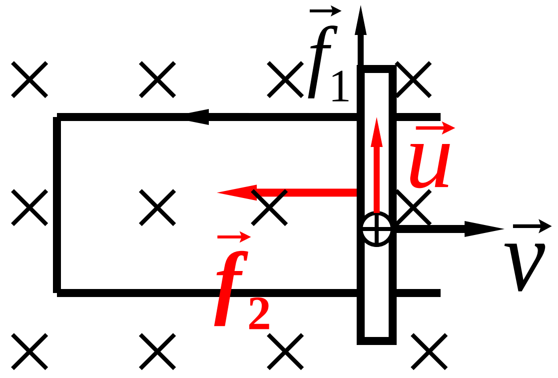




二、动生电动势过程中的能量转化

设均匀磁场 $\vec{B}$ 以恒定外力向右拉杆

$$\vec{v}\uparrow \rightarrow I\uparrow \rightarrow IBl\uparrow$$



$$\vec{F}=q\left(\vec{v}+\vec{u}\right)\times\vec{B}$$

$$=q\vec{v}\times\vec{B}+q\vec{u}\times\vec{B}=\vec{f}_1+\vec{f}_2$$

$$\vec{f}_1\cdot\vec{u}=q(\vec{v}\times\vec{B})\cdot\vec{u}=q\left(\vec{B}\times\vec{u}\right)\cdot\vec{v}=-q\left(\vec{u}\times\vec{B}\right)\cdot\vec{v}=-\vec{f}_2\cdot\vec{v}$$

外力做正功输入机械能，安培力做负功吸收它，同时感应电动势在回路中做正功又以电能形式输出这个份额的能量。

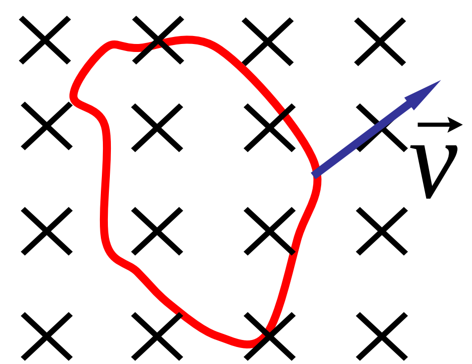
洛伦兹力的作用并不提供能量，而只是传递能量。

三、动生电动势的计算

1. 对于导线回路

(1) $\varepsilon = \oint_l (\vec{v} \times \vec{B}) \cdot \mathrm{d}\vec{l}$

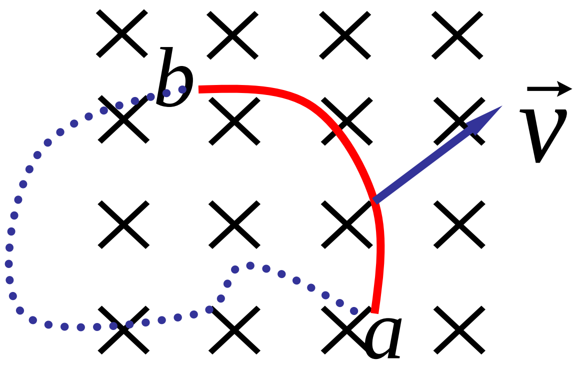
(2) $\varepsilon = -\dfrac{\mathrm{d}\Phi_{\mathrm{m}}}{\mathrm{d}t}$



2. 对于一段导线

(1) $\varepsilon_{ab} = \int_a^b (\vec{v} \times \vec{B}) \cdot \mathrm{d}\vec{l}$

(2) $\varepsilon_{ab} = \varepsilon = -\dfrac{\mathrm{d}\Phi_{\mathrm{m}}}{\mathrm{d}t}$



[例]一根长为L的铜棒，在均匀磁场B中以角速度ω在与磁场方向垂直的平面上作匀速转动。求棒的两端之间的感应电动势大小。

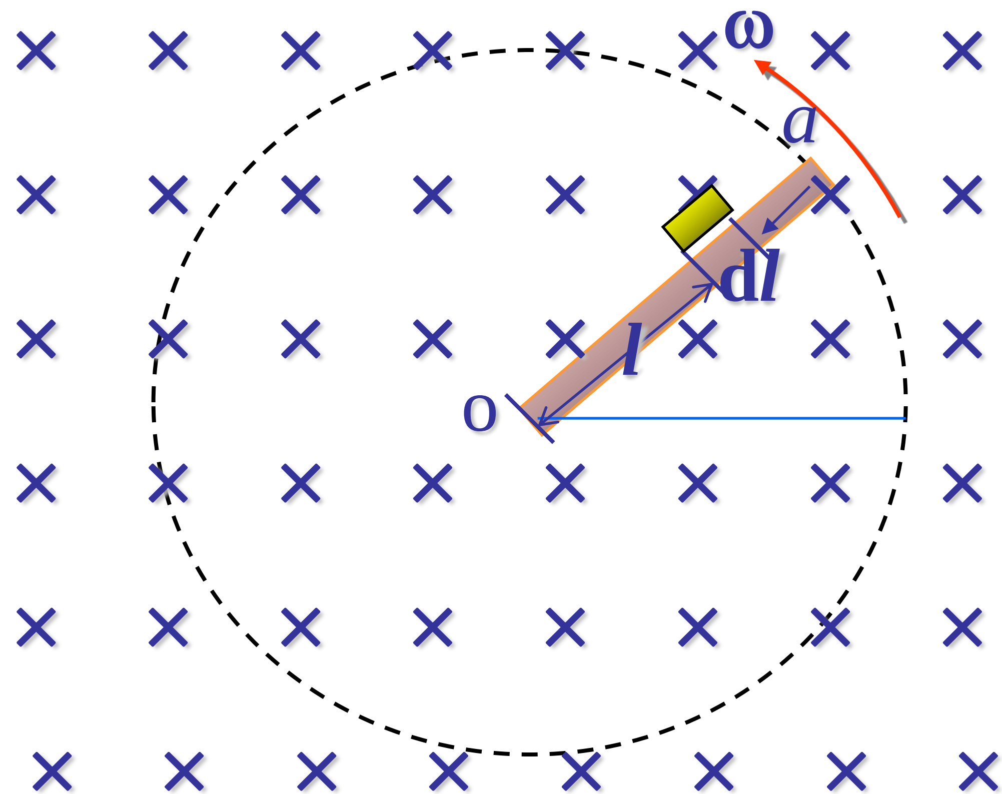
解：　方法一

$$\varepsilon_{oa} = \int_0^L (\vec{v} \times \vec{B}) \cdot d\vec{l}$$

$$= -\int_0^L vB\,dl$$

$$= -\int_0^L B\omega\, l\,dl$$

$$= -\frac{1}{2} B\omega L^2$$



动生电动势方向：$a \rightarrow o$

方法二 $\Phi = BS$

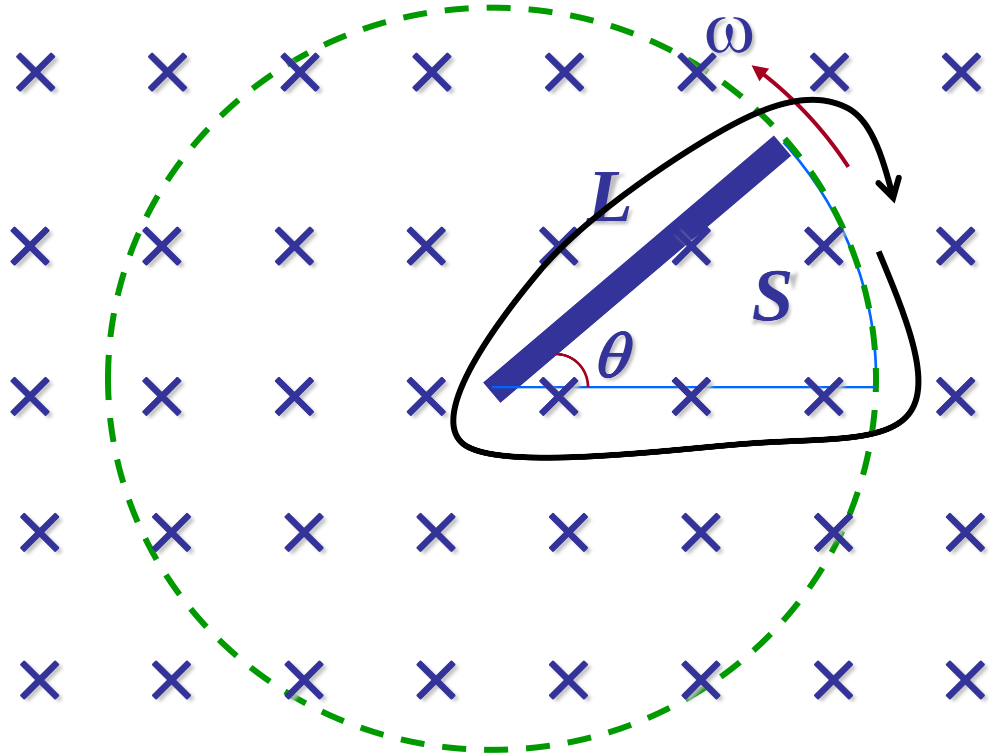
$$S = \frac{1}{2} L^2 \theta$$

$$\varepsilon = -\frac{\mathrm{d}\Phi}{\mathrm{d}t}$$

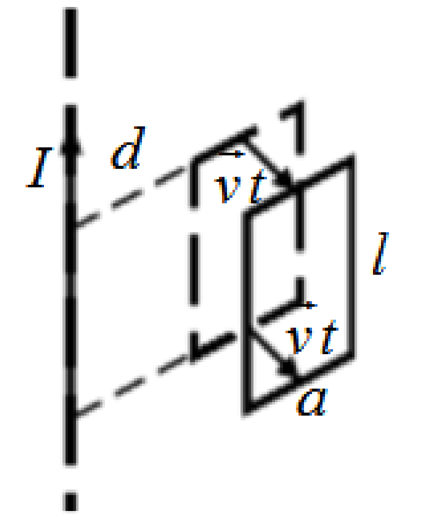
$$= -\frac{1}{2} B L^2 \frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t}$$

$$= -\frac{1}{2} B L^2 \omega$$

$$\varepsilon_{ab} = -\frac{1}{2} B L^2 \omega$$



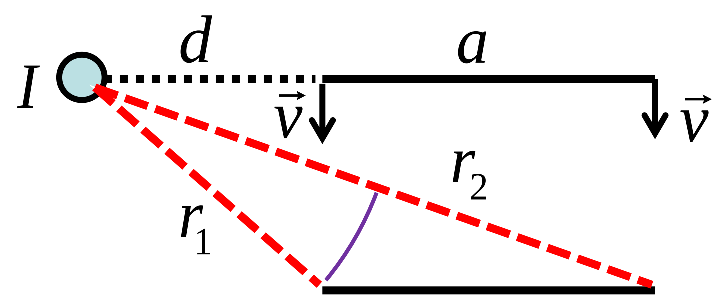
[例]一根无限长直导线通有恒定的电流I，长为l，宽为a的矩形线圈初始时刻与导线共面，其两个对边与导线平行，与导线近的一边距导线d（如图），然后以垂直于线圈平面的速度v做匀速运动，求：t时刻线圈中的感应电动势（忽略线圈自感）。



解：原图的俯视图如右图：

电流垂直纸面向外，线圈在 t 时刻移动到下方位置，

电流到线圈末位置左右两边的距离分别是 r_1 和 r_2，则：



$$\phi = \int_{r_1}^{r_2} \frac{\mu_0 Il}{2\pi r} dr = \frac{\mu_0 Il}{2\pi} \ln \frac{r_2}{r_1}$$

$$r_1^2 = v^2 t^2 + d^2, \quad r_2^2 = v^2 t^2 + (d+a)^2$$

$$\varepsilon_i = -\frac{d\phi}{dt} = -\frac{d}{dt}\left(\frac{\mu_0 Il}{4\pi} \ln \frac{r_2^2}{r_1^2}\right)$$

$$= \frac{\mu_0 Ilv^2 t}{2\pi}\left(\frac{1}{r_1^2} - \frac{1}{r_2^2}\right)$$

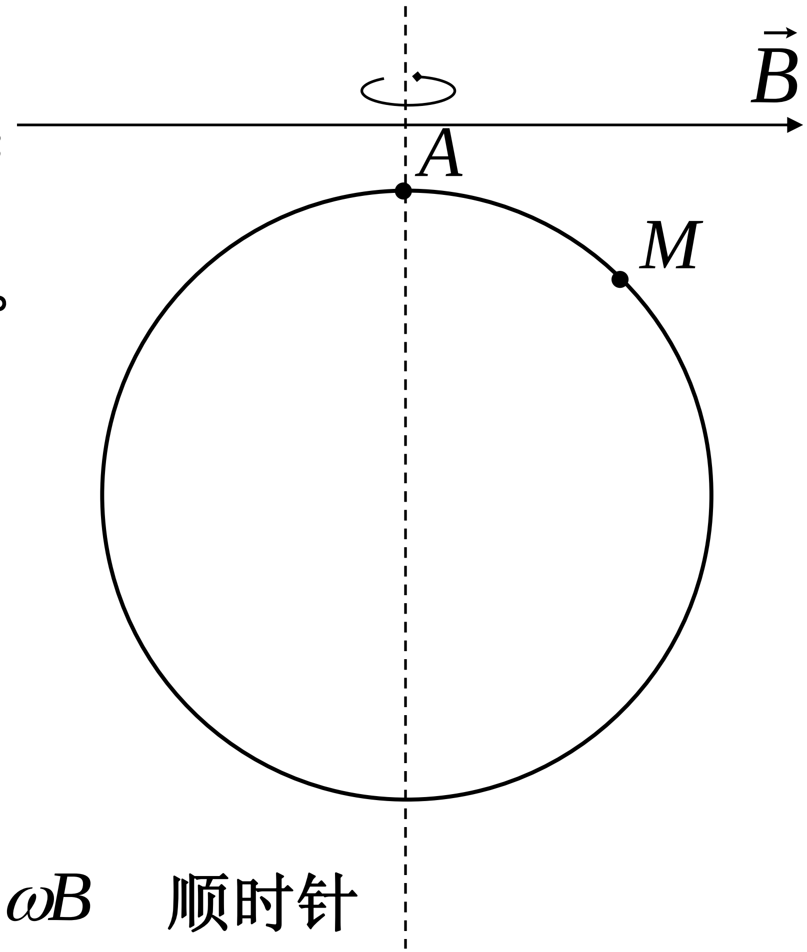
顺时针

[例] 如图所示，半径为*R*总电阻为*r*的圆形均匀刚性线圈，在磁感应强度为*B*的均匀磁场中以角速度ω(从上向下看逆时针转)做匀角速转动，转轴（沿线圈直径）垂直于磁场。轴与线圈交于点*A*，弧*AM*占1/8周长。设线圈自感可以忽略，当线圈平面转至与磁场平行时，求：

（1）线圈中的动生电动势；

（2）弧*AM*中的动生电动势 ε_{AM} ；

（3）点*A*与点*M*间的电势差 U_{AM} 。



$$\Phi_{\mathrm{m}} = \pi R^2 B\cos\omega t$$

$$\varepsilon = -\frac{\mathrm{d}\Phi_{\mathrm{m}}}{\mathrm{d}t} = \pi R^2\omega B\sin\omega t$$

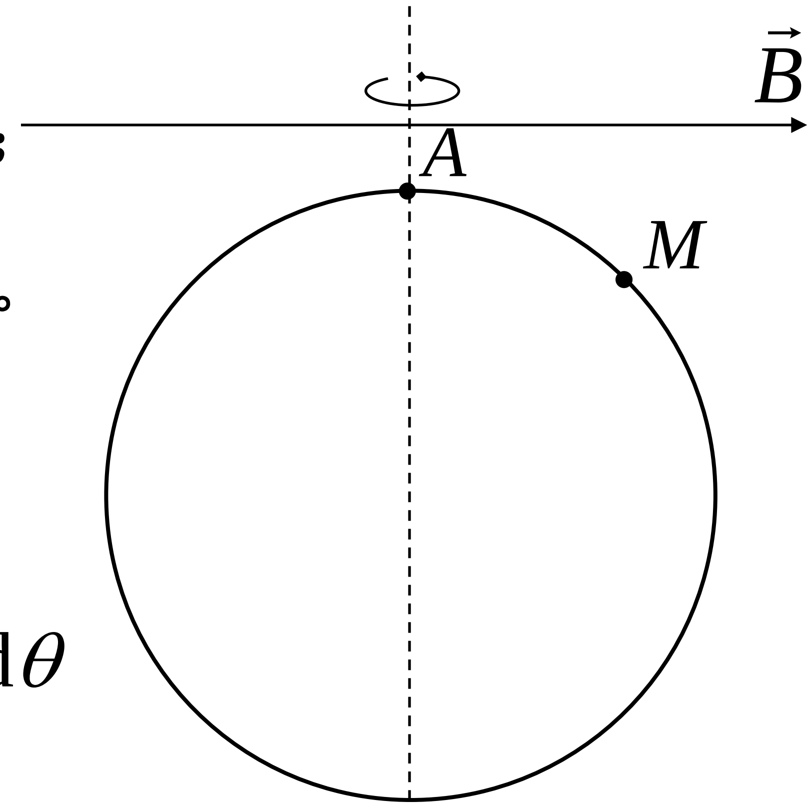
当线圈与磁场平行时，$\varepsilon_{\mathrm{m}} = \pi R^2\omega B$ 顺时针

[例] 如图所示，半径为R总电阻为r的圆形均匀刚性线圈，在磁感应强度为B的均匀磁场中以角速度ω(从上向下看逆时针转)做匀角速转动，转轴（沿线圈直径）垂直于磁场。轴与线圈交于点A，弧AM占1/8周长。设线圈自感可以忽略，当线圈平面转至与磁场平行时，求：

（1）线圈中的动生电动势；

（2）弧AM中的动生电动势 ε_{AM}；

（3）点A与点M间的电势差 U_{AM}。



$$\mathrm{d}\varepsilon = vB\sin\theta\,\mathrm{d}l = R^2\omega B\sin^2\theta\,\mathrm{d}\theta$$

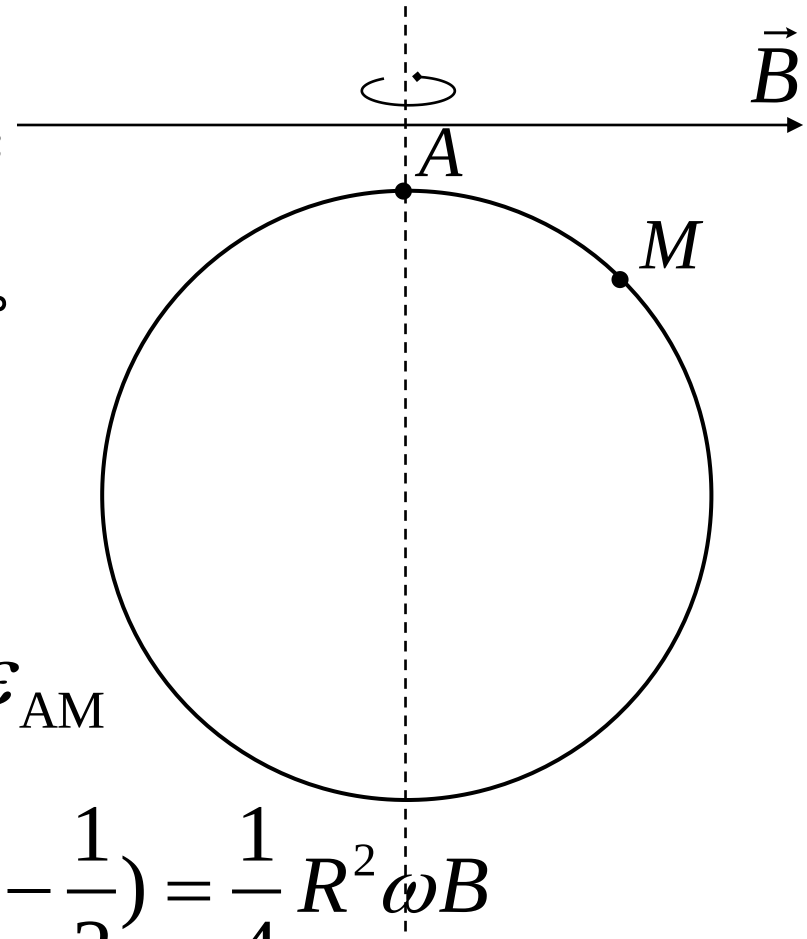
$$\varepsilon_{\mathrm{AM}} = R^2\omega B\int_0^{\frac{\pi}{4}}\sin^2\theta\,\mathrm{d}\theta = \frac{1}{2}R^2\omega B\int_0^{\frac{\pi}{4}}(1-\cos2\theta)\,\mathrm{d}\theta = \frac{1}{2}R^2\omega B\left(\frac{\pi}{4}-\frac{1}{2}\right)$$

[例] 如图所示，半径为***R***总电阻为***r***的圆形均匀刚性线圈，在磁感应强度为***B***的均匀磁场中以角速度**ω**(从上向下看逆时针转)做匀角速转动，转轴（沿线圈直径）垂直于磁场。轴与线圈交于点***A***，弧***AM***占**1/8**周长。设线圈自感可以忽略，当线圈平面转至与磁场平行时，求：

（1）线圈中的动生电动势；

（2）弧***AM***中的动生电动势 ε_{AM} ；

（3）点***A***与点***M***间的电势差 U_{AM} 。

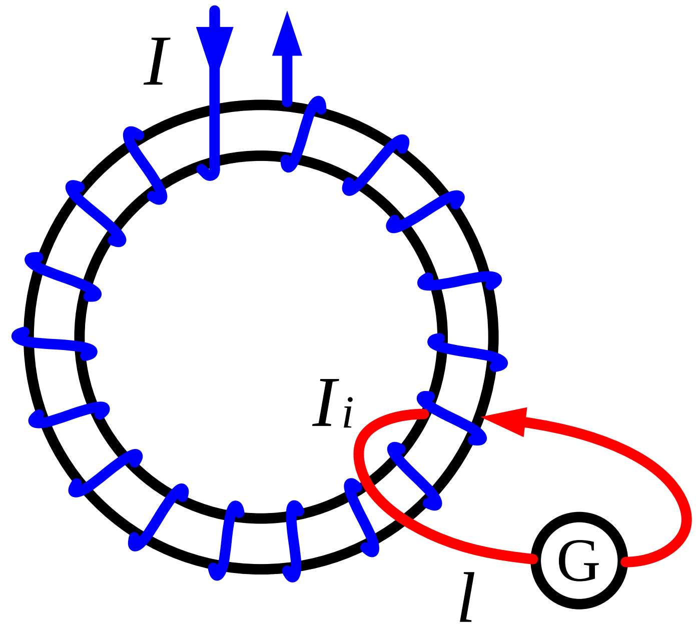


$$U_{\mathrm{AM}} = ir' - \varepsilon_{\mathrm{AM}} = \varepsilon_{\mathrm{m}} \frac{r'}{r} - \varepsilon_{\mathrm{AM}}$$

$$= \frac{1}{8}\pi R^2 \omega B - \frac{1}{2} R^2 \omega B \left(\frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}\right) = \frac{1}{4} R^2 \omega B$$

16.3　感生电动势　感应电场

一、　感生电动势

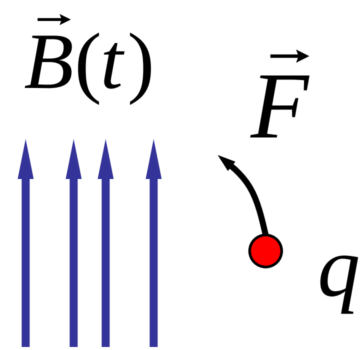


I 变化时　$\varepsilon = -\dfrac{\mathrm{d}\Phi_\mathrm{m}}{\mathrm{d}t}$　　$I_\mathrm{i} = \dfrac{\varepsilon}{R}$

产生感生电动势的
非静电力是什么？

$$\vec{F} = q(\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B})$$

1.　$\vec{v} = 0, \vec{B} = 0 \Rightarrow \vec{f}_\mathrm{m} = 0$　　　2.



产生感生电动势的非静电力一定不是洛伦兹力。

麦克斯韦提出感应电场概念：当空间中的磁场发生变化时，就在周围空间激起感应电场 $\vec{E}_i$，在导体中产生感生电动势，并形成感应电流。

一段导线：$\varepsilon = \int_a^b \vec{E}_\mathrm{i} \cdot \mathrm{d}\vec{l}$ 闭合回路：$\varepsilon = \oint_l \vec{E}_\mathrm{i} \cdot \mathrm{d}\vec{l}$

$$\oint_l \vec{E}_\mathrm{i} \cdot \mathrm{d}\vec{l} = -\frac{\mathrm{d}\Phi_\mathrm{m}}{\mathrm{d}t} \qquad \frac{\mathrm{d}\Phi_\mathrm{m}}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\iint_S \vec{B} \cdot \mathrm{d}\vec{S} = \iint_S \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \cdot \mathrm{d}\vec{S}$$

$$\Rightarrow \oint_l \vec{E}_\mathrm{i} \cdot \mathrm{d}\vec{l} = -\iint_S \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \cdot \mathrm{d}\vec{S}$$ 变化磁场产生电场

※ ***S*** 是以 ***l*** 为边界的任一曲面，

其法线方向选取与 ***l*** 的积分方向呈右螺旋关系。

二、感应电场的性质

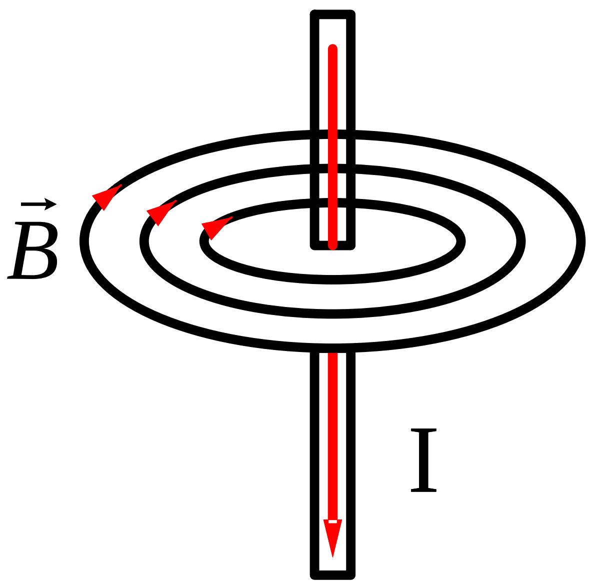
	静电场 $\vec{E}_s$	感应电场 $\vec{E}_i$
场源	静电荷	变化的磁场
环流	$\oint_l \vec{E}_s \cdot d\vec{l} = 0$	$\oint_l \vec{E}_i \cdot d\vec{l} = -\iint_S \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \cdot d\vec{S}$
	无旋场	有旋场
通量	$\oiint_S \vec{E}_s \cdot d\vec{S} = q / \varepsilon_0$	$\oiint_S \vec{E}_i \cdot d\vec{S} = 0$
	有源场	无源场

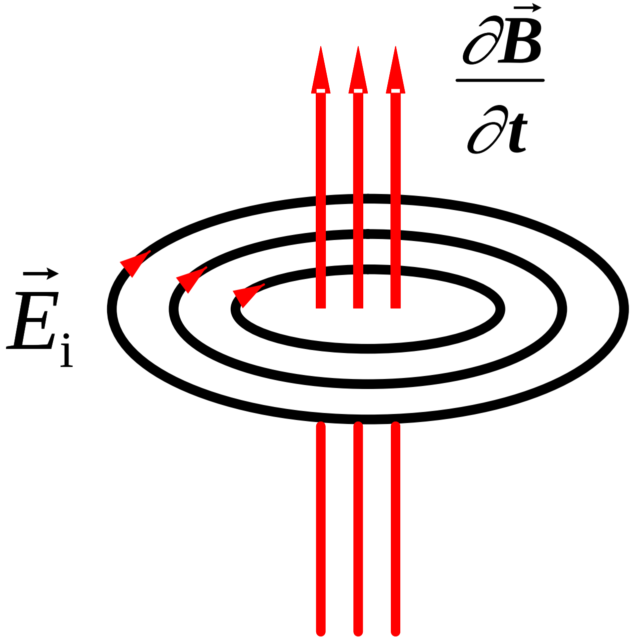
麦克斯韦之假设

感应电场与磁场涡旋性质相似！

$$\oint_l \vec{B}\cdot \mathrm{d}\vec{l} = \mu_0 I = \mu_0 \iint_S \vec{j}\cdot \mathrm{d}\vec{S} \qquad \oint_l \vec{E}_\mathrm{i}\cdot \mathrm{d}\vec{l} = -\iint_S \frac{\partial \vec{B}}{\partial t}\cdot \mathrm{d}\vec{S}$$

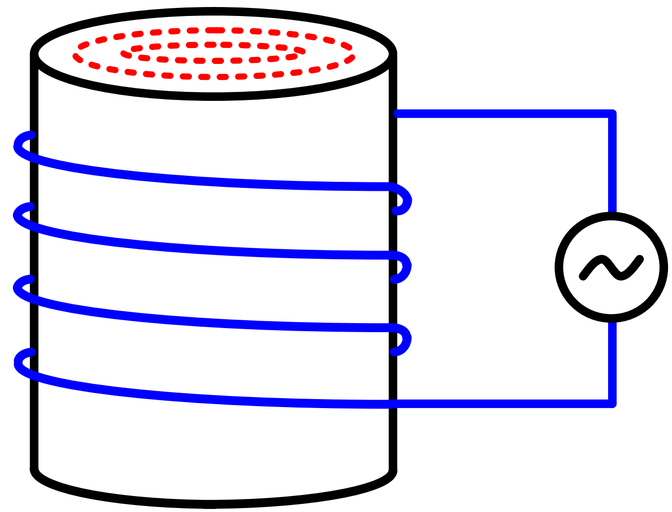
$$\vec{B} \Leftrightarrow \vec{E}_\mathrm{i} \qquad \vec{j} \Leftrightarrow -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$$





三、 感应涡电流 趋肤效应

感应电流不仅能在导电回路内出现， 而且当大块导体与磁场有相对运动或处在变化的磁场中时，在这块导体中也会激起感应电流.这种在大块导体内流动的感应电流,叫做涡电流，简称涡流。

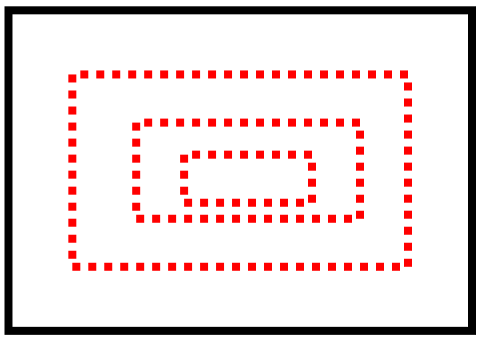


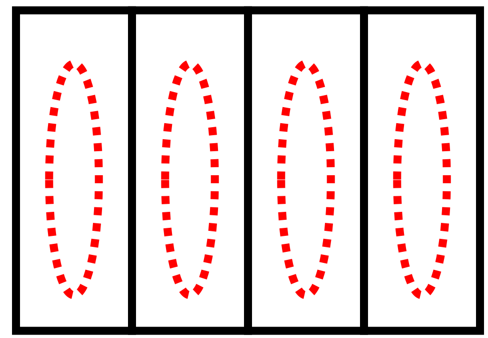
$$I \propto E_{\mathrm{i}} \propto \frac{\partial B}{\partial t} \propto \omega$$

热功率 $P \propto \omega^2$

热效应有危害也有应用

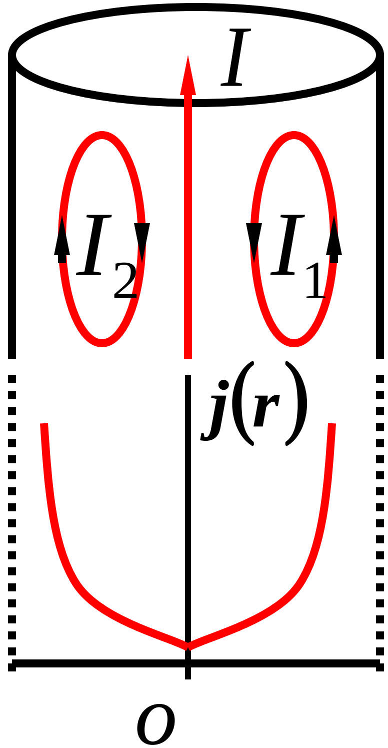
减小涡电流的方法：　使用硅钢片材料



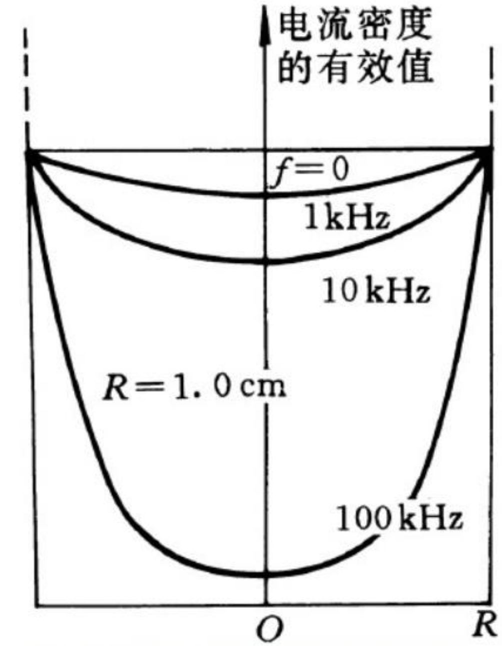


演示

趋肤效应（对于高频电流）



有效截面$S\downarrow \Rightarrow$电阻$\uparrow$



改善方法：（1）表面镀银以减小电阻

（2）分束法，增加导线表面积

（3）挖空中心，节省材料

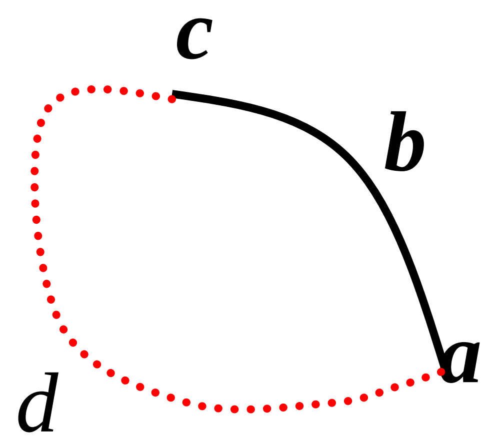
四、 感生电动势的计算

1. 导体为闭合回路 $\varepsilon = -\dfrac{\mathrm{d}\Phi_{\mathrm{m}}}{\mathrm{d}t}$

2. 非合闭合回路

（1） $\oint_l \vec{E}_{\mathrm{i}} \cdot \mathrm{d}\vec{l} = -\iint_S \dfrac{\partial \vec{B}}{\partial t} \cdot \mathrm{d}\vec{S}$

$$\Rightarrow \vec{E}_{\mathrm{i}} \Rightarrow \varepsilon = \int_a^c \vec{E}_{\mathrm{i}} \cdot \mathrm{d}\vec{l}$$



（2） $\varepsilon = -\dfrac{\mathrm{d}\Phi_{\mathrm{m}}}{\mathrm{d}t} = \varepsilon_{abc} + \varepsilon_{cda}$

$$\Rightarrow \varepsilon_{abc} = \varepsilon - \varepsilon_{cda}$$

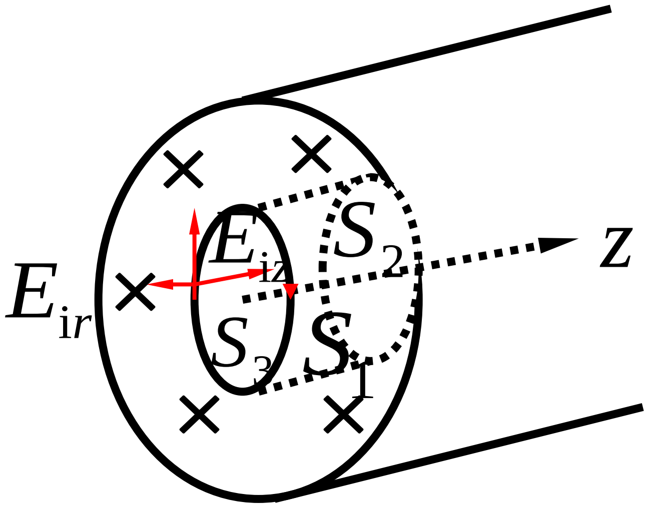
若既有动生电动势，又有感生电动势

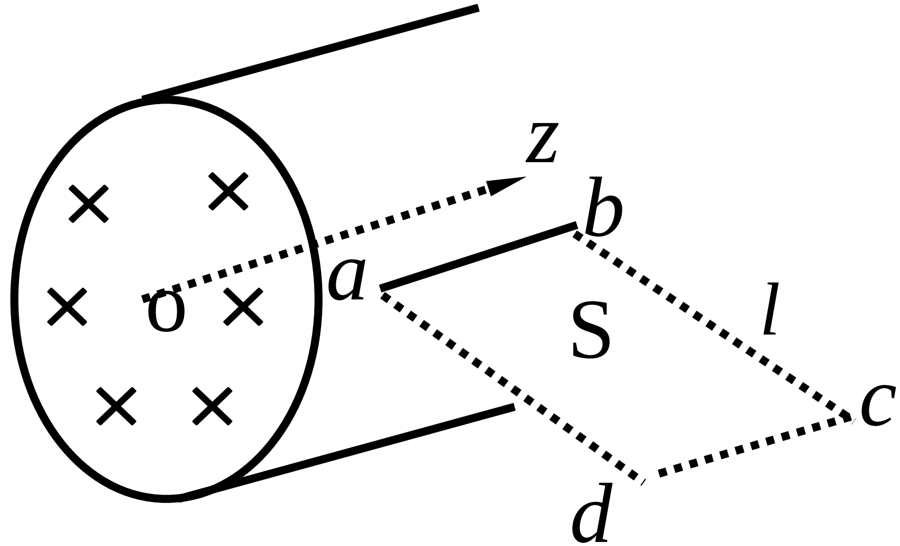
$$\varepsilon = \int_a^b \left(\vec{v} \times \vec{B}\right) \cdot \mathrm{d}\vec{l} + \int_a^b \vec{E}_{\mathrm{i}} \cdot \mathrm{d}\vec{l}$$

或

$$\varepsilon = \oint_l \left(\vec{v} \times \vec{B}\right) \cdot \mathrm{d}\vec{l} - \iint_S \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \cdot \mathrm{d}\vec{S}$$

[例]　计算具有轴对称变化磁场产生的感应电场。





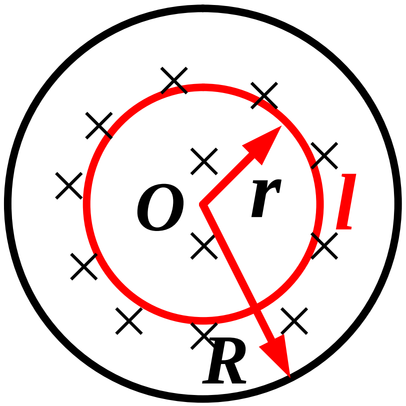
解：S_1 S_2 S_3 构成闭合曲面

$$\because \oiint_S \vec{E}_i \cdot d\vec{S} = \iint_{S_1} \vec{E}_i \cdot d\vec{S} = \iint_{S_1} E_{ir} dS = 0 \quad \therefore E_{ir} = 0$$

对于矩形闭合回路 $abcd$ $\because \oint_l \vec{E}_i \cdot d\vec{l} = -\iint_S \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \cdot d\vec{S} = 0$

$$\Rightarrow \int_a^b E_{iz} dz = 0 \quad \therefore E_{iz} = 0$$

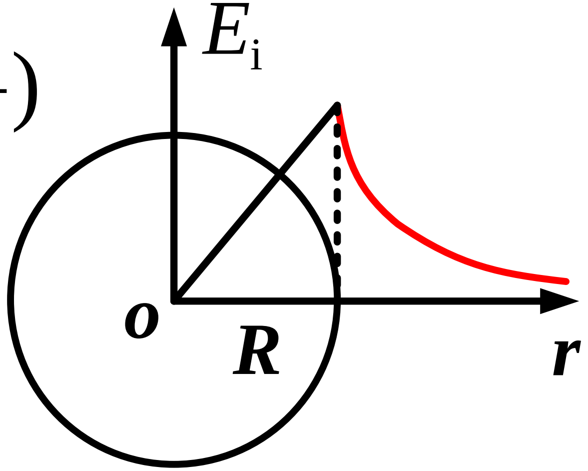
$$\oint_l \vec{E}_\mathrm{i} \cdot \mathrm{d}\vec{l} = E_\mathrm{i} 2\pi r = -\iint_S \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \cdot \mathrm{d}\vec{S}$$



$$r \le R \qquad E_\mathrm{i} 2\pi r = -\frac{\partial \overline{B}}{\partial t} \pi r^2$$

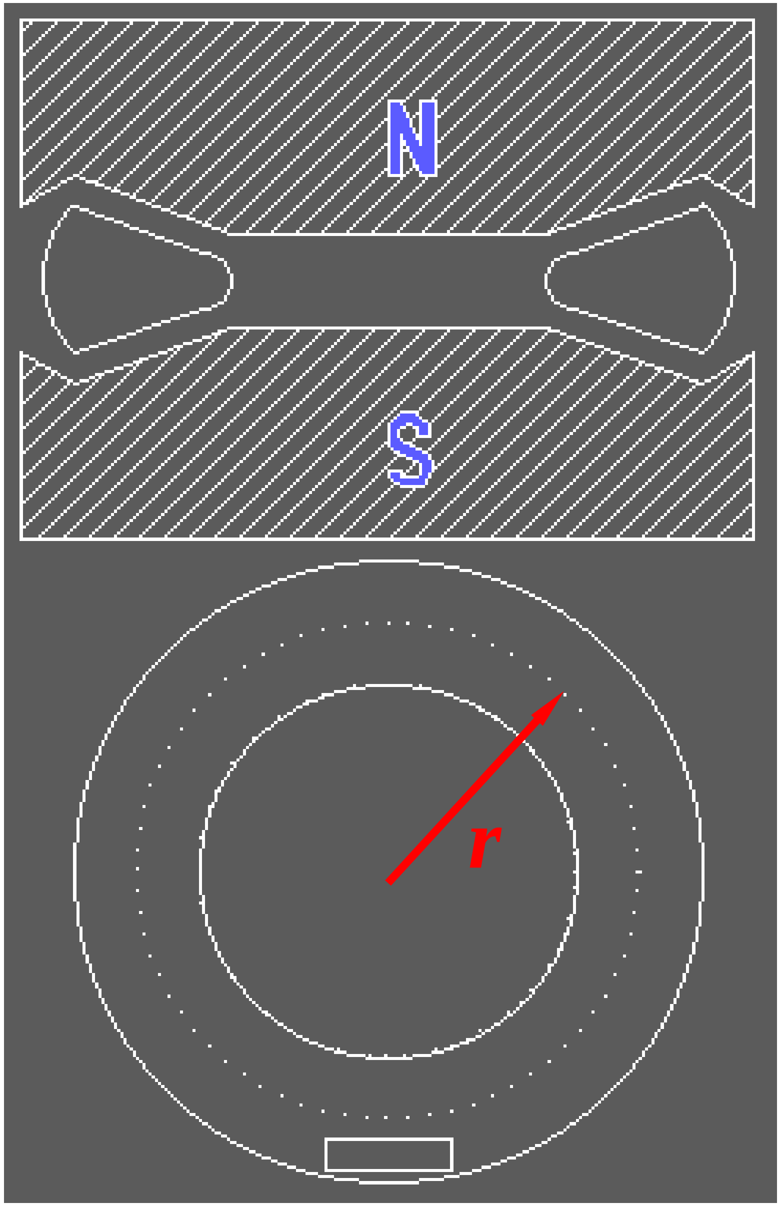
$$\Rightarrow E_\mathrm{i} = -\frac{r}{2} \frac{\partial \overline{B}}{\partial t} \quad (\overline{B} = \frac{\Phi_\mathrm{m}}{\pi r^2})$$

$$r > R \quad E_\mathrm{i} 2\pi r = -\frac{\partial \overline{B}}{\partial t} \pi R^2 \; (\overline{B} = \frac{\Phi_\mathrm{m}}{\pi R^2})$$



$$\Rightarrow E_\mathrm{i} = -\frac{R^2}{2r} \frac{\partial \overline{B}}{\partial t}$$

[例] 讨论电子感应加速器中磁场如何分布才能使电子在被加速的同时不改变其轨道。



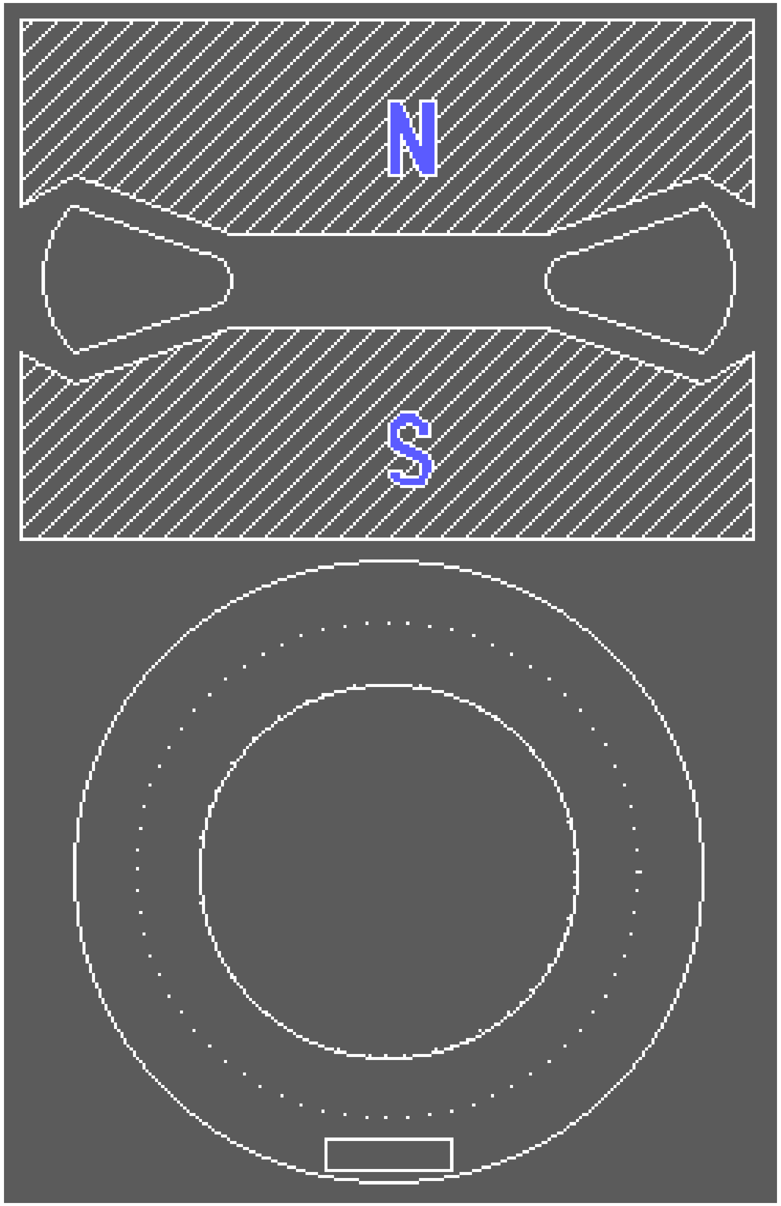
解: $$E=\frac{r}{2}\frac{\partial \overline{B}}{\partial t}$$

$$\frac{\mathrm{d}(mv)}{\mathrm{d}t}=eE=\frac{er}{2}\frac{\partial \overline{B}}{\partial t}$$

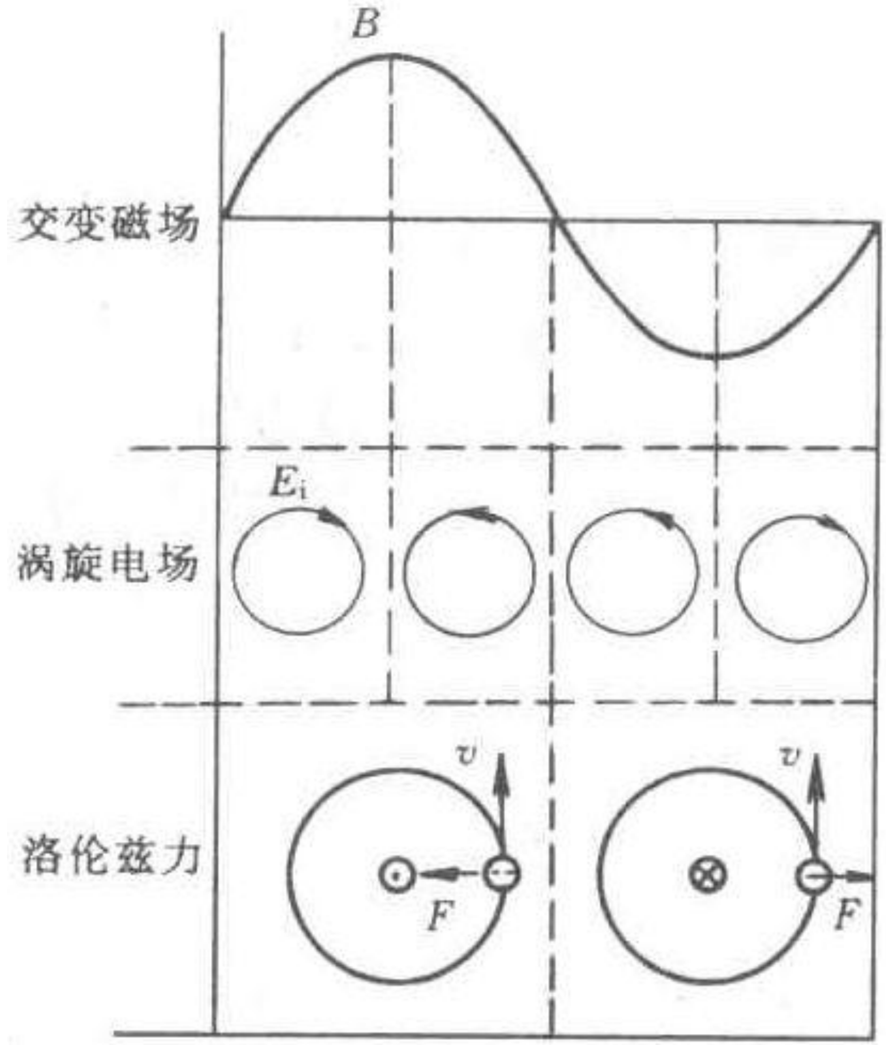
$$\frac{mv^2}{r}=evB\Rightarrow mv=erB$$

$$\frac{\mathrm{d}(mv)}{\mathrm{d}t}=er\frac{\partial B}{\partial t}$$

$$\Rightarrow \quad B=\frac{1}{2}\overline{B}$$



俯视图



电子只在第一个1/4周期内被加速！

[例]电子感应加速器的轨道半径为*R*，电子能量每周增加*ε*，求轨道内磁场的平均值 $\bar{B}$ **的时间变化率** $\frac{d\bar{B}}{dt}$ **。**

解：

$$A=\oint_l \vec{F}_i\cdot d\vec{l}=\oint_l e\vec{E}_i\cdot d\vec{l}=e\oint_l \vec{E}_i\cdot d\vec{l}=\varepsilon$$

$$\oint_l \vec{E}_i\cdot d\vec{l}=\frac{d\bar{B}}{dt}\pi R^2 \quad \Rightarrow \frac{d\bar{B}}{dt}=\frac{\varepsilon}{e\pi R^2}$$

[例]　如图均匀分布的变化磁场B，导体$AB=2R$，$CD=2R$

问：ε_{AB}，i_1，ε_{CD}，i_2 是否为零？

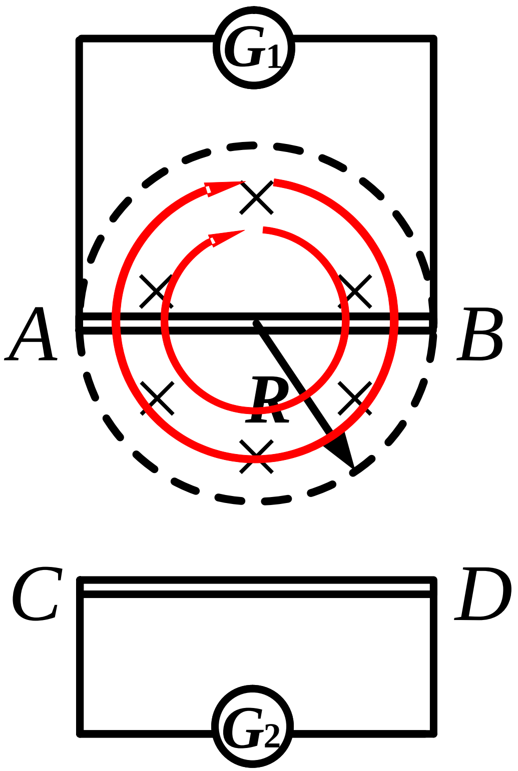
解：

$$\varepsilon_{AB}=\int_A^B \vec{E}_{\mathrm{i}}\cdot \mathrm{d}\vec{l}=0$$

$$i_1\neq 0$$

$$\varepsilon_{CD}\neq 0$$

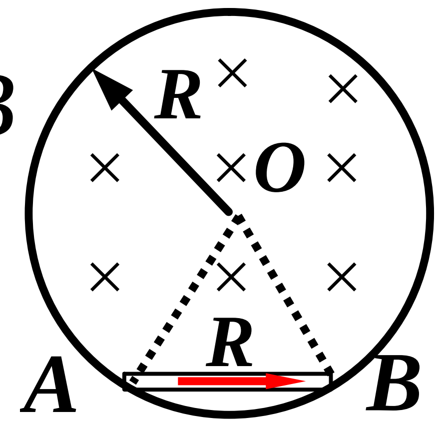
$$i_2=0$$



[例] 如图：已知***R***，***B***=***B***₀***t***，金属棒***AB***长***R***，求棒上的感生电动势 $(B_0 > 0)$。

[解法一]

$$\varepsilon = -\frac{\mathrm{d}\Phi_{\mathrm{m}}}{\mathrm{d}t} = -B_0\frac{\sqrt{3}}{4}R^2 \quad A \to B$$

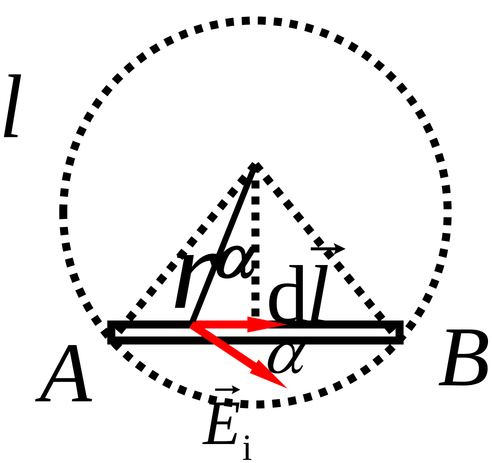


[解法二]

$$E_{\mathrm{i}} = \frac{r}{2}B_0$$

$$\mathrm{d}\varepsilon = \vec{E}_{\mathrm{i}} \cdot \mathrm{d}\vec{l} = \frac{r}{2}B_0\mathrm{d}l\cos\alpha = \frac{\sqrt{3}}{4}RB_0\mathrm{d}l$$

$$\varepsilon = \int_A^B \mathrm{d}\varepsilon = \frac{\sqrt{3}}{4}R^2B_0 \quad A \to B$$



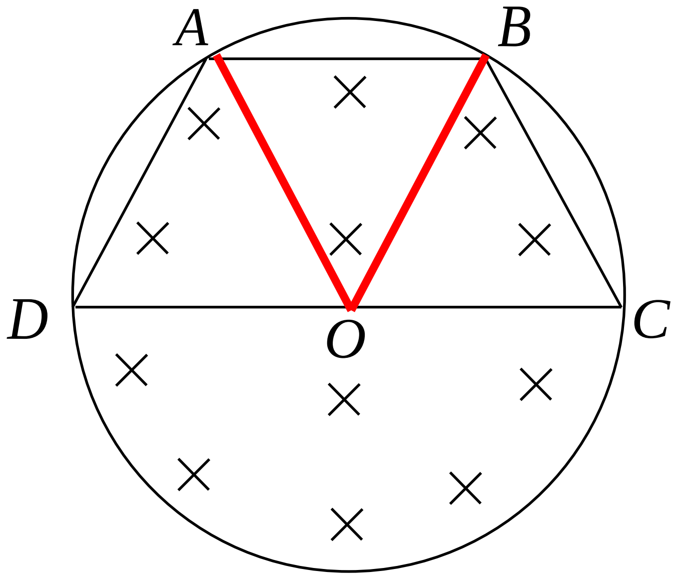
方向

[例]如图所示，半径为a长直螺线管中，有 $\frac{\mathrm{d}B}{\mathrm{d}t}>0$ 的磁场。一电阻均匀分布的直导线，弯成等腰梯形的闭合回路***ABCDA***，总电阻为***R***，上底长为***a***，下底长为**2*a***。***ABCD***四点处于半径为***a***的圆周上，***O***为圆心。求：

（1）***AB***段导线和闭合回路中的感应电动势；

（2）***D***、***C***两点间的电势差 U_D-U_C

和***A***、***B***两点间的电势差 U_A-U_B。

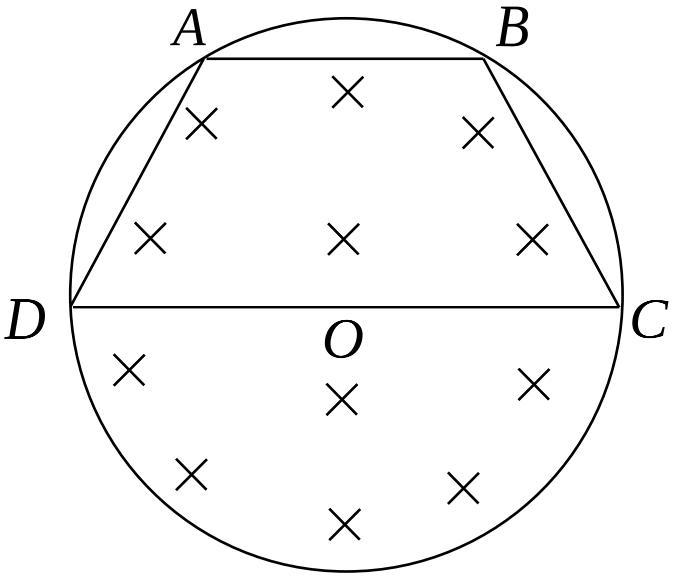


$$\varepsilon_{AB}=\frac{\Delta\Phi}{\Delta t}=\frac{\sqrt{3}}{4}a^2\frac{dB}{dt}\qquad B\to A$$

$$\varepsilon=3\varepsilon_{AB}=\frac{3\sqrt{3}}{4}a^2\frac{dB}{dt}$$ 方向逆时针

$$\varepsilon_{AB}=\frac{\Delta\Phi}{\Delta t}=\frac{\sqrt{3}}{4}a^2\frac{dB}{dt}\qquad B\to A$$

$$\varepsilon=3\varepsilon_{AB}=\frac{3\sqrt{3}}{4}a^2\frac{dB}{dt}$$ 方向逆时针



$$I=\frac{\varepsilon}{R}=\frac{3\sqrt{3}}{4R}a^2\frac{dB}{dt}$$

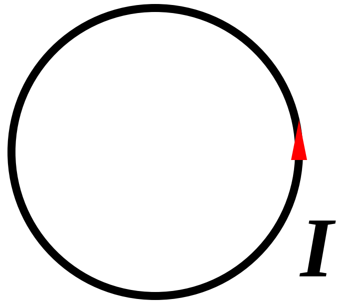
$$U_D-U_C=I\frac{2R}{5}=\frac{3\sqrt{3}}{10}a^2\frac{dB}{dt}$$

$$U_A-U_B=\varepsilon_{AB}-I\frac{R}{5}=\frac{\sqrt{3}}{4}a^2\frac{dB}{dt}-\frac{3\sqrt{3}}{20}a^2\frac{dB}{dt}=\frac{\sqrt{3}}{10}a^2\frac{dB}{dt}$$

16.4 自感和互感

自感电动势

一、 自感



$$\Psi=\sum_i \Phi_{\mathrm{m}i} \qquad \varepsilon=-\frac{\mathrm{d}\Psi}{\mathrm{d}t}$$

$$B\propto I \rightarrow \Phi_{\mathrm{m}}=\iint_S \vec{B}\cdot\mathrm{d}\vec{S}\propto I \quad \Rightarrow \Psi\propto I$$

$\Psi=LI$ **L称为回路的自感**

自感由回路的形状、大小及周围介质决定

$$\varepsilon_L=-\frac{\mathrm{d}\Psi}{\mathrm{d}t}=-L\frac{\mathrm{d}I}{\mathrm{d}t}-I\frac{\mathrm{d}L}{\mathrm{d}t}$$

若L不变 $\varepsilon_L=-L\dfrac{\mathrm{d}I}{\mathrm{d}t}$ 自感电动势阻碍电流的变化

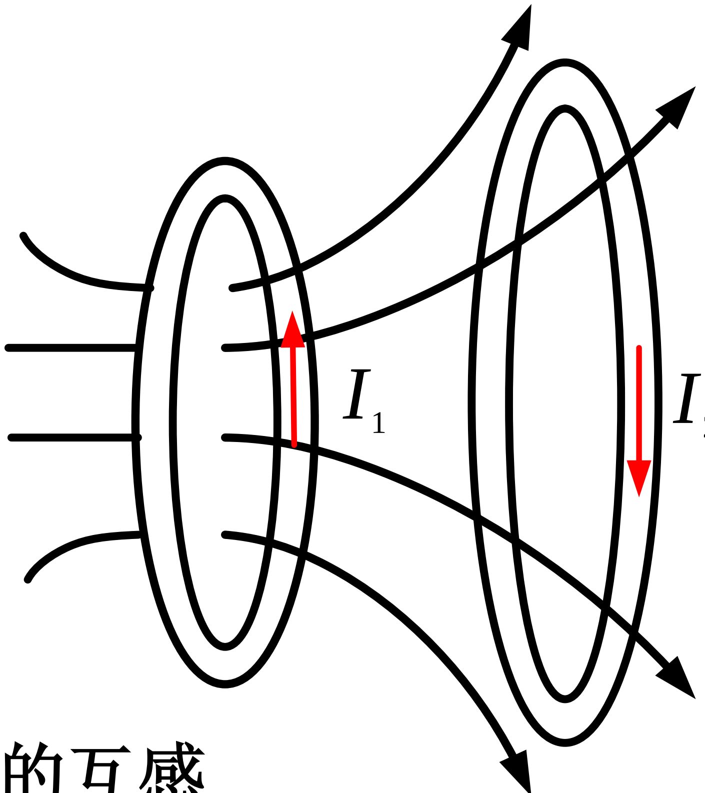
——电磁惯性

$$L = \frac{\psi}{I}$$

单位：1 亨利 （ H ）= 1 韦伯 / 安培 （1 Wb / A）

$$1\mathrm{mH} = 10^{-3}\,\mathrm{H}，\quad 1\mu\,\mathrm{H} = 10^{-6}\,\mathrm{H}$$

二、 互感　互感应



$$I_1 \rightarrow \Psi_{21} \rightarrow \varepsilon_{21}$$

$$I_2 \rightarrow \Psi_{12} \rightarrow \varepsilon_{12}$$

显然： $\Psi_{21} = M_{21} I_1$

$\Psi_{12} = M_{12} I_2$

可以证明： $M_{12} = M_{21} = M$ 回路的互感

$$\varepsilon_{21} = -\frac{\mathrm{d}\Psi_{21}}{\mathrm{d}t} = -M\frac{\mathrm{d}I_1}{\mathrm{d}t} - I_1\frac{\mathrm{d}M}{\mathrm{d}t}$$

$$\varepsilon_{12} = -\frac{\mathrm{d}\Psi_{12}}{\mathrm{d}t} = -M\frac{\mathrm{d}I_2}{\mathrm{d}t} - I_2\frac{\mathrm{d}M}{\mathrm{d}t}$$

若 $\frac{\mathrm{d}M}{\mathrm{d}t}=0$

$$\varepsilon_{21}=-M\frac{\mathrm{d}I_1}{\mathrm{d}t} \qquad \varepsilon_{12}=-M\frac{\mathrm{d}I_2}{\mathrm{d}t}$$

计算互感系数的方法：

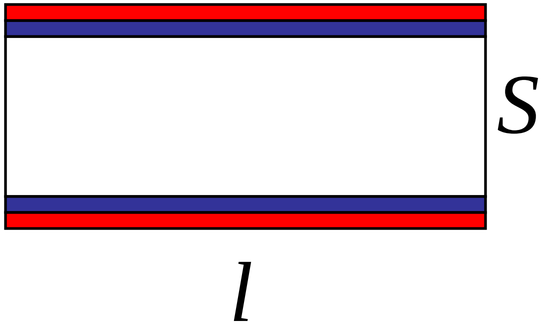
$$M=\frac{\Psi_{21}}{I_1}=\frac{\Psi_{12}}{I_2}$$

$$M=-\frac{\varepsilon_{21}}{\frac{\mathrm{d}I_1}{\mathrm{d}t}}=-\frac{\varepsilon_{12}}{\frac{\mathrm{d}I_2}{\mathrm{d}t}}$$

[例] 均匀长螺线管*S*, *l* 外共轴地密绕两线圈，匝数分别为*N*1、*N*2，求自感和互感。

解：

$$B_1 = \mu_0 \frac{N_1}{l} I_1 \qquad \Psi_1 = \mu_0 \frac{N_1^2}{l} S I_1$$



$$L_1 = \mu_0 \frac{N_1^2}{l} S \qquad L_2 = \mu_0 \frac{N_2^2}{l} S$$

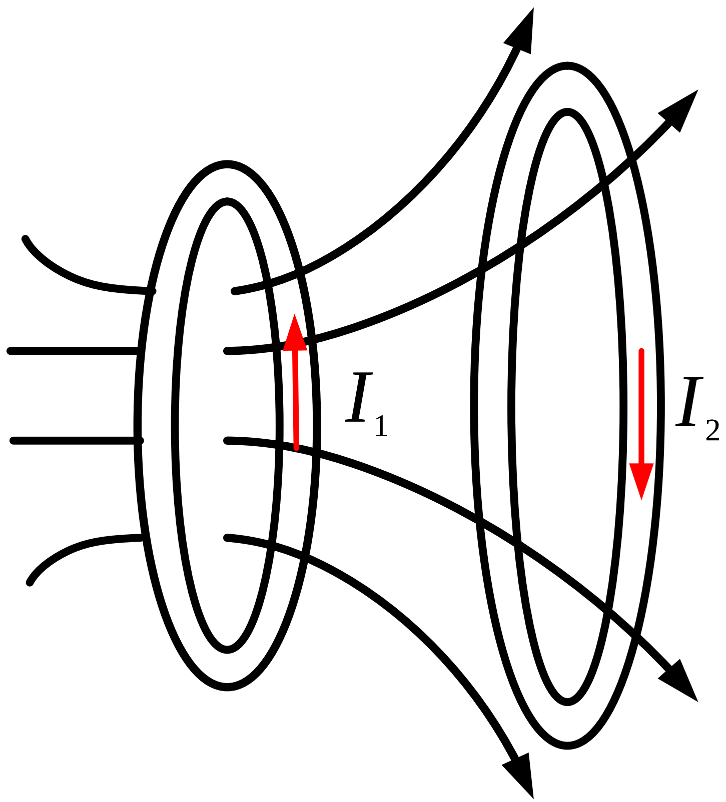
$$\Psi_{21} = N_2 S \mu_0 \frac{N_1}{l} I_1 \qquad M = \mu_0 \frac{N_1 N_2}{l} S$$

$$\Rightarrow \quad M = \sqrt{L_1 L_2}$$

定义耦合系数： $$k=\frac{M}{\sqrt{L_1L_2}}$$

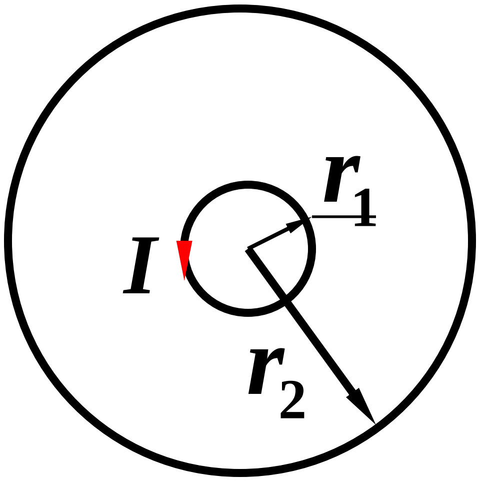
一般情况下： $$k<1$$

无漏磁时： $$k=1$$



[例] 两同心共面导体圆环，半径 $r_1, r_2 (r_1 << r_2)$

$I = kt$ k为正的常数。求变化磁场在大圆环内激发的感生电动势。



解：$$M = \frac{\Psi_{21}}{I_1} = \frac{\Psi_{12}}{I_2}$$

$$M = \frac{\Psi_{12}}{I_2} = \frac{B_2 \pi r_1^2}{I_2} \qquad B_2 = \frac{\mu_0 I_2}{2 r_2}$$

$$\Rightarrow M = \frac{\mu_0 \pi r_1^2}{2 r_2}$$

$$\varepsilon_{21} = -\frac{\mathrm{d}\Psi_{21}}{\mathrm{d}t} = -M \frac{\mathrm{d}I}{\mathrm{d}t} = -\frac{\mu_0 \pi r_1^2}{2 r_2} \times k$$

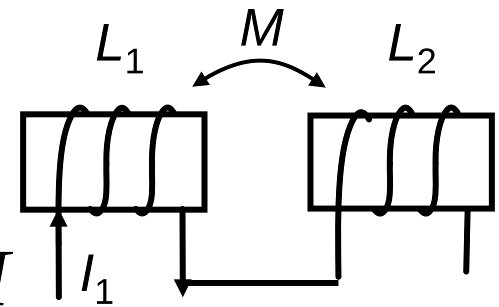
两线圈，自感L_1、L_2，互感M，顺、反接串联后总自感。

顺接：$\psi_1 = L_1 I_1 + M I_2 = \left(L_1 + M\right) I$

$$\psi_2 = L_2 I_2 + M I_1 = \left(L_2 + M\right) I$$

$$\psi = \psi_1 + \psi_2 = \left(L_1 + L_2 + 2M\right) I = LI$$

$$\therefore L = \frac{\psi}{I} = L_1 + L_2 + 2M$$



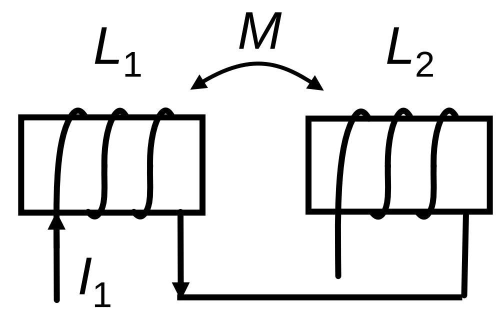
顺接串联

反接：$\psi_1 = L_1 I_1 - M I_2 = \left(L_1 - M\right) I$

$$\psi_2 = L_2 I_2 - M I_1 = \left(L_2 - M\right) I$$

$$\psi = \psi_1 + \psi_2 = \left(L_1 + L_2 - 2M\right) I = LI$$

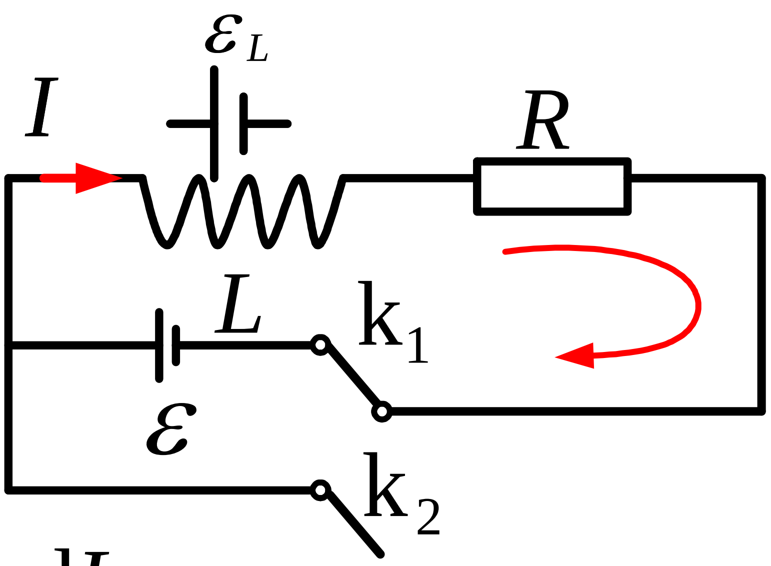
$$\therefore L = \frac{\psi}{I} = L_1 + L_2 - 2M$$



反接串联

§ 16.5 电容和电感电路中的暂态电流

一、 LR 电路



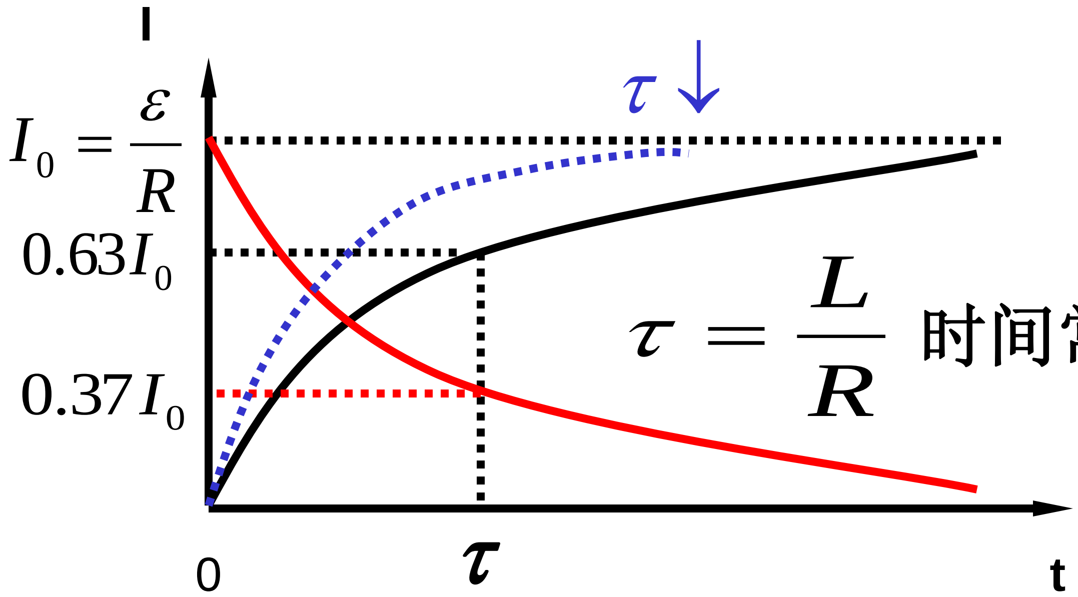
k_1 接通 滋长过程

$$\varepsilon + \varepsilon_L - IR = 0$$

$$\varepsilon_L = -L\frac{\mathrm{d}I}{\mathrm{d}t} \qquad \varepsilon - L\frac{\mathrm{d}I}{\mathrm{d}t} - IR = 0$$

$$\int_0^I \frac{\mathrm{d}I}{\frac{\varepsilon}{R} - I} = \int_0^t \frac{R}{L}\mathrm{d}t \quad \Rightarrow I = \frac{\varepsilon}{R}\left(1 - e^{-\frac{R}{L}t}\right)$$

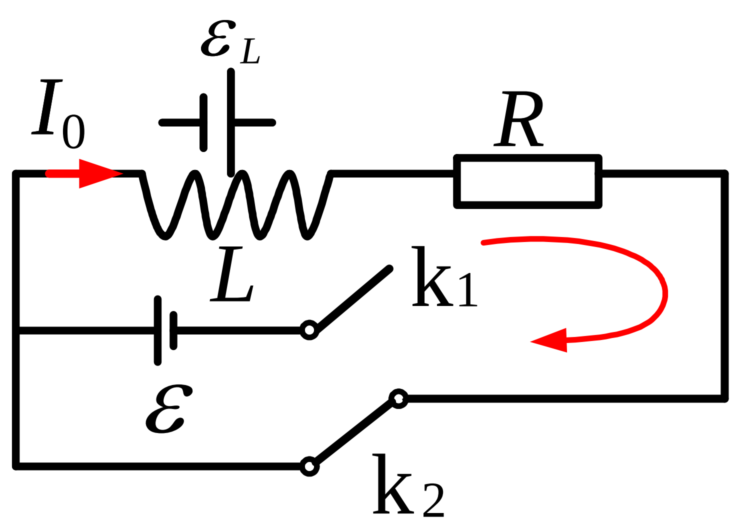
$$I=\frac{\varepsilon}{R}\left(1-e^{-\frac{R}{L}t}\right)$$



k_1 断开 k_2 接通 衰减过程

$\varepsilon=0$ $$-L\frac{dI}{dt}-IR=0$$

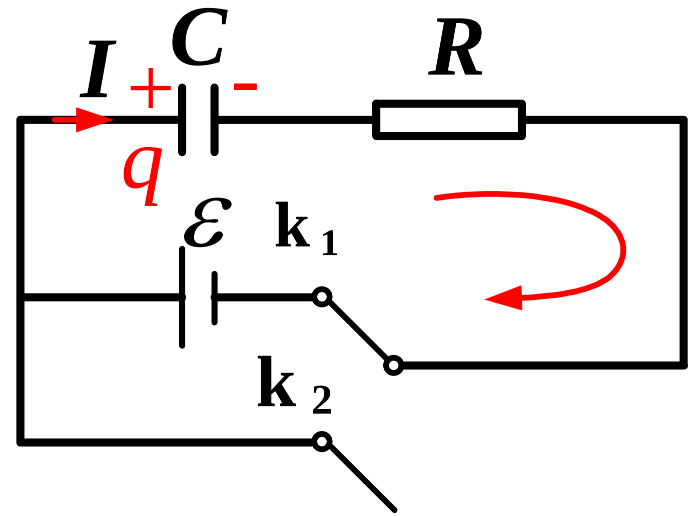
$$\int_{\varepsilon/R}^{I}\frac{dI}{I}=\int_0^t-\frac{R}{L}dt\Rightarrow I=\frac{\varepsilon}{R}e^{-\frac{R}{L}t}$$



k_1 断开 k_2不接通 $\varepsilon_L=-L\frac{dI}{dt}$ 很大

二、RC 电路

k_1接通，充电过程



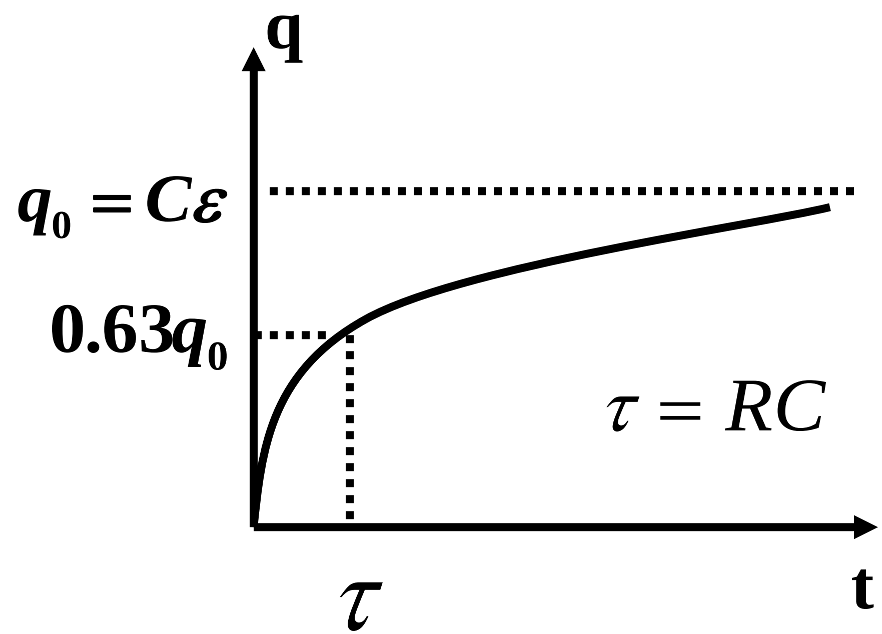
$$\varepsilon-\frac{q}{C}-IR=0$$

$$\varepsilon-\frac{q}{C}-R\frac{\mathrm{d}q}{\mathrm{d}t}=0 \quad t=0, q=0$$

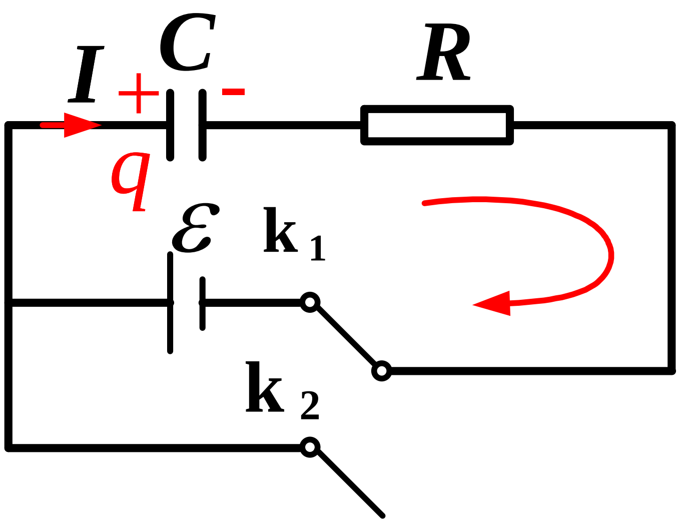
$$q=C\varepsilon(1-e^{-\frac{1}{RC}t})$$

$$u_c=\frac{q}{C}=\varepsilon\left(1-e^{-\frac{1}{RC}t}\right)$$

$$I=\frac{\mathrm{d}q}{\mathrm{d}t}=\frac{\varepsilon}{R}e^{-\frac{1}{RC}t}$$



k_2接通，放电过程



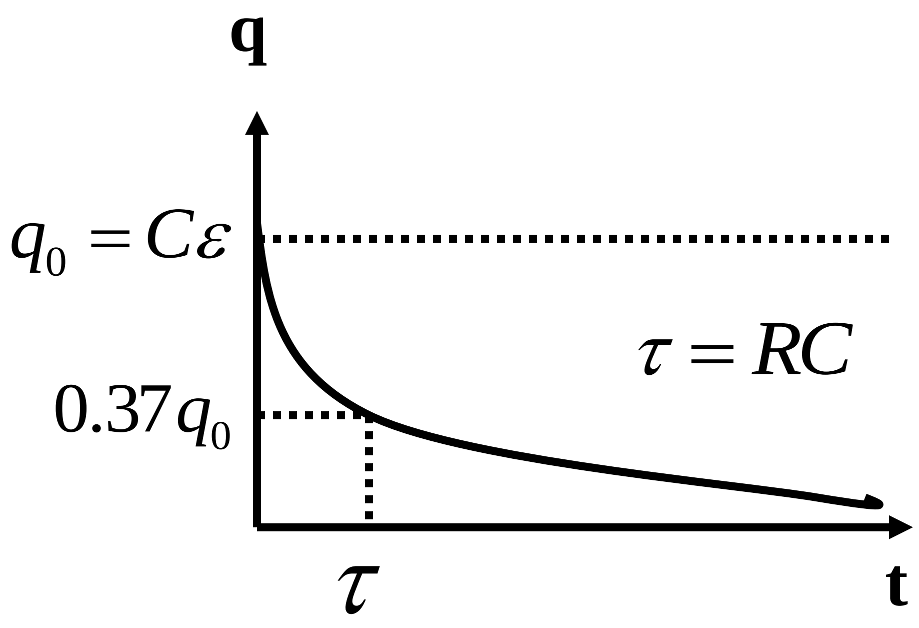
$$\varepsilon = 0$$

$$\frac{q}{C} + R\frac{\mathrm{d}q}{\mathrm{d}t} = 0 \quad t = 0, q = C\varepsilon$$

$$q = C\varepsilon e^{-\frac{1}{RC}t}$$

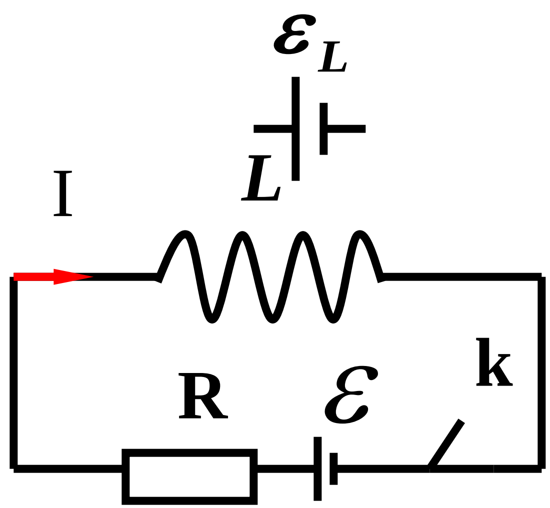
$$u_c = \frac{q}{C} = \varepsilon e^{-\frac{1}{RC}t}$$

$$I = -\frac{\mathrm{d}q}{\mathrm{d}t} = \frac{\varepsilon}{R} e^{-\frac{1}{RC}t}$$



§ 16.6 磁场能量

一、 自感磁能



回路方程 $\varepsilon + \varepsilon_L - IR = 0$

$$\varepsilon_L = -L\frac{\mathrm{d}I}{\mathrm{d}t}$$

$\times I\mathrm{d}t$ $\qquad \varepsilon\, I\mathrm{d}t = -\varepsilon_L I\mathrm{d}t + I^2 R\mathrm{d}t$

$LI\mathrm{d}I$ 焦耳热

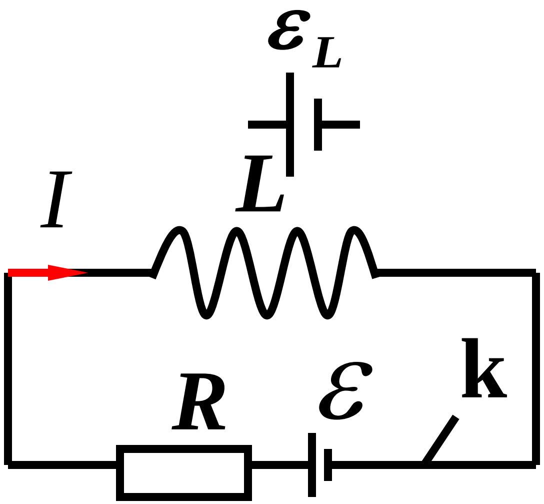
稳定时 $I_0 = \dfrac{\varepsilon}{R}$

$I = 0 \rightarrow I_0$ 过程中 $\qquad W_\mathrm{m} = \int_0^{I_0} LI\mathrm{d}I = \dfrac{1}{2}LI_0^2$

电源作的功转变为线圈的自感磁能。

16.6 磁场能量

一、 自感磁能



回路方程

$$\varepsilon + \varepsilon_L - IR = 0 \qquad \varepsilon_L = -L\frac{\mathrm{d}I}{\mathrm{d}t}$$

$\times\, \boldsymbol{I\mathrm{d}t}$

$$\varepsilon I\mathrm{d}t = -\varepsilon_L I\mathrm{d}t + I^2 R\mathrm{d}t$$

$= LI\mathrm{d}I$

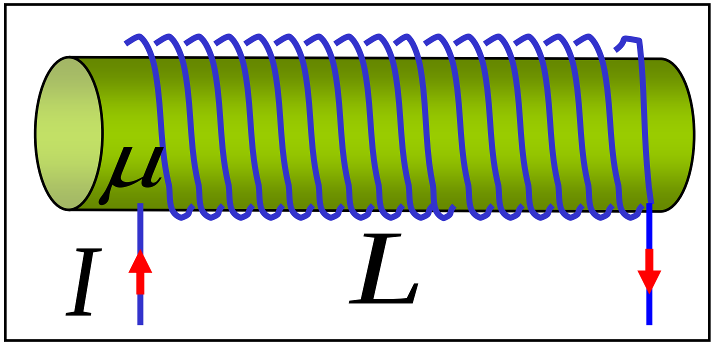
焦耳热

稳定时 $I_0 = \dfrac{\varepsilon}{R}$

$I = 0 \rightarrow I_0$ 过程中 $\quad W_\mathrm{m} = \int_0^{I_0} LI\mathrm{d}I = \dfrac{1}{2}LI_0^2$

电源作的功转变为线圈的自感磁能。

以密绕长直螺线管为例



$$\because B=\mu\frac{NI}{l}\qquad L=\mu\frac{N^2S}{l}$$

$$W_{\mathrm{m}}=\frac{1}{2}LI^2=\frac{1}{2}\mu\frac{N^2S}{l}\frac{B^2}{\mu^2(\frac{N}{l})^2}$$

μ:介质的磁导率

$$=\frac{1}{2}\frac{B^2}{\mu}(Sl)=\frac{1}{2}\frac{B^2}{\mu}V=\frac{1}{2}BHV$$

H:磁场强度

对于各向同性磁介质，外场不强时有 $\vec{H}=\dfrac{\vec{B}}{\mu}$

一般情况 $W_{\mathrm{m}}=\iiint w_{\mathrm{m}}\mathrm{d}V=\dfrac{1}{2}LI^2$

磁场能量密度

计算自感的又一种方法 $I\rightarrow\vec{B}\rightarrow W_{\mathrm{m}}\rightarrow L$

$$w_{\mathrm{m}}=\frac{1}{2}BH$$

电磁场的能量密度

$$w=\frac{1}{2}\left(DE+BH\right)$$

在普遍情况下

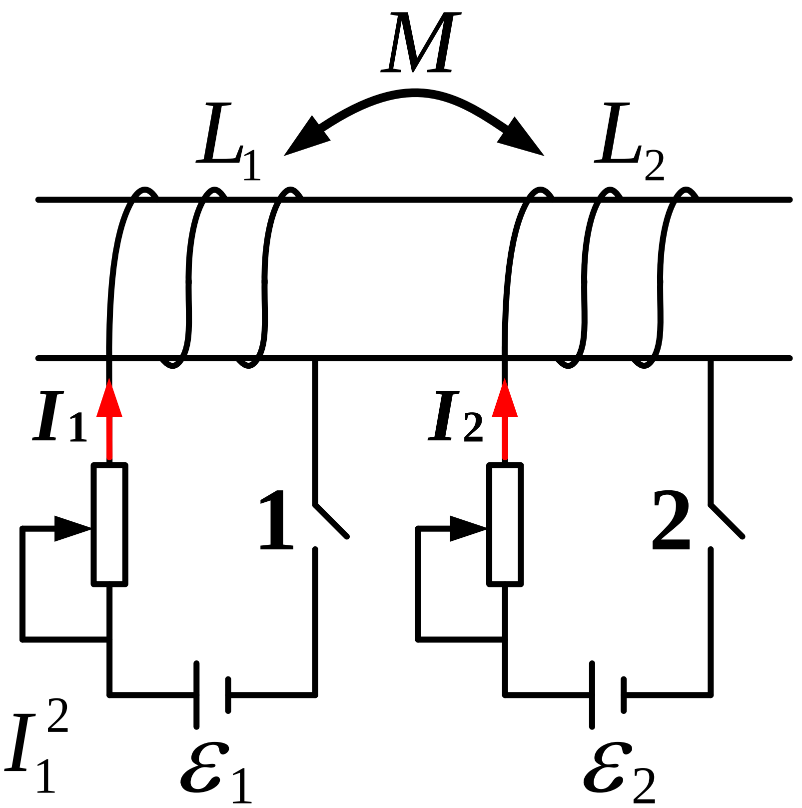
$$w=\frac{1}{2}\left(\vec{D}\cdot\vec{E}+\vec{B}\cdot\vec{H}\right)$$

二、互感磁能

设有线圈 1、2

L_1, L_2, M, I_1, I_2 已知

求总磁能。



先 1 通，2开

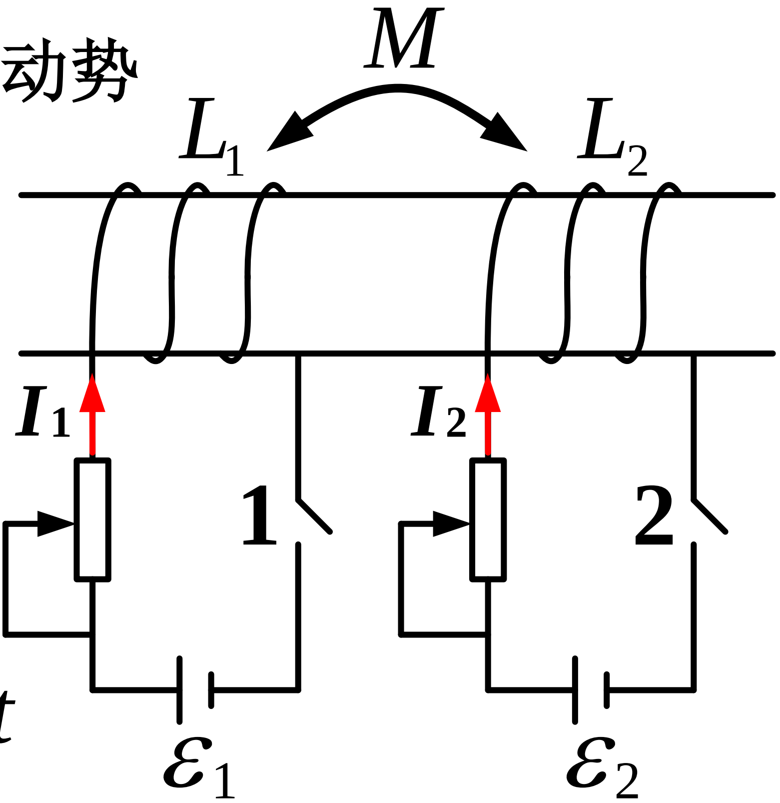
$$i_1: 0 \rightarrow I_1 \quad \frac{1}{2} L_1 I_1^2$$

后 2 通

$$i_2: 0 \rightarrow I_2 \quad \frac{1}{2} L_2 I_2^2$$

但改变线圈 1中电阻，保持 I_1 不变。

只有线圈 2 在线圈 1 中产生互感电动势



$\varepsilon_{12} = -M\dfrac{\mathrm{d}i_2}{\mathrm{d}t}$ ε_{12}与 ε_1 反向。

ε_1 反抗互感电动势作功。

$$A_{12} = \int -I_1\varepsilon_{12}\mathrm{d}t = \int I_1 M\frac{\mathrm{d}i_2}{\mathrm{d}t}\mathrm{d}t$$

$$= \int_0^{I_2} I_1 M\mathrm{d}i_2 = MI_1I_2$$

$$\Rightarrow W_\mathrm{m} = \frac{1}{2}L_1I_1^2 + \frac{1}{2}L_2I_2^2 + MI_1I_2$$

设 I_1, I_2 产生磁场 $\vec{B}_1, \vec{B}_2, \vec{H}_1, \vec{H}_2$

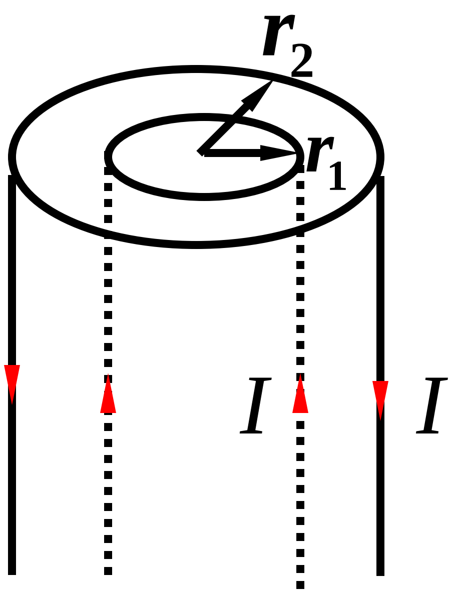
$$\vec{B} = \vec{B}_1 + \vec{B}_2 \quad \vec{H} = \vec{H}_1 + \vec{H}_2$$

$$W_{\mathrm{m}} = \frac{1}{2}\iiint \vec{B}\cdot\vec{H}\mathrm{dV} = \frac{1}{2}\mu\iiint\left(\vec{H}_1 + \vec{H}_2\right)\cdot\left(\vec{H}_1 + \vec{H}_2\right)\mathrm{d}V$$

$$= \frac{1}{2}\mu\iiint\left(H_1^2 + H_2^2 + 2\vec{H}_1\cdot\vec{H}_2\right)\mathrm{d}V$$

[例] 如图同轴电缆，已知 r_1, r_2, l, I, μ

求磁场能量及自感。



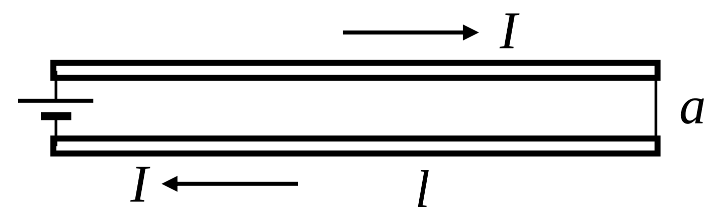
解： $H=\dfrac{I}{2\pi r}\quad B=\dfrac{\mu I}{2\pi r}\quad r_1<r<r_2$

$$w_{\mathrm{m}}=\frac{1}{2}BH=\frac{\mu I^2}{8\pi^2 r^2}$$

$$W_{\mathrm{m}}=\int_{r_1}^{r_2} w_{\mathrm{m}}2\pi r l\mathrm{d}r=\frac{\mu I^2 l}{4\pi}\ln\frac{r_2}{r_1}$$

$$\because W_{\mathrm{m}}=\frac{1}{2}LI^2\quad \therefore L=\frac{2W_{\mathrm{m}}}{I^2}=\frac{\mu l}{2\pi}\ln\frac{r_2}{r_1}$$

[例] 两带状导体板，长*l*，宽*b*，板间距*a*（*a*<<*b*、*l*）。两板一端短路，一端接电压为V_0的电源。设电流仅沿板的*l*方向流动，忽略所有电阻及由于电磁场的传播速度有限而引起的所有效应。1、板间*B*与*I*的关系；2、电路的自感；3、电流与时间关系（ $t=0$ 时刻加上电源）；4、板间电压与到右端距离的关系；5、单位时间流入系统的能量与到右端距离的关系。



解：板外$B=0$　　板间 B 均匀

作矩形回路 $B=\dfrac{\mu_0 I}{b}$

$$L=\frac{Bla}{I}=\frac{\mu_0 la}{b} \qquad V_0-L\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t}=0\Rightarrow i=\frac{V_0}{L}t$$

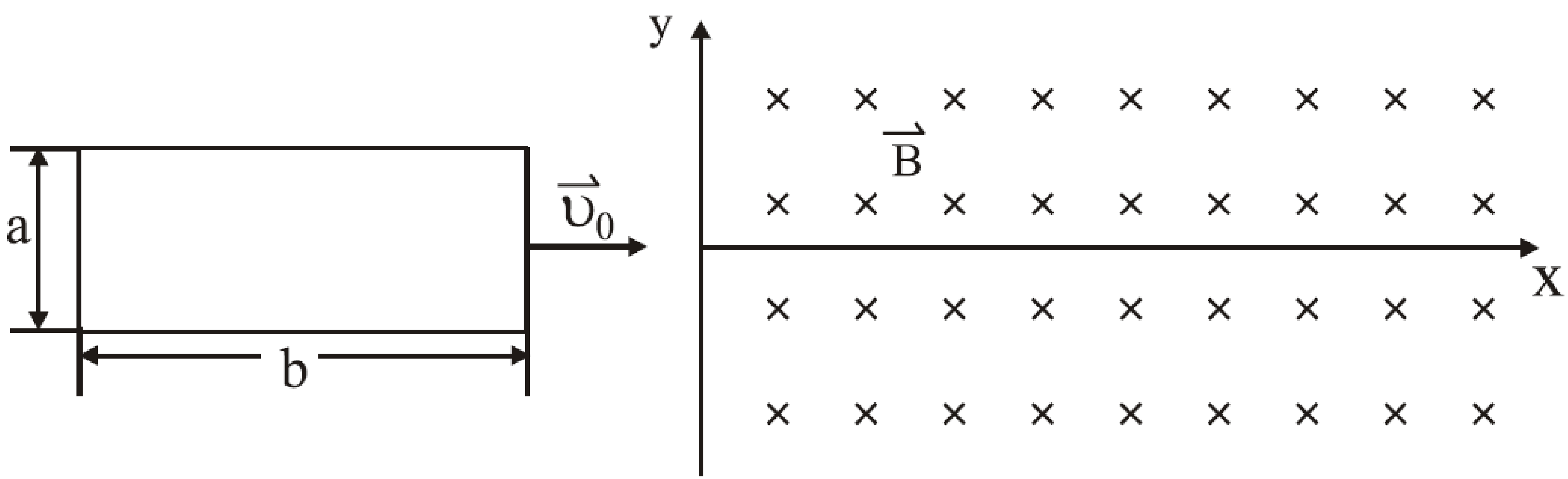
长为*x*的自感 $L_x=\dfrac{\mu_0 xa}{b}$　　$\therefore V_x=L_x\dfrac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t}=\dfrac{\mu_0 xaV_0}{bL}=\dfrac{x}{l}V_0$

单位时间流入的能量 $V_x i=\dfrac{bV_0^2}{\mu_0 l^2 a}xt=\dfrac{\mathrm{d}W_m}{\mathrm{d}t}$　$W_m=abx\dfrac{1}{2}\dfrac{B^2}{\mu_0}$

【例】一矩形线框导体，电阻可忽略，边长为a和b，以初速υ_0沿x轴正方向运动。当$t=0$进入磁感应强度为$\vec{B}$的匀强磁场，如图所示。磁场方向与xy平面垂直，充满$x>0$的空间。设线框的自感系数为L，质量为m。

（1）求$t=0$时线框中的电流变化率；

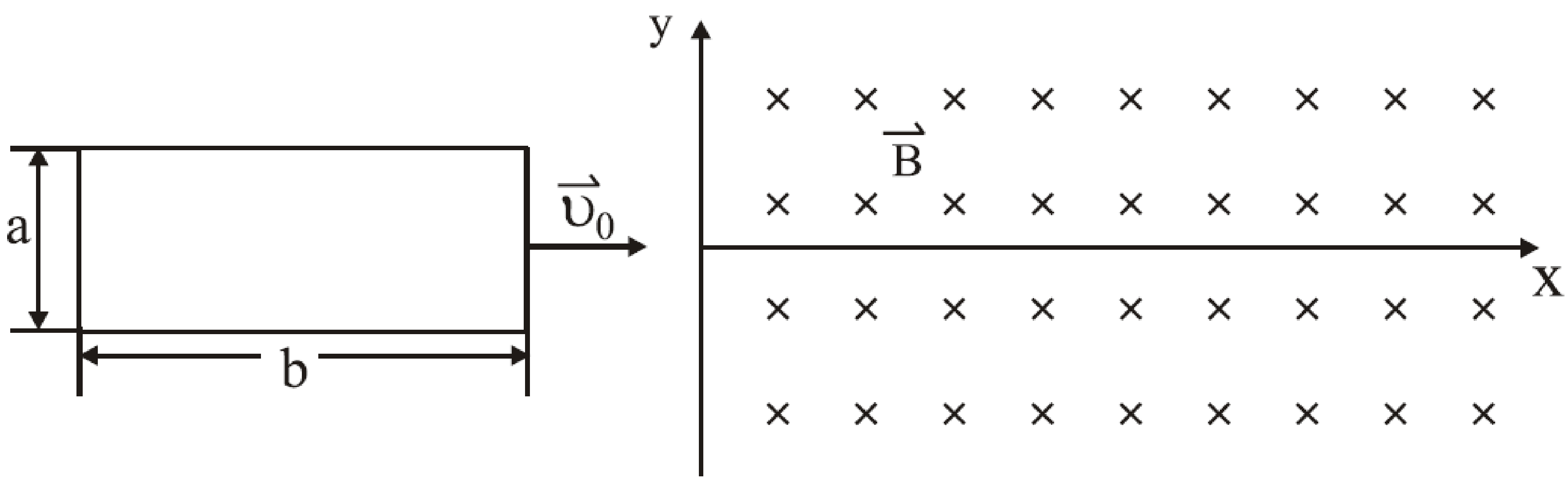
（2）讨论线框的运动规则。



（1）线框回路电压方程

$$Ba\upsilon - L\frac{di}{dt} = IR = 0$$（题设导体电阻可忽略不计，取 R=0）

因为$t = 0$，$\upsilon = \upsilon_0$，所以有 $\left.\frac{di}{dt}\right|_{t=0} = \frac{Ba\upsilon_0}{L}$

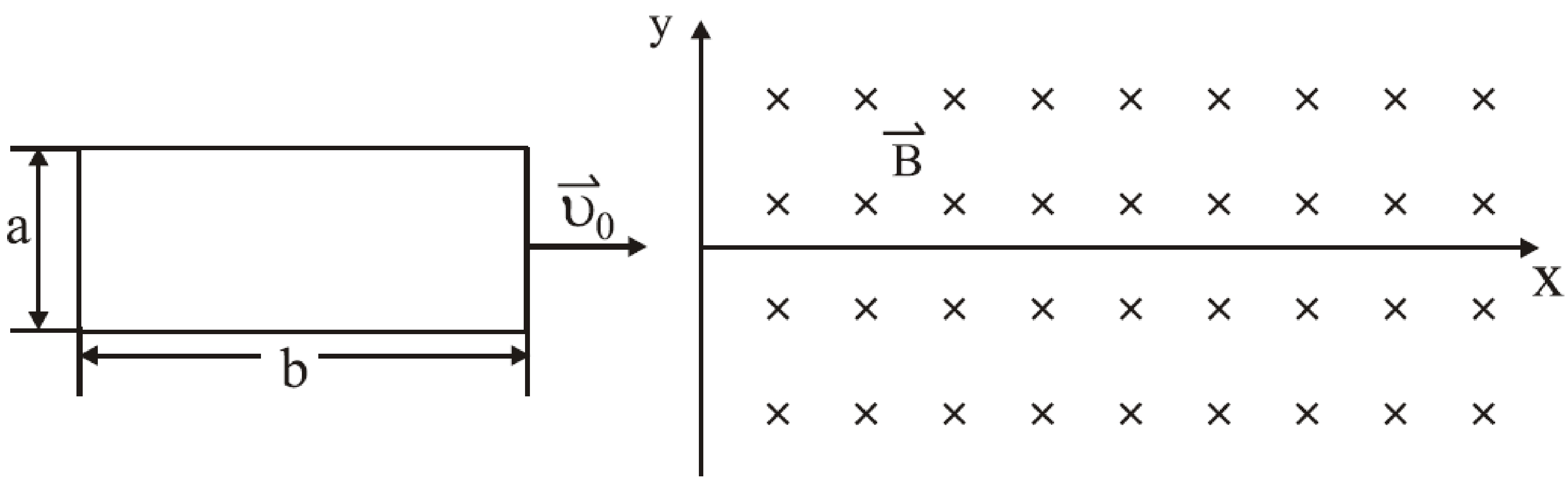


（2）首先讨论线框电流随位置或时间的变化规律，由回路电压方程：

$$Ba\frac{dx}{dt}-L\frac{di}{dt}=0 \qquad \int_0^x Badx=\int_0^i Ldi$$

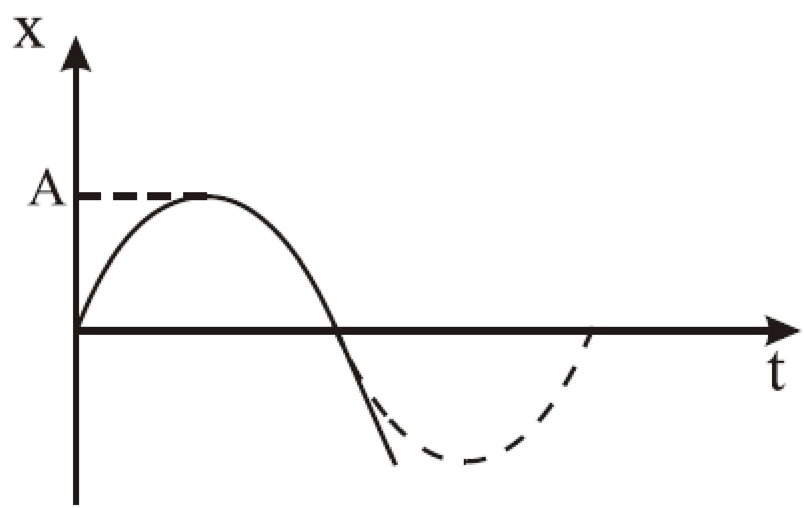
得：$i=\frac{Ba}{L}x \qquad -Bai=m\frac{d^2x}{dt^2}$ 即：$-\frac{B^2a^2}{L}x=m\frac{d^2x}{dt^2}$

得：$\frac{d^2x}{dt^2}+\frac{B^2a^2}{mL}x=0 \qquad x=A\cos(\frac{Ba}{\sqrt{mL}}t+\varphi)$



由初始条件 $t=0$， $x=0$， $\upsilon=\upsilon_0$， 可确定 $A=\dfrac{\upsilon_0\sqrt{mL}}{Ba}$， $\varphi=-\dfrac{\pi}{2}$， 得：

$$x=\frac{\upsilon_0\sqrt{mL}}{Ba}\cos(\frac{Ba\mathbf{t}}{\sqrt{mL}}-\frac{\pi}{2})$$



讨论：

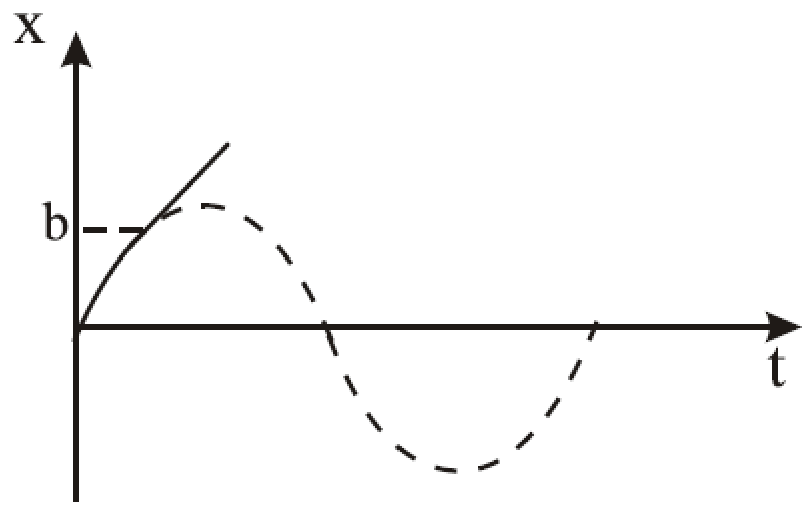
（1）若 $A=\dfrac{\upsilon_0\sqrt{Lm}}{Ba}<b$

$$t<\frac{T}{2}=\frac{\pi}{\omega}=\pi\frac{\sqrt{mL}}{Ba}$$ ，线框的运动为谐振动，

$$t>\frac{T}{2}=\pi\frac{\sqrt{mL}}{Ba}$$ ，线框回到 $x=0$ 处以 $-\upsilon_0$ 离开

磁场区它的运动图线如图所示。

（2）若 $A=\dfrac{\upsilon_0\sqrt{Lm}}{Ba}>b$，当 $x=b$ 时，线框全部进入磁场，线框的磁通量不再变化，此后线框不再受安培力作用，将以此时的速度作匀速直线运动。运动图线如图所示。



16.7 位移电流

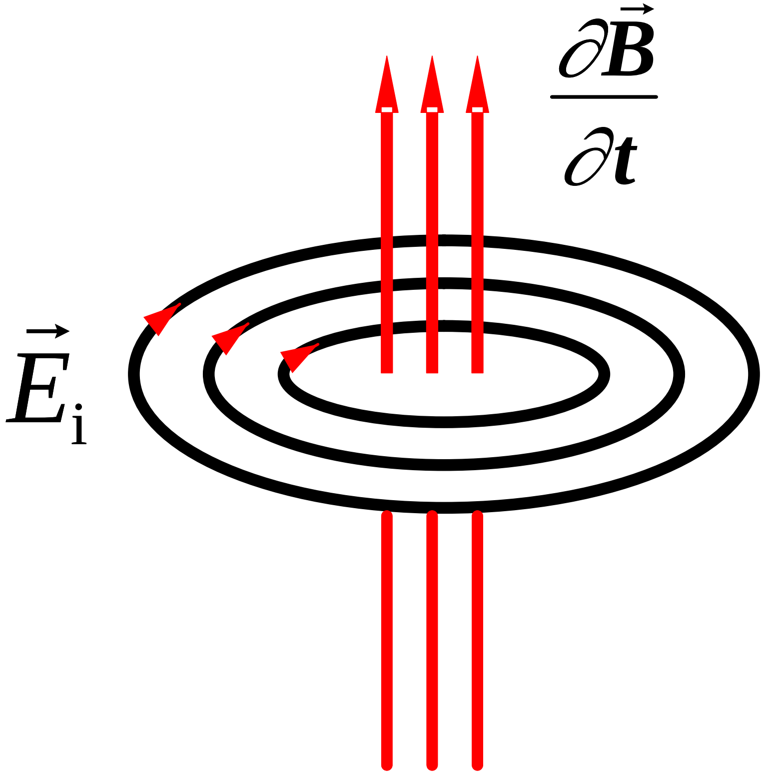
一、变化的电场产生磁场

问题的提出：

变化磁场产生电场

$$\oint_l \vec{E}_{\mathrm{i}} \cdot \mathrm{d}\vec{l} = -\iint_S \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \cdot \mathrm{d}\vec{S}$$

S为以***l*** 为边界的任一曲面



变化电场是否产生磁场？

$$\vec{E}(t) \Rightarrow \vec{B}$$

考虑某一问题的逆问题，有时会取得意想不到的结果。

二、位移电流假设

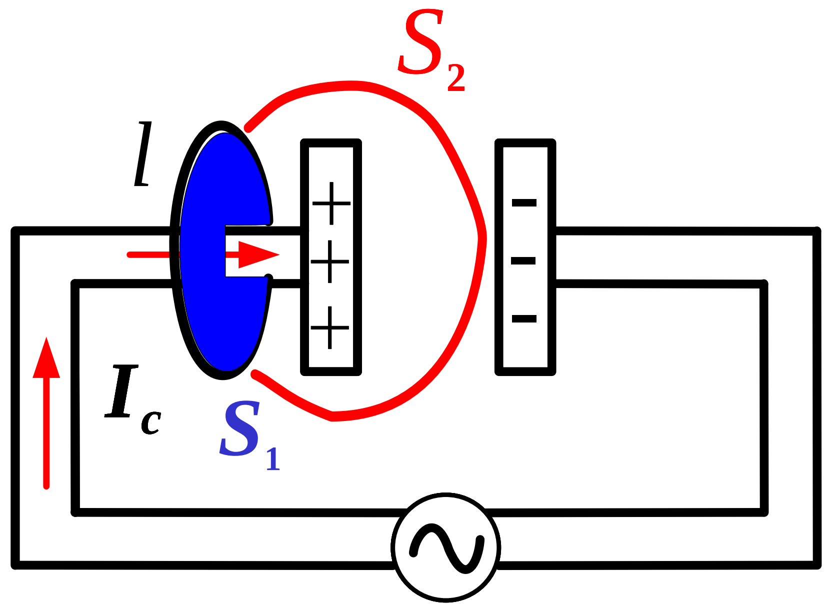
对于稳恒电流

$$\oint_l \vec{H}\cdot \mathrm{d}\vec{l} = I_\mathrm{c} = \iint_S \vec{j}_\mathrm{c}\cdot \mathrm{d}\vec{S}$$

$$\oint_l \vec{H}\cdot \mathrm{d}\vec{l} = ?$$

$$\oint_l \vec{H}\cdot \mathrm{d}\vec{l} = \iint_{S_1} \vec{j}_\mathrm{c}\cdot \mathrm{d}\vec{S} = I_\mathrm{c}$$

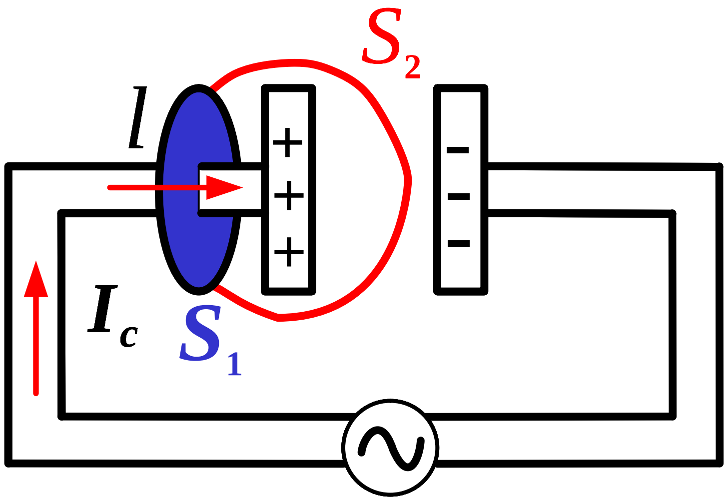
$$\oint_l \vec{H}\cdot \mathrm{d}\vec{l} = \iint_{S_2} \vec{j}_\mathrm{c}\cdot \mathrm{d}\vec{S} = 0$$



非稳恒电流

S_1, S_2 构成闭合曲面

$$q = \oiint_S \vec{D} \cdot \mathrm{d}\vec{S}$$



根据电荷守恒定律

$$I_c = \oiint_S \vec{j}_c \cdot \mathrm{d}\vec{S} = -\frac{\mathrm{d}q}{\mathrm{d}t}$$

$$\oiint_S \vec{j}_c \cdot \mathrm{d}\vec{S} = -\oiint_S \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \cdot \mathrm{d}\vec{S}$$

$$\oiint_S \left(\vec{j}_c + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \right) \cdot \mathrm{d}\vec{S} = 0$$

这个量永远是连续的

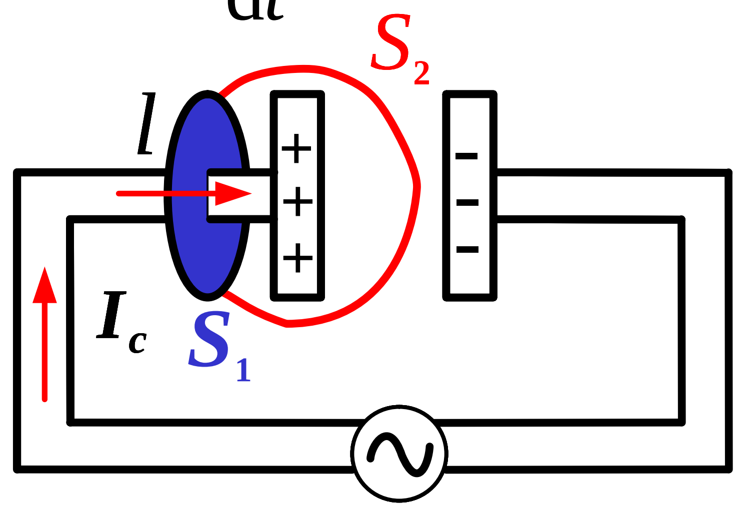
流入闭合面的传导电流等于流出闭合面的

$$\oiint_S \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \cdot \mathrm{d}\vec{S}$$

位移电流密度：$\vec{j}_{\mathrm{d}} = \dfrac{\partial \vec{D}}{\partial t}$ $\quad$ $\displaystyle\oint\!\!\!\!\iint_S \left(\vec{j}_{\mathrm{c}} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \right) \cdot \mathrm{d}\vec{S} = 0$

位移电流：$I_{\mathrm{d}} = \displaystyle\iint_S \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \cdot \mathrm{d}\vec{S} = \frac{\mathrm{d}\Phi}{\mathrm{d}t}$

三、全电流定律



流入闭合面的传导电流等于流出闭合面的位移电流！

在传导电流中断的地方必有等量的位移电流接替它，而在位移电流中断的地方必有等量的传导电流接替它。

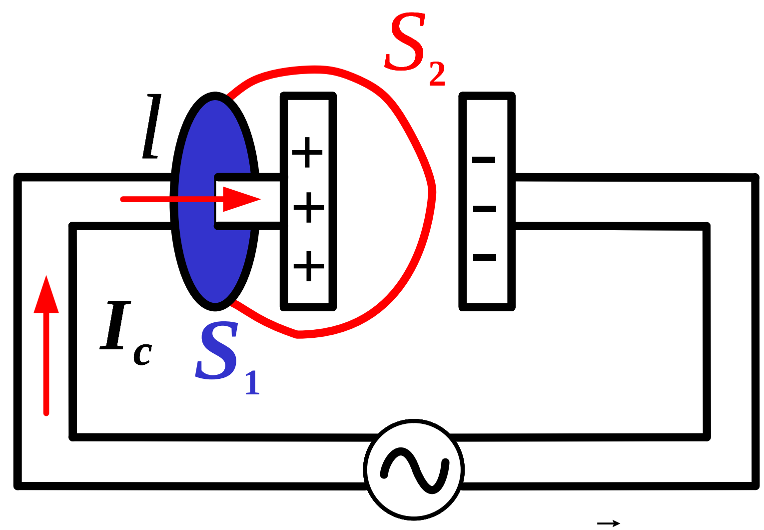
全电流 $\quad I_{\mathrm{t}} = I_{\mathrm{c}} + I_{\mathrm{d}}$

结论：全电流在空间连续不中断。

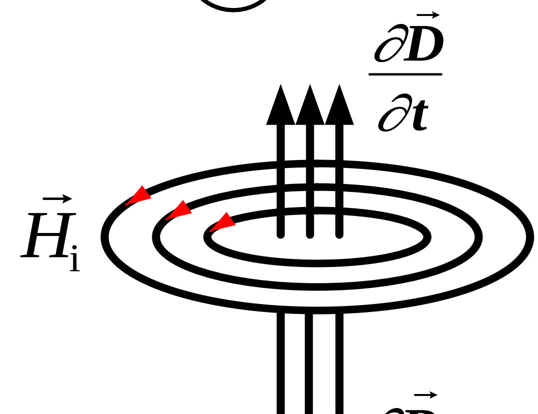
全电流定律

$$\oint_l \vec{H}\cdot \mathrm{d}\vec{l} = I_{\mathrm{t}} = I_{\mathrm{c}} + I_{\mathrm{d}}$$

再来处理前面的问题无矛盾！

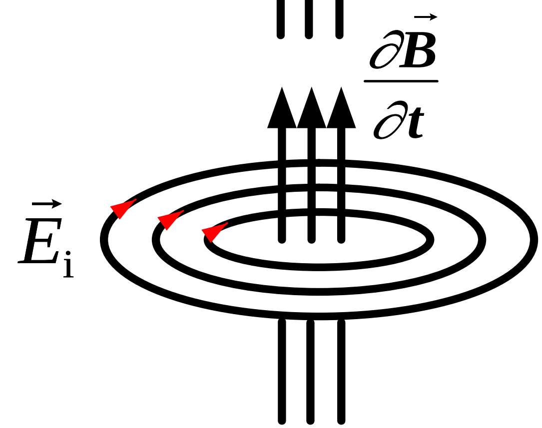


$$\oint_l \vec{H}\cdot \mathrm{d}\vec{l} = I + \iint_S \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}\cdot \mathrm{d}\vec{S}$$

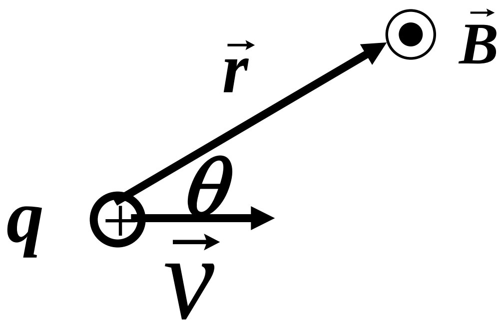


若 $\boldsymbol{I = 0}$ $\quad \oint_l \vec{H}\cdot \mathrm{d}\vec{l} = \iint_S \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}\cdot \mathrm{d}\vec{S}$

对比 $\quad \oint_l \vec{E}_{\mathrm{i}}\cdot \mathrm{d}\vec{l} = -\iint_S \frac{\partial \vec{B}}{\partial t}\cdot \mathrm{d}\vec{S}$



运动电荷产生磁场：



$$\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{q\vec{v}\times\vec{r}}{r^3} \quad (v<<c)$$

考虑变化电场贡献的磁场：

$$\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{q\vec{v}\times\vec{r}(1-\beta^2)}{r^3(1-\beta^2\sin^2\theta)^{3/2}} \qquad \beta = \frac{v}{c}$$

麦克斯韦对电磁学理论的贡献：

1. **提出感应电场概念**
2. **提出位移电流概念**
3. **建立Maxwell方程组**
4. **预言电磁波的存在**

（James Clerk Maxwell 1831----1879)

毕业于剑桥大学数学系

麦克斯韦电磁理论的建立是物理学史上的一个伟大创举。

爱因斯坦的评价:

“自牛顿以来,物理学经历最深刻、最富有成果的、真正的、概念上的变革。”

它开辟了无线电时代的新纪元，对科学技术和人类文明的发展起到了不可估量的作用。

四、位移电流性质

1、只要电场随时间变化，就有相应的位移电流

位移电流的本质是变化的电场

2、位移电流与传导电流是完全不同的概念，仅在产生磁场方面二者等价

I 有电荷流动，通过导体会产生焦耳热

I_d无电荷流动。高频时介质也发热，那是分子反复极化造成的

四、位移电流性质

1. $I_{\mathrm{d}}, I_{\mathrm{c}}$ 本质不同

2. 电介质中 $\vec{D} = \varepsilon_0 \vec{E} + \vec{P}$ $\longrightarrow$ $\vec{j}_{\mathrm{d}} = \varepsilon_0 \dfrac{\partial \vec{E}}{\partial t} + \dfrac{\partial \vec{P}}{\partial t}$

其中：

（1）$\varepsilon_0 \dfrac{\partial \vec{E}}{\partial t}$ —纯粹为电场的变化，可以激发磁场！

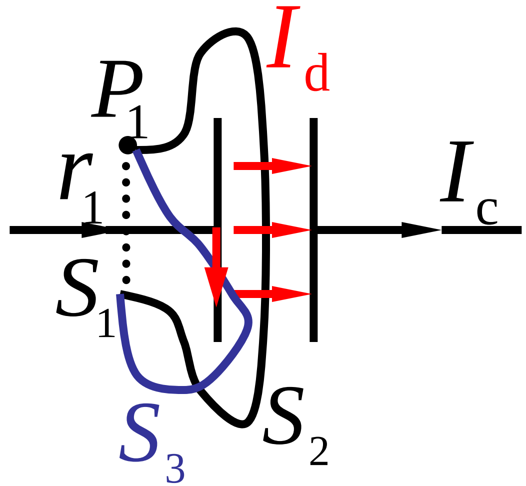
没有热效应！

（2）$\dfrac{\partial \vec{P}}{\partial t}$ —反映介质（分子）极化的变化，也可以激发磁场！

- 对高频电磁场，分子极矩方向高速变化，等效正负电荷位置交替，有热效应——微波炉！
- 但是，与传导电流的热效应（*焦耳热*）完全不同！

[例] 圆形平行板电容器，间距远小于半径，用缓变电流 I_c 对其充电，求磁场分布。

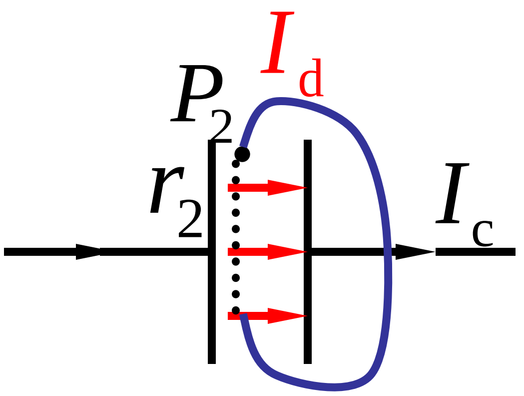
解：$j_d = \dfrac{I_c}{S_0} = \dfrac{I_d}{S_0} \left(S_0 = \pi R^2, I_c = \dfrac{dq}{dt}\right)$



$$\oint_l \vec{H} \cdot d\vec{l} = 2\pi r_1 H_1 = \iint_{S_1} \vec{j}_t \cdot d\vec{S} = I_c$$

$$\Rightarrow H_1 = \frac{I_c}{2\pi r_1}$$

取不同曲面无矛盾！

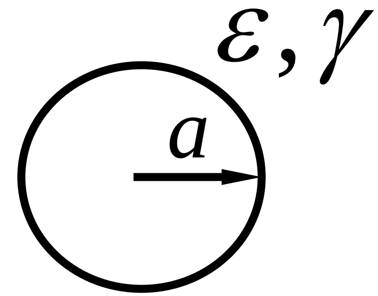


$$\oint_l \vec{H} \cdot d\vec{l} = 2\pi r_2 H_2 = \pi r_2{}^2 \frac{I_c}{S_0}$$

$$\Rightarrow H_2 = \frac{I_c r_2}{2\pi R^2} (r_2 < R)$$

[例] 各向同性均匀无限大介质，已知介电常数及电导率为 ε，γ。内有半径为 a 的导体球，$t=0$，带电 Q，求 H。

解：设 $q(t)$ $\quad U=\dfrac{q}{4\pi\varepsilon a}$



$$R=\int \mathrm{d}R=\int_a^{\infty}\frac{1}{\gamma}\frac{\mathrm{d}r}{4\pi r^2}=\frac{1}{4\pi\gamma a}$$

$$I_{\mathrm{c}}=\frac{U}{R}=\frac{\gamma q}{\varepsilon}=-\frac{\mathrm{d}q}{\mathrm{d}t}$$

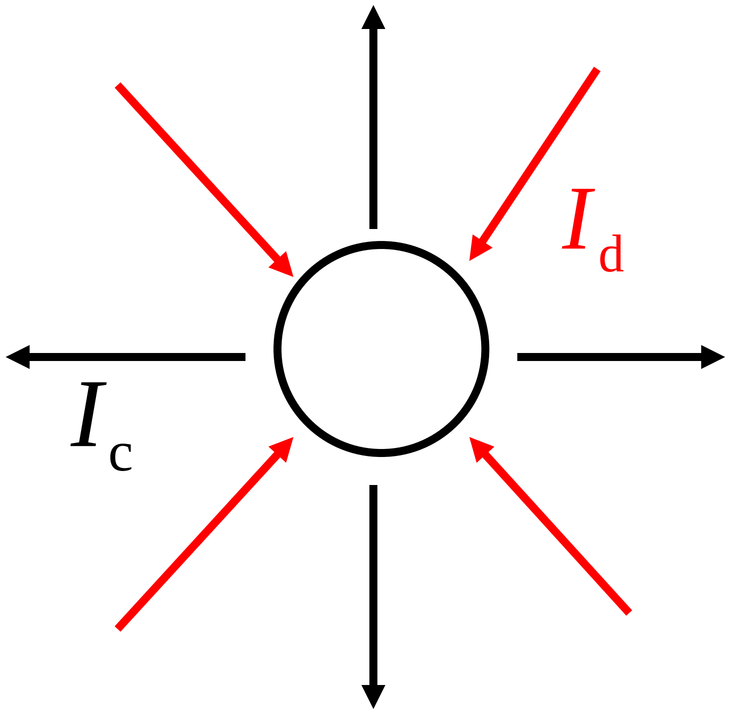
$$\int_Q^q\frac{\mathrm{d}q}{q}=\int_0^t-\frac{\gamma}{\varepsilon}\mathrm{d}t \qquad q=Qe^{-\frac{\gamma}{\varepsilon}t}$$

$$I_{\mathrm{c}} = -\frac{\mathrm{d}q}{\mathrm{d}t} = Q\frac{\gamma}{\varepsilon}e^{-\frac{\gamma}{\varepsilon}t} \qquad D = \frac{q}{4\pi r^2} = \frac{Q}{4\pi r^2}e^{-\frac{\gamma}{\varepsilon}t}$$

$$j_{\mathrm{d}} = -Q\frac{\gamma}{\varepsilon}\frac{1}{4\pi r^2}e^{-\frac{\gamma}{\varepsilon}t} \qquad I_{\mathrm{d}} = j_{\mathrm{d}}4\pi r^2 = -Q\frac{\gamma}{\varepsilon}e^{-\frac{\gamma}{\varepsilon}t}$$

$$\Rightarrow I = I_{\mathrm{c}} + I_{\mathrm{d}} = 0$$

$$\Rightarrow H = 0$$



[例] 已知： q，v ($v<<c$)

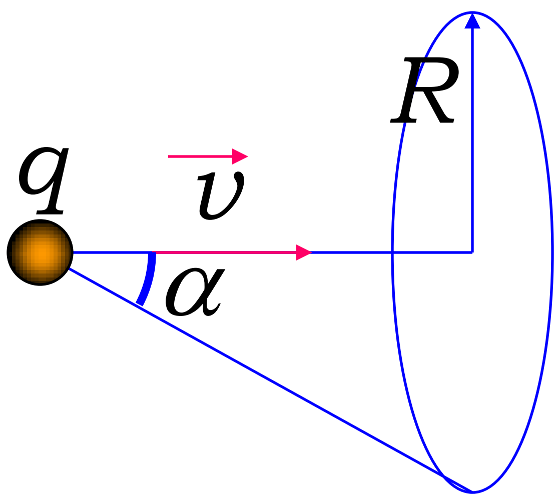
从 $\oint_l \vec{H}\cdot \mathrm{d}\vec{l} = \dfrac{\mathrm{d}\Phi}{\mathrm{d}t}$ 求：H

解：通过平面的电位移通量

$$\Phi = \iint_S \vec{D}\cdot \mathrm{d}\vec{S} = \iint_S \frac{q}{4\pi r^2}\mathrm{d}S$$

$$= \int_0^\alpha \frac{q}{4\pi r^2} 2\pi r^2 \sin\theta \mathrm{d}\theta$$

$$= \frac{q}{2}(1-\cos\alpha)$$

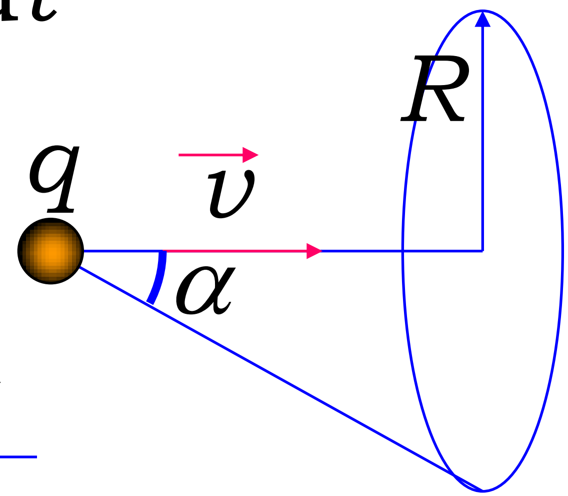


电荷在运动，α 在变化

$$\Phi = \frac{q}{2}(1-\cos\alpha)$$

$$\therefore\ I_d = \frac{\mathrm{d}\Phi}{\mathrm{d}t} = \frac{q}{2}\sin\alpha\frac{\mathrm{d}\alpha}{\mathrm{d}t}$$

$$\because\ r\frac{\mathrm{d}\alpha}{\mathrm{d}t} = \upsilon\sin\alpha$$

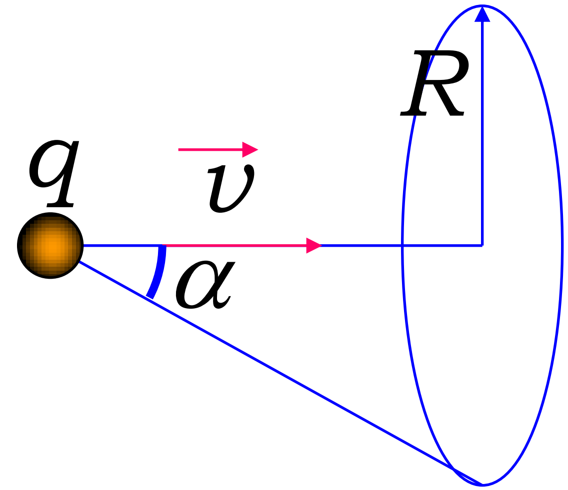


$$\therefore\ \oint_l \vec{H}\cdot\mathrm{d}\vec{l} = \frac{q}{2}\sin\alpha\frac{\mathrm{d}\alpha}{\mathrm{d}t}$$

$$= \frac{q\upsilon}{2r}\sin^2\alpha$$

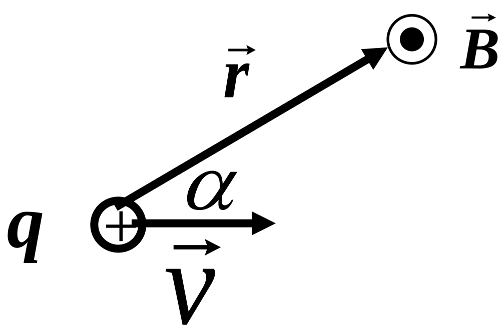
由于对称性在半径为R的平面上H值相同

$$2\pi RH = \frac{qv}{2r}\sin^2\alpha$$



$$R = r\sin\alpha$$

$$H = \frac{qv}{4\pi r^2}\sin\alpha$$



$$\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{q\vec{v}\times\vec{r}}{r^3}$$ **(v<<c)**

16.8 麦克斯韦电磁场方程组

$$\oint\!\!\oint_S \vec{D}\cdot \mathrm{d}\vec{S} = q \qquad \oint\!\!\oint_S \vec{B}\cdot \mathrm{d}\vec{S} = 0$$

$$\oint_l \vec{E}\cdot \mathrm{d}\vec{l} = -\iint_S \frac{\partial \vec{B}}{\partial t}\cdot \mathrm{d}\vec{S} \qquad \oint_l \vec{H}\cdot \mathrm{d}\vec{l} = I + \iint_S \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}\cdot \mathrm{d}\vec{S}$$

对各向同性介质，各量间的关系为：

$$\vec{D} = \varepsilon \vec{E},\ \vec{B} = \mu \vec{H},\ \vec{j} = \gamma \vec{E}$$

当 $\dfrac{\partial \vec{B}}{\partial t} = 0, \dfrac{\partial \vec{D}}{\partial t} = 0$

$$\oint\!\!\!\oint_S \vec{D} \cdot \mathrm{d}\vec{S} = q \qquad \oint\!\!\!\oint_S \vec{B} \cdot \mathrm{d}\vec{S} = 0$$

$$\oint_l \vec{E} \cdot \mathrm{d}\vec{l} = 0 \qquad \oint_l \vec{H} \cdot \mathrm{d}\vec{l} = I$$

静电场和稳恒磁场方程！

当 $q=0, I=0$

$$\oiint_S \vec{D}\cdot \mathrm{d}\vec{S}=0 \qquad \oiint_S \vec{B}\cdot \mathrm{d}\vec{S}=0$$

$$\oint_l \vec{E}\cdot \mathrm{d}\vec{l}=-\iint_S \frac{\partial \vec{B}}{\partial t}\cdot \mathrm{d}\vec{S} \qquad \oint_l \vec{H}\cdot \mathrm{d}\vec{l}=\iint_S \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}\cdot \mathrm{d}\vec{S}$$

这组方程真正反映了电与磁是相互激发、相互依赖的不可分割的统一的整体，即电磁场。

积分形式

$$\oiint_S \vec{D}\cdot d\vec{S}=q$$

$$\oiint_S \vec{B}\cdot d\vec{S}=0$$

$$\oint_l \vec{E}\cdot d\vec{l}=-\iint_S \frac{\partial\vec{B}}{\partial t}\cdot d\vec{S}$$

$$\oint_l \vec{H}\cdot d\vec{l}=I+\iint_S \frac{\partial\vec{D}}{\partial t}\cdot d\vec{S}$$

微分形式

$$\nabla\cdot\vec{D}=\rho$$

$$\nabla\cdot\vec{B}=0$$

$$\nabla\times\vec{E}=-\frac{\partial\vec{B}}{\partial t}$$

$$\nabla\times\vec{H}=\vec{j}+\frac{\partial\vec{D}}{\partial t}$$

Maxwell 方程组,边界条件

$$\vec{E}(\vec{r},t_0),\vec{B}(\vec{r},t_0) \Rightarrow \vec{E}(\vec{r},t),\vec{B}(\vec{r},t)$$

成功理论： 自恰性 预言性

简单性 可量子化